

## Caracterización cualitativa de series de tiempo: geometría y dinámica del espacio de fases reconstruido

Ana María López Jiménez\*<sup>1</sup>, Carlos Camacho Martínez Vara de Rey\*  
y Antonio R. García Torres\*\*

\* Universidad de Sevilla e \*\* I.E.S. Los Viveros

### Resumen

Desde el descubrimiento del caos, la caracterización de las propiedades del mecanismo generador de una serie de tiempo debe ocuparse, entre otros objetivos, de distinguir la variabilidad debida a la presencia de términos no lineales de la debida a la presencia de variables aleatorias. Dada la incapacidad de los procedimientos exploratorios habituales (inspección visual, análisis espectral y funciones de autocorrelación y autocorrelación parcial), la consecución de ese objetivo requiere de la aplicación de métodos nuevos de análisis. En este trabajo describimos tres de los procedimientos más frecuentes para extraer las propiedades cualitativas del mecanismo generador de una serie de tiempo: atractor reconstruido, exponente máximo de Lyapunov y dimensión de correlación.

PALABRAS CLAVE: *Pseudoespacio de fases, exponentes de Lyapunov, dimensión de correlación.*

### Abstract

QUALITATIVE CHARACTERIZATION OF TIME SERIES: GEOMETRY AND DINAMICS OF RECONSTRUCTED PHASES SPACE. From the discovery of the chaos, one of the objectives of the characterization of the generating mechanism of a time series should be to distinguish variability for the presence of non-linear terms of variability for the presence of random variables. Given the inability of the habitual exploratory procedures (visual inspection, autocorrelation function, partial autocorrelation, spectral analysis), that objective requires of the application of new methods of analysis. In this work we describe three of the most frequent procedures to extract the qualitative properties of the generating mechanism of a series of time: reconstructed attractor, maximum exponent of Lyapunov and correlation dimension.

KEY WORDS: *Embedding space, Lyapunov exponent, correlation dimension*

Muchos fenómenos psicológicos se estudian utilizando secuencias temporalmente ordenadas de observaciones. Estas secuencias, series de tiempo (en adelante ST), exhiben, a menudo, conducta irregular aparentemente impredecible. El objetivo de los métodos de análisis de ST es extraer las características esenciales de la irregularidad e incrementar nuestra comprensión del mecanismo que ha generado los datos. Las técnicas de análisis de ST utilizadas con más frecuencia tanto en psicología como en otras ciencias, para el objetivo planteado, están basadas en el modelo lineal. Estas técnicas interpretan la estructura regular de los datos en términos de correlaciones lineales y la parte irregular como consecuencia de fenómenos aleatorios.

Por otro lado, desde el descubrimiento del caos, se sabe que los input aleatorios no son la única fuente de irregularidad: la presencia de términos no lineales en el mecanismo generador de la serie puede dar lugar a comportamiento irregular. La irregularidad, generada por modelos deterministas no lineales, es, en la mayoría de las ocasiones, indistinguible, con las medidas estadísticas convencionales (función de autocorrelación, autocorrelación parcial, análisis espectral), de la irregularidad generada por una familia de variable aleatorias (Dömmig y Mitschke, 1993; López, 1998; Sakai y Tokumaru, 1980; Sayers, 1991). La Teoría de los Sistemas Dinámicos

<sup>1</sup>Dirección postal del primer autor: Departamento de Psicología Experimental. Universidad de Sevilla. Avda. San Francisco Javier, s/n. 41008 SEVILLA. España. E-mail: <analopez@psicoexp.us.es>

No Lineales proporciona herramientas nuevas de análisis que permiten identificar la presencia de términos no lineales como fuente de irregularidad en las ST. Estas herramientas, y dado que en la práctica todas las ST observadas están afectadas por alguna forma de ruido, se plantean como complementarias a las herramientas que se derivan de la teoría estadística de los procesos estocásticos.

En este trabajo vamos a describir y a aplicar tres de las herramientas más utilizadas en el análisis ST desde la perspectiva de la Teoría de los Sistemas Dinámicos No Lineales: Atractor Reconstruido, Exponentes de Lyapunov y Dimensión de Correlación. Para mostrar su aplicación hemos utilizado cuatro ST<sup>2</sup> que evolucionan de manera irregular y aparentemente impredecible (ver Figura 1):

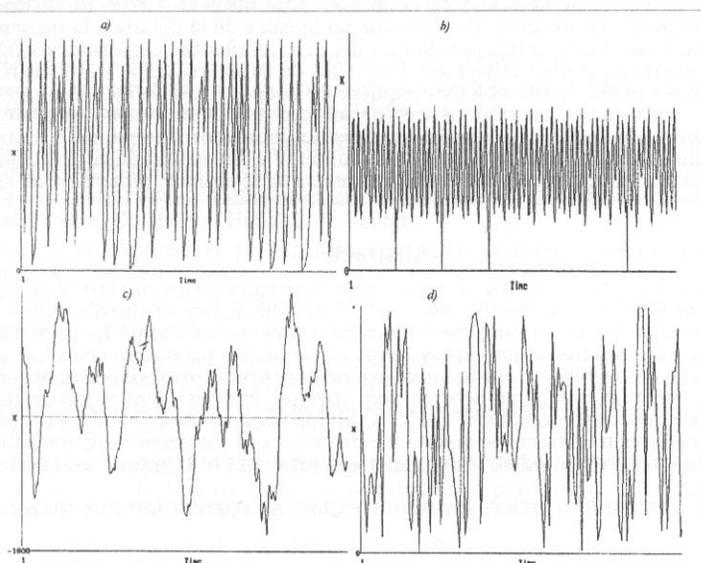


Figura 1. a) Serie 1, b) Serie 2, c) Serie 3 y d) Serie 4.

