XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–6)

Estimativos del error a posteriori para problemas de valores iniciales no lineales en el contexto de los espacios de Banach y los semigrupos

E. Cuesta[1], Ch. Makridakis[2]

[1] *Dpto. de Matemática Aplicada, E.U.P., Universidad de Valladolid, Francisco Mendizabal 1, 47014 Valladolid. E-mail:* `eduardo@mat.uva.es`.
[2] *Dpment. of Applied Mathematics, University of Crete, 71409 Heraklion-Crete, Greece and Institute of Applied and Computational Mathematics F.O.R.T.H., 71110 Heraklion-Crete, Greece. E-mail:* `makr@tem.uoc.gr`.

Palabras clave: Estimativos de error a posteriori, parabólico, nolineal, espacios de Banach, regularodad optimal.

Resumen

Un discretización en tiempo basada en el método de Euler regresivo para el problema parabólico no lineal abstracto

$$u' = F(u), \qquad u(0) = u_0,$$

es considerada. En el presente trabajo se obtienen estimativos a posteriori para la citada discretización en tiempo en el marco de los espacios de Banach, los semigrupos y la regularidad maximal. Los estimativos obtenidos resultan ser de tipo condicional, es decir están sujetos a hipótesis que son verificables en la práctica como son las condiciones sobre la propia solución numérica.

1. Introducción

Consideremos el problema parabólico de valores iniciales abstracto

$$u' = F(u), \qquad u(0) = u_0, \tag{1}$$

donde $F : \mathcal{B} \to X$, X y B son espacios de Banach complejos, $\mathcal{B} \subset B$ es conjunto abierto y $u_0 \in \mathcal{B}$.

El problema (1) va a ser discretizado mediante el método de Euler regresivo para el cual un completo análisis de la convergencia ha sido llevado a cabo en [3] en el contexto de los espacios abstractos de Banach y la *regularidad maximal (optimal)* (ver [5]).

Nuestra contribución se centra en la obtención, también en el contexto de los espacios de Banach abstractos, de estimativos del error a posteriori para la solución numérica obtenida mediante el método de Euler regresivo. En este sentido tenemos que descatar que las demostraciones de nuestros resultados se basan, por un lado en una apropiada reconstrucción continua de la solución discreta y por otro en técnicas de punto fijo, clásicas en el contexto de los problemas no lineales, todo ello en el marco de la regularidad maximal.

El interés del resultado principal que presentamos en este trabajo es multiple. En primer lugar los estimativos obtenidos son tipo condicional, esto es no dependen más que de la propia solución numérica y no de la solución analítica que sólo es conocida teóricamente. En segundo lugar, la existencia de los estimativos no exige más resctriciones sobre el intervalo de aplicabilidad que las impuestas para garantizar la existencia y unicidad de soluciones del propio problema de valores iniciales. Por último, el resultado que presentamos abre el camino para la obtención de estimativos a posteriori para problemas más concretos en los que algunas restricciones se puedan relajar, tales como el intervalo de aplicabilidad de los estimativos, haciendo uso de las propiedades de estabilidad específicas de cada problema.

Estimativos del error a posteriori para problemas de evolución no lineales han sido obtenidos por diferentes autores en el contexto de los espacios de Hilbert (ver [1, 4, 6, 8]) y por algunos otros el contexto de los espacios de Banach (ver [7, 9]). De ellos, estimativos válidos bajo hipótesis sólamente de la solución numérica, esto es de tipo condicional, han sido obtenidos en [4, 6]. En este sentido nuestro trabajo representa un intento de obtener estimativos de tipo condicional utilizando técnicas de de teoría de semigrupos.

2. Preliminares

En esta sección vamos a fijar el marco en el que vamos a obtener nuestros resultados así como la notación empleada.

Sean $(X, \|\cdot\|)$ y $(B, \|\cdot\|_B)$ dos espacios de Banach complejos tal que B está densamente incluido en X.

