XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–7)

El modelo BGK con potencial confinante: existencia, comportamiento asintótico y equilibrios Maxwellianos periódicos en tiempo

Roberta Bosi[1], María J. Cáceres[2]

[1] *Inst. Analysis und Scientific Computing, TU Wien, Austria . E-mail:* bosi@aurora.anum.tuwien.ac.at.
[2] *Dpto. de Matemática Aplicada, Univ. de Granada. E-mail:* caceresg@ugr.es.

Palabras clave: Modelo BGK–Boltzmann, potencial externo, comportamiento asintótico, estados estacionarios Maxwellianos

Resumen

Un modelo aproximado de la ecuación de Boltzmann en presencia de un potencial externo, que mantiene su no linealidad y sus propiedades cualitativas, es la ecuación de Boltzmann-BGK con potencial externo. Para esta ecuación estudiamos la existencia de solución, la estabilidad de sus estados estacionarios y la convergencia a los estados de equilibrio. Para un dato inicial con masa, entropía y energía total acotadas probamos existencia de solución y convergencia fuerte en L^1 hacia los estados de equilibrio Maxwellianos, mediante argumentos de compacidad. Un caso especialmente interesante es el que se plantea cuando se considera un potencial externo armónico, ya que aparece toda una familia de estados estacionarios dependientes del tiempo de forma periódica. Este fenómeno es compartido con la ecuación de Boltzmann y con algunos otros modelos cinéticos. Para todos estos modelos probamos la multiestabilidad de dichos estados y ofrecemos condiciones para identificar el estado de equilibrio.

1. Introducción

La ecuación de Boltzmann describe el comportamiento de un sistema con un número elevado de partículas en un gas diluido (ver [4]). Esta ecuación cinética tiene un operador de colisión complicado, con el que puede resultar difícil trabajar. Un modelo aproximado de la ecuación de Boltzmann, que mantiene su no linealidad y sus propiedades cualitativas, es la ecuación de Boltzmann-BGK (Bhatnagar-Gross-Krook [1]):

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f - \nabla_x \phi \cdot \nabla_v f = M[f] - f \,, \tag{1}$$

donde $M[f]$ es la *Maxwelliana local*

$$M[f](t,x,v) = \frac{\rho(t,x)}{(2\pi T(t,x))^{N/2}} \exp\left(-\frac{|v-u(t,x)|^2}{2T(t,x)}\right) \tag{2}$$

definida en términos de los momentos en velocidad de f: la densidad espacial ρ, la velocidad media u y la temperatura T dados por

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho|u|^2 + \rho T N \end{pmatrix}(t,x) = \int_{\mathbb{R}^N} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ |v|^2 \end{pmatrix} f(t,x,v)dv.$$

$f(t,x,v) \geq 0$ representa la densidad de probabilidad de partículas en la posición x, con velocidad v en el instante de tiempo t. El término de la izquierda (en la ecuación (1)) es el operador de transporte con un campo de fuerza $-\nabla_x\phi$, mientras que el término de la derecha describe las interacciones entre las partículas. La variable espacial x se mueve en todo $\mathbb{R}^N$, lo que hace necesaria la presencia de dicho campo externo (que viene dado por un potencial $\phi = \phi(x)$) que confine las partículas y propicie la existencia de estados de equilibrio. Este potencial confinante satisface las siguientes hipótesis:

$$\phi(x) \geq 0, \quad \phi \in C^2(\mathbb{R}^N), \quad \exp(-\phi(x)) \in L^1(\mathbb{R}^N), \tag{3}$$

$$|x||\nabla\phi(x)| \leq c_1(1+\phi(x)),\ |\nabla\phi(x)|(1+|v|^\sigma) \leq c_2(1+|v|^2+2\phi(x)), \tag{4}$$

para algún $\sigma \in (0,1]$ y $c_1, c_2 \in (0,+\infty)$. La hipótesis (3) asegura la existencia de un flujo Hamiltoniano asociado al término de transporte de (1) y la presencia de estados estacionarios no triviales con masa y energía finitas, en este sentido decimos que ϕ confina las partículas. En (4) incluimos restricciones técnicas referentes al crecimiento de ϕ en infinito (como ejemplo puede pensarse en un polinomio de orden arbitrario).

