

Un método paralelo para flujos de partículas rígidas basado en dominios ficticios

JORDI BLASCO¹, M^a CARMEN CALZADA², MERCEDES MARÍN²

¹ *Dpt. de Matemàtica Aplicada I, Univ. Politècnica de Catalunya, Avda. Diagonal 647, 08028 Barcelona. E-mail: jorge.blasco@upc.edu.*

² *Dpto. de Informática y Análisis Numérico, Universidad Córdoba, Campus de Rabanales, Ed. C2-3, E-14071 Córdoba. E-mails: ma1canam@uco.es, ma1mabem@uco.es.*

Palabras clave: Flujo de partículas, Dominios ficticios, Ecuación de Navier-Stokes, Algoritmo paralelo

Resumen

En esta comunicación presentamos un esquema numérico paralelo para la simulación del flujo de partículas rígidas en un fluido incompresible viscoso. El método de dominios ficticios permite resolver las ecuaciones de flujo sobre una malla fija; se emplea aquí, además, una técnica de bajo coste computacional para imponer la codición de rigidez sobre las partículas basada en la conservación de los momentos lineal y angular. La paralelización de los cálculos se consigue mediante el método SDI (Simultaneous Directions Implicit). Se presentan también algunos resultados numéricos que demuestran el buen comportamiento del método propuesto.

1 Introducción

En esta comunicación se presenta un método numérico paralelo para la simulación de flujos de partículas rígidas en un fluido incompresible viscoso newtoniano. El movimiento del fluido está regido por la ecuación de Navier-Stokes incompresible no estacionaria en el dominio fluido, mientras que el movimiento de las partículas está gobernado por las ecuaciones de sólido rígido.

Se han desarrollado recientemente diversos métodos para la simulación de flujos de partículas rígidas, algunos de los cuales se emplean en problemas de animación en el campo de la informática gráfica (ver [3], por ejemplo). Muchos de ellos están basados en el método de dominios ficticios ([7], [9]), que permite el cálculo del movimiento del fluido en una malla fija sin necesidad de remallar. La idea fundamental de este método consiste en resolver la ecuación de Navier-Stokes en todo el dominio en cada paso de

tiempo, suponiendo en esa etapa que todo el dominio está ocupado por fluido; se impone a continuación la condición de sólido rígido sobre las partículas. Los esquemas resultantes pueden verse como métodos de paso fraccionado, consistiendo uno de los pasos en la proyección de un campo de velocidades intermedio sobre el movimiento de sólido rígido.

La proyección de la velocidad intermedia sobre el movimiento de sólido rígido se realiza habitualmente mediante el método de multiplicadores de Lagrange distribuidos ([7], [8], [9], [10]) asociados a la condición de rigidez sobre las partículas; la idea es análoga al papel de la presión en problemas de flujo incompresible como multiplicador de Lagrange asociado a la condición de incompresibilidad. Por otra parte, en [11], se introduce un método basado en la conservación de los momentos lineal y angular para calcular dicha proyección que resulta ser más rápido y eficiente que los multiplicadores de Lagrange, reduciendo dicha proyección al cálculo de dos integrales sobre cada partícula. Emplearemos este último método en nuestro algoritmo.

Se han empleado también diferentes métodos de resolución de la ecuación de Navier-Stokes para el cálculo del movimiento del fluido, la mayoría de ellos basados en esquemas de paso fraccionado secuenciales junto con diferentes aproximaciones espaciales: elementos finitos mixtos ([7], [9]), diferencias finitas ([3]), volúmenes de control ([11]), etc... Nosotros consideramos un método de paso fraccionado paralelo estudiado en [1], [2] y [5] que permite separar la incompresibilidad de la convección resolviendo simultáneamente un problema de Burgers no lineal y un problema de Stokes. Además, tanto la resolución del problema no lineal como la del problema de Stokes se efectúan mediante esquemas iterativos en los que cada iteración consiste en la resolución de problemas de Dirichlet para la ecuación de Helmholtz. El método SDI (Simultaneous Directions Implicit, ver [2], [4], [5], [6]) permite la resolución de dicho problema en paralelo, calculando simultáneamente la solución en cada uno de los llamados segmentos integrables horizontales y verticales de manera independiente unos de otros. Este esquema espacial paralelo proporciona un alto nivel de escalabilidad al algoritmo resultante.

