AUTORES: CRIADO PÉREZ, A. y **CRIADO Gª-LEGAZ, A.M.,**
TITULO: Errores conceptuales en el aprendizaje de corriente alterna.
TIPO DE PARTICIPACIÓN:
CONGRESO: VIII Encuentro de Didáctica de la Física y la Química
PUBLICACIÓN: Actas. pp. 111-121.
LUGAR DE CELEBRACIÓN: EUM. Univ. Sevilla.
AÑO: 1987

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

INSTITUTO DE CIENCIAS DE LA EDUCACION

VIII ENCUENTRO DE DIDACTICA DE FISICA Y QUIMICA

15-19 SEPTIEMBRE 198~~6~~7

E. U. DEL PROFESORADO DE E.G.B.
SEVILLA

Serie: Actas

Autor: Varios
Editor: Servicio de Publicaciones del I.C.E.
de la Universidad de Sevilla
Impresión y Encuadernación: Copy-Rex, S.L.
Depósito Legal: SE- 1.199-1.988
I.S.B.N. : 84-86849-03-9

ACTAS DEL VIII ENCUENTRO DE DIDACTICA DE FISICA Y QUIMICA

SEVILLA , 15 al 19 de Septiembre de 1.987

Departamento de Didáctica de Ciencias Experimentales de la
Escuela Universitaria de Magisterio de Sevilla

ERRORES CONCEPTUALES EN EL APRENDIZAJE DE LA CORRIENTE ALTERNA.

A.M. Criado Pérez y A. Criado García-Legaz.

Universidad de Sevilla.

1.- CAUSAS DE ERRDES CONCEPTUALES EN EL APRENDIZAJE DE LA FISICA.

Son conocidas las dificultades que presentan los procesos de inteligibilidad de los conceptos, leyes y modelos en las ciencias físicas. Aunque los alumnos se encuentren en un nivel operatorio de razonamiento formal, la obtención de ideas claras se ve oscurecida debido a los equívocos que se presentan en el lenguaje científico, cuando se olvidan los convenios y restricciones que se han establecido y que son en gran medida los que dan sentido a las expresiones formales que se utilizan en la descripción de estos conceptos y sus relaciones.

Evidentemente, en el aprendizaje de la Física, el rendimiento del complicado proceso intelectual (de abstracción, generalización, relación e imaginación) que se le exige al alumno, resulta muy disminuido, y a veces estéril, si no se precisan y esclarecen detalladamente el alcance y limitaciones del lenguaje regional en el que nos expresamos.

2.- LOS ERRORES Y PARADOJAS MAS FRECUENTES EN CORRIENTE ALTERNA.

Un buen ejemplo de todo lo mencionado se presenta en:

- El estudio de las oscilaciones y las ondas, en particular en la comprensión del significado físico de los regímenes "estacionario" y "transitorio" y en su superposición.
- La utilización y asimilación del sentido físico, de la "expresión compleja" y "representación fasorial" de las oscilaciones forzadas y, en particular, de la corriente alterna (c.a).

En varias ocasiones, como les sucede a muchos otros profesores, nos ha sorprendido que en alumnos aventajados -de nivel correspondiente a la última etapa de B.U.P., C.O.U o primer curso -

universitario de Física-, se produzcan graves errores y se sugieran sorprendentes paradojas referentes a los fenómenos adscritos a la c.a. y a su expresión compleja.

Genéricamente, estos errores y sus respectivas paradojas se clasifican en tres clases:

a) Los que provienen de las relaciones de desfasaje (atraso o adelanto), entre los valores instantáneos de intensidad y tensión Concretamente, en un circuito con impedancia capacitativa, al cerrar el interruptor e iniciarse el flujo electrónico, la intensidad está adelantada con respecto a la tensión, paradójicamente, "el efecto se adelanta a la causa".

b) La representación y el cálculo de los valores de la tensión, intensidad, flujo,..., que son magnitudes escalares, se realiza utilizando complejos y fasores (vectores planos) "violándose - las diferencias de determinación y cálculo establecidas entre escalares y vectores", siendo paradójico que se llegue a resultados ciertos.

c) La potencia disipada en un circuito de reactancia no nula, $X \neq 0$ no debería depender mas que de R y de i(t); resulta paradójico que intervenga el factor potencia, cos φ, función del ángulo - formado por los fasores $\vec{V}$ e $\vec{I}$.

