

Métodos multimalla en problemas lineales de flujo óptico

G.ASENSIO^{1,2}, P.M.GONZÁLEZ^{1,2}, C.PLATERO^{1,3}, J.M.PONCELA^{1,2}, J.SANGUINO^{1,2}, M.C.TOBAR^{1,2}

¹ *Applied BioEngineering Group (ABE-UPM).*

² *Dpto. Matemática Aplicada EUITI, Universidad Politécnica de Madrid, C/Ronda de Valencia 3, 28012, Madrid. E-mail: gabriel.asensio@upm.es.*

³ *Dpto. Electrónica, Automática e Informática Industrial, Universidad Politécnica de Madrid, C/Ronda de Valencia 3, 28012, Madrid. E-mail: carlos.platero@upm.es.*

Palabras clave: Solución numérica de Ecuaciones en Derivadas Parciales , Flujo Óptico

Resumen

Los métodos variacionales son especialmente útiles para resolver la ecuación del flujo óptico OFC (optical flow constraint)

$$u(x) \cdot \nabla f(t, x) + \partial_t f(t, x) = 0,$$

porque preservan las discontinuidades y funcionan incluso cuando hay variaciones de iluminación. Sin embargo, las distintas regularizaciones implican funcionales cuya minimización tiene un alto costo computacional. En esta comunicación se formula el problema lineal, se discretiza y se resuelve éste usando distintos métodos multimalla. Se comparan los resultados con los métodos iterativos clásicos y con los métodos directos con almacenamiento disperso. Se comprueba la mayor eficiencia de los métodos multimalla.

1. Introducción

Uno de los problemas más interesantes de la visión por computador es obtener información del movimiento de objetos a partir de imágenes de vídeo. El movimiento es representado por una familia uniparamétrica de funciones vectoriales f definida sobre $\Omega \times [0, T] \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, a partir de la cual se define una familia de funciones escalares $I(\vec{x}, t) = \|f(\vec{x}, t)\|$, que recoge la variación de la intensidad (brillo).

Sabemos que el movimiento de patrones de intensidad puede tener una relación con el movimiento de objetos en la escena que recoge la secuencia de imágenes, pero esta relación

no está del todo clara ya que la percepción del movimiento no se comprende todavía tan bien como la percepción de patrones estáticos.

Basta, por ejemplo pensar en los antiguos anuncios de las barberías, en lo que ocurre al enfocar un objeto fijo cuando viajamos en coche y en la proyección de una hélice rotando, para ver que la relación entre movimiento aparente y movimiento real es muy compleja [7]. Estos tres ejemplos son casos de flujo óptico, paralaje del movimiento y profundidad cinética respectivamente, en los que movimiento aparente y real no coinciden.

Al estudiar el movimiento de patrones en el brillo, además de los problemas típicos de baja resolución o contraste, gradación de sombras debido a la iluminación variable, falta de nitidez en los bordes, agujeros, etc., nos encontramos con problemas de diferentes rangos de movimientos y movimientos espúreos de sombras y ruidos [6].

En cualquier caso, en una secuencia típica se aprecia un fondo estático y unos patrones de intensidad que se mueven a distintas velocidades con movimientos lineales, erráticos, etc.

Por eso, el primer paso es segmentar el fondo estático, usando por ejemplo la técnica básica de diferencias acumulativas, y después, mediante operadores morfológicos, se detectan los patrones dinámicos a estudiar¹. Por último se siguen estos patrones mediante técnicas estadísticas (correlación,..etc.)².

Más modernas son las técnicas basadas en ecuaciones en derivadas parciales [1], como la ecuación OFC, formulada por primera vez por Horn y Schunck en 1981 [4]. La resolución numérica ha evolucionado desde los métodos indirectos basados en el gradiente [5] hasta los métodos multimalla [2]. En esta comunicación se ponen de manifiesto las ventajas de estos últimos.

