XX Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
X Congreso de Matemática Aplicada
Sevilla, 24-28 septiembre 2007
(pp. 1–8)

Regularidad anisótropa de un problema de Ecuaciones Primitivas.

D. Bresch[1], F. Guillén-González[2],
M. A. Rodríguez-Bellido[2]

[1] *Laboratoire de Modélisation et Calcul, Université Joseph-Fourier, Grenoble (France) E-mail:* `didier.bresch@imag.fr`.
[2] *Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, E-41080 Sevilla. E-mails:* `guillen@us.es`, `angeles@us.es`.

Palabras clave: Regularidad, flujos geofísicos, hipótesis de techo rígido, ecuaciones hidrostáticas.

Resumen

En este trabajo estudiamos la regularidad de las Ecuaciones Primitivas (EP) del Océano, con condición de contorno sobre $\partial_z \mathbf{v}$ en el fondo, siendo $\mathbf{v}$ la velocidad horizontal y z la variable de espacio vertical. Dicha condición no es estándar cuando el fondo no es plano, ya que entonces $\partial_z \mathbf{v}$ no coincide con la derivada normal asociada al operador de segundo orden de (EP) que es de tipo Laplaciano.

En primer lugar demostramos que, para determinadas configuraciones del fondo del dominio, hay existencia de solución débil global en tiempo. En segundo lugar, reformulando el problema con las nuevas incógnitas $\partial_z \mathbf{v}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ (siendo $\bar{\mathbf{v}}$ la media vertical de $\mathbf{v}$), demostramos de manera simultánea que $\partial_z \mathbf{v}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ poseen regularidad $\mathbf{H}^2$ en espacio para datos pequeños. Finalmente, analizamos la regularidad de orden superior para ambas velocidades, obteniendo que $(\partial_z \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}})$ poseen regularidad de tipo $\mathbf{H}^3$ en espacio, lo que a nuestro conocimiento son los primeros resultados de regularidad superior a $\mathbf{H}^2$ para (EP).

1. Introducción y resultados

Las Ecuaciones Primitivas (EP) son un sistema en velocidad-presión que modelan gran cantidad de flujos geofísicos 3D, en particular el movimiento del agua en el Océano inducido por la velocidad del viento en superficie y las fuerzas centrípetas y de Coriolis. Se obtienen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes (NS) con viscosidad anisótropa (turbulenta), suponiendo dos simplificaciones importantes: la presión hidrostática y la hipótesis de techo rígido (superficie del agua fija) [6, 5].

Supongamos $T > 0$ el instante final de tiempo y $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ el dominio oceánico

$$\Omega = \{(\mathbf{x}, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \mathbf{x} \in S, \ -h(\mathbf{x}) < z < 0\},$$

donde $S \subset \mathbb{R}^2$ es el dominio de la superficie y $h : S \to \mathbb{R}$ es la función que determina el fondo. La frontera de Ω es $\partial\Omega = \Gamma_s \cup \Gamma_b \cup \Gamma_l$ siendo Γ_s la superficie del océano, Γ_b el fondo y Γ_l las paredes laterales (talud oceánico).

Un problema modelo que retenga las principales dificultades analíticas se reduce a encontrar una velocidad horizontal $\mathbf{v} = (v_1, v_2) : \ (t; \mathbf{x}, z) \in (0,T) \times \Omega \to \mathbb{R}^2$ y una presión superficial $p : \ (t; \mathbf{x}) \in (0,T) \times S \to \mathbb{R}$, tales que:

$$(\mathrm{EP}) \begin{cases} \partial_t \mathbf{v} - \Delta \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v} + v_3 \, \partial_z \mathbf{v} + \nabla_{\mathbf{x}} p \ = \ \mathbf{f} \ \text{ en } (0,T) \times \Omega, \\ \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \langle \mathbf{v} \rangle \ = \ 0 \ \text{ en } (0,T) \times S, \quad \mathbf{v}|_{t=0} \ = \ \mathbf{v}_0 \ \text{ en } \Omega, \\ \partial_z \mathbf{v}|_{\Gamma_s \cup \Gamma_b} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}|_{\Gamma_l} = \mathbf{0} \ \text{ en } (0,T), \end{cases}$$

siendo $v_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x}, s) \, ds$ la velocidad vertical. Denotamos por $\nabla_{\mathbf{x}}$ el gradiente horizontal y por Δ el laplaciano tridimensional. con $\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}) = \int_{-h(\mathbf{x})}^0 \mathbf{v}(\mathbf{x}, z) \, dz$. Finalmente, $\langle \mathbf{v} \rangle(\mathbf{x}) = \int_{-h(\mathbf{x})}^0 \mathbf{v}(\mathbf{x}, z) \, dz$