Por otro lado recordemos que un operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$ cerrado y densamente definido es llamado *sectorial* (θ–*sectorial*) si existe $\omega \in \mathbb{R}$, $M > 0$ and $0 < \theta < \pi/2$ tal que su resolvente es analítica fuera del sector

$$\omega + S_\theta := \{\omega + s \in \mathbb{C} : |\arg(-s)| < \theta\},$$

y

$$\|(zI - A)^{-1}\| \leq \frac{M}{|z - \omega|}, \qquad z \notin \omega + S_\theta.$$

Dado un espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ y $0 < \alpha < 1$ vamos a denotar $\mathcal{C}^\alpha([0,T];Y)$ el espacio de las funciones acotadas y α–Hölder continuas $g : [0,T] \to Y$ dotado de la norma

$$\|g\|_{\mathcal{C}^\alpha([0,T];Y)} = \sup_{0\leq t\leq T} \|g(t)\|_Y + \sup_{0\leq s<t\leq T} \frac{\|g(t) - g(s)\|_Y}{(t-s)^\alpha}.$$

Por otro lado $\mathcal{C}^{\alpha}_{\alpha}((0,T];Y)$ denotará el espacio de todas las funciones acotadas $g:(0,T]\to Y$ tales que $t\mapsto t^{\alpha}g(t)$ es una función α–Hölder continua en $(0,T]$ dotado de la norma

$$\|g\|_{\mathcal{C}^{\alpha}_{\alpha}((0,T];Y)} = \sup_{0<t\leq T}\|g(t)\|_Y + \sup_{0<s<t\leq T}\frac{\|g(t)-g(s)\|_Y}{(t-s)^{\alpha}}s^{\alpha}.$$

En ambos casos las correspondientes seminormas se denotarán $[g]_{\mathcal{C}^{\alpha}([0,T];Y)}$ y $[g]_{\mathcal{C}^{\alpha}_{\alpha}((0,T];Y)}$ respectivamente.

Consideremos el problema parabólico de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{rcll} u'(t) &=& F(u(t)), & 0\leq t\leq T,\\ u(0) &=& u_0\in\mathcal{B}, & \end{array}\right. \tag{2}$$

donde $F:\mathcal{B}\to X$ tiene derivada de Fréchet F_u continua cumpliendo además las siguientes tres hipotésis:

[H1]: Para cada $u^*\in\mathcal{B}$, existen $R=R(u^*)>0$ y $L=L(u^*)>0$ tal que

$$\|F_u(u_2)-F_u(u_1)\|_{L(B,X)}\leq L\|u_2-u_1\|_B,$$

para todo $u_1,u_2\in\mathcal{B}$ con $\|u_1-u^*\|\leq R$ y $\|u_2-u^*\|\leq R$. Supondremos que las constantes ω, M y θ no dependen de la elección de u^*.

[H2]: Para cada $u^*\in\mathcal{B}$, el operador $F_u(u^*):B\to X$ es θ–sectorial según la definición vista al principio de la sección.

[H3]: Para cada $u^*\in\mathcal{B}$, la norma del grafo de $A=F_u(u^*)$ es equivalente a la norma de B. En concreto existe $\gamma=\gamma(u^*)>0$ tal que

$$\gamma^{-1}\|y\|\leq\|y\|_{D(A)}=\|y\|+\|Ay\|\leq\gamma\|y\|_B.$$

Recordemos que bajo las hipotésis [H1], [H2] y [H3], y con una apropiada elección del dato inicial u_0, el Teorema 8.1.1 en [5] garantiza la existencia de δ, $0<\delta\leq T$, de manera que en el intervalo $[0,\delta]$ el problema de valores iniciales (2) tiene solución única. En concreto, existe una única solución de (2) tal que $u\in\mathcal{C}([0,\delta];B)\cap\mathcal{C}^1([0,\delta];X)$ con la propiedad adiccional de regularidad $u\in\mathcal{C}^{\alpha}_{\alpha}((0,\delta];B)$.

Ejemplos de problemas que se enmarcan en este contexto así como una larga lista de referencias se pueden encontrar en [5]

La idea principal de la demostraciones de los resultados que presentamos en este trabajo se basa en linealizar el problema (2) en torno a un estado del problema u^*, que nosotros por sencillez y de modo natural tomaremos $u^*=u_0$. De este manera las propiedades de regularidad óptima y un apropiado principio de contracción aplicado el problema linealizado

$$\left\{\begin{array}{rcll} u'(t) &=& Au(t)+f(u(t)), & 0\leq t\leq T,\\ u(0) &=& u_0\in\mathcal{B}, & \end{array}\right. \tag{3}$$

donde $A=F_u(u^*)$ y $f(u)=F(u)-Au$, para todo $u\in\mathcal{B}$, nos lleva a la existencia y unicidad de solución para (2) bajo las condiciones de regularidad mencionadas (ver [5]).

