XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Matrices con inversa positiva

MANUEL F. ABAD[1], JUAN R. TORREGROSA[1]

[1] *Dpto. Matemática Aplicada, Universidad Politécnica de Valencia. E-mails:* `maabrod@mat.upv.es`, `jrtorre@mat.upv.es`.

Palabras clave: matriz inversa positiva, M-matriz, suma sub-directa, matriz totalmente no negativa

Resumen

El objeto de este trabajo es presentar un análisis de las matrices reales con inversa positiva. Es una clase de matrices que contiene a las M-matrices, de las que heredan algunas de sus numerosas aplicaciones y de sus propiedades.

Presentamos algunos ejemplos de matrices inversa positiva, que aparecen en problemas de discretización, de factorización de matrices, etc.

Hacemos un estudio de las propiedades hereditarias de esta clase de matrices, prestando especial atención a la suma sub-directa, y establecemos relaciones entre estas matrices y otras clases de matrices como las totalmente no negativas, las matrices monótonas, etc.

1. Introducción

Una matriz real, no singular, $A = (a_{ij})$, de tamaño $n \times n$, se dice que es *inversa positiva* si todos los elementos de su inversa son no negativos. Estas matrices juegan un papel importante en Economía y en otras ciencias. Además, una matriz inversa positiva que sea también Z-matriz, es una M-matriz no singular, de manera que la clase de las matrices inversa positiva contiene a las M-matrices no singulares, las cuales han sido ampliamente estudiadas y sus aplicaciones, por ejemplo, en métodos iterativos, en sistemas dinámicos, en economía, en programación matemática, etc, son sobradamente conocidas.

Desde luego, no toda inversa positiva es M-matriz. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

es una matriz inversa positiva que claramente no es M-matriz.

Podemos demostrar una caracterización de las matrices inversa positiva en relación con la resolución de sistemas lineales. Concretamente:

Teorema 1.1 *Una matriz real A, de tamaño $n \times n$, es inversa positiva si y sólo si para todo vector $b \in R_+^n$, existe $x \in R_+^n$ tal que $Ax = b$.*

En la sección 2 veremos algunos ejemplos de matrices inversa positiva, que aparecen en problemas de discretización, de factorización de matrices, y, en general, en diferentes técnicas numéricas.

En la sección 3, estudiaremos las propiedades hereditarias de las matrices inversa positiva, prestando especial atención a la suma sub-directa introducida por Fallat y Johnson en [3].

La suma subdirecta de matrices es una generalización de la suma habitual de matrices. Sean A y B dos matrices cuadradas de orden n_1 y n_2, respectivamente, y sea k un entero tal que $1 \leq k \leq \text{mín}(n_1, n_2)$. Particionamos A y B en bloques de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

donde A_{22} y B_{11} son matrices cuadradas de orden k. Se llama *suma sub-directa de orden* k de las matrices A y B, y se denota por $C = A \oplus_k B$, a la matriz

$$C = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} + B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, en la sección 4 estudiaremos las relaciones existentes entre las matrices inversa positiva y otras clases de matrices como las P-matrices, las matrices totalmente no negativas, las matrices totalmente no positivas, las matrices totalmente positivas, las matrices totalmente negativas, la matriz A^* introducida por Gantmacher y Krein en [4], las matrices con patrón 'checkerboard' y las matrices monótonas.

Todas estas matrices están estrechamente relacionadas con las matrices inversa positiva, aparecen con frecuencia en teoría de aproximación, estadística, diseño gráfico asistido por ordenador, etc. Recordamos a continuación las clases de matrices mencionadas.

Definición 1.1 *Una matriz real, de tamaño $n \times n$ se dice totalmente no negativa (no positiva) si todos sus menores son no negativos (no positivos). Se dice totalmente negativa (positiva) si todos sus menores son negativos (positivos).*

Definición 1.2 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real, de tamaño $n \times n$, se define la matriz $A^* = (a_{ij}^*)$ como aquella en la cual $a_{ij}^* = (-1)^{i+j} a_{ij}$*

Definición 1.3 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real, de tamaño $n \times n$. Decimos que A tiene un patrón 'checkerboard' si $sign(a_{ij}) = (-1)^{i+j}$.*

Definición 1.4 *Sea A una matriz real, de tamaño $n \times n$. Decimos que A es monótona si $\forall x \in R^n$, si $Ax \geq 0$ entonces $x \geq 0$.*

2. Ejemplos de matrices inversa positiva

Presentamos a continuación algunos ejemplos de matrices inversa positiva, que aparecen en diferentes técnicas numéricas.

Ejemplo 2.1 1. Sea A la siguiente matriz tridiagonal de tamaño $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1+1/p \end{pmatrix},$$

con $p > 1$, $p \geq n-1$.

