XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Una nueva caracterización de los invariantes por feedback de cocientes de subespacios (A, B)-invariantes

I. Baragaña[1], F. Puerta[2], I. Zaballa[3]

[1] *Dpto. de Ciencias de la Computación e Inteligencia Artificial, Univ. del País Vasco, Aptdo. 649, 20080 Donostia-San Sebastián. E-mail:* itziar.baragana@ehu.es.
[2] *Departament de Matemàtica Aplicada I, Universitat Politècnica de Catalunya, Diagonal 647, 08028. E-mail:* puerta@ma1.upc.es.
[3] *Depto. de Matemática Aplicada y EIO, Univ. del País Vasco, Aptdo. 640, 48080 Bilbao. E-mail:* ion.zaballa@ehu.es.

Palabras clave: Equivalencia por feedback, índices de Brunovsky, subespacios (A, B)-invariantes

Resumen

Dado un par de matrices $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ y un subespacio (A, B)-invariante $\mathcal{V}$, en [1] Antoulas caracteriza cómo son las posibles bases de $\mathcal{V}$. En este trabajo expresamos los índices de Brunovsky de cualquier par cociente de (A, B) a $\mathcal{V}$ en términos de dicha caracterización.

1. Introducción

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales con control

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

donde $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times m}$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, un subespacio $\mathcal{V} \leq \mathbb{F}^n$ se dice (A, B)-invariante si $A(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} + \operatorname{Im} B$.

Asociados a un subespacio (A, B)-invariante $\mathcal{V}$ podemos definir la restricción de (A, B) a $\mathcal{V}$ y el correspondiente cociente (ver [2] o [5]). Si consideramos $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ como una aplicación de $\mathbb{F}^{n+m}$ en $\mathbb{F}^n$, la restricción y cociente de (A, B) a $\mathcal{V}$ son pares (A_1, B_1) y (A_2, B_2) tales que, en una selección apropiada de bases en $\mathbb{F}^{n+m}$ y $\mathbb{F}^n$, $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ puede escribirse como

$$\left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & A_3 & B_1 & B_3 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \end{array}\right].$$

Además, los pares (A_1, B_1) y (A_2, B_2) son únicos salvo equivalencia por feedback.

Recordemos que dos pares de matrices $(A,B),(\bar{A},\bar{B}) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ son *equivalentes por feedback* (ver [3]) si existen $P \in Gl_n(\mathbb{F})$, $Q \in Gl_m(\mathbb{F})$, $R \in \mathbb{F}^{m\times n}$ tales que

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ R & Q \end{bmatrix}.$$

Un sistema completo de invariantes para la equivalencia por feedback de un par $(A,B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ viene dado por los invariantes de Kronecker del haz singular $\lambda \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$. Es decir, por los índices minimales por columnas y los factores invariantes (ver [4]). Los factores invariantes de $\lambda \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ son los de $\begin{bmatrix} \lambda I_n - A & -B \end{bmatrix}$ como matriz polinomial. Los índices minimales por columnas del haz $\lambda \begin{bmatrix} I_n & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ se conocen como *índices de controlabilidad* de (A,B) y forman una partición de la dimensión del subespacio de controlabilidad de (A,B). En otras palabras, si

$$\mathcal{C}(A,B) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{n-1}B \end{bmatrix}$$

es la *matriz de controlabilidad* y $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_m \geq 0$ son los índices de controlabilidad de (A,B), entonces $\sum_{i=1}^m k_i = \operatorname{rang} \mathcal{C}(A,B)$.

Recordemos que el par (A,B) es *completamente controlable* si $\operatorname{rang} \mathcal{C}(A,B) = n$, o, equivalentemente, si todos sus factores invariantes son iguales a 1.

Una forma canónica para la equivalencia por feedback de pares de matrices es la llamada *forma canónica de Brunovsky* (ver, por ejemplo, [3] o [4]). Dado $(A,B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$, sean $k_1 \geq \cdots \geq k_r > 0 = k_{r+1} = \cdots = k_m = 0$ sus índices de controlabilidad y $\alpha_1 \mid \cdots \mid \alpha_n$ sus factores invariantes. Supongamos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_t = 1$ y $d(\alpha_{t+1}) \geq 1$. Entonces el par (A,B) es equivalente por feedback a un par de la forma

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_c & 0 & B_c \\ 0 & J & 0 \end{array}\right], \tag{1}$$

donde

$$A_c = \operatorname{Diag}(A_1, \ldots, A_r), \quad B_c = \begin{bmatrix} \operatorname{Diag}(B_1, \ldots, B_r) & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{k_i-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{k_i\times k_i}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{k_i\times 1}, \quad 1 \leq i \leq r$$

y

$$J = \operatorname{Diag}(N_1, \ldots, N_{n-t}),$$

siendo N_i la matriz compañera del factor invariante α_{t+i}, $1 \leq i \leq n-t$.

