XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–??)

Métodos numéricos para matrices signo-regulares

V. Cortés, J. M. Peña

Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, E-50009 Zaragoza. E-mails: vcortes@unizar.es, jmpena@unizar.es.

Palabras clave: Matrices signo-regulares, eliminación de Neville, estrategias de pivotaje

Resumen

Una matriz de orden n es *signo-regular* si para cada k ($1 \leq k \leq n$) todos los menores de orden k tiene el mismo signo no estricto. Presentamos algunos avances recientes sobre el estudio de las matrices signo-regulares y sobre métodos numéricos adaptados a las mismas.

1. Introducción

Una matriz se llama *signo-regular* (SR) si para cada k todos sus menores de orden k tienen el mismo signo o son nulos. Ese signo común puede ser distinto para cada k, pero si todos son no negativos las matrices se llaman *totalmente no negativas*. El interés de las matrices no singulares signo-regulares en muchas aplicaciones proviene de su caracterización como aplicaciones lineales que disminuyen la variación de signo en las componentes consecutivas del vector. Con objeto de aclarar esta afirmación, vamos a introducir algunas notaciones básicas. Para cualquier vector $\lambda = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, denotaremos por $V^-(\lambda)$ al número mínimo de cambios de signo en las componentes consecutivas de λ y $V^+(\lambda)$ al número máximo de cambios de signo en las componentes consecutivas de λ. Es decir,

$$\begin{aligned} V^-(\lambda) := \text{mín}\big\{k \mid & \text{ existe } 0 \leq i_0 < \ldots < i_k \leq n, \text{ tal que } (-1)^j \lambda_{i_j} \geq 0 \\ & \text{para todo } j \in \{0,\ldots,k\} \text{ ó } (-1)^j \lambda_{i_j} \leq 0 \text{ para todo } j \in \{0,\ldots,k\}\big\}, \\ V^+(\lambda) := \text{máx}\big\{k \mid & \text{ existe } 0 \leq i_0 < \ldots < i_k \leq n, \text{ tal que } (-1)^j \lambda_{i_j} \geq 0 \\ & \text{para todo } j \in \{0,\ldots,k\} \text{ ó } (-1)^j \lambda_{i_j} \leq 0 \text{ para todo } j \in \{0,\ldots,k\}\big\}. \end{aligned}$$

Claramente, si λ tiene todas sus componentes no nulas entonces $V^-(\lambda) = V^+(\lambda)$.

El siguiente resultado se conoce como la *propiedad de disminución de la variación* de las matrices signo-regulares y por él las matrices no singulares signo-regulares tienen tanta importancia en las aplicaciones.

Teorema 1. *(cf. [1], Theorem 5.6) Sea A una matriz real no singular $n \times n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *A es signo-regular.*

(ii) $V^+(Ax) \leq V^+(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

(iii) $V^-(Ax) \leq V^+(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

(iv) $V^-(Ax) \leq V^-(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$.

La teoría de las transformaciones lineales que cumplen la propiedad de disminución de la variación tuvo su origen en Schoenberg [15]. Muchas aplicaciones de estas transformaciones se pueden encontrar en [9]. Para aplicaciones estadísticas de las matrices SR se puede consultar [2], y [11] para aplicaciones en diseño geométrico asistido por ordenador. Otras propiedades de las matrices SR se pueden ver en [13] y [12].

La *eliminación de Neville* consiste en producir ceros en una matriz mediante la substracción a una fila dada de un múltiplo adecuado de su fila anterior hasta obtener una matriz triangular superior, y en el caso de las matrices no singulares totalmente no negativas se puede aplicar sin cambios de filas (véase [5]). Sin embargo, esto no ocurre para las matrices signo-regulares no singulares, como muestra la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, el uso de una estrategia de pivotaje es necesaria. La eliminación de Neville se ha mostrado muy útil en el tratamiento de matrices totalmente no negativas (véase [5]), que forman una subclase de matrices signo-regulares. En [3] se introduce una estrategia de pivotaje para la eliminación de Neville de matrices signo-regulares. Aquí se presentan aplicaciones y ventajas de dicha estrategia, que auguran que jugará un papel clave en los métodos numéricos adaptados a las matrices signo-regulares, como ya sucedió con la eliminación de Neville con respecto a las matrices totalmente no negativas.