2. Ecuacion OFC. Restricción y regularización

Una simplificación de los problemas citados anteriormente es el llamado problema del flujo óptico OFC, consistente en encontrar una distribución de velocidades aparentes del movimiento de patrones (flujo óptico) $\vec{v} = (u, v)$ definido sobre $\Omega \times [0, T]$, a partir de dos imágenes consecutivas. Para garantizar que existe una forma de relacionar flujo óptico con el movimiento de los objetos de la imagen hay que hacer una serie de hipótesis:

1) Los objetos de la escena son planos y están iluminados uniformemente. De esta forma nos aseguramos que el brillo es proporcional a la reflectancia del objeto y no existen movimientos de sombras.

2) La reflectancia de los objetos varía suavemente y no hay solapamiento de objetos. Esto garantiza la diferenciabilidad del brillo.

3) El flujo óptico se debe al movimiento relativo de objetos o al movimiento del observador. Esto hace que los patrones de brillo se muevan como sólidos rígidos o deformables.

4) El flujo óptico se define suponiendo que en cada imagen de la secuencia se conservan algunas propiedades. Asumimos que el que el nivel de intensidad se conserva en cada imagen, es decir, suponemos que $I(\vec{x}, t) - I(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t + \Delta t) = 0$. Esto significa que seguimos la intensidad la intensidad en un píxel como si de un patrón trivial se tratase. Basta entonces aplicar un desarrollo de Taylor, dividir por Δt , y considerar el límite

¹www.dai.ed.ac.uk/homes/s0129556/softwareGLOMO/doc.pdf

²www.cs.ubc.ca/~deaton/remarks_ncc.html

$\Delta t \rightarrow 0$, para obtener la ecuación OFC y plantear el siguiente problema:

$$\text{Conocido } I(\vec{x}, t), \text{ hallar } \vec{v}(\vec{x}, t) \text{ tal que } \vec{\nabla} I(\vec{x}, t) \cdot \vec{v}(\vec{x}, t) + \frac{\partial I(\vec{x}, t)}{\partial t} = 0. \quad (1)$$

Como es bien sabido, las curvas de nivel del brillo son perpendiculares al gradiente, y por cada píxel sólo pasa una curva de nivel. Sin embargo, las curvas de nivel de flujo óptico forman con el gradiente un ángulo que depende de la variación temporal del brillo y la ecuación OFC permite asociar un conjunto infinito de curvas solución a cada píxel de la imagen inicial.

En efecto, cualquier vector que se apoye sobre la recta r perpendicular al gradiente $\vec{\nabla} I(\vec{x}, t)$ y que diste del origen de coordenadas el cociente entre la derivada temporal y el módulo del gradiente de la intensidad, es solución de la ecuación OFC. Estos vectores son vectores autoconjugados respecto de la forma bilineal asociada a la forma cuadrática semidefinida positiva definida en el espacio proyectivo $(u, v, 1)$, con matriz asociada

$$J = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial I}{\partial x}\right)^2 & \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial y} & \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial y} & \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)^2 & \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial I}{\partial t} & \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial I}{\partial t} & \left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)^2 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Existen muchas formas de restringir las posibles curvas solución del problema (apertura). Una primera es añadir una nueva condición, por ejemplo que el gradiente también se conserve y resolverla junto con la ecuación OFC. Pero este método utiliza derivadas de segundo orden y es muy sensible al ruido. Otra posibilidad es resolver la ecuación en el sentido de mínimos cuadrado. Este método da buenos resultados pero no garantiza que la solución tenga regularidad global.

Una forma adecuada de dar apertura y al mismo tiempo regularidad ($u, v \in H^2(\Omega)$) al problema OFC, es reformularlo como un problema de minimización de un funcional $\Psi(u, v)$ que incluya un término de fidelización $F(\vec{v})$ y un término de penalización, regularización o suavizado $S(\vec{v})$. Por ejemplo, mín $\Psi(u, v)$ donde

$$\Psi(u, v) = \int_{\Omega} \left(\|(u, v, 1)\|_J^2 + \alpha \left(\|\vec{\nabla} u\|^2 + \|\vec{\nabla} v\|^2 \right) \right) dx = F(\vec{v}) + S(\vec{v}), \quad (3)$$

que garantiza una solución \vec{v} del problema OFC con módulo del gradiente vectorial mínimo.