*Serie 1:* generada a partir del sistema dinámico (1). Este sistema conocido como Ecuación Logística, aunque se propuso inicialmente en ecología para estudiar el crecimiento de una especie en un medio con limitación de recursos, es la base de varios modelos propuestos en Psicología Evolutiva para describir el crecimiento de capacidades cognitivas (van Geert, 1991, 1993, 1994, 1998). Hemos seleccionado dos modelos propuestos por van Geert para generar esta serie y la siguiente por su sencillez. No obstante, desde el descubrimiento del caos, en Psicología ha habido un notable incremento tanto en el número de modelos teóricos formulados matemáticamente como sistemas dinámicos como en la aplicación de las nuevas técnicas de análisis de ST (Berthier, 1996; Cooney y Troyer, 1994; Epstein, 1985; Goldfield, Kay y Warren, 1993; Harteknab, van der Maas y Molenaar, 1998; Mishara, 1996; Rabinowitz, Grant, Howe y Walsh, 1994; Robertson, 1993; Smith y Thelen, 1993; Thelen et al., 1993; van der Maas y Molenaar, 1992; Whittall y Getchell, 1995).

<sup>2</sup>Las series 1 y 2 han sido generadas con el programa PHASER (Koçak, 1989) y la serie 4 con el programa MATHEMATICA (versión 3.0)

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t) \tag{1}$$

*Serie 2.* Esta es una serie de datos de la variable  $X_2$  del sistema (2). Este sistema dinámico, propuesto por van Geert en 1991, contiene dos variables de estado:  $X_{1t}$  y  $X_{2t}$  correspondientes a los niveles de conocimiento gramatical y vocabulario en niños que están aprendiendo a hablar y cuatro parámetros de control:  $r_1, r_2, c$  y  $c'$ . El modelo (2) añade, con respecto al (1), un término de interacción entre las variables de estado ( $cX_{1t}X_{2t}$  y  $c'X_{1t}X_{2t}$ ). En situaciones de competición  $c$  y  $c'$  son números negativos que expresan la magnitud del efecto negativo de  $X_2$  sobre  $X_1$  y viceversa. Tanto el sistema (1) como el (2) exhiben comportamientos diversos dependiendo de los valores que adopten los parámetros de control. Comportamientos que van desde puntos estacionarios o constantes para ambas variables a comportamientos periódicos y comportamiento irregular. En la Figura 2 hemos representado la evolución irregular de las variables de estado del sistema (2) (gráfico a) de la Figura 2) cuando los parámetros toman los valores:  $r_1 = 3.65, c = -1, r_2 = 0$  y  $c' = -3.229$ . El gráfico b) es otra forma de representar dicha evolución. En el gráfico b) los ejes representan las variables de estado y el tiempo pasa a ser una variable implícita. El conjunto de puntos resultante es una representación de la evolución del sistema en el denominado, en Dinámica No Lineal, espacio de fases.

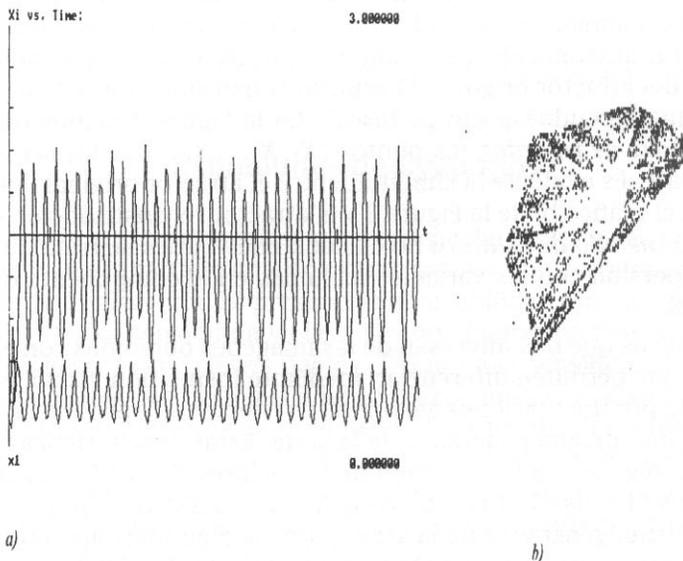


Figura 2. a) Evolución de las variables del sistema (2). b) Atractor original en el espacio de fases constituido por las variables de estado.

$$\begin{aligned} X_{1,t+1} &= (1 + r_1 + c \times X_{2,t}) \times X_{1,t} - r_1 \times X_{1,t}^2 \\ X_{2,t+1} &= (1 + r_2 + c' \times X_{1,t}) \times X_{2,t} - r_2 \times X_{2,t}^2 \end{aligned} \tag{2}$$

*Serie 3.* Corresponde al ritmo cerebral alfa (7.5-12.8 Hz) procedente de un electrodo colocado en el lado derecho del lóbulo frontal (F4) y extraída del EEG de un estudiante de psicología de 23 años (Cantero *et al.*, 2000). En análisis de señales electrofisiológicas (EEG y ECG) es, probablemente, donde se están utilizando más las técnicas de análisis que vamos a describir a continuación. Numerosos estudios han mostrado que la dimensionalidad de las señales EEG disminuye en determinados desórdenes como la esquizofrenia o la epilepsia (Babloyantz y Destxhe, 1986; Elbert *et al.*, 1992; Niestroj, Spieweg y Herrmann, 1995; Pritchard y Duke, 1995). Disminuye también con la edad en sujetos normales lo que explicaría la mayor dificultad de las personas mayores para adaptarse a situaciones estresantes (Meyer-Lindenberg *et al.*, 1998; Tschacher y Dauwalder, 1999).

*Serie 4.* Esta serie corresponde a irregularidad generada de una distribución uniforme (0,1).

