

CARACTERIZACION DEL DAÑO EN ELEMENTOS ESTRUCTURALES TIPO BARRA DE MATERIAL COMPUESTO. DETERMINACION DE CARGA ULTIMA.

J Sánchez,, J. Cañas, F. París

Escuela Superior de Ingenieros Industriales
Dpto. Mecánica de Medios Continuos. Universidad de Sevilla. E.T.S.I.I.
Av. Reina Mercedes, s/n. 41012 Sevilla.

Resumen.- El objetivo principal del trabajo es realizar un análisis del comportamiento de barras de material compuesto hasta la carga última. Para ello, ha sido necesario establecer a partir de criterios de fallo de láminas, modelos de progresión de daño. Para comprobar la validez de los modelos propuestos se han realizado una serie de ensayos simples utilizando probetas con secuencias de apilado de $[0]_8$, $[(0/90)_2]_s$, and $[45/0/-45/90]_s$.

Abstract.- The main purpose of this work is to carry out an analysis about the behaviour of laminate composite beams proposing different failure progression medels. In order to allow the practical resolution of these cases, a user-friendly computer program has been developed. On the other hand, a test device has been designed and built to make tests with different graphite/epoxy composite beams. Specimens with stacking sequence $[0]_8$, $[(0/90)_2]_s$, and $[45/0/-45/90]_s$ have been tested. The validity of the failure progression models proposed can be then verified by using these tests.

1. INTRODUCCION.

El análisis de estructuras formadas por barras de material compuesto puede realizarse a partir de la teoría general de laminados mediante la introducción de hipótesis simplificativas acordes con la geometría peculiar del elemento estructural considerado.

Las ecuaciones de gobierno del elemento estructural, equilibrio, compatibilidad y comportamiento pueden ser combinadas en orden a la obtención de la matriz de rigidez elemental del elemento estructural. A partir de ella, se puede realizar un montaje análogo al que se realiza en cálculo matricial en orden a obtener la relación $F=K u$ de la cual se puede obtener el campo de desplazamientos y a partir de él los esfuerzos internos y tensiones..

Una vez determinado el estado tensional para la carga considerada, se emplea un criterio de fallo de lámina determinándose así el umbral de rotura de la primera lámina (RUL). El fallo de la lámina es modelado como una degradación de propiedades realizándose posteriormente un nuevo análisis tensional. El proceso se repite hasta la rotura del elemento estructural considerado (RUL).

2. TEORIA GENERAL DE VIGAS DE MATERIAL COMPUESTO

2.1.- Hipótesis adoptadas.

a) Las dimensiones que definen la sección transversal del elemento son pequeñas en comparación a la longitud

b) Se admite que la sección permanece plana después de la deformación

c) Desplazamientos y rotaciones pequeñas.

d) No existe deslizamiento relativo entre las láminas.

e) Las cargas actuan en el plano del elemento y se admite que actuan de forma estática o cuasiestática creciendo proporcionalmente hasta la carga última.

f) Solo se considera deformación normal a la sección transversal y tensión tangencial en el plano de la sección, variando esta última parabólicamente.

2.2. Ecuaciones de equilibrio

Supondremos un estado de cargas linealmente repartido a lo largo de toda la longitud del elemento estructural (L) y actuando en dirección de la barra y/o perpendicular a ella: Se tomarán como magnitudes estáticas internas los esfuerzos internos en el extremo i. Los esfuerzos en el extremo j se pueden obtener por aplicación de las ecuaciones de la estática.

