

# Análisis numérico de un problema de contacto viscoelástico en piezoelectricidad

M. BARBOTEU<sup>1</sup>, J.R. FERNÁNDEZ<sup>2</sup>, Y. OUAFIK<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire de Mathématiques et Physique pour les Systèmes (MEPS), Université de Perpignan, Bâtiment B3, case courrier 12, 52 Avenue Paul Alduy, 66860 Perpignan, Francia. E-mails:*

*barboteu@univ-perp.fr, youssef.ouafik@univ-perp.fr.*

<sup>2</sup> *Dpto. de Matemática Aplicada, Universidade de Santiago de Compostela, Facultade de Matemáticas, Campus Sur s/n, 15782 Santiago de Compostela. E-mail: jramon@usc.es.*

**Palabras clave:** Piezoelectricidad, Viscoelasticidad, Respuesta normal, Estimaciones del error, Simulaciones numéricas.

## Resumen

En este trabajo consideramos un problema de contacto sin rozamiento entre un cuerpo electro-viscoelástico y un obstáculo deformable. La ley constitutiva electro-viscoelástica se utiliza para modelar el material y, para el contacto, la clásica condición de contacto de tipo respuesta normal. La formulación variacional de este problema se escribe como un problema acoplado de una ecuación variacional no lineal, de primer orden en tiempo, para el campo de desplazamientos, y una ecuación variacional lineal para el potencial eléctrico. Entonces, presentamos aproximaciones discretas basadas en el método de los elementos finitos para aproximar la variable espacial y un esquema de Euler para discretizar la derivada temporal. Demostramos un teorema general de estimación del error del que, bajo condiciones de regularidad adicionales, deducimos la convergencia lineal de estas aproximaciones. Finalmente, presentamos algunos ejemplos bidimensionales que demuestran la eficacia del algoritmo.

## 1. Introducción

En este trabajo estudiamos, desde el punto de vista numérico, un problema de contacto cuasiestático sin rozamiento entre un cuerpo viscoelástico y un obstáculo deformable, incluyendo los efectos piezoeléctricos.

La piezoelectricidad es la capacidad de ciertos cristales, como el cuarzo (también algunos materiales cerámicos ( $\text{BaTiO}_3$ ,  $\text{KNbO}_3$ ,  $\text{LiNbO}_3$ , etc) o incluso los huesos humanos) para producir corriente eléctrica cuando se encuentran sometidos a esfuerzos internos. A

nivel nanoscópico, el fenómeno piezoeléctrico aparece por una distribución de carga no uniforme en las células. Cuando el cristal se deforma, las centros de carga positiva y negativa se desplazan debido a la diferencia de potencial, de tal forma que el cristal permanece eléctricamente neutro. Sin embargo, la diferencia en el desplazamiento de la carga produce una polarización eléctrica dentro del cristal.

El efecto piezoeléctrico se caracteriza por el acoplamiento entre las propiedades mecánicas y eléctricas del material: se ha observado que la aparición de cargas eléctricas en algunos cristales era debida a la acción de fuerzas volúmicas y/o superficiales y, recíprocamente, la acción del potencial eléctrico provocaba deformaciones o tensiones dentro del cuerpo. Este tipo de materiales aparece muchas veces en la industria como interruptores en electroacústica o equipos de medición (un ejemplo son los conocidos “thermistor”).

En los últimos cincuenta años se han desarrollado diferentes modelos para describir esta interacción entre los campos eléctricos y mecánicos (véanse, por ejemplo, [1, 5, 7, 10, 11] y las referencias allí citadas). Además, recientemente se han estudiado algunos problemas de contacto que incluían materiales electro-elásticos ([2, 9]) o electro-viscoelásticos ([8]).

## 2. Problema mecánico y formulación variacional

Denotemos por  $\mathbb{S}^d$  el espacio de tensores de segundo orden simétricos en  $\mathbb{R}^d$  y por “ $\cdot$ ” y  $\|\cdot\|$  los productos interiores y las normas euclídeas en ambos espacios.

