

Análisis numérico de soluciones autosemejantes de un flujo dispersivo de curvas planas

FRANCISCO DE LA HOZ¹

¹ *Dpto. de Matemática Aplicada, Estadística e Investigación Operativa,
Facultad de Ciencia y Tecnología,
Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea,
Apto. 644, 48080 Bilbao (Spain).
E-mail: francisco.delahoz@ehu.es.*

Palabras clave: Flujo geométrico de la KdV, estudio numérico

Resumen

En [2], Perelman y Vega estudian el siguiente flujo geométrico de curvas planas reversible en el tiempo, que puede desarrollar singularidades en tiempo finito

$$\begin{cases} z_t = -z_{sss} + \frac{3}{2}\bar{z}_s z_{ss}^2, \\ |z_s|^2 = 1, \quad t \neq 0. \end{cases} \quad (1)$$

con s el parámetro de arco. Denotando por k la curvatura de z , esta satisface la mKdV

$$k_t + k_{sss} + \frac{3}{2}k^2 k_s = 0. \quad (2)$$

Perelman y Vega consideran soluciones autosemejantes de (2) de la forma

$$k(s, t) = \frac{2}{(3t)^{1/3}} u\left(\frac{s}{(3t)^{1/3}}\right), \quad t > 0; \quad (3)$$

lo cual conduce a estudiar la EDO

$$u_{xx} - xu + 2u^3 = \mu, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

En esta comunicación, consideraremos $\mu = 0$. Aunque necesitamos conocer $u(0)$ y $u_x(0)$, para resolver (4), imponiendo $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$, los datos iniciales para (4) forman una familia uniparamétrica, que obtendremos numéricamente. Además, daremos evidencia numérica de que las soluciones de (4) correspondientes satisfacen

$$-\frac{\pi}{2} \leq \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dx \leq \frac{\pi}{2}. \quad (5)$$

Por (3), a cada u le corresponde un dato inicial z para (1) en $t = 1$. Considerando datos iniciales sin intersecciones, mostraremos numéricamente su evolución, así como la formación de una singularidad en $t = 0$.

1. Introducción

En esta comunicación, consideraremos el siguiente flujo geométrico reversible en el tiempo de curvas planas que puede desarrollar singularidades en tiempo finito

$$\begin{cases} z_t = -z_{sss} + \frac{3}{2}\bar{z}_s z_{ss}^2, \\ |z_s|^2 = 1, \quad t \neq 0, \end{cases} \quad (1)$$

con s el parámetro de arco. Este flujo es reversible en el tiempo porque si $z(s, t)$ es solución, también lo es $z(-s, -t)$. Dicho flujo, fue obtenido por Goldstein y Petrich [1] al considerar la evolución de un parche de vorticidad en el plano sujeto a las ecuaciones de Euler. También es conocido como el flujo geométrico de la KdV.

La evolución del flujo viene determinada por la evolución de su curvatura, $k(s, t)$, salvo un movimiento rígido que varía con el tiempo y que será fijado por las condiciones iniciales. Dicha curvatura satisface la KdV modificada

$$k_t + k_{sss} + \frac{3}{2}k^2 k_s = 0; \quad (2)$$

obsérvese que el último sumando es una derivada perfecta

$$k_t = -k_{sss} - \frac{1}{2}(k^3)_s; \quad (3)$$

por lo cual

$$\int_{-\infty}^{+\infty} k(s, t) ds \quad (4)$$

es una cantidad conservada. Asimismo, definiendo

$$\theta(s, t) = \theta(-\infty, s) + \int_{-\infty}^s k(s', t) ds', \quad (5)$$

la ecuación (3) se convierte en

$$\theta_t(s, t) = -\theta_{sss}(s, t) - \frac{1}{2}(\theta_s)^3(s, t). \quad (6)$$

Siguiendo a Perelman y Vega [2] a lo largo de esta comunicación, consideraremos soluciones autosemejantes de la KdV modificada de la forma

$$k(s, t) = \frac{2}{(3t)^{1/3}} u\left(\frac{s}{(3t)^{1/3}}\right), \quad t > 0. \quad (7)$$

lo que nos lleva a estudiar la EDO [2]

$$u_{xx} - xu + 2u^3 = \mu, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad (8)$$

con μ una constante de integración. En esta comunicación consideraremos el caso $\mu = 0$.