### Atractor reconstruido

Sobre la base de que muchas veces no es posible tomar medidas de todas las variables de estado de un sistema dinámico y en otras ni siquiera se conocen, Mañé (1981), Packard *et al.* (1980), Sauer, York y Casdagli (1991) y Takens (1981) demostraron que es posible reconstruir la forma original de un atractor, a partir de una ST unidimensional, representando en un sistema cartesiano, de dimensión  $d_e$ , el conjunto de puntos  $(X_t, X_{t-\tau}, \dots, X_{t-(d_e-1)\tau})$  constituidos por la ST y sus correspondientes retardos. Este procedimiento, conocido como *método de retardos*, proporciona una imagen del atractor desconocido que mantiene muchas de las propiedades geométricas y dinámicas del atractor original. El espacio construido con coordenadas de retardo se denomina "pseudoespacio de fases". En la Figura 3 hemos representado, utilizando el *método de retardos*, los puntos  $(X_t, X_{t-1}, X_{t-2})$  de las series representadas en la Figura 1. Es evidente la similitud entre el atractor original del sistema (2) representado en el gráfico b) de la Figura 2 y el atractor reconstruido en el gráfico b) de la Figura 3. El *método de retardos* no es nada nuevo pues se trata de realizar un diagrama de dispersión con las variables incluidas en el componente determinista de un proceso AR.

Las características que nos interesan de las imágenes obtenidas con el *método de retardos* son las que permiten diferenciar, mediante inspección visual, entre irregularidad producida por fluctuaciones aleatorias y la debida a la presencia de términos no lineales en el mecanismo generador de la serie. Estas características hacen referencia a la forma regular y a la acotación de los valores de la ST a un subconjunto de los valores posibles dando lugar a zonas de probabilidad nula que se observan cuando el mecanismo generador de la serie contiene algún término no lineal frente a la forma irregular en caso de variables aleatorias. En las fluctuaciones al azar, aunque puede haber valores o zonas más probables que otras, no se observa esta acotación.

En los gráficos a) y b) de la Figura 3 podemos observar la forma regular y las zonas de probabilidad nula, características de la presencia de términos no lineales en el mecanismo generador de las series, no así en los gráficos c) y d). En el gráfico c) aunque los valores están acotados y aparece una forma regular en este caso, probablemente, el mecanismo generador de la serie combina dependencia lineal con fluctuaciones

aleatorias. El gráfico d) corresponde a una forma irregular, no se observa acotación ni zonas de probabilidad nula.

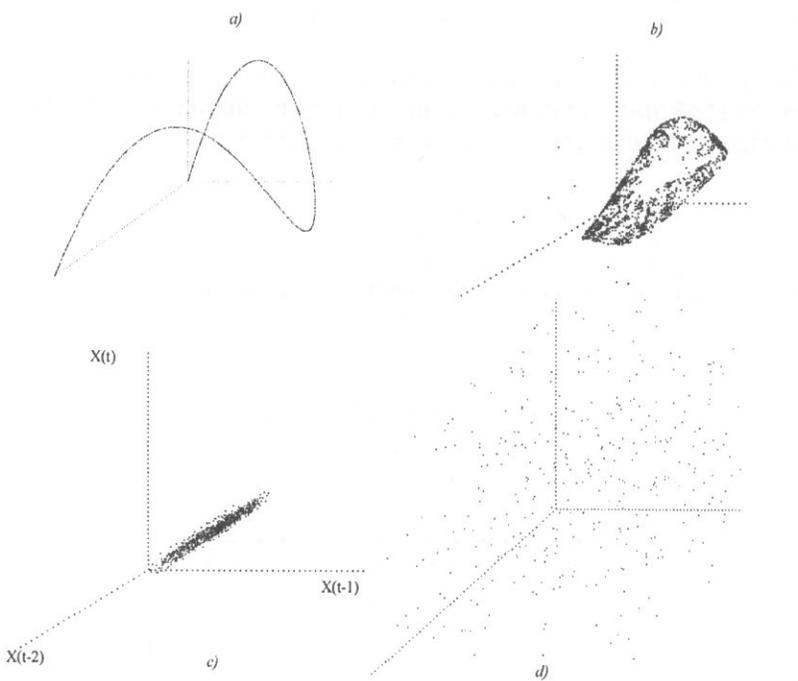


Figura 3. Atractores reconstruidos en un espacio de tres dimensiones para las series de la Figura 1.

### Exponentes de Lyapunov

Existen, además de las características geométricas del atractor reconstruido que hemos comentado en el apartado anterior, otras señales que permiten diferenciar irregularidad caótica de aleatoria. La presencia de sensibilidad a las condiciones iniciales (CI) es una de ellas. La sensibilidad a las CI es una limitación más a la capacidad del ser humano de hacer predicciones fiables. Debido a la sensibilidad respecto de las CI, no pueden hacerse predicciones a largo plazo, aunque el sistema objeto de estudio esté gobernado por leyes deterministas. Para mostrar la sensibilidad a las CI que exhibe el sistema (1) para  $a = 4$ , en la Figura 4, hemos representado dos series con condiciones iniciales  $X_0 = 0.1$  e  $X_0'' = 0.1001$ . Como puede observarse hasta aproximadamente  $t = 10$  las series prácticamente están superpuestas pero a partir de ese valor evolucionan de manera distinta.

La presencia de sensibilidad a las condiciones iniciales en el mecanismo generador de una ST se puede cuantificar mediante el cálculo de los exponentes de Lyapunov  $-\lambda$  en la expresión (3)-.