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ , un dominio ocupado por un cuerpo electro-viscoelástico con frontera  $\Gamma = \partial\Omega$ . Denotamos por  $\boldsymbol{\nu}$  el vector unitario normal y exterior a  $\Gamma$  y suponemos que esta frontera se descompone en tres partes medibles y disjuntas  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_F$  y  $\Gamma_C$ , por un lado, y en dos partes medibles y disjuntas  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_B$ , por el otro lado, tales que  $\text{med}(\Gamma_D) > 0$ ,  $\text{med}(\Gamma_A) > 0$ , y  $\Gamma_C \subseteq \Gamma_B$ . Finalmente, sea  $[0, T]$ ,  $T > 0$ , el intervalo temporal donde estudiaremos la evolución del cuerpo (véase la Figura 1).

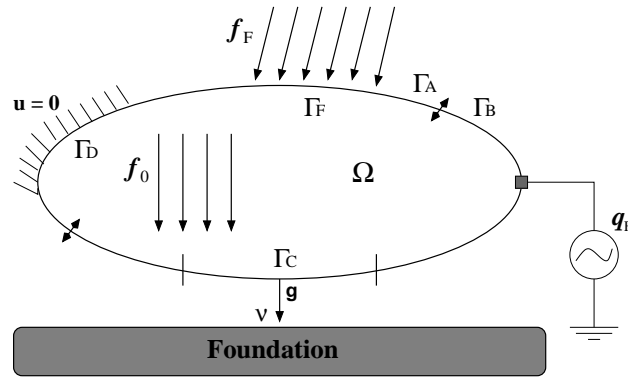


Figura 1: Un cuerpo electro-viscoelástico en contacto con un obstáculo deformable.

Denotamos por  $\mathbf{u}$  el campo de desplazamientos,  $\boldsymbol{\sigma}$  el tensor de tensiones,  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}))_{i,j=1}^d$  el tensor de deformaciones linealizado dado por

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

y  $\varphi$  el potencial eléctrico.

El cuerpo se supone electro-viscoelástico y satisfaciendo la siguiente ley constitutiva ([3, 8]):

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi),$$

donde  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son los tensores de cuarto orden de viscosidad y elasticidad, respectivamente,  $\mathbf{E}(\varphi) = (E_i(\varphi))_{i=1}^d$  representa el campo eléctrico definido por  $E_i(\varphi) = -\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , y  $\mathcal{E}^* = (e_{ijk}^*)_{i,j,k=1}^d$  denota el traspuesto del tensor de tercer orden piezoeléctrico  $\mathcal{E} = (e_{ijk})_{i,j,k=1}^d$ .

Siguiendo [1] se ha utilizado la siguiente ley constitutiva para el potencial eléctrico:

$$\mathbf{D} = \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{E}(\varphi),$$

donde  $\mathbf{D}$  es el campo de desplazamientos eléctricos y  $\beta$  el tensor de permitividad eléctrica.

Sean  $\mathbf{f}_0$  la densidad de fuerzas volúmicas que actúan en  $\Omega$  y  $q_0$  la densidad de volumen de las cargas eléctricas libres.

En la parte de la frontera  $\Gamma_D$  suponemos que el cuerpo está fijado (y así el desplazamiento se anula allí), mientras que en  $\Gamma_F$  actúa una densidad de fuerzas superficiales denotada por  $\mathbf{f}_F$ . En la parte  $\Gamma_C$  el cuerpo puede entrar en contacto con un obstáculo deformable. Siguiendo [6], hemos utilizado la siguiente condición de contacto (conocida como condición de respuesta normal):

$$-\sigma_\nu = p(u_\nu - g) \quad \text{en } \Gamma_C \times (0, T),$$

donde  $\sigma_\nu = \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu}$  es la tensión normal,  $u_\nu = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nu}$  denota el desplazamiento normal,  $g$  representa la distancia entre el cuerpo y el obstáculo medida en la dirección del vector normal exterior y  $p$  es una función constitutiva dada. Finalmente, suponemos que el contacto es sin rozamiento y, por tanto,  $\boldsymbol{\sigma}_\tau = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_\nu\boldsymbol{\nu} = \mathbf{0}$ .