No se puede probar el carácter convexo del funcional $\Psi(u, v)$ por el carácter semi-definido de J , y por esta misma razón es un exceso de notación escribir $\|\cdot\|_J$. El término $S(\vec{v})$ se escoge de acuerdo al tipo de secuencia; por ejemplo, si proviene de una traslación del observador o de una rotación de objetos alrededor de un eje con campo de velocidades de laplaciano nulo, lo adecuado es penalizar el laplaciano.

En lo que sigue nos centraremos en el funcional de Horn (3), a pesar de que tiene un efecto suavizador isotrópico sobre el gradiente de las componentes del flujo que no es recomendable. Otras propuestas son regularizar relajando el efecto suavizador en píxeles donde el módulo del gradiente espacial de la imagen sea mayor, hacer que la regularización sea anisotrópica para evitar suavizar el flujo a lo largo de las discontinuidades de la imagen, o incluso hacer que la regularización esté conducida por flujo en vez de por el gradiente para conseguir suavizar los bordes del flujo.

3. Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones de Euler-Lagrange del funcional de Horn son

$$J_{11}u + J_{12}v + J_{13} - \alpha\Delta u = J_{12}u + J_{22}v + J_{23} - \alpha\Delta v = 0. \quad (4)$$

Estas ecuaciones lineales se discretizan mediante un esquema de diferencias finitas, a partir de una partición del dominio Ω en $m \times n$ subrectángulos (píxeles) y del intervalo temporal en k pasos de tiempo.

Si se sustituye el laplaciano por una de sus aproximaciones, por ejemplo

$$\Delta u_{ijk} = 4(\bar{u}_{ijk} - u_{ijk}), \bar{u}_{ijk} = \frac{1}{4}(u_{i+1,jk} + u_{i-1,jk} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j-1,k}), \quad (5)$$

y las componentes del tensor de movimiento se aproximan promediando los valores en un cubo del espacio-tiempo, por ejemplo

$$\left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)_{ijk} = \frac{1}{4}(I_{i,j+1,k} - I_{i,j,k} + I_{i+1,j+1,k} - I_{i+1,j,k} + I_{i,j+1,k+1} - I_{i,j,k+1} + I_{i+1,j+1,k+1} - I_{i+1,j,k+1}), \quad (6)$$

se obtienen las siguientes ecuaciones en diferencias (dos por cada píxel):

$$\begin{aligned} (J_{11})_{ij}u_{ij} + (J_{12})_{ij}v_{ij} &= \alpha(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{ij}) - (J_{13})_{ij} \\ (J_{12})_{ij}u_{ij} + (J_{22})_{ij}v_{ij} &= \alpha(v_{i+1,j} + v_{i-1,j} + v_{i,j+1} + v_{i,j-1} - 4v_{ij}) - (J_{23})_{ij} \end{aligned} \quad (7)$$

Estas ecuaciones junto con las condiciones de contorno nulo $u_{ij} = v_{ij} = 0$ si $i \notin \{1, \dots, n\}$ ó $j \notin \{1, \dots, m\}$ definen un sistema $A_h^\alpha \vec{\mathbf{u}}_h = \vec{\mathbf{F}}_h$ de $h = 2mn$ ecuaciones y otras tantas incógnitas, siendo la matriz de coeficientes

$$\begin{aligned} A_h^\alpha &= \begin{pmatrix} \mathfrak{J}_{11} - \alpha\mathcal{L} & \mathfrak{J}_{12} \\ \mathfrak{J}_{12} & \mathfrak{J}_{22} - \alpha\mathcal{L} \end{pmatrix} \in M_h, & \mathcal{L} &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{L}}_n & I_n & O_n & \cdots \\ I_n & \tilde{\mathcal{L}}_n & I_n & \ddots \\ O_n & I_n & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in M_{m \times n}, \\ \tilde{\mathcal{L}}_n &= \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & \cdots \\ 1 & -4 & 1 & \ddots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \in M_n, & \mathfrak{J}_{rs} &= \begin{pmatrix} (J_{rs})_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & (J_{rs})_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}, \end{aligned} \quad (8)$$