En la expresión (3),  $d_t$  es la distancia entre dos trayectorias en  $t$ ,  $d_0$  es la distancia inicial y  $\lambda$  -exponente de Lyapunov- es la tasa exponencial media de divergencia o convergencia de las trayectorias (Wolf *et al.*, 1985). Si  $\lambda$  es positivo las trayectorias divergen  $-d_t$  crece con  $t$ - y habría sensibilidad a las CI. Si  $\lambda$  es negativo, las

trayectorias convergen con  $t$  y no habría sensibilidad a las condiciones iniciales. El exponente de Lyapunov para el ruido es  $\infty$ . Un exponente de Lyapunov  $\lambda = 0$  hace que  $d_0$  se mantenga con  $t$  (Sano y Sawada, 1985; Wolf *et al.*, 1985).

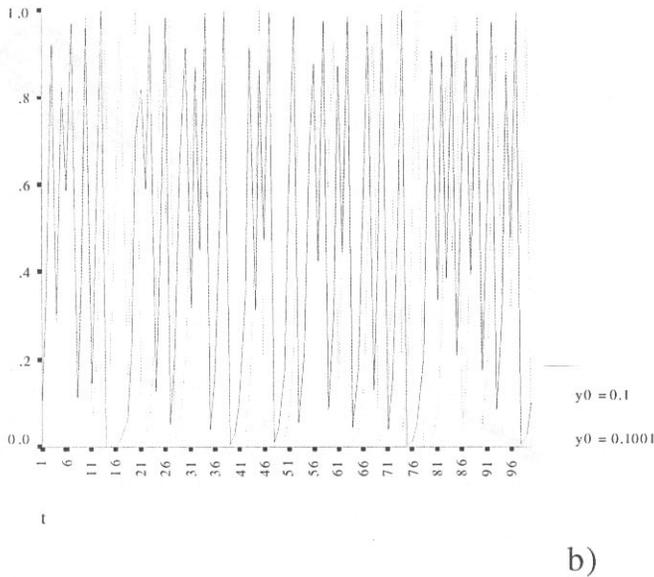


Figura 4. Series de tiempo generadas del sistema (1) para  $a = 4$  con condiciones iniciales  $X_0 = 0.1$  y  $X'_0 = 0.1001$

$$|d_t| = |d_0| e^{t\lambda} \quad (3)$$

Si se calcula el exponente de Lyapunov para una muestra de puntos de partida y se promedian dichos valores se obtiene el *exponente de Lyapunov medio* ( $\bar{\lambda}$ ). Un sistema presenta sensibilidad a las condiciones iniciales si  $\bar{\lambda}$  es positivo.

La estimación del exponente de Lyapunov puede hacerse con relativa facilidad. Si en la expresión (3) se toman logaritmos neperianos se obtiene

$$\ln d_t = \ln d_0 + \lambda t \quad (4)$$

En (4)  $\ln d_t$  depende linealmente de  $t$ . La pendiente de la recta ajustada -generalmente por mínimos cuadrados- al conjunto de puntos  $(\ln d_t, t)$  es el valor del exponente de Lyapunov. El ajuste de la recta requiere de, al menos, dos series con condiciones iniciales próximas y en la mayoría de las ocasiones se dispone de una única ST. Para salvar este problema, Wolf *et al.* en 1985 propusieron un algoritmo para obtener  $\bar{\lambda}$  a partir una única ST. Este algoritmo es el que con ligeras variaciones está implementado en los programas CDA (Sprot, 1998), TISEAN, DATAPLORE<sup>3</sup>

<sup>3</sup>TISEAN se distribuye gratuitamente en la web: <<http://www.mpipks-dresden.mpg.de/tiscan>>. La información sobre DATAPLORE puede encontrarse en <<http://www.datan.de/dataplore>>.

Se parte de una serie temporal

$$X_1, X_2, \dots, X_T,$$

y se define  $d_{m\acute{a}x}$  como la distancia máxima entre dos puntos de la serie para ser considerados como "infinitesimalmente" próximos. Cada par de puntos, pertenecientes a momentos temporales distintos, que cumplan con el criterio de proximidad

$$d_0 \leq d_{m\acute{a}x}$$

definen dos trayectorias del sistema. Se calcula la serie de distancias que sigue a estas dos condiciones iniciales y que vendría dada por

$$\begin{aligned} d_0 &= |X_j - X_i| \\ d_1 &= |X_{j+1} - X_{i+1}| \\ d_2 &= |X_{j+2} - X_{i+2}| \\ &\vdots \\ d_t &= |X_{j+t} - X_{i+t}| \end{aligned}$$

y se ajusta la recta correspondiente a la expresión (4). Si el sistema es caótico las distancias crecerán exponencialmente, al menos en la media, cuando  $t$  crece. Como los valores de  $\lambda$  dependen de  $d_0$  hay que calcular el valor medio correspondiente al conjunto de exponentes de Lyapunov  $\lambda_{d_0}$ , obtenidos de las trayectorias que cumplen con la condición

$$d_0 = |X_i - X_j| \leq d_{m\acute{a}x} \quad (5)$$

Si  $N$  es el número de trayectorias que cumplen (5) entonces  $(\bar{\lambda})$  viene dado por

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_{d_0} \quad (6)$$

Para las series de la Figura 1 hemos calculado utilizando el programa *CDA v.2.1* (Sprot, 1998) y hemos obtenido los valores que aparecen en la Tabla 1. El error en el cálculo de  $\bar{\lambda}$  es 2.5 veces la desviación tipo de las pendientes estimadas dividida entre  $\sqrt{N}$ . En todas las series el exponente positivo indicaría sensibilidad a las condiciones iniciales y por tanto presencia de términos no lineales en el sistema subyacente. No obstante esta conclusión hay que matizarla y contrastarla con otro procedimiento, como puede ser el cálculo de dimensiones, ya que en series que combinan términos lineales y fluctuaciones aleatorias si la magnitud de estas últimas es grande el exponente también es positivo.

Tabla 1. Exponentes de Lyapunov para las series de la Figura 1.

