

2.4 663

043  
72

UNIVERSIDAD DE SEVILLA FACULTAD DE CIENCIAS SECRETARIA  <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;">16-8-84</div> ENTRADA N.º 2256
--

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DEL MODELO M.P.P.  
 DE TURBULENCIA

Tesis Doctoral Presentada por Tomas Chacon Rebollo  
 Sevilla, Agosto de 1984

*Autorizo la Consulta de esta Memoria.*



*Sevilla, 3 de Noviembre de 1984*

CONTRIBUCION AL ESTUDIO DEL MODELO M.P.P.  
DE TURBULENCIA

Memoria presentada por Tomas Chacon Rebollo en la  
Universidad de Sevilla para optar al grado de  
Doctor en Ciencias (Matematicas)

## AGRADECIMIENTO

Desco en primer lugar expresar mi profundo agradecimiento a los Profesores Antonio VALLE y O. PIRONNEAU. El constante apoyo del primero ha hecho posible la realizacion de este trabajo en Francia durante los dos ultimos años : Su preocupacion por llevarlo a buen termino me ha facilitado en mucho la tarea. Las enseñanzas del segundo , su disponibilidad en todo momento, su apoyo en los momentos dificiles me han permitido dia a dia avanzar con firmeza : A ellos debo una gran parte de mi formacion matematica actual, y les tengo en gran estima personal.

Deseo tambien mostrar mi agradecimiento a Catherine BEGUE, por sus consejos en todo momento, su apoyo practico y su amabilidad.

El profesor Carlos BENITEZ fue un director precioso durante un año, y su fe en mi y su aliento me ayudaron durante mi estancia en Paris. Muchas gracias Carlos.

Los Profesores BENAVIDES, BERMUDEZ y MICHAVILA han tenido la amabilidad de forma parte del tribunal. Les estoy muy agradecido por ello.

Los consejos y correcciones de Enrique FERNANDEZ CARA me han ayudado mucho durante mi estancia en Paris y en la realizacion de este trabajo. Reciba aqui mi mayor agradecimiento por ello, asi como por aceptar formar parte del tribunal.

Julio COUCE, Rosa MONTERO, José MARTIN y José REAL han sido unos encantadores companeros en los ultimos años. Les estoy muy agradecido por su apoyo y su amabilidad.

Por ultimo , deseo agradecer a Mme BARNY C. y Melle DUBOIS C. el cuidado y las preocupaciones que se han tomado para salvar las dificultades idiomáticas en la escritura del texto.

## INDICE

- Introduccion
  - 1. - El problema de la simulacion numérica de la turbulencia.
  - 2. - Obtencion de Ecuaciones para la circulacion media.
  - 3. - El modelo M.P.P. de turbulencia.
  - 4. - Contenido del presente trabajo.
  
- Capitulo 1 : El modelo M.P.P. de turbulencia con cuatro invariantes.
  - 1.1. - Descripcion del problema
  - 1.2. - Desarrollo asintotico
  - 1.3. - Ecuacion del campo medio
  - 1.4. - Determinacion de los terminos del desarrollo
  - 1.5. - Ecuaciones reducidas
  
- Capitulo 2 : Simetrias de las Fluctuaciones Canomicas :  
                  Aplicacion a la tabulacion de los Tensores de Reynolds
  - 2.1. - Simetrias
  - 2.2. - Tabulaciones
  
- Capitulo 3 : Calculo numérico de Las fluctuaciones canonicas :  
                  Incorporacion de las simetrias al caso discreto.
  - 3.1. - Obtencion de las simetrias en la resolucion numerica del problema para la fluctuacion canonica.
  - 3.2. - Resolucion numérica del problema de Euler linealizado.
  - 3.3. - Resolucion del Laplaciano discreto sobre mallado simetrico.
  - 3.4. - Resultados numéricos.
    - Figuras.
  
- Capitulo 4 : Los terminos de viscosidad en el modelo reducido :  
                  Tabulacion de los tensores de cierre.
  - 4.1. - Expresion del modelo reducido en funcion de los terminos de viscosidad turbulenta.
  - 4.2. - Tubulencia localmente isotropa
  - 4.3. - Un caso monodimensional : Circulacion en un tubo.

- 4.4. - Tabulacion de R mediante isotropia
- 4.5. - Tabulaciones mediante desarrollos de Taylor
- 4.6. - Isotropia de las soluciones discretas simetricas
- 4.7. - Las ecuaciones M.P.P. segun el desarrollo de Taylor  
- Figuras.

## INTRODUCCION

### 1. - El problema de la simulacion numérica de la turbulencia

El comportamiento de los fluidos turbulentos, con estructuras que varían rápidamente en tiempo y en espacio, es un problema matemático muy complejo, cuya resolución numérica no puede realizarse directamente, debido a la capacidad limitada de los ordenadores existentes. En efecto, consideremos las ecuaciones adimensionales de Navier-Stokes en un dominio  $\Omega$  de diámetro unidad :

$$(0.1) \quad u_{,t} + u \cdot \nabla u + \nabla p - \nu \Delta u = 0,$$

$$(0.2) \quad \nabla \cdot u = 0 ;$$

donde  $\nu$  es el inverso del número de Reynolds.

Cuando  $\nu$  tiende hacia cero ,  $u(x,t)$  oscila cada vez mas fuertemente en  $x$ ,  $t$  y la experiencia muestra que la talla de las menores oscilaciones es del orden de  $\nu^{3/4}$ . Entonces, una discretización de  $\Omega$  de talla  $1/N$  podrá representar solo las menores estructuras creadas en el fluido para números de Reynolds de orden no mayor que  $N^{4/3}$  : Con los ordenadores actuales, el millar [2, 3]. Sin embargo, si es posible estudiar los estadísticos de un campo turbulento, como pueden ser el tensor medio de energía cinética  $(\frac{1}{2} \overline{u_i u_i})$  y el campo medio  $\bar{u}$ . El problema se plantea ahora de forma diferente : Obtener ecuaciones para estos estadísticos a partir de (0.1)-(0.2)

### 2. - Obtencion de Ecuaciones para la circulacion media

La obtención teórica de ecuaciones para el campo medio  $\bar{u}$  parte de la experiencia, que indica que en un instante  $t$  dado la fluctuación turbulenta, dada por

$$(0.3) \quad u' = u - \bar{u},$$

es semejante a un campo aleatorio en  $x$  de media nula. Ello sugiere estudiar el problema (0.1)-(0.2) con condición inicial aleatoria  $u_0 + u'_0$ . Tomando la media estadística (notación :  $\langle . \rangle$ ) de (0.1), se obtiene la ecuación, llamada de Reynolds :

$$(0.4) \quad \bar{u}_{,t} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} - \nu \Delta \bar{u} + \nabla \bar{p} + R = 0,$$

donde

$$(0.5) \quad R = \langle u' \otimes u' \rangle.$$

La resolución de la ecuación (0.4) requiere la resolución teórica del problema de cierre : Expresar el "tensor de Reynolds"  $R$  en función de  $\bar{u}$ .

Hay otras posibles formas de obtener ecuaciones de la circulación media, que proporcionan expresiones de (0.4) con diferente definición del tensor de Reynolds [Cf. 8].

Una forma de cierre muy utilizada en las aplicaciones industriales es el modelo  $k - \epsilon$  [19]. Supone en primer lugar que el tensor de Reynolds es un tensor de difusión :

$$(0.6) \quad R = -\nu_T (\nabla u + \nabla u^T),$$

donde  $\nu_T$  es la "viscosidad turbulenta" ; que es tomada de la forma

$$(0.7) \quad \nu_T = \mu \frac{k^2}{\epsilon}, \quad k = \frac{1}{2} \langle |u'|^2 \rangle, \quad \epsilon = \frac{\nu}{2} \langle \Sigma_{i,j} |u_{i,j} + u_{j,i}|^2 \rangle$$

donde  $k$  es la energía cinética turbulenta,  $\epsilon$  es la tasa de energía de viscosidad turbulenta y  $\mu > 0$  es un parámetro a determinar por la experiencia.

Mediante diversas asunciones heurísticas de tipo físico,  $R$  y  $\epsilon$  resultan ser soluciones de sendas ecuaciones de transporte no lineales, en cuyas expresiones no todos los autores coinciden. Una posibilidad es :

$$(0.8) \quad k_{,t} + u \cdot \nabla k - \nabla \cdot (a \nabla k) - \frac{k^2}{\epsilon} \mu (\nabla u + \nabla u^T) : \nabla u + \epsilon = 0,$$

$$(0.9) \quad \epsilon_{,t} + u \cdot \nabla \epsilon - \nabla \cdot (b \nabla \epsilon) - \rho (\nabla u + \nabla u^T) : \nabla u + \frac{\epsilon^2}{K} = 0,$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $\rho$  son parámetros, a determinar también mediante la experiencia.

Este modelo es muy usado en la práctica ; y proporciona buenos resultados en bastantes casos (Circulación en conductos, circulación de capas límites, p. ej.).