y los vectores de R^h

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{u}}_h &= (u_{11}, \dots, u_{1n}, u_{21}, \dots, u_{2n}, \dots, u_{m1}, \dots, u_{mn}, v_{11}, \dots, v_{1n}, v_{21}, \dots, v_{2n}, \dots, v_{m1}, \dots, v_{mn}), \\ \vec{\mathbf{F}}_h &= ((J_{13})_{11} \quad \cdots \quad (J_{13})_{mn} \quad (J_{23})_{11} \quad \cdots \quad (J_{23})_{mn}) \end{aligned} \quad (9)$$

El sistema a resolver tiene como matriz de coeficientes una matriz simétrica definida positiva de gran talla, pero de una gran dispersión (para una resolución de 128×128 sólo el 0.0182% de elementos son no nulos), lo que hace que los métodos directos e indirectos funcionen muy rápido, incluso sin reducción del ancho de banda [3]. Sin embargo, tienen el gran problema de que una resolución 256×256 implica una matriz de 131072×131072 , muy difícil de generar y almacenar.

4. Métodos clásicos de resolución

En el artículo original de Horn y Schur se propone un método indirecto consistente en manipular las ecuaciones de Euler-Lagrange discretizadas (7), obtener un sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes se invierte fácilmente por las propiedades de la matriz J y llegar a

$$\begin{pmatrix} u_{ij} - \bar{u}_{ij} \\ v_{ij} - \bar{v}_{ij} \end{pmatrix} = -\frac{\alpha}{|\tilde{J}_\alpha|} \begin{pmatrix} (J_{11})_{ij}\bar{u}_{ij} + (J_{12})_{ij}\bar{v}_{ij} + (J_{13})_{ij} \\ (J_{22})_{ij}\bar{v}_{ij} + (J_{12})_{ij}\bar{u}_{ij} + (J_{23})_{ij} \end{pmatrix}, \quad |\tilde{J}_\alpha| = \alpha(\alpha + (J_{11})_{ij} + (J_{22})_{ij}). \quad (10)$$

El valor del campo en un pixel depende del promedio del valor en los píxeles del entorno. Es posible obtener dicho valor iterativamente:

$$\begin{pmatrix} u_{ij}^{k+1} \\ v_{ij}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{u}_{ij}^k \\ \bar{v}_{ij}^k \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{|\tilde{J}_\alpha|} \begin{pmatrix} (J_{11})_{ij}\bar{u}_{ij}^k + (J_{12})_{ij}\bar{v}_{ij}^k + (J_{13})_{ij} \\ (J_{22})_{ij}\bar{v}_{ij}^k + (J_{12})_{ij}\bar{u}_{ij}^k + (J_{23})_{ij} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

En las zonas donde el gradiente de la intensidad es nulo, el campo de velocidades es la media de los valores del entorno de vecindad. En estas zonas el gradiente de velocidades no se puede utilizar para restringir el conjunto de soluciones de la ecuación OFC y, de igual modo que ocurre con la distribución de temperaturas en una placa uniforme, la velocidad aparente en el interior dependerá de los valores de la misma en los píxeles que rodean la zona. En las zonas donde el gradiente de la intensidad es lineal, ocurre algo similar. La restricción de soluciones de la ecuación OFC sólo será efectiva en la dirección perpendicular al gradiente de la intensidad. En definitiva, la solución restringida de la ecuación OFC sólo será significativa donde el gradiente del brillo varíe suficientemente, sin que esta fluctuación sea excesiva lo que daría origen a pixelaciones indeseables debido a los errores en las estimaciones de las derivadas.

Los métodos directos, variantes de la eliminación de Gauss, tienen el inconveniente adicional de que acceden a cada uno de los coeficientes de la matriz A_h^α . Sin embargo son métodos más rápidos, especialmente si se hace previamente una reordenación de filas y columnas para reducir el ancho de banda (algoritmo de Cuthill-McKee) o para reducir el grado de conexión del grafo asociado a la matriz (algoritmo de mínimo grado).