La partición conjugada de $(k_1, \ldots, k_m)$ es la secuencia de enteros no negativos definidos de la siguiente forma:

$$r_i := \#\{j \,:\, k_j \geq i\}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Estos números pueden ser caracterizados en términos de rangos de submatrices de la matriz de controlabilidad. En [3] se prueba que

$$\sum_{j=1}^{i} r_j = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{i-1}B \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Llamaremos a $(r_1,\dots,r_n)$ *índices de Brunovsky* de (A,B).

Dado un subespacio (A,B)-invariante $\mathcal{V}\in\mathbb{F}^n$ de dimensión d, en [1], se obtiene una caracterización de las matices base de $\mathcal{V}$. Esto es, las matrices $X\in\mathbb{F}^{n\times d}$ tales que $\operatorname{rang} X = d$ y $\mathcal{V}=\langle X\rangle$.

Por otra parte, todos los pares cociente de (A,B) a $\mathcal{V}$ son equivalentes por feedback y, por tanto, tienen los mismos índices de Brunovsky. En este trabajo caracterizamos los índices de Brunovsky de cualquier cociente de (A,B) a $\mathcal{V}$ en términos de una matriz base de $\mathcal{V}$.

2. Resultados previos

Dado un par controlable $(A,B)\in\mathbb{F}^{n\times n}\in\mathbb{F}^{n\times n}$, sea (A_c,B_c) la forma canónica de Brunovsky de (A,B). Es fácil probar que un subespacio $\mathcal{V}=\langle X\rangle\le\mathbb{F}^n$ es (A,B)-invariante si y sólo si $P\mathcal{V}=\langle PX\rangle$ es (A_c,B_c)-invariante para una matriz $P\in Gl_n(\mathbb{F})$.

En el siguiente Teorema mostramos la caracterización de Antoulas de los subespacios (A,B)-invariantes.

Teorema 1 *([1]) Sea $(A,B)\in\mathbb{F}^{n\times n}\in\mathbb{F}^{n\times m}$ un par de matrices controlable en forma canónica de Brunovsky con índices de controlabilidad $k_1\ge\cdots\ge k_m>0$. Sea $\mathcal{V}\le\mathbb{F}^n$ un subespacio de dimensión d. $\mathcal{V}$ es (A,B)-invariante si y sólo si existe un par $(H,F)\in\mathbb{F}^{m\times d}\times\mathbb{F}^{d\times d}$ tal que*

$$\mathcal{V}=\langle\Theta(F,H)\rangle$$

donde

$$\Theta(F,H)=\begin{bmatrix}\Theta_1\\ \vdots\\ \Theta_m\end{bmatrix}\quad y\quad \Theta_i=\begin{bmatrix}h_i\\ \vdots\\ h_iF^{k_i-1}\end{bmatrix},\quad 1\le i\le m,$$

siendo h_i la i-ésima fila de H y se debe entender que Θ_i no está presente si $k_i=0$.

En lugar de considerar el par en forma canónica de Brunovsky, es más conveniente para nuestros propósitos suponer que el par está en la forma canónica asociada a los índices de Brunovsky:

Lema 1 *([6]) Sea $(A,B)\in\mathbb{F}^{n\times n}\times\mathbb{F}^{n\times m}$. Sean $r_1\ge\cdots\ge r_k>0=r_{k+1}=\cdots=r_n=0$ los índices de Brunovsky y $\alpha_1\mid\cdots\mid\alpha_n$ los factores invariantes de (A,B). Supongamos que $\alpha_1=\cdots=\alpha_t=1$ y $d(\alpha_{t+1})\ge1$. Entonces el par (A,B) es equivalente por feedback a un par de la forma (1) donde*

$$(A_c,B_c)=\left(\begin{bmatrix}0&0&\dots&0&0\\ E_{r_2}&0&\dots&0&0\\ 0&E_{r_3}&\dots&0&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\dots&E_{r_k}&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}E_{r_1}\\0\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}\right),$$

$E_{r_i} = [I_{r_i} \quad 0] \in \mathbb{F}^{r_i \times r_{i-1}}$, $1 \leq i \leq k$, $r_0 := m$ y

$$J = \mathrm{Diag}(N_1, \ldots, N_{n-t}),$$

siendo N_i la matriz compañera del factor invariante α_{t+i}, $1 \leq i \leq n-t$.