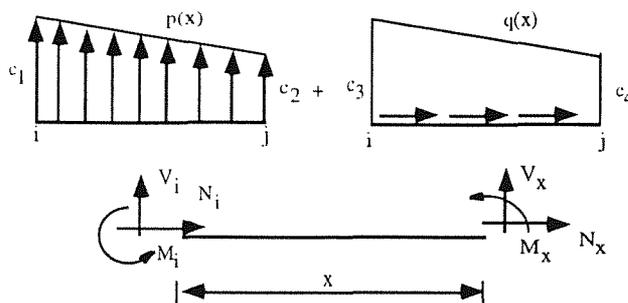


Fig. 1.- Estado de cargas y definición de esfuerzos internos.

$$\begin{aligned}
 N_j &= -N_i - \frac{L}{2}(c_3 + c_4) \\
 V_j &= -V_i - \frac{L}{2}(c_1 + c_2) \\
 M_j &= -M_i + V_i L + c_1 \frac{L^2}{2} + c_2 \frac{L^2}{6}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Estas tres ecuaciones pueden ser escritas en forma matricial:

$$Q_j = \underline{C} Q_i + \underline{f} \tag{2}$$

siendo Q_i / Q_j los esfuerzos internos en los extremos i/j , \underline{C} la matriz de equilibrio y \underline{f} el vector de cargas externas.

2.3. Ecuaciones de compatibilidad

De acuerdo a las hipótesis adoptadas, las relaciones ϵ - u se reducen a :

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x^0(x) &= \frac{\partial u_0}{\partial x} ; k_x^0 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\
 \epsilon_x &= \epsilon_x^0 + z k_x^0
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

siendo k_x^0 es la curvatura, ϵ_x^0 la deformación normal y u_0, w_0 y z los indicados en la figura 2 .

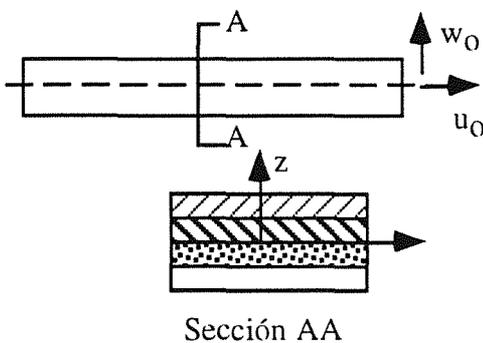


Fig. 2.- Definición de desplazamientos

2.4. Ley de comportamiento

La ley de comportamiento del laminado, se obtiene a partir de la ecuación de comportamiento de una lámina en los ejes principales del material (ejes de ortotropía 1,2).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{4}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 Q_{11} &= \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} ; Q_{22} = \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\
 Q_{12} &= \frac{\nu_{12} E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} ; Q_{66} = G_{12}
 \end{aligned}$$

La ecuación anterior puede ser también escrita en ejes geométricos (x,y)

$$\underline{\sigma}^{xy} = \underline{Q}^{xy} \underline{\epsilon}^{xy} \tag{5}$$

Si la lámina ocupa la posición k dentro del laminado y dista z de la línea media, la ecuación de comportamiento de acuerdo a las hipótesis adoptadas es :

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^k &= Q_{11}^{xy;k} \epsilon_x = Q_{11}^{xy;k} (\epsilon_x^0 + z k_x^0) \\
 Q_{11}^{xy;k} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta
 \end{aligned}$$

siendo θ el ángulo que forman las fibras de la lámina k con el eje x . Los esfuerzos internos N_x y M_x (axil y flector) en una sección de la barra se calculan como la resultante de las tensiones. Vendrán dados, por tanto, por las expresiones:

$$\begin{aligned}
 N_x &= b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = A_{11} \epsilon_x^0 - D_{11} k_x^0 \\
 M_x &= b \int_{-h/2}^{h/2} -\sigma_x z dz = -B_{11} \epsilon_x^0 - D_{11} k_x^0
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 A_{11} &= b \sum_{k=1}^n Q_{11}^{xy;k} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
 B_{11} &= \frac{b}{2} \sum_{k=1}^n Q_{11}^{xy;k} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \\
 D_{11} &= \frac{b}{3} \sum_{k=1}^n Q_{11}^{xy;k} (z_k^3 - z_{k-1}^3)
 \end{aligned}$$

Expresando las ecuaciones anteriores en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ M_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & B_{11} \\ -B_{11} & -D_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x^0 \\ k_x^0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