Para un dato inicial $f_0 \geq 0$ con masa, entropía y energía total finitas probamos la existencia de soluciones integrales (*mild*) en L^1, empleando argumentos de compacidad. Para ello seguimos la aproximación de Perthame [7], donde la dificultad en nuestro caso radica en el control de los momentos de orden alto en función de los de orden menor.

Cuando el tiempo tiende a infinito probamos que el sistema se relaja hacia una distribución Maxwelliana. Este fenómeno era conocido para el caso de dominios acotados (ver [5]).

Aplicando las técnicas de compacidad del resultado de existencia, mostramos que cuando $t_n \to \infty$ se tiene convergencia en $C([0,\tau]; L^1(\mathbb{R}^{2N}))$ de $f(t+t_n, x, v)$ hacia un estado Maxwelliano con la misma masa que el dato inicial y con energía y entropía acotadas.

Un caso particularmente interesante lo encontramos considerando el potencial armónico, es decir $\phi(x) = |x|^2/2$, porque aparece una familia de estados de equilibrio dependientes del tiempo de forma periódica. Todos los estados de esta familia son estables y su estabilidad puede ser estudiada considerando como funcional de Lyapunov la entropía relativa: $H[f,g] = \int f \log(f/g)\, dxdv$, que nos muestra también la estabilidad en términos de la norma L^1. Por otro lado, en esta familia de estados estables hay un único estado estacionario (es decir, independiente del tiempo) para el cual la entropía es mínima. Cabe preguntarse si el sistema se relajará hasta este estado estacionario. La presencia de los otros estados de equilibrio no nos garantiza la relajación hacia el estado estacionario. En esta dirección, encontramos condiciones necesarias sobre el dato inicial para esperar convergencia hacia el estado estacionario, en términos de la entropía.

Debemos señalar que este fenómeno de multiestabilidad no aparece en el caso del operador de relajación estudiado en [3], donde sólo hay un estado estacionario. La no linealidad del operador de colisión permite que estados Maxwellianos locales, dependientes del tiempo, sean soluciones del sistema impidiendo de este modo la unicidad del estado de equilibrio.

Resumimos en las siguientes secciones los resultados probados en [2]. En la Sección 2 analizamos la existencia de solución para el modelo presentado. La estabilidad de los estados estacionarios se aborda en la Sección 3. En la Sección 4 estudiamos la convergencia a los estados de equilibrio. Y finalmente, en la Sección 5 explicamos la multiestabilidad de los estados Maxwellianos para el caso del potencial armónico.

2. Existencia

Consideramos el problema de Cauchy asociado a la ecuación (1) con dato inicial

$$f(t=0,x,v) = f_0(x,v) \geq 0 \text{ c.p.d. en } \mathbb{R}^{2N}, \tag{5}$$

con masa, energía y entropía acotadas:

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} f_0(1+2\phi(x)+|v|^2+|\log f_0|)dxdv = c_0 < +\infty \tag{6}$$

y probamos la existencia de solución para este problema de valores iniciales. La existencia global en L^1 para todo el espacio $\mathbb{R}^N$ era conocida en el caso sin potencial confinante ([7] y [6]). En nuestro caso (con potencial confinante) adaptamos el esquema desarrollado por Perthame en [7], que no es en absoluto de aplicación directa. Las principales dificultades, en nuestro caso, son las acotaciones de los momentos de orden alto, la adaptación de los *averaging lemmas* a nuestro sistema Hamiltoniano y la construcción de los problemas aproximados apropiados para tratar con la Lipschitz-continuidad de la no linealidad. Nuestro principal teorema de existencia para la ecuación de Boltzmann-BGK (ver [2]) es:

Teorema 2.1 *Para el problema de Cauchy (1)-(6) existe una solución* integral (mild) *no negativa f, $(1+2\Phi(x)+|v|^2)f \in C([0,+\infty);L^1(\mathbb{R}^{2N}))$, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} (1+\Phi(x)+|v|^2+|\log f|)f\, dxdv \leq c(t_0) < +\infty, \quad \forall\, t \leq t_0. \tag{7}$$

Además, f satisface la conservación global de la masa y la energía total y sus momentos resuelven en sentido distribucional el siguiente sistema hidrodinámico:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho u) &= 0 \\ \partial_t(\rho u) + \nabla_x \cdot \Big(\int f v \otimes v dv \Big) + \rho \nabla_x \Phi &= 0 \\ \partial_t(\rho|u|^2 + N\rho T) + \nabla_x \cdot \Big(\int f v|v|^2 dv \Big) + 2\nabla_x \Phi \cdot (\rho u) &= 0 \end{aligned} \tag{8}$$

donde la última ecuación es válida sólo para potenciales con $\sigma = 1$ en (4).