Sin embargo, parece no abarcar plenamente las pequeñas estructuras de la circulación turbulenta y las grandes estructuras de la circulación media, ya que los parámetros  $a$ ,  $\mu$ ,  $b$  y  $\rho$  en (0.8)-(0.9) dependen del problema concreto a resolver (En particular de la geometría del dominio [Cf.4]) ; mientras que deberían ser intrínsecos al movimiento turbulento.

El problema planteado es, por tanto, realizar de forma sistemática un cierre del problema de Reynolds que exprese las interacciones entre las grandes

y las pequenas estructuras creadas en una circulación turbulenta.

3. - El modelo M.P.P. de turbulencia

El modelo de turbulencia desarrollado por Mc Laughlin, Papanicolaou y Pironneau [2, 4, 6] supone una aproximacion matematica a la resolucio del problema de Reynolds mediante tecnicas de homogeneizacion [12, 20, 21].

Su asuncion de base consiste en suponer que la "gran" escala en que se desarrolla la circulacion media y la "pequena" escala relativa a la circulacion turbulenta se encuentran bien separadas, en el sentido de que la turbulencia viene generada por unas condiciones iniciales en "microestructura" :

(0.10)  $u(x,0) = u^0(x) + \psi^0(\frac{x}{\epsilon}, x)$ ,

donde  $u^0(x)$  es el campo medio inicial,  $\psi^0(y,x)$  es la fluctuacion turbulenta, aleatoria o periodica en y sobre  $Y = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$ , y el parametro  $\epsilon$  es la razon entre la gran y la pequena escalas. El termino  $\psi^0(\frac{x}{\epsilon}, x)$  es supuesto altamente oscilante cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ , pero con media regular en x.

Usemos la notacion  $u^\epsilon$  para designar la solucion de las ecuaciones de Euler incompresibles :

(0.11)  $u_t^\epsilon + u^\epsilon \cdot \nabla u^\epsilon + \nabla p^\epsilon = 0$ ,

(0.12)  $\nabla \cdot u^\epsilon = 0$ ,

con las condiciones iniciales (0.10).

Las técnicas de homogeneizacion sugieren expresar  $u^\epsilon$  en la forma :

(0.13)  $u^\epsilon(x,t) = u(x,t) + [w(y;x,t) + \epsilon u^{(1)}(y; x,t) + \dots] \Big|_{y = \frac{a(x,t)}{\epsilon}}$

(0.14)  $p^\epsilon(x,t) = p(x,t) + [\Pi(y;x,t) + \epsilon p^{(1)}(y; x,t) + \dots] \Big|_{y = \frac{a(x,t)}{\epsilon}}$ ,

donde  $w, u^{(1)}, \dots, \Pi, p^{(1)}, \dots$  son funciones aleatorias o periodicas en y de media nula ; u, p son respectivamente el campo y la presion medios, y a son las coordenadas lagrangianas del problema.

El modelo muestra entonces que si la energia cinetica inicial  $q_0(x) = \frac{1}{2} \langle |\psi^0(\cdot, x)|^2 \rangle$  es pequena, u es solucion del sistema de ecuaciones

$$(0.13) \quad u_{,t} + u \cdot \nabla u + \nabla p + \nabla \cdot R = 0,$$

$$(0.14) \quad \nabla \cdot u = 0$$

donde el tensor  $R$  es una función de  $\nabla a$  y de la energía cinética turbulenta  $q = \frac{1}{2} \langle |w|^2 \rangle$ , dados por :

$$(0.15) \quad q_{,t} + u \cdot \nabla q + R : \nabla u = 0, \quad q(x,0) = q_0(x)$$

$$(0.16) \quad a_{,t} + u \cdot \nabla a = 0, \quad a(x,0) = x.$$

El cálculo de  $R$  requiere la resolución de un problema canónico de microestructura (i.e., relativo a la variable  $y$ ) en el cual la matriz  $C = \nabla a^T \nabla a$  y  $q$  intervienen como parámetros.

El interés del sistema (0.13)-(0.16) reside por una parte en la eliminación de la dependencia de las ecuaciones (0.10)-(0.12) respecto a los datos de variación rápida, y por otra en que permite el seguimiento de la evolución de las dos escalas en que se ha supuesto que se desarrolla el movimiento del fluido.

La ecuación (0.13) no contiene términos de viscosidad turbulenta. De hecho, la presencia del tensor  $R$  le confiere carácter hiperbólico para pequeñas variaciones del campo  $u$  [cf. Cap. 4, Secc. 3]. Sin embargo, su estudio en mayor profundidad muestra su gran semejanza con el modelo  $k - \epsilon$ , recientemente estudiada [cf. 17].

#### 4. - Contenido del presente trabajo

En el primer Capítulo, se realiza una extensión de las ecuaciones del modelo M.P.P., que parte de la inclusión de una escala de variación rápida en tiempo en los desarrollos (0.13)-(0.14), en la forma

$$(0.17) \quad u^\epsilon(x,t) = u(x,t) + [w(y,\tau;x,t) + \epsilon u^{(1)}(y,\tau;x,t) + \dots]_{y = \frac{a(x,t)}{\epsilon}, \tau = \frac{S(t)}{\epsilon}}$$

$$(0.18) \quad p^\epsilon(x,t) = p(x,t) + [\Pi(y,\tau;x,t) + \epsilon p^{(1)}(y,\tau;x,t) + \dots]_{y = \frac{a(x,t)}{\epsilon}, \tau = \frac{S(t)}{\epsilon}}$$

y se caracteriza por explicitar los términos de primer orden en  $\epsilon$ , y por incorporar la dependencia del tensor  $R$  respecto de una nueva variable en microescala, la helicidad total turbulenta  $h = \langle w \cdot (\nabla a \cdot \nabla y) \times w \rangle$ . El sistema de ecuaciones verificado por  $u$ ,  $q$  y  $h$  es :

$$(0.19) \quad u_{,t} + u \cdot \nabla u + \nabla p + \nabla \cdot R + \varepsilon \nabla \cdot R^1 = O(\varepsilon) \quad , \quad \nabla \cdot u = 0,$$

$$(0.20) \quad q_{,t} + u \cdot \nabla q + R : \nabla u + \nabla \cdot A + \varepsilon \nabla \cdot B = O(\varepsilon)$$

$$(0.21) \quad h_{,t} + u \cdot \nabla h + S : \nabla u + \nabla \cdot D + \varepsilon \nabla \cdot E = O(\varepsilon)$$

donde los tensores  $R$ ,  $R^{(1)}$  y  $S$  vienen dados por

$$(0.23a) \quad R = \langle w \otimes w \rangle, \quad R = R(q, h, \nabla a),$$

$$(0.23b) \quad R^1 = \langle w \otimes u^{(1)} + u^{(1)} \otimes w \rangle, \quad R^1 = R^1(q, h, \nabla a, \nabla u, w),$$

$$(0.23c) \quad S = \langle w \otimes r + r \otimes w \rangle, \quad S = S(q, h, \nabla a) \text{ siendo } r = (\nabla a \nabla) x w;$$

y los tensores  $A$ ,  $B$ ,  $D$  y  $E$  son funciones de  $q$ ,  $h$ ,  $\nabla a$ ,  $\nabla u$  y  $w$ , en principio calculables [cf Cap. 1, Secc. 3]

La fluctuación  $w$  viene determinada en la forma

$$(0.24) \quad w = (\nabla a)^{-T} \tilde{w}$$

siendo  $\tilde{w}$  solución del problema canónico de microestructura que sigue :

$$(0.25) \quad s_{,t} \tilde{w}_{,t} + \tilde{w} \cdot \nabla_y \tilde{w} + c \nabla_y \Pi = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0 \text{ en } Y = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$$

$$\langle \tilde{w} \rangle = 0, \quad \frac{1}{2} \langle \tilde{w} \cdot C^{-1} \tilde{w} \rangle = q, \quad \langle \tilde{w} \cdot C^{-1} \tilde{r} \rangle = h; \quad (\tilde{r} = (\nabla a)^T r)$$

$\tilde{w}, \Pi$   $Y$ -periódicos en  $y$ ;

mientras que  $u^{(1)}$  viene expresado de analoga forma a partir de la solución de un problema del tipo (0.25) linealizado. [Cf Cap 1., Secc. 4].