En el Apartado 2 se plantean las ecuaciones del movimiento tanto del fluido como de las partículas. En el Apartado 3 se describe el método numérico empleado para su resolución, mientras que en el Apartado 4 se detalla la paralelización del mismo. Seguidamente, en el Apartado 5 se presentan algunos resultados numéricos obtenidos con este algoritmo en diferentes casos test; finalmente, en el Apartado 6 se extraen algunas conclusiones de este trabajo y se plantean posibles líneas futuras de investigación.

2 Ecuaciones de movimiento

2.1 Movimiento del fluido

Consideramos un dominio abierto y acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ con frontera poligonal $\partial\Omega$. Supondremos que Ω está ocupado por un fluido incompresible, viscoso, newtoniano y homogéneo, y por N_p partículas rígidas suspendidas en él. Llamaremos $P_i(t) \subset \Omega$ al espacio ocupado por la partícula i -ésima ($i = 1, \dots, N_p$) en el instante de tiempo $t \in [0, T]$ ($T > 0$ es el tiempo final de simulación) y sea $P(t) = \cup_{i=1, \dots, N_p} P_i(t)$. El movimiento del fluido está descrito por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales conocidas como ecuaciones

de Navier-Stokes:

$$\rho_f \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla \mathcal{P} = \rho_f \mathbf{g} \quad \text{en } (\Omega - \overline{P(t)}), t \in (0, T) \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } (\Omega - \overline{P(t)}), t \in (0, T). \quad (2)$$

En ellas, $\rho_f > 0$ es la densidad del fluido, $\mathbf{u}(\cdot, t) : (\Omega - \overline{P(t)}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ el campo de velocidades en el instante de tiempo $t \in (0, T)$, $\mathcal{P}(\cdot, t) : (\Omega - \overline{P(t)}) \rightarrow \mathbb{R}$ la presión en el instante $t \in (0, T)$, $\mu > 0$ la viscosidad dinámica y $\mathbf{g} = (0, -g)$ la aceleración de la gravedad. Llamaremos $p = \mathcal{P}/\rho_f$ a la presión cinemática y $\nu = \mu/\rho_f$ a la viscosidad cinemática.

Estas ecuaciones se completan con condiciones de contorno apropiadas según sea la naturaleza del problema a resolver. De momento, consideraremos sólo una condición de contorno de tipo Dirichlet homogénea, es decir, condición de no deslizamiento, en la frontera de Ω :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega \times (0, T). \quad (3)$$

En la interfase fluido-partículas, deben igualarse las velocidades de ambos medios e imponerse la fuerza de tracción ejercida por las partículas sobre el fluido:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i \text{ en } \partial P_i(t), t \in (0, T), i = 1, \dots, N_p \quad (4)$$

$$\sigma \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_i \text{ en } \partial P_i(t), t \in (0, T), i = 1, \dots, N_p, \quad (5)$$

siendo \mathbf{u}_i la velocidad de las partículas en su superficie, σ el tensor de tensiones del fluido, \mathbf{n} la normal exterior (al fluido) en la superficie de las partículas y \mathbf{t}_i la tracción.

Se impone también una condición inicial sobre la velocidad:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \text{ verificando } \nabla \cdot \mathbf{u}_0 = 0 \text{ en } (\Omega - \overline{P(0)}). \quad (6)$$