Si $\phi = \phi(|x|)$ es un potencial radial y $\sigma = 1$ o $\int_{\mathbb{R}^{2N}} f_0 |x|^2 \, dx \, dv < \infty$, entonces f satisface la conservación de las componentes del momento angular $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{2N}} f(x_j v_k - x_k v_j) \, dxdv$, para cada $j, k = 1, \ldots, N$.

La demostración de este resultado se obtiene en tres pasos:

1. Acotación de los momentos de orden alto y construcción del lema de compacidad (*averaging lemmas en velocidad*) para sistemas Hamiltonianos.
2. Construcción de soluciones aproximadas que satisfacen las mismas acotaciones que f_0.
3. Paso al límite en las soluciones aproximadas usando los resultados del paso primero.

Una vez establecida la existencia de solución nos planteamos en las secciones siguientes el análisis de sus estados estacionarios.

3. Estabilidad

Las propiedades de estabilidad para el sistema BGK pueden ser analizadas en términos de la entropía logarítmica. Dadas dos funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R}^{2N})$ denotamos por $H[f] = \int_{\mathbb{R}^{2N}} f \log f \; dxdv$ la *entropía* de f y por

$$H[f, g] = \int_{\mathbb{R}^{2N}} f \log \frac{f}{g} \, dxdv$$

la *entropía relativa* de f con respecto a g, donde $\|f\|_{L^1} = \|g\|_{L^1}$. Las principales propiedades de la entropía y la definición de los estados de equilibrio los recogemos en el llamado H-Teorema.

Teorema 3.1 (H-Teorema) *Para una solución f del Teorema 2.1 se verifica la igualdad*

$$\partial_t(f \log f) + v \cdot \nabla_x(f \log f) - \nabla_x \Phi \cdot \nabla_v(f \log f) = (M[f] - f)(1 + \log f) \tag{9}$$

en sentido distribucional. Para cualquier $t_2 > t_1 \geq 0$

$$H[f(t_1)] - H[f(t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} (f - M[f])(\log f - \log M[f]) \, dvdxds \tag{10}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^{2N}} (f - M[f]) \log f \, dvdxds \; \geq 0 \,, \tag{11}$$

con igualdad si y sólo si $f(t) = M[f](t)$ c.p.d. en $\mathbb{R}^{2N}$, $\forall t \in [t_1, t_2]$. En este último caso decimos que la solución f es un estado de equilibrio para (1). Además, existe una constante d_0 independiente del tiempo tal que

$$d_0 \geq H[f_0] - H[f(t)] \geq \int_0^t H[f(s), M[f](s)] \; ds \tag{12}$$

y para cada equilibrio $\tilde{f}(t) > 0$ de (1), tal que $\tilde{f} \in C^1([0, +\infty) \times \mathbb{R}^{2N})$ y $|\log \tilde{f}(t, x, v)| \leq c(1 + 2\Phi(x) + |v|^2)$, se verifica

$$H[f_0, \tilde{f}(0)] - H[f(t), \tilde{f}(t)] = H[f_0] - H[f(t)] \geq 0 \,. \tag{13}$$

La estabilidad de Lyapunov (13) implica la estabilidad de la familia de equilibrios en la norma L^1. En efecto:

Corolario 3.2 *Para una solución $f(t)$ y un estado de equilibrio $\tilde{f}(t)$ de (1), con $\tilde{f}$ verificando las hipótesis del Teorema 3.1, se tiene*

$$\|f(t) - \tilde{f}(t)\|_{L^1}^2 \leq 2\|f_0\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})} H[f(0), \tilde{f}(0)], \quad t \geq 0.$$

En la Sección 5 analizaremos brevemente estos estados de equilibrio (Maxwellianas locales).

