

## Métodos de Elementos Finitos y de Características para la Simulación de la Convección Natural

A. BERMÚDEZ<sup>1</sup>, M. BENÍTEZ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Dpto. de Matemática Aplicada, Universidad de Santiago de Compostela, Facultad de Matemáticas, CP. 15782.  
E-mails: martabg@usc.es, mabermud@usc.es.

**Palabras clave:** convección natural, elementos finitos, características

### Resumen

Esta comunicación se centrará en el estudio de problemas de convección natural.

En primer lugar se recordarán los modelos matemáticos implicados en los fenómenos de transporte de un fluido; como caso particular se obtienen los modelos matemáticos implicados en los procesos de convección natural. Los modelos se resuelven numéricamente sobre un dominio bidimensional.

Dado el carácter evolutivo del problema que se quiere analizar y la importancia de la convección en el mismo, hemos utilizado un método de características de orden dos en combinación con métodos de elementos finitos, para resolver numéricamente el problema acoplado de las ecuaciones de conservación de la cantidad de movimiento y de la energía.

Para mostrar la eficacia del método propuesto se ha resuelto un problema bidimensional de convección natural en una cavidad cuadrada donde las paredes verticales se encuentran a distintas temperaturas. Los resultados obtenidos han sido comparados con los que aparecen en Vahl Davis [3].

### 1. Modelo matemático

En esta sección introduciremos los modelos matemáticos que hemos considerado. Supondremos un fluido compresible, viscoso y Newtoniano en movimiento.

Denotamos por  $[0, t_f]$  el intervalo de tiempo en el que estudiaremos el proceso, por  $\Omega$  el dominio ocupado por el fluido y por  $\Gamma$  su frontera, dividida como sigue:  $\Gamma = \Gamma_D^T \cup \Gamma_N^T = \Gamma_D^F \cup \Gamma_{N_1}^F \cup \Gamma_{N_2}^F$ , con  $\Gamma_D^T \cap \Gamma_N^T = \Gamma_D^F \cap \Gamma_{N_1}^F \cap \Gamma_{N_2}^F = \emptyset$ . Denotaremos por  $x=(x_1, x_2)$  los puntos de  $\Omega$  y por  $\mathbf{v}(x, t)=(u(x, t), v(x, t))$ ,  $\pi(x, t)$  y  $\theta(x, t)$  la velocidad, la presión y la temperatura, respectivamente, de un punto  $x \in \Omega$  en el instante  $t \in [0, t_f]$ .

### 1.1. Problema Térmico

El modelo matemático para la conservación de la energía es una formulación del tipo *entalpía* con un término convectivo que incluye el campo de velocidades (que se supone conocido cuando se estudia dicha ecuación de forma independiente). Este modelo permite contemplar la posibilidad de un cambio de estado (ver [2]). Hemos adoptado la notación empleada en [1].

Supondremos que el fluido es homogéneo con lo que los parámetros físicos dependerán únicamente de la temperatura y no de la variable espacial.

Entonces la ecuación de la energía en función de la entalpía  $\sigma$  adopta la siguiente forma:

$$\dot{\sigma} - \text{div}(k(\theta)\text{grad}\theta) = f \quad \text{en } \Omega \times (0, t_f), \quad (1)$$

$$\sigma \in H(\theta), \quad (2)$$

siendo  $k$  la conductividad térmica y  $H$  una función, posiblemente multívoca, que relaciona la temperatura con la entalpía.

En (1)  $\dot{\sigma}$  denota la derivada material de  $\sigma$ , definida para una función escalar en coordenadas Eulerianas  $\phi$ , por

$$\dot{\phi}(x, t) := \frac{\partial}{\partial t} \phi(\mathbf{X}(p, t), t)|_{p=\mathbf{P}(x, t)}, \quad (3)$$

donde  $\mathbf{X}$  es el movimiento correspondiente al campo de velocidades  $\mathbf{v}$  y  $\mathbf{P}$  su aplicación de referencia (ver por ejemplo [4]).

Planteamos un problema de valor inicial con condiciones de contorno. Concretamente:

**PT** : Encontrar una función  $\theta : \Omega \times (0, t_f) \longrightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\dot{\sigma} - \text{div}(k(\theta)\text{grad}\theta) = f \quad \text{en } \Omega \times (0, t_f), \quad (4)$$

$$\sigma \in H(\theta), \quad (5)$$

$$k(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} = g_T \quad \text{en } \Gamma_N^T \times (0, t_f), \quad (6)$$

$$\theta(x, t) = \theta_D(x, t) \quad \text{en } \Gamma_D^T \times (0, t_f), \quad (7)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x) \quad \text{en } \Omega, \quad (8)$$

siendo  $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$  el vector normal unitario exterior a  $\Gamma_N^T$ , y  $\theta_0$ ,  $\theta_D$  y  $g_T$  funciones dadas.

