

Índice de alcanzabilidad: Sistemas 2D positivos con 2 ciclos

E. BAILO¹, J. GELONCH¹, S. ROMERO-VIVÓ²

¹ Dpto. Matemàtica, Universitat de Lleida E-mails: {ebailo, jgelonch}@matematica.udl.cat.

² Inst. de Matemàtica Multidisciplinar, Univ. Polit. de València E-mail: sromero@imm.upv.es.

Palabras clave: Sistemas 2D positivos, alcanzabilidad, digrafos asociados, índice de alcanzabilidad local, matrices no negativas.

Resumen

El cálculo de una cota para el índice de alcanzabilidad local de un sistema 2D positivo es un problema actualmente abierto. La forma algebraica (tradicional) de abordar el cálculo del índice de alcanzabilidad del sistema pasa por el estudio de la llamada matriz de alcanzabilidad. Esta matriz se construye mediante productos de Hurwitz de las matrices que definen el sistema. Las propiedades estructurales de estos sistemas permiten también una aproximación de carácter combinatorio al problema llegando al concepto de digrafo coloreado asociado al sistema. Usando la herramienta presentada en [2] en este trabajo generalizamos los resultados obtenidos en [3].

1. Introducción y definiciones previas

Se consideran los sistemas 2D positivos dados por el modelo de Fornasini-Marchesini

$$x_{h,k} = A_1 x_{h-1,k} + A_2 x_{h,k-1} + B_1 u_{h-1,k} + B_2 u_{h,k-1} \quad (1)$$

donde $A_1, A_2 \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$, $B_1, B_2 \in \mathbb{R}_+^{n \times m}$, y los estados locales $x_{*,*}$ y los controles $u_{*,*}$ toman valores no negativos. Además, se determinan las condiciones iniciales especificando valores no negativos para los estados sobre el conjunto de separación $\mathcal{C}_0 = \{(h, -h) \text{ tal que } h \in \mathbb{Z}\}$. El sistema (1) puede denotarse también por (A_1, A_2, B_1, B_2) .

En este trabajo generalizamos los resultados obtenidos en [3], estudiando la propiedad de alcanzabilidad local de ciertos sistemas 2D positivos (para el caso 1D consultar, por ejemplo, [4] y la bibliografía que se menciona en él) que detallaremos posteriormente. Para ello, utilizaremos la tabla de composición (ver [2]) y una aproximación de carácter combinatorio dada por A_1, A_2, B_1 y B_2 que permite la construcción de una familia de digrafos coloreados que definimos a continuación. Se recuerda que en un sistema 2D positivo (1), el conjunto de fuentes es un conjunto ordenado de m elementos $\{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ y el de vértices es un conjunto ordenado de n elementos, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$.

Definición 1 El digrafo asociado a un sistema (1) y una fuente s_ℓ es la séxtupla $\mathcal{D}_\ell = (s_\ell, V, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$, con \mathcal{A}_1 (\mathcal{A}_2) subconjunto de $V \times V$, cuyos elementos se dicen \mathcal{A}_1 -arcos (\mathcal{A}_2 -arcos), mientras que \mathcal{B}_1 (\mathcal{B}_2) es subconjunto de $\{s_\ell\} \times V$ cuyos elementos se llaman \mathcal{B}_1 -arcos (\mathcal{B}_2 -arcos). Su construcción se hace con los siguientes criterios,

- existe un \mathcal{A}_1 -arco (un \mathcal{A}_2 -arco) desde v_j hasta v_i si y sólo si el elemento de la columna j y fila i , de la matriz A_1 (A_2) es no nulo;
- existe un \mathcal{B}_1 -arco (un \mathcal{B}_2 -arco) desde s_ℓ hasta v_i si y sólo si el elemento de la columna ℓ y fila i de B_1 (B_2) es no nulo.

Llamaremos multidigrafo asociado al sistema (1) al conjunto ordenado de digrafos correspondientes a cada una de sus fuentes, $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_m\}$.

Los \mathcal{A}_1 -arcos (\mathcal{A}_2 -arcos) y \mathcal{B}_1 -arcos (\mathcal{B}_2 -arcos) se dirán 1-arcos (2-arcos) o de tipo 1 (2).

