

Métodos linealmente implícitos de tipo Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios aplicados a problemas parabólicos semilineales: reducción de orden y técnicas para evitarla

B. BUJANDA¹, J.C. JORGE², M. J. MORETA³

^{1,2} Dpto. Ingeniería Matemática e Informática, Campus Arrosadía s/n, Universidad Pública de Navarra, Pamplona (Navarra). E-mails: blanca.bujanda@unavarra.es, jcjorge@unavara.es.

³ Dpto. de Fundamentos del Análisis Económico I. Universidad Complutense de Madrid. E-mail: mjesusmoreta@ccee.ucm.es

Palabras clave: Métodos Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios, Problemas semilineales, Reducción de orden

Resumen

A linearly implicit variant of fractional-step Runge-Kutta methods was introduced in [2] in order to integrate efficiently semi-linear multidimensional parabolic problems. The computational cost reduction of these methods is remarkable, compared to classical implicit methods but they present the classical drawback of order reduction which has its maximum relevance when they are applied to problems with boundary conditions depending on the time. In this paper we show a technique which permits us to avoid this reduction in some cases.

1. Introducción

En la naturaleza existen diversos fenómenos que son modelados mediante ecuaciones diferenciales parabólicas semilineales; por ejemplo, en [7] y sus referencias podemos encontrar modelos de polución de aire descritos en la forma:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \nabla \cdot (u c) = \nabla \cdot (K \nabla c) + R(c)$$

donde c es un vector de concentraciones de especies químicas, u es el vector velocidad, K es la matriz de difusión y R una función no lineal.

En esta comunicación vamos a mostrar métodos numéricos que integran eficientemente problemas parabólicos semilineales que, en forma abstracta, admiten ser enunciados como sigue:

$$\begin{aligned} &\text{Encontrar } y : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{H} \text{ solución de} \\ &\begin{cases} y'(t) = Ly(t) + f(t) + g(t, y), & \forall t \in [t_0, T], \\ y(t_0) = y_0, \\ By(t) = \beta(t) \in \mathcal{H}^b, & \forall t \in [t_0, T], \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

siendo \mathcal{H} y \mathcal{H}^b dos espacios de Hilbert de funciones definidas sobre $\Omega \subseteq \mathbb{R}^s$ y sobre su frontera Γ respectivamente; B un operador frontera definido entre \mathcal{H} y \mathcal{H}^b , L un operador lineal generalmente no acotado, definido sobre dominio denso en \mathcal{H} con valores en \mathcal{H} , $f(t)$ el término fuente, $g(t, y)$ una función regular que marca el aporte no lineal y $\beta(t)$ una condición de contorno dependiente del tiempo. Consideraremos que se tiene suficiente regularidad y compatibilidad en los datos para asegurar que la solución de (1) es suficientemente diferenciable.

Supondremos además que el operador $-L_0 : \mathcal{D} \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que es la restricción del operador L al $\text{Ker}(B)$ es lineal, en general no acotado, maximal y monótono, es decir, $\forall u \in \mathcal{H}, \exists v \in \mathcal{D}$, tal que $(I - L_0)v = u$ y $((-L_0v, v)) \geq 0$,¹ $\forall v \in \mathcal{D}$ respectivamente.

La obtención de soluciones numéricas para problemas de la forma (1) normalmente requiere realizar un doble proceso de discretización espacial y temporal. Para la discretización temporal se puede optar por utilizar métodos explícitos o implícitos. Si se utilizan métodos explícitos, el costo computacional del método será elevado en el caso de utilizar mallas finas para la variable espacial, ya que tendremos que utilizar pasos de tiempo pequeños para asegurar la estabilidad numérica del algoritmo. Si nos decidimos por métodos implícitos clásicos nos encontraremos con el problema de tener que resolver en cada etapa sistemas no lineales que pueden llegar a tener una dimensión muy elevada; al resolver estos sistemas utilizando métodos iterativos se suele observar habitualmente una velocidad de convergencia lenta. Además en el caso de problemas no lineales se han utilizado habitualmente métodos numéricos con propiedades de tipo B-estabilidad. Este tipo de propiedades es muy restrictiva e implica la utilización de métodos de orden bajo o, en el caso de optar por métodos de orden alto, métodos totalmente implícitos.