La resolución de (0.19)-(0.21) (Incluso de las ecuaciones en  $\varepsilon^0$ ) requiere la tabulación numérica de la solución de (0.25) en función de  $C$ ,  $q$  y  $h$ . Actualmente no es posible controlar a un tiempo  $q$  y  $h$ , pero si es posible eliminar la ecuación (0.21) para fluctuaciones  $w$  impares e independientes de la pequeña escala en tiempo. Reteniendo los términos de difusión aportados por la presencia de  $u^{(1)}$  en (0.19)-(0.20), las ecuaciones del modelo resultan

$$(0.26) \quad u_{,t} + u \cdot \nabla u + \nabla p + \nabla \cdot (qR') + \epsilon \nabla \cdot (q^{1/2} \alpha : \nabla u) = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 ;$$

$$(0.27) \quad q_{,t} + u \cdot \nabla q + qR' : \nabla u + \nabla \cdot (\beta \nabla (q^{3/2})) = 0 ;$$

donde

$$(0.28) \quad R' = (\nabla a)^{-T} \langle \tilde{w} \tilde{w} \rangle (\nabla a)^{-1}, \quad R = qR',$$

$$(0.29) \quad \alpha^{ij} = (\nabla a)^{-T} \langle \tilde{w} \tilde{w}^{kl} + \tilde{\kappa}^{kl} \tilde{w} \rangle (\nabla a)^{-1} a_{i,k}^{-1} a_{j,l}^{-1},$$

$$(0.30) \quad \beta_{ij} = \frac{1}{3} (\nabla a)^{-T} \langle (\tilde{\phi}^k + \tilde{\xi}^k \cdot C^{-1} \tilde{w}) \tilde{w}_i + (\frac{1}{2} \tilde{w} \cdot C^{-1} \tilde{w} + \tilde{\Pi}) \tilde{\xi}_i^k \rangle a_{j,k}^{-1}.$$

Aqui, la fluctuacion canonica  $\tilde{w}$  esta definida por

$$(0.31) \quad \tilde{w} \cdot \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y \tilde{\Pi} = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0 \text{ en } Y;$$

$$\langle \tilde{w} \rangle = 0, \quad \frac{1}{2} \langle \tilde{w} \cdot C^{-1} \tilde{w} \rangle = 1; \quad \tilde{w}, \tilde{\Pi} \text{ Y-periodicos en } y.$$

y  $\tilde{\kappa}^{kl}, \tilde{\xi}^k$  son soluciones del pb (0.31) linealizado :

$$(0.32) \quad \tilde{\zeta} \cdot \nabla_y \tilde{w} + \tilde{w} \cdot \nabla_y \tilde{\zeta} + C \nabla_y \tilde{\rho} = \tilde{f}, \quad \nabla_y \cdot \tilde{\zeta} = g \text{ en } Y;$$

$$\langle \tilde{\zeta} \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\zeta} \cdot C^{-1} \tilde{w} \rangle = 0; \quad \tilde{\zeta}, \tilde{\rho} \text{ Y-periodicos en } Y,$$

para diferentes valores de  $\tilde{f}$  y  $g$  [cf. Cap.2, Secc.2].

La tabulacion de los tensores  $R', \alpha$  y  $\beta$  en funcion de  $C$  es un problema numerico a resolver con cuidado.

-La tabulacion cerca de la identidad puede realizarse aproximando tales tensores mediante los primeros terminos de sus desarrollos de Taylor. El estudio de las simetrias de las ecuaciones (0.31)-(0.32) permite reducir el numero de parametros de tabulacion de 5 (Grados de libertad de  $C$ ) a 2 [Cf. Cap. 2] .

Ello plantea la necesidad de desarrollar codigos numericos de resolucion de (0.31) y (0.32) que respeten tales simetrias. En el Capitulo 3 se efectua un analisis de este problema : se utiliza un algoritmo de gradiente conju-gado que incorpora un malla-go simetrico de  $Y$  y una inicializacion que veri-fique las simetrias teoricas. La implementacion numerica de este algoritmo

requiere la puesta a punto de un método numérico que permite el uso de la transformada de Fourier Rápida para resolver el laplaciano discreto sobre mallado regular simétrico [Cf. Cap 3. Secc. 3].

- En la tabulación general, se consigue una gran simplificación si la turbulencia inicial es isotropa : En este caso, el tensor  $R$  depende solo de los invariantes de la matriz  $C$ , y ello hace que el número de parámetros de tabulación quede reducido a uno para circulaciones bidimensionales, y a dos para tridimensionales [Cf. Cap. 4, Seccs. 2 y 4].

La convergencia de los desarrollos (0.17) y (0.18) requiere la existencia de soluciones aisladas de (0.31) y (0.32) continuas y diferenciables respecto de  $C$ . El estudio riguroso de esta propiedad es un problema de gran dificultad, del cual se conoce poco : Actualmente, solo se puede asegurar la multiplicidad de las soluciones [Cf. Cap.1, Secc 1.4]. Desde el punto de vista numérico, parece plausible la hipótesis de existencia de soluciones aisladas ; y ha sido posible obtener tabulaciones regulares, a pesar de la dependencia de la solución continua respecto de la inicialización tomada en el algoritmo de gradiente conjugado [Cf. Cap 4 ; figuras].

Este trabajo representa una contribución al estudio del modelo M.P.P., comprendiendo una extensión de los métodos asintóticos que permite la inclusión de los términos de viscosidad turbulenta, así como la tabulación de las diferentes funciones que en él aparecen. Los cálculos numéricos necesitan adaptaciones no triviales de los métodos numéricos clásicos, y en ese sentido este trabajo constituye también una contribución original al estudio de los fluidos tridimensionales incompresibles.

CAPITULO I

EL MODELO MPP DE TURBULENCIA CON CUATRO INVARIANTES

Este capítulo presenta la aplicación del modelo MPP de turbulencia a las ecuaciones incompresibles de Euler : Partiendo de la hipótesis de que la turbulencia viene generada por un campo inicial de velocidades en microestructura (Sec. 1) se efectúa la homogeneización formal de tales ecuaciones mediante desarrollo asintótico (Sec. 2), que permite la obtención de las ecuaciones del campo medio. Estas ecuaciones suponen un cierre del problema de Reynolds [7], [8], ligado a los invariantes de la ecuación de Euler (Secs. 3 y 4) ; y de ellas se explicitan los terminos obtenidos en [2] y [4], además del primer corrector. Por último, se presenta un caso reducido a cuyo análisis se dedicará el resto de los capítulos (Sec. 5).

1 - Descripción del problema

Sean las ecuaciones de Euler para fluidos incompresibles, dependientes del parámetro  $\varepsilon$  :

$$(1.1) \quad \left. \begin{aligned} u_{,t}^{\varepsilon} + u^{\varepsilon} \cdot \nabla u^{\varepsilon} + \nabla p^{\varepsilon} &= 0 \\ \nabla \cdot u^{\varepsilon} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ en } \Omega \times ]0, T_f[$$

$$(1.3) \quad \begin{cases} u^{\varepsilon} = u_{\varepsilon} & \text{sobre } \Gamma \times ]0, T_f[ \\ u^{\varepsilon}(x) \cdot n(x) = g_{\varepsilon}(x) & \text{sobre } \Sigma_{\varepsilon} \end{cases}$$

$$(1.4) \quad u^{\varepsilon}(x, 0) = u_0^{\varepsilon}(x) + w_0\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) \text{ en } \Omega$$

donde la notación utilizada es la siguiente :

(1.5)  $u^{\varepsilon}(x, t)$  : velocidad del fluido en el punto  $x$  e instante  $t$ , correspondiente al valor  $\varepsilon$  del parámetro.

$p^{\varepsilon}(x, t)$  : presión en  $(x, t)$  correspondiente a  $\varepsilon$ .

$\Omega$  : dominio de  $\mathbb{R}^3$  ocupado por el fluido.

$[0, T_f]$  : intervalo de tiempo en que se considera el comportamiento del fluido.

$n(x)$  : Normal unitaria exterior a  $\Gamma = \partial\Omega$  en  $x$ .  
 $u_\varepsilon, g_\varepsilon$  : Funciones regulares definidas sobre  $\Gamma \times [0, T_f]$ .  
 Son datos del problema

$$\Sigma_\varepsilon = \{(x, t) \in \Gamma \times [0, T_f] \mid u^\varepsilon(x) \cdot n(x) \leq 0\}$$

Las condiciones iniciales vienen expresadas en forma de microestructura, según el modelo desarrollado por MPP [4]:

Las funciones  $u_0(x)$  y  $w_0(y, x)$  son datos del problema, y serán supuestas funciones regulares de sus argumentos.

- $u_0(x)$  es el campo medio de velocidades inicial
- $w_0(y, x)$  es el campo turbulento inicial. Se trata de una función en dos escalas de espacio diferentes, cuya razón es  $\varepsilon$ ; siendo periódica respecto de  $y$ .

Sea  $Y$  la célula de periodicidad de  $w_0$ :

$$(1.6) \quad Y = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^3$$

Pongamos, para una función  $v: Y \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$(1.7) \quad \langle v \rangle = \int_Y v(y, x) dy$$

Entonces, por hipótesis,

$$(1.8) \quad \langle w_0 \rangle = 0,$$

y ello significa que cuando  $\varepsilon$  tiende a cero,  $u^\varepsilon(x, 0)$  oscila cada vez más pero su media permanece regular.