4. Convergencia al equilibrio

El principal teorema de [2], en esta dirección es:

Teorema 4.1 *Sea f una solución del sistema BGK (1)-(6) en el sentido del Teorema 2.1. Entonces, para cada sucesión t_n tendiendo a infinito, existe una subsucesión t_{n_k} y una Maxwelliana local en tiempo $m(t,x,v)$ tal que $f_{n_k}(t,x,v) = f(t_{n_k}+t,x,v)$ converge fuertemente en $C([0,\tau];L^1(\mathbb{R}^{2N}))$ a $m(t,x,v)$, para cada $0 < \tau < +\infty$. Además, $m(t,x,v) \in C([0,+\infty);L^1(\mathbb{R}^{2N}))$ es una solución integral (mild) no negativa de la ecuación*

$$\partial_t m + v \cdot \nabla_x m - \nabla_x \phi \cdot \nabla_v m = 0 \tag{14}$$

con condición inicial $m(0,x,v) = \lim_{n_k \to \infty} f(t_{n_k},x,v)$ en L^1.
$m(t)$ tiene la misma masa que f_0, energía total acotada y satisface

$$H[m(t)] \leq \lim_{t_{n_k} \to \infty} H[f_{n_k}(t)] = \lim_{t_{n_k} \to \infty} H[M[f_{n_k}](t)] \quad \text{c.p.d. en } t.$$

Para potenciales radiales $\phi = \phi(|x|)$ con crecimiento más que cuadrático (es decir, $|x|^{2+\beta} \leq c(1+\phi(x))$, con $\beta > 0$ y $|x| > R$), m tiene componente a componente el mismo momento angular que f_0.

Este resultado no nos da el orden de convergencia. En esta dirección estamos trabajando en la actualidad y en [2] demostramos un resultado preliminar, concretamente ese resultado es:

Corolario 4.2 *Sea f una solución del sistema BGK (1)-(6) en el sentido del Teorema 2.1. Entonces, existe una constante c tal que*

$$\frac{1}{t}\int_t^{2t} \|f - M[f]\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})}^2 \, ds \leq \frac{c}{t} \tag{15}$$

Usando el teorema del valor medio (formalmente) podemos escribir (15) como

$$\|f(t^*) - M[f(t^*)]\|_{L^1(\mathbb{R}^{2N})} \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \quad \text{para algún } t^* \in [t, 2t].$$

Este resultado no puede ser usado para derivar una velocidad de convergencia explícita hacia el estado de equilibrio Maxwelliano m. Esto podría ser alcanzado con otros métodos (hipocoercividad, método de entropía, ...). Para ello se requieren alta regularidad y acotaciones independientes del tiempo, propiedades que no han sido probadas aún para el sistema BGK, ni siquiera en el caso periódico del toro. Este es un tema en el que continuamos trabajando.

5. Estados Maxwellianos. Potencial armónico

Describimos brevemente en esta última sección las soluciones que son Maxwellinas locales (ver Teorema 4.1). En muchos modelos la única solución Maxwelliana es el estado estacionario (es decir, independiente del tiempo) y es única. Sin embargo, en el sistema de Boltzmann-BGK para ciertos potenciales externos encontramos una familia de estados de equilibrio dependientes del tiempo. Brevemente describimos aquí lo estudiado en [2] con todo detalle. Como ejemplo, analizamos el caso armónico isotrópico, es decir, $\phi(x) = \frac{|x|^2}{2}$, con $x \in \mathbb{R}^N$, en el que se presenta este fenómeno de *multiestabilidad*. Para este potencial tenemos descrita la familia de estados de equilibrio (ver [2] para detalles) que denotamos $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\frac{|x|^2}{2})$, sus propiedades quedan recogidas en el siguiente lema.