### 1.2. Problema Fluidodinámico

Para el caso general de un movimiento bidimensional, el flujo está determinado por el vector velocidad con dos componentes  $\mathbf{v} = (u, v)$ , la presión  $\pi$  y la densidad  $\rho$ . Para la determinación de estas cuatro magnitudes disponemos de la ecuación de conservación de la masa, de las dos ecuaciones del movimiento (conservación de la cantidad del movimiento) y de la ecuación termodinámica de estado<sup>1</sup>.

Para el movimiento no estacionario la ecuación de conservación de la masa se expresa de la siguiente forma no conservativa

$$\dot{\rho} + \rho \text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (9)$$

---

<sup>1</sup>En realidad debemos considerar también como incógnita la temperatura  $\theta$ , puesto que está presente en la ecuación de estado. Por tanto hay que añadir la ecuación de la energía a las ecuaciones anteriores.

Por otra parte, la ecuación del movimiento es

$$\rho \dot{\mathbf{v}} + \text{grad } \pi = \text{div}(2\eta D) + \text{div}(\xi \text{tr}(D)I) + \mathbf{b}, \quad (10)$$

donde  $D = \frac{1}{2}(\text{grad} \mathbf{v} + \text{grad} \mathbf{v}^t)$ ,  $\dot{\mathbf{v}}$  es la derivada material de  $\mathbf{v}$  y  $\eta$  representa la viscosidad dinámica del fluido que suponemos únicamente dependiente de la temperatura.

En los casos que consideramos, el término  $\text{div}(\xi \text{tr}(D)I)$  en la ecuación (10) es pequeño comparado con los otros términos de la ecuación por lo que será despreciado.

A continuación planteamos un problema de valor inicial con condiciones de contorno. Concretamente,

**PF** : Encontrar dos funciones  $\mathbf{v} : \Omega \times (0, t_f) \longrightarrow \mathbb{R}^2$  y  $\pi : \Omega \times (0, t_f) \longrightarrow \mathbb{R}$  tales que

$$\rho \dot{\mathbf{v}} + \text{grad } \pi = \text{div}(2\eta D) + \mathbf{b}, \quad (11)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = \hat{g}, \quad (12)$$

$$T \mathbf{n}^2 = \mathbf{F} \quad \text{en } \Gamma_{N_2}^F \times (0, t_f), \quad (13)$$

$$(T \mathbf{n}^1)_\tau = T \mathbf{n}^1 \cdot \tau = \tilde{g}_F \quad \text{en } \Gamma_{N_1}^F \times (0, t_f), \quad (14)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^1 = g_F \quad \text{en } \Gamma_{N_1}^F \times (0, t_f), \quad (15)$$

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{v}_D(x, t) \quad \text{en } \Gamma_D^F \times (0, t_f), \quad (16)$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x) \quad \text{en } \Omega, \quad (17)$$

siendo  $T = -\pi I + 2\eta D$  el tensor de tensiones de Cauchy,  $\mathbf{n}^1 = (n_1^1, n_2^1)$  el vector normal unitario exterior a  $\Gamma_{N_1}^F$ ,  $\mathbf{n}^2 = (n_1^2, n_2^2)$  el vector normal unitario exterior a  $\Gamma_{N_2}^F$  y  $\tau = (\tau_1, \tau_2)$  un vector unitario tangente a  $\Gamma_{N_1}^F$ , y las funciones de respuesta de  $\rho$  y  $\eta$ ,  $\mathbf{v}_0$ ,  $\mathbf{v}_D$ ,  $g_F$ ,  $\tilde{g}_F$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\hat{g}$  dadas.

### 1.3. Aproximación de Boussinesq

A continuación recordaremos las ecuaciones de Boussinesq que modelan los procesos de convección natural en un fluido (ver [1]). Se trata de una aproximación de los modelos anteriores para un proceso termodinámico próximo a un estado de equilibrio mecánico, cuya única fuerza es la gravitatoria, es decir,  $\mathbf{b} = \rho \mathbf{g}$ .