Con el fin de evitar estos inconvenientes, en [2] los autores presentaron un tipo de métodos que integra de manera muy eficiente esta clase de problemas. La base de los métodos indicados es la misma que la de los métodos de Pasos Fraccionarios cuando son aplicados a problemas parabólicos lineales. Así los métodos se construyen combinando discretizaciones espaciales adecuadas con discretizaciones temporales de tipo Runge-Kutta Aditivo en las que la aportación de la parte lineal de la función derivada, $Ly(t) + f(t)$, se define mediante un método Runge-Kutta de Pasos Fraccionarios (RKPF) (ver [6]) y de la parte no lineal, $g(t, y)$, mediante un método RK explícito adecuado. Los algoritmos que se obtienen siguiendo este proceso presentan la característica de ser incondicionalmente convergentes imponiendo solamente propiedades de tipo estabilidad absoluta lineal (ver [3]); además, si la descomposición del operador elíptico y del término fuente se realiza de manera adecuada, el costo computacional es bajo, comparado con los algoritmos obtenidos con métodos implícitos clásicos, incluyendo algunos otros métodos linealmente implícitos, ya que, en este caso, en la resolución de las etapas intermedias aparecen sistemas lineales reducibles a una serie de subsistemas (muy simples en algunos casos) cuya resolución puede hacerse en paralelo.

¹ $((\cdot, \cdot))$ denota un producto escalar en \mathcal{H} ; posteriormente usaremos $\|\cdot\|$ para indicar su norma asociada.

Al integrar este tipo de problemas mediante métodos de un paso suele presentarse el fenómeno conocido como reducción de orden, que alcanza su máxima expresión cuando las condiciones de contorno varían en el tiempo (ver [4, 5]). Mostraremos una técnica para evitar esta reducción de orden similar a la propuesta en [1]. Este proceso tiene la ventaja del bajo costo computacional adicional que añade al algoritmo, puesto que sólo afecta a la evaluación de ciertos datos en la frontera del dominio Ω .

2. Un método de discretización temporal

El método de integración temporal linealmente implícito introducido en [2] proporciona aproximaciones numéricas Y^m de la solución exacta $y(t_m)$ mediante el siguiente esquema:

$$\left\{ \begin{array}{l} Y^0 = y_0 \in \mathcal{H}, \\ Y^{m,i} = Y^m + \tau \sum_{j=1}^i a_{ij}^{k_j} (L_{k_j} Y^{m,j} + f_{k_j}(t_{m,j})) + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{n+1} g(t_{m,j}, Y^{m,j}), \\ \quad \text{para } i = 1, \dots, s, \\ Y^{m+1} = Y^m + \tau \sum_{i=1}^s b_i^{k_i} (L_{k_i} Y^{m,i} + f_{k_i}(t_{m,i})) + \tau \sum_{i=1}^s b_i^{n+1} g(t_{m,i}, Y^{m,i}). \end{array} \right. \quad (2)$$

donde τ indica el paso en tiempo (que, por simplicidad, consideraremos constante), $t_m = t_0 + m\tau$ y $t_{m,i} = t_0 + (m + c_i)\tau$, $\forall m = 0, 1, 2, \dots, n$ es el número de niveles del método RKPF involucrado, $k_j \in \{1, \dots, n\}$ para $j = 1, 2, \dots, s$ y las aproximaciones intermedias $Y^{m,i}$ para $i = 1, \dots, s$ son denominadas etapas intermedias del método, las cuales pueden ser consideradas aproximaciones numéricas de la solución exacta $y(t)$ en $t_{m,i}$.