3.- PROPUESTA PARA UNA POSIBLE ELIMINACION DE LOS ERRORES.

Nuestro propósito es colaborar a erradicar estos errores y dar solución a estas aparentes paradojas que surgen de ellos, analizando y clarificando conceptos y formalismos, señalando su sentido y limitaciones, todo ello realizado en el ámbito del nivel físico y matemático elementales, tal y como se utiliza en un curso de Física General.

3.1.- El efecto nunca puede adelantarse a la causa.

De acuerdo con lo indicado en el apartado a), los electrones parecen ser seres inteligentes, con buenos conocimientos de Física, que al cerrar el circuito se adelantan o retrasan al campo eléctrico, dependiente de la tensión, según que la reactancia X sea negativa o positiva. Es decir:

si es $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{X}{R} < 0$

el flujo electrónico, "efecto", se adelanta a la tensión, "causa" poniéndose en movimiento antes de que el campo actúe.

Evidentemente, el efecto no puede preceder a la causa, suponer que así sucede se debe a que se ignora que en circuito -R, L, C- es un oscilador eléctrico con posibilidad de oscilar independientemente del generador.

Reflexionemos sobre el fenómeno físico que ocurre al conectar el generador (de frecuencia angular w), a un circuito -R, C, L:

1º El generador cierra el circuito oscilante a través de su resistencia interna, e inicialmente aplica un impulso de tensión, siendo todo ello causa de que en el circuito se produzcan oscilaciones amortiguadas con frecuencia pseudopropia w'_0 en régimen transitorio. Estas oscilaciones se inician siempre " con posterioridad" a la acción de su "causa", el impulso de tensión que carga C y activa L, al conectar el generador al circuito.

2º Simultáneamente a estas oscilaciones pseudo propias, el generador produce oscilaciones forzadas, de su propia frecuencia w, en régimen estacionario, que se superponen a las transitorias.

En base a estos procesos, en el circuito coexisten, inicialmente, dos clases de oscilaciones:

- Oscilación forzada: $i_2(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$. ω igual a la del generador y amplitud $I_0 = V_0/Z$, invariante en el tiempo. Esta oscilación es específica del régimen permanente.
- Oscilación transitoria, propia del oscilador, de frecuencia w'_0 independiente de la del generador y tal que su amplitud se amortigua exponencialmente al transcurrir el tiempo. Esta oscilación es específica del régimen transitorio.

Generalmente esta oscilación transitoria es predominante al cerrar el circuito, durante las primeras oscilaciones y paulatinamente, se va anulando. La oscilación resultante de la superposición de ambas(forzada y pseudopropia), se va acercando asintóticamente a la de estado estacionario (de amplitud y fase constantes

Estudiemos el formalismo de adición de estas dos clases de oscilaciones:

· Denominando

$q_1 = q_1(t)$ a la carga del condensador debida a la oscilación transitoria, específica del oscilador.

$q_2 = q_2(t)$ a la carga del condensador debida a la oscilación estacionaria, causada y mantenida por el generador.

