XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–7)

Una caracterización para la alcanzabilidad de sistemas periódicos generalizados con retardos de estados

Begoña Cantó[1], Carmen Coll[1], Elena Sánchez[1]

[1] *Instituto de Matemática Multidisciplinar, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, E-46071 Valencia. E-mail:* bcanto@mat.upv.es, mccoll@mat.upv.es, esanchezj@mat.upv.es.

Palabras clave: Control, Sistemas generalizados, Retardos, Sistema periódico, Alcanzabilidad

Resumen

Los sistemas con retardo aparecen frecuentemente en cualquier tipo de proceso que involucre transmisión de datos a largas distancias y en procesos químicos, biológicos, eléctricos, etc. El modelo matemático que permite analizar este tipo de procesos corresponde a un sistema dinámico de control.

En este trabajo se estudia el caso en que los coeficientes del sistema varían de forma periódica y se analiza la influencia del retardo cuando éste afecta al estado del sistema. Para ello, se obtiene la solución del sistema y se construyen las matrices de alcanzabilidad del mismo. Estas matrices se utilizan para caracterizar la propiedad de alcanzabilidad de un sistema generalizado N-periódico en tiempo discreto cuando se considera un retardo en el estado.

1. Introducción

Algunos tipos de sistemas asociados a comportamientos impulsivos llamados sistemas generalizados pueden aparecer en modelos biológicos, económicos, eléctricos [4] o mecánicos [9], entre otros, en los que los impulsos son causados por la estructura singular de los sistemas.

Frecuentemente el modelo matemático que se ajusta a un proceso real se realiza por medio de un sistema dinámico lineal invariante, [6, 7]. Sin embargo, en algunos casos la naturaleza del proceso obliga a que los coeficientes del sistema dependan del tiempo. En particular, cuando esta variación es periódica aparecen los sistemas periódicos [3]. Por otra parte existen algunas técnicas usadas para modelar sistemas de control en ingeniería que nos llevan a una representación periódica. Este es el caso de la técnica conocida como multifrecuencia, [1, 2].

Desafortunadamente, el retardo temporal inherente que aparece en el comportamiento dinámico de muchos procesos físicos o de ingeniería tiene un efecto adverso sobre el comportamiento del modelo. Este hecho debe tenerse en cuenta a la hora de diseñar el sistema, para que, de este modo, su comportamiento se ajuste de la forma más real posible al proceso [10].

Los problemas que involucran retardos han sido estudiados en los últimos años, siendo publicados diferentes trabajos relacionados con el tema. Por ejemplo, la resolución de problemas relativos a la estabilidad de sistemas con retardo ha sido estudiada en [8, 11] y las propiedades estructurales de dichos sistemas en [5].

En este trabajo se estudia la influencia que produce el retardo existente en los estados en la solución de los sistemas periódicos. En primer lugar se construye la forma explícita de la solución de este tipo de sistemas. Usando esta solución se obtienen las matrices de alcanzabilidad y se estudia el efecto de los retardos en esta propiedad estructural. Finalmente, se caracteriza dicha propiedad en términos matriciales.

2. Solución de un sistema con retardos en el estado

En esta sección se obtiene la trayectoria de un sistema discreto N–periódico cuyo comportamiento varía a causa de la influencia del retardo en los estados.

Un sistema N-periódico generalizado viene dado por la siguiente ecuación en diferencias,

$$E(k)x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \ \ k \in \mathbb{Z}$$

donde $E(k+N) = E(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz singular, es decir $\det(E(k)) = 0$, $A(k+N) = A(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(k+N) = B(k) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ y $x(k) \in \mathbb{R}^n$ y $u(k) \in \mathbb{R}^m$ son los vectores de estado y de entrada respectivamente. Este sistema se denota por $(E(\cdot), A(\cdot), B(\cdot))_N$.