Este comportamiento de las condiciones iniciales es el que va a propagar la turbulencia. De hecho, el tomar tal tipo de condiciones iniciales supone que en el instante  $t = 0$  el movimiento del fluido se puede descomponer en suma de un campo medio y de un campo turbulento en dos escalas, de razón  $\varepsilon$ , y de media nula. La regularidad supuesta para los datos del problema,  $u_\varepsilon, g_\varepsilon, u_0$  y  $w_0$  será aquella que permita asegurar la existencia de solución de (1.1)-(1.4).

## 2 - Desarrollo asintótico de $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$

Nuestro objetivo es calcular las ecuaciones verificadas por el campo medio del fluido. Para ello, consideremos los desarrollos formales de  $u^\varepsilon, p^\varepsilon$  en potencias de  $\varepsilon$  que siguen, según el modelo MPP [4]:

$$(1.9) \quad u^\varepsilon(x, t) = u(x, t) + [\omega(y, \tau; x, t) + \varepsilon u^{(1)}(y, \tau; x, t) + \varepsilon^2 u^{(2)}(y, \tau; x, t) + \dots]$$

$$(1.10) \quad p^\varepsilon(x, t) = p(x, t) + [\pi(y, \tau; x, t) + \varepsilon p^{(1)}(y, \tau; x, t) + \varepsilon^2 p^{(2)}(y, \tau; x, t) + \dots]$$

en el punto

$$(1.11) \quad y = \frac{a(x, t)}{\varepsilon}, \quad \tau = \frac{s(t)}{\varepsilon},$$

siendo  $\omega, u^{(1)}, u^{(2)}, \dots, \pi, p^{(1)}, p^{(2)}, \dots$  funciones periódicas

respecto de  $(y, \tau)$  en  $Y \times ]0, 1[$  de media nula en  $(y, \tau)$ .

Las funciones  $u, p, \omega, u^{(1)}, \dots, \pi, p^{(1)}, \dots, a_j$ s van a ser determinadas mediante la inserción de (1.9)-(1.10) en (1.1)-(1.4).

Utilizaremos las siguientes notaciones:

$$(1.12) \quad \nabla a: \text{Matriz } 3 \times 3 \text{ de elementos } (\nabla a)_{ij} = \frac{\partial a_j}{\partial x_i}$$

Para  $f(y, \tau; x, t): Y \times ]0, 1[ \times \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}^3,$

$$(1.13a) \quad f_{,j} = \frac{\partial f}{\partial y_j}; \quad f_{,\tau} = \frac{\partial f}{\partial \tau}; \quad f_{,j} = \frac{\partial f}{\partial x_j}; \quad f_{,t} = \frac{\partial f}{\partial t},$$

$$(1.13b) \quad \nabla f = \nabla_x f = f_{,i} \vec{e}_i; \quad \nabla_y f = f_{,j} \vec{e}_j; \quad \nabla a \nabla_y f = a_{i,j} f_{,i} \vec{e}_j,$$

siendo  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  la base vectorial canónica de  $\mathbb{R}^3$ .

Adoptemos también el convenio de Einstein: los índices repetidos indican sumación, incluso si uno es mayúsculo y el otro minúsculo

Se tiene entonces (ver Apéndice 1)

$$(1.14) \quad u_{,t}^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \nabla p^\varepsilon = (\nabla a)^{-T} [ \tilde{E}^{-1} (\tilde{\omega}; \pi; c) + L(\tilde{v}^\varepsilon, q^\varepsilon; \tilde{\omega}, c) + f^\varepsilon ] +$$

donde  $(a_{,t} + u \cdot \nabla a) \cdot \nabla_y (\tilde{E}^{-1} \omega + v^\varepsilon),$

$$(1.15) \quad \tilde{z}_i = a_{,i} z_j \Leftrightarrow \tilde{z} = (\nabla a)^T z, \quad \forall z \in \mathbb{R}^3,$$

$$(1.16) \quad c = (\nabla a)^T (\nabla a)$$

$$(1.17) \quad T(\tilde{\omega}, \pi; C) = s_{,t} \tilde{\omega}_{,t} + \tilde{\omega} \cdot \nabla_y \tilde{\omega} + C \nabla_y \pi,$$

$$(1.18) \quad L(\tilde{v}, q; \tilde{\omega}, C) = s_{,t} \tilde{v}_{,t} + \tilde{\omega} \cdot \nabla_y \tilde{v} + \tilde{v} \cdot \nabla_y \tilde{\omega} + C \nabla_y q$$

$$(1.19) \quad \tilde{v}^E = \tilde{v}^{(1)} + \epsilon \tilde{v}^{(2)} + \dots$$

$$(1.20) \quad \tilde{f}^E = \tilde{f}^{(1)} + \epsilon \tilde{f}^{(2)} + \dots, \text{ donde}$$

$$(1.21) \quad \tilde{f}^{(1)} = (\nabla a)^T [(u+w)_{,t} + (u+w) \cdot \nabla (u+w) + \nabla(p+\pi)],$$

$$(1.22) \quad \tilde{f}^{(2)} = (\nabla a)^T [u_{,t} + u \cdot \nabla (u+w) + (u+w) \cdot \nabla u + \nabla p + u \cdot \nabla_y u^{(1)}],$$

$$(1.23) \quad \tilde{f}^{(k)} = (\nabla a)^T [u_{,t} + u \cdot \nabla (u+w) + (u+w) \cdot \nabla u + \nabla p^{(k-1)} + \sum_{r=1}^{k-1} u^{(r)} \cdot \nabla_y u^{(k-r)} + \sum_{r=1}^{k-2} u^{(r)} \cdot \nabla u^{(k-1-r)}],$$

para  $k \geq 3$ ;

y también

$$(1.24) \quad \nabla \cdot u^E = \tilde{E}^{-1} \nabla_y \cdot \tilde{\omega} + \nabla_y \cdot \tilde{v}^E + g^E$$

donde

$$(1.25) \quad g^E = g^{(1)} + \epsilon g^{(2)} + \dots, \text{ siendo}$$

$$g^{(1)} = \nabla \cdot (u+w),$$

$$g^{(k)} = \nabla \cdot u^{(k-1)}, \quad k \geq 2.$$

### 3 - Ecuación del campo medio

El sistema de Euler (1.1)-(1.2) será verificado si se cumple, en primer lugar :

$$(1.26a) \quad a_{,t} + u \cdot \nabla a = 0,$$

$$(1.27) \quad T(\tilde{\omega}, \pi; C) = 0,$$

$$(1.28) \quad L(\tilde{v}^E, q^E; \tilde{\omega}, C) + \tilde{f}^E = 0.$$

La ecuación (1.26) queda completada con la condición inicial impuesta por (1.4), (1.9) :

$$(1.26b) \quad a(x, 0) = x.$$

La función  $a(x, t)$  constituye la coordenada Lagrangiana del problema. Es plausible esperar que el efecto de  $u^0$  sobre  $w^0$  sea de convección (o sea,  $w^0(\frac{x}{\epsilon}, x)$  sea transformado en  $w^0(\frac{a(x, t)}{\epsilon}, a(x, t))$  en un tiempo  $t$ ). Ello justifica la elección de los desarrollos (1.9)-(1.10). Por otra parte, (1.26) aparece también en los desarrollos realizados en potencias de  $\epsilon^{1/3}$  por M.P.P. [2], como consecuencia del análisis dimensional de Kolmogorov [3].

Por último, la ecuación para la divergencia (1.2) será verificada si

$$(1.29) \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0,$$

$$(1.30) \quad \nabla_y \cdot \tilde{v}^{\epsilon} + g^{\epsilon} = 0.$$

Las ecuaciones (1.27) y (1.29) constituyen una generalización de las ecuaciones de evolución de Euler para fluidos incompresibles, en función de una matriz  $C$  simétrica, presentando los tres invariantes que siguen (Ver Apéndice 2), expresados en función de  $w$  :

$$(1.31) \quad \langle w(\cdot, \tau) \rangle \quad (\text{Media})$$

$$(1.32) \quad q = \frac{1}{2} \langle |w(\cdot, \tau)|^2 \rangle \quad (\text{Energía cinética})$$

$$(1.33) \quad h = \frac{1}{2} \langle w(\cdot, \tau) \cdot (\nabla a \nabla_y) \times w(\cdot, \tau) \rangle \quad (\text{Helicidad global}).$$

El operador  $L$  definido por (1.18) es, por otra parte, el linealizado del operador  $T$  definido por (1.17). La verificación de las ecuaciones (1.28) y (1.30) exige el cumplimiento de las cuatro condiciones de compatibilidad mostradas en el Apéndice 2.