3. Resultado principal

En esta sección vamos a presentar el principal resultado de nuestro trabajo pero antes es preciso hacer la descripción del método numérico y muy particularmente de la reconstrucción continua de la solución numérica que proponemos.

3.1. Método numérico y reconstrucción continua

Sea la particion de intervalo $[0,\delta]$, $t_0=\delta<t_1<t_2<\cdots<t_N=\delta$. Denotemos $I_n=(t_n,t_{n+1}]$ y $k_n=t_{n+1}-t_n$ los tamaños de paso. El método de Euler regresivo aplicado al problema (2) se plantea de la siguiente manera

$$\frac{U_{n+1}-U_n}{k_n}=F(U_{n+1}),\qquad n=0,1,2,\ldots,N-1, \tag{4}$$

donde $U_0=u_0$ y donde U_n representa la aproximación a $u(t_n)$ siendo u la solución de (2). Hay que observar que en este trabajo estamos centrados en la discretización en tiempo por lo que, sin perdida de generalidad, asumimos que disponemos del dato inicial exacto, si no fuera así aparecería en el estimativo del error un término complementario correspondiente al dato incial. Además vamos a suponer que $U_n\in\mathcal{B}$ para todo $n\geq 0$.

La existencia de solución para el método numérico (4), así como la convergencia via estimativos a priori, ha sido estudiada en [3].

Para la reconstrucción continua de la solución numérica una elección natural podría ser simplemente la basada en una interpolación lineal. Sin embargo esta elección no resulta ser apropiada debido que la función polinómica a trozos resultante carece de la regularidad necesaria para nuestros propósitos. Es por ello es por lo que elegimos como reconstrucción continua de la solución numérica la función $\mathcal{U}$ definida por

$$\begin{aligned}&\mathcal{U}\in\mathbb{P}_3(I_n;\mathcal{B}),\quad n=0,1,2,\ldots,N-1,\\&\mathcal{U}(t_n)=U_n,\quad n=0,1,2,\ldots,N,\\&\mathcal{U}'(t_n)=F(U_n),\quad n=0,1,2,\ldots,N.\end{aligned} \tag{5}$$

Hay que observar que gracias a esta defínción, $\mathcal{U}$ esta localmente definida en cada intervalo como una combinación lineal de U_{n-1},U_n y U_{n+1} y además, como $U_n\in\mathcal{B}$, para $n\geq 0$, entonces $\mathcal{U}(t)\in\mathcal{B}$ para todo $t\in[0,\delta]$. Esto nos lleva a que $F(\mathcal{U})$ tiene sentido y a que existe un *residuo* $r:[0,\delta]\to X$ tal que $\mathcal{U}$ es la solución del problema de valores iniciales

$$\left\{\begin{array}{rcl}\mathcal{U}'(t)&=&F(\mathcal{U}(t))+r(t),\qquad 0\leq t\leq T,\\[2mm]\mathcal{U}(0)&=&U_0\in\mathcal{B}.\end{array}\right. \tag{6}$$

Además, por la propia regularidad de $\mathcal{U}$ y por la hipótesis [H1], para cada $0<\alpha<1$, $r\in\mathcal{C}^{\alpha}_{\alpha}((0,\delta];X)$.

Un hecho importante es que el residuo r es calculable en términos únicamente de la solución numerica, en concreto

$$r:=\mathcal{U}'-F(\mathcal{U}), \tag{7}$$

y es por esto por lo que nos planteamos encontrar estimativos del error para el método (4) mediante cotas adecuadas del residuo r.

3.2. Análisis del error a posteriori

Consideremos el problema (2) bajo las hipótesis [H1], [H2] y [H3]. En esta situación el resultado que presentamos a continuación proporciona estimativos a posteriori para el método (4) bajo condiciones únicamente para la solución numérica y por tanto verificables en la práctica, lo que hemos llamado estimativos de tipo condicional.

Para nuestros propósitos necesitaremos una hipótesis más, esta vez sobre $\mathcal{U}$, que también es verificable en la práctica. En particular, sea $\rho > 0$ una constante tal que

$$\rho \leq \frac{1}{2} R(u_0),$$

donde $R(u_0)$ es la constante dada por la hipótesis [H1]. La hipótesis es la siguiente

[H4]: $\|\mathcal{U}(\cdot) - u_0\|_{\mathcal{C}^\alpha_\alpha((0,\delta];B)} < \rho$.

El siguiente teorema muestra el resultado principal de este trabajo.