- Si R fuese despreciable, $q_1(t)$ verificará las igualdades:

$$L\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{C} = 0 \quad : \quad q_1(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad w_0^2 = 1/L.C$$

correspondientes a un oscilador L-C exento de pérdidas, cuando no es así y se adiciona al término disipativo $Ri_1 = R\frac{dq}{dt}$ que se produce un efecto de Joule $i_1^2 R$ y disipa la energía, $\frac{L}{2} I_0^2 = \frac{1}{2C} Q_0^2$

del circuito oscilante, lo que se manifiesta mediante una disminución paulatina de la amplitud Q_0 de oscilación que decrece en forma exponencial.

$$Q_0(t) = Q_0 \exp\left[-\frac{R}{2L} t\right]$$

En resumen, $q_1(t)$ verifica:

$$L\frac{d^2 q_1}{dt^2} + R\frac{dq_1}{dt} + \frac{q_1}{C} = 0, \quad \ldots . (I)$$

y es de la forma:

$$q_1(t) = Q_0\, e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(w'_0 t + \varphi'_0) \quad : \quad i_1(t) = I'_0\, e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(w'_0 t + \varphi''_0)$$

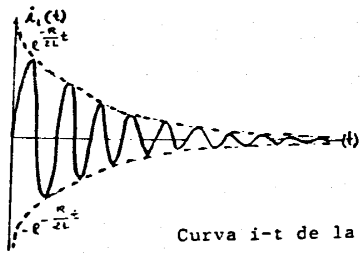

FIG. 1

Curva i-t de la oscilación transitoria.

- q_2 (t) depende en amplitud y frecuencia del generador, que "fuerza" al circuito, obligándole a oscilar con su propio periodo , q_2 (t) verifica:

$$V_0 \cos\omega t = L\frac{d^2q_2}{dt^2} + R\frac{dq_2}{dt} + \frac{q_2}{C}, \ldots (II)$$

o lo que es equivalente:

$$i_2(t) = \frac{dq_2}{dt} : \quad V_0 \cos\omega t = L\frac{di_2}{dt} + R\, i_2 + \frac{1}{C}\int i_2\, dt, \ldots (III)$$

En el apartado 3.2 se indica, como ejemplo, la forma de obtener la amplitud y fase de i_2 (t) que es de la forma:

$$I_0 = V_0 / Z \ , \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}$$

$$i_2(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi) \ , \quad X = L\omega - \frac{1}{C\omega} \ , \ \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{X}{R}$$

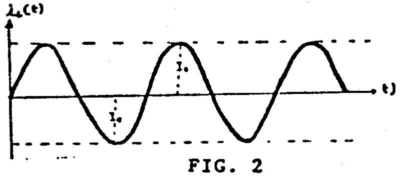

FIG. 2

Curva i-t de la oscilación forzada.

La linealidad de las operaciones de derivación presentes en expresiones (I) y (II) hace posible su adición, que explica, formalmente, la superposición de ambos estados de oscilación,

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) : \quad V_0 \cos\omega t = L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = I'_0 \, e^{-\frac{R}{2L}t} \cos(w'_0 t + \varphi'') + I_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

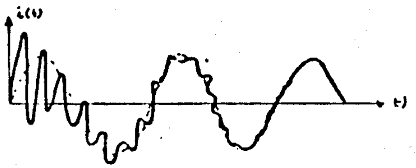

FIG. 3

Curva i-t real, resultado de la superposición de las oscilaciones transitorias y forzada.

La oscilación transitoria se estingue al transcurrir el tiempo , y por consiguiente con:

$$\lim_{t\to\infty} q(t) = q_2(t), \quad \lim_{t\to\infty} i(t) = i_2(t) = I_0 \cdot \cos(wt + \varphi)$$

Extinguido el régimen transitorio, el régimen que perdura es de oscilaciones de amplitud y fase constantes y cuya frecuencia angular, w, coincide en la del generador.

En conclusión, el régimen transitorio inicial, de oscilaciones amortiguadas, "sigue" a su causa, la acción del generador. El adelanto, o retraso, entre las oscilaciones del flujo electrónico y el campo pso sólo se establecen a posteriori, extinguido el régimen transitorio y consolidado el régimen estacionario, al que nos referimos usualmente, olvidandonos de los intervalos inicial y final, respectivamente correspondientes los procesos de conexión y desconexión del generador en los que predomina el régimen transitorio.

3.2.- Sobre la utilidad de establecer un isomorfismo entre funciones escalares y complejas.