Serie 1	Serie 2	Serie 3	Serie 4
$0.698 \pm 0.031$	$0.650 \pm 0.04$	$0.462 \pm 0.051$	$0.834 \pm 0.041$

En la aplicación del algoritmo de Wolf *et al.* surgen, desde un punto de vista práctico, una serie de interrogantes que hacen referencia a: la separación temporal entre los puntos  $X_i$  e  $X_j$  para ser considerados condiciones iniciales de dos trayectorias, al número de distancias iniciales ( $N$ ) que deben ser consideradas para calcular  $\bar{\lambda}$  y a la separación temporal entre  $d_0$  y  $d_t$ . Algunas recomendaciones para estas cuestiones podemos encontrarlas en: Dämmig y Mitschke 1993; Hilborn 1994; López, 1998; Sano y Sawada 1985; Theiler, 1986 y Wolf *et al.*, 1985.

### Dimensión de un atractor: dimensión de correlación

La dimensión del conjunto de puntos obtenidos por el método de retardos es otra de las características importantes para diferenciar irregularidad aleatoria de irregularidad determinista en dinámica no lineal.

Existen diferentes acepciones del término dimensión. En geometría euclídea la dimensión es el número mínimo de coordenadas necesario para determinar unívocamente la posición de un punto en un conjunto. Un punto tiene dimensión cero por definición, una curva tiene dimensión 1 porque cada punto está determinado por un número, la longitud del arco medido desde algún punto de referencia fijado sobre la curva. Una superficie tiene dimensión 2, un volumen dimensión 3, etc. En topología la dimensión se define de forma recursiva: un punto tiene dimensión 0 por definición, un conjunto será unidimensional si quitando un punto se divide en dos partes distintas, será bidimensional si al quitarle un conjunto unidimensional se divide en dos, etc. En la teoría matemática de los Sistemas Dinámicos se entiende por dimensión el número de variables de estado utilizadas para describir la dinámica del sistema. En todas estas acepciones la dimensión sólo toma valores enteros y ninguna de ellas permite caracterizar el comportamiento irregular. Este tipo de comportamiento tiene *dimensión fractal* o *dimensión no entera* (Takens, 1993).

Hay muchas, y aparentemente diferentes, definiciones de dimensión fractal: dimensión de Hausdorff, dimensión de recuento de cajas, dimensión de Lyapunov y dimensión de correlación. Aunque todas cuantifican como se distribuyen en el espacio de estados un conjunto de puntos proporcionan, sin embargo, valores numéricos diferentes (Abraham *et al.*, 1988). En este trabajo vamos a describir la dimensión de correlación pues desde que la propusieron Grassberger y Procaccia en 1983 ha sido el procedimiento, para el cálculo de dimensiones, más utilizado en análisis de ST desde la teoría de los sistemas dinámicos.

Para definir y calcular la dimensión de correlación (en adelante  $d_c$ ) se parte del conjunto de puntos obtenidos de la ST y sus correspondientes retardos representados en el pseudoespacio de fases de dimensión  $d_e$ .

Para un punto cualquiera  $X_i$ , de los representados en el espacio, y considerando una distancia máxima entre puntos de  $\epsilon$ , se calcula el número de puntos cuya distancia a  $X_i$  es menor o igual a  $\epsilon$  excluyendo el punto  $X_i$ . Es decir se calcula el conjunto

{ número de pares  $(i, j)$  con  $i \neq j = 1, \dots, N / \| X_i - X_j \| \leq \epsilon$  }

donde  $\|$  es la distancia euclídea. Utilizando la función de Heaviside  $\Theta$  (Hilborn, 1994; Scheinkman y LeBaron, 1989), definida como

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= 0 && \text{si } x < 0 \\ \Theta(x) &= 1 && \text{si } x \geq 0 \end{aligned}$$

siendo  $x = \epsilon - \| X_i - X_j \|$ , el conjunto anterior puede escribirse como la suma

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \Theta(\epsilon - \| X_i - X_j \|) \tag{7}$$

en (7) la función  $\Theta$  contribuye en 1 para cada  $X_j$  que se encuentre dentro de la distancia  $\epsilon$  del punto  $X_i$  (excluyendo  $j = i$ ); en cualquier otro caso la función  $\Theta$  no contribuye al sumatorio. A partir de la expresión (7) se define la *suma* o *integral de correlación*  $C(\epsilon)$  como (Grassberger *et al.*, 1991; Hilborn; 1994; Sayers, 1991; Smith, 1992):

$$C(\epsilon) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N \Theta(\epsilon - \| X_i - X_j \|) \tag{8}$$

o bien, dada la simetría que caracteriza a la distancia entre puntos, la expresión (8) puede escribirse como

$$C(\epsilon) = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq N} \Theta(\epsilon - \| X_i - X_j \|) \tag{9}$$

La *integral de correlación* ( $C(\epsilon)$ ) es la fracción de pares de puntos cuyas distancias están dentro del nivel de tolerancia inicial. Puede interpretarse también como la probabilidad de que un número dado de distancias entre puntos estén dentro del nivel de tolerancia  $\epsilon$ .  $C(\epsilon)$  está definida de manera que  $C(\epsilon) = 1$  si todos los puntos están dentro de la distancia  $\epsilon$  unos de otros. Si  $\epsilon$  es más pequeño que la distancia más pequeña entre puntos de la trayectoria, entonces  $C(\epsilon) = 0$ . El valor distinto de 0 más pequeño para  $C(\epsilon)$  debería ser  $2/N(N-1)$  si sólo 2 puntos están dentro de la distancia  $\epsilon$ . Si algunos de los datos tienen el mismo valor numérico debido a redondeos entonces el valor más pequeño de  $C(\epsilon)$  es  $2N^* / N(N-1)$ , donde  $N^*$  es el número de puntos coincidentes.