La estructura de este trabajo es la siguiente. En la sección 2 introducimos las notaciones básicas junto con la eliminación de Neville. En la sección 3 introducimos la estrategia de pivotaje dos-determinantal para la eliminación de Neville y recordamos alguna de sus propiedades más notables. En la sección 4 analizamos factorizaciones matriciales asociadas a esta estrategia de pivotaje. Finalmente, en la sección 5 relacionamos la estrategia dos-determinantal con las estrategias de pivotaje parcial escalado.

2. Notaciones básicas.

Dados $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $Q_{k,n}$ representa el conjunto de todas las sucesiones estrictamente crecientes de k números naturales menores o iguales a m:

$$\alpha = (\alpha_i)_{1 \leq i \leq k} \in Q_{k,n}, \quad (1 \leq)\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k (\leq n).$$

Para $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k) \in Q_{k,n}$ y A una matriz real $n \times n$, denotaremos por $A[\alpha|\beta]$ a la submatriz $k \times k$ de A que contiene las filas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ y las columnas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$. Si $\alpha = \beta$, la submatriz principal $A[\alpha|\alpha]$ de A se denota por simplicidad como $A[\alpha]$. $Q^0_{k,n}$ denotará el conjunto de las sucesiones estrictamente crecientes de k números naturales *consecutivos* menores o iguales a n.

Para una matriz no singular A de orden n, la *eliminación de Neville* con una estrategia de pivotaje consiste en $n-1$ pasos sucesivos que dan lugar a la siguiente sucesión de matrices:

$$A = A^{(1)} \to \tilde{A}^{(1)} \to A^{(2)} \to \tilde{A}^{(2)} \to \cdots \to A^{(n)} = U, \tag{1}$$

donde U es una matriz triangular superior. Para cada t, $1 \leq t \leq n$, las matrices $A^{(t)} = (a^{(t)}_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ y $\tilde{A}^{(t)} = (\tilde{a}^{(t)}_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ tienen ceros por debajo de su diagonal principal en las primeras $t-1$ columnas, y además se tiene

$$\tilde{a}^{(t)}_{it} = 0, \quad i \geq t \Rightarrow \tilde{a}^{(t)}_{ht} = 0 \quad \forall h \geq i. \tag{2}$$

Partiendo de la matriz $A^{(t)}$ se obtiene la matriz $\tilde{A}^{(t)}$ reordenando las filas y/o columnas $t, \ldots, n$ conforme a la estrategia de pivotaje y cumpliendo (2). Para obtener $A^{(t+1)}$ hacemos ceros en la columna t-ésima de $\tilde{A}^{(t)}$ por debajo de la diagonal principal substrayendo un múltiplo de la fila i-ésima a la fila $(i+1)$-ésima para $i = n-1, n-2, \ldots, t$, siguiendo la siguiente fórmula. Para cualquier columna $j = 1, \ldots, n$,

$$a^{(t+1)}_{ij} := \begin{cases} \tilde{a}^{(t)}_{ij}, & \text{si} \quad i \leq t, \\ \tilde{a}^{(t)}_{ij} - (\tilde{a}^{(t)}_{it}/\tilde{a}^{(t)}_{i-1,t})\tilde{a}^{(t)}_{i-1,j}, & \text{si} \quad i \geq t+1 \quad \text{y} \quad \tilde{a}^{(t)}_{i-1,t} \neq 0, \\ \tilde{a}^{(t)}_{ij}, & \text{si} \quad i \geq t+1 \quad \text{y} \quad \tilde{a}^{(t)}_{i-1,t} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Observamos que en el tercer caso, $\tilde{a}^{(t)}_{i-1,t} = 0$ implica $\tilde{a}^{(t)}_{it} = 0$ por (2). Cuando el proceso no necesita de cambios de filas, entonces $A^{(t)} = \tilde{A}^{(t)}$ para todo t. Por ejemplo, en el caso de las matrices totalmente no negativas no singulares se puede aplicar la eliminación de Neville sin cambios de filas ni de columnas (ver Corolario 5.5 de [7]).