2.2 Movimiento de las partículas

El movimiento de las partículas, consideradas sólidos rígidos homogéneos, está gobernado por las ecuaciones de Newton y Euler. Llamando $\mathbf{X}_i \in \mathbb{R}^2$ a la posición del centro de masas de la partícula i -ésima, θ_i a su posición angular respecto a un eje fijo, $\mathbf{U}_i \in \mathbb{R}^2$ a la velocidad lineal de su centro de masas y ω_i a su velocidad angular, y escribiendo $\boldsymbol{\omega}_i = (0, 0, \omega_i)$, se tiene:

$$\frac{d\mathbf{X}_i}{dt} = \mathbf{U}_i, \quad M_i \frac{d\mathbf{U}_i}{dt} = \mathbf{F}_i^h + \mathbf{F}_i^p + \mathbf{F}_i^w + (\rho_{s,i} - \rho_f) A_i \mathbf{g}, \quad (7)$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i, \quad I_i \frac{d\omega_i}{dt} + \omega_i \times (I_i \omega_i) = \mathbf{T}_i, \quad (8)$$

siendo M_i la masa de la partícula i , I_i su tensor de inercia, \mathbf{F}_i^p la fuerza de repulsión ejercida por las otras partículas sobre la i , \mathbf{F}_i^w la fuerza de repulsión ejercida por las paredes de Ω , $\rho_{s,i}$ la densidad (superficial) de masa, A_i el área y \mathbf{F}_i^h y \mathbf{T}_i la fuerza hidrodinámica y el impulso angular, respectivamente, ejercidos por el fluido sobre la partícula i :

$$\mathbf{F}_i^h = - \int_{\partial P_i} \sigma \cdot \mathbf{n} d\partial P_i, \quad \mathbf{T}_i = - \int_{\partial P_i} \mathbf{r} \times (\sigma \cdot \mathbf{n}) d\partial P_i.$$

Aquí, \mathbf{r} es el vector posición desde el centro de masas de la partícula (los vectores de \mathbb{R}^2 que aparecen en productos vectoriales se suponen extendidos por 0 a \mathbb{R}^3). Supondremos en lo sucesivo que las partículas son circulares, de manera que no es necesario resolver (8) para determinar su posición. Llamaremos X , U y ω a los vectores que contienen las posiciones, velocidades y velocidades angulares de todas las partículas.

Las fuerzas de repulsión entre partículas se calculan de la siguiente manera (ver [8]):

$$\mathbf{F}_i^p = \sum_{j=1, j \neq i}^{N_p} \mathbf{F}_{i,j}^p, \quad \mathbf{F}_{i,j}^p = \begin{cases} \mathbf{0}, & d_{i,j} > R_i + R_j + \delta \\ \frac{\pi R_i^2 \rho_{s,i} g}{\epsilon_p} \left(\frac{\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j}{d_{i,j}} \right) \left(\frac{R_i + R_j + \delta - d_{i,j}}{\delta} \right)^2, & d_{i,j} \leq R_i + R_j + \delta, \end{cases}$$

donde $d_{i,j}$ es la distancia entre los centros de masas de las partículas i y j , R_i y R_j sus radios, y δ y ϵ_p dos parámetros algorítmicos. La fuerza de repulsión de las paredes se calcula, análogamente, de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}_i^w = \sum_{j=1}^{N_w} \mathbf{F}_{i,j}^w, \quad \mathbf{F}_{i,j}^w = \begin{cases} \mathbf{0}, & d'_{i,j} > 2R_i + \delta \\ \frac{\pi R_i^2 \rho_{s,i} g}{\epsilon_w} \left(\frac{\mathbf{X}_i - \mathbf{X}'_{i,j}}{d'_{i,j}} \right) \left(\frac{2R_i + \delta - d'_{i,j}}{\delta} \right)^2, & d'_{i,j} \leq 2R_i + \delta, \end{cases}$$

donde N_w es el número de lados de $\partial\Omega$, $d'_{i,j}$ es la distancia entre el centro de masas de la partícula i y el de una partícula ficticia de radio R_i tangente al lado j y $\mathbf{X}'_{i,j}$ es la posición del centro de masas de esta partícula ficticia.