Para las condiciones frontera del potencial eléctrico, suponemos que  $\Omega$  está sometido a un potencial eléctrico  $\varphi_A$  prescrito en  $\Gamma_A$  y a una densidad de fuerzas superficiales  $q_F$  en  $\Gamma_B$ .

El problema mecánico se escribe, entonces, de la forma siguiente:

**Problema P.** *Encontrar el campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$ , el tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{S}^d$ , el potencial eléctrico  $\varphi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$  y el campo de desplazamientos eléctricos  $\mathbf{D} : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^d$  tales que:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) - \mathcal{E}^*\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{D} &= \mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \beta\mathbf{E}(\varphi) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \text{Div } \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f}_0 &= \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \text{div } \mathbf{D} &= q_0 \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{en } \Gamma_D \times (0, T), \\ \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\nu} &= \mathbf{f}_F \quad \text{en } \Gamma_F \times (0, T), \\ \boldsymbol{\sigma}_\tau &= \mathbf{0}, \quad -\sigma_\nu = p(u_\nu - g) \quad \text{en } \Gamma_C \times (0, T), \\ \varphi &= \varphi_A \quad \text{en } \Gamma_A \times (0, T), \\ \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\nu} &= q_F \quad \text{en } \Gamma_B \times (0, T), \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 \quad \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{u}_0$  representa una condición inicial para el campo de desplazamientos y, en la ecuación de equilibrio para el campo de desplazamientos, hemos suprimido los efectos de inercia porque consideramos el problema cuasiestático.

Para poder escribir la formulación variacional del Problema  $P$ , definimos los siguientes espacios variacionales  $V$ ,  $Q$  y  $W$ , y el conjunto convexo  $W_A$ :

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^d; \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D\}, \\ Q &= \{\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^d \in [L^2(\Omega)]^{d \times d}; \tau_{ij} = \tau_{ji}, i, j = 1, \dots, d\}, \\ W &= \{\psi \in H^1(\Omega); \psi = 0 \text{ en } \Gamma_A\}, \\ W_A &= \{\psi \in H^1(\Omega); \psi = \varphi_A \text{ en } \Gamma_A\}, \end{aligned}$$

y denotamos por  $H = [L^2(\Omega)]^d$ .

Suponemos que los tensores de viscosidad y permitividad,  $\mathcal{A}$  y  $\beta$ , son simétricos, acotados y definidos positivo, que los tensores de elasticidad y piezoelectricidad,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{E}$ , son simétricos y acotados, que la función de respuesta normal  $p$  es de Lipschitz, positiva y monótona, y, finalmente, que las fuerzas volúmicas y superficiales son continuas en tiempo y que la función distancia  $g$  es positiva.

Usando el Teorema de Riesz, definimos las siguientes formas lineales:

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}(t), \mathbf{w})_V &= \int_{\Omega} \mathbf{f}_0(t) \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_F} \mathbf{f}_F(t) \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in V, \\ (q(t), \psi)_W &= \int_{\Omega} q_0(t)\psi \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_B} q_F(t)\psi \, d\Gamma, \quad \forall \psi \in W. \end{aligned}$$

Sea  $j : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  el funcional de respuesta normal dado por:

$$j(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma_C} p(u_\nu - g)v_\nu \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V,$$

donde, para todo  $\mathbf{v} \in V$ , denotamos por  $v_\nu = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\nu}$ .

Aplicando la fórmula de Green y las condiciones frontera enunciadas en el Problema  $P$ , obtenemos la siguiente formulación variacional.