Podemos comprobar que la inversa de la matriz A es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} p-n+1 & p-n+2 & p-n+3 & \dots & p-1 & p \\ p-n+2 & p-n+2 & p-n+3 & \dots & p-1 & p \\ p-n+3 & p-n+3 & p-n+3 & \dots & p-1 & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ p-1 & p-1 & p-1 & \dots & p-1 & p \\ p & p & p & \dots & p & p \end{pmatrix}$$

por lo que A es una matriz inversa positiva.

En el caso particular de $p = n$, se puede demostrar que

$$A^{-1} = (b_{ij}) \;\text{ con }\; b_{ij} = \text{máx}\{i, j\},\; i, j = 1, 2, \dots, n.$$

2. Consideremos la matriz tridiagonal

$$T = \begin{pmatrix} 1+\dfrac{a}{a+b} & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

con $a > 0$ y $a > b$. Se comprueba que T es inversa positiva, ya que $T^{-1} = (1/a)C$ con $C = (c_{ij})$ siendo

$$c_{ij} = \text{mín}\{ai - b, aj - b\}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

3. Consideremos el vector $x = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T \in R^n_+$, y la matriz bidiagonal inferior siguiente:

$$P(x,n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{x_1} & \frac{1}{x_2} & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{x_2} & \frac{1}{x_3} & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{-1}{x_{n-2}} & \frac{1}{x_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{-1}{x_{n-1}} & \frac{1}{x_n} \end{pmatrix}.$$

Podemos comprobar que la inversa de la matriz P es:

$$P(x,n)^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \ldots & x_{n-1} & 0 \\ x_n & x_n & x_n & \ldots & x_n & x_n \end{pmatrix},$$

Por lo que P es una matriz inversa positiva.

4. Cualquier matriz permutación es inversa positiva.

3. Propiedades de las matrices inversa positiva

El concepto de inversa positiva tiene, en general, peores propiedades hereditarias que el concepto de M-matriz. Veamos a continuación algunas de esas propiedades.

1. Las submatrices principales de una matriz inversa positiva no son, en general, matrices inversa positiva, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

   Ejemplo 3.1 La matriz

   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & 4{,}67 & -2{,}67 \end{pmatrix},$$

   es inversa positiva, pero la submatriz principal $A[\{1,2\}]$ no lo es.

2. La inversa de una matriz inversa positiva no tiene por qué ser inversa positiva.

3. Si A es inversa positiva, αA no tiene por qué ser inversa positiva, salvo que $\alpha \in R^+$.

4. Sean A y B matrices inversa positiva. Entonces AB y BA son inversa positiva.

5. Sean A y B matrices inversa positiva. Entonces $A+B$ no necesariamente es inversa positiva.

   Ejemplo 3.2 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -7 & 4 \\ -1 & 4{,}66 & -2{,}66 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0{,}25 & -2 & 1{,}25 \\ -0{,}5 & 1 & -0{,}5 \\ 0{,}25 & 0{,}66 & -0{,}416 \end{pmatrix}.$$

   Se puede comprobar que ambas son inversa positiva. Sin embargo, $A+B$ no lo es.

6. Sea A una matriz inversa positiva y sea P una matriz permutación. Entonces PAP^T es inversa positiva.

7. Sea A una matriz inversa positiva y D una matriz diagonal no singular. Entonces DA, AD, y DAD^{-1} son matrices inversa positiva.

8. Suma sub-directa de matrices inversa positiva.

   En general, la suma sub-directa de dos matrices inversa positiva no es inversa positiva, como podemos ver en el siguiente ejemplo.

   Ejemplo 3.3 Consideremos las matrices, ambas inversa positiva,

$$A = \left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 6 & -4 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right), \qquad B = \left(\begin{array}{rr|rr} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & -1 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

   Se comprueba que la matriz

$$C = A \oplus_2 B = \left(\begin{array}{rr|rr|rr} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & 4 & -3 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

   no es inversa positiva.

   Utilizando los patrones más habituales de A y B para el estudio de las propiedades de la suma sub-directa, se puede demostrar que, cuando A y B, ambas inversa positiva, tienen la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix},$$

   entonces $C = A \oplus_2 B$ nunca puede ser inversa positiva. Sin embargo, cuando A y B, ambas inversa positiva, tienen el siguiente aspecto:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

si llamamos $H = A_{22}^{-1} + B_{11}^{-1}$ se puede demostrar que si H es inversa positiva entonces la suma sub-directa de A y B es inversa positiva. El recíproco no es cierto.