Los métodos indirectos, como el de Jacobi, obtienen la solución del sistema sin tener que acceder a los coeficientes para invertir la matriz A_h^α . Para ello, parten de la descomposición de la matriz de coeficientes en una suma de una matriz diagonal D_h y dos triangulares U_h y L_h , obteniendo la siguiente expresión:

$$\vec{\mathbf{u}}_h = K_h \vec{\mathbf{u}}_h + \vec{\mathbf{c}}_h \quad \text{siendo} \quad K_h = I - D_h^{-1} A_h^\alpha \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{c}}_h = D_h^{-1} \vec{\mathbf{F}}_h, \quad (12)$$

lo que justifica la resolución mediante el esquema iterativo $\vec{\mathbf{u}}_h^{k+1} = K_h \vec{\mathbf{u}}_h^k + \vec{\mathbf{c}}_h$, $k = 0, 1, \dots, r$.

Sin embargo, los algoritmos más utilizados son versiones amortiguadas (damped) que incluyen un parámetro de control $0 < \omega \leq 1$:

$$K_h^\omega = I - \omega D_h^{-1} A_h, \quad \vec{\mathbf{c}}_h^\omega = \omega D_h^{-1} \vec{\mathbf{F}}_h. \quad (13)$$

Las propiedades del espectro de K_h^ω garantizan que estos algoritmos sean consistentes y convergentes, pero sobre todo garantizan la propiedad de "suavizado" del error en cada iteración. Esto se comprueba fácilmente al discretizar una versión muy simplificada de la ecuación OFC con $J = 0$, $\alpha = 1$ y $n = 1$. En este caso el espectro de la matriz de iteración es $\sigma(K_h^\omega) = \{\mu_i^\omega = 1 - \omega(1 - \cos \frac{i\pi}{h})\}_{i=1}^h < 1$.

La convergencia está garantizada, aunque se puede deteriorar si disminuimos el número de píxeles. Esto se debe a que el radio espectral de la matriz de iteración tiende a uno cuando h tiende a cero.

El error se puede expresar como combinación lineal de los autovectores $(\vec{v}_i)_j = \sin(ij\pi/h)$ que se clasifican en, autovectores de baja frecuencia tales que $1 \leq i \leq h/2$ y autovectores de alta frecuencia con $h/2 \leq i \leq h$.

El parámetro de control ω se escoge tal que el factor de suavizado, mayor autovalor de asociado a las altas frecuencias, sea lo más pequeño posible. Con esta elección, se consigue que en unas pocas iteraciones las altas frecuencias desaparezcan y el error se convierta en un error "suave", combinación lineal de autovectores de bajas frecuencias.

En el caso que nos ocupa, el factor de suavizado alcanza el valor mínimo $\mu^* = 1/3$ si $\omega^* \simeq 2/3$, independientemente del valor de h . Si escogemos el método de Jacobi amortiguado con $\omega = 2/3$, garantizamos que el error disminuya más lentamente en cada iteración, pero se suaviza (se eliminan las altas frecuencias) más rápidamente, pudiendo además disminuir o aumentar la resolución sin que esto afecte a la convergencia.

5. Métodos multimalla

La principal ventaja de los métodos indirectos del tipo del método de Jacobi, es que son algoritmos vectorizables. Además, si una vez obtenida una solución para el flujo asociado a las imágenes t y $t + 1$, esta solución se usa como solución inicial para obtener el flujo asociado a las imágenes $t + 1$ y $t + 2$, la eficiencia del método aumenta. El mayor inconveniente es la imposibilidad de eliminar del error las bajas frecuencias asociadas a autovectores \vec{v}_i con $1 \leq i \leq h/2$.

La idea fundamental de los métodos multimalla es hacer h pequeño (dowsamplig, disminuir el número de píxeles) para eliminar mayor cantidad de bajas frecuencias, aún a costa de que aparezcan frecuencias altas indeseadas (aliasing, pixelado), que luego pueden ser filtradas con un nuevo suavizado.