De esta forma se obtienen las ecuaciones verificadas por el campo medio  $u$  (ver Apéndice 3), de las que se explicitan el término en  $\varepsilon^0$  y el primer corrector, en  $\varepsilon^1$  :

$$(1.34) \quad \begin{cases} u_{,t} + u \cdot \nabla u + \nabla p + \nabla \cdot \langle \omega \otimes \omega \rangle + \varepsilon \nabla \cdot \langle \omega \otimes u^{(1)} + u^{(1)} \otimes \omega \rangle = o(\varepsilon) \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

además de un par de ecuaciones de transporte relativas a la energía cinética y a la helicidad, respectivamente :

$$(1.35) \quad q_{,t} + u \cdot \nabla q + \langle \omega \otimes \omega \rangle : \nabla u + \nabla \cdot \langle (\frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi) \omega \rangle + \\ + \varepsilon [\langle u^{(1)} \cdot \omega \rangle_{,t} + u \cdot \nabla \langle u^{(1)} \cdot \omega \rangle + \langle \omega \otimes u^{(1)} + u^{(1)} \otimes \omega \rangle : \nabla u + \\ + \nabla \cdot \langle (\rho^{(1)} + u^{(1)} \cdot \omega) \omega + (\frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi) u^{(1)} \rangle] = o(\varepsilon),$$

$$(1.36) \quad h_{,t} + u \cdot \nabla h + \frac{1}{2} \langle \omega \otimes r + r \otimes \omega \rangle : \nabla u + \nabla \cdot \langle (\frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi) \omega \rangle + s_{,t} \langle \omega, \tau \rangle + \nabla \times \omega \\ + \varepsilon [\langle u^{(1)} \cdot r \rangle_{,t} + u \cdot \nabla \langle u^{(1)} \cdot r \rangle + \frac{1}{2} \langle \omega \otimes \rho^{(1)} + u^{(1)} \otimes r + \rho^{(1)} \otimes \omega + r \otimes u^{(1)} \rangle : \nabla u + \\ + \frac{1}{2} \langle \omega \cdot \nabla \cdot \omega \rangle + \nabla \times u + \nabla \cdot \langle (\rho^{(1)} + u^{(1)} \cdot \omega) r + (\frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi) \rho^{(1)} \rangle + \\ + s_{,t} \langle \omega \cdot \nabla \times u^{(1)} + u^{(1)}_{,\tau} \cdot \nabla \times \omega \rangle] = o(\varepsilon),$$

donde se utiliza la notación :

$$(1.37) \quad r = (\nabla \alpha \nabla_j) \times \omega, \quad \rho^{(1)} = (\nabla \alpha \nabla_j) \times u^{(1)}$$

y las medias están tomadas con respecto a  $(y, \tau)$ .

Los términos en  $\varepsilon^0$  de (1.34) y (1.35) constituyen las ecuaciones obtenidas por M.P.P. [2][4]. Las ecuaciones (1.34) y (1.35) tienen la misma estructura que éstas, ya que si se define

$$(1.38) \quad \omega^{(1)} = \omega + \varepsilon u^{(1)}, \quad \pi^{(1)} = \pi + \varepsilon \rho^{(1)}, \quad r^{(1)} = r + \varepsilon \rho^{(1)} \\ q^{(1)} = \frac{1}{2} \langle |\omega^{(1)}|^2 \rangle, \quad h^{(1)} = \frac{1}{2} \langle \omega^{(1)} \cdot r^{(1)} \rangle,$$

se tiene :

$$(1.39) \quad u_{,t} + u \cdot \nabla u + \nabla p + \nabla \cdot \langle \omega^{(1)} \otimes \omega^{(1)} \rangle = o(\varepsilon), \quad \nabla \cdot u^{(1)} = 0;$$

$$(1.40) \quad q_{,t} + u \cdot \nabla q + \langle \omega^{(1)} \otimes \omega^{(1)} \rangle : \nabla u + \nabla \cdot \langle (\frac{1}{2} |\omega^{(1)}|^2 + \pi^{(1)}) \omega^{(1)} \rangle = o(\varepsilon);$$

$$(1.41) \quad h_{,t}^{(4)} + u \cdot \nabla h^{(4)} + \langle \omega^{(4)} \otimes \gamma^{(4)} \rangle : \nabla u + \nabla \cdot \left( \frac{1}{2} |\omega^{(4)}|^2 + \pi^{(4)} \right) \gamma^{(4)} + s_{,t} \langle \omega^{(4)} \rangle \cdot \nabla \times \omega^{(4)} = o(\varepsilon)$$

Es claro el paralelismo entre (1.34)-(1.36) y (1.39)-(1.41) : Estas últimas ecuaciones resultan de sustituir  $\omega$  por  $\omega^{(4)}$  en los términos en  $\varepsilon^0$  de las primeras. Por otra parte, las ecuaciones (1.35) y (1.36), o bien (1.40) y (1.41) tienen exactamente la misma estructura en el caso estacionario (Desarrollo asintótico independiente de  $\varepsilon$ ).

Existe además una gran analogía entre el sistema (1.39)-(1.41) y las ecuaciones del modelo  $k-\varepsilon$  :

El cierre empírico de las ecuaciones propuesto por este modelo es aquí sustituido por el tensor  $\nabla \cdot \langle \omega^{(4)} \otimes \omega^{(4)} \rangle$  que se determina, como veremos, a partir de  $(\nabla a)^T (\nabla a)$ ,  $q$  y  $h$ . Se trata, pues, de un tensor de Reynolds, que será un tensor de viscosidad turbulenta si es de carácter elíptico respecto a  $-(\nabla u + \nabla u^T)$ .

#### 4 - Determinación de los términos del desarrollo

##### 4.1. Fluctuación canónica

El par  $(\omega, \pi)$  que aparece en los términos en  $\varepsilon^0$  de los desarrollos (1.9)-(1.10) puede ser calculado a partir de la solución  $(\tilde{\omega}, \pi)$  de (1.27) ya que

$$(1.42) \quad \tilde{\omega} = (\nabla a)^T \omega$$

Llamaremos a  $\tilde{\omega}$  "fluctuación canónica". Puesto que la media de  $\omega$  es nula,  $\tilde{\omega}$  debe verificar también

$$(1.43) \quad \langle \tilde{\omega} \rangle = 0.$$

Sin embargo (1.27) y (1.43) no determinan  $(s_{,t}, \tilde{\omega}, \pi)$  de forma única, ya que si  $(s_{,t}, \tilde{\omega}, \pi)$  es solución, también lo es  $(\lambda s_{,t}, \lambda \tilde{\omega}, \lambda \pi)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . Es aquí donde los invariantes de la ecuación (1.27) juegan un papel importante, al venir  $q$  y  $h$  determinados por (1.35) y (1.36) :  $\tilde{\omega}$  debe ser la solución de (1.27)-(1.43) cuyos invariantes sean :

$$(1.44) \quad \langle \tilde{\omega} \rangle = 0, \quad \langle \tilde{\omega} \cdot \bar{C}^{-1} \tilde{\omega} \rangle = q, \quad \langle \tilde{\omega} \cdot \bar{C}^{-1} \tilde{\gamma} \rangle = h.$$

La determinación de una solución aislada que verifique (1.27)+(1.44) dista de ser un problema resuelto. Es posible encontrar soluciones con espectro discreto : por ejemplo, la función independiente de  $\mathcal{Z}$

$$(1.45) \quad \tilde{\omega} = \operatorname{Re} \hat{\omega} \cdot e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \quad | \quad \hat{\omega} = \alpha + i\beta; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^3$$

verifica (1.27) y (1.43), si  $\alpha \cdot \mathbf{k} = \beta \cdot \mathbf{k} = 0$ . Por tanto, (1.44) sera verificado para una infinidad de valores de  $\alpha$  y  $\beta$ . Sin embargo, estas soluciones son degeneradas en el sentido indicado en el Apéndice 4, y sólo pueden ser considerados a título indicativo. En adelante, será necesario asumir la hipótesis de que las ecuaciones (1.27) y (1.44) definen soluciones aisladas, de forma continua respecto de  $C$ , cuyo valor para la identidad sea  $\omega_0$ .

Desde el punto de vista numérico, como se muestra en el Capítulo 4, es posible aparentemente encontrar soluciones que verifiquen tal propiedad de continuidad, a partir de un  $\omega_0$  arbitrario, pero hasta ahora sólo ha sido posible "controlar"  $q$  para  $h = 0$ .