Definición 2 Un camino es una sucesión de arcos adyacentes. Un camino es un s_j -camino si empieza en la fuente s_j . Un camino \mathcal{P} queda especificado asignándole sus vértices (incluida la fuente, si es el caso) y el tipo de arcos que los conectan. Si denotamos por p (q) el número de arcos de tipo 1 (2) que componen el camino \mathcal{P} , entonces (p, q) es la composición de \mathcal{P} y $|\mathcal{P}| = p + q$ es su longitud. Llamamos circuito a un camino cuyos vértices extremos coinciden. En particular, si cada vértice del circuito aparece una y sólo una vez como primer vértice de un arco, diremos que es un ciclo.

Definición 3 Un vértice v está alcanzado determinísticamente o determinado por la fuente s_ℓ y la composición (p, q) si todos los s_ℓ -caminos de composición (p, q) acaban en v .

Definición 4 El índice ℓ del vértice v es $\mathcal{I}_\ell(v) = \min\{p + q\}$ cuando (p, q) recorre todas las composiciones de los s_ℓ -caminos que determinan v . El índice de determinación del vértice v es $I_D(v) = \min\{\mathcal{I}_\ell(v) \mid \ell = 1, \dots, m\}$.

Proposición 1 El índice de alcanzabilidad local de un sistema 2D positivo se puede calcular como $I_{LR} = \max\{I_D(v) \mid v \in V\}$.

Se denotará $\langle i \rangle_n = 1 + ((i - 1) \bmod n)$ donde $i, n \in \mathbb{N}$, por $\langle A \rangle_n = \{\langle a \rangle_n \mid a \in A\}$, por $\lfloor z \rfloor$ ($\lceil z \rceil$) la parte entera inferior (superior) de $z \in \mathbb{R}$, por $\#A$ el cardinal de A . Para $p, q \in \mathbb{Z}$, el intervalo asociado a ellos es $(p, q] := \emptyset$ (si $p \geq q$) o $(p, q] := \{p + 1, \dots, q\}$ (si $p < q$).

2. Digrafo con dos ciclos

Definición 5 Sean $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que $n_1 + n_2 = n$. Se dirá que (1) es un sistema $(n_1, K; n_2, H)$ si su digrafo asociado consta de una sola fuente, que denotaremos por s y

- el digrafo asociado al sistema (A_1, A_2, O, O) está formado por dos ciclos disjuntos;
- de la fuente s surgen dos arcos de tipo 1, uno para cada ciclo;
- el primer (segundo) ciclo \mathcal{C}_1 (\mathcal{C}_2) tiene n_1 vértices $\{v_1, \dots, v_{n_1}\}$ ($n_2, \{w_1, \dots, w_{n_2}\}$);

- K y H son sucesiones no vacías de números naturales, $1 \leq k_1 < \dots < k_{r_1} \leq n_1$ y $1 \leq h_1 < \dots < h_{r_2} \leq n_2$, respectivamente; los arcos que salen de v_{k_i} con $i \in (0, r_1]$ (w_{h_j} con $j \in (0, r_2]$) son los únicos 2-arcos de \mathcal{C}_1 (\mathcal{C}_2).

Definición 6 Al sistema $(n_1, K; n_2, H)$ se le puede asociar una tabla infinita de doble entrada (tabla de composición asociada al sistema $(n_1, K; n_2, H)$), colocando los vértices alcanzados por s -caminos según su composición, (p, q) (p indicará la columna y q la fila).

En [3] se estudió el I_{LR} en sistemas $(n_1, K; n_2, H)$ con $r_1 = r_2$. En este trabajo se elimina esta restricción. Nos basamos en la tabla de composición como herramienta clave en el cálculo del índice. Su construcción¹ nos induce a realizar una partición en \mathcal{C}_1 (\mathcal{C}_2) con los intervalos $P_1, \dots, P_{r_1-1}, \langle P_{r_1} \rangle_{n_1}$ ($Q_1, \dots, Q_{r_2-1}, \langle Q_{r_2} \rangle_{n_2}$) donde $P_i := (k_i, k_{i+1}]$ ($Q_j := (h_j, h_{j+1}]$) para $i \in (0, r_1]$ ($j \in (0, r_2]$) siendo $k_{r_1+1} := k_1 + n_1$ ($h_{r_2+1} := h_1 + n_2$). En adelante, para facilitar la notación, identificaremos P_{r_1} (Q_{r_2}) con $\langle P_{r_1} \rangle_{n_1}$ ($\langle Q_{r_2} \rangle_{n_2}$).