A partir de la *Integral de correlación*, se define la *dimensión de correlación* ( $d_c$ ) como el exponente de la expresión

$$C(\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} k \times \epsilon^{d_c} \tag{10}$$

después de hacer operaciones  $d_c$  es

$$d_c = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln C(\epsilon)}{\ln \epsilon} \quad (11)$$

Hay una dificultad obvia para calcular  $d_c$  utilizando la expresión (11) y es que no podemos tomar el límite cuando  $\epsilon$  tiende a 0. Cualquier conjunto de datos reales es un número finito de puntos y en dicho conjunto hay una distancia mínima. Cuando  $\epsilon$  es menor que la distancia mínima, la suma de correlación es igual a 0 y no tienen sentido valores de  $\epsilon$  menores que esa distancia mínima.

En la práctica, para calcular  $d_c$  se utiliza algún rango de valores de  $\epsilon$ . Si la relación  $C(\epsilon) \propto k\epsilon^{d_c}$  fuese válida para todo  $\epsilon$ , la gráfica de  $\ln C(\epsilon)$  frente a  $\ln(\epsilon)$  se aproximaría a una línea recta de pendiente  $d_c$ . La ley anterior es válida sólo para un rango intermedio de valores de  $\epsilon$  conocido como *región de escala*. Para calcular la dimensión de correlación se ajusta una recta de mínimos cuadrados al conjunto de puntos del diagrama de dispersión de la región de escala y el valor de la pendiente ajustada es  $d_c$ .

El cálculo de  $d_c$  permite diferenciar entre comportamiento irregular y clásico en función de que sea entera o fractal respectivamente. Permite, asimismo, diferenciar irregularidad determinista de fluctuaciones aleatorias observando el comportamiento de  $d_c$  con dimensiones crecientes del pseudoespacio de fases.  $d_c$ , para sistemas caóticos deterministas, crece con la dimensión del espacio reconstruido hasta que dicho espacio es aproximadamente de dimensión  $2d$ , siendo  $d$  la dimensión del atractor original. Criterios prácticos, como el establecido por DeCoster y Mitchell (1991), establecen, para considerar saturado el valor de dimensión de correlación, la siguiente expresión

$$\Delta d_c / \Delta d_e < 0.25$$

El comportamiento aleatorio es, por el contrario, infinito dimensional y la  $d_c$  no converge cuando se aumenta la dimensión del espacio de fases. En este tipo de fluctuaciones la  $d_c$  toma, aproximadamente, el valor de  $d_e$ . En la Figura 5, para las series de la Figura 1, hemos representado la integral de correlación para dimensiones de reconstrucción crecientes. Se observa la convergencia de la  $d_c$  propia de los sistemas no lineales en los gráficos a) y b) de la Figura 5. Para la serie 4 no hay convergencia (gráfico d) de la Figura 5) en coherencia con lo esperable para fluctuaciones aleatorias. No está tan clara la convergencia en el caso de la serie 3.

Para resolver los problemas asociados a la inspección visual a la hora de determinar la convergencia o no de la  $d_c$  Brock *et al.* (1991) desarrollaron un test de hipótesis para detectar la presencia de estructura en las ST. El test se basa en la hipótesis nula de que el mecanismo generador de las series es una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Usando la definición de integral de correlación  $C(\epsilon)$ , para  $d_e > 1$ , estos autores definen el estadístico BDS como

$$BSD(d_e, \epsilon) = \frac{N^{1/2} (C_{d_e}(\epsilon) - (C_1(\epsilon))^{d_e})}{b_{d_e}} \quad (12)$$

donde el numerador de (12) se conoce como estadístico  $C$  y  $b_{d_e}$  es la desviación típica del estadístico  $C$ , cuya fórmula varía con la dimensión del espacio reconstruido.

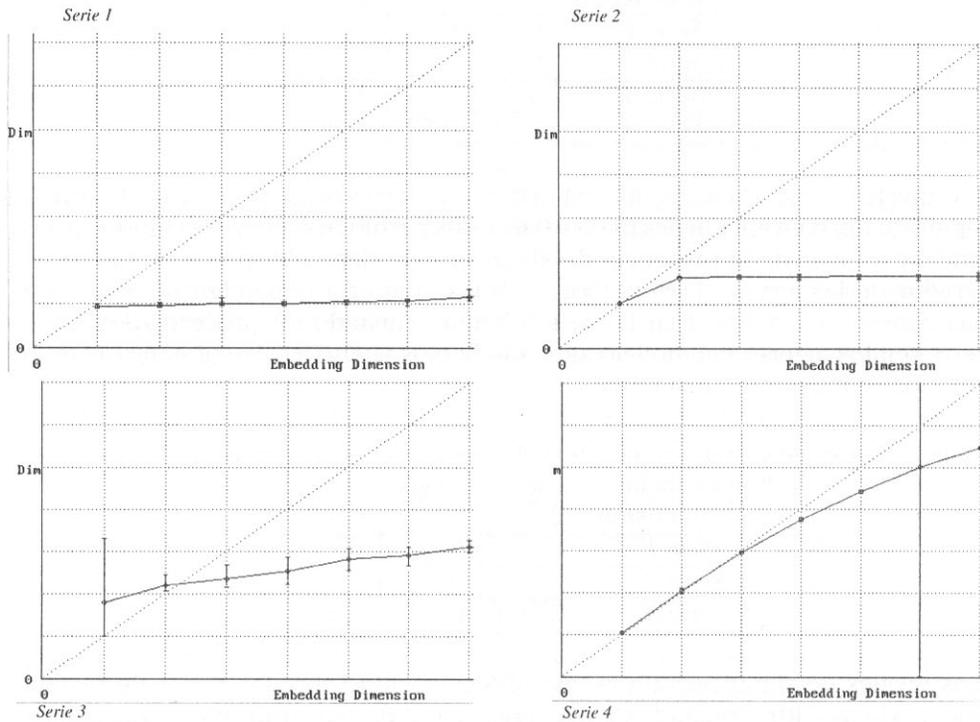


Figura 5. Comportamiento de  $d_c$  con  $d_e$  para las series de la Figura 1.