El elemento

$$p_{ij} = \tilde{a}^{(j)}_{ij}, \quad 1 \leq j \leq i \leq n, \tag{4}$$

se llama *pivote* (i,j) de la eliminación de Neville de A y el número

$$m_{ij} = \begin{cases} \tilde{a}^{(j)}_{ij}/\tilde{a}^{(j)}_{i-1,j} (= p_{ij}/p_{i-1,j}), & \text{si} \quad \tilde{a}^{(j)}_{i-1,j} \neq 0, \\ 0, & \text{si} \quad \tilde{a}^{(j)}_{i-1,j} = 0 \quad \left(\Rightarrow \tilde{a}^{(j)}_{ij} = 0\right), \end{cases} \tag{5}$$

para $1 \leq j \leq n$, $j < i \leq n$, el *multiplicador* (i,j) de la eliminación de Neville de A. Observamos que $m_{ij} = 0$ si y sólo si $p_{ij} = 0$ y que, por (2),

$$m_{ij} = 0 \Rightarrow m_{hj} = 0, \quad h = i+1, \ldots, n. \tag{6}$$

Por *signatura* entendemos cualquier sucesión (infinita) real $\varepsilon = (\varepsilon_i)$ con $|\varepsilon_i| = 1$, $i = 1, 2, \ldots$. Dado $k \leq \min\{m,n\}$, una matriz $m \times n$ A es *signo-regular de orden k con signatura* ε si, para cada $j = 1, \ldots, k$, todos los menores de orden j de la matriz A tienen el mismo signo no estricto que coincide con ε_j, y se denota por SR_k. Si la matriz A es SR_k para todo $k \leq \min\{m,n\}$, entonces se dice que la matriz es *signo-regular* y se denota por SR.

3. La estrategia de pivotaje dos-determinantal para matrices signo-regulares

Como hemos señalado en la introudcción, es necesario asociar a la eliminación de Neville una estrategia de pivotaje cuando se trabaja con matrices SR. En [3], se propone una estrategia de pivotaje por filas asociada a la eliminación de Neville para las matrices SR no singulares. Esta estrategia recibe el nombre de *pivotaje dos-determinantal*, debido al papel especial que tienen algunos determinantes de orden 2 de las matrices que aparecen a lo largo del proceso de eliminación de Neville. En general, para un paso t $(1 \leq t \leq n-1)$, una estrategia de pivotaje por filas en la eliminación de Neville debe elegir una reordenación de las filas de la matriz $A^{(t)}[t, \ldots, n]$ dando lugar a una matriz nueva $\tilde{A}^{(t)}[t, \ldots, n]$ cumpliendo (2).

Sea A una matriz $n \times n$ no singular signo-regular. Para $t = 1, \ldots, n-1$, denotamos por $P_t = (\delta_{n-t+2-i,j})_{1 \leq i,j \leq n-t+1}$ a la matriz $(n-t+1) \times (n-t+1)$ que es reversa de la matriz identidad, es decir, P_t sólo tiene unos en la diagonal secundaria y ceros en los demás lugares.

El criterio de la estrategia de *pivotaje dos-determinantal* para obtener $\tilde{A}^{(t)}[t, \ldots, n]$ mediante una reordenación de las filas de $A^{(t)}[t, \ldots, n]$ es el siguiente:

- Si $a_{tt}^{(t)} = 0$, entonces revertimos el orden de las filas desde t hasta n, es decir, $\tilde{A}^{(t)}[t, \ldots, n] := P_t \cdot A^{(t)}[t, \ldots, n]$.

- Si $a_{nt}^{(t)} = 0$, entonces no hacemos cambios de filas, es decir, $\tilde{A}^{(t)} := A^{(t)}$.