**Problema PV.** *Encontrar un campo de desplazamientos  $\mathbf{u} : [0, T] \rightarrow V$  y un potencial eléctrico  $\varphi : [0, T] \rightarrow W_A$  tales que  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  y para todo  $t \in [0, T]$ :*

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}\boldsymbol{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q + (\mathcal{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q + (\mathcal{E}\nabla\varphi(t), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}))_Q + j(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}) \\ = (\mathbf{f}(t), \mathbf{w})_V, \quad \forall \mathbf{w} \in V, \\ (\beta\nabla\varphi(t), \nabla\psi)_H - (\mathcal{E}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}(t)), \nabla\psi)_H = (q(t), \psi)_W, \quad \forall \psi \in W. \end{aligned}$$

Bajo las hipótesis anteriores, utilizando resultados clásicos de ecuaciones variacionales no lineales parabólicas y ecuaciones en derivadas parciales, en [8] se demostró que el Problema  $PV$  tiene una única solución con la regularidad:

$$\mathbf{u} \in C^1([0, T]; V), \quad \varphi \in C([0, T]; W_A).$$

### 3. Aproximaciones discretas: estimaciones del error

Para simplificar, suponemos que  $\varphi_A = 0$  (y entonces  $W_A = W$ ). La discretización del Problema  $PV$  se realiza en dos pasos. En primer lugar, consideramos dos espacios de

dimensión finita  $V^h \subset V$  y  $W^h \subset W$  aproximando los espacios variacionales, respectivamente.  $h > 0$  denota el parámetro de discretización espacial.

En segundo lugar discretizamos las derivadas temporales. Definimos una partición uniforme del intervalo  $[0, T]$ , denotada por  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , y sea  $k$  el paso de tiempo,  $k = T/N$ . Para una función continua, denotamos por  $f_n = f(t_n)$ .

Utilizando un esquema de Euler, obtenemos el siguiente problema discreto.

**Problema  $PV^{hk}$ .** *Encontrar un campo de desplazamientos discreto  $\mathbf{u}^{hk} = \{\mathbf{u}_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset V^h$  y un potencial eléctrico discreto  $\varphi^{hk} = \{\varphi_n^{hk}\}_{n=0}^N \subset W^h$  tales que  $\mathbf{u}_0^{hk} = \mathbf{u}_0^h$  y para todo  $n = 1, \dots, N$ :*

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A}\varepsilon((\mathbf{u}_n^{hk} - \mathbf{u}_{n-1}^{hk})/k), \varepsilon(\mathbf{w}^h))_Q + (\mathcal{B}\varepsilon(\mathbf{u}_n^{hk}), \varepsilon(\mathbf{w}^h))_Q + (\mathcal{E}^*\nabla\varphi_n^{hk}, \varepsilon(\mathbf{w}^h))_Q \\ & \quad + j(\mathbf{u}_n^{hk}, \mathbf{w}^h) = (\mathbf{f}_n, \mathbf{w}^h)_V, \quad \forall \mathbf{w}^h \in V^h, \\ & (\beta\nabla\varphi_n^{hk}, \nabla\psi^h)_H - (\mathcal{E}\varepsilon(\mathbf{u}_n^{hk}), \nabla\psi^h)_H = (q_n, \psi^h)_W, \quad \forall \psi^h \in W^h, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{u}_0^h$  es una aproximación adecuada de la condición inicial  $\mathbf{u}_0$ .

Utilizando resultados clásicos de ecuaciones variacionales y teniendo en cuenta las hipótesis anteriores se obtiene fácilmente que el Problema  $PV^{hk}$  tiene una única solución.

El interés de esta sección se centra en obtener estimaciones de los errores numéricos  $\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V$  y  $\|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W$ . Se tiene el siguiente resultado general de estimación del error.

**Teorema 1.** *Bajo las hipótesis enunciadas en la sección anterior, sean  $(\mathbf{u}, \varphi)$  y  $(\mathbf{u}^{hk}, \varphi^{hk})$  las soluciones de los problemas  $PV$  y  $PV^{hk}$ , respectivamente. Entonces se tiene la siguiente estimación del error para todos  $\mathbf{w}^h = \{\mathbf{w}_j^h\}_{j=1}^N \subset V^h$  y  $\psi^h = \{\psi_j^h\}_{j=1}^N \subset W^h$ :*

