XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Simetrías potenciales de un modelo matemático que describe las vibraciones de una viga

M.S. Bruzón[1], M.L. Gandarias[1], J.C. Camacho[1]

[1] *Dpto. Matemáticas, Universidad de Cádiz, Aptdo. 40, 11510 Puerto Real (Cádiz). E-mails:* matematicas.casem@uca.es, marialuz.gandarias@uca.es, josecarlos.camacho@uca.es.

Palabras clave: Ecuaciones en derivadas parciales, simetrías, ecuación de viga

Resumen

En este trabajo presentamos un estudio, desde el punto de vista de la teoría de las simetrías potenciales clásicas y no clásicas para ecuaciones en derivadas parciales, del modelo que describe las vibraciones de una viga.

1. Introducción

En [9] McKenna y otros colaboradores, en el estudio de la dinámica no lineal de las ondas solitarias, utilizaron métodos numéricos para buscar soluciones aproximadas de la ecuación en derivadas parciales

$$u_{tt} + u_{xxxx} + f(u) = 0. \tag{1}$$

La Ec. (1) describe la propagación de las ondas de flexión que produce una viga, en forma de barra rectangular, cuando existen pequeñas vibraciones transversales. $u(x,t)$ mide el desplazamiento transversal, x es la coordenada espacial, t la coordenada temporal y el término $f(u)$ representa el efecto que debe realizar el cable que sostiene la viga para contrarrestar la fuerza de la gravedad.

Sophus Lie (1849-1899) inició el estudio de los grupos de transformaciones de Lie al descubrir que muchos de los métodos conocidos de resolución de ecuaciones diferenciales eran casos específicos de un procedimiento general de integración basado en la invarianza de los sistemas de ecuaciones diferenciales bajo un grupo continuo de simetrías. Cada grupo de simetría hallado permite reducir el número de variables que intervienen en la ecuación en derivadas parciales (EDPs), o bien reducir el orden de la ecuación diferencial ordinaria (EDOs) según el caso. En [4] Bruzón, Ramírez y Camacho estudiaron las simetrías clásicas de la ecuación (1).

En 1969, Bluman y Cole [1], en el estudio de la ecuación del calor, desarrollaron el método no clásico al comprobar que existían transformaciones por simetrías que no eran invariantes bajo el grupo uniparamétrico de transformaciones. En [5] Camacho y Bruzón obtuvieron las simetrías no clásicas de la ecuación (1). Para $f(u)=0$, Gandarias y Bruzón [7] estudiaron las simetrías clásicas y no clásicas de esta ecuación.

En [2, 3] Bluman y Kumei introdujeron un método para encontrar una nueva clase de simetrías para EDPs. Una EDP de segundo orden

$$F(x,t,u,u_x,u_t,u_{xx},u_{xt},u_{tt})=0,$$

puede ser escrita como una ley conservativa

$$\frac{D}{Dt}f(x,t,u,u_x,u_t)-\frac{D}{Dx}g(x,t,u,u_x,u_t)=0, \tag{2}$$

para alguna función f y g, donde $\frac{D}{Dx}$ y $\frac{D}{Dt}$ son los operadores de la derivada total definidos por

$$\frac{D}{Dx}=\frac{\partial}{\partial x}+u_x\frac{\partial}{\partial u}+u_{xx}\frac{\partial}{\partial u_x}+u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_t}+\cdots,$$

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u_t\frac{\partial}{\partial u}+u_{xt}\frac{\partial}{\partial u_x}+u_{tt}\frac{\partial}{\partial u_t}+\cdots.$$

Mediante la ley conservativa (2), se puede introducir una variable potencial auxiliar v y construir un sistema potencial auxiliar $S(x,t,u,v)=0$, dado por

$$\begin{aligned} v_x&=f(x,t,u,u_x,u_t),\\ v_t&=g(x,t,u,u_x,u_t). \end{aligned} \tag{3}$$

Para algunos modelos, se puede eliminar u del sistema potencial y construir una ecuación integrada auxiliar o potencial

$$G(x,t,v,v_x,v_t,v_{xx},v_{xt},v_{tt})=0,$$

para alguna función G.