- Si $a_{tt}^{(t)} \neq 0$ y $a_{nt}^{(t)} \neq 0$, entonces calculamos el determinante

$$d_1 := \det \begin{pmatrix} a_{tt}^{(t)} & a_{t,t+1}^{(t)} \\ a_{t+1,t}^{(t)} & a_{t+1,t+1}^{(t)} \end{pmatrix}.$$

- Si $d_1 > 0$, entonces $\tilde{A}^{(t)} := A^{(t)}$.

- Si $d_1 < 0$, entonces $\tilde{A}^{(t)}[t, \ldots, n] := P_t \cdot A^{(t)}[t, \ldots, n]$.

- Si $d_1 = 0$, calculamos el determinante

$$d_2 := \det \begin{pmatrix} a_{n-1,t}^{(t)} & a_{n-1,t+1}^{(t)} \\ a_{nt}^{(t)} & a_{n,t+1}^{(t)} \end{pmatrix}.$$

Si $d_2 > 0$, entonces $\tilde{A}^{(t)} := A^{(t)}$. Si $d_2 < 0$, entonces $\tilde{A}^{(t)}[t, \ldots, n] := P_t \cdot A^{(t)}[t, \ldots, n]$.

Observamos que para aplicar la estrategia de pivotaje dos-determinantal en un paso t de la eliminación de Neville son necesarias las siguientes condiciones: al menos uno de los elementos $a_{tt}^{(t)}$ ó $a_{nt}^{(t)}$ debe de ser distinto de cero y si ambos son cero, entonces al menos uno de los menores d_1 ó d_2 debe de ser distinto de cero. En los lemas 3.2 y 3.3. de [3] se demuestra que esto ocurre si $A^{(t)}[t, \ldots, n]$ es una matriz no singular signo-regular de orden 3 (SR$_3$). Esta última condición se obtiene del Teorema 3.4 de [3] siempre que A sea una matriz no singular SR y se use el pivotaje dos-determinantal.

El coste computacional de la eliminación de Neville sin cambios de filas de una matriz $n \times n$ coincide con el coste de la eliminación de Gauss sin cambios de filas. Por tanto, tiene un coste de $\mathcal{O}(n^3)$ operaciones elementales. Usando la estrategia de pivotaje dos-determinantal este coste se incrementa a lo sumo en $2n-2$ substracciones y $4n-4$ multiplicaciones. Por tanto, esta estrategia conlleva un coste computacional inferior al del pivotaje parcial.

El siguiente resultado, demostrado en [3], muestra que la signo-regularidad es una propiedad que se hereda por todas las matrices $A^{(t)}[t,\dots,n]$ que aparecen al aplicar la eliminación de Neville con pivotaje dos-determinantal.

Teorema 2. *(cf. [3], Theorem 3.4) Sea $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ una matriz no singular signo-regular a la que aplicamos la eliminación de Neville con pivotaje dos-determinantal. Entonces, para $k\in\{1,\dots,n\}$, todas las matrices $A^{(k)}[k,\dots,n]$ son signo-regulares y además, $\varepsilon_1(A^{(k)})=\varepsilon_1(A)$.*

Nota 1. Teniendo en cuenta la demostración del teorema anterior (véase Teorema 3.4 de [3]), se tiene que para matrices no singulares totalmente no negativas, el pivotaje dos-determinantal no produce cambios de filas.

4. Factorizaciones matriciales asociadas a la eliminación de Neville con pivotaje dos-determinanatal

A lo largo de esta sección, analizaremos en detalle el caso de una matriz SR no singular A a la que aplicamos la eliminación de Neville con el pivotaje dos-determinantal. Vamos a ver cómo este proceso de eliminación se puede describir mediante matrices elementales y matrices de permutación. Con este fin y siguiendo [8], denotamos por $E_i(\alpha)$ $(2\le i\le n)$ a la matriz triangular inferior bidiagonal cuyo elemento (r,s), $1\le r,\ s\le n$ está dado por

$$\begin{cases} 1 & \text{si} \quad r=s \\ \alpha & \text{si} \quad (r,s)=(i,i-1) \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es decir,

$$E_i(\alpha):=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \alpha & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Observamos que

$$E_i^{-1}(\alpha)=E_i(-\alpha). \tag{8}$$

Teniendo en cuenta la definición hecha en (**??**) para la matriz de permutación P_t de orden $n-t+1$ $(1\le t\le n-1)$, podemos definir $\tilde{P}_t$ como la matriz de orden n dada por

$$\tilde{P}_t=\begin{pmatrix} I_{t-1} & 0 \\ 0 & P_t \end{pmatrix},$$

donde I_{t-1} es la matriz identidad de orden $t-1$.