#### 4.2. Términos superiores

Las ecuaciones (1.14) y (1.24) pueden escribirse como

$$(1.46) \quad \begin{cases} u_t^E + u^E \cdot \nabla u^E + \nabla p^E = (\nabla a)^{-T} \sum_{k \geq 1} \varepsilon^{k-1} [L(\tilde{u}^{(k)}, p; \tilde{\omega}, c) + \tilde{f}^{(k)}], \\ \nabla \cdot u^E = \sum_{k \geq 1} \varepsilon^{k-1} (\nabla_y \cdot \tilde{u}^{(k)} + g^{(k)}). \end{cases}$$

En principio,  $\tilde{u}^{(k)}$  vendría definido mediante la anulación de los términos en  $\varepsilon^{k-1}$  de (1.46). Sin embargo, ello no es posible porque  $\{\tilde{f}^{(k)}, g^{(k)}\}$  no cumple las condiciones de compatibilidad (Apéndice 2). Por tanto, es necesario considerar la proyección de  $\{\tilde{f}^{(k)}, g^{(k)}\}$  en el subespacio ortogonal del ker de operador adjunto de  $\{L, \nabla_y \cdot\}$  (Apéndice 4), que notaremos  $\{P\tilde{f}^{(k)}, Pg^{(k)}\}$ , y escribir (1.46) en la forma

$$(1.47) \quad \begin{cases} \sum_{k \geq 1} \varepsilon^{k-1} [L(\tilde{u}^{(k)}, p; \tilde{\omega}, c) + P\tilde{f}^{(k)}] + \tilde{f}^E - P\tilde{f}^E = 0, \\ \sum_{k \geq 1} \varepsilon^{k-1} [\nabla_y \cdot \tilde{u}^{(k)} + Pg^{(k)}] + g^E - Pg^E = 0. \end{cases}$$

Las ecuaciones (1.34)-(1.36) pueden ser escritas

$$(1.48) \quad \{\tilde{f}^E, g^E\} = \{P\tilde{f}^E, Pg^E\}$$

y, por tanto,  $u^{(k)}$  viene determinado por :

$$(1.49) \quad u^{(k)} = (\nabla a)^{-T} \tilde{u}^{(k)}$$

$$(1.50) \quad \begin{cases} L(u^{(k)}, p^{(k)}; \tilde{\omega}, C) + P\tilde{f}^{(k)} = 0; \quad \nabla_j \cdot \tilde{u}^{(k)} + Pg^{(k)} = 0 \\ \langle \tilde{u}^{(k)} \rangle = 0 \end{cases}$$

estando dados, además, los otros dos invariantes, determinados a través de (1.35) y (1.36). Si en (1.36) notamos

$$(1.51) \quad \bar{q}^1 = q + \langle \tilde{u}^{(1)} \cdot \tilde{\omega} \rangle \varepsilon, \quad \bar{h}^{(1)} = h + \langle \tilde{u}^{(1)} \cdot \gamma \rangle \varepsilon,$$

se tiene

$$(1.52) \quad \langle \tilde{u}^{(1)} \cdot C^{-1} \tilde{\omega} \rangle = \frac{1}{\varepsilon} (\bar{q}^{(1)} - q), \quad \langle \tilde{u}^{(1)} \cdot C^{-1} \gamma \rangle = \frac{1}{\varepsilon} (\bar{h}^{(1)} - h)$$

Es necesario realizar aquí la misma hipótesis de existencia de soluciones aisladas de (1.50) y (1.52), dependientes continuamente de  $C$  y nulas para la identidad, que en el caso de la fluctuación canónica.

### 5 - Ecuaciones reducidas : $\tilde{\omega}$ impar

En la actualidad no es posible determinar la fluctuación canónica prefijando los tres invariantes. Hay, sin embargo, un caso particular en que este problema queda soslayado :  $\tilde{\omega}$  impar.

En tal caso, los términos en  $\varepsilon^0$  de (1.36) son todos nulos. Si la fluctuación  $\omega$  es pequeña, se puede despreciar la ecuación (1.41) para la helicidad, ya que los términos no nulos para  $\omega$  impar son de tercer orden en  $\omega$ , o bien son  $o(\varepsilon)$ .

El sistema se reduce entonces a las ecuaciones (1.39) y (1.40), siendo posible determinar  $\tilde{\omega}$  y  $\tilde{u}^{(1)}$  a partir de fluctuaciones normalizadas, que seguiremos notando  $\tilde{\omega}$  y  $\tilde{u}^{(1)}$ .

$$(1.53) \begin{cases} T(\tilde{\omega}, \tilde{\pi}; C) = \tilde{\omega} \cdot \nabla_y \tilde{\omega} + C \nabla_y \tilde{\pi} = 0; \nabla_y \cdot \tilde{\omega} = 0; \\ \langle \tilde{\omega} \rangle = 0; \frac{1}{2} \langle \tilde{\omega} \cdot C^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 1; \tilde{\omega}, \tilde{\pi} \text{ Y-periodicas} \end{cases}$$

$$(1.54) \begin{cases} L(\tilde{u}^{(1)}, \tilde{p}^{(1)}; \tilde{\omega}, C) = \tilde{\omega} \cdot \nabla_y \tilde{u}^{(1)} + \tilde{u}^{(1)} \cdot \nabla_y \tilde{\omega} + C \nabla_y \tilde{p}^{(1)} = -q^{-1/2} \tilde{p}^{(1)}; \\ \nabla_y \cdot \tilde{u}^{(1)} = Pq^{(1)}; \langle \tilde{u}^{(1)} \rangle = 0; \langle \tilde{u}^{(1)} \cdot C^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 0; \tilde{u}^{(1)}, \tilde{p}^{(1)} \text{ Y-periodicas} \end{cases}$$

Entonces,  $\omega, \pi; u^{(1)}$  y  $p^{(1)}$  vienen dados por

$$(1.55) \begin{cases} \omega = q^{1/2} (\nabla a)^{-T} \tilde{\omega}; \pi = q \tilde{\pi} \\ u^{(1)} = (\nabla a)^{-T} \tilde{u}^{(1)}; p^{(1)} = q^{1/2} \tilde{p}^{(1)} \end{cases}$$

De esta forma, las ecuaciones del modelo reducido son las siguientes :

$$(1.56a) \quad u_{,t} + u \cdot \nabla u + \nabla p + \nabla \cdot \langle \omega \otimes \omega \rangle + \varepsilon \nabla \cdot \langle \omega \otimes u^{(1)} + u^{(1)} \otimes \omega \rangle = o(\varepsilon),$$

$$(1.56b) \quad \nabla \cdot u = 0$$

$$(1.57) \quad q_{,t} + u \cdot \nabla q + \langle \omega \otimes \omega \rangle : \nabla u + \varepsilon [ \langle u^{(1)} \cdot \omega \rangle_{,t} + u \cdot \nabla \langle u^{(1)} \cdot \omega \rangle + \langle \omega \otimes u^{(1)} + u^{(1)} \otimes \omega \rangle + \nabla \cdot \langle (p^{(1)} + u^{(1)} \cdot \omega) \omega + (\pi + \frac{1}{2} |\omega|^2) u^{(1)} \rangle ] = o(\varepsilon).$$

En adelante, consideraremos el modelo definido por (1.53)-(1.57). Su implementación numérica requiere la tabulación de los términos de (1.56)-(1.57) que dependen de la matriz  $C$ , en función de esta. La dependencia respecto de  $u$  de  $\tilde{p}^{(1)}$  hace impracticable tal tabulación en general. Por ello, se utilizarán métodos indirectos que permitan la obtención de los términos de viscosidad generados por  $u^{(1)}$  en (1.56a) y (1.57). A ello se dedican los Capítulos 2 y 4.

## C A P I T U L O 2

### SIMETRIAS DE LAS FLUCTUACIONES CANONICAS :

#### APLICACION A LA TABULACION DE LOS TENSORES DE REYNOLDS

En este capítulo se estudia una aproximación mediante desarrollo de Taylor de los tensores de Reynolds

$$R = \langle \omega \otimes \omega \rangle \quad \text{y} \quad R^{(1)} = \langle \omega \otimes u^{(1)} + u^{(1)} \otimes \omega \rangle$$

que aparecen en la ecuación del campo medio (1.34).

En primer lugar, se muestran las simetrías presentadas por los operadores (1.52) y (1.53), que serán aplicadas posteriormente a las tabulaciones.

La aproximación realizada es lineal respecto de las componentes de la matriz  $C$  en el caso de  $R$ , y constante en el de  $R^{(1)}$ . En la tabulación de  $R$  se usan las derivadas formales de  $\tilde{\omega}$  respecto de las componentes de  $C$ , afín de obtener los coeficientes de Taylor de primer orden.

#### 1. - SIMETRIAS

Sean  $\mathcal{K}^3$  el conjunto de las matrices cuadradas de tercer orden, y  $\mathcal{K}_S^3$  el conjunto de las matrices simétricas de  $\mathcal{K}^3$ .

Consideremos los operadores que intervienen en las ecuaciones verificadas por  $\tilde{\omega}$  y  $\tilde{u}^{(1)}$  :

$$(2.1) \quad T(\tilde{\omega}, \tilde{\pi}; C) = \tilde{\omega} \cdot \nabla \tilde{\omega} + C \nabla \tilde{\pi}$$

y su operador linealizado :

$$(2.2) \quad L(\tilde{u}, \tilde{p}; \tilde{\omega}, c) = \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \cdot \nabla \tilde{u} + c \nabla \tilde{p}$$

para  $c \in \mathcal{M}^3$ .

Tales operadores presentan dos tipos de simetrías : De permutación - Afectan a las posiciones relativas de variables y componentes, y de paridad - Afectan a los signos de variables y componentes.