2.5. Matriz de rigidez

El conjunto de ecuaciones (2), (3) y (6) constituyen las ecuaciones de campo de la barra. Integrando y combinando adecuadamente estas ecuaciones, se pueden expresar los esfuerzos internos en función de los desplazamientos en los extremos de la barra, obteniendo así la matriz de rigidez local \underline{K} de la barra:

$$\underline{E} = \underline{K} \underline{u} + \underline{P}_{emp} \quad (7)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{L} & 0 & -\frac{B_{11}}{L} & -\frac{A_{11}}{L} & 0 & \frac{B_{11}}{L} \\ 0 & \frac{-12\Delta}{A_{11}L^3} & \frac{-6\Delta}{A_{11}L^2} & 0 & \frac{12\Delta}{A_{11}L^3} & \frac{-6\Delta}{A_{11}L^2} \\ \frac{B_{11}}{L} & \frac{-6\Delta}{A_{11}L^2} & \frac{4A_{11}D_{11} - 3B_{11}^2}{A_{11}L} & \frac{B_{11}}{L} & \frac{6\Delta}{A_{11}L^2} & \frac{2A_{11}D_{11} - 3B_{11}^2}{A_{11}L} \\ -\frac{A_{11}}{L} & 0 & \frac{B_{11}}{L} & \frac{A_{11}}{L} & 0 & -\frac{B_{11}}{L} \\ 0 & \frac{12\Delta}{A_{11}L^3} & \frac{6\Delta}{A_{11}L^2} & 0 & \frac{-12\Delta}{A_{11}L^3} & \frac{6\Delta}{A_{11}L^2} \\ \frac{B_{11}}{L} & \frac{-6\Delta}{A_{11}L^2} & \frac{2A_{11}D_{11} - 3B_{11}^2}{A_{11}L} & -\frac{B_{11}}{L} & \frac{6\Delta}{A_{11}L^2} & \frac{4A_{11}D_{11} - 3B_{11}^2}{A_{11}L} \end{bmatrix}$$

siendo $\Delta = B_{11}^2 - A_{11}D_{11}$.

A partir de la matriz de rigidez local de la barra, se realiza un montaje similar al del cálculo matricial de estructuras de barras isotrópicas obteniendo la ecuación de rigidez total de la estructura, cuya solución permite obtener los desplazamientos de los nudos a partir de las cargas externas. Conocidos los desplazamientos \underline{u} de los nudos, la ecuación (7) permite obtener los esfuerzos internos en los extremos de cada barra.

4. CRITERIO DE RESISTENCIA DE UNA LAMINA

Necesitamos definir un criterio que relacione el estado actual de tensiones con uno permitido. Este estado permitido representa a la vez el fin del comportamiento elástico lineal y la rotura.

Realizando un análisis de tensiones capa a capa y usando un criterio de rotura, puede obtenerse la rotura correspondiente a la primera lámina.

Los criterios utilizados más frecuentemente corresponden a ampliaciones de criterios similares usados para materiales isotrópicos. En este trabajo se han analizado cuatro criterios de rotura correspondientes a láminas unidireccionales:

- . Teoría de la máxima tensión.
- . Teoría de la máxima deformación.
- . Criterio de Tsai-Hill.
- . Criterio de Tsai-Wu.

Los resultados que se discutirán posteriormente han sido obtenidos utilizando la teoría de máxima tensión, con los otros criterios se obtuvieron para los casos analizados resultados similares. Este criterio establece que se producirá la fractura si alguna de las componentes tensionales sobrepasa su resistencia correspondiente; es decir, no se producirá la rotura si:

a) Estado de tracción: b) Estado de compresión:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} < X_t & \quad \left| \sigma_{11} \right| < X_c \\ \sigma_{22} < Y_t & \quad \left| \sigma_{22} \right| < Y_c \\ \left| \sigma_{12} \right| < S \end{aligned}$$

donde:

- X_t - Resistencia a tracción longitudinal.
- X_c - Resistencia a compresión longitudinal.
- Y_t - Resistencia a tracción transversal.
- Y_c - Resistencia a compresión transversal.
- S - Resistencia a cortadura.