Lema 1 Con $q \geq 1$ arcos de tipo dos se llega a los vértices de $P_{\langle q \rangle_{r_1}}$ ($Q_{\langle q \rangle_{r_2}}$) con s -caminos de longitudes

$$\left\{ k_{\langle q \rangle_{r_1}} + 1 + \left\lfloor \frac{q-1}{r_1} \right\rfloor n_1, \dots, k_{\langle q+1 \rangle_{r_1}} + \left\lfloor \frac{q}{r_1} \right\rfloor n_1 \right\} \quad (2)$$

$$\left(\left\{ h_{\langle q \rangle_{r_2}} + 1 + \left\lfloor \frac{q-1}{r_2} \right\rfloor n_2, \dots, h_{\langle q+1 \rangle_{r_2}} + \left\lfloor \frac{q}{r_2} \right\rfloor n_2 \right\} \right) \quad (3)$$

En la Tabla 1 se presentan los intervalos que contienen las longitudes de los s -caminos que terminan en vértices de cada uno de los ciclos, en función del número de 2-arcos.

q	Intervalos que contienen las long. de los s -caminos que llegan a \mathcal{C}_1	Vértices alcanzados	Intervalos que contienen las long. de los s -caminos que llegan a \mathcal{C}_2
0	$(0, k_1]$	$(0, k_1]$ $(0, h_1]$	$(0, h_1]$
1	$(k_1, k_2]$	P_1 Q_1	$(h_1, h_2]$
2	$(k_2, k_3]$	P_2 Q_2	$(h_2, h_3]$
\vdots	\vdots	\vdots \vdots	\vdots
r_1	$(k_{r_1}, k_1 + n_1]$	P_{r_1} Q_{r_1}	$(h_{r_1}, h_{r_1+1}]$
$r_1 + 1$	$(k_1 + n_1, k_2 + n_1]$	P_1 \vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots \vdots	\vdots
r_2	$\left(k_{\langle r_2 \rangle_{r_1}} + \left\lfloor \frac{r_2-1}{r_1} \right\rfloor n_1, k_{\langle r_2+1 \rangle_{r_1}} + \left\lfloor \frac{r_2}{r_1} \right\rfloor n_1 \right]$	$P_{\langle r_2 \rangle_{r_1}}$ Q_{r_2}	$(h_{r_2}, h_1 + n_2]$
$r_2 + 1$	\vdots	\vdots Q_1	$(h_1 + n_2, h_2 + n_2]$
\vdots	\vdots	\vdots \vdots	\vdots
ℓ	$\left(k_{\langle \ell \rangle_{r_1}} + \left\lfloor \frac{\ell-1}{r_1} \right\rfloor n_1, k_{\langle \ell+1 \rangle_{r_1}} + \left\lfloor \frac{\ell}{r_1} \right\rfloor n_1 \right]$ $= (k_{r_1} + (\delta_1 - 1)n_1, k_1 + \delta_1 n_1]$	P_{r_1} Q_{r_2}	$\left(h_{\langle \ell \rangle_{r_2}} + \left\lfloor \frac{\ell-1}{r_2} \right\rfloor n_2, h_{\langle \ell+1 \rangle_{r_2}} + \left\lfloor \frac{\ell}{r_2} \right\rfloor n_2 \right]$ $= (h_{r_2} + (\delta_2 - 1)n_2, h_1 + \delta_2 n_2]$

Tab. 1: Resumen obtenido de la tabla de composición asociada al sistema $(n_1, K; n_2, H)$ donde $K = \{k_1, k_2, \dots, k_{r_1}\}$ y $H = \{h_1, h_2, \dots, h_{r_2}\}$ bajo la hipótesis $r_1 < r_2$

Definición 7 Se dirá que P_i y Q_j se enfrentan si es posible llegar, con s -caminos adecuados, a todos los vértices de uno y otro con el mismo número de 2-arcos. Diremos que P_i y Q_j se q -enfrentan si se enfrentan con q 2-arcos.

¹En la que identificamos los vértices con sus subíndices indicando el ciclo al que pertenecen.

Lema 2 Si P_i y Q_j se q -enfrentan entonces, P_i y Q_j se $(q + t\ell)$ -enfrentan siendo $\ell := \text{mcm}\{r_1, r_2\}$ y $t \in \mathbb{Z}$ tal que $q + t\ell > 0$.

Diremos que con ℓ arcos de tipo 2 damos una *vuelta sincronizada* a los ciclos.