Bajo la hipótesis nula de series independientes e idénticamente distribuidas y para niveles dados del índice de tolerancia  $\epsilon$ , la cantidad

$$C_{d_e}(\epsilon) - (C_1(\epsilon))^{d_e}$$

debería ser igual a cero.

Brock *et al.* (1991), mostraron que bajo la hipótesis nula el estadístico BDS sigue una distribución asintótica normal con media 0 y desviación 1 cuando  $N$  tiende a infinito. Valores grandes del estadístico BDS apoyan la hipótesis de estructura en la serie de datos frente a la hipótesis de aleatoriedad.

El rechazo de la hipótesis nula del estadístico BDS es consistente con muchas hipótesis alternativas. Puede indicar tanto la presencia de dependencia lineal como no lineal. Así el test BDS es solamente un indicador de estructura en los datos pero no puede identificar la estructura subyacente (Sayers, 1991).

Hemos calculado, para las series de la Figura 1, el test BDS<sup>4</sup> para  $\epsilon = 0.5$  y para pseudoespacios de 2, 3 y 4 dimensiones. Los niveles de significación del test

<sup>4</sup>Los niveles de significación los hemos obtenido con el programa Nonlinear Toolkit version 4.6 (Ashley y Patterson, 1998) disponible en: <<http://www.wkap.nl>>.

aparecen en la Tabla 2.

Tabla 2. Niveles de significación del test BDS para las series de la Figura 1.

Dimensión	2	3	4
<i>Serie 1</i>	0	0	0
<i>Serie 2</i>	0	0	0
<i>Serie 3</i>	0	0	0
<i>Serie 4</i>	0.41	0.59	0.48

Los niveles de significación del test BDS, para las tres primeras series y los niveles de significación convencionales (0.05 y 0.01), nos permiten rechazar la hipótesis nula y concluir a favor de la presencia de algún tipo de dependencia en el mecanismo generador de las series. Para probar, además, que esta dependencia es no lineal en las series 1 y 2 y lineal en la serie 3 hemos ajustado un proceso AR(p)<sup>5</sup> a las series y con los errores del modelo ajustado hemos vuelto a calcular el test BDS. Los resultados se muestran en la tabla 3.

Tabla 3. Niveles de significación del test BDS para las series de errores de los modelos AR(p) ajustados a las series 1, 2 y 3 de la Figura 1.

Dimensión	2	3	4
<i>Serie 1</i>	0	0	0
<i>Serie 2</i>	0	0	0
<i>Serie 3</i>	0.569	0.569	0.377

Los niveles de significación del test BDS calculado sobre las series de residuos de los modelos AR(p) ajustados a las series 1 y 2 demuestran que el ajuste lineal no ha conseguido eliminar la dependencia. Lo contrario ocurre con la serie 3. Los niveles de significación del test BDS para los residuos confirman nuestra sospecha de dependencia lineal para los valores de esta serie. El resultado de sustraer la dependencia lineal en la serie 3 es una serie de valores independientes.

## A modo de conclusión

Es posible que todavía seamos pocos los psicólogos/as que utilizamos técnicas como las expuestas en este trabajo para nuestros análisis de ST. La juventud de esta línea de trabajo y, probablemente, su origen en ramas de la ciencia (física, química, biología, economía) donde el control y/o la posibilidad de conseguir series largas no supone grandes dificultades explica este carácter tan restringido. No obstante con otras técnicas ha ocurrido algo parecido. No hace muchos años la posibilidad de hacer un análisis espectral era privativo de no más de 3 laboratorios de física ya que el coste de los equipos necesarios superaba los tres millones de pesetas. En la actualidad la mayoría de los programas estadísticos que tienen implementado un módulo de series temporales permiten hacer análisis espectrales lo que ha dado lugar también a una utilización generalizada en el ámbito del análisis de ST.

<sup>5</sup>El valor de  $p$ , para el modelo ajustado a cada serie, es el correspondiente al valor mínimo del criterio de Schwartz (Judge *et al.*, 1985).