3 Resolución numérica

Se describe a continuación el método numérico empleado para la resolución del problema (1)-(8). Se considera, en primer lugar, una integración temporal mediante un método paralelo de paso fraccionado. Así pues, suponemos conocidos $X^0 = X(0)$, $U^0 = U(0)$, $\omega^0 = \omega(0)$ y $\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}_0$ (en $\Omega - P(0)$); calculamos P^0 , aproximación de $P(0)$, y ponemos $\mathbf{u}^0 = \mathbf{U}_i^0 + \omega_i^0 \times \mathbf{r}$ en cada partícula P_i^0 . Entonces, dado un tamaño del paso de tiempo $\Delta t > 0$, en cada instante de tiempo $t_n = n \Delta t$ ($n = 0, \dots, [T/\Delta t] - 1$) y partiendo de X^n , U^n , ω^n (en Ω) y p^n , calculamos X^{n+1} , U^{n+1} , ω^{n+1} , \mathbf{u}^{n+1} y p^{n+1} mediante el siguiente algoritmo:

1. Se mueven las partículas: $X^{n+1} = L(X^n, U^n)$ (ver más adelante la definición del operador L). Se calcula también P^{n+1} , aproximación de $P(t_{n+1})$.

2. Se avanza el fluido suponiendo que llena todo Ω :

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{\rho_f} \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + (\tilde{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{u}} \right) - \nu \Delta \tilde{\mathbf{u}} + \nabla p &= \frac{\rho}{\rho_f} \mathbf{g} && \text{en } \Omega, t \in (t_n, t_{n+1}) \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= 0 && \text{en } \Omega, t \in (t_n, t_{n+1}) \\ \tilde{\mathbf{u}} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \partial\Omega, t \in (t_n, t_{n+1}) \end{aligned}$$

siendo $\rho = \rho_f(1 - H^{n+1}) + \rho_s H^{n+1}$, con $H^{n+1} = 1$ en P^{n+1} , $H^{n+1} = 0$ en $\Omega - P^{n+1}$ y $\rho_s(t) = \rho_{s,i}$ en $P_i(t)$. Nótese que se ha dividido la ecuación de Navier-Stokes (1) por la densidad del fluido ρ_f . Este problema se resuelve mediante el siguiente método paralelo

de paso fraccionado (ver [1]): se calculan $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ y p^{n+1} resolviendo simultáneamente el problema no lineal (de Burgers) para \mathbf{u}^{n+a}

$$\frac{\rho}{\rho_f} \left[\frac{\mathbf{u}^{n+a} - \mathbf{u}^n}{a\Delta t} + \frac{2\theta}{a} (\mathbf{u}^{n+a} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+a} \right] - \nu\sigma\Delta\mathbf{u}^{n+a} = \frac{\rho}{\rho_f} \mathbf{g} + \nu(1-\sigma)\Delta\mathbf{u}^n - \nabla p^n \quad (9)$$

$$\mathbf{u}^{n+a} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega, \quad (10)$$

y el problema lineal (de Stokes generalizado) para \mathbf{u}^{n+b} y p^{n+b}

$$\frac{\rho}{\rho_f} \frac{\mathbf{u}^{n+b} - \mathbf{u}^n}{b\Delta t} - \nu(1-\sigma)\Delta\mathbf{u}^{n+b} + \nabla p^{n+b} = \frac{\rho}{\rho_f} \mathbf{g} + \nu\sigma\Delta\mathbf{u}^n - \frac{\rho}{\rho_f} \frac{2(1-\theta)}{b} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n \quad (11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+b} = 0, \quad (12)$$

$$\mathbf{u}^{n+b} = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega. \quad (13)$$

siendo $a, b > 0$ tales que $a + b = 2$, $\sigma \in (1/2, 1]$ y $\theta \in [0, 1]$. Finalmente se coordinan ambas soluciones tomando $\tilde{\mathbf{u}}^{n+1} = (1/2)(\mathbf{u}^{n+a} + \mathbf{u}^{n+b})$ y $p^{n+1} = p^{n+b}$.