La regularidad de este sistema presenta dificultades debido a la singularidad de la convección vertical $v_3 \, \partial_z \mathbf{v}$. Son varios los autores que han estudiado la regularidad débil ($\mathbf{v} \in L^2(0,T; \mathbf{H}^1(\Omega))$) de (EP) (ver p.e. [5]), la regularidad fuerte para el sistema lineal estacionario ([7]), o la regularidad fuerte ($\mathbf{v} \in L^2(0,T; \mathbf{H}^2(\Omega))$) del sistema no lineal (ver p.e. [3]). En [3, 4] se usan "estimaciones anisótropas", aprovechando la particular estructura de las (EP), donde $\partial_z v_3$ es regular pero no $\nabla_{\mathbf{x}} v_3$.

En este trabajo estudiamos la regularidad de las Ecuaciones Primitivas (EP) con la condición de contorno sobre $\partial_z \mathbf{v}$ en el fondo. Dicha condición no es estándar cuando el fondo no es plano, ya que entonces $\partial_z \mathbf{v}$ no coincide con la derivada normal asociada al operador de segundo orden de las (EP) que es de tipo Laplaciano. Sin embargo, estas condiciones de contorno sobre $\partial_z \mathbf{v}$ son usadas por varios autores para la implementación de esquemas numéricos (p.e. [2]).

En §2 demostramos que, para determinadas configuraciones del dominio, hay existencia de solución débil global en tiempo. En §3, vemos que la derivada vertical de $\mathbf{v}$, $\partial_z \mathbf{v}$, es fácil demostrar que posee regularidad débil gracias a las condiciones de contorno consideradas. Como consecuencia, en §4.3 y reformulando el problema con las nuevas incógnitas $\partial_z \mathbf{v}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ (siendo $\bar{\mathbf{v}}$ la media vertical de $\mathbf{v}$), demostramos simultáneamente que $\partial_z \mathbf{v}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ poseen regularidad $L^2(0,T; \mathbf{H}^2(\Omega))$ para datos pequeños. Finalmente, en §4.4 analizamos la regularidad de orden superior para ambas velocidades, $(\partial_z \mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}) \in L^2(0,T; \mathbf{H}^3(\Omega))$, lo que a nuestro conocimiento son los primeros resultados de regularidad superior a $\mathbf{H}^2(\Omega)$ para (EP).

2. Regularidad débil del sistema

Teorema 1: *Sea* $\mathbf{f} \in L^2(0,T; \mathbf{L}^2(\Omega))$. *Supongamos que, o bien* $h \in W^{2,3}(S)$ *y se verifica la condición de disipación* (2), *o bien* $h \in H^2(S)$ *y se verifica la condición de* *disipación* (3) *junto con* $\nabla_{\mathbf{x}} h \cdot \mathbf{n}_{\partial S} = 0$. *Entonces, el Problema* (EP) *posee solución débil* $\mathbf{v} \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))$.

Si consideramos una función h más regular, $h \in W^{2,q}(S)$ para $q > 2$, también podemos concluir el mismo resultado sin imponer condiciones adicionales de disipación. Sin embargo, en ese caso, el sistema no es físicamente aceptable al no ser disipativo.

Esquema de la prueba: Tomando $\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{v}$ como función test para (EP), obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\, d\Omega - \langle \partial_j(\mathbf{v}|_{\Gamma_b}), \partial_j h\, \mathbf{v}|_{\Gamma_b}\rangle_{H^{-1/2}(S),H^{1/2}(S)}. \tag{1}$$

Para obtener la acotación en las normas débiles, la principal dificultad está en la estimación del último término. Podemos optar por dos opciones: 1) acotar directamente de la forma:

$$\begin{aligned}\Big|\langle \partial_j(\mathbf{v}|_{\Gamma_b}),\, \partial_j h(\mathbf{x})\, \mathbf{v}|_{\Gamma_b}\rangle_{H^{-1/2}(S),H^{1/2}(S)}\Big| &\le \|\partial_j(\mathbf{v}|_{\Gamma_b})\|_{H^{-1/2}(S)}\|\partial_j h(\mathbf{x})\,\mathbf{v}|_{\Gamma_b}\|_{H^{1/2}(S)}\\ &\le C\|\mathbf{v}|_{\Gamma_b}\|^2_{H^{1/2}(S)}\,\|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1,3}(S)} \le C\|\mathbf{v}\|^2_{H^1(\Omega)}\,\|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1,3}(S)}\end{aligned}$$

donde para obtener una desigualdad de energía de tipo disipativo impondremos la **condición de disipación**:

$$\|\nabla_{\mathbf{x}} h\|_{W^{1,3}(S)} <<; \tag{2}$$

o bien 2) integrar por partes el término en dualidad (usando resultados de [3, 4] y teniendo en cuenta que $\mathbf{H}^{1/2}(\Omega) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\partial\Omega)$), obteniendo:

$$\begin{aligned}|-\langle \partial_j(\mathbf{v}|_{\Gamma_b}), \partial_j h\, \mathbf{v}|_{\Gamma_b}\rangle_{H^{-1/2}(S),H^{1/2}(S)}| &= \left|\int_S |\mathbf{v}|_{\Gamma_b}|^2 \Delta_{\mathbf{x}} h\, d\mathbf{x}\right| \le \|\mathbf{v}|_{\Gamma_b}\|^2_{L^4(S)}\|\Delta_{\mathbf{x}} h\|_{L^2(S)}\\ &\le C\left[\|\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} + (1+2\,\|\nabla_{\mathbf{x}} h\|^2_{L^\infty(S)})\,\|\partial_z \mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\right]\,\|\Delta_{\mathbf{x}} h\|_{L^2(S)}\end{aligned}$$

e imponiendo la otra **condición de disipación**:

$$\|\Delta_{\mathbf{x}} h\|_{L^2(S)} << . \tag{3}$$

■

3. Regularidad débil de $\partial_z \mathbf{v}$

Teorema 2: *Supongamos* $\partial_z \mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ *y la siguiente condición de pequeñez sobre la velocidad inicial:*

$$\|\partial_z \mathbf{v}(0)\|_{L^2(\Omega)} < M_0 = \frac{M}{2}e^{-A}, \tag{4}$$

siendo $A > 0$ *una constante suficientemente grande y* $M > 0$ *una constante* ($M < 1$) *suficientemente pequeña y*

$$C\,\|\partial_z \mathbf{f}\|_{H^{-1}(\Omega)} < M_0, \tag{5}$$

Entonces, $\partial_z \mathbf{v}$ *posee* **regularidad débil**, *es decir,* $\partial_z \mathbf{v} \in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))$.

Esquema de la prueba: La particular estructura de las condiciones de contorno facilita el estudio de la regularidad en la dirección vertical, esto es, de $\partial_z \mathbf{v}$. Para ello, elegimos una base especial como funciones test. Aunque un estudio más riguroso se puede ver en [1], razonando formalmente corresponde a tomar funciones del tipo $-\partial^2_{zz}\mathbf{v}$ donde:

$$-\partial^2_{zz}\mathbf{v} = \lambda_i\,\mathbf{v} \quad \text{en } \Omega, \qquad \mathbf{v}|_{\Gamma_l} = \mathbf{0}, \qquad \partial_z\mathbf{v}|_{\Gamma_s\cup\Gamma_b} = \mathbf{0}.$$

Estimando convenientemente, usando las desigualdades anisótropas de [3, 4], obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\|\partial_z\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)} &+ \left(2 - \|\partial_z\mathbf{v}\|^{2/3}_{L^2(\Omega)}\right)\|\partial_z\mathbf{v}\|^2_{H^1(\Omega)} \\ &\le C\left(\|\partial_z\mathbf{f}\|^2_{H^{-1}(\Omega)} + \|\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\|\partial_z\mathbf{v}\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \end{aligned} \tag{6}$$

Llamando $y(t) = \|\partial_z\mathbf{v}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$, usando que $\partial_z\mathbf{f} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$ y la regularidad ya conocida de $\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v} \in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$, escribimos para $a(t) = C\|\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{v}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$, $b(t) = C\|\partial_z\mathbf{f}(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)}$:

$$y'(t) + (2 - y(t)^{1/3})\|\partial_z\mathbf{v}(t)\|^2_{H^1(\Omega)} \le a(t)y(t) + b(t).$$

Es fácil demostrar que si se verifica (4) y $A = \|a\|_{L^1(0,T)}$ (en (4)), entonces la hipótesis (5) implica que $\|\partial_z\mathbf{v}(t)\|_{L^2(\Omega)} < M$, para todo $t \in [0,T]$. Usando que $\partial_z\mathbf{v}$ en $L^2(\Omega)$ es una cantidad suficientemente pequeña, concluimos la regularidad de $\partial_z\mathbf{v}$ en $L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))$. ■

4. Regularidad fuerte y “muy fuerte”

La obtención de regularidad superior para el sistema (EP) con las condiciones de contorno no estándar sobre $\partial_z\mathbf{v}$ plantea un problema a la hora de elegir convenientemente la base de funciones test. Normalmente, se consideran las autofunciones del problema de Stokes asociado, del que se conoce la existencia de solución al ser un operador lineal autoadjunto. En el caso de las condiciones de contorno consideradas en este trabajo, la existencia de dichas autofunciones no está garantizada, de manera que debemos buscar un método de resolución alternativo.

