XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–6)

Convergencia y análisis numérico de un método de tercer orden para sistemas de ecuaciones no lineales

S. Amat[1], C. Bermúdez[1], S. Busquier[1], F. Manzano[1], S. Plaza[2]

[1] *Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística, U.P. Cartagena. 30203 Cartagena (Murcia) E-mails:* sergio.amat@upct.es, sonia.busquier@upct.es, concepcion.bermudez@upct.es.
[2] *Dpto. de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad de Santiago de Chile. E-mail:* splaza@lauca.usach.cl.

Palabras clave: Métodos iterativos, sistemas de ecuaciones no lineales, orden de convergencia

Resumen

A lo largo de la Historia la resolución de ecuaciones no lineales ha preocupado a gran cantidad de científicos. Hoy en día, con los adelantos tecnológicos, estas ecuaciones son aproximadas de forma eficiente por medio de métodos iterativos. La idea es generar una sucesión de aproximaciones $x_0, x_1, x_2, ...$ que bajo ciertas condiciones converge a la raíz deseada.

En este trabajo, presentamos una extensión a espacios de Banach de un método de tercer orden recientemente presentado en el caso escalar [6]. Se introducirán varios teoremas de convergencia, modificaciones que no necesitan el cómputo de derivadas y varios experimentos numéricos.

1. Introducción

En matemáticas, uno de los problemas más habituales al que nos enfrentamos es la resolución de ecuaciones. Cuando nos encontramos con la expresión $F(x) = 0$, cabe pensar en diferentes situaciones, resolución de un sistema de ecuaciones, encontrar la solución de una ecuación diferencial o hallar las raíces de un polinomio. Cuando la obtención de la solución no es posible (hecho que ocurre en numerosas ocasiones), nos debemos conformar con aproximaciones de las mismas. Este hecho da pie a los procesos numéricos, dando vida a los métodos iterativos.

Las raíces de una ecuación no lineal $f(x) = 0$ no puede expresarse en general de forma cerrada. Así para tratar ecuaciones no lineales, usualmente se debe utilizar métodos aproximados. Estos métodos normalmente se basan en la idea de aproximación sucesiva o en linealización. Tales métodos son iterativos; es decir, a partir de una o más aproximaciones a la raíz, crean una sucesión $x_0, x_1, x_2, ...$ que bajo ciertas condiciones converge a la raíz deseada. Con ciertos métodos, es suficiente (para la convergencia) conocer un intervalo $[a, b]$ que contenga a la raíz. Otros métodos requieren una aproximación inicial que está cerca de la raíz deseada; a cambio, estos métodos convergen más rápidamente. Así, a menudo es conveniente empezar con un método de orden bajo y luego cambiar a uno que converja más rápido [3].

En general, un método iterativo $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ es de orden p-ésimo si la solución x^* de $F(x) = 0$ satisface $x^* = \Phi(x^*)$, $\Phi'(x^*) = \cdots = \Phi^{(p-1}(x^*) = 0$ y $\Phi^{(p}(x^*) \neq 0$. Para este método, el error $|x^* - x_{n+1}|$ es proporcional a $|x^* - x_n|^p$ cuando $n \to \infty$. Por ejemplo, el método de Newton

$$x_{n+1} = x_n - F^{'}(x_n)^{-1}F(x_n).$$

tiene convergencia cuadrática (orden dos) para raíces simples.

En este trabajo, presentamos una extensión a espacios de Banach de un método de tercer orden recientemente presentado en el caso escalar [6]. Se introducirán varios teoremas de convergencia, modificaciones que no necesitan el computo de derivadas y varios experimentos numéricos.

2. Esquemas de tercer orden

En [6] se introduce el siguiente método iterativo de orden 3

$$\begin{aligned} y_n &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \\ z_n &= -\frac{(y_n - x_n)^2}{2f'(x_n)} f''(x_n) \\ x_{n+1} &= y_n - \frac{(y_n + z_n - x_n)^2}{2f'(x_n)} f''(x_n). \end{aligned}$$

En este trabajo estamos interesados en el caso de sistemas de ecuaciones o de forma más general de ecuaciones donde los operadores sean entre espacios de Banach.

Sea $F : D \subset X \to Y$ un operador no lineal, entonces el método anterior se escribe como

$$x_{n+1} = x_n - (I + T_n + 2T_n^2 + T_n^3)\Gamma_n$$

donde

$$T_n := \frac{1}{2} F'(x_n)^{-1} F''(x_n) F'(x_n)^{-1} F(x_n),$$

y

$$\Gamma_n := F'(x_n)^{-1} F(x_n).$$

Usando diferencias divididas se pueden obtener esquemas que no necesitan que el operador sea diferenciable Fréchet [2], [5].