La caracterización de Antoulas de los subespacios (A, B)-invariantes cuando el par (A, B) está en esta forma canónica queda reflejada en el siguiente

Teorema 2 *Sea $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \in \mathbb{F}^{n\times m}$ un par de matrices controlable con índices de Brunovsky $r_1 \geq \cdots \geq r_k > 0 = r_{k+1} = \cdots = r_n$. Supongamos que (A, B) está en la forma canónica asociada a los índices de Brunovsky mostrada en el Lema 1.*

Sea $\mathcal{V} \leq \mathbb{F}^n$ un subespacio de dimensión d. $\mathcal{V}$ es (A, B)-invariante si y sólo si existe un par $(H, F) \in \mathbb{F}^{m\times d} \times \mathbb{F}^{d\times d}$ tal que $\mathcal{V} = \langle \Lambda(F, H)\rangle$, donde si partimos

$$H = \begin{bmatrix} H_k \\ H_{k-1} \\ \vdots \\ H_1 \end{bmatrix}, \quad \textit{con} \quad H_i \in \mathbb{F}^{(r_i - r_{i+1})\times d}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

entonces

$$\Lambda(F, H) := \begin{bmatrix} \Lambda_1(F, H) \\ \Lambda_2(F, H) \\ \vdots \\ \Lambda_k(F, H) \end{bmatrix} \quad \textit{y} \quad \Lambda_i(F, H) := \begin{bmatrix} H_k F^{k-i} \\ H_{k-1} F^{k-i-1} \\ \vdots \\ H_i \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

3. Resultado principal

En toda la sección, $(A, B) \in \mathbb{F}^{n\times n} \times \mathbb{F}^{n\times m}$ es un par de matrices tal que $\mathrm{rang}\, B = m$, $\mathcal{V} \leq \mathbb{F}^n$ es un subespacio (A, B)-invariante, $\dim \mathcal{V} = d$ y $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ son los índices de Brunovsky de cualquier par cociente de (A, B) a $\mathcal{V}$.

Nuestro primer objetivo es caracterizar los índices $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ en términos de (A, B) y una matriz base de $\mathcal{V}$. Para ello, necesitamos el siguiente

Lema 2 *([5, Remark 1.3]) Sea $X \in \mathbb{F}^{n\times d}$ una matriz tal que $\mathcal{V} = \langle X\rangle$ y $\mathrm{rang}\, X = d$ y sea $q := \dim(\mathrm{Im}\, B \cap \mathcal{V})$.*

Entonces existen matrices $P \in Gl_n(\mathbb{F})$, $Q \in Gl_m(\mathbb{F})$, $R \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $A_1 \in \mathbb{F}^{d\times d}$, $B_1 \in \mathbb{F}^{d\times q}$, $A_2 \in \mathbb{F}^{(n-d)\times(n-d)}$, $B_2 \in \mathbb{F}^{(n-d)\times(m-q)}$, $A_3 \in \mathbb{F}^{d\times(n-d)}$, $B_3 \in \mathbb{F}^{d\times(m-q)}$ tales que

$$P^{-1} \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & A_3 & B_1 & B_3 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \end{array}\right]$$

y

$$P^{-1} X = \begin{bmatrix} I_d \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El par $(A_1, B_1) \in \mathbb{F}^{d\times d} \times \mathbb{F}^{d\times q}$ es una restricción y el par (A_2, B_2) es un cociente de (A, B) a $\mathcal{V}$.

Nuestro principal resultado es

Teorema 3 *Sea $X \in \mathbb{F}^{n\times d}$ una matriz tal que $\mathcal{V} = \langle X\rangle$ y $\operatorname{rang} X = d$. Sean $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ los índices de Brunovsky del par $(A, \begin{bmatrix} B & X \end{bmatrix})$. Entonces*

$$(s_1, s_2, \ldots, s_n) = (t_1 - d, t_2, \ldots, t_n). \tag{2}$$

Demostración. Sea $q := \dim(\operatorname{Im} B \cap \mathcal{V})$. Aplicando el Lema 2, existen matrices $P \in Gl_n(\mathbb{F})$, $Q \in Gl_m(\mathbb{F})$, $R \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $A_1 \in \mathbb{F}^{d\times d}$, $B_1 \in \mathbb{F}^{d\times q}$, $A_2 \in \mathbb{F}^{(n-d)\times(n-d)}$, $B_2 \in \mathbb{F}^{(n-d)\times(m-q)}$, $A_3 \in \mathbb{F}^{d\times(n-d)}$, $B_3 \in \mathbb{F}^{d\times(m-q)}$ tales que

$$P^{-1}\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & 0 \\ R & Q \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_1 & A_3 & B_1 & B_3 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \end{array}\right] =: \begin{bmatrix} A' & B' \end{bmatrix},$$

$$P^{-1}X = \begin{bmatrix} I_d \\ 0 \end{bmatrix} =: X'$$

y el par (A_2, B_2) es un cociente de (A, B) a $\mathcal{V}$.