Lema 3 Si hay s -caminos de composición (p, q) terminando en v_i de \mathcal{C}_1 y en w_j de \mathcal{C}_2 entonces, después de t vueltas sincronizadas hay un s -camino de composición $(p + t\delta_1(n_1 - r_1), q + t\ell)$ ($(p + t\delta_2(n_2 - r_2), q + t\ell)$) que llega a v_i (w_j) con $\delta_1 = \ell/r_1$ ($\delta_2 = \ell/r_2$).

Lema 4 Utilizando s -caminos con $1 \leq q \leq \ell$ 2-arcos se determinan un número de vértices

- $\min \left\{ \#P_{\langle q \rangle_{r_1}}, \# \left(k_{\langle q \rangle_{r_1}} + \left\lfloor \frac{q-1}{r_1} \right\rfloor n_1, h_{\langle q \rangle_{r_2}} + \left\lfloor \frac{q-1}{r_2} \right\rfloor n_2 \right) \right\}$ de la parte izda. de $P_{\langle q \rangle_{r_1}}$
- $\min \left\{ \#P_{\langle q \rangle_{r_1}}, \# \left(h_{\langle q+1 \rangle_{r_2}} + \left\lfloor \frac{q}{r_2} \right\rfloor n_2, k_{\langle q+1 \rangle_{r_1}} + \left\lfloor \frac{q}{r_1} \right\rfloor n_1 \right) \right\}$ de la parte dcha. de $P_{\langle q \rangle_{r_1}}$
- $\min \left\{ \#Q_{\langle q \rangle_{r_2}}, \# \left(h_{\langle q \rangle_{r_2}} + \left\lfloor \frac{q-1}{r_2} \right\rfloor n_2, k_{\langle q \rangle_{r_1}} + \left\lfloor \frac{q-1}{r_1} \right\rfloor n_1 \right) \right\}$ de la parte izda. de $Q_{\langle q \rangle_{r_2}}$
- $\min \left\{ \#Q_{\langle q \rangle_{r_2}}, \# \left(k_{\langle q+1 \rangle_{r_1}} + \left\lfloor \frac{q}{r_1} \right\rfloor n_1, h_{\langle q+1 \rangle_{r_2}} + \left\lfloor \frac{q}{r_2} \right\rfloor n_2 \right) \right\}$ de la parte dcha. de $Q_{\langle q \rangle_{r_2}}$

Estos valores se denotan $\#_q P_{\langle q \rangle_{r_1}}^-$, $\#_q P_{\langle q \rangle_{r_1}}^+$, $\#_q Q_{\langle q \rangle_{r_2}}^-$ y $\#_q Q_{\langle q \rangle_{r_2}}^+$, respectivamente.

Lema 5 En estas condiciones, podemos afirmar que para $i \in (0, r_1]$ fijo, P_i y $Q_{\langle i+\alpha r_1 \rangle_{r_2}}$ con $\alpha \in (-1, \delta_1 - 1]$ se $(i + \alpha r_1)$ -enfrentan. Es decir, P_i se enfrenta a $Q_{\langle i+\alpha r_1 \rangle_{r_2}}$ en cada vuelta sincronizada y sólo a esos². Análogamente, para $j \in (0, r_2]$ fijo, Q_j y $P_{\langle j+\beta r_2 \rangle_{r_1}}$ con $\beta \in (-1, \delta_2 - 1]$ se $(j + \beta r_2)$ -enfrentan en cada vuelta sincronizada.

Nota 1 El número total de vértices de P_i determinados usando, a lo sumo, q 2-arcos se denotará por $\#^q P_i$. De manera similar, $\#^q P_i^-$ ($\#^q P_i^+$) será el número de vértices de la parte izda. (dcha.) de P_i que en total se han determinado con, a lo sumo, q 2-arcos.

Análogamente, $\#^q Q_j$, $\#^q Q_j^-$ y $\#^q Q_j^+$ indican el número total de vértices de Q_j , de su parte izda. y de su dcha. que se han determinado utilizando, a lo más, q 2-arcos.

Es claro que con q 2-arcos se determinan todos los vértices de P_i (Q_j) si y sólo si $\#^q P_i = \min\{\#P_i, \#^q P_i^- + \#^q P_i^+\} = \#P_i$ ($\#^q Q_j = \min\{\#Q_j, \#^q Q_j^- + \#^q Q_j^+\} = \#Q_j$).