Para poder aplicar el esquema anterior, en el caso de considerar condiciones de contorno homogéneas, es suficiente asumir que el operador lineal L admite una descomposición en n sumandos de la forma $L = \sum_{i=1}^n L_i(t)$ con $L_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{H}$ maximales, monótonos y tales que $\mathcal{D} = \bigcap_{i=1}^n \mathcal{D}_i$. Definimos los operadores $B_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{H}_i^b$, $i = 1, \dots, n$ tales que $\text{Ker}(B) = \bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(B_i)$ y $\overline{\text{Ker}(B_i)} = \mathcal{D}_i$ (ver [2, 3]). Para el caso general, es decir, condiciones de contorno no homogéneas, supondremos además que los operadores $-L_{i,0} : \mathcal{D}_i \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ que son la restricción de los operadores $-L_i$ al $\text{Ker}(B_i)$ son lineales, en general no acotados, maximales y monótonos. Para que la expresión de los algoritmos, así como de los resultados, sea lo más simétrica posible, se ha descompuesto además el término fuente en n sumandos suficientemente regulares $f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t)$.

Los coeficientes de estos métodos se pueden organizar en una tabla de la forma:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} \mathcal{C} & \mathcal{A}^1 & \dots & \mathcal{A}^n & \mathcal{A}^{n+1} \\ \hline & (b^1)^T & \dots & (b^n)^T & (b^{n+1})^T \end{array}$$

donde $\mathcal{C} = \text{diag}(c_1, \dots, c_s) \in \mathbb{R}^{s \times s}$. Para obtener estas tablas hemos completado las ma-

trices con algunos coeficientes nulos en la forma:

$$\mathcal{A}^k = (a_{ij}^k) \in \mathbb{R}^{s \times s} \text{ donde } a_{ij}^k = \begin{cases} a_{ij}^{n+1} & \text{si } k = n+1 \text{ y } i > j, \\ a_{ij}^{k_j} & \text{si } k = k_j \text{ y } i \geq j, \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases}$$

$$b^k = (b_j^k) \in \mathbb{R}^s \text{ donde } b_j^k = \begin{cases} b_j^{n+1} & \text{si } k = n+1, \\ b_j^{k_j} & \text{si } k = k_j, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

En (2) puede observarse como el costo computacional de estos esquemas puede llegar a ser muy bajo, ya que en cada etapa tenemos que resolver problemas en los que aparece implícitamente tan solo uno de los operadores en los que se ha fraccionado el operador elíptico L , y el aporte de la parte no lineal $g(t, y)$ viene dado de forma explícita. Así, los sistemas que se deben resolver en cada una de las etapas son lineales. No obstante para que cada una de estas etapas tenga una única solución en el caso general, es decir, condiciones de contorno dependientes del tiempo, es necesario añadir en el esquema las condiciones frontera de las etapas. Así, para cada $i = 1, \dots, s$ tenemos que resolver:

$$(I - \tau a_{ii}^{k_i} L_{k_i}) Y^{m,i} = Y^m + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{k_j} (L_{k_j} Y^{m,j} + f_{k_j}(t_{m,j})) + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{n+1} g(t_{m,j}, Y^{m,j}),$$

$$B_{k_i} Y^{m,i} = \beta_{m,i}$$

donde se suele tomar como valor de contorno

$$\beta_{m,i} \equiv B_{k_i} u(t_{m,i}) = \beta(t_{m,i}). \quad (3)$$

Asumiremos que los problemas de contorno de la forma

$$(I - d l_{k_i}) u = f,$$

$$B_{k_i} u = \beta,$$

admiten solución única para todo $d \in (0, D]$ cumpliendo además que $\|u\| \leq C(\|f\| + \|\beta\|_b)$, siendo C una constante independiente de d . Las condiciones de contorno elegidas en la forma (3) provocan una reducción en el orden del método, tal y como veremos posteriormente.