Una técnica utilizada en los sistemas N-periódicos generalizados consiste en desacoplar el sistema en dos subsistemas y analizarlos por separado. Estos subsistemas tienen la siguiente estructura

$$\begin{array}{rcl} x_1(k+1) & = & A_1(k)x_1(k) + B_1(k)u(k), \\ N(k)x_2(k+1) & = & x_2(k) + B_2(k)u(k), \quad k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

donde

$$E(k) = \operatorname{diag}\left(I_{n_1}, N(k)\right), A(k) = \operatorname{diag}\left(A_1(k), I_{n_2}\right), B(k) = \begin{pmatrix} B_1(k) \\ B_2(k) \end{pmatrix},$$

siendo $N(k)$ una matriz nilpotente y $n_2 = n - n_1$. El subsistema progresivo se denota por $(I_{n_1}, A_1(\cdot), B_1(\cdot))$ y el subsistema regresivo por $(N(\cdot), I_{n_2}, B_2(\cdot))$.

En la solución de este tipo de sistemas están involucradas las matrices de transición de estados. La matriz de transición de estados asociada al subsistema progresivo viene definida por

$$\phi_{A_1}(k, k_0) = A_1(k-1)A_1(k-2)\cdots A_1(0), \ \ k > k_0, \ \ \phi_{A_1}(k_0, k_0) = I$$

y la matriz de transición de estados asociada al subsistema regresivo viene definida por

$$\psi_N(k,k_0)=N(k)N(k+1)\cdots N(k_0-1),\ k<k_0,\ \psi_N(k_0,k_0)=I.$$

En concreto para $s=0,1,\ldots,N-1$, las matrices $A_{1,s}=\phi_{A_1}(s+N,s)$ y $N_s=\psi_N(s,s+N)$ se denominan matriz de monodromía progresiva y matriz de monodromía regresiva, respectivamente.

La solución de un sistema N-periódico progresivo-regresivo viene determinada por las siguientes expresiones,

$$x_1(k)=\phi_{A_1}(k,s)x_1(s)+\sum_{j=s}^{k-1}\phi_{A_1}(k,j+1)B_1(j)u(j)$$

y

$$x_2(k)=-\sum_{j=k}^{k+qN-1}\psi_N(k,j)B_2(j)u(j),\ k\geq s, \tag{1}$$

donde $q=\max\{\mathrm{ind}(N_s),\ s=0,1,\ldots,N-1\}$, siendo $\mathrm{ind}(N_s)$ el índice de nilpotencia de N_s.

Ahora se considera el sistema N-periódico generalizado con un retardo en el estado dado por la siguiente ecuación en diferencias,

$$E(k)x(k+1)=A_1(k)x(k)+A_d(k)x(k-1)+B(k)u(k),\ k\in\mathbb{Z}$$

donde $A_d(k+N)=A_d(k)\in\mathbb{R}^{n\times n}$, representa el retardo. Este sistema se denota por $(E(\cdot),A_1(\cdot),A_d(\cdot),B(\cdot))_N$.

Si $A_d(k)=\mathrm{diag}\,(A_{d1}(k),O_{n_2})$ y se aplica a este sistema la misma técnica que en el caso sin retardos vista anteriormente, se obtienen las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= A_{11}(k)x_1(k)+A_{d1}(k)x_1(k-1)+B_1(k)u(k), && (2)\\ N(k)x_2(k+1) &= x_2(k)+B_2(k)u(k),\quad k\in\mathbb{Z}. && (3)\end{aligned}$$

En este caso, el subsistema progresivo (2) se denota por $(I_{n_1},A_{11}(\cdot),A_{d1}(\cdot),B_1(\cdot))_N$ y el subsistema regresivo (3) por $(N(\cdot),I_{n_2},B_2(\cdot))_N$.

Antes de obtener la solución del subsistema progresivo (2), se definen las siguientes matrices N–periódicas.