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V^2 + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W^2 \} \leq c \left( \max_{1 \leq n \leq N} \|\varphi_n - \psi_n^h\|_W^2 \right. \\ & \quad + \sum_{j=1}^N k \left[ \|\dot{\mathbf{u}}_j - (\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_{j-1})/k\|_V^2 + \|\mathbf{u}_j - \mathbf{w}_j^h\|_V^2 \right] + \max_{1 \leq n \leq N} \|\mathbf{u}_n - \mathbf{w}_n^h\|_V^2 \\ & \quad \left. + \|\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}_0^h\|_V^2 + \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{N-1} \|\mathbf{u}_j - \mathbf{w}_j^h - (\mathbf{u}_{j+1} - \mathbf{w}_{j+1}^h)\|_V^2 \right). \end{aligned}$$

La estimación precedente es la base para el análisis del orden de convergencia del algoritmo. Por ejemplo, supongamos que  $\Omega$  es un dominio poligonal y denotemos por  $\mathcal{T}^h$  una triangulación tipo elementos finitos regular de  $\Omega$  compatible con la partición de la frontera  $\Gamma = \partial\Omega$  en  $\Gamma_D$ ,  $\Gamma_F$  y  $\Gamma_C$  por un lado, y en  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_B$ , por el otro.

Definimos los espacios de elementos finitos  $V^h$  y  $W^h$  como:

$$\begin{aligned} V^h &= \{ \mathbf{w}^h \in [C(\bar{\Omega})]^d ; \mathbf{w}_{|_{Tr}}^h \in [P_1(Tr)]^d \quad Tr \in \mathcal{T}^h, \quad \mathbf{w}^h = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D \}, \\ W^h &= \{ \psi^h \in C(\bar{\Omega}) ; \psi_{|_{Tr}}^h \in P_1(Tr) \quad Tr \in \mathcal{T}^h, \quad \psi^h = 0 \text{ en } \Gamma_A \}, \end{aligned}$$

y construimos la aproximación discreta de la condición inicial  $\mathbf{u}_0$  en la forma  $\mathbf{u}_0^h = \Pi^h \mathbf{u}_0$ , donde  $\Pi^h = (\pi^h)_{i=1}^d : [C(\bar{\Omega})]^d \rightarrow V^h$ , y  $\pi^h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow B^h$  es el operador de interpolación por elementos finitos usual.

En estas condiciones, podemos demostrar que bajo las condiciones de regularidad adicionales:

$$\mathbf{u} \in H^2(0, T; V) \cap C([0, T]; [H^2(\Omega)]^d), \quad \varphi \in C([0, T]; H^2(\Omega)),$$

el problema  $PV^{hk}$  es linealmente convergente; es decir, existe  $c > 0$ , independiente de  $h$  y  $k$ , tal que:

$$\max_{1 \leq n \leq N} \{ \|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_n^{hk}\|_V + \|\varphi_n - \varphi_n^{hk}\|_W \} \leq c(h + k).$$

**Observación 1.** *La resolución numérica del Problema  $PV^{hk}$  se realiza en dos pasos. En primer lugar se utiliza una penalización para modelar la ley de respuesta normal y, en segundo lugar, se emplea el método de Newton para resolver el problema no lineal, acoplado el algoritmo con un esquema predictor-corrector.*

## 4. Resultados numéricos

Como un ejemplo bidimensional del Problema  $P$ , consideramos el cuerpo  $\Omega$  con frontera  $\Gamma$  que puede entrar en contacto con un sólido deformable (véase la situación física descrita en el lado izquierdo de la Figura 2). Para describir la geometría, fijemos los puntos  $P_1 = (0, 1)$ ,  $P_2 = (1, 0)$ ,  $P_3 = (3, 1)$ ,  $P_4 = (1, 5, 1)$ ,  $P_5 = (1, 1, 5)$  y  $P_6 = (1, 4)$ . Definimos las fronteras  $\Gamma_B = \Gamma_C = [P_1, P_2]$ ,  $\Gamma_D = [P_4, P_5]$  y  $\Gamma_F = \Gamma \setminus (\Gamma_C \cup \Gamma_D)$ ;  $\{X_2, X_3\}$  denota la base ortonormal canónica. Además, utilizamos las siguientes constantes de viscosidad y elasticidad:

Elasticidad (GPa)				viscosidad (GPa · s)			
$b_{22}$	$b_{23}$	$b_{33}$	$b_{44}$	$a_{22}$	$a_{23}$	$a_{33}$	$a_{44}$
210	105	211	42.5	21	10.5	21.1	4.25

Tabla 1: Coeficientes de viscosidad y elasticidad del material.