Aunque se sabe que la fundamentación teórica está poco desarrollada, los métodos multimalla funcionan bien para problemas de PDE's elípticas (lineales o no) con contorno suave, necesitan menos memoria porque no almacenan la matriz A_h^α , son fácilmente vectorizables (aunque requieren más órdenes de comunicación que otros solvers), precisan una cuidadosa "sintonización", elección del tipo de ciclos, de algoritmo suavizador, etc.

El algoritmo de resolución multimalla (2-malla) más sencillo, consiste en los siguientes tres pasos. Primero se aplican r iteraciones del método Jacobi amortiguado para obtener una solución aproximada \vec{u}_h^r , un error $\vec{e}_h^r = \vec{u}_h - \vec{u}_h^r$ y un residual $\vec{r}_h^r = \vec{F}_h - A_h^\alpha \vec{u}_h^r$, tales que $A_h^\alpha \vec{e}_h^r = A_h^\alpha (\vec{u}_h - \vec{u}_h^r) = \vec{r}_h^r$.

En segundo lugar, el residual se restringe $I_{h \rightarrow 2h}(\vec{r}_h^r) = \vec{r}_{2h}^r$ y se resuelve el sistema lineal $A_{2h}^\alpha \vec{e}_{2h}^r = \vec{r}_{2h}^r$.

Por último y en tercer lugar, se interpola el residual $I_{2h \rightarrow h}(\vec{e}_{2h}^r) = \vec{e}_h^r$ y se corrige

la solución sustituyendo $\vec{\mathbf{u}}_h^r$ por $\vec{\mathbf{u}}_h^r + \vec{\mathbf{e}}_h^r$.

El algoritmo se representa mediante el grafo a) de la figura siguiente, donde el círculo azul representa iteraciones de Jacobi (suavizado), el círculo rojo representa la obtención del error por el método directo y el círculo verde la corrección de la solución. La flecha descendente representa la restricción del residual y la flecha ascendente la interpolación del error.

A partir de la definición anterior podemos definir diferentes algoritmos n-malla de tipo V y W, representados respectivamente por los grafos b) y c) de la figura 1. En el gráfico del algoritmo tipo W aparece un círculo de dos colores verde y azul que representa la corrección de la solución y el posterior suavizado de la misma. Pero los más utilizados son los llamados métodos multigrad total, como el que se representa por el grafo d) de la figura 1 y que es el utilizado en los experimentos que se propone en la siguiente sección. La ventaja es que partiendo de una solución a baja resolución, con un juego de interpolación-restricción, se llega a una solución a alta resolución, evitando resolver el sistema salvo a baja resolución y por un método directo.

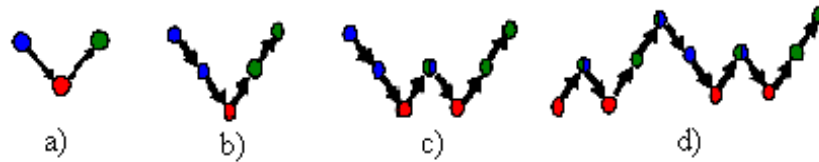


Fig. 1 Representación de los métodos multimalla

6. Experimentos numéricos

Los métodos de resolución anteriormente descritos se han implementado en código Matlab que se ha ejecutado en un Pc Pentium IV 3.2 GHz. En el experimento 1 se estudia el conocido test de la secuencia del parque Yosemite³, tanto a alta 256×256 como a baja resolución 32×32 . En esta secuencia sólo se mueve el observador. Se puede ver que, a pesar del suavizado de las líneas de flujo, a baja resolución también se aprecia el flujo óptico. En el experimento 2, la secuencia recoge el movimiento de una esfera. En este caso, a baja resolución el flujo óptico pierde información acerca del eje de giro de la esfera, sí apreciable en el caso de alta resolución.