El esquema (2), con las condiciones de contorno indicadas para las etapas puede ser escrito en forma abreviada utilizando la siguiente notación tensorial: I_H denota la matriz identidad en \mathcal{H} ; dados $M \equiv (m_{ij}) \in \mathbb{R}^{s \times s}$ y $v \equiv (v_i) \in \mathbb{R}^s$, denotamos por $\bar{M} \equiv (m_{ij} I_H) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s, \mathcal{H}^s)$ y $\bar{v} \equiv (v_i I_H) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^s, \mathcal{H})$. Agrupamos las etapas $Y^{m,i}$, las evaluaciones de $f_i(t)$, $g(t, y)$ y L_i para todo $i = 1, \dots, n$, y para todo $m = 1, 2, \dots$, en la forma

$$\mathbf{Y}^m = (Y^{m,1}, \dots, Y^{m,s})^T \in \mathcal{H}^s,$$

$$\mathbf{F}_i^m = (f_i(t_{m,1}), \dots, f_i(t_{m,s}))^T \in \mathcal{H}^s,$$

$$\mathbf{G}^m(\mathbf{Y}^m) = (g(t_{m,1}, Y^{m,1}), \dots, g(t_{m,s}, Y^{m,s}))^T \in \mathcal{H}^s,$$

$$\hat{L}_i = \text{diag}(L_i, \dots, L_i) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}_i^s, \mathcal{H}),$$

$$\mathbf{B} \mathbf{Y}^m = (B_{k_1} Y^{m,1}, \dots, B_{k_s} Y^{m,s})^T \in \mathcal{H}_{k_1}^b \times \dots \times \mathcal{H}_{k_s}^b,$$

$$\beta^m = (\beta_{m,1}, \dots, \beta_{m,s})^T \in \mathcal{H}_{k_1}^b \times \dots \times \mathcal{H}_{k_s}^b.$$

Así, se tiene que las etapas vienen dadas por

$$\begin{cases} \left(\bar{I} - \tau \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \hat{L}_i \right) \mathbf{Y}^m &= \bar{e} Y^m + \tau \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \mathbf{F}_i^m + \tau \bar{\mathcal{A}}^{n+1} \mathbf{G}^m(\mathbf{Y}^m), \\ \mathbf{B} \mathbf{Y}^m &= \beta^m \quad \text{siendo } \beta_{m,i} = B_{k_i} y(t_{m,i}), \end{cases}$$

y para avanzar un paso aplicamos:

$$Y^{m+1} = Y^m + \tau \sum_{i=1}^n \bar{b}^i{}^T (\hat{L}_i \mathbf{Y}^m + \mathbf{F}_i^m) + \tau \bar{b}^{n+1}{}^T \mathbf{G}^m(\mathbf{Y}^m).$$

Recordemos que un método RKPF se dice *consistente* con orden clásico p si el error local verifica, para funciones $y(t)$ suficientemente regulares, que $\|e^{m+1}\| = \|y(t_{m+1}) - \bar{Y}^{m+1}\| = \mathcal{O}(\tau^{p+1})$ donde \bar{Y}^{m+1} es la solución numérica obtenida a partir del esquema:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \left(\bar{I} - \tau \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \hat{L}_i \right) \bar{\mathbf{Y}}^m = \bar{e} y(t_m) + \tau \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \mathbf{F}_i^m + \tau \bar{\mathcal{A}}^{n+1} \mathbf{G}^m(\bar{\mathbf{Y}}^m), \\ \mathbf{B} \bar{\mathbf{Y}}^m = \beta^m, \quad \text{siendo } \beta_{m,i} = B_{k_i} y(t_{m,i}), \end{array} \right. \\ \bar{Y}^{m+1} = y(t_m) + \tau \sum_{i=1}^n \bar{b}^i{}^T (\hat{L}_i \bar{\mathbf{Y}}^m + \mathbf{F}_i^m) + \tau \bar{b}^{n+1}{}^T \mathbf{G}^m(\bar{\mathbf{Y}}^m). \end{cases}$$