En la notación utilizada a continuación, s señala el instante inicial, k indica el número de pasos, mientras que j es un contador. Para $s=0,1,\ldots,N-1$, $k\geq 0$ y $j=0,1,\ldots,k-1$, las matrices $S_k^j(s)$ vienen dadas por las siguientes expresiones,

- $S_j^j(s)=0$,
- $j=k-1,\ S_k^j(s)=B_1(s+j)$,
- $j=0,1,\ldots,k-2,\ S_k^j(s)=A_{11}(s+k-1)S_{k-1}^j(s)+A_{d1}(s+k-1)S_{k-2}^j(s)$.

Para $s=0,1,\ldots,N-1$, $k\geq 0$ y $j=0,1$, las matrices $G_k^j(s)$, se definen como

- $k=0,\ G_0^0(s)=I$ y $G_0^1(s)=0$,

- $k = 1,\ G_1^0(s) = A_{11}(s)$ y $G_1^1(s) = A_{d1}(s)$,
- $k \geq 2,\ j = 0, 1,\ G_k^j(s) = A_{11}(s+k-1)G_{k-1}^j(s) + A_{d1}(s+k-1)G_{k-2}^j(s)$.

Sin pérdida de generalidad se considera $s = 0$. Usando las matrices $S_k^j(0),\ j = 0, 1, \ldots, k-1$ y $G_k^0(0), G_k^1(0),\ k \geq 0$, se obtiene la solución explícita del subsistema progresivo dado en el siguiente resultado.

Teorema. Se considera el subsistema N–periódico progresivo con retardo en el estado $(I_{n_1}, A_{11}(\cdot), A_{d1}(\cdot), B_1(\cdot))_N$, dado en (2). La solución del sistema viene dada por

$$x_1(k) \quad = \quad G_k^0(0)x_1(0) + G_k^1(0)x_1(-1) + \mathbf{S}_k(0) \begin{bmatrix} u(0) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix} \tag{4}$$

siendo $\mathbf{S}_k(0) = [S_k^0(0), S_k^1(0), \ldots, S_k^{k-1}(0)]$.

Demostración. Para $k = k-1$, se reemplaza la solución (4) en el sistema (2),

$$\begin{aligned} x_1(k) \quad = \quad & A_{11}(k-1)x_1(k-1) + A_{d1}(k-1)x_1(k-2) + B_1(k-1)u(k-1) \\ & = A_{11}(k-1)(G_{k-1}^0(0)x_1(0) + G_{k-1}^1(0)x_1(-1) + \mathbf{S}_{k-1}(0)[u(0)', \ldots, u(k-2)']') \\ & + A_{11}(k-1)(G_{k-2}^0(0)x_1(0) + G_{k-2}^1(0)x_1(-1) + \mathbf{S}_{k-2}(0)[u(0)', \ldots, u(k-3)']') \\ & + B_1(k-1)u(k-1), \end{aligned}$$

donde M' denota la matriz transpuesta de M. Como,

$$\begin{aligned} &(A_{11}(k-1)G_{k-1}^0(0) + A_{d1}(k-1)G_{k-2}^0(0))x_1(0) = G_k^0(0)x_1(0), \\ &(A_{11}(k-1)G_{k-1}^1(0) + A_{d1}(k-1)G_{k-2}^1(0))x_1(-1) = G_k^1(0)x_1(-1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & A_{11}(k-1)\mathbf{S}_{k-1}(0)[u(0)', \ldots, u(k-2)']' + A_{d1}(k-1)\mathbf{S}_{k-2}(0)[u(0)', \ldots, u(k-3)']' \\ & + B_1(k-1)u(k-1) = \\ & = (A_{11}(k-1)S_{k-1}^0(0) + A_{d1}(k-1)S_{k-2}^0(0))u(0) \\ & + (A_{11}(k-1)S_{k-1}^1(0) + A_{d1}(k-1)S_{k-2}^1(0))u(1) + \ldots \\ & + (A_{11}(k-1)S_{k-1}^{k-3}(0) + A_{d1}(k-1)S_{k-2}^{k-3}(0))u(k-3) \\ & + (A_{11}(k-1)S_{k-1}^{k-2}(0)]u(k-2), B_1(k-1)u(k-1), \end{aligned}$$

se tiene que

$$x_1(k) \quad = \quad G_k^0(0)x_1(0) + G_k^1(0)x_1(-1) + \mathbf{S}_k(0)[u(0)', \ldots, u(k-1)']',$$

siendo $\mathbf{S}_k(0) = [S_k^0(0), S_k^1(0), \ldots, S_k^{k-1}(0)]$. □

Por otra parte, la solución del subsistema regresivo (3) viene definida por (1).