Cualquier grupo de Lie de trasformaciones puntuales admitido por $S(x,t,u,v)=0$ induce una simetría en la EDP cuando al menos uno de los generadores del grupo depende explícitamente del potencial. Entonces la simetría correspondiente no es una simetría puntual. Estas simetrías de la EDP son llamadas simetrías *potenciales*.

En [6] Gandarias obtuvo para la ecuación de Burgers una nueva clase de simetrías para EDPs. Estas simetrías son denominadas simetrías potenciales no clásicas y se hallan a partir de las simetrías no clásicas del sistema asociado.

La estructura del trabajo es la siguiente: en las secciones 2 y 3 presentamos, de forma esquemática, las simetrías clásicas y no clásicas de la ecuación (1); en la sección 4 realizamos un estudio de las simetrías potenciales clásicas; en la sección 5 analizamos las simetrías potenciales no clásicas y, finalmente, en las conclusiones, hacemos un análisis comparativo de las simetrías obtenidas por los diferentes métodos.

2. Simetrías clásicas

El criterio de invarianza ([10], Teor. 2.31) permite determinar, en función de $f(u)$, los infinitesimales ξ, τ y η de un campo vectorial

$$V = \xi(x,t,u)\partial_x + \tau(x,t,u)\partial_t + \eta(x,t,u)\partial_u, \tag{4}$$

para que la ecuación (1) sea invariante bajo el grupo de transformaciones locales con generador infinitesimal V. Representamos un conjunto de generadores del álgebra de simetría de Lie asociada a la ecuación por $\{V_i^j\}$.

Si la ecuación (1) es invariante bajo un grupo de Lie de transformaciones locales con generador infinitesimal (7), obtenemos un sistema de 11 ecuaciones determinantes para los infinitesimales ξ, τ y η, que depende de $f(u)$.

Para $f(u)$ arbitraria las únicas simetrías son los grupos de las traslaciones con respecto al espacio y con respecto al tiempo, con generadores infinitesimales $V_1 = \partial_x$ y $V_2 = \partial_t$, respectivamente.

Se obtiene la reducción "onda viajera" $z = x - \lambda t$, $u = h(z)$, donde $h(z)$ verifica la EDO

$$h'''' + \lambda^2 h'' + f(h) = 0. \tag{5}$$

Si $f(u)$ es una función del tipo indicado en la tabla 1 obtenemos nuevas simetrías:

i	$f(u)$	V_3^i
1	$(au+b)^n$	$x\partial_x + 2t\partial_t + \dfrac{4(au+b)}{a(1-n)}\partial_u$
2	$b\,\mathbf{e}^{au}$	$x\partial_x + 2t\partial_t - \dfrac{4}{a}\partial_u$

Tabla 1: Nuevas simetrías para $n \neq 1$ y $a \neq 0$.

3. Simetrías no clásicas

La base fundamental del método, desarrollado por Bluman y Cole [1], es requerir que la ecuación en derivadas parciales (1) junto con la ecuación

$$\Phi \equiv \xi(x,t,u)u_x + \tau(x,t,u)u_t - \eta(x,t,u) = 0, \tag{6}$$

sean invariantes bajo la acción de un grupo de transformaciones locales con generador infinitesimal V, dado en (7). Para su estudio, distinguimos si $\tau \neq 0$ o $\tau = 0$.
Si $\tau \neq 0$ podemos suponer $\tau = 1$, sin pérdida de generalidad. En este caso obtenemos un sistema sobredeterminado de 6 ecuaciones no lineales para los infinitesimales ξ y η. La dificultad del sistema no permite dar una solución en general. Del sistema se deduce que, además de los generadores $V_1 = \partial_x$ y $V_2 = \partial_t$ que se obtienen para f arbitraria, se obtienen los generadores dados en la tabla 2 para $i = 1, 2, 3$.
En el caso en que $\tau = 0$ obtenemos la simetría dada en la tabla 2 para $i = 4$
Comparando los resultados obtenidos en las tablas 1 y 2, podemos observar que para $i = 1$ e $i = 2$ las simetrías coinciden. Los casos $i = 3$ e $i = 4$ corresponden a simetrías nuevas.