3. Convergencia

Los métodos introducidos en la sección anterior pueden escribirse como

$$t_{n+1} = t_n - \left(1 + \theta_n + O\left(\theta_n^2\right)\right) \frac{f\left(t_n\right)}{f'\left(t_n\right)},$$

donde

$$\theta_n := \frac{1}{2} \frac{f''\left(t_n\right) f\left(t_n\right)}{f'\left(t_n\right)^2}.$$

En particular, podemos aplicar la teoría general desarrollada para este tipo de métodos [1], [4].

Para un operador entre espacios de Banach $F : D \subset X \to Y;\ F(x) = 0$, se tiene

$$x_{n+1} = x_n - \left(I + T_n + O\left(T_n^2\right)\right) \Gamma_n. \tag{1}$$

Consideraremos

$$t_{n+1} = t_n - \left(1 + \theta_n + O(\theta_n^2)\right) \frac{f\left(t_n\right)}{f'\left(t_n\right)}, \tag{2}$$

donde $O(\theta_n^2)$ tiene el mismo desarrollo de Taylor que $O\left(T_n^2\right)$.

Proposición 1 *Sean $a, b, c > 0$ números reales de forma que*

$$a \leq \frac{\left(b^2 + 2c\right)^{\frac{3}{2}} - b\left(b^2 + 3c\right)}{3c^2}. \tag{3}$$

Entonces, existe un polinomio de tercer grado $f\left(t\right)$ verificando:

(a) $f\left(0\right) = 0$

(b) $f\left(t_0\right) = a$

(c) $f'\left(t_0\right) = 1$

(d) $f''\left(t_0\right) = b$

(e) $f'''\left(t\right) = -c$, $\forall t$ *real.*

Demostración

Claramente, para

$$f\left(t\right) := t\left(-\frac{c}{6}t^2 + \beta t + \gamma\right)$$

donde

$$\beta := \frac{b + ct_0}{2}$$

y

$$\gamma := 1 - \frac{c}{2}t_0^2 - bt_0$$

se verifican los resultados.

□

Corolario 1 *Si a, b, c verifican (3), entonces $ab \leq \frac{1}{2}$.*

Proposición 2 *La sucesión $\{t_n\}_{n\geq 0}$ converge monótonamente y su límite es cero.*

Teorema 1 *Supongamos que x_0 en D es tal que $F'(x_0)$ es invertible. Además, a, b, c son números reales positivos verificando 3, y para todo x, y en D,*

$$\left\| F'(x_0)^{-1} F(x_0) \right\| \leq a, \tag{4}$$

$$\left\| F'(x_0)^{-1} F''(x_0) \right\| \leq b, \tag{5}$$

$$||F^{'}(x_0)^{-1}(F''(x) - F''(y)|| \leq c \left\| x - y \right\|. \tag{6}$$

Además, como $f(t)$, t_0 y $\{t_n\}_{n\geq 0}$ son los definidos en la sección anterior, se tiene para todo $n \geq 0$,

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq t_n - t_{n+1}.$$

Corolario 2 *Bajo las mismas hipótesis del teorema 1, si*

$$B' := \{x \in X : \|x - x_0\| \leq t_0\} \subset D,$$

entonces la sucesión $\{x_n\}_{n\geq 0}$ converge a x^* en B'; x^* es la única raíz de $F(x) = 0$ en

$$B := \{x \in D : \|x - x_0\| \leq t_2\}.$$

Además, para todo $n \geq 0$,

$$\|x_n - x^*\| \leq t_n$$

Corolario 3 *Para todo $a, b, c \geq 0$ satisfaciendo (3), existe un operador $F(x)$ y un pivote x_0 verificando la proposición 2 tal que:*

Si $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es la sucesión obtenida en (1) de x_0, entonces

$$||x_{n+1} - x_n|| = t_n - t_{n+1}; \quad \|x^* - x_n\| = t_n$$

(Es claro que $f(t)$ y t_0 satisfacen el corolario)

Lema 1 *$F'(x_0)^{-1}[x, y; F]$ es invertible, y*

$$||F'(x_0)^{-1}[x_n, x^*; F]|| \leq$$

$$\frac{1}{1 - \{\frac{b}{2}(||x_n - x_0|| + t_0) + \frac{c}{6}(||x_n - x_0||^2 + t_0||x_n - x_0|| + {t_0}^2)\}} =: r$$

Proposición 3 *Sean $b, c, t_0, F, F', F'', T, x_n, x^*$ verificando las mismas condiciones que en el resto de la sección. Entonces,*

$$||x_n - x^*|| \leq r||F^{'}(x_0)^{-1}F(x_n)||$$

4. Experimentos numéricos

Sea la ecuación de Hammerstein

$$x(s) = 1 - \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{s}{t+s}\frac{1}{x(t)}dt, \quad s \in [0,1]. \tag{7}$$

Usando la regla de integración de los trapecios con paso $h = \frac{1}{m}$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones no lineales

$$0 = x^i - 1 + \frac{1}{4m}(\frac{1}{2}\frac{t_i}{t_i+t_0}\frac{1}{x^0}\sum_{k=0}^{n}\frac{t_i}{t_i+t_k}\frac{1}{x^k} + \frac{1}{2}\frac{t_i}{t_i+t_m}\frac{1}{x^m}), \quad i = 0,1,\ldots,m, \tag{8}$$

donde $t_j = \frac{j}{m}$.