En efecto, tal y como se dice en 2.b resulta paradójico, y no sería correcto, que unos datos escalares (3A, 5V, 4Wb,...) valores de las funciones escalares reales i(t), v(t), Ø(t),... en un instante t, se representasen y se calculasen, mediante el uso de vectores o de sus componentes, que como es sabido no son invariantes y dependen del sistema de referencia elegido.

Mas no es esto lo que se "conviene" en la formulación compleja de la c.a., y en su representación fasorial. El formalismo fundamento de la expresión compleja de la c.a, se basa en establecer una biyección entre dos conjuntos de funciones, unas reales y otras complejas, ambas periódicas (del mismo período , $T = 2\pi/w$) de una sola variable t, y cada una de ellas determinada por dos parámetros, A y φ. El método fue inicialmente utilizado por Fresnel que asoció una vibración sinusoidal sobre un diámetro a un movimiento uniforme sobre la circun -

ferencia, descrito por el extremo de un vector giratorio $\vec{X}(t)$ de módulo constante, de forma que en todo instante t se verifique:

$$x(t) = A.\cos(\omega t+\varphi) = \text{proyección}_{XX'}\left[\vec{X}(t) = A\angle\omega t+\varphi\right]$$

Quede claro que no se trata de establecer correspondencia entre n^os reales y complejos, sino entre funciones periódicas biparamétricas: x(t) reales y z(t) complejas.

No es menos cierto que los fasores no son propiamente vectores, cuyas componentes cambian al rotar los ejes y no se define entre ellos productos y cocientes algebraicos. Los fasores son la representación gráfica de funciones periódicas complejas, representación realizada mediante una convencional restricción: el eje XX' es el real y el eje YY' es el eje imaginario.

Las funciones reales i(t), v(t),... que intervienen en el "régimen estacionario" de la c.a. de periodos $T=2\pi/w$ constituyen una clase de funciones periódicas, $x(t)=A.\cos(\omega t+\varphi)$. Cada uno de los elementos de este conjunto de funciones está determinado por dos parámetros A y φ, amplitud y fase inicial.

Análogamente, se puede definir un conjunto de funciones complejas de la variable real t, periódicas, de módulo constante A y argumento $wt+\varphi$:

$$z(t) = A\left(\cos(\omega t+\varphi)+j\,\text{sen}(\omega t+\varphi)\right) \quad , \quad j^2=-1$$

Como A y φ determinan x(t) y z(t) en uno y otro conjuntos se verifica:

$$x(t,A,\varphi) \Leftrightarrow z(t,A,\varphi):\ x(t,A,\varphi) = \mathcal{R}_e\left[A\angle\omega t+\varphi\right]$$

Esta correspondencia biyectiva entre los dos conjuntos de funciones x(t) y z(t), se conserva entre las funciones resultado de ciertas operaciones lineales, definidas en ambos conjuntos: suma, multiplicación por un número real, derivación e integración, respecto de la variable real común t. Estableciéndose un isomorfismo que permite operar en el conjunto complejo (lo que suele ser mas fácil) y obtenida la función compleja resultado pasar a la función real correspondiente, que es la que posee sentido físico.

El artificio de operar en el conjunto z(t) es de excepcional utilidad cuando intervienen operaciones de derivación, o de integración, respecto del t, ya que estas dos operaciones diferenciales se reducen a multiplicar, o dividir, por jw respectivamente, lo que gráficamente supone que el correspondiente fasor gira noventa grados en sentido anti-reloj o reloj, y multiplica, o divide, su módulo por w:

$$A\cos(\omega t+\varphi) = x(t) \Leftrightarrow z(t) = A\left(\cos(\omega t+\varphi)+j\,\text{sen}(\omega t+\varphi)\right)$$

$$-\omega A\,\text{sen}(\omega t+\varphi) = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \frac{dz}{dt} = j\omega A\left(\cos(\omega t+\varphi)+j\,\text{sen}(\omega t+\varphi)\right)$$

$$\frac{A}{\omega}\text{sen}(\omega t+\varphi) = \int x.dt \Leftrightarrow \int z\,dt = \frac{A}{j\omega}\left(\cos(\omega t+\varphi)+j\,\text{sen}(\omega t+\varphi)\right)$$