El orden observado finalmente en el esquema tiene que ver con el orden de las etapas intermedias; un método RKPF se dice que tiene orden de etapas q cuando $q = \min\{p, \tilde{q}\}$ siendo p el orden clásico y \tilde{q} el máximo valor tal que, $(\mathcal{C})^k e - k \mathcal{A}^j (\mathcal{C})^{k-1} e = 0, \forall j = 1, \dots, n+1, k = 1, \dots, \tilde{q}$. Notar que, en este tipo de métodos si se considera que la primera etapa no es explícita, el orden por etapas es cero, ya que $\mathcal{A}^{n+1} e \neq \mathcal{A}^k e$ en la primera componente para algún $k = 1, \dots, n$; por ello recuperar el orden perdido es especialmente importante en estos casos. Para ver que se produce una pérdida de orden descomponemos el error local en la forma²:

$$e^{m+1,[0]} = y(t_{m+1}) - \bar{Y}^{m+1,[0]} = (y(t_{m+1}) - \tilde{Y}^{m+1,[0]}) + (\tilde{Y}^{m+1,[0]} - \bar{Y}^{m+1,[0]}),$$

donde hemos introducido $\tilde{Y}^{m+1,[0]}$ que se obtiene a partir de

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^{m+1,[0]} &= y(t_m) + \tau \sum_{i=1}^n \bar{b}^i{}^T (\hat{L}_i \tilde{\mathbf{Y}}^{m,[0]} + \mathbf{F}_i^m) + \tau \bar{b}^{n+1}{}^T \mathbf{G}^m(\tilde{\mathbf{Y}}^{m,[0]}), \\ \tilde{\mathbf{Y}}^{m,[0]} &= [\mathbf{Y}^{m,1,[0]}, \dots, \mathbf{Y}^{m,s,[0]}]^T, \quad \text{siendo } Y^{m,i,[0]} = y(t_{m,i}). \end{aligned}$$

Esta solución está relacionada con los errores que aparecen en las fórmulas de cuadratura de las etapas intermedias que llamaremos, $\delta^{m,[0]}$, y que definiremos como sigue

$$\begin{cases} \left(\bar{I} - \tau \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \hat{L}_i \right) \tilde{\mathbf{Y}}^{m,[0]} = \bar{e} y(t_m) + \tau \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \mathbf{F}_i^m + \tau \bar{\mathcal{A}}^{n+1} \mathbf{G}^m(\tilde{\mathbf{Y}}^{m,[0]}) + \delta^{m,[0]}, \\ \mathbf{B} \tilde{\mathbf{Y}}^{m,[0]} = \beta^{m,[0]}. \end{cases}$$

²El superíndice ^[0] indica que no se ha realizado ninguna modificación, por ejemplo, $e^{m+1,[0]}$ indica e^{m+1} .

Para acotar el primero de los sumandos $(y(t_{m+1}) - \tilde{Y}^{m+1,[0]})$ realizamos adecuados desarrollos de Taylor para las expresiones anteriores y aplicamos las condiciones de orden $(b^{k_1})^T(\mathcal{C})^\rho e = \frac{1}{\rho+1}$, $0 \leq \rho \leq p-1$, obteniendo $\|y(t_{m+1}) - \tilde{Y}^{m+1,[0]}\| = \mathcal{O}(\tau^{p+1})$. Para acotar el segundo de los sumandos realizamos también en este caso adecuados desarrollos de Taylor para la expresión de $\delta^{m,[0]}$ y, teniendo en cuenta el orden de las etapas intermedias, se tiene: $\|\tilde{Y}^{m+1,[0]} - \bar{Y}^{m+1,[0]}\| = \mathcal{O}(\tau^{\min\{\bar{q}+1, p+1\}}) = \mathcal{O}(\tau^{q+1})$.