Entonces

$$P^{-1}\left[\begin{array}{c|cc} A & B & X \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|cc} P & 0 & 0 \\ \hline R & Q & 0 \\ 0 & 0 & I_d \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} A' & B' & X' \end{array}\right].$$

Es decir, los pares $(A, \begin{bmatrix} B & X \end{bmatrix})$ y $(A', \begin{bmatrix} B' & X' \end{bmatrix})$ son equivalentes por feedback y por tanto tienen los mismos índices de Brunovsky.

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{bmatrix}\left[\begin{array}{c|cc} A' & B' & X' \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|ccc} I_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-d} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} & 0 \\ -A_1 & -A_3 & -B_1 & -B_3 & I_d \end{array}\right] \\
&= \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{bmatrix}\left[\begin{array}{cc|ccc} A_1 & A_3 & B_1 & B_3 & I_d \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 & 0 \end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|ccc} I_d & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{n-d} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m-q} & 0 \\ -A_1 & -A_3 & -B_1 & -B_3 & I_d \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 & I_d \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 & 0 \end{array}\right] =: \left[\begin{array}{c|cc} A'' & B'' & X' \end{array}\right]
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{j=1}^{i} t_j = \operatorname{rang}\begin{bmatrix} B'' & X' & A''B'' & A''X' & \cdots & A''^{i-1}B'' & A''^{i-1}X' \end{bmatrix} \\
&= \operatorname{rang}\left[\begin{array}{ccc|ccc|c|ccc} 0 & 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 & 0 & A_2B_2 & 0 & \cdots & 0 & A_2^{i-1}B_2 & 0 \end{array}\right] \\
&= d + \operatorname{rang}\begin{bmatrix} B_2 & A_2B_2 & \cdots & A_2^{i-1}B_2 \end{bmatrix} = d + \textstyle\sum_{j=1}^{i} s_j, \quad 1 \le i \le n,
\end{aligned}$$

de donde se deduce (2). $\square$

Corolario 1

$$\sum_{j=1}^{i} s_j = \dim(\operatorname{Im} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{i-1}B \end{bmatrix} + \mathcal{V}) - d, \quad 1 \leq i \leq n \tag{3}$$

y

$$\sum_{j=1}^{i} (r_j - s_j) = \dim(\operatorname{Im} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{i-1}B \end{bmatrix} \cap \mathcal{V}), \quad 1 \leq i \leq n, \tag{4}$$

donde $(r_1, \ldots, r_n)$ *son los índices de Brunovsky de* (A, B).

Demostración. Aplicando el Teorema 3,

$$\sum_{j=1}^{i} s_j = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} B & X & AB & AX & \cdots & A^{i-1}B & A^{i-1}X \end{bmatrix} - d, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Como $\mathcal{V}$ es (A, B)-invariante, se tiene que $A(\mathcal{V}) \subseteq \mathcal{V} + \operatorname{Im} B$. Es decir, $< AX > \leq < \begin{bmatrix} B & X \end{bmatrix} >$ y, por tanto,

$$< A^j X > \leq < \begin{bmatrix} A^{j-1}B & A^{j-1}X \end{bmatrix} >, \quad j \geq 1.$$

Luego

$$\begin{aligned} &\operatorname{rang} \begin{bmatrix} B & X & AB & AX & \cdots & A^{i-1}B & A^{i-1}X \end{bmatrix} = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{i-1}B & X \end{bmatrix} \\ &= \dim(\operatorname{Im} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{i-1}B \end{bmatrix} + \mathcal{V}), \quad 1 \leq i \leq n, \end{aligned}$$

de donde se deduce (3).

Teniendo en cuenta que

$$\dim(\operatorname{Im} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{i-1}B \end{bmatrix}) = \sum_{j=1}^{i} r_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

obtenemos (4). □

Corolario 2 *Sean* $r_1 = m \geq \cdots \geq r_k > 0 = r_{k+1} = \cdots = r_n$ *los índices de Brunovsky de* (A, B).