Habitualmente, el cálculo de tensiones no se realizará en el sistema principal del material, sino en un sistema de coordenadas general para todas las capas del laminado. Por ello, es necesario establecer el criterio de rotura para unas direcciones arbitrarias:

$$\begin{aligned} \sigma_x < X_t / \cos^2 \theta & \quad \text{ó} \quad \sigma_x < X_c / \cos^2 \theta \\ \sigma_x < Y_t / \sin^2 \theta & \quad \text{ó} \quad \sigma_x < Y_c / \sin^2 \theta \\ \left| \sigma_x \sin \theta \cos \theta \right| < S \end{aligned}$$

4. RESISTENCIA ULTIMA DEL LAMINADO

La predicción de la rotura de la primera lámina (RPL) de un laminado se realiza a partir del estado tensional calculado y aplicando un criterio de rotura determinado. Ahora bien, si las cargas aplicadas sobrepasan la RPL, el laminado podrá o no soportar la carga adicional.

La resistencia última de un laminado (RUL) dependerá de cada estado de carga y se determina analizando el comportamiento de cada lámina hasta que no quede ninguna resistiendo. De esta forma, aunque una lámina falle, puede seguir aportando algo de resistencia al conjunto y, de cualquier modo, las láminas restantes siguen resistiendo.

Vamos a analizar, a continuación, la capacidad de soportar la carga post-RPL de una barra de laminado cualquiera sometida a una carga monótona creciente. Para ello, será necesario proponer una serie de modelos de daño del laminado. Dichos modelos para compuestos laminados de fibras continuas tratan cada lámina compuesta (fibra y matriz) como un único material homogéneo con un tipo de comportamiento antes de alcanzar el umbral de fallo y con otro comportamiento distinto después de dicho límite.

El uso de un modelo de daño consiste en la ampliación de la teoría general de laminados a la rotura final de la estructura. Es decir, tras realizar un modelado del daño (disminución de propiedades en la lámina que falló) causado por el fallo de alguna lámina, se puede volver a analizar la estructura degradada y realizar un nuevo análisis convencional de tensiones. Con este nuevo estado de tensiones se puede aplicar nuevamente el criterio de fallo y predecir la siguiente lámina de la estructura que alcanzará el fallo y continuar así hasta alcanzar el fallo total (RUL).

Para corroborar los diferentes modelos propuestos se ha analizado una serie de ejemplos simples cuyos resultados son analizados en el apartado siguiente. La propuesta de los distintos modelos se ha realizado basándose, fundamentalmente, en la comparación de los resultados experimentales con los resultados teóricos que se generaban al aplicar cada modelo. Así, tras analizar los dos primeros modelos (1 y 2), enunciados por Tsai [1], hemos propuesto en este trabajo [2] otros tres, con los que se pretende solventar las deficiencias encontradas en los anteriores. Estos cinco modelos se han denominado:

- 1) Modelo de eliminación de láminas
- 2) Modelo de degradación de la matriz
- 3) Modelo de degradaciones parciales sucesivas
- 4) Modelo de degradación y eliminación
- 5) Modelo de degradación de matriz y fibras

Es con este último modelo con el que mejores resultados se han obtenido. En él, se considera que cuando se sobrepasa el umbral de la rotura de la primera lámina (RPL) comienzan a aparecer fisuras en

dirección paralela a las fibras propagándose en el interior de la matriz y en la interfase fibra matriz. Este primer fallo de una lámina produce una disminución de las propiedades que vienen gobernadas fundamentalmente por la matriz (E_{22} , G_{12} y ν_{21}). Ahora bien, cuando se produce el segundo fallo, este no solo afecta a la matriz sino que también se produce un deterioro de las propiedades de las fibras. Dicho daño en las fibras puede considerarse como una reducción del módulo de Young longitudinal E_{11} y del módulo de Poisson ν_{12} . De esta forma se originaría un nuevo laminado en el que una lámina que ha fallado n veces tiene las siguientes propiedades:

$$E_{11} = R^{n-1} E_{11}^0 \quad ; \quad \nu_{12} = R^{n-1} \nu_{12}^0$$

$$E_{22} = R^n E_{22}^0 \quad ; \quad G_{12} = R^n G_{12}^0 \quad ; \quad \nu_{21} = R^n \nu_{21}^0$$