- Ecuación del movimiento:

$$\rho_0 \dot{\mathbf{v}} + \text{grad } \pi - \text{div}(2\eta_0 D) = \rho_0(1 - \alpha_0(\theta - \theta_0))\mathbf{g}, \quad (18)$$

siendo  $\alpha = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right)_\pi$  el coeficiente de expansión térmica a presión constante.

- Ecuación de la energía:

$$\dot{\sigma} = \text{div}(k_0 \text{grad } \theta) + f, \quad (19)$$

$$\sigma = H_0(\theta) = \rho_0 c_{\pi 0} \theta, \quad (20)$$

donde  $c_\pi$  denota el coeficiente de calor específico a presión constante.

- Ecuación de conservación de la masa:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (21)$$

El subíndice 0 significa que el valor del campo está calculado en la configuración inicial de equilibrio.

A continuación determinaremos los parámetros adimensionales de los que dependen las variables buscadas. Para ello se introducen en las ecuaciones (18),(19) y (21) magnitudes sin dimensiones cuyos factores de escala son elegidos convenientemente (ver por ejemplo [5]).

Entonces se sigue que las soluciones de las ecuaciones (18),(19) y (21) dependen de las dos magnitudes adimensionales siguientes:

$$Ra = \frac{g\alpha_0(\Delta\theta)_0 L^3}{\lambda_0\nu_0}; \quad Pr = \frac{\eta_0}{\rho_0\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\lambda_0}, \quad (22)$$

siendo  $\lambda_0$  la difusividad térmica ( $\lambda_0 = \frac{k_0}{\rho_0 c_{\pi 0}}$ ) y  $\nu_0 = \frac{\eta_0}{\rho_0}$  la viscosidad cinemática. La primera de las magnitudes se conoce como número de Rayleigh y la segunda como número de Prandtl.

## 2. Formulación variacional

### 2.1. Formulación débil del problema térmico

Obtengamos la formulación variacional del problema **PT**. Multiplicando la ecuación (4) por una función test  $z \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \{z \in H^1(\Omega) / z|_{\Gamma_D^T} = 0\}$ , integrando en  $\Omega$  y aplicando una fórmula de Green en la parte correspondiente al término de difusión, resulta

**PTV** : Encontrar  $\theta(\cdot, t) \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) + \tilde{\theta}(\cdot, t)$  tal que

$$\int_{\Omega} \dot{\sigma} z dx + \int_{\Omega} k(\theta) grad \theta \cdot grad z dx = \int_{\Omega} f z dx + \int_{\Gamma_N^T} g_T z d\Gamma, \quad (23)$$

$$\forall z \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega), \forall t \in (0, t_f), \quad (24)$$

$$\sigma \in H(\theta), \quad (24)$$

$$\theta(x, 0) = \theta_0(x), \quad (25)$$

siendo  $\tilde{\theta}(\cdot, t) \in H^1(\Omega)$  tal que  $\tilde{\theta}(\cdot, t)|_{\Gamma_D^T} = \theta_D(\cdot, t)|_{\Gamma_D^T} \forall t \in (0, t_f)$ .

### 2.2. Formulación débil del problema fluidodinámico

Definimos los siguientes espacios funcionales :

$$H_{\Gamma_D}^1(\Omega) = \left\{ \varphi \in H^1(\Omega) / \varphi|_{\Gamma_D^F} = 0 \right\},$$

$$W = \left\{ \Phi \in H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega) / \Phi \cdot \mathbf{n}^1 = 0 \text{ en } \Gamma_{N_1}^F \right\}.$$

Multiplicando la ecuación (11) por una función test  $\mathbf{w} \in W$  y la ecuación (12) por una función test  $q \in L^2(\Omega)$ , integrando ambas en  $\Omega$  y aplicando una fórmula de Green en la parte correspondiente al tensor de esfuerzos de Cauchy, resulta<sup>2</sup> :

<sup>2</sup>Hemos tomado  $H_{\Gamma_D}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_D}^1(\Omega)$  como el espacio de las funciones test para la ecuación del movimiento y hemos añadido dos términos de penalización para imponer la condición de frontera dada en (15).