Lema 5.1 *Si la familia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\frac{|x|^2}{2})$ satisface:*

$$\int_{\mathbb{R}^{2\,N}} f_0(x_j v_k - x_k v_j)\, dx\, dv = 0 \quad \forall\ 1 \le j < k \le N, \tag{16}$$

entonces las siguientes afirmaciones son ciertas:

a) Existen elementos en $\mathcal{F}$ con entropía arbitrariamente próxima a la entropía de $f_s = \frac{1}{(2\pi)^N} \exp(-\frac{|x|^2+|v|^2}{2})$.

b) Si $\tilde{f} \in \mathcal{F}$ entonces las siguientes cantidades son iguales:

$$\frac{d}{dt} H[f(t), \tilde{f}(t)] = \frac{d}{dt} H[f(t), f_s] = \frac{d}{dt} H[f(t)]. \tag{17}$$

En particular, $\forall \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \mathcal{F}$ y $\forall t \ge 0$ se cumple

i) $H[f(t), \tilde{f}_1(t)] - H[f(t), \tilde{f}_2(t)] = H[f_0, \tilde{f}_1(0)] - H[f_0, \tilde{f}_2(0)]$.

ii) Si $H[f_0, \tilde{f}_1(0)] \le H[f_0, \tilde{f}_2(0)]$, entonces esta relación se mantiene para cada tiempo:

$$H[f(t), \tilde{f}_1(t)] \le H[f(t), \tilde{f}_2(t)], \quad \forall t \ge 0.$$

Puesto que el estado estacionario, f_s, es la solución con menos entropía cabe preguntarse si se podrá probar la convergencia hacia este estado. El problema recae en el hecho de que hay equilibrios estables, no estacionarios, con entropía tan próxima a la de f_s como queramos. En [2] aportamos condiciones sobre el dato inicial para asegurar que, en términos de la entropía, se está más cerca de f_s que de cualquier otro equilibrio de la familia $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\frac{|x|^2}{2})$, es decir, ofrecemos condiciones sobre el dato inicial que garantizan

$$H[f_0, f_s] < H[f_0, \tilde{f}(0)], \quad \forall \tilde{f} \in \mathcal{F} - \{f_s\}\,. \tag{18}$$

El Lema 5.1.b asegura que esta propiedad se mantiene para todo tiempo $t > 0$. Por otra parte, probamos por contradicción que (18) es una condición necesaria para la $H-$convergencia hacia f_s (es decir, $H[f(t), f_s] \to 0$ cuando $t \to \infty$). En efecto, si suponemos que $\exists \tilde{f}_1 \in \mathcal{F} - \{f_s\}$ con $H[f_0, \tilde{f}_1(0)] \le H[f_0, f_s]$, entonces la desigualdad de Csiszár-Kullback implica

$$\|f(t) - f_s\|^2_{L^1} \le 2H[f(t), f_s], \quad \|f(t) - \tilde{f}_1(t)\|^2_{L^1} \le 2H[f(t), \tilde{f}_1(t)].$$

Por tanto, si suponemos que $H[f(t), f_s] \to 0$ cuando $t \to \infty$, tenemos que $H[f(t), \tilde{f}_1(t)] \to 0$ cuando $t \to \infty$. De este modo f converge en la norma L^1 a la vez hacia f_s y $\tilde{f}_1$, lo que supone una contradicción.

Agradecimientos

La primera autora agradece el apoyo prestado por la DFG-Graduiertenkolleg *Nichtlineare kontinuierliche Systeme und deren Untersuchung mit numerischen, qualitativen und experimentellen Methoden*, mientras que la segunda autora agradece la financiación ofrecida por el proyecto DGI-MEC MTM2005-08024.

Referencias

[1] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, M. Krook, *A model of collision processes in gases*, Phys. Rev. 94 (1954), 511.

[2] R. Bosi, M. J. Cáceres, *The BGK model with external confining potential: Existence, long-time behaviour and time-periodic Maxwellian equilibria*, prepublicación Universität Münster .Angewandte Mathematick und Informatik"02/06-N, (2006).

[3] M. J. Cáceres, J. A. Carrillo, T. Goudon, *Equilibration rate for the linear inhomogeneous relaxation-time Boltzmann equation for charged particles*, Comm. in PDE., vol. 28, nos. 5 & 6,2003, pp. 969-989.

[4] C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its applications*, Springer, 1988.

[5] L. Desvillettes, *Convergence to equilibrium in large time for Boltzmann and B.G.K. equations*, Arch. Rational Mech. Anal. 110, 1 (1990), 73-91.

[6] S. Mischler, *Uniqueness for the BGK-equation in R^N and rate of convergence for a semi-discrete scheme.* Differential Integral Equations 9 (1996), no. 5, 1119–1138.

[7] B. Perthame, *Global existence to the BGK model of Boltzmann equation*, J. Differential Equations, 82, (1989), 191-205.