3. Se toma $\mathbf{u}^{n+1} = \tilde{\mathbf{u}}^{n+1}$ en $\Omega - P^{n+1}$.

4. Se proyecta la velocidad dentro de las partículas sobre la de sólido rígido. Para ello se invoca la propiedad de conservación del momento lineal y angular, como en [11], tomando, para $i = 1, \dots, N_p$:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \frac{\rho_{s,i}}{M_i} \int_{P_i^{n+1}} \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} d\Omega,$$

$$\boldsymbol{\omega}_i^{n+1} = \left(\int_{P_i^{n+1}} \mathbf{r} \times \tilde{\mathbf{u}}^{n+1} d\Omega \right) / \left(\int_{P_i^{n+1}} |\mathbf{r}|^2 d\Omega \right),$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{U}_i^{n+1} + \boldsymbol{\omega}_i^{n+1} \times \mathbf{r} \text{ en } P_i^{n+1}.$$

El operador L: el cálculo de la nueva posición de las partículas a partir de su posición y velocidad en el paso de tiempo anterior se hace mediante el siguiente esquema iterativo, basado en las leyes del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, que parte de $X^{n+1,0} = X^n$ y calcula, para cada $k = 1, \dots, K$:

$$\overset{*}{X}^{n+1,k} = X^{n+1,k-1} + U^n \frac{\Delta t}{K}, \quad X^{n+1,k} = \overset{*}{X}^{n+1,k} + \frac{1}{2} \left(F(\overset{*}{X}^{n+1,k}) + F(X^{n+1,k-1}) \right) \frac{(\Delta t)^2}{2MK^2},$$

tomando, finalmente, $X^{n+1} = X^{n+1,K} =: L(X^n, U^n)$. Aquí, $F = F^p + F^w$ es la suma de las fuerzas de repulsión entre partículas y de las paredes.

4 Algoritmo paralelo SDI

Tanto la resolución del problema no lineal (9)-(10) como la del problema de Stokes generalizado (11)-(12)-(13) se efectúan mediante esquemas iterativos en los que cada iteración consiste en la resolución de problemas de Dirichlet para la ecuación de Helmholtz como el siguiente: hallar v tal que

$$\alpha v - \beta\Delta v = f \text{ en } \Omega, \quad v = \bar{v} \text{ sobre } \partial\Omega. \quad (14)$$

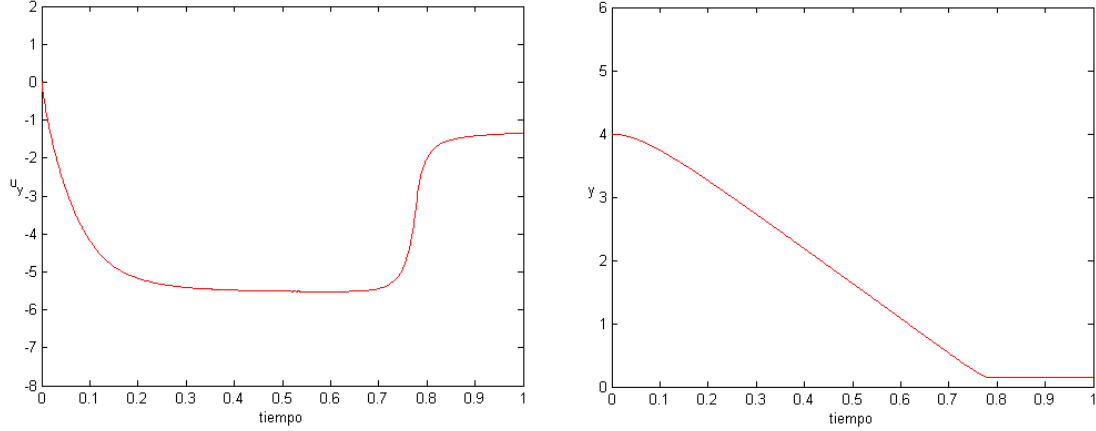


Figura 1: Velocidad vertical de la partícula. Figura 2: Ordenada del centro de la partícula.