Piezoelectricidad ( $C/m^2$ )			Permitividad ( $C^2/Nm^2$ )	
$e_{32}$	$e_{33}$	$e_{24}$	$\beta_{22}/\epsilon_0$	$\beta_{33}/\epsilon_0$
-0.61	1.14	-0.59	-8.3	-8.8

Tabla 2: Coeficientes piezoeléctricos del material.

Supongamos que el cuerpo está fijado en  $\Gamma_D$ . En las simulaciones hemos empleado los siguientes datos:

$$\mathbf{f}_F = \mathbf{0} N/m^2, \quad \mathbf{f}_0 = \mathbf{0} N/m^3, \quad q_0 = 0 C/m^3, \quad g = 10^{-4} m, \quad T = 10 s, \quad \mathbf{u}_0 = \mathbf{0} m,$$

$$\varphi_A = \begin{cases} 20 V & \text{en } [P_3, P_4], \\ 0 V & \text{en } [P_5, P_6]. \end{cases}$$

Este problema nos permitirá mostrar que la aparición de deformaciones y tensiones en el cuerpo es debida a la acción del campo eléctrico.

El intervalo de tiempo se discretiza con una partición uniforme ( $k = 0,001$ ) y el cuerpo se discretiza con el mallado tipo elementos finitos que se puede observar en la Figura 2 (derecha).

Como podemos ver en la Figura 3, la acción de la diferencia del potencial eléctrico entre  $[P_3, P_4]$  y  $[P_5, P_6]$  induce una deformación en el cuerpo. Esto hace que este entre

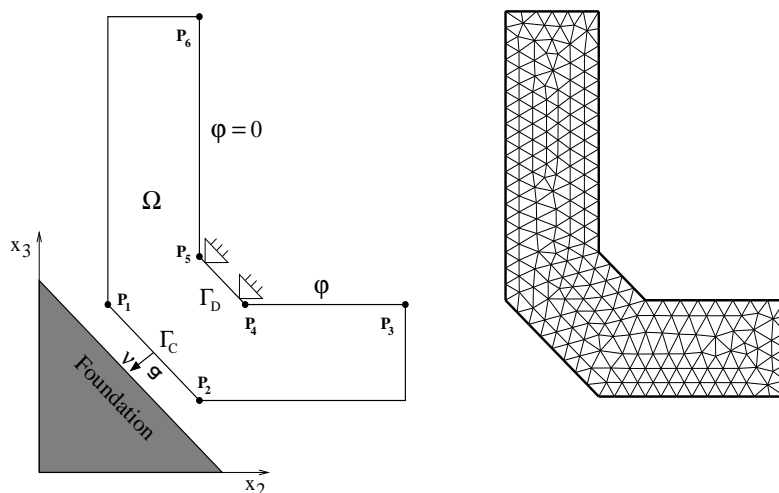


Figura 2: Problema físico (izquierda) y mallado tipo elementos finitos (derecha).

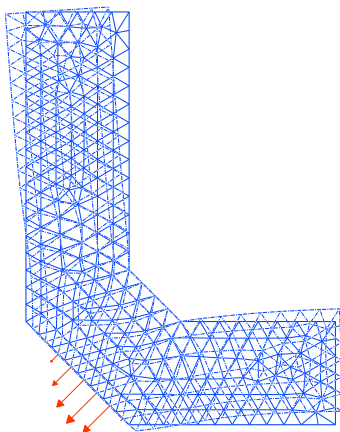


Figura 3: Mallado tipo elementos finitos, en los instantes inicial y final, y fuerzas de contacto.

en contacto con el obstáculo en  $\Gamma_C$ . Además, observamos que algunos nodos de contacto están en deslizamiento y las fuerzas de contacto se orientan en la normal saliente a  $\Gamma_C$  (ya que no hay rozamiento). Además, la Figura 4 muestra la distribución del campo de desplazamientos eléctricos y el potencial eléctrico (izquierda) y la norma von Mises de las tensiones en la configuración deformada del cuerpo. Podemos apreciar que existe una cierta correspondencia entre la distribución de estos desplazamientos y la norma von Mises de las tensiones. Esto es debido a que los mayores valores del campo eléctrico se localizan en las zonas donde las tensiones son mayores.