De esta forma se obtiene que

$$\|e^{m+1,[0]}\| \leq \mathcal{O}(\tau^{q+1}) + \mathcal{O}(\tau^{p+1}) = \mathcal{O}(\tau^{\min\{q+1, p+1\}}).$$

Siguiendo las ideas utilizadas en [1] para evitar la reducción de orden que puede aparecer en la integración numérica de problemas no lineales (los autores se refieren a métodos de tipo Rosenbrock) se definen los valores de contorno de las etapas intermedias en la forma:

$$\begin{cases} Y^{m,i,[0]} &= y(t_{m,i}), \\ \beta_{m,i,[0]} &= B_{k_i} Y^{m,i,[0]} = B_{k_i} y(t_{m,i}), \quad i = 1, \dots, s, \\ \\ \begin{cases} Y^{m,i,[1]} &= y(t_m) + \tau \sum_{j=1}^i a_{ij}^{k_j} \left(L_{k_j} Y^{m,k_j,[0]} + f_{k_j}(t_{m,j}) \right) + \tau \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{n+1} g(t_{m,j}, Y^{m,j,[0]}), \\ \beta_{m,i,[1]} &= B_{k_i} Y^{m,i,[1]}, \quad i = 1, \dots, s. \end{cases} \end{cases}$$

Utilizando notación tensorial queda:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}^{m,[1]} &= \bar{e} y(t_m) + \tau \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \mathbf{Y}^{m,[0]} + \tau \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \mathbf{F}_i^m + \tau \bar{\mathcal{A}}^{n+1} \mathbf{G}^m(\mathbf{Y}^{m,[0]}), \\ \mathbf{B} \mathbf{Y}^{m,[1]} &= \beta^{m,[1]}, \quad \text{siendo } \beta_{m,i,[1]} = B_{k_i} Y^{m,i,[1]}. \end{cases}$$

En este caso, el error local mejorado se calcula en la forma:

$$e^{m+1,[1]} = y(t_{m+1}) - \bar{Y}^{m+1,[1]} = (y(t_{m+1}) - \tilde{Y}^{m+1,[1]}) + (\tilde{Y}^{m+1,[1]} - \bar{Y}^{m+1,[1]}),$$

expresión que nos permite deducir que

$$\|e^{m+1,[1]}\| \leq \mathcal{O}(\tau^{q+2}) + \mathcal{O}(\tau^{p+1}) = \mathcal{O}(\tau^{\min\{q+2, p+1\}}),$$

y por lo tanto afirmar que de forma muy sencilla, se puede recuperar un orden siempre que haya una pérdida de orden debida a que el orden de las etapas es inferior al orden del método, lo que es habitual.

3. Discretización total

Para obtener la solución numérica del problema inicial debemos completar el proceso de discretización temporal con una segunda etapa de discretización en espacio. La formulación que vamos a indicar permite incluir tanto el caso de Diferencias Finitas como el de Elementos Finitos. Para discretizar el dominio espacial Ω consideramos un parámetro $h \in (0, h_0]$ destinado a tender a cero y para cada h tomamos un espacio de Hilbert V_h

finito dimensional con norma $\|\cdot\|_h$; para la discretización de la frontera consideramos V_h^b , $V_{i,h}^b$ y las normas $\|\cdot\|_h^b$ y $\|\cdot\|_{i,h}^b$.