Basándonos en que, gracias al tipo de condiciones de contorno consideradas $\partial_z\mathbf{v}$ es una derivada “especial”, nos planteamos el estudio del problema verificado por $\mathbf{v}$ como suma de dos: uno que capturaría “la parte vertical”de $\mathbf{v}$, y otro que capturaría “la parte horizontal”. A continuación describimos dicha descomposición.

4.1. Descomposición del sistema

Las ecuaciones que satisface “la parte horizontal”$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \dfrac{1}{h(\mathbf{x})}\langle\mathbf{v}(\mathbf{x},z)\rangle$ son:

$$\left\{\begin{aligned} &\partial_t(h\bar{\mathbf{v}}) - \nabla_{\mathrm{x}}\cdot(h\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}) + (\nabla_{\mathrm{x}}h\cdot\nabla_{\mathrm{x}})\bar{\mathbf{v}} + \nabla_{\mathrm{x}}\cdot(h\bar{\mathbf{v}}\otimes\bar{\mathbf{v}}) + h\nabla_{\mathrm{x}}p \\ &\quad = \langle\mathbf{f}\rangle - \nabla_{\mathrm{x}}\cdot\langle\widetilde{\mathbf{v}}\otimes\widetilde{\mathbf{v}}\rangle - (\nabla_{\mathrm{x}}h\cdot\nabla_{\mathrm{x}})(\widetilde{\mathbf{v}}|_{\Gamma_b}) - \nabla_{\mathrm{x}}\cdot(\widetilde{\mathbf{v}}|_{\Gamma_b}\otimes\nabla_{\mathrm{x}}h), \quad \text{en } S\times(0,T), \\ &\nabla_{\mathrm{x}}\cdot(h\bar{\mathbf{v}}) = 0, \quad \text{en } S\times(0,T), \quad \bar{\mathbf{v}}|_{\partial S} = 0, \quad \bar{\mathbf{v}}|_{t=0} = \bar{\mathbf{v}}_0, \quad \text{en } \Omega. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

La parte vertical tiene como solución $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, z) = \partial_z \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, z)$ siendo $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, z) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, z) - \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ la solución del sistema:

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{\omega} - \Delta_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\omega} - \partial^2_{zz} \boldsymbol{\omega} + (\mathbf{v} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \boldsymbol{\omega} + v_3 \partial_z \boldsymbol{\omega} = \partial_z \mathbf{f} + (\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v})\, \boldsymbol{\omega} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla_{\mathbf{x}}) \mathbf{v} \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \boldsymbol{\omega}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{en } (0, T), \quad \boldsymbol{\omega}|_{t=0} = \partial_z \mathbf{v}_0 \quad \text{en } \Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Observemos que $\mathbf{v} = \widetilde{\mathbf{v}} + \bar{\mathbf{v}}$ donde $\langle \widetilde{\mathbf{v}} \rangle = 0$, siendo $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, z) = -\int_z^0 \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, s) ds + A(\mathbf{x})$ para $A(\mathbf{x}) = \frac{1}{h(\mathbf{x})} \int_{-h(\mathbf{x})}^0 (z + h(\mathbf{x}))\, \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, z)\, dz$ y $v_3(\mathbf{x}, z) = \int_z^0 \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, s) ds$.

Para justificar que la descomposición presentada aquí es válida, en [1] hacemos una identificación de $\mathbf{v}$ y $\bar{\mathbf{v}}+\widetilde{\mathbf{v}}$ (desde el punto de vista débil) demostrando que las formulaciones variacionales de ambas funciones son la misma.

4.2. Regularidad débil de $\bar{\mathbf{v}}$ y $\boldsymbol{\omega}$

Aunque gracias a la identificación entre $\mathbf{v}$ y $\bar{\mathbf{v}}+\widetilde{\mathbf{v}}$ este resultado ya ha sido demostrado, el hecho de estudiar la regularidad débil a través de la descomposición introduce algunas diferencias que comentamos aquí.