Las expresiones $\frac{dz}{dt} = j\omega z$ y $\int z.dt = \frac{z}{j\omega}$ se pueden obtener más sencillamente utilizando la formulación exponencial de Euler:

$$z(t) = A\left(\cos(\omega t+\varphi)+j\,\text{sen}(\omega t+\varphi)\right) = A\,e^{j(\omega t+\varphi)}$$

Un importantísimo ejemplo de lo anteriormente indicado es la determinación de la solución estacionaria, i(t), de la ecuación diferencial expresada en la (III) -apartado 3.1 - utilizando la simplicidad del cálculo realizado en conjunto complejo isomorfo.

Sean $\vec{V}=V_0\angle\omega t$ e $\vec{I}=I_0\angle\omega t+\varphi$ las funciones complejas correspondientes a la tensión aplicada $v(t)=V_0\cos wt$ y la intensidad estacionaria $i(t)=I_0\cos(wt+\varphi)$ que recorre el circuito serie R-C-L y verifican la expresión (III):

$$V_0\cos wt = Ri + L\,di/dt + \int i.dt/C$$

la igualdad correspondiente en el conjunto complejo es una ecuación algebraica:

$$d\vec{I}/dt = j\omega\vec{I},\ \int\vec{I}dt = \frac{\vec{I}}{j\omega}:\ \vec{V} = R\vec{I}+jL\omega\vec{I}+\frac{\vec{I}}{jC\omega} = \vec{I}\left(R+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)\right) = \vec{I}.\vec{Z}$$

Tomando la parte real de $\vec{I}$, dada por la ecuación (IV), se obtiene la solución estacionaria de la (III):

$$i(t) = \mathcal{R}_e\left[\vec{I} = \vec{V}/\vec{Z} = (V_0/Z_0)\angle\omega t-\varphi\right] = I_0\cos(\omega t-\varphi)$$

$$I_0 = V_0/Z\ ,\quad \varphi = \text{arc}\,tg\,\frac{X}{R}\ ,\quad X = L\omega-\frac{1}{C\omega}\ ,\quad Z = \sqrt{X^2+R^2}$$

La ecuación algebráica (IV), $\vec{V}/\vec{Z}=\vec{I}$, e formalmente equivalente a la ley de Ohm, lo que permite un tratamiento análogo en los cálculos de los circuitos de corriente continua o alterna.

De lo indicado se infiere que no es posible asociar el valor real de una intensidad de corriente, p.ej. 3A, a un fasor. Lo que está permitido es asociar una corriente alterna, p. ej. de I_o= 6A y fase $\omega t + \pi/6$, a un fasor $6 \angle \omega t + \pi/6$ de forma que en el instante t=0 el valor instantáneo es 3A. En conclusión: los valores instantáneos reales no es posible asociarlos a números complejos, pero es lícito, y utilísimo, establecer un isomorfismo entre las funciones reales sinusoidales y funciones complejas de la forma $z(t) = A \angle \omega t+\varphi$.

3.3.- Sobre las dificultades que introduce el factor potencia.

La potencia, $p(t)=i^2(t).R$, a la que se refiere el apartado 2 es una potencia instantánea, de valor fluctuante al ritmo de la oscilación de la intensidad, $0 \leq p(t) \leq I_o^2 R/2$

La potencia considerada en c.a. es la potencia media en un periodo:

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T V_o \cos\omega t \,.\, I_o \cos(\omega t-\varphi).dt = V_e.I_e.\cos\varphi \;; \quad I_e = I_o/\sqrt{2} \quad V_e = V_o/\sqrt{2}$$

Esta potencia es la misma que disiparía una intensidad constante I_e al recorrer la resistencia R.

$$\cos\varphi = R/Z \quad : \quad P = V_e.I_e \frac{R}{Z} = I_e^2.R$$

El procedimiento seguido para deducir la expresión I_e^2 R utiliza, con todo rigor, una integración para determinar el valor medio de p(t) en un período. Es posible emplear otro método, que con ayuda de gráficas y fasores resulte mas intuitivo y, que en todo caso, aclare el contenido físico del efecto que el desfasaje, φ, entre v(t) e i(t) introduce en el valor de P.