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{R^{n-1} E_{11}^0}{1 - R^{2n-1} \nu_{12}^0 \nu_{21}^0}$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{R^n E_{22}^0}{1 - R^{2n-1} \nu_{12}^0 \nu_{21}^0}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_{22}}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{R^{2n-1} \nu_{12}^0 E_{22}^0}{1 - R^{2n-1} \nu_{12}^0 \nu_{21}^0}$$

$$Q_{66} = G_{12} = R^n G_{12}^0$$

donde el superíndice 0 indica que son propiedades originales y R el factor de degradación.

El fallo último del laminado, para este modelo, se producirá cuando, tras haber fallado todas las láminas de una barra, se produce un nuevo fallo de alguna de ellas.

5. ANALISIS EXPERIMENTAL

Con el fin de comprobar la validez de los diferentes modelos de progresión del daño propuestos se han realizado una serie de ensayos simples utilizando probetas de un material grafito/epoxy fabricados por

HTC (High Technology Composites) de denominación AS-4/3501-6 con secuencias de apilado $[0]_8$ $[(0/90)_2]_s$ y $[45/0/-45/90]_s$. Las propiedades de rigidez y resistencia fueron obtenidas experimentalmente a partir de laminados unidireccionales.

El primero ensayo realizado fue el de tracción. En la tabla 1 pueden apreciarse los resultados experimentales comparados con los obtenidos utilizando los diferentes modelos. Como puede observarse, en el caso de laminado unidireccional el resultado coincide con el esperado dado que el fallo del laminado es el de la lámina. Para las restantes secuencias de apilado, se observa que los resultados son satisfactorios para el modelo de degradación de matriz y fibra (Modelo 5) utilizando un factor de degradación $R=0.5$.

	$[0]_8$	$[(0/90)_2]_s$	$[45/0/-45/90]_s$
Experimental	235	1230	730
(1)	2350	1176	588
R=0.3	2350	1207	335
(2) R=0.5	2350	1229	323
(3) R=0.3	2350	1207	921
R=0.3	2350	1207	603
(4) R=0.5	2350	1229	615
R=0.3	2350	1207	675
(5) R=0.5	2350	1229	696

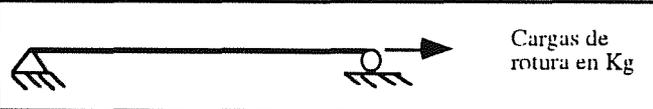


Tabla 1.- Resultados del ensayo de tracción.

Posteriormente se ha realizado un ensayo de flexión con viga biarticulada. Para ello se construyó el dispositivo mostrado en la figura 3.

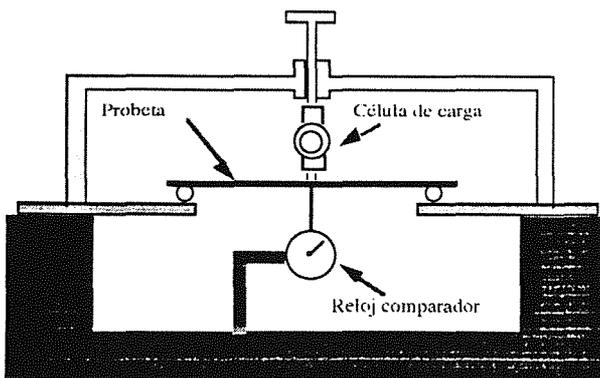


Fig. 3.- Dispositivo para ensayo de flexión

Los resultados experimentales, junto con los que se predicen con los diferentes modelos se suman en la tabla 2 para las tres secuencias de apilado utilizadas.