Para dicho estudio, tomamos como funciones test $\bar{\mathbf{v}}$ en (7) y $\boldsymbol{\omega}$ en (8) con idea de obtener desigualdades de energía para ambas funciones. Debido a la aparición de términos en $\boldsymbol{\omega}$ en la desigualdad para $\bar{\mathbf{v}}$ y de términos en $\bar{\mathbf{v}}$ en la desigualdad para $\boldsymbol{\omega}$, no podemos obtener la regularidad de ambas funciones separadamente sino que tenemos que sumar ambas desigualdades. Además, el tipo de desigualdad obtenida no es acotable sin imponer hipótesis de pequeñez sobre los datos. Concretamente, obtenemos $\bar{\mathbf{v}} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(S)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^1(S))$ y $\boldsymbol{\omega} \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega))$, imponiendo que las siguientes normas son pequeñas:

$$\|\bar{\mathbf{v}}(0)\|_{L^2(S)} = \|\frac{1}{h} \langle \mathbf{v}_0 \rangle\|_{L^2(S)},\ \|\boldsymbol{\omega}(0)\|_{L^2(\Omega)} = \|\partial_z \widetilde{\mathbf{v}}_0\|_{L^2(\Omega)},\ \|\langle \mathbf{f} \rangle\|_{L^2(S)},\ \|\partial_z \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{9}$$

Observemos que la hipótesis (9), relativa a la pequeñez de datos, reemplaza a las hipótesis del Teorema 1, correspondientes a una determinada forma de la función profundidad h.

4.3. Regularidad fuerte de $\bar{\mathbf{v}}$ y $\boldsymbol{\omega}$

Teorema 3: *Bajo hipótesis de pequeñez para* $\|\partial_z \mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)}$, $\|\langle \mathbf{f} \rangle\|_{L^2(S)}$, $\|\bar{\mathbf{v}}(0)\|_{H^1(\Omega)}$ *y* $\|\boldsymbol{\omega}(0)\|_{H^1(\Omega)}$, *las funciones* $(\bar{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\omega})$ *verifican la llamada* **regularidad fuerte**, *es decir,* $\bar{\mathbf{v}} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(S)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^2(S))$, $\partial_t \bar{\mathbf{v}} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(S))$ *y* $\boldsymbol{\omega} \in L^\infty(0, T; \mathbf{H}^1(\Omega)) \cap L^2(0, T; \mathbf{H}^2(\Omega))$, $\partial_t \boldsymbol{\omega} \in L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$.

Esquema de la prueba: Para estudiar la regularidad fuerte de $\boldsymbol{\omega}$, estudiamos el problema:

$$\{-\Delta \boldsymbol{\omega} = \lambda\, \boldsymbol{\omega} \quad \text{en } \Omega, \qquad \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \tag{10}$$

El operador asociado verifica la hipótesis del teorema de Hilbert-Schmidt, luego podemos encontrar una base de autofunciones. Buscamos entonces una desigualdad que garantice la acotación de $\boldsymbol{\omega}$ en las normas fuertes $L^\infty(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))\cap L^2(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))$, para lo que elegimos entonces $-\Delta\boldsymbol{\omega}$ como funciones test en la formulación variacional de (8). Conseguimos una desigualdad del tipo:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\Delta\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2(\Omega)} &\le C(h)\,\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|_{L^2(\Omega)}\|\Delta\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2(\Omega)} \\ +a\left(\|\bar{\mathbf{v}}\|^2_{H^1(S)}, \|\boldsymbol{\omega}\|^2_{H^1(\Omega)}\right)\|\nabla\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2(\Omega)} &+ C\,\|\partial_z\mathbf{f}\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega (\nabla_{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{v})\,\boldsymbol{\omega}\cdot\Delta\boldsymbol{\omega}\,d\Omega\end{aligned} \tag{11}$$

Para controlar el primer término a la derecha de (11) necesitamos imponer pequeñez sobre los datos, y el último no es controlable sin conocer una mayor regularidad de $\bar{\mathbf{v}}$. Por tanto, como en §4.2, parece lógico buscar una desigualdad para las normas fuertes de $\bar{\mathbf{v}}$.

Para ello, consideramos el problema de tipo Stokes:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}) + h\,\nabla_{\mathbf{x}}p &=& \mathbf{g} & \text{en } S, \\ \nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\bar{\mathbf{v}}) &=& 0 & \text{en } S, \\ \bar{\mathbf{v}} &=& 0 & \text{sobre } \partial S, \end{array}\right. \tag{12}$$

que nos ayudará a considerar adecuadas funciones test para (7) en dicho empeño.