El algoritmo SDI (Simultaneous Directions Implicit, ver [2], [4], [5], [6]) permite la resolución de (14) en paralelo mediante un esquema iterativo que resuelve el problema simultáneamente en cada dirección espacial: partiendo de una aproximación inicial v^0 , en cada iteración j se calculan dos nuevas aproximaciones $v^{j+1,1}$ y $v^{j+1,2}$ haciendo:

$$(I + \tau(\frac{\alpha}{2}I - \beta \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}))v^{j+1,1} = (I - \tau(\frac{\alpha}{2}I - \beta \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}))v^j + \tau f \text{ en } \Omega, \quad v^{j+1,1} = v_0 \text{ sobre } \partial\Omega, \quad (15)$$

y análogamente para $v^{j+1,2}$, siendo τ el parámetro de evolución. Si se discretiza el dominio Ω mediante un malla cartesiana, la resolución de (15) puede realizarse de manera independiente en cada uno de los llamados segmentos integrables, tanto horizontales como verticales, lo cual proporciona un alto nivel de paralelización al algoritmo resultante: eventualmente, podrían usarse tantos procesadores en paralelo como segmentos integrables haya en total en el mallado del dominio y resolver el problema de manera independiente en cada segmento. La resolución de (15) se lleva a cabo mediante diferencias finitas centradas, lo cual conduce a un sistema de ecuaciones lineales tridiagonal en cada segmento. Finalmente, se coordinan ambas soluciones tomando $v^{j+1} = (\gamma/2)(v^{j+1,1} + v^{j+1,2}) + (1-\gamma)v^j$, donde $\gamma \in (0, 1)$ es el parámetro de coordinación.

5 Resultados numéricos

Se presentan a continuación algunos resultados numéricos obtenidos con el algoritmo descrito en un caso test.

5.1 Sedimentación de una partícula circular

Resolvimos el problema de la sedimentación de una partícula circular de radio $R = 0.125$ en una cavidad rectangular de dimensiones 2×6 , cuyo centro se sitúa inicialmente en el punto $(1, 4)$ con velocidad y velocidad angular iniciales nulas. La viscosidad del fluido es

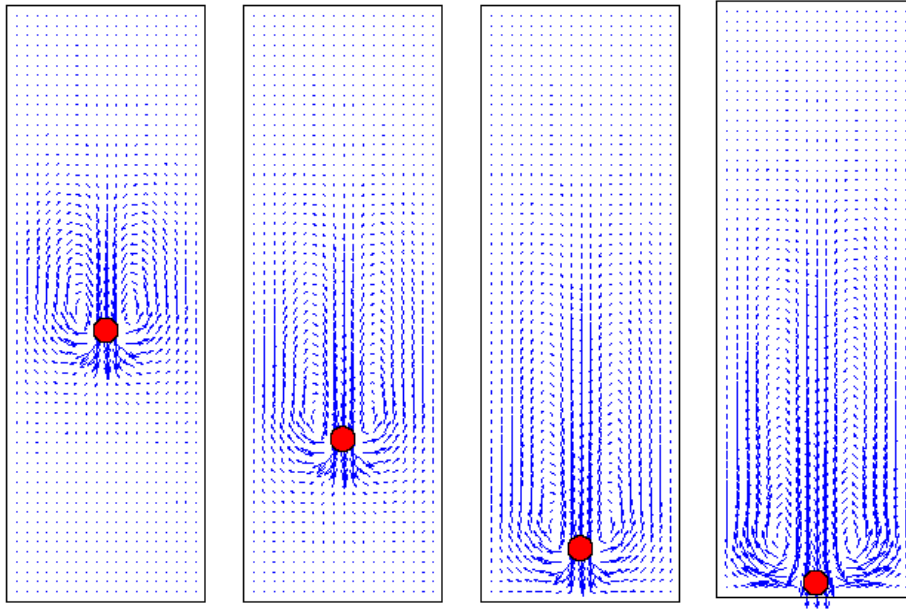


Figura 3: Campo de velocidades y posición de la partícula en $t = 0.3, 0.5, 0.7$ y 0.9 .

$\nu = 0.1$, su densidad $\rho = 1$ y la densidad de la partícula es $\rho_s = 1.25$. Este problema fue ampliamente estudiado, entre otros artículos, en [12].