Supongamos que, para una matriz SR no singular A de signo ε_1, la eliminación de Neville con pivotaje dos-determinantal tiene asociadas r, con $r \leq n-1$, permutaciones en los pasos $i_1, \dots i_r$ $(1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_r \leq n-1)$. De este modo, podemos definir la siguiente matriz:

$$\hat{P}_i := \begin{cases} \tilde{P}_i & \text{si} \quad i \in \{i_1, \dots, i_r\}, \\ I_n & \quad \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Entonces la eliminación de Neville con pivotaje dos-determinantal de A se puede escribir como

$$\hat{P}_{n-1} E_n(-m_{n,n-1}) \cdots (E_3(-m_{32}) \cdots E_n(-m_{n2}))\hat{P}_2$$
$$\cdot (E_2(-m_{21}) \cdots E_{n-1}(-m_{n-1,1}) E_n(-m_{n1}))\hat{P}_1 A = U, \tag{9}$$

donde U es una matriz no singular triangular superior, y los m_{ij}'s son los multiplicadores (5) que cumplen (6). Observamos que, por el Teorema 2, U es una matriz de signo constante ε_1.

Teniendo en cuenta (8), por (9) conseguimos la siguiente factorización de A

$$A = \hat{P}_1(E_n(m_{n1})E_{n-1}(m_{n-1,1}) \cdots E_2(m_{21}))$$
$$\cdot \hat{P}_2(E_n(m_{n2}) \cdots E_3(m_{32})) \cdots \hat{P}_{n-1} E_n(m_{n,n-1}) U. \tag{10}$$

Notemos que los elementos diagonales u_{ii} de U son los pivotes p_{ii} dados por (4).

Como, por el Teorema 2 $A^{(t)}[t, \dots, n]$ es SR para cada $t \in \{1, \dots, n\}$, A es SR, por (5), se sigue que los multiplicadores m_{ij} son todos no negativos. Ahora, si denotamos por

$$L_i := E_n(m_{ni}) \cdots E_{i+1}(m_{i+1,i}), \tag{11}$$

entonces, para todo $i = 1, \dots, n-1$, la matriz L_i es triangular inferior, y además, por el Teorema 3.1 de [1], es totalmente no negativa por ser producto de matrices totalmente no negativas. Finalmente teniendo en cuenta (11), podemos escribir (10) como

$$A = \hat{P}_1 L_1 \hat{P}_2 L_2 \cdots \hat{P}_{n-1} L_{n-1} U. \tag{12}$$

Por tanto, por (12), dada una matriz $n \times n$ A no singular SR, su eliminación de Neville con pivotaje dos-determinantal nos permite factorizar la matriz A como producto de $n-1$ matrices triangulares totalmente no negativas, $n-1$ matrices de permutación (quizás algunas de ellas la matriz identidad) y una matriz triangular superior U con el mismo signo de A.

La factorización dada en (12) se puede utilizar para llevar a cabo un análisis de error de la eliminación de Neville con la estrategia dos-determinantal cuando se aplica a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Es bien conocido en el contexto del análisis de error "backward" que una factorización (como (12)) de una matriz con signo constante en la que todas las matrices triangulares inferiores son no negativas y la triangular superior tiene signo constante conduce a pequeños errores "backward".

Además la factorización (12) tiene una potencial aplicación al cálculo de valores propios con alta precisión relativa, como ya se ha visto en las factorizaciones particulares que aparecen en los casos de matrices totalmente no negativas o reversas de totalmente no negativas (véase [10]).