Llamaremos B al operador que resuelve el problema (12), tal que a cada $\mathbf{g}\in L^2(S)$ le asocia la solución de (12), $\bar{\mathbf{v}}\in D(B)\subseteq H^2(S)$. El operador $B:\mathcal{H}\to D(B)$ se inyecta de manera compacta en $\mathcal{H}$, siendo $\mathcal{H}=\{\mathbf{g}/\,h\,\mathbf{g}\in\mathbf{L}^2(S),\ \nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\mathbf{g})=0,\ h\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{n}_{\partial S}=0\}$, es decir, $\mathcal{H}=\{\mathbf{g}:\ h\,\mathbf{g}\in\mathbf{H}(S)\}$ dotado del producto escalar:

$$(\mathbf{f},\mathbf{g})_h = \int_S h\,\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}\,d\mathbf{x},$$

siendo $h=h(\mathbf{x})$ la función profundidad. Para una función $\mathbf{u}$ definimos su proyección sobre $\mathcal{H}$ respecto a $(\cdot,\cdot)_h$ como:

$$P_{\mathcal{H},h}(\mathbf{u})=\mathbf{v} \quad\Leftrightarrow\quad \{\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\mathbf{v})=0, \quad (\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{w})_h=0, \quad \forall\mathbf{w}\in\mathcal{H}\}$$

Bajo las hipótesis del Teorema de Hilbert-Schmidt, $\mathcal{H}$ es un espacio separable y, en consecuencia, podemos obtener una base espectral.

Una vez demostrada dicha existencia, consideraremos como funciones test para (7) aquellas del tipo $P_{\mathcal{H},h}(-\frac{1}{h}\,\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}))$. Observemos que (ver detalles en [1]) gracias a que $P_{\mathcal{H},h}(h\bar{\mathbf{v}})=\bar{\mathbf{v}}$:

$$\int_S \partial_t(h\,\bar{\mathbf{v}})\cdot P_{\mathcal{H},h}(-\frac{1}{h}\,\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}))\,d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|h^{1/2}\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}\|^2_{L^2(S)}.$$

Por otra parte, gracias a las propiedades del operador proyección:

$$-\int_S \nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}})\cdot P_{\mathcal{H},h}(-\frac{1}{h}\,\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}))\,d\mathbf{x} = \|h^{1/2}\,P_{\mathcal{H},h}(-\frac{1}{h}\,\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}))\|^2_{L^2(S)}$$

La presión desaparece gracias a:

$$\begin{aligned}\int_S h\,\nabla_{\mathbf{x}}p\cdot P_{\mathcal{H},h}(-\frac{1}{h}\,\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}))\,d\mathbf{x} &= -\int_S p\,\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,P_{\mathcal{H},h}(-\frac{1}{h}\,\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}})))\,d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\partial S} p\,h\,P_{\mathcal{H},h}(\frac{1}{h}\,\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}))\cdot\mathbf{n}\,d\sigma_{\mathbf{x}} = 0\end{aligned}$$

El resto de los términos en Ω son fáciles de acotar teniendo en cuenta que las normas $\|\bar{\mathbf{v}}\|_{\mathbf{H}^2(S)}$ y $\|P_{\mathcal{H},h}(-\frac{1}{h}\,\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}))\|_{L^2(S)}$ son equivalentes; y si además $h_{\min}\le h\le h_{\max}$, entonces $\|h^{1/2}\,P_{\mathcal{H},h}(-\frac{1}{h}\,\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}))\|_{L^2(S)}$ es también equivalente a $\|\bar{\mathbf{v}}\|_{H^2(S)}$. Para los términos en S, usamos además resultados de Teoría de Interpolación en espacios de Sobolev junto con estimaciones hechas en [3, 4]. Todo ello nos lleva a una desigualdad del tipo:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\|h^{1/2}\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}\|^2_{L^2(S)}+\|h^{1/2}\,P_{\mathcal{H},h}(-\frac{1}{h}\,\nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}))\|^2_{L^2(S)}\\&\quad\le C\,a\left(\|\bar{\mathbf{v}}\|_{H^1(S)},\nabla_{\mathbf{x}}h\right)\|\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}\|^2_{L^2(S)}+C\,b\left(\|\widetilde{\mathbf{v}}\|_{H^2(\Omega)},\Delta_{\mathbf{x}}h,\|\langle\mathbf{f}\rangle\|^2_{L^2(S)}\right),\end{aligned}\tag{13}$$

en las que hay términos a la derecha que dependen de la regularidad fuerte de $\widetilde{\mathbf{v}}$ (que aún no conocemos). Sumando entonces (11) y (13), obtenemos una desigualdad que bajo las hipótesis del Teorema 3 permite obtener estimaciones en normas fuertes para $\boldsymbol{\omega}$ y $\bar{\mathbf{v}}$.