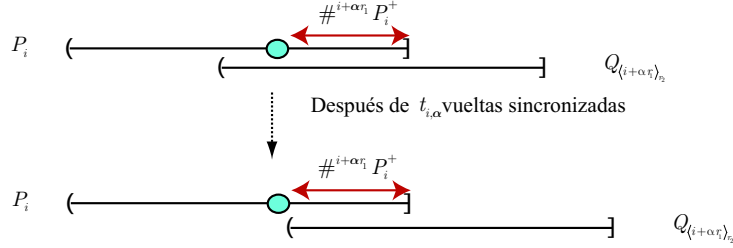
2.1. Índice de alcanzabilidad del sistema

Caso a) $\delta_2 n_2 > \delta_1 n_1$. En este caso, por el Lema 3, a partir de un cierto número de vueltas sincronizadas, las longitudes de los s -caminos que terminan en \mathcal{C}_2 son mayores que las de los que alcanzan \mathcal{C}_1 (con un mismo número de 2-arcos).

En primer lugar, se calculará el índice de determinación de \mathcal{C}_1 hallando el máximo de los índices de determinación de cada uno de los P_i con $i \in (0, r_1]$. Como recogemos en la Tabla 2 P_i se enfrenta a $Q_{\langle i+\alpha r_1 \rangle_{r_2}}$ donde $\alpha = 0, 1, \dots, \delta_1 - 1$. Para hallar $I_D(P_i)$, debemos considerar dos posibilidades: o bien en la primera vuelta sincronizada se determinan todos los vértices de P_i , o bien se precisa más de una vuelta sincronizada para ello.

²Salvo si se utilizan cero 2-arcos en que se enfrentan $(0, k_1] \subseteq P_{r_1}$ con $(0, h_1] \subseteq Q_{r_2}$.

$\left(k_i + (t\delta_1 + \alpha) n_1, k_{\langle i+1 \rangle_{r_1}} + \left(t\delta_1 + \alpha + \left\lfloor \frac{i}{r_1} \right\rfloor \right) n_1 \right)$	P_i
$\left(h_{\langle i+\alpha r_1 \rangle_{r_2}} + \left(t\delta_2 + \left\lfloor \frac{i+\alpha r_1 - 1}{r_2} \right\rfloor \right) n_2, h_{\langle i+\alpha r_1 + 1 \rangle_{r_2}} + \left(t\delta_2 + \left\lfloor \frac{i+\alpha r_1}{r_2} \right\rfloor \right) n_2 \right)$	$Q_{\langle i+\alpha r_1 \rangle_{r_2}}$

 Tab. 2: Interv. conteniendo las long. de s -caminos con $t\ell + i + \alpha r_1$ 2-arcos ($\alpha \in (-1, \delta_1 - 1]$)

 Fig. 1: Posición relativa de las long. de los s -caminos que llegan a P_i y a $Q_{\langle i+\alpha r_1 \rangle_{r_2}}$

Cuando nos encontremos en la primera de las situaciones (ver Nota 1), en alguno de los enfrentamientos de P_i se han acabado de determinar todos sus vértices. Tomando $\alpha_i = \min\{\alpha \in (-1, \delta_1 - 1] \mid \#P_i = \#^{i+\alpha r_1} P_i^+\}$ se cumple que

$$I_D(P_i) = k_{\langle i+1 \rangle_{r_1}} + \left(\alpha_i + \left\lfloor \frac{i}{r_1} \right\rfloor \right) n_1 - \#^{i+(\alpha_i-1)r_1} P_i^+ . \quad (4)$$

Si en la primera vuelta sincronizada no se han determinado todos los vértices de P_i el procedimiento para el cálculo de su índice de determinación será un poco más laborioso. Para cada uno de los enfrentamientos de P_i se calcula un índice que denotaremos $I_R(P_i, \alpha)$. Éste se puede interpretar como la longitud del s -camino que determina el “último” vértice de P_i considerando, excepto en la primera vuelta sincronizada, solamente los enfrentamientos de P_i con $Q_{\langle i+\alpha r_1 \rangle_{r_2}}$ para α fijo. Como $\delta_2 n_2 > \delta_1 n_1$, llegará un momento en el que, a partir de un determinado número de 2-arcos, las longitudes de los s -caminos que nos lleven a P_i serán menores que las de los que nos lleven a $Q_{\langle i+\alpha r_1 \rangle_{r_2}}$. Por tanto, en ese momento tenemos garantías de que todos los vértices de P_i están determinados.