i	$f(u)$	V_3^i
1	$(au+b)^n$	$\dfrac{x}{2(t+t_0)}\partial_x+\partial_t+\dfrac{2(au+b)}{a(n-1)(t+t_0)}\partial_u$
2	$k\,\mathbf{e}^{-\frac{2u}{a}}$	$\dfrac{x}{2(t+t_0)}\partial_x+\partial_t+\dfrac{a}{t+t_0}\partial_u$
3	k	$\dfrac{x}{2(t+t_0)}\partial_x+\partial_t+\dfrac{2u+(k_1t+k_2)x}{t+t_0}\partial_u$
4	ku	$\partial_x+\dfrac{u}{x}\partial_u$

Tabla 2: Simetrías no clásicas.

4. Simetrías potenciales clásicas

Debido a que la expresión de la forma conservada no es única y que el análisis de las simetrías potenciales depende de la forma conservada, hemos construido tres sistemas auxiliares de la ecuación (1) y hemos estudiado las simetrías potenciales de los tres.

Supongamos que el sistema auxiliar $S(x,t,u,v)=0$ admite un grupo local de transformaciones

$$\begin{aligned} x^* &= x+\varepsilon\xi(x,t,u,v)+\mathcal{O}(\varepsilon^2),\\ t^* &= t+\varepsilon\tau(x,t,u,v)+\mathcal{O}(\varepsilon^2),\\ u^* &= u+\varepsilon\eta(x,t,u,v)+\mathcal{O}(\varepsilon^2),\\ v^* &= v+\varepsilon\phi(x,t,u,v)+\mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{7}$$

con generador infinitesimal.

$$V_S=\xi(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial x}+\tau(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial t}+\eta(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial u}+\phi(x,t,u,v)\frac{\partial}{\partial v}. \tag{8}$$

Este grupo proyecta cualquier solución de $S(x,t,u,v)=0$ en otra solución de $S(x,t,u,v)=0$ y por consiguiente induce una aplicación de cualquier solución de la EDP en otra solución de la EDP; por tanto (8) define un grupo de simetrías de la EDP. Si

$$(\xi_v)^2+(\tau_v)^2+(\phi_v)^2\neq 0 \tag{9}$$

entonces (8) produce una simetría no local de la EDP, tal simetría no local es llamada una simetría *potencial* de la EDP, de lo contrario V_S se proyecta en una simetría puntual de la EDP.

Forma 1: Consideramos la función $F(u)$ donde $f(u)=F'(u)$, multiplicamos la ecuación (1) por u_x, y obtenemos

$$u_xu_{tt}+u_xu_{xxxx}+u_xF'(u)=0. \tag{10}$$

La ecuación (10) se puede expresar como

$$D_t\left[u_xu_t\right]-D_x\left[\frac{1}{2}u_t^2-u_xu_{xxx}+\frac{1}{2}u_{xx}^2-F(u)\right]=0.$$

Por tanto, una forma conservada de (1) es

$$\begin{array}{ll} v_t = & \frac{1}{2}u_t^2 - u_x u_{xxx} + \frac{1}{2}u_{xx}^2 - f(u), \\ v_x = & u_x u_t. \end{array} \tag{11}$$

Si este sistema es invariante bajo la acción del grupo de transformaciones con generador infinitesimal (8) obtenemos un sistema de ecuaciones en los infinitesimales ξ, τ, η y ϕ. La aplicación del método al sistema (11) conduce a las ecuaciones determinantes:

$$\begin{array}{lllllll} \xi_v = 0, & \tau_x = 0, & \xi_u = 0, & \xi_t = 0, & \tau_v = 0, & \eta_x = 0, & \phi_x = 0, \\ \eta_v = 0, & \eta_{uu} = 0, & \xi_{xx} = 0, & \tau_u = 0, & \phi_u - \eta_t = 0, & \tau_t - 2\xi_x = 0, & \phi_v - 2\,\eta_u + \tau_t = 0, \end{array}$$

$$\phi_v - 2\,\eta_u - \tau_t + 4\,\xi_x = 0, \quad \phi_t - 2\,f\,\eta_u + f_u\,\eta + 4\,\xi_x\,f = 0. \tag{12}$$