La regularidad para las derivadas en tiempo $\partial_t\boldsymbol{\omega}\in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))$ y $\partial_t\bar{\mathbf{v}}\in L^2(0,T;\mathbf{L}^2(S))$ se obtiene directamente de las ecuaciones (8) y (7), respectivamente, usando la regularidad fuerte obtenida. ■

4.4. Regularidad muy fuerte de $\bar{\mathbf{v}}$ y $\boldsymbol{\omega}$

Teorema 4: *Suponiendo más regularidad para los datos, las funciones* $(\bar{\mathbf{v}},\boldsymbol{\omega})$ *verifican la llamada* **regularidad muy fuerte**, *es decir,* $\bar{\mathbf{v}}\in L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2(S))\cap L^2(0,T;\mathbf{H}^3(S))$, $\partial_t\bar{\mathbf{v}}\in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(S))\cap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(S))$ *y* $\boldsymbol{\omega}\in L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))\cap L^2(0,T;\mathbf{H}^3(\Omega))$, $\partial_t\boldsymbol{\omega}\in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))\cap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega))$.

Esquema de la prueba: Esta vez, empezaremos obteniendo la regularidad para $\partial_t\boldsymbol{\omega}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ usando las estimaciones de tipo Ladyzhenskaya. Para ello, derivaremos los sistemas (8) y (7) respecto del tiempo, y tomaremos $\partial_t\boldsymbol{\omega}$ y $\partial_t\bar{\mathbf{v}}$ como funciones test, respectivamente en sus formulaciones variacionales correspondientes. Como antes, la obtención de desigualdades que permitan concluir la regularidad no es posible separadamente en $\boldsymbol{\omega}$ y $\bar{\mathbf{v}}$, sino sumando las desigualdades obtenidas en cada caso. De ese modo, para a, $b\in L^1(0,T)$ funciones que dependen de la regularidad de $\boldsymbol{\omega}$ y $\bar{\mathbf{v}}$ conocida hasta el momento, obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}&\left(\|\partial_t\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2(\Omega)}+\|h^{1/2}\,|\partial_t\bar{\mathbf{v}}|\|^2_{L^2(S)}\right)+\left(\|\partial_t\boldsymbol{\omega}\|^2_{H^1(\Omega)}+\|h^{1/2}\,|\nabla_{\mathbf{x}}(\partial_t\bar{\mathbf{v}})|\|^2_{L^2(S)}\right)\\ \le\;&(a_1(t)+a_2(t))\left(\|\partial_t\bar{\mathbf{v}}\|^2_{L^2(S)}+\|\partial_t\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2(\Omega)}\right)+b(t),\end{aligned}$$

lo que permite concluir gracias al Lemma de Gronwall la regularidad deseada. Notemos que, en este caso, la regularidad se obtiene sin hipótesis de pequeñez para los datos (adicionales a las ya necesarias para regularidad inferior).

Para demostrar que $\boldsymbol{\omega}\in L^2(0,T;\mathbf{H}^3(\Omega))$, tomamos $\Delta^2\boldsymbol{\omega}$ como función test en (8), siendo $\boldsymbol{\omega}$ la solución del problema:

$$\Delta^2\boldsymbol{\omega}=\lambda^2\boldsymbol{\omega}\text{ en }\Omega,\qquad\boldsymbol{\omega}|_{\partial\Omega}=\mathbf{0},\qquad\Delta\boldsymbol{\omega}|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}.\tag{14}$$

Observemos que las autofunciones del problema:

$$\Delta\boldsymbol{\omega}=\lambda\boldsymbol{\omega}\text{ en }\Omega,\qquad\boldsymbol{\omega}|_{\partial\Omega}=\mathbf{0}.$$

verifican, en particular, (14). De ese modo conseguimos demostrar que $\|\nabla(\Delta\boldsymbol{\omega})\|^2_{L^2(\Omega)} \in L^1(0,T)$, lo que gracias a las condiciones de contorno permite concluir que $\boldsymbol{\omega} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^3(\Omega))$. La regularidad $\boldsymbol{\omega} \in L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))$ se deduce del siguiente hecho:

$$\frac{d}{dt}\|\Delta\boldsymbol{\omega}\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\langle\Delta\boldsymbol{\omega}, \Delta(\partial_t\boldsymbol{\omega})\rangle = -2\langle\nabla(\Delta\boldsymbol{\omega}), \partial_t(\nabla\boldsymbol{\omega})\rangle$$

para cada elemento $\boldsymbol{\omega}$ de la base espectral de (14), junto con la acotación:

$$\int_0^T |\langle\nabla(\Delta\boldsymbol{\omega}), \partial_t(\nabla\boldsymbol{\omega})\rangle| dt \le C\int_0^T \|\boldsymbol{\omega}\|_{H^3(\Omega)}\|\partial_t\boldsymbol{\omega}\|_{H^1(\Omega)}\, dt \le \|\boldsymbol{\omega}\|_{L^2(H^3(\Omega))}\|\partial_t\boldsymbol{\omega}\|_{L^2(H^1(\Omega))}.$$