5. Pivotaje parcial escalado en la eliminación de Neville

El estudio de estrategias de pivotaje alternativas a las clásicas del pivotaje parcial y del pivotaje completo constituye una activa línea de investigación actual (véase, por ejemplo, [4] y sus referencias). En esta sección consideramos las estrategias de pivotaje parcial escalado (SPP) asociadas a la eliminación de Neville. Para cada paso t, $1 \leq t \leq n-1$, de la eliminación de Neville de una matriz no singular A de orden n, hemos visto que tenemos que reordenar las filas $t, \ldots, n$ de la matriz $A^{(t)}$ (véase (1)) siguiendo una estrategia de pivotaje por filas con objeto de encontrar la matriz $\tilde{A}^{(t)}$ cumpliendo (2). Análogamente al caso de la eliminación de Gauss, con el fin de conservar los valores absolutos de los multiplicadores $\tilde{a}_{it}^{(t)}/\tilde{a}_{i-1,t}^{(t)}$ menores o iguales a 1, podemos definir el *pivotaje parcial* en la eliminación de Neville como el proceso que reordena las filas de la matriz $A^{(t)}$ para obtener $\tilde{A}^{(t)}$ donde

$$|\tilde{a}_{tt}^{(t)}| \geq |\tilde{a}_{t+1,t}^{(t)}| \geq \ldots \geq |\tilde{a}_{nt}^{(t)}|$$

Para mejorar esta estrategia con un escalado adecuado, siguiendo [6] podemos definir el *pivotaje parcial escalado* (SPP) para la norma vectorial $\|\cdot\|$ en la eliminación de Neville. Denotemos por $r_i^{(t)}$ a la fila i-ésima ($i = t, t+1, \ldots, n$ y $t = 1, \ldots, n$) de la matriz $A^{(t)}[1, 2, \ldots, n|t, t+1, \ldots, n]$.

Para cada $t = 1, \ldots, n-1$, si se tiene

$$\frac{|a_{i_1,t}^{(t)}|}{\|r_{i_1}^{(t)}\|} \geq \frac{|a_{i_2,t}^{(t)}|}{\|r_{i_2}^{(t)}\|} \geq \ldots \geq \frac{|a_{i_{n-t+1},t}^{(t)}|}{\|r_{i_{n-t+1}}^{(t)}\|}$$

para una permutación $(i_1, i_2, \ldots, i_{n-t+1})$ de $(t, t+1, \ldots, n)$, entonces la estrategia SPP para la norma vectorial $\|\cdot\|$ en la eliminación de Neville reemplaza la fila t-ésima de $A^{(t)}$ por la fila i_1-ésima, la fila $(t+1)$-ésima por la i_2-ésima, y así se continúa sucesivamente.

Trabajaremos, en particular, con estrategias de SPP asociadas a normas vectoriales monótonas. Como ejemplo de normas vectoriales monótonas, consideraremos las normas vectoriales $\|\cdot\|_\infty, \|\cdot\|_2$ y $\|\cdot\|_1$. En el caso particular de la norma $\|\cdot\|_2$, la estrategia de SPP asociada (para la eliminación de Gauss o de Neville) se llama pivotaje parcial escalado euclídeo (ESPP). Esta estrategia, tanto para Gauss como para Neville, da lugar a un sistema triangular donde el hiperplano de $\mathbb{R}^n$ asociado a su i-ésima ecuación ($i = 1, 2, \ldots, n$) está bien orientado con respecto al eje x_i. Esto significa que, en el paso i, seleccionamos como hiperplano i-ésimo el que es más ortogonal al eje x_i (observamos que esta estrategia está basada en los cosenos directores). Véase [6] y [14]. Concretamente, en el caso del ESPP para la eliminación de Neville, las filas de $\tilde{A}^{(i)}[i, \ldots, n]$ están todas ordenadas de tal forma que el hiperplano i asociado a la fila i de $\tilde{A}^{(i)}$ es más ortogonal al eje x_i que el hiperplano $(i+1)$, que a su vez es más ortogonal al eje x_i que el hiperplano $(i+2)$, y así, sucesivamente.