En la resolución de este problema usamos un mallado uniforme de tamaño $h = 1/100$ y un paso de tiempo $\Delta t = 0.001$, calculando la solución hasta $T = 1$. La ejecución fue secuencial. En las Figuras 1 y 2 se representa la evolución temporal de la velocidad vertical de la partícula y de la ordenada de su centro de masas. La partícula sedimenta en $t = 0.7810$. La velocidad terminal obtenida en este caso (maximo temporal de $\|\mathbf{u}\|$) fue de 5.522, con un 0.6% de error respecto al valor hallado en [12] que fue de 5.488. En la Figura 3 se muestra el campo de velocidades del fluido y la posición de la partícula en diferentes instantes de tiempo; puede observarse que en este caso no se rompe la simetría del problema.

6 Conclusiones

Se ha desarrollado un algoritmo basado en el método de dominios ficticios para el cálculo del movimiento de partículas rígidas en un fluido incompresible viscoso. La imposición del movimiento de sólido rígido en cada partícula se lleva a cabo mediante un método de bajo coste computacional basado en la conservación del momento lineal y angular. Se utiliza el método SDI para la resolución de las ecuaciones del fluido el cual permite la paralelización del cálculo de las nuevas velocidades en cada uno de los diferentes segmentos integrables. Los primeros resultados obtenidos con este algoritmo en un caso test sencillo han sido satisfactorios; se prevee una próxima implementación paralela del mismo que permitirá el estudio de su escalabilidad.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por el Proyecto MCyT BFM2003-06446-C02-02. Agradecemos a Isidoro Albarreal, José Luis Cruz, Enrique Fernández-Cara y José Román Galo su inestimable ayuda en la realización de este trabajo.

Referencias

- [1] I.I. Albarreal, M.C. Calzada, J.L. Cruz, E. Fernández-Cara, J.R. Galo, M. Marín. *Convergence analysis and error estimates for a parallel algorithm for solving the Navier-Stokes equations*. Numerische Mathematik, 93 (2002), 201-221.
- [2] I.I. Albarreal, M.C. Calzada, J.L. Cruz, E. Fernández-Cara, J.R. Galo, M. Marín. *Time and space parallelization of the Navier-Stokes equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 24 (2005), 115-130.
- [3] M. Carlson, P. Mucha, G. Turk. *Rigid fluid: animating the interplay between rigid bodies and fluid*. Conference Proceedings of ACM SIGGRAPH 2004.
- [4] J.R. Galo, I. Albarreal, M.C. Calzada, J.L. Cruz, E. Fernández-Cara, M. Marín. *Simultaneous directions parallel methods for elliptic and parabolic systems*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 339 (2004), 145-150.
- [5] J.R. Galo, I. Albarreal, M.C. Calzada, J.L. Cruz, E. Fernández-Cara, M. Marín. *A Simultaneous directions parallel algorithm for the Navier-Stokes equations*. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 339 (2004), 235-241.
- [6] J.R. Galo, M.C. Calzada, J.L. Cruz, M. Marín, I. Albarreal, E. Fernández-Cara. *The smoothing effect of a simultaneous directions parallel method as applied to Poisson problems*. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 22 (2006), 414-434.
- [7] R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph. *A distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows*. International Journal of Multiphase Flow, 25 (1999), 755-794.
- [8] R. Glowinski, T.W. Pan, T.I. Hesla, D.D. Joseph, J. Periaux. *A fictitious domain approach to the direct numerical simulation of incompressible viscous flow past moving rigid bodies: application to particulate flow*. Journal of Computational Physics, 169 (2001), 363-426.
- [9] N.A. Patankar, P. Singh, D.D. Joseph, R. Glowinski, T.-W. Pan. *A new formulation of the distributed Lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flow*. International Journal of Multiphase Flow, 26 (2000), 1509-1524.
- [10] N. Sharma, Y. Chen, N.A. Patankar. *A distributed Lagrange multiplier based computational method for the simulation of particulate-Stokes flow*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194 (2005), 4716-4730.
- [11] N. Sharma, N.A. Patankar. *A fast computation technique for the direct numerical simulation of rigid particulate flows*. Journal of Computational Physics, 205 (2005), 439-457.
- [12] D. Wan, S. Turek. *An efficient multigrid-FEM method for the simulation of solid-liquid two phase flows*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 203 (2007), 561-580.