Sean $r_0 := n - \sum_{j=1}^{k} r_j$ *y* $s_0 := n - d - \sum_{j=1}^{k} s_j$.

Supongamos que (A, B) *está en la forma canónica asociada a los índices de Brunovsky del Lema 1 y sea*

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \\ X_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^{n \times d} \quad \textit{con} \quad X_i \in \mathbb{F}^{r_i \times d}, \quad 0 \leq i \leq k$$

una matriz tal que $\mathcal{V} = \langle X \rangle$ *y* $\operatorname{rang} X = d$. *Entonces*

$$(r_0 - s_0) + \sum_{j=i}^{k} (r_j - s_j) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} X_i \\ X_{i+1} \\ \vdots \\ X_k \\ X_0 \end{bmatrix}, \quad 1 \le i \le k. \tag{5}$$

Demostración. Aplicando el Corolario 1,

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{j=1}^{i-1} s_j & = & \dim(\operatorname{Im} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{i-2}B \end{bmatrix} + \mathcal{V}) - d \\
& = & \operatorname{rang} \begin{bmatrix} B & AB & \cdots & A^{i-2}B & X \end{bmatrix} - d \\
& = & \operatorname{rang} \left[\begin{array}{c|cc|c|cc|c}
I_{r_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & X_1 \\
0 & I_{r_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & X_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & I_{r_{i-1}} & 0 & X_{i-1} \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & X_i \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & X_k \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & X_0
\end{array} \right] - d \\
& = & \sum_{j=1}^{i-1} r_j + \operatorname{rang} \begin{bmatrix} X_i \\ X_{i+1} \\ \vdots \\ X_k \\ X_0 \end{bmatrix} - d, \quad 2 \le i \le k.
\end{array}$$

Teniendo en cuenta que

$$d = (r_0 - s_0) + \sum_{j=1}^{k} (r_j - s_j),$$

se obtiene (5). $\square$

Como consecuencia inmediata podemos expresar los índices de Brunovsky del cociente en términos de rangos de submatrices de la matriz $\Lambda(F, H)$ del Teorema 2.

Corolario 3 *Supongamos que* (A, B) *es controlable y está en la forma canónica asociada a los índices de Brunovsky* $r_1 = m \ge \cdots \ge r_k > 0 = r_{k+1} = \cdots = r_n$.

Sea $(H, F) \in \mathbb{F}^{m \times d} \times \mathbb{F}^{d \times d}$ *tal que* $\mathcal{V} = \langle \Lambda(F, H) \rangle$, *donde*

$$\Lambda(F, H) = \begin{bmatrix} \Lambda_1(F, H) \\ \Lambda_2(F, H) \\ \vdots \\ \Lambda_k(F, H) \end{bmatrix}, \quad \Lambda_i(F, H) = \begin{bmatrix} H_k F^{k-i} \\ H_{k-1} F^{k-i-1} \\ \vdots \\ H_i \end{bmatrix}, \quad 1 \le i \le k$$

y

$$H = \begin{bmatrix} H_k \\ H_{k-1} \\ \vdots \\ H_1 \end{bmatrix} \quad \textit{con} \quad H_i \in \mathbb{F}^{(r_i - r_{i+1}) \times d}, \quad 1 \le i \le k.$$

Entonces

$$\sum_{j=i}^{k}(r_j - s_j) = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} \Lambda_i(F,H) \\ \Lambda_{i+1}(F,H) \\ \vdots \\ \Lambda_k(F,H) \end{bmatrix}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado por los proyectos MTM 2004-06389-CO2-01 del MEC y GIU05/28 de la UPV/EHU.

Referencias

[1] A. C. Antoulas, *New results on the Algebraic Theory of Linear Systems: The Solution of the Cover Problems.* Linear Algebra Appl., 50 (1983), 1-43.

[2] I. Baragaña, I. Zaballa, *Block similarity invariants of restrictions to (A, B)-invariant subspaces.* Linear Algebra Appl., 220 (1995), 31-62.

[3] P. Brunovsky, *A classification of linear controllable systems.* Kibernetika (Praga), 3 (1970), 173-188.

[4] I. Gohberg, P. Lancaster, L. Rodman. *Invariant Subspaces of Matrices with Applications*, Wiley, New York, 1986.

[5] F. Puerta, X. Puerta, *On the geometry of the set of controllability subspaces of a pair (A, B).* Linear Algebra Appl., 351-352 (2002), 585-599.

[6] I. Zaballa, *Sobre formas canónicas conjugadas.* Libro en homenaje al Profesor Luis de Alburquerque. Univ. Coimbra, 1990.