No obstante, para calcular el índice buscado deberemos ser más precisos y hallar el mínimo número de 2-arcos necesarios para que todos los vértices de P_i estén determinados. Ese mínimo se deducirá (debido al comportamiento cíclico del problema) a partir del mínimo número de vueltas sincronizadas (completas) para conseguir determinar los vértices de P_i considerando solamente sus enfrentamientos con $Q_{\langle i+\alpha r_1 \rangle_{r_2}}$. Se obtiene (ver Fig. 1) hallando el mínimo $t_{i,\alpha} \in \mathbb{N}$ tal que para $t \geq t_{i,\alpha}$ se verifica³

$$k_{\langle i+1 \rangle_{r_1}} + \left(t\delta_1 + \alpha + \left\lfloor \frac{i}{r_1} \right\rfloor \right) n_1 - \#^{i+\alpha r_1} P_i^+ \leq h_{\langle i+\alpha r_1 \rangle_{r_2}} + \left(t\delta_2 + \left\lfloor \frac{i + \alpha r_1 - 1}{r_2} \right\rfloor \right) n_2 \quad (5)$$

Así, tendremos garantizado que dando $t \geq t_{i,\alpha}$ vueltas sincronizadas estarán determinados

³Como hay $\#^{i+\alpha r_1} P_i^+$ vértices situados en la parte dcha. de P_i que ya han sido determinados, las longitudes de los s -caminos que los alcanzan pueden coincidir con las de los que terminan en el segundo ciclo.

$\left(k_{\langle j+\beta r_2 \rangle_{r_1}} + \left(t\delta_1 + \left\lfloor \frac{j+\beta r_2-1}{r_1} \right\rfloor \right) n_1, k_{\langle j+\beta r_2+1 \rangle_{r_1}} + \left(t\delta_1 + \left\lfloor \frac{j+\beta r_2}{r_1} \right\rfloor \right) n_1 \right)$	$P_{\langle j+\beta r_2 \rangle_{r_1}}$
$\left(h_j + (t\delta_2 + \beta) n_2, h_{\langle j+1 \rangle_{r_2}} + \left(t\delta_2 + \beta + \left\lfloor \frac{j}{r_2} \right\rfloor \right) n_2 \right)$	Q_j

Tab. 3: Interv. conteniendo las long. de s -caminos con $t\ell + j + \beta r_2$ 2-arcos ($\beta \in (-1, \delta_2 - 1]$)

todos los vértices de P_i . Luego, despejando t de (5) y tomando el mínimo, se cumple que

$$t_{i,\alpha} = \left\lfloor \frac{k_{\langle i+1 \rangle_{r_1}} + \left(\alpha + \left\lfloor \frac{i}{r_1} \right\rfloor \right) n_1 - h_{\langle i+\alpha r_1 \rangle_{r_2}} - \left(\left\lfloor \frac{i+\alpha r_1-1}{r_2} \right\rfloor \right) n_2 - \#^{i+\alpha r_1} P_i^+}{\delta_2 n_2 - \delta_1 n_1} \right\rfloor \quad (6)$$

es ese mínimo número de vueltas sincronizadas para determinar todos los vértices de P_i .

Para calcular el valor exacto de $I_R(P_{i,\alpha})$ debemos tener en cuenta cuántos vértices se han determinado de P_i^+ en la primera vuelta sincronizada. Con ello,

$$I_R(P_{i,\alpha}) = k_{\langle i+1 \rangle_{r_1}} + \left(t_{i,\alpha} \delta_1 + \alpha + \left\lfloor \frac{i}{r_1} \right\rfloor \right) n_1 - \#^\ell P_i^+, \quad (7)$$

y el índice de determinación del intervalo P_i se hallara como

$$I_D(P_i) = \text{mín} \{ I_R(P_{i,\alpha}) \mid \alpha = 0, 1, \dots, \delta_1 - 1 \}. \quad (8)$$

Por tanto,

$$I_D(\mathcal{C}_1) = \text{máx} \{ I_D(P_i) \mid i = 1, \dots, r_1 \}. \quad (9)$$

Siguiendo un procedimiento similar, se hallara el índice de determinación de \mathcal{C}_2

$$I_D(\mathcal{C}_2) = \text{máx} \{ I_D(Q_j) \mid j = 1, \dots, r_2 \} \quad (10)$$