En este caso, la segunda derivada Fréchet es diagonal a bloques.

Consideramos $m = 100$ y tomamos como solución la computada numéricamente por el método de Newton. (ver tabla 1).

Newton	Tercer Orden
4	3

Tabla 1: Número de iteraciones hasta la convergencia, $x_0 = 1$, discretización ecuación tipo Hammerstein.

Consideramos ecuaciones cuadráticas del tipo

$$F(x) = x^{'}Ax + Bx + C = 0 \tag{9}$$

donde $dim(A) = (N \times N \times N$, $dim(B) = N \times N$ y $dim(C) = dim(x) = N$.

Sobre el tipo de ecuaciones, pueden venir de la discretización de problemas de equilibrio, donde interaccionan fuerzas entre partículas que determinan el rendimiento. De cualquier modo, el caso que vamos a analizar está preparado para obtener una solución exacta con el fin de facilitar la evaluación de los errores. Generamos aleatoriamente A y B, y entonces determinamos C tal que $x^*(i) = 2, \ i = 1,2,\ldots,n$, es una solución de (9). En la tabla 2 la dimensión utilizada es $m = 100$.

Notar que, la segunda derivada Fréchet es constante $F^{''}(x) = A + A^{'}$.

Newton	Tercer Orden
5	4

Tabla 2: Número de iteraciones hasta la convergencia, $x_0 = 1{,}8$, ecuación cuadrática.

Finalmente, estudiamos el sistema de ecuaciones no diferenciable (ver tabla 3)

$$\begin{aligned} 3x^2 + y^2 - 1 + |x-1| &= 0, \\ x^4 + xy^3 - 1 + |y| &= 0. \end{aligned}$$

Secante	Tercer Orden
8	3

Tabla 3: Número de iteraciones hasta la convergencia, $(x_{-1}, y_{-1}) = (5, 5)$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, sistema no diferenciable.

La solución considerada es

$$(x^*, y^*) = (0{,}8946553733346867, 0{,}3278265117462974).$$

Se han utilizado como primera y segunda diferencia dividida

$$[x_n - \gamma_n F(x_n), x_n + \gamma_n F(x_n); F]$$

y

$$[x_n - \gamma_n F(x_n), x_n, x_n + \gamma_n F(x_n); F]$$

donde γ_n es un parámetro real verificando

$$10^{-16} << ||\gamma_n F(x_n)|| \leq 10^{-6},$$

(ver [1], [2]).

5. Conclusiones

Se han estudiado unos métodos iterativos de tercer orden para ecuaciones no lineales en espacios de Banach, construyendo teoremas de convergencia. Se han dado alternativas para prescindir del uso de derivadas. En diversos ejemplos de interés práctico hemos testado los distintos métodos. Los métodos introducidos son competitivos con respecto a los métodos clásicos ya conocidos.

Agradecimientos

La investigación de los cuatro primeros autores ha sido en parte subvencionada por MTM2004-07114 y 00675/PI/04. La investigación de Sergio Plaza ha sido subvencionada en parte por Fondecyt Grant #1020711 y Dicyt Grant #0433

Referencias

[1] S. Amat, S. Busquier, *Third-order iterative methods under Kantorovich conditions.* J. Math. Anal. Appl., en prensa 2007.

[2] S. Amat, S. Busquier, *Convergence and numerical analysis of a family of two-step Steffensen's methods.* Comput. Math. Appl. **49** (1), 13–22, (2005).

[3] S. Amat, S. Busquier and J.M. Gutiérrez, *Geometric constructions of iterative functions to solve nonlinear equations.* J. Comput. Appl. Math. **157** (1), 197–205, (2003).

[4] M.A. Hernández and N. Romero, *On a characterization of some Newton-like methods of R-order at least three.* J.Comput.Appl.Math. **183** (1), 53-66, (2005).

[5] M.A. Hernández and M.J. Rubio, *Semilocal convergence of the secant method under mild convergence conditions of differentiability.* Comput. Math. Appl. **44** (3-4), 277-285, (2002).

[6] M.A. Noor et al., *An iterative method with cubic convergence for nonlinear equations*, Appl. Math. Comp., **183**, (2006), 1249-1255.