Teorema 1 *Sean $u, \mathcal{U} : [0, \delta] \to B$ la solución de (2) bajo las hipótesis [H1], [H2] y [H3], y la reconstrucción continua (5) respectivamente. Sea además ρ tal que*

$$\rho \leq \text{mín} \left\{ \frac{1}{2} R(u_0), \frac{1}{9LC\gamma} \right\},$$

donde C es una constante positiva.

Si se cumple la hipótesis [H4] tal que

$$\|r\|_{\mathcal{C}^\alpha_\alpha((0,\delta];X)} \leq \mu\rho, \quad \textit{para} \quad \mu \leq \frac{1}{2C\gamma},$$

entonces

$$\|\mathcal{U} - u\|_{\mathcal{C}^\alpha_\alpha((0,\delta];X)} \leq \frac{1}{\mu} \|r\|_{\mathcal{C}^\alpha_\alpha((0,\delta];X)}.$$

La extensión de este artículo no permite incluir los detalles de la demostración ni tampoco los lemas técnicos necesarios. Sinembargo, aunque los detalles de las demostraciones de podrán encontrar en [2], mostraremos aquí algunas ideas de la misma.

Señalemos además que a la vista del teorema queda claro que el estimativo obtenido no depende más que de cantidades que son calculables en la práctica y en particular de la solución numérica mediante el residuo r. Incluso la constante C que no aparece detallada aquí, es el resultado de un lema en el que se muestra que incluso dicha cantidad es calculable.

Breve sketch de la demostración: A partir del problema (6), el error $e = \mathcal{U} - u$ verifica el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} e'(t) &= G(e(t)) + r(t), \qquad 0 \leq t \leq \delta, \\ e(0) &= 0, \end{cases}$$

donde $G(t,v) = F(\mathcal{U}(t)) - F(\mathcal{U}(t)-v)$. La demostración se basa en la existencia y unicidad de soluciones en el marco de los espacios Hölder del problema linealizado del anterior

$$\begin{cases} e'(t) &= Ae(t) + g(t,e(t)) + r(t), \qquad 0 \leq t \leq \delta, \\ e(0) &= 0, \end{cases}$$

donde $g(t,v) = F(\mathcal{U}(t)) - F(\mathcal{U}(t)-v) - Av$ y $A = F_u(u_0)$. Para ello, la aplicación de técnicas de punto fijo aplicadas a un operador no lineal apropiadamente definido nos lleva al resultado del teorema.

Agradecimientos

Este trabajo de investigación ha sido parcialmente financiado mediante la beca HPMD-CT-200100121, en Institute of Applied and Computational Mathematics, F.O.R.T.H., 71110 Heraklion-Crete, Grece, y alguno de los viajes a Grecia han sido financiados por una Acción Hispano-Griega, el MCyT y GSRT de Grecia

Referencias

[1] G. Akrivis, Ch. G. Makridakis, and R.H. Nochetto, *A posteriori error estimates for the Crank-Nicolson method for parabolic equations*, Math. Comput. **75** (2006), 511–531.

[2] E. Cuesta and Ch. Makridakis, *A posteriori error estimates and maximal regularity for approximations of fully nonlinear parabolic problems in Banach spaces*, (submitted) (2007).

[3] C. González, A. Ostermann, C. Palencia, and M. Thalhammer, *Backward euler discretization of fully nonlinear parabolic problems*, Math. Comput. **71** (2002), 125–145.

[4] O. Lakkis and R. H. Nochetto, *A posteriori error analysis for the mean curvature flow of graphs*, SIAM J. Numer. Anal. **42** (2005), 1875–1898.

[5] A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, Basel, 1995.

[6] Ch. G. Makridakis and R. H. Nochetto, *A posteriori error analysis for a class of dissipative methods for nonlinear evolution problems*, Numer. Math. **104** (2006), 489–514.

[7] R. H. Nochetto and G. Savaré, *Nonlinear evolution equations governed by accretive operators in banach spaces: error control and applications*, Math. Models Methods Appl. Sci. **16** (2006), 439–477.

[8] R. H. Nochetto, G. Savaré, and C. Verdi, *A posteriori error estimates for variable time-step discretizations of nonlinear evolution equations*, Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), no. 5, 525–589.

[9] R. Verfürth, *A posteriori error estimates for nonlinear problems.* $L^r(0,T;L^\rho(\Omega))$*-error estimates for finite element discretizations of parabolic equations*, Math. Comput. **67** (1998), no. 224, 1335–1360.