3. Alcanzabilidad de un sistema con retardo en el estado

En esta sección se estudia la propiedad de alcanzabilidad para un sistema discreto N–periódico con retardo en el estado. Para ello se necesita la matriz de alcanzabilidad que se construye a partir de la solución del sistema.

Un sistema es alcanzable, si existe una sucesión de controles que conduce dicho sistema desde el origen hasta el estado final.

Para el susbsistema progresivo, la matriz de alcanzabilidad viene definida por,

$$R^f_{kN}(I_{n_1}, A_{11}(\cdot), A_{d1}(\cdot), B_1(\cdot), s) = \mathbf{S}_{kN}(s) = \mathrm{fil}\left[S^j_{kN}(s)\right]_{j=0}^{kN-1}, \ k \in \mathbb{Z} \tag{5}$$

y para el subsistema regresivo, la matriz de alcanzabilidad viene definida por,

$$R^b\left(N(\cdot), I_{n_2}, B_2(\cdot), s\right) = \mathrm{fil}\left[\psi_N(s, s+j-1)B_2(s+j-1)\right]_{j=1}^{qN}, \tag{6}$$

$q = \max\{\mathrm{ind}(N_s),\ s = 0, 1, \ldots, N-1\}$. Nótese que un estado alcanzable x en el tiempo s en k pasos es dado por la sucesión de controles $u(s), u(s+1), \ldots, u(k+qN-1)$ y por las matrices (5-6).

Se define la matriz de alcanzabilidad en el instante $s,\ s = 0, 1, \ldots, N-1$, en nN pasos del sistema progresivo-regresivo (2-3), como una matriz diagonal por bloques dada por

$$\begin{aligned}&\mathcal{R}_{nN}(E(\cdot), A_1(\cdot), A_d(\cdot), B(\cdot), s) = \\ &\qquad \mathrm{diag}[R^f_{n_1N}(I_{n_1}, A_{11}(\cdot), A_{d1}(\cdot), B_1(\cdot), s), R^b\left(N(\cdot), I_{n_2}, B_2(\cdot), s\right)].\end{aligned}$$

En el siguiente resultado, se consigue una caracterización sobre la propiedad de alcanzabilidad.

Teorema. Se considera el sistema N–periódico con retardo en el estado $(E(\cdot), A_1(\cdot), A_d(\cdot),\ B(\cdot))_N$, dado en (2-3). El sistema es alcanzable en el tiempo $s,\ s = 0, 1, \ldots, N-1$ si, y sólamente si

$$\mathrm{rg}\left(\mathcal{R}_{nN}(E(\cdot), A_1(\cdot), A_d(\cdot), B(\cdot), s)\right) = n.$$

En el siguiente ejemplo se comprueba el resultado dado en el teorema anterior para un sistema discreto 2–periódico con retardo en el estado.

Ejemplo. Sea $(E(\cdot), A_1(\cdot), A_d(\cdot), B(\cdot))_2$ un sistema discreto 2–periódico con retardo en el estado dado por

$$E(0)=E(1)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad A_1(0)=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A_1(1)=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad A_d(0)=\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A_d(1)=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\quad B(0)=\begin{bmatrix}-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\quad B(1)=\begin{bmatrix}3\\1\\-2\\1\end{bmatrix}$$

