XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–5)

Un esquema de cuarto orden con casi-óptimo gasto computacional para ecuaciones no lineales

S. Amat[1], C. Bermúdez[1], S. Busquier[1], F. Manzano[1], S. Plaza[2]

[1] *Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística, U.P. Cartagena. 30203 Cartagena (Murcia) E-mails:* sergio.amat@upct.es, sonia.busquier@upct.es, concepcion.bermudez@upct.es.
[2] *Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile. E-mail:* splaza@lauca.usach.cl.

Palabras clave: Métodos iterativos, sistemas de ecuaciones no lineales, orden de convergencia

Resumen

En este trabajo, presentamos un método de tres pasos y de cuarto orden que tiene un coste computacional muy aceptable. Esto es debido a que no necesita segundas derivadas y que la matriz de los sistemas lineales asociados es la misma en los tres pasos de cada iteración. Se estudiará su convergencia e implementación.

1. Introducción

La resolución de ecuaciones no lineales es sin duda uno de los problemas más clásicos en matemáticas. Para aproximar este tipo de problemas los métodos iterativos juegan un papel fundamental. A partir de una o más aproximaciones a la raíz, se crea una sucesión $x_0, x_1, x_2, ...$ que bajo ciertas condiciones converge a la raíz deseada.

En general, un método iterativo $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ es de orden p-ésimo si la solución x^* de $F(x) = 0$ satisface $x^* = \Phi(x^*)$, $\Phi'(x^*) = \cdots = \Phi^{(p-1}(x^*) = 0$ y $\Phi^{(p}(x^*) \neq 0$. Para este método, el error $|x^* - x_{n+1}|$ es proporcional a $|x^* - x_n|^p$ cuando $n \to \infty$. Por ejemplo, el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - F^{'}(x_n)^{-1}F(x_n).$$

tiene convergencia cuadrática (orden dos) para raíces simples.

Al estudiar un método iterativo, uno de los aspectos más importante a considerar es la convergencia. Por otro lado el coste computacional es la otra característica a estudiar.

En este trabajo, presentamos un método de tres pasos y de cuarto orden que tiene un coste computacional muy aceptable. Esto es debido a que no necesita segundas derivadas

[2] y que la matriz de los sistemas lineales asociados es la misma en los tres pasos de cada iteración. Se estudiará su convergencia e implementación.

2. Esquemas de cuarto orden

Partimos de la familia triple paramétrica de la forma

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + \alpha \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= y_n + \beta \frac{f(y_n)}{f'(x_n)}, \\ x_{n+1} &= z_n + \gamma \frac{f(z_n)}{f'(x_n)}. \end{aligned}$$

El objetivo es encontrar parámetros tales que permitan obtener métodos de cuarto orden. Por construcción, el gasto en cada iteración sería de tres evaluaciones de f y una de $f^{'}$. Lo más importante es que la extensión del método para resolver sistemas de ecuaciones no lineales es computacionalmente eficiente. Por construcción, no necesita derivadas de orden superior [2] y la matriz de los sistemas lineales asociados en los tres pasos será la misma.

Teorema 1 *Dada una función suficientemente derivable, si se parte de un punto x_0 suficientemente cerca de x^* solución de $f(x) = 0$, con $f^{'}(x^*) \neq 0$, entonces existen dos únicas ternas de parámetros $(\alpha, \beta, \gamma) = (\pm 1, -1, -1)$ de forma que en la familia anterior se obtienen esquemas de cuatro orden. Además, dichos esquemas tienen las siguientes constantes asintóticas del error*

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^4} &= (\frac{1}{3}\frac{f^{''}(x^*)f^{'''}(x^*)}{f'(x^*)^2} - \frac{1}{2}\frac{f^{''}(x^*)^3}{f'(x^*)^3}), \ (\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -1), \\ \lim_{n\to\infty} \frac{e_{n+1}}{e_n^4} &= -\frac{1}{2}\frac{f^{''}(x^*)^3}{f'(x^*)^3}), \ (\alpha, \beta, \gamma) = (-1, -1, -1), \end{aligned}$$

siendo $e_n = x^* - x_n$.

3. Extensión a espacios de Banach

Sea $F : \Omega \subset X \to Y$ un operador no lineal entre dos espacios de Banach X e Y. Entonces los métodos de cuarto orden encontrados en las sección anterior vienen dados por:

$$\begin{aligned} y_n &= x_n \pm F^{'}(x_n)^{-1} F(x_n), \\ z_n &= y_n - F^{'}(x_n)^{-1} F(y_n), \\ x_{n+1} &= z_n - F^{'}(x_n)^{-1} F(z_n). \end{aligned}$$

Como vemos la matriz de los tres sistemas es la misma con lo cual el gasto computacional será comparable a Newton, obteniendo una alternativa a este de orden superior.

Al estudiar un método iterativo, uno de los aspectos más importante a considerar es la convergencia. Los resultados “tipo Kantarovich”, establecen condiciones suficientes en el operador y en la primera aproximación a la solución (pivote) para asegurar que la sucesión generada por el esquema converja a una solución de la ecuación, dando lugar a los llamados teoremas semilocales de convergencia. Por otra parte, en los llamados teoremas locales de convergencia, se imponen las hipótesis sobre la raíz buscada. En este tipo de teoremas las hipótesis en el operador están relacionadas con propiedades de lipschitzianidad en las derivadas de Fréchet del mismo [1]-[3].