Siguiendo en el mismo caso, sea ahora $H' = A_{22} + B_{11}$. Dado $b = [b_1, b_2, b_3]^T \in R_+^{n_1+n_2-k}$, con $b_1 \in R^{n_1-k}$, $b_2 \in R^k$ y $b_3 \in R^{n_2-k}$, nos preguntamos si existe un vector $u > 0$ tal que $Cu = b$. Como A y B son inversa positiva, existirán los vectores positivos $x_1 \in R^{n_1-k}$, $y_1 \in R^k$, $x_2 \in R^k$ y $y_2 \in R^{n_2-k}$, tal que

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \qquad B \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Se puede demostrar que si la matriz V

$$V = \begin{pmatrix} B_{21} & B_{21}x_2 \\ H' & A_{22}y_1 \end{pmatrix},$$

tiene rango k, entonces la suma sub-directa es inversa positiva.

Por otra parte, sea ahora la matriz inversa positiva

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & 0 \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}.$$

Desde luego, M_{11}, M_{22}, y M_{33} son matrices inversa positiva. Consideremos las matrices

$$A = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

y

$$B = \begin{pmatrix} M_{22} & 0 \\ M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}$$

de modo que su suma sub-directa tendrá la forma:

$$C = A \oplus_k B = \begin{pmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ M_{21} & 2M_{22} & 0 \\ 0 & M_{32} & M_{33} \end{pmatrix}.$$

Se puede demostrar que si $M_{21} \leq 0$ y $M_{32} \leq 0$ entonces la suma sub-directa es inversa positiva.

4. Relación de las matrices inversa positiva con otras clases de matrices

Dada $A = (a_{ij})$ una matriz de tamaño $n \times n$, denotamos por $A(i|j)$ la submatriz de A resultante de eliminar la fila i y la columna j. Denotamos por S la matriz diagonal $S = diag(1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^{n-1})$ y por S_n el subconjunto de las matrices de tamaño $n \times n$

$$S_n = \{A = (a_{ij}) \ : \ sign(a_{ij}) = (-1)^{i+j} \ \text{ ó } \ a_{ij} = 0\}$$

4.1. Matrices totalmente no negativas

En los siguientes resultados establecemos relaciones entre las matrices totalmente no negativas, totalmente positivas, etc., y las matrices inversa positiva.

Proposición 4.1 *Sea $A = (a_{ij})$ una matriz real, de tamaño $n \times n$, totalmente no negativa. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es inversa positiva.*
2. *$det A(i|j) = 0$, si $i + j$ es impar.*
3. *A^{-1} es una matriz diagonal, totalmente no negativa.*

Proposición 4.2 *Dada una matriz real A, de tamaño $n \times n$, si A^* es totalmente no negativa, entonces A es inversa positiva. El recíproco, en general, no es cierto.*

Proposición 4.3 *Consideremos las siguientes afirmaciones para una matriz A de tamaño $n \times n$.*

(1) A^* es totalmente no negativa.

(2) A es tridiagonal.

(3) A es inversa positiva y $A \in S_n$

Se puede demostrar que $(1) + (2) \Rightarrow (3)$, $(2) + (3) \Rightarrow (1)$, *pero* $(1) + (3) \not\Rightarrow (2)$.

La última afirmación queda reflejada en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1 La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}0535 & -0{,}2739 & 0{,}1264 \\ -0{,}2739 & 1{,}4045 & -0{,}6995 \\ 0{,}1264 & -0{,}6995 & 1{,}3485 \end{pmatrix},$$

cumple las condiciones (1) y (3) anteriores, pero no es tridiagonal.

Proposición 4.4 *Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ tridiagonal. Si A es una P-matriz no negativa, entonces SAS es inversa positiva.*

En los dos siguientes resultados vamos a suponer que la matriz tiene un patrón 'checkerboard'.

Proposición 4.5 *Sea A una $n \times n$ matriz totalmente negativa (totalmente positiva), con un patrón 'checkerboard'. Entonces SAS es inversa positiva.*

Proposición 4.6 *Si A una $n \times n$, no singular, totalmente no negativa (totalmente no positiva), con un patrón 'checkerboard'. Entonces SAS es inversa positiva.*

4.2. Matrices monótonas

Proposición 4.7 *Sea A una Z-matriz real de tamaño $n \times n$. Entonces A es inversa positiva si y sólo si A es monótona.*

Proposición 4.8 *Sea A una matriz real de tamaño $n \times n$. Entonces si A es inversa positiva entonces A es monótona.*

Creemos que el recíproco del último resultado es falso.

Referencias

[1] T. Ando, *Totally positive matrices.* Linear Algebra and its Applications, 90 (1987), 165-219.

[2] A. Berman, R. Plemmons, *Nonnegative matrices in the Mathematical Sciences*, Siam, 1994.

[3] S. Fallat, C. Johnson, *Sub-direct sums and positivity classes of matrices.* Linear Algebra and its Applications, 288 (1999), 149-173.

[4] F.R. Gantmacher and M.G. Krein, *Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems*, AMS, Providence, 2002. *Oszillationsmatrizen, Oszillationskerne und kleine Schwingungen Mechanister Systeme*, Akademie-Verlag, Berlin, 1960.