	$[0]_8$	$[(0/90)_2]_s$	$[45/0/-45/90]_s$
Experimental	20.7	14.1	8.3
(1)	18.8	13.0	7.3
R=0.3	18.9	13.2	3.2
(2) R=0.5	18.8	13.3	3.1
(3) R=0.3	74.6	69	48
R=0.3	18.9	13.2	7.4
(4) R=0.5	18.8	13.3	7.4
R=0.3	19.5	13.2	8.5
(5) R=0.5	21.6	15.2	8.7

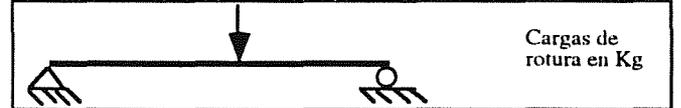


Tabla 2.- Resultados del ensayo de flexión

Nuevamente, se aprecia que el modelo de degradación de fibra y matriz con un factor $R=0.5$ es el que conduce a mejores resultados.

La evolución de la flecha con la carga para una de las secuencias analizadas usando el modelo 5 con diferentes factores de degradación, se muestra en la figura 4.

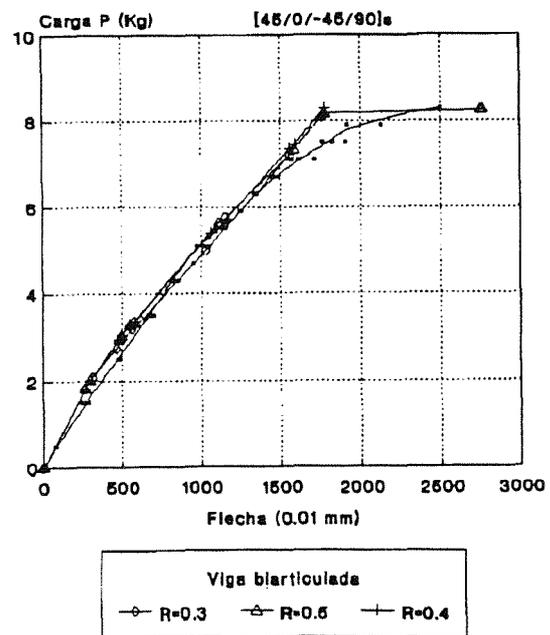


Fig. 4.- Ensayo de flexión. $[45/0/-45/90]_s$

Como puede observarse el acuerdo es satisfactorio.

6. CONCLUSIONES

Observando los buenos resultados obtenidos en los casos ensayados, se podría utilizar el análisis desarrollado en este trabajo para predecir el comportamiento de barras de material compuesto laminado. Por otro lado, los modelos de progresión del daño propuestos pueden utilizarse para predecir el comportamiento post-RPL y la carga última.

Como conclusión de este trabajo, puede decirse que la predicción de la resistencia de un material compuesto sometido a cargas combinadas es arriesgado. Los criterios de resistencia no pueden ser asociados a algunos principios fundamentales de comportamiento ya que los materiales compuestos tienen un amplio rango de comportamiento que depende de la interacción entre fibra y matriz dando lugar a distintos modos de fallo que actúan interactiva y simultáneamente.

En este trabajo, se ha intentado modelar el comportamiento de estos materiales comprobándose que el modelo denominado de degradación de matriz y fibra, utilizando un factor de degradación $R=0.5$, es el que más se aproxima a la realidad en los ensayos realizados.

6. REFERENCIAS.

- [1] Tsai S.W., "*Composites Design*" Think Composites (1.988).
- [2] Sánchez J., "*Modelado del daño en estructuras porticadas de material compuesto*". Escuela Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla (1.993).
- [3] París F., Cañas J., "*Introducción al análisis y diseño con materiales compuestos*". Escuela Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla (1.991).
- [4] Berkowitz H.M.: "A Theory of Simple Beams and Columns for Anisotropic Materials". Journal of Composite Materials, Vol. 3, 196-200 (1.969).
- [5] Agarwall B. D., Broutman L. J., "*Analysis and performance of fiber composites*". John Wiley & Sons (1.980).
- [6] Whitney J.m.: "*Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*" Technomic Publishing Company (1.987).
- [7] J.R. Vinson y R.L. Sierakowski.: "*The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*". Martinus Nijhoff Publishers (1.986)