4. Experimentos numéricos

Comenzamos con algunas ecuaciones en $\mathbb{R}$. En la tabla 2 mostramos los resultados que se obtienen al aplicar el método de Newton (New), el método de orden cuatro expuesto en Noor [4] (MN),y los presentados en este artículo ($\alpha+$) y ($\alpha-$). Los ejemplos son los seleccionados en Noor [4]:

$$\begin{aligned} f_1 &= (\sin x)^2 - x^2 + 1 \\ f_2 &= \cos x - x \\ f_3 &= (x-1)^3 - 1 \\ f_4 &= (x)^3 - 10 \\ f_5 &= xe^{x^2} - (\sin x)^2 + 3\cos x + 5 \\ f_6 &= e^{x^2+7x-30} - 1. \end{aligned}$$

El criterio de parada usado es: $|f(x_n)| < 10^{-15}$ y $|x_n - x_{n-1}| < 10^{-15}$.

Finalmente, sea la ecuación de Hammerstein

$$x(s) = 1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{s}{t+s}\frac{1}{x(t)}dt, \quad s \in [0,1]. \tag{1}$$

Usando la regla de integración de los trapecios con paso $h = \frac{1}{m}$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$0 = x^i - 1 + \frac{1}{4m}\left(\frac{1}{2}\frac{t_i}{t_i+t_0}\frac{1}{x^0} + \sum_{k=0}^{n}\frac{t_i}{t_i+t_k}\frac{1}{x^k} + \frac{1}{2}\frac{t_i}{t_i+t_m}\frac{1}{x^m}\right), \quad i = 0,1,\ldots,m, \tag{2}$$

donde $t_j = \frac{j}{m}$.

En este caso, la segunda derivada Fréchet es diagonal por bloques.

Consideramos $m = 100$ y tomamos como solución la computada numéricamente por el método de Newton. (ver tabla 1).

New	$\alpha-$
4	2

Tabla 1: Número de iteraciones hasta la convergencia, $x_0 = 1$, discretización ecuación tipo Hammerstein.

5. Conclusiones

Se ha estudiado unos métodos iterativos de cuarto orden para ecuaciones no lineales. Se han calculado las constantes asintóticas del error y se ha presentado la extensión de los métodos a ecuaciones entre operadores en espacios de Banach. En diversos ejemplos hemos testado los distintos métodos. Los métodos introducidos son competitivos con respecto a los métodos clásicos ya conocidos.

	n	x_n	$f(x_n)$	$\|x_n - x_{n-1}\|$
f_1,$x_0 = -1$				
New	7	-1.40449164821534122603508681 78	-1.04e-50	7.33e-26
MN	5	-1.4044916482153412260350868178	-1.30e-40	5.40e-41
$\alpha-$	5	-1.4044916482153412260350868178	-4.27e-161	5.46e-41
$\alpha+$	5	-1.4044916482153412260350868178	-8.86e-210	3.83e-53
f_2,$x_0 = 1{,}7$				
New	5	0.7390851332151606416553120876 7	-2.03e-32	2.34e-16
MN	4	0.73908513321516064165531208767	-3.70e-54	2.40e-54
$\alpha-$	4	0.73908513321516064165531208767	-1.82e-220	2.24e-55
$\alpha+$	4	0.73908513321516064165531208767	-1.28e-133	9.30e-34
$f_3, x_0 = 3{,}5$				
New	8	2	2.06e-42	8.28e-22
MN	5	2	1.75e-24	5.80e-24
$\alpha-$	5	2	1.42e-100	5.86e-26
$\alpha+$	5	2	1.86e-117	3.90e-30
$f_4, x_0 = 1{,}5$				
New	7	2.1544346900318837217592935665	2.06e-54	5.64e-28
MN	5	2.1544346900318837217592935665	8.10e-45	5.80e-46
$\alpha-$	5	2.1544346900318837217592935665	6.46e-185	5.84e-47
$\alpha+$	4	2.1544346900318837217592935665	5.42e-65	6.18e-17
$f_5, x_0 = -2$				
New	9	-1.2076478271309189270094167584	-2.27e-40	2.73e-21
MN	6	-1.2076478271309189270094167584	-1.00e-37	4.90e-39
$\alpha-$	6	-1.2076478271309189270094167584	-1.68e-151	4.97e-39
$\alpha+$	5	-1.2076478271309189270094167584	-2.06e-84	5.08e-22
$f_6, x_0 = 3{,}5$				
New	13	3	1.51e-47	4.21e-25
MN	8	3	5.00e-25	3.80e-26
$\alpha-$	8	3	3.24e-98	3.85e-26
$\alpha+$	7	3	2.51e-71	2.69e-19

Tabla 2: Ejemplos con distintos métodos y ecuaciones.

Agradecimientos

La investigación de los cuatro primeros autores ha sido en parte subvencionada por MTM2004-07114 y 00675/PI/04. La investigación de Sergio Plaza ha sido subvencionada en parte por Fondecyt Grant #1020711 y Dicyt Grant #0433

Referencias

[1] S. Amat, S. Busquier, *Third-order iterative methods under Kantorovich conditions.* J. Math. Anal. Appl., en prensa 2007.

[2] S. Amat, S. Busquier and J.M. Gutiérrez, *Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations.* J. Comput. Appl. Math. **157** (1), 197–205, (2003).

[3] M.A. Hernández and N. Romero, *On a characterization of some Newton-like methods of R-order at least three.* J.Comput.Appl.Math. **183** (1), 53-66, (2005).

[4] M.A. Noor and K.I. Noor, *Some iterative schemes for nonlinear equations*, Appl. Math. Comp., **183**, 774-779, (2006).