A partir de $u(x)$ obtendremos $k(s, 1)$ y, por tanto, $\theta(s, 1)$, que utilizaremos como dato inicial para (6), calculando la evolución numérica de $\theta(s, t)$, yendo hacia atrás en el tiempo.

Es inmediato obtener $z(s, t)$ a partir de $\theta(s, t)$, haciendo $z_s(s, t) = \exp(i\theta(s, t))$, salvo un movimiento rígido que viene determinado por

$$z(0, t) = -2(3t)^{1/3} [iu'(0) + u^2(0)] z_s(0, t), \quad (9)$$

con $z_s(0, t)$ una constante de módulo unidad que no depende del tiempo. Tanto $\theta(s, t)$ como $k(s, t)$ y $z(s, t)$ desarrollarán una singularidad en $t = 0$.

Debido a que las $u(x)$ consideradas, que satisfacen $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) \rightarrow 0$, forman una familia uniparamétrica, tenemos que las $z(s, t)$ correspondientes son también familias uniparamétricas de soluciones de (1).

2. Integración de $u(x)$

Volvamos a

$$u_{xx} = xu - 2u^3, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Para integrar esta ordinaria de segundo orden, la reescribimos como

$$\begin{cases} u_x = v, \\ v_x = xu - 2u^3, \end{cases} \quad (11)$$

y utilizamos un Runge-Kutta de cuarto orden, necesitando dos datos iniciales $u(0)$ y $u_x(0) = v(0)$.

Si u es solución de (10), entonces, para x negativos suficientemente grandes, $u(x)$ tiene el mismo comportamiento oscilatorio que las soluciones de la ecuación de Airy $u_{xx} - xu_x = 0$. Asimismo, cuando $x \rightarrow \infty$, las soluciones de (10) se caracterizan por ser muy sensibles respecto a pequeñas variaciones de datos iniciales, que pueden hacer que pasemos de soluciones $u(x) \rightarrow \infty$, cuando $x \rightarrow \infty$ a soluciones $u(x) \rightarrow -\infty$, cuando $x \rightarrow \infty$ y a la inversa. Consideremos, por ejemplo, $u(0) = 0.024$, así como cuatro elecciones posibles de $u_x(0)$ e integremos numéricamente (10).

Las soluciones para $u_x(0) = -0.018$ y $u_x(0) = -0.017$, pintadas con trama discontinua (figura 1), tienden respectivamente a $-\infty$ y $+\infty$; asimismo, las soluciones $u_x(0) = -0.0175$ y $u_x(0) = -0.0174$, pintadas con trama continua, tienden respectivamente a $-\infty$ y ∞ . No obstante, vemos que para estos dos valores, la explosión se produce algo más tarde.

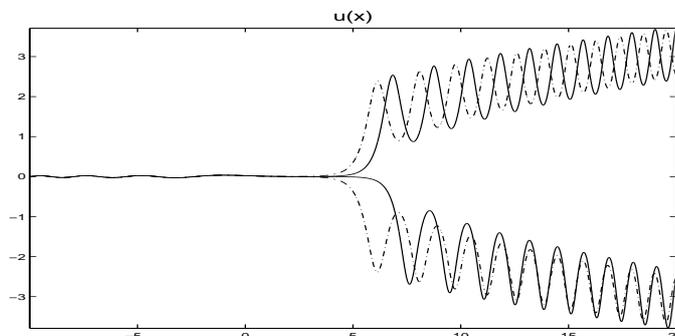


Figura 1: Dependencia sensitiva de $u(x)$ respecto de las condiciones iniciales.