Para conectar los espacios consideramos las siguientes aplicaciones:

$$\begin{aligned}
 r_h : \mathcal{D} \subset \mathcal{H} &\longrightarrow V_h && \text{cumpliendo que } \lim_{h \rightarrow 0} \|r_h y\|_h = \|y\|, && \forall y \in \mathcal{D}, \\
 r_{i,h} : \mathcal{D}_i \subset \mathcal{H} &\longrightarrow V_h && \text{cumpliendo que } \lim_{h \rightarrow 0} \|r_{i,h} y\|_h = \|y\|, && \forall y \in \mathcal{D}_i, \\
 \pi_h : \mathcal{H} &\longrightarrow V_h && \text{cumpliendo que } \lim_{h \rightarrow 0} \|\pi_h g\|_h = \|g\|, && \forall g \in \mathcal{H}, \\
 \pi_h^b : \mathcal{H}^b &\longrightarrow V_h^b && \text{cumpliendo que } \lim_{h \rightarrow 0} \|\pi_h^b g\|_h^b \rightarrow \|g\|, && \forall g \in \mathcal{H}^b \\
 \pi_{i,h}^b : \mathcal{H}_i^b &\longrightarrow V_{i,h}^b && \text{cumpliendo que } \lim_{h \rightarrow 0} \|\pi_{i,h}^b g\|_{i,h}^b \rightarrow \|g\|, && \forall g \in \mathcal{H}_i^b.
 \end{aligned}$$

En estos espacios consideramos aproximaciones discretas de los operadores que aparecen en el problema continuo. Estos operadores discretos heredarán algunas de las características de los operadores continuos; así, tomamos $L_h : V_h \rightarrow V_h$ como aproximación discreta de L ; $L_{i,h} : V_h \rightarrow V_h$ como aproximante de L_i para $i = 1, \dots, n$; para los operadores frontera $B : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}^b$ y $B_i : \mathcal{D}_i \rightarrow \mathcal{H}_i^b$ consideramos las aproximaciones discretas $B_h : V_h \rightarrow V_h^b$ y $B_{i,h} : V_{i,h} \rightarrow V_{i,h}^b$ respectivamente.

Con el fin de realizar el estudio de la convergencia del esquema totalmente discreto se introduce el concepto de error local de truncatura asociado a los operadores L y L_i en la forma:

$$\tau_h^L(v) \equiv L_h r_h v - \pi_h L v, \quad \forall v \in \mathcal{D} \quad \text{y} \quad \tau_h^{L_i}(v) \equiv L_{i,h} r_{i,h} v - \pi_h L_i v, \quad \forall v \in \mathcal{D}_i,$$

y para los operadores del contorno B y B_i en la forma:

$$\tau_h^B(v) \equiv B_h r_h v - \pi_h^b B v, \quad \forall v \in \mathcal{D} \quad \text{y} \quad \tau_h^{B_i}(v) \equiv B_{i,h} r_{i,h} v - \pi_{i,h}^b B_i v, \quad \forall v \in \mathcal{D}_i.$$

En este contexto diremos que las aproximaciones obtenidas son consistentes de orden r si para funciones suficientemente regulares se tiene que:

$$\|\tau_h^L(v)\| = \mathcal{O}(h^r), \quad \|\tau_h^{L_i}(v)\| = \mathcal{O}(h^r), \quad \|\tau_h^B(v)\| = \mathcal{O}(h^r) \quad \text{y} \quad \|\tau_h^{B_i}(v)\| = \mathcal{O}(h^r).$$

El esquema totalmente discreto que se obtiene viene dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \left(\bar{I}_h - \tau \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \hat{L}_{i,h} \right) \mathbf{Y}_h^{m,[j]} = Y_h^{m,[j]} + \tau \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{A}}^i \mathbf{F}_{i,h}^m + \tau \bar{\mathcal{A}}^{n+1} \mathbf{G}_h^m(\mathbf{Y}_h^{m,[j]}), \\ \mathbf{B}_h \mathbf{Y}_h^{m,[j]} = \beta_h^{m,[j]}, \quad \text{siendo } \beta_{h,m,i,[j]} = \pi_{k_i,h}^b B_{k_i} Y^{m,i,[j]}, \end{array} \right. \\ Y_h^{m+1,[j]} = Y_h^{m,[j]} + \tau \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{b}}^i T (\hat{L}_{i,h} \mathbf{Y}_h^{m,[j]} + \mathbf{F}_{i,h}^m) + \tau \bar{\mathbf{b}}^{n+1} T \mathbf{G}_h^m(\mathbf{Y}_h^{m,[j]}), \end{array} \right.$$