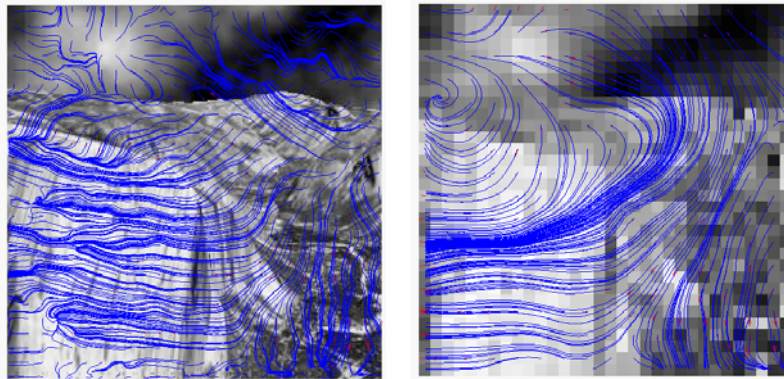


Fig. 2 Experimento 1 a alta y a baja resolución

³<http://www.informatik.uni-ulm.de/ni/staff/PBayerl/homepage/ECVP2003/exampleYos.html>:

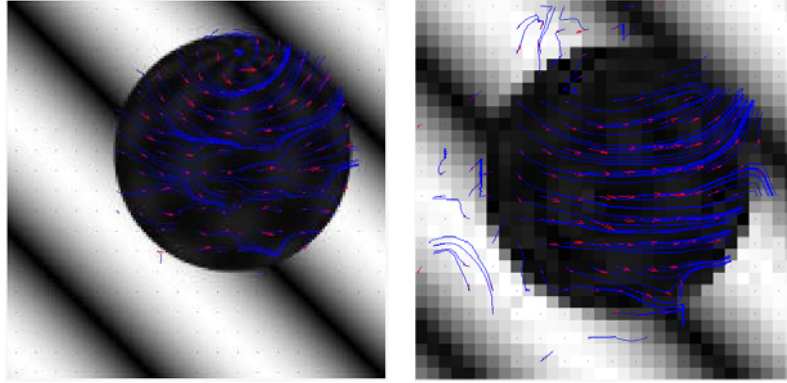


Fig. 3 Experimento 2 a alta y a baja resolución

Método	Nº de iteraciones	Tiempo CPU (seg)	Imágenes por segundo (sg^{-1})	Ratio
Indirecto adaptado	1049	42.063	0.0238	1
Jacobi amortiguado	2453	20.734	0.0482	2
Directo	-	2.047	0.4885	20
Multimalla	1 ciclo	0.047	21.2766	895

Tabla 1 Tiempos de cálculo para el Experimento 2 a alta resolución

7. Conclusiones

Los tiempos de cálculo recogidos en la Tabla 1 ponen de manifiesto la mayor eficiencia del método multimalla. Aunque los códigos programados no están optimizados se obtienen tiempos de cálculo que permitirían analizar en tiempo real secuencias de 21 imágenes por segundo, con una resolución muy aceptable de 256×256 píxeles.

Esta técnica multimalla de cálculo del flujo óptico será utilizada para analizar secuencias de imágenes obtenidas por tomografía.

Referencias

- [1] G. Aubert, P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing, Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, sec. 5.3, Springer 2006.
- [2] A. Bruhm, J. Weikert, T. Kohlbecker, C. Schörr, *A Multigrid Platform for Real-Time Motion Computation with Discontinuity-Preserving Variational Methods*, preprint 136, Universität Saarlandes, Fachrichtung 6.1-Mathematik, Saarbrücken 2005.
- [3] I.S. Duff, A.M. Erisman, J.K. Reid, *Direct Methods for Sparse Matrices*, Monographs on Numerical Analysis, Oxford Science Publications 1989.
- [4] B. Horn, B. Schunck, Determining Optical Flow, *Artificial Intelligence* 17 (1981) 185-203, North-Holland.
- [5] D. Robinson, P. Milanfar, *Fast Local and Global Projection-Based Methods for Affine Motion Estimation*, Kluwer Academic Publishers, *Journal of Mathematical Imaging and Vision* 18:35-54, 2003.
- [6] M. K. Titsias, *Unsupervised Learning of Multiple Objects in Images*, PhD thesis, School of Informatics, University of Edinburgh, 2005.
- [7] C. Ware, *Information Visualization. Perception for design*, Morgan Kaufmann series in interactive technologies, 1999.