Si continuáramos con el proceso, entre $u_x(0) = -0.0175$ y $u_x(0) = -0.0174$ existe un $u_x(0)$ tal que $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Dicho valor, obtenido mediante Newton-Rapson, es aproximadamente $u_x(0) = -0.0174881944\dots$. En la figura 1, por cuestiones de escala, no se aprecian bien las oscilaciones en el eje real negativo; la figura 2, para dicho $u_x(0)$ limite, muestra dichas oscilaciones.

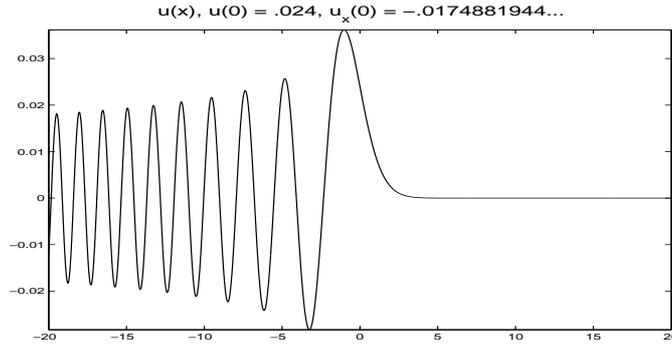


Figura 2: $u(x)$, con $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$.

Debido a la dependencia sensitiva respecto de las condiciones iniciales, tan sólo podemos calcular numéricamente tantos decimales del $u_x(0)$ deseado como el ε de la máquina, lo que implica que únicamente estamos retrasando el tiempo de explosión de $u(x)$. Dicho de otra forma, las condiciones que hacen

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0, \quad (12)$$

son sumamente inestables. Sin embargo, para nuestros propósitos, basta con considerar $u(x) \equiv 0$ a partir de un x suficientemente grande, ya que $u(x) \rightarrow 0$ de forma exponencial. Puesto que $u(x)$ es integrable entre $(-\infty, 0]$, debido a que las oscilaciones en $x < 0$ se cancelan, la condición (12) es equivalente a $\left| \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) dx \right| < \infty$.

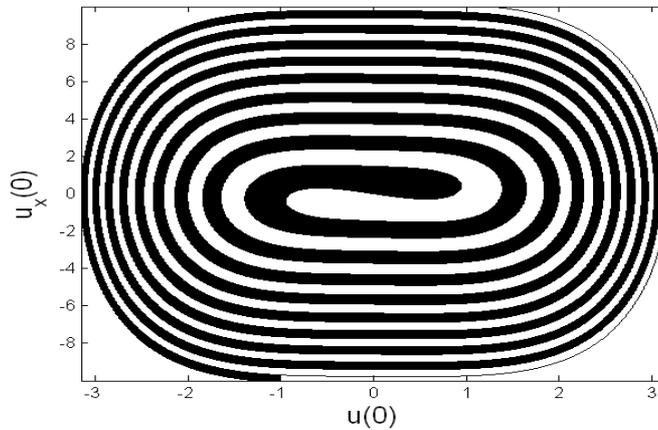


Figura 3: Pares $(u(0), u_x(0))$, con $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = +\infty$ (negro) y $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = -\infty$ (blanco).

En la figura 3, los puntos de la región en negro, tomados como condiciones iniciales $(u(0), u_x(0))$ de (10), hacen que las soluciones de (10) correspondientes $u(x) \rightarrow +\infty$, cuando $x \rightarrow \infty$. Para los puntos de la región en blanco, las soluciones de (10) correspondientes $u(x) \rightarrow -\infty$, cuando $x \rightarrow \infty$. La frontera entre ambas regiones son los pares $(u(0), u_x(0))$ cuyas soluciones satisfacen (12), que en adelante denominaremos pares admisibles. Dicha frontera es una curva conexa no acotada de dimensión uno que divide al plano en dos mitades. Cada uno de los puntos de dicha curva determinan una única $k(s, t)$, una única $\theta(s, t)$ y una única $z(s, t)$ autosemejantes que son soluciones de (2), (6) y (1), respectivamente. Por tanto, tenemos sendas familias uniparamétricas de soluciones de (2), (6) y (1) que desarrollan una singularidad en tiempo finito.