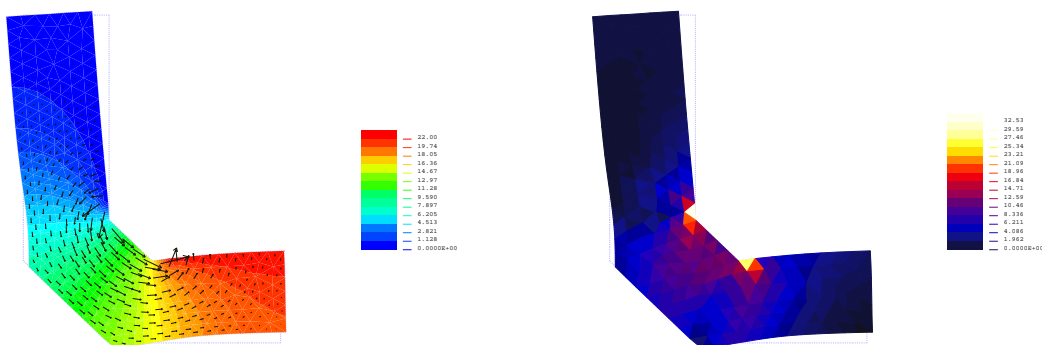


Figura 4: Campo de desplazamientos eléctricos (flechas) y potencial eléctrico (isovalores) en la configuración deformada (izquierda) y norma von Mises del campo de tensiones (derecha).

## Agradecimientos

El trabajo de J.R. Fernández fue parcialmente financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia (Proyecto MTM2006-13981).

## Referencias

- [1] R.C. Batra y J.S. Yang. *Saint-Venant's principle in linear piezoelectricity*. J. Elasticity, **38** (1995), 209–218.
- [2] P. Bisegna, F. Lebon y F. Maceri. *The unilateral frictional contact of a piezoelectric body with a rigid support*. Contact mechanics (Praia da Consolação, 2001), 347–354, Solid Mech. Appl., **103**, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
- [3] G. Duvaut y J.L. Lions. *Inequalities in mechanics and physics*. Springer Verlag, Berlin, 1976.
- [4] S. Hübner, A. Matei y B.I. Wohlmuth. *A mixed variational formulation and an optimal a priori error estimate for a frictional contact problem in elasto-piezoelectricity*. Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie, **48**(96) (2005), 209–232.
- [5] T. Ideka, *Fundamentals of piezoelectricity*, Oxford University Press, Oxford, 1990.
- [6] A. Klarbring, A. Mikelić y M. Shillor. *Frictional contact problems with normal compliance*. Internat. J. Engrg. Sci., **26** (1988), 811–832.
- [7] R.D. Mindlin. *Elasticity, piezoelectricity and crystal lattice dynamics*. J. Elasticity, **4** (1972), 217–280.
- [8] M. Sofonea y E.-H. Essoufi. *Quasistatic frictional contact of a viscoelastic piezoelectric body*. Adv. Math. Sci. Appl., **14**(1) (2004), 25–40.
- [9] M. Sofonea y Y. Ouafik. *A piezoelectric contact problem with normal compliance*. Appl. Math. **32** (2005), 425–442.
- [10] R.A. Toupin. *The elastic dielectrics*. J. Rational Mech. Anal., **5** (1956), 849–915.
- [11] N. Turbé y G.A. Maugin. *On the linear piezoelectricity of composite materials*. Math. Methods Appl. Sci., **14** (6) (1991), 403–412.