### 1.1. Simetrías de permutación de los operadores.

Sea  $S_3$  el grupo de permutaciones de orden tres, y definamos para  $\sigma \in S_3$ :

$$(2.3) \quad \text{Dado } y \in \mathbb{R}^3,$$

$$y^\sigma = (y_{\sigma(1)}, y_{\sigma(2)}, y_{\sigma(3)}).$$

$$(2.4) \quad \text{Dado } \tilde{f}: Y = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3 \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$\tilde{f}_i^\sigma(y) = \tilde{f}_{\sigma(i)}(y^{\sigma^{-1}}), \quad 1 \leq i \leq 3.$$

$$(2.5) \quad \text{Dado } h: Y \rightarrow \mathbb{R},$$

$$h^\sigma(y) = h(y^{\sigma^{-1}}).$$

$$(2.6) \quad \text{Dada } c \in \mathcal{M}^3,$$

$$c^\sigma \in \mathcal{M}^3 \text{ definida por } c_{ij}^\sigma = c_{\sigma(i)\sigma(j)}, \quad 1 \leq i, j \leq 3.$$

Bajo tales notaciones, las simetrías de permutación se expresan como sigue :

Proposición 2.1 : Se verifica :

$$(2.7) \quad T_i(\tilde{\omega}^\sigma, \tilde{\pi}^\sigma; c^\sigma)(y) = T_{\sigma(i)}(\tilde{\omega}, \tilde{\pi}; c)(y^{\sigma^{-1}})$$

$$(2.8) \quad L_i(\tilde{u}^\sigma, \tilde{p}^\sigma; \tilde{\omega}^\sigma, c^\sigma)(y) = L_{\sigma(i)}(\tilde{u}, \tilde{p}; \tilde{\omega}, c)(y^{\sigma^{-1}})$$

$$(2.9) \quad \nabla \cdot \tilde{\omega}^\sigma(y) = (\nabla \cdot \tilde{\omega})(y^{\sigma^{-1}})$$

$$(2.10) \quad \langle \tilde{u}^\sigma, (c^\sigma)^{-1} \tilde{\omega}^\sigma \rangle = \langle \tilde{u}, c^{-1} \tilde{\omega} \rangle$$

Demostración : Veamos, por ejemplo, (2.7)

Puesto que  $\frac{\partial}{\partial y_i} \tilde{\omega}(y^{\sigma^{-1}}) = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y_{\sigma y_i}}(y^{\sigma^{-1}})$ , se tiene

$$T_{\alpha}(\tilde{\omega}^{\sigma}, \tilde{\pi}^{\sigma}, \tilde{c}^{\sigma})(y) = \tilde{\omega}_{\sigma y_i}(y^{\sigma^{-1}}) \tilde{\omega}_{\sigma \omega, \sigma y_j}(y^{\sigma^{-1}}) + c_{\sigma \omega, \sigma y_j} \tilde{\pi}_{\sigma y_j}(y^{\sigma^{-1}}) = T_{\sigma \alpha}(\tilde{\omega}, \tilde{\pi}; c)(y^{\sigma^{-1}})$$

Para obtener (2.10), basta considerar que  $(c^{\sigma})_{ij}^{-1} = c_{\sigma^{-1}i, \sigma^{-1}j}^{-1}$  ■

Consecuencias :

Sea  $\tilde{\omega}(\cdot; c), \tilde{\pi}(\cdot; c)$  una solución periódica de

$$(2.11) \quad T(\tilde{\omega}, \tilde{\pi}; c) = 0 \quad \text{en } Y,$$

$$\nabla \cdot \tilde{\omega} = 0, \quad \langle \tilde{\omega}, \tilde{c}^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 2$$

Si  $\tilde{c}^{\sigma} = c$  para  $\sigma \in S_3$  dado, entonces  $\tilde{\omega}^{\sigma}$  es también solución de (2.11).

En caso de existir solución única de (2.11) para  $c = I$ , ello implicaría  $\tilde{\omega}^{\sigma} = \tilde{\omega}$ .

Se trata, pues, de una propiedad deseable de  $\tilde{\omega}$ . Por ello, nos interesarán los soluciones  $\tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\cdot; I)$  que verifiquen  $\tilde{\omega}^{\sigma} = \tilde{\omega}$ .

Es de notar que estas simetrías generalizan las mostradas por BEGUE y PIRONNEAU [5].

## 1.2. Simetrías de paridad de los operadores.

Adoptemos las siguientes notaciones

$$(2.12) \quad \varepsilon_{ij} = (-1)^{1+\delta_{ij}} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \\ -1 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j \in \mathbb{Z}$$

$$(2.13) \quad \text{Para } y \in \mathbb{R}^3, k=1,2,3; \quad y^k \in \mathbb{R}^3 \quad \text{definido por}$$

$$y_j^k = -\varepsilon_{jkr} y_r, \quad 1 \leq j \leq 3$$

$$(2.14) \quad \text{Para } \lambda = \pm 1; \mu \in \mathbb{R}; \tilde{u}, \tilde{\omega} : Y \rightarrow \mathbb{R},$$

$\tilde{u}^k, \tilde{\omega}^k$  definidos por

$$\tilde{\omega}_j^k(y) = \lambda \varepsilon_{jkr} \tilde{\omega}(y^k),$$

$$\tilde{u}_j^k(y) = \lambda \mu \varepsilon_{jkr} \tilde{u}_r(y^k)$$

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \tilde{\pi}^k(y) &= \tilde{\pi}(y^k), \\ \tilde{p}^k(y) &= \tilde{p}(y^k) \end{aligned}$$

$$(2.16) \quad \text{Para } C \in \mathcal{M}^3, C^k \in \mathcal{M}^3 \quad \text{definida por}$$

$$C_{ij}^k = \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jn} C_{ij}$$

Las simetrías de paridad, expresadas bajo estas notaciones, son :

Proposición 2.2 : Sean  $\lambda = \pm 1, \mu \in \mathbb{R}$  Entonces,

$$(2.17) \quad T_i(\tilde{u}^k, \tilde{p}^k; C^k)(y) = -\varepsilon_{ik} T_i(\tilde{u}, \tilde{p}; C)(y^k)$$

$$(2.18) \quad L_i(\tilde{u}^k, \tilde{p}^k; \tilde{\omega}^k, C^k)(y) = -\mu \varepsilon_{ik} L_i(\tilde{u}, \tilde{p}; \tilde{\omega}, C)(y^k)$$

$$(2.19) \quad \nabla \cdot \tilde{\omega}^k(y) = (\nabla \cdot \tilde{\omega})(y^k)$$

$$(2.20) \quad \langle \tilde{u}^k \cdot (C^k)^{-1} \tilde{\omega}^k \rangle = \langle \tilde{u} \cdot C^{-1} \tilde{\omega} \rangle . \quad \blacksquare$$

### Consecuencias

1) De nuevo, si  $\tilde{\omega}$  es una solución de (2.11), se tiene  $\tilde{\omega}^k$  solución de

$$(2.21) \quad \begin{aligned} T(\tilde{\omega}^k, \tilde{p}^k; C^k) &= 0, \quad \nabla \cdot \tilde{\omega}^k = 0, \\ \langle \tilde{\omega}^k \cdot (C^k)^{-1} \tilde{\omega}^k \rangle &= 2. \end{aligned}$$

Por ello, nos interesaran las soluciones que presenten estas simetrías, en el caso de ser  $C = C^k$ .

2) Si se toma  $\lambda = -1$  en (2.14), se tiene

$$(2.22) \quad \begin{cases} \tilde{\omega}(-y; C) = -\tilde{\omega}(y; C) \\ \tilde{p}(-y; C) = \tilde{p}(y; C) \end{cases}, \quad \forall C \in \mathcal{M}_S^3$$

O sea,  $\tilde{\omega}(\cdot; C)$  es una función impar para toda matriz  $C$ . Entonces, la helicidad es nula, y

$$(2.23) \quad \langle \tilde{\omega} \rangle = 0.$$

Por ello, nos interesaremos en las soluciones de (2.11) que presenten este tipo de simetría, y así las supondremos en el resto del capítulo.

### 1.3. Simetrías de $\tilde{\omega}$ y sus derivadas.

Sea  $C \in e\mathcal{M}^3$ , y sea la ecuación obtenida derivando (2.11) formalmente respecto de la componente  $C_{ij}$ :

$$(2.24) \quad L(\tilde{u}^{ij}, \tilde{\mu}^{ij}, \tilde{\omega}, c) = \tilde{f}^{ij} \text{ en } Y, \quad \tilde{u}^{ij}, \tilde{\mu}^{ij} \text{ periódicas en } Y \\ \nabla \cdot \tilde{u}^{ij} = 0, \quad \langle \tilde{u}^{ij}, \tilde{C}^{-1} \tilde{\omega} \rangle = \tilde{C}_{ik}^{-1} \text{Re} \tilde{C}_{jl}^{-1}$$

donde

$$(2.25) \quad \tilde{u}^{ij} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial C_{ij}}, \quad \tilde{\mu}^{ij} = \frac{\partial \tilde{\pi}}{\partial C_{ij}}, \quad \tilde{f}_k^{ij} = -\delta_{ik} \tilde{\pi}_{,j};$$

desde un punto de vista formal: si  $\tilde{u}^{ij}$  es la derivada de  $\tilde{\omega}$  respecto de  $C_{ij}$ , debe verificar (2.24).