3. Un método numérico para la evolución de (1)

Las $k(s, t)$, $\theta(s, t)$ y $z(s, t)$ consideradas se caracterizan por

$$\begin{aligned} k(-\infty, t) &= 0, & k(+\infty, t) &= 0, \\ \theta(-\infty, t) &= \theta^-, & \theta(+\infty, t) &= \theta^+, \\ \lim_{s \rightarrow -\infty} |z(s, t) - se^{i\theta^-}| &= 0, & \lim_{s \rightarrow +\infty} |z(s, t) - se^{i\theta^+}| &= 0. \end{aligned}$$

El utilizar $\theta(s, t)$ en la evolución, en lugar de $k(s, t)$, tiene la ventaja de preservar (4) y $|z_s(s, t)| = 1$. La EDP para θ , con condiciones de frontera, es

$$\begin{cases} \theta_t(s, t) = -\theta_{sss}(s, t) - \frac{1}{2}(\theta_s)^3(s, t), & s \in \mathbb{R}, \\ \theta(-\infty, t) = \theta^-, \\ \theta(+\infty, t) = \theta^+. \end{cases} \quad (13)$$

Al no poder considerar todo $s \in \mathbb{R}$, nos limitaremos a $s \in [s_a, s_b]$, con $s_a \ll -1$ y $s_b \gg 1$

$$\begin{cases} \theta_t(s, t) = -\theta_{sss}(s, t) - \frac{1}{2}(\theta_s)^3(s, t), & s \in [s_a, s_b], \\ \theta(s_a, t) = \theta^-, \\ \theta(s_b, t) = \theta^+. \end{cases} \quad (14)$$

Esta última ecuación se puede integrar mediante un Runge-Kutta de cuarto orden con factor integrante.

3.1. Cálculo de $k(s, 1)$ y $\theta(s, 1)$

Ya que k no es periódica, consideraremos $s \in [s_a, s_b]$, $s_a \ll -1$, $s_b \gg 1$, de tal forma que $k(s_a, 1)$ sea suficientemente pequeño y $k(s, 1) = 0$, $\forall s > s_b - \varepsilon$. Consideramos $N_1 + 1$ puntos equiespaciados en $[s_a, s_b]$,

$$s_j = s_a + j\Delta s, \quad \Delta s = \frac{s_b - s_a}{N_1}, \quad j = 0, \dots, N_1.$$

Las elecciones de s_a , s_b y N_1 se hacen de tal forma que $0 \in \{s_j\}_{j=0}^{N_1}$.

Para integrar $\theta(s, 1)$ con exactitud espectral a partir de $k(s, 1)$, obtenida a su vez de (7), interesa forzar que $k(s, 1)$ sea periódica. Para ello, localizamos el s_j con menor índice tal que $k(s_j, 1) > 0$ y $k_s(s_j, 1) > 0$, es decir, escogemos el primer s_j en el que $k(s_j, 1)$ sea positiva y creciente. Acoplaremos a $k(s, 1)$ en $s = s_j$ una función que tenga un contacto de orden uno y decaimiento exponencial; posteriormente, mediante un filtro, aumentaremos la regularidad del contacto. La función que acoplamos a $k(s, 1)$ en $s = s_j$ es

$$k_{left}(s, 1) = k(s_j, 1) \exp \left[\frac{k_s(s_j, 1)}{k(s_j, 1)} (s - s_j) \right], \quad s \leq s_j. \quad (15)$$

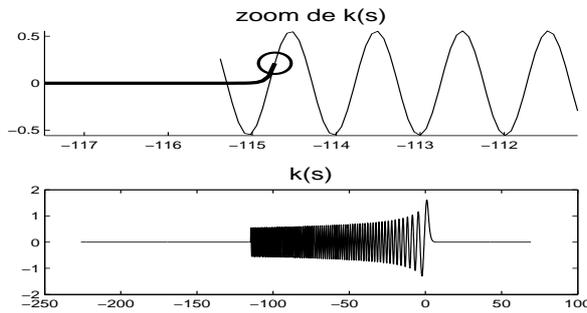


Figura 4: Periodización de $k(s)$.