donde $j = 0$, corresponde a considerar condiciones de contorno clásicas y $j = 1$, al caso de considerar condiciones de contorno mejoradas. Para realizar un análisis típico de la convergencia de este esquema combinando propiedades de estabilidad y de consistencia debemos recordar que la discretización del operador $(I - \tau c L)$ se dice estable si y sólo si $\|(I_h - \tau c L_h)^{-1}\|_h \leq C, \forall h \in (0, h_0]$. Estas propiedades se tienen como consecuencia

de preservar algunas de las propiedades relacionadas con el buen planteamiento de los problemas (4). Para estudiar la convergencia asumiremos que los siguientes problemas (relacionados con la resolubilidad de las etapas discretizadas) tienen solución única:

$$\begin{aligned}(I_h - c\tau A_{i,h})v_h &= w_h \in V_h, \quad (c > 0), \\ B_{i,h}v_h &= v_{b,h} \in V_{i,h}^b,\end{aligned}$$

verificando además que $\|v\|_h \leq C(\|w_h\|_h + \|v_{b,h}\|_{b,h})$, con C independiente de $\tau \in (0, \tau_0)$ y de h .

Recordemos que el esquema totalmente discreto se dice que es convergente de orden p en tiempo y r en espacio si el error global (definido en el instante t_m como $E_h^{m,[j]} = \|r_h y(t_m) - Y_h^{m,[j]}\|_h$ para $j = 0, 1$) verifica que $E_h^{m,[j]} = \mathcal{O}(\tau^p + h^r)$.

En el contexto que nos ocupa se puede demostrar que si la integración temporal se realiza utilizando un adecuado método RKPF linealmente implícito A-estable (ver [3]) con orden clásico p y orden de etapas q (ver [4]) y la discretización espacial es estable, consistente de orden r , las aplicaciones de conexión verifican las propiedades de compatibilidad entre normas, las restricciones de los operadores discretos $L_{i,h}$ al $\text{Ker}(B_{i,h})$ son monótonos y conmutativos y además se cumple que $\|(\pi_h - r_h)u\|_h \leq Ch^r$, $u \in \mathcal{H}$, entonces se tiene la siguiente cota para el error global

$$E_h^{m,[j]} = \mathcal{O}(h^r + \tau^{\min\{p,q+j\}}).$$

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con ayuda de los proyectos: MTM 2004-08012, MTM 2004-05521 y la Red Temática 05/R-8.

Referencias

- [1] I. Alonso-Mallo & B. Cano *Efficient time integration of nonlinear partial differential equations by means of Rosenbrock methods*, Applied Mathematics Reports, Universidad de Valladolid (2006).
- [2] B. Bujanda & J.C. Jorge, *Efficient linearly implicit methods for nonlinear multidimensional parabolic problems*, J. Comput. Appl. Math. **164/165** (2004), 159–174.
- [3] B. Bujanda & J.C. Jorge, *Stability results for linearly implicit Fractional Step discretizations of non-linear time dependent parabolic problems*, Appl. Numer. Math. **56** (2006), no. 8, 1061–1076.
- [4] B. Bujanda & J.C. Jorge, *Order conditions for linearly implicit Fractional Step Runge-Kutta methods*, IMAJNA (en prensa).
- [5] Sanz-Serna, J. M.; Verwer, J. G. & Hundsdorfer, W. H., *Convergence and order reduction of Runge-Kutta schemes applied to evolutionary problems in partial differential equations*, Numer. Math. **50** (1987), no. 4, 405–418.
- [6] Yanenko, N.N., “The method of fractional steps”, Springer, 1971.
- [7] Zlatev, Z. “Using efficient numerical methods in large-scale air pollution modelling”, *Problems in Modern Applied Mathematics*, 60–65.