**PHF** : Encontrar  $\mathbf{v}(\cdot, t) \in H_{\Gamma_D^F}^1(\Omega) \times H_{\Gamma_D^F}^1(\Omega) + \tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t)$  y  $\pi(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$  tales que:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \rho \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w} \, dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \eta (\text{grad } \mathbf{v} + \text{grad } \mathbf{v}^t) \cdot (\text{grad } \mathbf{w} + \text{grad } \mathbf{w}^t) \, dx \\ & - \int_{\Omega} \pi \text{div} \mathbf{w} \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{N_1}^F} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^1 \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}^1 \, d\Gamma = \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{w} \, dx + \int_{\Gamma_{N_1}^F} \tilde{g}_F(\mathbf{w})_{\tau} \, d\Gamma \end{aligned} \quad (26)$$

$$+ \int_{\Gamma_{N_2}^F} \mathbf{F} \cdot \mathbf{w} \, d\Gamma + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma_{N_1}^F} g_F \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}^1 \, d\Gamma, \quad \forall \mathbf{w} \in H_{\Gamma_D^F}^1 \times H_{\Gamma_D^F}^1, \quad \forall t \in (0, t_f),$$

$$\int_{\Omega} \text{div} \mathbf{v} q \, dx = \int_{\Omega} \hat{g} q \, dx, \quad \forall q \in L^2(\Omega), \quad \forall t \in (0, t_f), \quad (27)$$

$$\mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}_0(x), \quad (28)$$

donde  $\varepsilon$  denota un parámetro suficientemente pequeño y siendo  $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$  tal que  $\tilde{\mathbf{v}}(\cdot, t)|_{\Gamma_D^F} = \mathbf{v}_D(\cdot, t)|_{\Gamma_D^F} \quad \forall t \in (0, t_f)$ .

### 3. Resolución numérica

#### 3.1. Problema térmico

Los pasos que hemos seguido para resolver numéricamente el problema térmico son los siguientes:

- Se introduce un cambio de variable en la incógnita que nos permita eliminar la no linealidad del término de difusión (transformación de Kirchoff). Concretamente, se define  $\xi = \beta(\theta)$  donde  $\beta$  es una primitiva de la conductividad térmica :

$$\beta(r) = \int_0^r k(s) \, ds. \quad (29)$$

- Se propone una discretización temporal de orden dos utilizando el método de las características. Concretamente considerando  $\chi^m(x) = \mathbf{X}(\mathbf{P}(x, t^{n+1}), t^m)$ . Hemos utilizado

- Aproximación en el instante  $t^1$ :

$$\dot{\sigma}(x, t^1) \simeq \frac{\sigma^1(x) - \sigma^0(\chi^0(x))}{\Delta t}. \quad (30)$$

- Aproximación en el instante  $t^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ :

$$\dot{\sigma}(x, t^{n+1}) \simeq \frac{3\sigma^{n+1}(x) - 4\sigma^n(\chi^n(x)) + \sigma^{n-1}(\chi^{n-1}(x))}{2\Delta t}. \quad (31)$$

- Se utiliza una discretización espacial de orden dos. Para ello se introduce una familia regular de triangulaciones  $(\tau_h^1)_h$  y se consideran los siguientes espacios de elementos finitos:

$$V_h^2 = \{ \varphi_h \in C^0(\Omega) / \varphi_{h/K} \in P_2(K), \quad \forall K \in \tau_h^1 \}, \quad (32)$$

$$V_{0h}^2 = \{ \varphi_h \in V_h^2 / \varphi_h = 0 \text{ en } \Gamma_D^T \}. \quad (33)$$

- Se emplea un algoritmo iterativo de dualidad para resolver el problema discretizado.

### 3.2. Problema fluidodinámico

Los pasos que hemos seguido para resolver numéricamente el problema fluidodinámico son los siguientes:

- Discretización temporal de orden dos utilizando el método de las características.

- Aproximación en el instante  $t^1$ :

$$\dot{\mathbf{v}}(x, t^1) \simeq \frac{\mathbf{v}^1(x) - \mathbf{v}^0(\chi^0(x))}{\Delta t}. \quad (34)$$

- Aproximación en el instante  $t^{n+1}$ ,  $n \geq 1$ :

$$\dot{\mathbf{v}}(x, t^{n+1}) \simeq \frac{3\mathbf{v}^{n+1}(x) - 4\mathbf{v}^n(\chi^n(x)) + \mathbf{v}^{n-1}(\chi^{n-1}(x))}{2\Delta t}. \quad (35)$$