En la figura 4 vemos cómo hemos acoplado $k(s, 1)$ con la exponencial adecuada. Gráficamente vemos que en la intersección ambas curvas tienen la misma pendiente, pero la exponencial decae rápidamente a cero. De ahora en adelante, nos referiremos a $k(s, 1)$ como la unión de ambas curvas. Asimismo, designaremos su punto de unión como s_{joint} .

Como estamos considerando $k(s, 1)$ periódica, cuando realmente no lo es, añadimos ceros en ambos extremos (gráfica inferior), de tal forma que la información tarde en llegar a los bordes. Al final del proceso, tendremos $N + 1$ puntos, siendo N una potencia de dos, para poder aplicar eficientemente la FFT. Asimismo, redefinimos $s_a \equiv s_0$ y $s_b \equiv s_N$. Por último, regularizamos k aplicando un filtro espectral suave

$$\hat{k}(\xi) = \hat{k}(\xi) \exp \left[-10 \left(\frac{2.5|\xi|}{N} \right)^{25} \right], \quad (16)$$

que regulariza $k(s, 1)$ en un entorno del punto de empalme s_{joint} , siendo inocuo lejos de dicho entorno.

El haber obtenido una $k(s, 1)$ regular y periódica permite integrar $\theta(s, 1)$ con exactitud espectral, mediante la FFT. Como tenemos un grado de libertad, fijaremos $\theta^+ = \lim_{s \rightarrow \infty} \theta(s, 1) = \theta(s_b, 1) \equiv 0$.

En la figura 5, observamos que $\theta(s, 1)$, asintóticamente, no tiende al valor correcto cuando $s \rightarrow -\infty$. Sin embargo, podemos determinar con bastante exactitud $\lim_{s \rightarrow -\infty} \theta(s, 1)$ como la media del primer máximo y el primer mínimo de $\theta(s, 1)$, con $s > s_{joint}$, cantidad que en la gráfica superior pintamos con trazado más fino. Esto da una buena aproximación de (4).

Por último, obrando exactamente como en el caso de la curvatura, forzamos que $\theta(s, 1)$ tienda exponencialmente al θ^- predicho, volviendo a filtrar $\theta(s, t)$ al final del proceso.

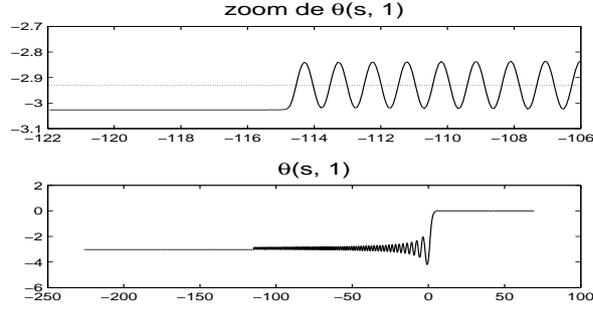


Figura 5: $\theta(s, t)$.

3.1.1. Experimentos numéricos

El objetivo del método que hemos desarrollado es intentar describir la formación de una singularidad en tiempo finito de un flujo regular de curvas. En efecto, en $t = 0$, (1) desarrolla una singularidad en forma de esquina [2]

$$z(s, 0) = \begin{cases} z_0 + se^{i\theta^+}, & s \geq 0, \\ z_0 + se^{i\theta^-}, & s \leq 0. \end{cases} \quad (17)$$

Aquí nos estamos limitando a $s \in [s_a, s_b]$ y hemos fijado el ángulo de la curva en s_a y s_b , por lo que impedimos que entre energía, que se define como

$$\int_{s_a}^{s_b} k^2(s', t) ds'.$$

En la solución exacta, dicha energía crece conforme nos acercamos a $t = 0$, concentrándose en un entorno de $s = 0$. Por el contrario, las simulaciones muestran que con nuestro método la energía se conserva con varios decimales de exactitud. Sin embargo, el método es válido cualitativamente, ya que la energía finita tiende también a concentrarse en un entorno de $s = 0$, aproximándose $k(s, t)$ a una delta de Dirac, cuando $t \rightarrow 0^+$. Asimismo, hemos observado que esta aproximación mejora al aumentar el tamaño del soporte de $k(s, 1)$.