Del sistema (12) se deduce que

$$(\xi_v)^2 + (\tau_v)^2 + (\eta_v)^2 = 0,$$

por lo que V_S se proyecta en una simetría de Lie de la ecuación original.
Forma 2: Multiplicando por x y operando algebraicamente, la ecuación (1) se puede expresar de la siguiente forma

$$\begin{array}{l} xu_{tt} + xu_{xxxx} + u_{xxx} - u_{xxx} + xf(u) + \frac{x^2}{2}f'(u) - \frac{x^2}{2}f'(u) - \frac{x^3}{6}f''(u) + \frac{x^3}{6}f''(u) \\ -\frac{x^4}{24}f'''(u) + \frac{x^4}{24}f'''(u) = 0. \end{array} \tag{13}$$

Esta ecuación se puede expresar como

$$D_t[xu_t] = -D_x[xu_{xxx} - u_{xx} + \frac{x^2}{2}f(u) - \frac{x^3}{6}f'(u) + \frac{x^4}{24}f''(u)] - \frac{x^4}{24}f'''(u).$$

Imponiendo que $f'''(u) = 0$, la ecuación (1) se puede expresar mediante el sistema auxiliar

$$\begin{array}{l} v_x = xu_t, \\ v_t = -xu_{xxx} + u_{xx} - \frac{x^2}{2}f(u) + \frac{x^3}{6}f'(u) - \frac{x^4}{24}f''(u). \end{array} \tag{14}$$

Requiriendo que el sistema (14) sea invariante bajo la acción del grupo de transformaciones con generador infinitesimal (8) obtenemos un sistema de dieciocho ecuaciones determinantes en los infinitesimales ξ, τ, η y ϕ. Simplificando el sistema deducimos que

$\xi = \xi(x,t)$, $\tau = \tau(x,t)$, $\eta = \alpha(x,t,v)u + \beta(x,t,v)$ y $\phi = \phi(x,t,u,v)$, donde ξ, τ, α, β y ϕ satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{r} \alpha_v = 0, \qquad \alpha_{vv}\,u + \beta_{vv} = 0, \qquad \xi_t\,x + \phi_u = 0, \qquad -\alpha\,x - \tau_t\,x + 3\,\xi_x\,x - \xi + x\phi_v = 0, \\ -\alpha\,x + \tau_t\,x - \xi_x\,x - \xi + x\phi_v = 0, \qquad 3\,\alpha_{xx}\,x - \xi_{xxx}\,x - 2\,\alpha_x + \xi_{xx} = 0, \\ -\alpha_t\,u\,x - \beta_t\,x + \phi_x = 0, \qquad \alpha_v\,u\,x + \beta_v\,x - 3\,\tau_x = 0, \\ \alpha_v\,u\,x + \beta_v\,x + \tau_x = 0, \qquad 3\,\alpha_x\,x^2 - 3\,\xi_{xx}\,x^2 - \xi_x\,x + \xi = 0, \\ 3\,\alpha_{vx}\,u\,x^2 + 3\,\beta_{vx}\,x^2 + \alpha_v\,u\,x + \beta_v\,x - 3\,\tau_{xx}\,x + 2\,\tau_x = 0, \\ -3\,\alpha_{vxx}\,u\,x^2 - 3\,\beta_{vxx}\,x^2 - \alpha_{vx}\,u\,x - \beta_{vx}\,x + \tau_{xxx}\,x - \xi_t\,x + \alpha_v\,u + \beta_v - \tau_{xx} + \phi_u = 0, \\ -f_{uuu}\,\alpha\,u\,x^4 - f_{uuu}\,\beta\,x^4 + f_{uu}\,\alpha\,x^4 - 3\,\xi_x\,f_{uu}\,x^4 + 4\,f_{uu}\,\alpha\,u\,x^3 + 4\,f_{uu}\,\mathrm{p2}\,x^3 - 4\,f_u\,\alpha\,x^3 \\ -3\,\xi\,f_{uu}\,x^3 + 12\,\xi_x\,f_u\,x^3 - 12\,f_u\,\alpha\,u\,x^2 - 12\,f_u\,\beta\,x^2 + 12\,f\,\alpha\,x^2 + 8\,\xi\,f_u\,x^2 \\ -36\,\xi_x\,f\,x^2 - 24\,\alpha_{xxx}\,u\,x - 24\,\beta_{xxx}\,x - 12\,\xi\,f\,x + 24\,\alpha_{xx}\,u + 24\phi_t + 24\,\beta_{xx} = 0. \end{array} \tag{15}$$