- Discretización espacial empleando un método de elementos finitos ( $P_1$ -burbuja para cada componente de la velocidad y  $P_1$  para la presión). Para ello hemos introducido una familia regular de triangulaciones  $(\tau_h^2)_h$  y hemos considerado los siguientes espacios:

$$X_h = \left\{ \mathbf{w}_h \in C^0(\Omega)^2 / \mathbf{w}_{h/K} \in P^b(K)^2, \forall K \in \tau_h^2 \right\}, \quad (36)$$

$$X_{0h} = \left\{ \mathbf{w}_h \in X_h / \mathbf{w}_h = \mathbf{0} \text{ en } \Gamma_D^F \right\}, \quad (37)$$

$$V_h^1 = \left\{ \varphi_h \in C^0(\Omega) / \varphi_{h/K} \in P_1(K), \forall K \in \tau_h^2 \right\}, \quad (38)$$

donde

$$P^b(K) = \left\{ q + \alpha \lambda_4^K : q \in P_1(K), \alpha \in \mathbb{R} \right\},$$

siendo  $\lambda_4^K = 27 \prod_{i=1}^3 \lambda_i^K$  la función burbuja asociada al elemento  $K$ , donde  $\{\lambda_1^K, \lambda_2^K, \lambda_3^K\}$  denotan las coordenadas baricéntricas con respecto a los vértices del elemento  $K$ .

- Aproximación de la viscosidad  $\eta$  por una función constante por elemento.
- Introducción de una nueva incógnita  $\bar{\pi}_h^{n+1}$  definida a partir de  $\pi_h^{n+1}$  y  $div \mathbf{v}_h^{n+1}$ :

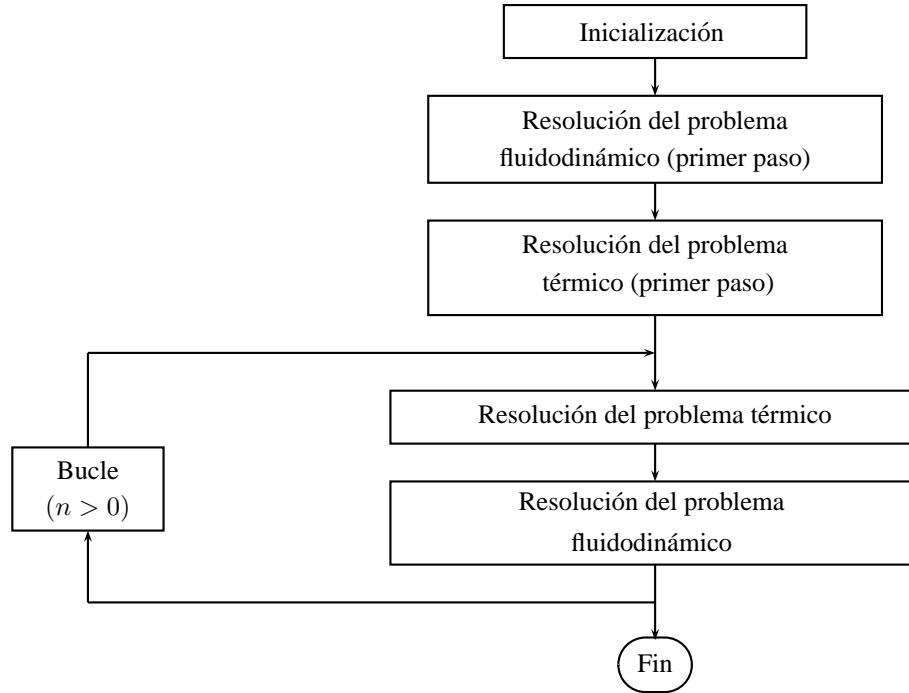
$$\bar{\pi}_h^{n+1} = \pi_h^{n+1} - \eta_h div \mathbf{v}_h^{n+1}. \quad (39)$$

- Resolución del problema discretizado. Para ello hemos empleado dos métodos:

- Un algoritmo iterativo.
- Un método directo (utilizando las librerías MKL).

### 3.3. Problema acoplado

En la figura se muestra un esquema del algoritmo numérico propuesto para resolver el problema acoplado.



## 4. Un Ejemplo test de convección natural

### 4.1. Descripción del problema

Hemos considerado el problema bidimensional de la convección natural en una cavidad cuadrada de lado  $L$ , de un fluido viscoso, newtoniano, incompresible, de número de Prandtl  $Pr = 0.71$  y para el que suponemos válida la aproximación de Boussinesq (ver Sección 1). El problema considerado se ilustra en la Figura 1.

$$\begin{array}{c}
 u^*=0, v^*=0, \frac{\partial \theta^*}{\partial x_2^*}=0 \\
 \\
 \begin{array}{ccc}
 & t^*=0 & \\
 u^*=0 & u^*=v^*=\theta^*=1 & u^*=0 \\
 v^*=0 & & v^*=0 \\
 \theta^*=1 & & \theta^*=0
 \end{array} \\
 \\
 u^*=0, v^*=0, \frac{\partial \theta^*}{\partial x_2^*}=0
 \end{array}$$

Figura 1: Condiciones iniciales y de contorno.