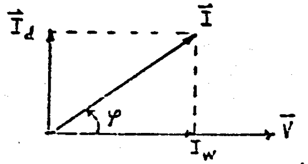

FIG. 4

El fasor $\vec{I}$ puede descomponerse en dos, $\vec{I}_w$ e $\vec{I}_d$. $\vec{I}_w$ en fase con $\vec{V}_o$ e $\vec{I}_d$ en cuadratura con $\vec{V}$: $I_{wo}=I_o.\cos\varphi$, $I_{do}= I_o \operatorname{sen}\varphi$, $\vec{I} = \vec{I}_w+\vec{I}_d$, fig. 4

Determinemos las potencias medias correspondientes a uno y otros casos.

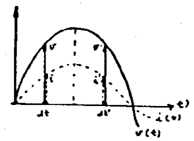

FIG. 5. Representación de las funciones v(t) e i(t) cuando es φ=0 : Z=R

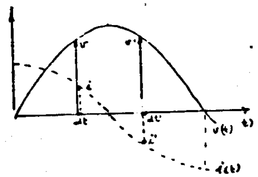

FIG. 6 Representación de las funciones v(t) e i(t) cuando es $\varphi =\pi/2$, Z=X

En las figuras 5 y 6 se esquematizan, respectivamente, los casos en los que v(t) e i(t) están en fase (φ=0, Z=R) o en cuadratura ($\varphi=\pi/2$), Z=X). En el primer caso los trabajos elementales dW correspondientes a dos instantes dt, dt' (simétricos respecto del instante en que son máximos v e i), son iguales; la potencia media, cuando φ=0, es $P=I_o^2R/2 = I_e^2$ R:

$$P = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} V_o \cos\omega t \,.\, I_o \cos\omega t \,.dt = \frac{2}{T} I_o^2 R \int_0^{T/2} \cos^2\omega t \,.\, dt = \frac{I_o^2}{2} R = I_e^2 R = V_e.I_e$$

En el segundo caso, los trabajos elementales dW correspondientes a dos instantes dt y dt', (simétricos respecto al máximo), son opuestos, es decir:

$dW = v.idt$, $dW' = v'.i'dt = -dW$

$dW + dW' = 0 \Longrightarrow P= \frac{2}{T}\int_0^{T/2} dW = 0$

Probado que solamente la componente en fase con la tensión (componente watiada, $\vec{I}_w$), disipa potencia , $P=I_{ow}^2 R/2= I_{ew}^2$ R, en el caso general, en el cual el fasor $\vec{I}$ tiene dos componentes $\vec{I}_w$ e $\vec{I}_d$, bastará considerar exclusivamente $\vec{I}_w$, cuyo módulo es $I_{ow}=I_o\cos\varphi$ prescindiendo de la componente deswatiada I_d, en este caso la potencia P es:

$$P=V_e.I_{ew}= V_eI_e\cos\varphi$$

De nuevo, utilizando la expresión fasorial, aparece la necesidad de introducir el factor potencia que, desafortunadamente para el consumidor, se refleja en el precio de la energía. Por todo ello, resulta de interés didáctico, y económico, el análisis de las tarifas eléctricas y el estudio de un recibo de energía eléctrica.

BIBLIOGRAFIA

- ALONSO FINN, 1976. I. Mecánica y II Campos y Ondas. Fondo Educativo Interamericano.
- RUBIO ROYO, F. 1980. "Física" Vol. I y II". Ed. Interinsular Canaria.
- CRIADO PEREZ, A, 1979. Fundamentos de Mecánica. Publicaciones U. Sevilla.