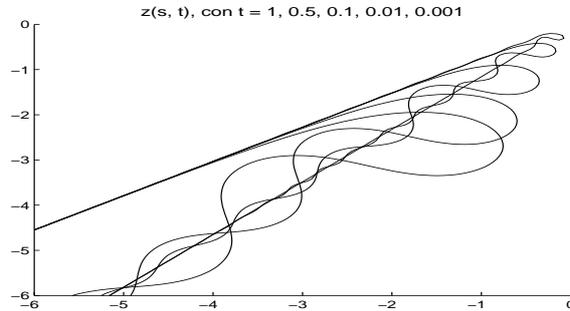


Figura 6: $z(s, t)$.

Una vez obtenido $\theta(s, t)$, es inmediato recuperar $z(s, t)$, mediante $z_s(s, t) = \exp(i\theta(s, t))$ y (9). En la figura 6, hemos superpuesto las gráficas de $z(s, t)$ en los instantes de tiempo

$t = 1, t = 0.5, t = 0.1, t = 0.01$ y $t = 0.001$, en un entorno de $s = 0$. Se observa claramente el carácter autosemejante de las soluciones.

4. $\int k(s', t)dt$ en función de $u(0)$ y $u_x(0)$

Hemos integrado (10) con un conjunto bastante grande de pares admisibles $(u(0), u_x(0))$ tomados como condiciones iniciales; a partir de cada solución $u(x)$ hemos definido su $k(s, 1)$ correspondiente y hemos estimado $\int_{-\infty}^{\infty} k(s', 1)ds'$.

En la figura 7, pintamos cada par admisible $(u(0), u_x(0))$ junto con el valor de la integral de $k(s, 1)$ correspondiente; la curva así pintada es antisimétrica respecto del origen. Puesto que

$$\max \left(\int_{-\infty}^{\infty} k(s', 1, u(0), u'(0))ds' - \pi \right) < 3 \cdot 10^{-3}, \quad (18)$$

tenemos que

$$-\pi - \varepsilon < \int_{-\infty}^{\infty} k(s', 1, u(0), u'(0))ds' < \pi + \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \quad (19)$$

Por tanto, hay a nuestro juicio, evidencia numérica seria para aceptar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)dx \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \iff \int_{-\infty}^{\infty} k(s', t)ds' \in (-\pi, \pi), \quad \forall t. \quad (20)$$

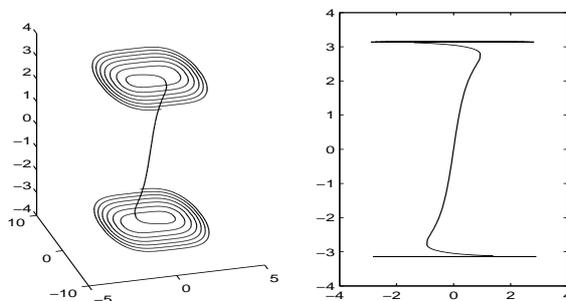


Figura 7: Integral de la curvatura.

Para valores de la integral entre $[-3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon]$, es evidente por la gráfica derecha, que representa la primera y tercera componentes, que sólo hay una condición inicial de (10) adecuada. Los valores de la integral parecen converger de forma exponencial a π . Nos inclinamos a pensar que hay una única condición inicial para cada valor $(-\pi, \pi)$, si bien, en caso de tener convergencia exponencial, será mucho más difícil dar evidencia numérica.

Referencias

- [1] R. E. Goldstein, D. M. Petrich, *Soliton's, Euler's Equations, and Vortex Patch Dynamics*, Phys. Rev. Letters. 69, 4 (1992) 555-558.
- [2] G. Perelman, L. Vega, *Self-similar planar curves related to modified Korteweg-de Vries equation*, To appear in J. of Diff. Eqns.