Simplificando el sistema (15) se deduce que η no depende de v. Por consiguiente, V_S se proyecta en una simetría de Lie de la ecuación original.
Forma 3: Consideramos la función $F(u)$ donde $f(u) = F'(u)$, multiplicamos la ecuación (1) por u_t, y obtenemos

$$u_t u_{tt} + u_t u_{xxxx} + u_t F'(u) = 0. \tag{16}$$

La ecuación (16) se puede expresar como

$$D_t \left[\frac{u_t^2}{2} + \frac{u_{xx}^2}{2} + F(u) \right] - D_x \left[u_{tx} u_{xx} - u_t u_{xxx} \right] = 0.$$

Por tanto, otra forma conservada de (1) es

$$\begin{array}{rl} v_t = & u_{tx} u_{xx} - u_t u_{xxx}, \\ v_x = & \frac{u_t^2}{2} + \frac{u_{xx}^2}{2} + F(u). \end{array} \tag{17}$$

Si este sistema es invariante bajo la acción del grupo de transformaciones con generador infinitesimal (8) obtenemos un sistema de dieciocho ecuaciones determinantes en los infinitesimales ξ, τ, η y ϕ.
La aplicación del método al sistema (17) conduce al sistema de dieciocho ecuaciones determinantes

$$\begin{array}{lllll} \xi_v = 0, & \tau_v = 0, & \eta_v = 0, & \phi_u = 0, & \xi_u = 0, \\ \xi_t = 0, & \eta_t = 0, & \tau_x = 0, & \eta_{xx} = 0, & \eta_{uu} = 0, \\ \phi_u = 0, & \phi_t = 0, & \xi_{xxx} = 0, & 2\,\eta_{ux} - \xi_{xx} = 0, & 2\,\eta_{ux} - 3\,\xi_{xx} = 0, \end{array}$$

$$\phi_v - 2\,\eta_u + 3\,\xi_x = 0, \quad \phi_v - 2\,\eta_u + 2\,\tau_t - \xi_x = 0, \quad \phi_x + f\,\phi_v - f_u\,\eta - f\,\xi_x = 0. \tag{18}$$

Del sistema (18) se deduce que

$$(\xi_v)^2 + (\tau_v)^2 + (\eta_v)^2 = 0,$$

por lo que V_S se proyecta en una simetría de Lie de la ecuación original.

5. Simetrías potenciales no clásicas

Imponemos que el sistema (17) junto con la condición de superficie (6) sean invariantes bajo la acción del grupo de transformaciones con generador infinitesimal (8) obtenemos un sistema no lineal de ecuaciones determinantes en los infinitesimales ξ, τ, η y ϕ. Para su resolución, distinguimos dos casos: $\tau \neq 0$ and $\tau = 0$.
Caso $\tau \neq 0$: Hacemos $\tau = 1$, sin pérdida de generalidad, y deducimos que $\xi = \alpha(t,u)x + \beta(t,u)$, $\eta = \eta(t,u,v)$ y $\phi = \phi(t,u,v)$ donde α, β, η y ϕ satisfacen un sistema no lineal de veintiuna ecuaciones determinantes. La resolución del sistema conduce a que

$$(\xi_v)^2 + (\tau_v)^2 + (\eta_v)^2 = 0,$$

por lo que V_S se proyecta en una simetría de Lie de la ecuación original.
Caso $\tau = 0$: Obtenemos las siguientes soluciones del sistema de ecuaciones determinantes