La regularidad de $\bar{\mathbf{v}}$ en $L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2(S))$ se demuestra de forma similar a la obtención de $\bar{\mathbf{v}} \in L^\infty(0,T;\mathbf{H}^1(S)) \cap L^2(0,T;\mathbf{H}^2(S))$: tomamos $P_{\mathcal{H},h}(-\frac{1}{h}\nabla_{\mathbf{x}} \cdot (h\,\nabla_{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{v}}))$ como función test en (7), pero esta vez tratamos de forma distinta el término en $\partial_t(h\bar{\mathbf{v}})$, que se estima directamente aprovechando la regularidad ya conocida para $\partial_t\bar{\mathbf{v}}$. De ese modo, conseguimos demostrar que $\|\bar{\mathbf{v}}\|^2_{H^2(S)}$ está acotada en $L^\infty(0,T)$ y, gracias a las condiciones de contorno, que $\bar{\mathbf{v}} \in L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2(S))$.

La obtención de $\bar{\mathbf{v}}$ en $L^2(0,T;\mathbf{H}^3(S))$ sigue de reescribir el sistema (7) como el siguiente problema de Stokes 2D:

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta_{\mathbf{x}}(h\,\bar{\mathbf{v}}) + \nabla_{\mathbf{x}}(h\,p) &=& \mathbf{F} & \text{en } (0,T)\times S,\\ \nabla_{\mathbf{x}}\cdot(h\,\bar{\mathbf{v}}) &=& 0 & \text{en } (0,T)\times S,\\ \bar{\mathbf{v}} &=& \mathbf{0} & \text{sobre } (0,T)\times \partial S, \end{array}\right.$$

donde:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{F} &=& \langle\mathbf{f}\rangle + p\,\nabla_{\mathbf{x}}h - 2(\nabla_{\mathbf{x}}h\cdot\nabla_{\mathbf{x}})\bar{\mathbf{v}} - (\Delta_{\mathbf{x}}h)\,\bar{\mathbf{v}} - \nabla_{\mathrm{x}}\cdot(h\bar{\mathbf{v}}\otimes\bar{\mathbf{v}}) - \nabla_{\mathrm{x}}\cdot\langle\widetilde{\mathbf{v}}\otimes\widetilde{\mathbf{v}}\rangle \\ &-& (\nabla_{\mathrm{x}}h\cdot\nabla_{\mathrm{x}})(\widetilde{\mathbf{v}}|_{\Gamma_b}) - \nabla_{\mathrm{x}}\cdot(\widetilde{\mathbf{v}}|_{\Gamma_b}\otimes\nabla_{\mathrm{x}}h) \end{array}$$

Así, si probamos que $\mathbf{F} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(S))$, los resultados de regularidad para el problema de Stokes permiten concluir que $\bar{\mathbf{v}} \in L^2(0,T;\mathbf{H}^3(S))$. Para ello, imponemos $\langle\mathbf{f}\rangle \in L^2(0,T;\mathbf{H}^1(S))$, junto con $\nabla_{\mathbf{x}}h \in L^\infty(S)$, $D^2h \in L^4(S)$ y que gracias a la regularidad ya conocida para $\mathbf{v}$, sabemos que $p \in L^\infty(0,T;H^1(S))$. ■

Agradecimientos

Los autores han sido parcialmente financiados por el proyecto MTM2006-07932.

Referencias

[1] D. Bresch, F. Guillén-González & M. A. Rodríguez-Bellido, *Vorticity formulation for Primitive Equations: strong regularity and asymptotic behavior.*. En preparación.

[2] V Casulli & E. Cattani, *Stability,Accuracy and Efficiency of a Semi-Implicit Method for Three-Dimensional Shallow Water Flow.* Computers Math. Applic., 27-4 (1994), 99-112.

[3] F. Guillén-González, N. Masmoudi & M. A. Rodríguez-Bellido, *Anisotropic estimates and strong solutions of the Primitive Equations.* Differential Integral Equations, 14-11 (2001), 1381-1408.

[4] F. Guillén-González & M. A. Rodríguez-Bellido, *On the uniqueness and regularity of the Primitive Equations imposing additional anisotropic regularity.* Appl. Math. Lett, 18 (2005) 783-789.

[5] J. L. Lions, R. Temam & S. Wang, *On the equations of the large scale Ocean.* Nonlinearity, 5 (1992), 1007-1053.

[6] J. Pedlosky, *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, 1987.

[7] M. Ziane, *Regularity Results for Stokes Type Systems*, Applicable Analysis, 58 (1995), 263-292.