Se consideran las matrices de alcanzabilidad para cada subsistema, siendo $s=0,1$. Para $s=0$ se obtiene,

$$\begin{aligned}&R_4^f(I_2,A_{11}(\cdot),A_{d1}(\cdot),B_1(\cdot),0)=\left[S_4^0(0)\ \ S_4^1(0)\ \ S_4^2(0)\ \ S_4^3(0)\right]\\&=\ [(A_{11}(1)A_{11}(0)A_{11}(1)+A_{11}(1)A_{d1}(0)+A_{d1}(1)A_{11}(1))B_1(0),\\&\quad\ (A_{11}(1)A_{11}(0)+A_{d1}(1))B_1(1),A_{11}(1)B_1(0),B_1(1)]\\&=\ \begin{bmatrix}-8&10&-2&3\\-8&13&0&1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Por otra parte, como $q=1$,

$$R^b\left(N(\cdot),I_2,B_2(\cdot),0\right)=[\psi_N(0,0)B_2(0),\psi_N(0,1)B_2(1)]=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{rg}\left(\mathcal{R}_8(E(\cdot),A_1(\cdot),A_d(\cdot),B(\cdot),0)\right)=4=n.$$

Para $s=1$ se obtiene,

$$\begin{aligned}&R_4^f(I_2,A_{11}(\cdot),A_{d1}(\cdot),B_1(\cdot),1)=\left[S_4^0(1)\ \ S_4^1(1)\ \ S_4^2(1)\ \ S_4^3(1)\right]\\&=\ [(A_{11}(1)A_{11}(0)A_{11}(1)+A_{11}(1)A_{d1}(0)+A_{d1}(1)A_{11}(1))B_1(1),\\&\quad\ (A_{11}(1)A_{11}(0)+A_{d1}(1))B_1(0),A_{11}(1)B_1(1),B_1(0)]\\&=\ \begin{bmatrix}42&-2&6&-1\\28&-4&4&0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

y

$$R^b\left(N(\cdot),I_2,B_2(\cdot),1\right)=[\psi_N(1,1)B_2(1),\psi_N(1,2)B_2(0)]=\begin{bmatrix}-2&1\\1&0\end{bmatrix}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{rg}\left(\mathcal{R}_8(E(\cdot),A_1(\cdot),A_d(\cdot),B(\cdot),1)\right)=4=n.$$

Y por el teorema anterior se concluye que el sistema es alcanzable para $s=0,1$.

Agradecimientos

Trabajo financiado por las ayudas españolas AGL2004-03262/AGR y GV06/118 y por el programa de investigación de la UPV.

Referencias

[1] P. Albertos, *Block multirate input–output model for sampled data control systems.* IEE Trans. Aut. Control, 35(9), (1990), 1085–1088.

[2] M. Bidani, M. Djemai, *A multirate digital control via a discrete–time observer for non–linear singularly perturber continuous–time systems*, International Journal of Control, 75(8), (2002), 591-613.

[3] R. Bru, R. Cantó, B. Ricarte, *Modelling nitrogen dynamics in citrus trees*, Mathematical and Computer Modelling, 38/10, (2003), 975-987.

[4] S.L. *Singular Systems of differential Equations*, Pitman Books Ltd., London, 1980.

[5] V.Y. Glicer, *Euclidean space controllability of singularly perturber linear systems with state delay*, System and Control Letters, 43, (2001), 181-191.

[6] J.A. Jacquez, C.P. Simon, *Quantitative theory of compartmental systems*, SIAM Review, 35(1), (1993), 43-79.

[7] D.G. Luenberger, *Introduction to dynamic systems*, Vol. I, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1979.

[8] M.S. Mahmoud, *Robust H_∞ control of discrete systems with uncertain parameters and unknown delays*, Automatica, 36, (2000), 627-635.

[9] P.C. Müller, *Linear mechanical descriptor systems: identification, analysis and design*, Preprints of IFAC, Belfort, (1997), 501-506.

[10] S.L. Niculescu *Delay effects on stability. A robust control approach*, 269, Springer-Verlag, Heidelberg, LNCIS, 2001.

[11] S.L. Niculescu and R. Lozano, *On passivity of linear delay systems*, IEE Transactions on Automatic Control, 46(3), (2001), 460-464.