## Referencias

- Abraham, F.D., Abraham, R.H. y Shaw, C.D. (1988). *A Visual Introduction to Dynamical Systems Theory fo Psychology*. Santa Cruz: Aerial Press, Inc.
- Babloyantz, A. y Destxhe, A. (1986). Low dimensional chaos in an instance of epilepsy. *National Academy of Science USA*, 83, 3513-3517.
- Berthier, N.E. (1996). Learning to Reach: A Mathematical Model. *Developmental Psychology*, 32, 811-823.
- Brock, W.A., Hsieh, D. y LeBaron, B. (1991). *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Cantero, J.L., Atienza, M., Salas, R. y López, A.M. (2000). *Propiedades cuantitativas y estabilidad inter-individual de los brotes de movimientos oculares rápidos durante la fase REM*. IX Reunión de la Asociación Ibérica de Patología del Sueño: Barcelona
- Cooney, J.B., y Troyer, R. (1994). A Dynamic model of reaction time in a short-term memory task. *Journal of Experimental Child Psychology*, 58, 200-226.
- Dämmig, M., y Mitschke, F. (1993). Estimation of Lyapunov exponents from time series: the stochastic case. *Physics Letters A*, 178, 385-394.
- DeCoster y Mitchell (1991). The efficacy of the correlation dimension technique in detecting determinism in small samples. *Journal Statistical Computer Simulation*, 39, 221-229.
- Elbert, T., Lutzenberger, W., Rockstroh, B., Berg, P. Y Cohen, P. (1992). Physical aspects of the EEG in schizophrenics. *Biological Psychiatry*, 32, 595-606.
- Epstein, R. (1985). Animal Cognition as the praxist views it. *Neuroscience & Biobehavioral Reviews*, 9, 623-630.
- Goldfield, E.C., Kay, B.A. y Warren J. (1993). Infant bouncing: the assembly and tuning of action systems. *Child Development*, 64, 1128-1142.
- Grassberger, P. y Procaccia, I. (1983). Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica 9D*, 189-208.
- Hartelman, P.A.I., van der Maas, H.L.J. y Molenaar, P.C.M. (1998). Detecting and modelling developmental transitions. *British Journal of Developmental Psychology*, 16, 97-122.
- Hilborn. R.C. (1994). *Chaos and Nonlinear Dynamics. An Introduction for Scientists and Engineers*. New York: Oxford University Press.
- Judge, G.W.; Griffiths, C, Hill, H.L., Lütkephl, L.T.C. (1985). *The Theory and Practice of Econometric*. John Wiley and Sons: New York
- López, A.M. (1998). *Aproximación cualitativa al estudio de la dinámica no lineal. Aplicaciones al análisis de series temporales: Un estudio de simulación*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Sevilla
- Mañe, R. (1981). Dynamical systems and turbulence. En D. Rand y L.S. Young (Eds), *Lecture Notes in Mathematics. No. 898*. Berlin: Springer
- Meyer-Lindenberg, A., Bauer, U., Krieger, S., Lis, S., Vehmeyer, K., Schuler, G., y Gallhofer, B. (1998). The topography of non-linear cortical dynamics at rest, in mental calculation and moving shape perception. *Brain Topography, Summer, 10 (4)*, 291-299.
- Mishara, B.L. (1996). A Dynamic developmental model of suicide. *Human Development*, 39, 181-194.
- Niestroj, E., Spieweg, I. y Herrmann, W.M. (1995). On the dimensionality of sleep. EEG data. *Pharmacoelectroencephalography*, 31, 166-172.
- Packard, N.H., Crutchfield, J.P., Farmer, J.D. y Shaw, R.S. (1980). Geometry from a time series. *Physical Review Letters*, 45 (9), 712-717.
- Pritchard, W.S. y Duke, D.W. (1995). Measuring chaos in the brain: A tutorial review of EEG dimension estimation. *Brain and Cognition*, 27, 353-397.
- Rabinowitz, F.M., Grant, M.J., Howe, M.L. y Walsh, C. (1994). Reasoning in middle childhood: A dynamic model of performance on transitivity tasks. *Journal of Experimental Child Psychology*, 58, 252-288.

- Robertson, S.S. (1993). Oscillation and complexity in early infant behavior. *Child Development*, 64, 1022-1035.
- Sakai, H. y Tokumaru, H. (1980) Autocorrelation of a certain chaos. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing ASSP-28 (5)*, 588-590.
- Sano, M. y Sawada, Y. (1985). Measurement of the Lyapunov spectrum from a chaotic time series. *Physical Review Letters*, 55 (10), 1082-1085.
- Sayers, C.L. (1991). Statistical inference based upon non-linear science. *European Economic Review*, 35, 306-312.
- Sauer, T., York, J.A. y Casdagli, M. (1991). Embedology. *Journal Statistical Physics*, 65, 579-616.
- Smith, R.L. (1992). Estimating dimension in noisy chaotic time series. *Journal Royal Statistical Society*, 54 (2), 329-351.
- Smith, L.B. y Thelen, E. (1993). *A Dynamic systems approach to development. Applications*. MIT Press/Bradford Books Series in Cognitive Psychology: Massachusetts.
- Sprot, J.C. (1998). *Chaos data analyzer. the professional version*. American Institute of Physics: New York.
- Takens, F. (1993). Detecting nonlinearities in stationary time series. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 3 (2), 241-256.
- Theiler, J. (1986). Spurious dimension from correlation algorithms applied to limited time-series data. *Physical Review A*, 34, 2427-2432.
- Thelen, E., Corbetta, D. Kamm, K y Spencer, J.P. (1993). The transition to reaching: mapping intention and intrinsic dynamics. *Child Development*, 64, 1058-1098.
- Tschacher, W. y Dauwalder, J.P. (Eds). (1999). *Dynamics, synergetics, autonomous agents. nonlinear systems approaches to Cognitive Psychology and Cognitive Science*. Singapore: World Scientific.
- van der Maas, H.L.J. y Molenaar, P.C.M. (1992). Stagemwise cognitive development: an application of Catastrophe Theory. *Psychological Review*, 99, 395-417.
- van Geert, P. (1991). A Dynamic systems model of cognitive and language growth. *Psychological Review*, 98, 3-53.
- van Geert, P. (1993). A Dynamic systems model of cognitive growth: competition and support under limited resource conditions. En Linda B. Smith y Esther Thelen (Eds), *A dynamic Systems Approach to Development*. The MIT Press: Cambridge.
- van Geert, P. (1994). Vygotskian dynamics of development. *Human Development*, 37, 346-365.
- van Geert, P. (1998). A Dynamic systems model of basic developmental mechanisms: Piaget, Vygotsky, and Beyond. *Psychological Review*, 105, 4, 634-677.
- Whitall, J. y Getchell, N. (1995). From walking to tuning: applying a dynamical systems approach to the development of locomotor skills. *Child Development*, 66, 1541-1553.
- Wolf, A, Swift, J.B., Swinney, H.L. y Vastano, J.A. (1985). Determining Lyapunov exponents from time series. *Physica 16D*, 285-317.

Original recibido: 24/09/2000

Versión final aceptada: 23/02/2001