El siguiente resultado, cuya demostración se recoge en [3], muestra que la estrategia de pivotaje dos-determinantal es una estrategia de pivotaje parcial escaldo para la eliminación de Neville.

Teorema 3. *(cf. [3], Theorem 4.1) Sea $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ una matriz no singular signo-regular. La estrategia de pivotaje dos-determinantal para la eliminación de Neville es una estrategia de pivotaje parcial escalado para cualquier norma vectorial monótona $\|\cdot\|$.*

Nota 2. El Teorema 3 (para la norma euclídea $\|\cdot\|_2$) y la interpretación geométrica dada anteriormente para las estrategias de ESPP demuestran que los hiperplanos asociados a las ecuaciones de un sistema lineal $Ax = b$, con A matriz signo-regular, están ordenados decrecientemente (resp., crecientemente) con respecto a su ortogonalidad con el eje x_1, si $\varepsilon_2(A) = +1$ (resp., $\varepsilon_2(A) = -1$). En otras palabras, la primera permutación de la estrategia de pivotaje dos-determinantal reordena los hiperplanos de tal modo que el primer hiperplano es más ortogonal al eje x_1 que el segundo hiperplano, que el segundo es más ortogonal al mismo eje que el tercer hiperplano, y así, sucesivamente. Una interpretación similar se establece con respecto al eje x_i y a la elección de las filas de $A^{(i)}[i, \ldots, n]$ determinada por el pivotaje dos-determinantal. Además, destacamos que la estrategia de ESPP tiene, en teoría, un alto coste computacional; sin embargo en la práctica, podemos implementarla aplicando la estrategia del pivotaje dos-determinantal que es más económica incluso que el pivotaje parcial.

Agradecimientos

Este trabajo está apoyado por el Spanish Research Grant MTM2006-03388 y por el Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

Referencias

[1] T. Ando, *Totally Positive Matrices*, Linear Algebra Appl. 90 (1987), 165–219.

[2] L. D. Brown, I. M. Johnstone, K. B. MacGibbon, *Variation Diminishing transformations: a direct approach to total positivity and its statistical applications*, Journal of the American Statistical Association 76 (1981), 824–832.

[3] V. Cortés, J. M. Peña, *Sign regular matrices and Neville elimination*, Linear Algebra Appl. 421 (2007), 53–62.

[4] V. Cortés, J. M. Peña, *Growth factor and expected growth factor of some pivoting strategies*, J. Comput. Appl. Math. 202 (2007), 292–303.

[5] M. Gasca, J. M. Peña, *Total positivity and Neville elimination*, Linear Algebra Appl. 165 (1992), 25–44.

[6] M. Gasca, J. M. Peña, *Scaled pivoting for Gaussian and Neville elimination for totally positive systems*, Appl. Numer. Math. 13 (1993), 345–355.

[7] M. Gasca, J. M. Peña, *Total positivity, QR factorization and Neville elimination*, SIAM J. Matriz Anal. Appl. 14 (1993), 1132–1140.

[8] M. Gasca, J. M. Peña, *On factorizations of totally positive matrices*, Total Positivity and Its Applications, M. Gasca, C. A. Micchelli (eds.), Kluwer Academic Publishers, 1996, 109–130.

[9] S. Karlin, *Total Positivity*, Stanford University Press, Stanford, 1968.

[10] P. Koev, F. Dopico, *Accurate eigenvalues of certain sign-regular matrices.* Aparecerá en Linear Algebra Appl.

[11] J. M. Peña (Ed.), *Shape preserving representations in Computer-Aided Geometric Design*, Nova Science Publishers, Commack (New York), 1999.

[12] J. M. Peña, *Sign regular matrices of order two*, Linear Multilinear Algebra 50 (2002), 91–97.

[13] J. M. Peña, *On nonsingular sign regular matrices*, Linear Algebra Appl. 359 (2003), 91–100.

[14] G. Poole, L. Neal, *A geometric analysis of Gaussian elimination I*, Linear Algebra Appl. 149 (1991), 249–272.

[15] I. J. Schoenberg, *Uber Variationsverminderende lineare Transformationen*, Math. Z. 32 (1930), 321–328.