### 4.2. Resultados numéricos

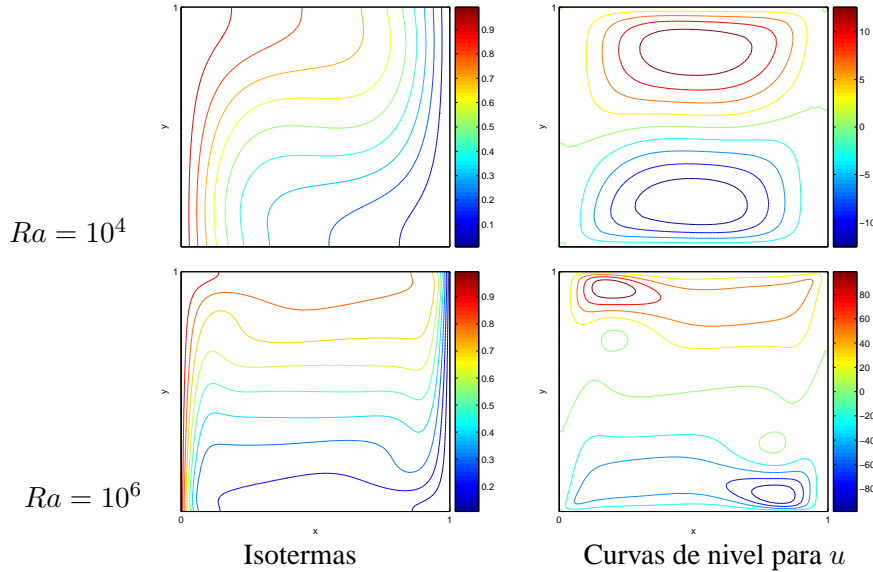
En la Tabla 1 presentamos los errores cometidos al comparar nuestros resultados numéricos con los obtenidos por Vahl Davis [3] para la media del número de Nusselt sobre la frontera vertical

de la cavidad en  $x_1 = 0$  y  $Ra = 10^4$ . Hemos utilizado mallas uniformes  $25 \times 25$  y  $49 \times 49$  para resolver la parte térmica y  $17 \times 17$  y  $33 \times 33$  para resolver la parte fluidodinámica (escribiremos  $24 \setminus 16$  para referirnos a que hemos utilizado la malla  $25 \times 25$  para resolver la parte térmica y la malla  $17 \times 17$  para resolver la parte fluidodinámica del problema acoplado, y así sucesivamente). Se obtiene un error cuyo orden oscila entre 1,37 y 1,82.

Malla	24\16	48\32
Delta		
0.01	$1.35E - 01$	$9.50E - 02$
0.005	$8.76E - 02$	$3.83E - 02$
0.0025	$9.08E - 02$	$2.71E - 02$
0.00125	$1.01E - 01$	$3.20E - 02$
0.000625	$1.08E - 01$	$3.79E - 02$

Tabla 1: Error comparado con Vahl Davis [3] de la media del número de Nusselt sobre la frontera vertical de la cavidad en  $x_1 = 0$  para  $Ra = 10^4$ .

A continuación se muestran las curvas de nivel de la temperatura y la velocidad horizontal para  $Ra = 10^4$  y  $Ra = 10^6$ .



## Referencias

- [1] A. Bermúdez. Continuum Thermomechanics. Birkhäuser Verlag, Berlin. *Progress in Mathematical Physics*, 43, 2005.
- [2] A. Bermúdez and M.V. Otero. Numerical solution of a three-dimensional solidification problem in aluminium casting. *Finite Elements in Analysis and Design*, 40:1885–1906, 2004.
- [3] G. de Vahl Davis. Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution. *Internat. J. Numer. Methods Fluids*, 3:249–64, 1983.
- [4] M. E. Gurtin. An Introduction to Continuum Mechanics. *Mathematics in Science and Engineering*, 158, 1981.
- [5] D. C. Wan, B. S. V. Patnaik, and G. W. Wei. A new Benchmark Quality Solution for the Buoyancy-Driven Cavity by Discrete Singular Convolution, Part B. *Numerical Heat Transfer*, 40:199–228, 2001.