Si en la primera vuelta sincronizada se han determinado todos los vértices de Q_j entonces, llamando $\beta_j = \text{mín} \{ \beta \in (-1, \delta_2 - 1] \mid \# Q_j = \#^{j+\beta r_2} Q_j \}$

$$I_D(Q_j) = h_{\langle j+1 \rangle_{r_2}} + \left(\beta_j + \left\lfloor \frac{j}{r_2} \right\rfloor \right) n_2 - \#^{j+(\beta_j-1)r_2} Q_j^+. \quad (11)$$

En otro caso, basándonos en la Tabla 3,

$$I_D(Q_j) = \text{mín} \{ I_R(Q_{j,\beta}) \mid \beta = 0, 1, \dots, \delta_2 - 1 \} \quad (12)$$

donde $I_R(Q_{j,\beta})$ viene dado por

$$\text{máx} \left\{ \text{mín} \left\{ k_{\langle j+\beta r_2+1 \rangle_{r_1}} + \left(\tau_{j,\beta} \delta_1 + \left\lfloor \frac{j+\beta r_2}{r_1} \right\rfloor \right) n_1 + (\delta_2 n_2 - \delta_1 n_1), \right. \right. \\ \left. \left. h_{\langle j+1 \rangle_{r_2}} + \left(\tau_{j,\beta} \delta_2 + \beta + \left\lfloor \frac{j}{r_2} \right\rfloor \right) n_2 - \#^\ell Q_j^+, h_j + 1 + (\tau_{j,\beta} \delta_2 + \beta) n_2 \right\} \right\} \quad (13)$$

siendo

$$\tau_{j,\beta} = \left\lfloor \frac{\left(k_{\langle j+\beta r_2+1 \rangle_{r_1}} + \left\lfloor \frac{j+\beta r_2}{r_1} \right\rfloor n_1 - h_j - \beta n_2 - \#^{j+\beta r_2} Q_j^- \right)}{(\delta_2 n_2 - \delta_1 n_1)} \right\rfloor \quad (14)$$

q \ p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0	1	2																												
1		3	4	5	6																									
2						1	2																							
3								3	4	5	6																			
4												1	2																	
5														3	4	5	6													
6																														
7																														
8																														
9																														
10																														
11																														
12																														
13																														

Fig. 2: Tabla de composición del sistema $(6, \{2, 6\}; 10, \{2, 4, 7\})$

el mínimo número de vueltas sincronizadas necesario para determinar los vértices de Q_j en sus enfrentamientos con $P_{(j+\beta r_2)_{r_1}}$.

Así, el índice de alcanzabilidad local del sistema vale

$$I_{LR} = \max\{I_D(\mathcal{C}_1), I_D(\mathcal{C}_2)\} \quad (15)$$

Caso b) $\delta_2 n_2 < \delta_1 n_1$. En este caso, a partir de un cierto número de vueltas sincronizadas a los ciclos, las longitudes de los s -caminos con los que se alcanzan los vértices de \mathcal{C}_2 son menores que las de los que llegan a los vértices de \mathcal{C}_1 (para s -caminos con el mismo número de 2-arcos). Cambiando n_1 por n_2 y r_1 por r_2 , (i.e., el orden en el que tomamos los ciclos) estamos en el caso anterior y podemos calcular el índice de alcanzabilidad local.

Caso c) $\delta_2 n_2 = \delta_1 n_1$. En este caso los sistemas serán, en general, *no alcanzables* (salvo en el caso en que en la primera vuelta sincronizada se hayan determinado todos los vértices de ambos ciclos), dado que si un vértice no se ha determinado en la primera vuelta sincronizada no lo hará en las siguientes al ser todas ellas una réplica de la primera. Un procedimiento similar al del caso a) permite calcular el I_{LR} , si existe.

Para $i \in (0, r_1]$, $j \in (0, r_2]$, $\alpha \in (-1, \delta_1 - 1]$ y $\beta \in (-1, \delta_2 - 1]$ se tiene que si todos los vértices de $P_i(Q_j)$ se han determinado en la primera vuelta sincronizada, el $I_D(P_i)$ ($I_D(Q_j)$) se puede hallar con (4) ((11)) y aplicando (9), (10) y (15) conseguiremos calcular el índice de alcanzabilidad local del sistema. En otro caso, el sistema es no alcanzable.