Si $F = k$, con k constante, $\phi = 0$ y $\eta = \alpha(t,v)x$ donde

$$2\alpha_t = 2k\alpha_v - \alpha^2 \alpha_v.$$

Si $F = k$, con k constante, $\phi = 0$ y $\eta = \beta(t, v)u^{\frac{1}{2}}$ donde

$$8\beta_t = 8k\beta_v - \beta^4\beta_v.$$

Si $F = u^2$, $\phi = 0$ y $\eta = \alpha(t, v)u$ donde

$$2\alpha\alpha_{xx} - \alpha_x^2 + 4\alpha^2\alpha_x + \alpha^4 + 2k = 0. \tag{19}$$

Haciendo el cambio $\alpha = \dfrac{v'(x)}{v(x)}$, la ecuación (19) se transforma en la ecuación

$$2v'v''' - (v'')^2 + 2v^2 = 0,$$

la cuál, una vez derivada, se transforma en la ecuación

$$v'''' + 2v = 0,$$

cuya solución es

$$v = c_1 \cosh(kx) + c_2 \cosh(kx)\operatorname{sen}(kx) + c_3 \operatorname{senh}(kx)\cos(kx) + c_4 \operatorname{senh}(kx)\operatorname{sen}(kx),$$

con $2k^4 - 1 > 0$.

Observamos que en todos estos casos se verifica que

$$(\xi_v)^2 + (\tau_v)^2 + (\eta_v)^2 \neq 0,$$

por lo que son simetrías potenciales no clásicas.

6. Conclusiones

En este trabajo se ha presentado una clasificación completa de las simetrías, dependiendo de las formas funcionales de f, de un modelo matemático que describe las vibraciones de una viga (1). Hemos construido tres sistemas potenciales de la ecuación (1) y hemos comprobado que en todos los casos las simetrías potenciales clásicas corresponden a simetrías puntuales.

También hemos obtenido las simetrías potenciales no clásicas de un sistema potencial. En este caso, obtenemos simetrías potenciales de la EDP (1), para f lineal.

En comparación con [4, 5], encontramos, mediante el método de las simetrías potenciales no clásicas, nuevas simetrías.

Agradecimientos

Este artículo está subvencionado por el Proyecto MTM2006-05031 del Ministerio de Ministerio de Ciencia y Tecnología, por el proyecto P06-FQM-01448 de la Junta de Andalucía y por el Grupo PAI FQM-201 de la Junta de Andalucía.

Referencias

[1] G.W. Bluman, J.D. Cole, *The general similarity solution of the heat equation*, J. Math. Mech., 18 (1969), 1025–1042.

[2] G.W. Bluman, S. Kumei, *On the remarkable sonlinear diffusion equation*, J. Math. Phys., 21 (1980), 1019-1023.

[3] G.W. Bluman, S. Kumei, *Symmetries and Differential Equations*, Berlin: Springer, 1989.

[4] M.S. Bruzón, J. Ramírez, J.C. Camacho, *Modelo de vibraciones de una viga. Reducciones por simetrías*, 3ra. Conferencia Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática, 2004, 368-373.

[5] J.C. Camacho, M.S. Bruzón, *Simetrías no clásicas de un Modelo de vibraciones de viga*, NOLINEAL, 2004.

[6] M.L. Gandarias, *New potential symmetries*, Centre de Recherche Matematiques CRM Proceedings and Lecture Notes, 25, (2000), 285–290.

[7] M.L. Gandarias, M.S. Bruzón, *Classical and Nonclassical Symmetries of a Generalized Boussinesq Equation*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 5(1), (1998), 8–12.

[8] A.C. Lazer, P.J. McKenna, *Large Scale OscilIation Behavior in Loaded Asymnmetric Systems.* Ann. Inst. H-Poincare, Analyse Nonlineaire, (1987), 244-274.

[9] P.J. McKenna, A.R. Champneys, P.A. Zegeling. “Solitary Waves in Nonlinear Beam Equations: Stability, Fission and Fusion”, Nonlinear Dynamics, No. 21, 2000, pp. 31-53.

[10] P.J. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Springer-Verlag, 1986.