Ejemplo Sea el sistema $S = (6, \{2, 6\}; 10, \{2, 4, 7\})$. En la Fig. 2 se construye la tabla de composición asociada al mismo. Se colocan, para cada (p, q) , los subíndices de los vértices que son alcanzados, concretamente en la fila superior (inferior) los correspondientes a \mathcal{C}_1 (\mathcal{C}_2). Por construcción, se puede ver que el índice de alcanzabilidad local del sistema es 40. Veamos cómo se obtiene siguiendo el procedimiento detallado en el trabajo. Como $n_1 = 6$, $n_2 = 10$, $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$ estamos en el caso a) $\delta_1 n_1 < \delta_2 n_2$ ($\ell = \text{mcm}\{2, 3\} = 6$, $\delta_1 = 3$ y $\delta_2 = 2$).

Así, $P_1 = \{3, 4, 5, 6\}$, $P_2 = \{1, 2\}$, $Q_1 = \{3, 4\}$, $Q_2 = \{5, 6, 7\}$ y $Q_3 = \{8, 9, 10, 1, 2\}$. En la Tabla 4 se anota el núm. de vértices que se determinan en cada uno de ellos hasta

terminar la primera vuelta sincronizada. Como en la primera vuelta sincronizada no se

q	$\#_q P_{\langle q \rangle r_1}^-$	$\#_q P_{\langle q \rangle r_1}^+$	$\#_q Q_{\langle q \rangle r_2}^-$	$\#_q Q_{\langle q \rangle r_2}^+$	$\#^q P_{\langle q \rangle r_1}$	$\#^q Q_{\langle q \rangle r_2}$
0	0		0			
1	0	2	0	0	2	0
2	0	1	2	0	1	2
3	0	0	1	0	2	1
4	0	0	0	0	1	0
5	0	1	0	0	2	2
6	0	0	1	2	1	3

Tab. 4: Número de vértices determinados en la primera vuelta sincronizada del ejemplo

determinan todos los vértices de ningún intervalo debemos utilizar (6) y (7) para los de \mathcal{C}_1 -(13) y (14) para los de \mathcal{C}_2 -. Los resultados se han resumido en la Tabla 5.

q	P_i	Q_j	α	β	$\#^\ell P_i^+$	$\#^\ell Q_j^-$	$t_{i,\alpha}$	$\tau_{j,\beta}$	$I_R(P_{i,\alpha})$	$I_R(Q_{j,\beta})$
1	P_1	Q_1	0	0	2	0	1	2	22	44
2	P_2	Q_2	0	0	1	2	2	1	43	27
3	P_1	Q_3	1	0	2	1	2	2	46	50
4	P_2	Q_1	1	1	1	0	1	1	31	34
5	P_1	Q_2	2	1	2	2	1	1	34	37
6	P_2	Q_3	2	1	1	1	1	1	37	40

Tab. 5: Parámetros necesarios para el cálculo del Índice

Así, $I_D(P_1) = \min\{22, 46, 34\} = 22$, $I_D(P_2) = \min\{43, 31, 37\} = 31$ y por (8), $I_D(\mathcal{C}_1) = \max\{22, 31\} = 31$. En \mathcal{C}_2 , $I_D(Q_1) = \min\{44, 34\} = 34$, $I_D(Q_2) = \min\{27, 37\} = 27$, $I_D(Q_3) = \min\{50, 40\} = 40$ y por (12), $I_D(\mathcal{C}_2) = \max\{34, 27, 40\} = 40$. Por consiguiente, el índice de alcanzabilidad local del sistema será $I_{LR} = \max\{31, 40\} = 40$.

Referencias

- [1] E. Bailo, R. Bru, J. Gelonch y S. Romero, *On the Reachability Index of Positive 2D Systems*. IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs, 53-10 (2006), 997–1001.
- [2] E. Bailo, R. Bru, J. Gelonch y S. Romero, *Sobre el índice de alcanzabilidad de sistemas 2D positivos*. In Cd-Rom Actas XIX CEDYA/IX CMA (2005), Leganés (España).
- [3] E. Bailo, J. Gelonch y S. Romero, *Additional results on the reachability index of positive 2D systems*. Lecture Notes in Control and Information Sciences 341 (2006), 73–80.
- [4] R. Bru, C. Coll, S. Romero y E. Sanchez, *Reachability Indices of Positive Linear Systems*. Electronic Journal of Linear Algebra, 11 (2004), 88–102.
- [5] E. Fornasini y G. Marchesini, *Doubly indexed dynamical systems*. Math. Sys. Theory 12 (1978), 59–72.
- [6] E. Fornasini y M.E. Valcher, *Controllability and Reachability of 2D Positive Systems: A Graph Theoretic Approach*. IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers, 52-3 (2005), 576–585.