Proposición 2.3:  $\forall \sigma \in S_3$ , se verifica

$$(2.26) \quad \tilde{\omega}_i(y^\sigma; c^\sigma) = \tilde{\omega}_{\sigma(i)}(y_i c), \quad \tilde{\pi}(y^\sigma; c^\sigma) = \tilde{\pi}(y_i c);$$

$$(2.27) \quad \tilde{u}_k^{ij}(y^\sigma; c^\sigma) = \tilde{u}_{\sigma(k)}^{\sigma(i)\sigma(j)}(y_i c); \quad \tilde{\mu}^{ij}(y^\sigma; c^\sigma) = \tilde{\mu}^{\sigma(i)\sigma(j)}$$

Demostración:

(2.26) es consecuencia inmediata de (2.7).

Por otra parte,

$$(2.28) \quad \tilde{f}_k^{ij}(y^\sigma; c^\sigma) = \tilde{f}_{\sigma(k)}^{\sigma(i)\sigma(j)}(y_i c)$$

Habida cuenta de (2.8), (2.9) y (2.10), se tiene (2.27).

Nota: Las igualdades (2.26) y (2.27) deben ser entendidas en el sentido de que si, por ejemplo,

$$(2.29) \quad T(\tilde{\omega}, \tilde{\pi}; C) = 0, \quad \text{entonces} \\ T(\tilde{\omega}_{\sigma(1)}, \tilde{\omega}_{\sigma(2)}, \tilde{\omega}_{\sigma(3)}, \tilde{\pi}; c^\sigma)(y^{\sigma^{-1}}) = 0.$$

Proposición 2.4 :  $\forall \sigma \in S_3$  , se verifica

$$(2.30) \quad \tilde{\omega}_j(y^k; c^k) = -\varepsilon_{jkr} \tilde{\omega}(y_i; c), \quad \tilde{\pi}(y^k; c^k) = \tilde{\pi}(y_i; c);$$

$$(2.31) \quad \tilde{u}_e^{ij}(y^k; c^k) = -\varepsilon_{ikr} \varepsilon_{jkr} \varepsilon_{elr} \tilde{u}^{ij}(y_i; c);$$

$$\tilde{\mu}^{ij}(y^k; c^k) = \varepsilon_{ikr} \varepsilon_{jkr} \tilde{\mu}^{ij}(y_i; c).$$

Demostración :

(2.30) se sigue de (2.17) para  $\lambda = -1$  . Puesto que

$$(2.31) \quad f_e^{ij}(c^k)(y) = -\varepsilon_{ikr} \varepsilon_{jkr} \varepsilon_{elr} f_e^{ij}(c)(y^k),$$

tomando  $\mu = \varepsilon_{ikr} \varepsilon_{jkr}$  en (2.18) se hacen coincidir las simetrías del operador linealizado y del segundo miembro de (2.24). ■

### Consecuencias

1) Notemos, en el caso de la matriz identidad,

$$(2.32) \quad \tilde{\omega}(y) = \tilde{\omega}(y_i; I), \quad \tilde{u}^{ij}(y) = \tilde{u}^{ij}(y_i; I).$$

Entonces  $\tilde{u}^{ij}$  presenta las mismas simetrías que  $\tilde{\omega}$ , tanto de permutación como de paridad.

2) Cada  $\tilde{u}^{ij}(\cdot; c)$  es una función impar, siendo  $\tilde{\mu}^{ij}(\cdot; c)$  par.

Se trata de la misma propiedad (2.22) verificada por  $\tilde{\omega}$ .

3) Comportamiento en las fronteras.

Sean las caras de  $Y$  :

$$(2.33) \quad \Lambda_m^\pm = \{y \in Y \mid y_m = \pm 1\}, \quad 1 \leq m \leq 3$$

y las intersecciones de  $Y$  con los planos coordenados :

$$(2.34) \quad \Gamma_m = \{y \in Y \mid y_m = 0\}, \quad 1 \leq m \leq 3,$$

del caracter periódico de  $\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{u}^{ij}$  se tiene

$$(2.35) \quad \tilde{\omega}_R |_{\Sigma_{im}} = \frac{1}{2} (1 - \epsilon_{km}) \tilde{\omega}_R |_{\Sigma_{im}}$$

$$(2.36) \quad \tilde{u}_R^{ij} |_{\Sigma_{im}} = \frac{1}{2} (1 - \lambda \epsilon_{im} \epsilon_{jm} \epsilon_{km}) \tilde{u}_R^{ij} |_{\Sigma_{im}}$$

$$(2.37) \quad \tilde{\mu}^{ij} |_{\Sigma_{im}} = (1 + \epsilon_{im} \epsilon_{jm}) \tilde{\mu}^{ij} |_{\Sigma_{im}}$$

donde  $\Sigma_{im}$  puede ser  $\Delta_{im}^+$ ,  $\Delta_{im}^-$  y  $\Gamma_{im}$ .

## 2. - TABULACIONES

### 2.1. Tabulación lineal de

Consideremos la transformación

$$(2.38) \quad \tau: c \in \mathcal{M}^3 \rightarrow \langle \tilde{\omega}(c; c) \otimes \tilde{\omega}(c; c) \rangle \in \mathcal{M}_S^3;$$

aproximada mediante los términos lineales de su desarrollo de Taylor, entorno a la identidad :

$$(2.39) \quad \tau_L(c) = \tau(I) + \frac{\partial \tau}{\partial c_{pq}}(I) (c_{pq} - \delta_{pq}).$$

Afin de determinar  $\tau_L$ , sean las matrices

$$(2.40) \quad A^{pq} = \begin{cases} \frac{\partial \tau}{\partial c_{pq}}(I) + \frac{\partial \tau}{\partial c_{qp}}(I) & \text{si } p \neq q \\ \frac{\partial \tau}{\partial c_{pq}}(I) & \text{si } p = q \end{cases}$$

Entonces,

$$(2.41) \quad A^{pq} = \langle \tilde{v}^{pq} \otimes \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \otimes \tilde{v}^{pq} \rangle,$$

donde

$$(2.42) \quad \tilde{v}^{pq} = \begin{cases} \tilde{v}^{pq} + \tilde{v}^{qp} & \text{si } p \neq q \\ \tilde{v}^{pq} & \text{si } p = q \end{cases}.$$

Siendo de nuevo  $\tilde{u}^{pq} = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial c_{pq}} (I)$ .

Si  $C \in \mathcal{M}_S^3$ , se tiene entonces

$$(2.43) \quad \mathcal{Z}_L(C) = \mathcal{Z}(I) + \sum_{p \leq q}^{pq} A^{pq} (c_{pq} - \delta_{pq}).$$

Las matrices  $A^{pq}$  presentan una estructura especial que puede ser obtenida mediante el cálculo directo de sus elementos, a partir de la ecuación (2.1), o bien a partir de sus simetrías.

### Proposición 2.5 :

Sea  $(\tilde{\omega}, \tilde{\pi})$  una solución de (2.21) con simetría impar  $(\tilde{\omega}_j(y^k) = -\varepsilon_{jk} \tilde{\omega}_j(y))$  tal que  $\langle \tilde{\pi} \rangle = 0$ , y sean  $(\tilde{u}^{pq}, \tilde{\mu}^{pq})$  soluciones de (3.24),  $\langle \tilde{\mu}^{pq} \rangle = 0$ .

Notemos

$$(2.44) \quad \Lambda_i = \Lambda_i^- \cup \Lambda_i^+; \quad D^{pq} = \frac{\partial C}{\partial c_{pq}}.$$

Entonces,

$$(2.45) \quad \text{i) } \langle \tilde{\omega}_i \tilde{\omega}_j \rangle = \delta_{ij} \int_{\Lambda_i} \tilde{\pi} ds_i, \quad y.$$

$$(2.46) \quad \text{ii) } \langle \tilde{u}_i^{pq} \tilde{\omega}_j + \tilde{u}_j^{pq} \tilde{\omega}_i \rangle = \frac{1}{4} (1 - \varepsilon_{ij}) (1 - \varepsilon_{pi} \varepsilon_{qi}) \int_{\Lambda_i} \tilde{\omega}_j \tilde{u}_i^{pq} ds_i + \\ + \frac{1}{2} \delta_{ij} (1 + \varepsilon_{pi} \varepsilon_{qi}) \int_{\Lambda_i} \tilde{\mu}^{pq} ds_i + d_{ij}^{pq} \int_{\Lambda_i} \tilde{\pi} ds_i.$$

### Demostración :

i) Si se multiplica (2.21) por  $y_i \vec{e}_j$ , y se integra por partes, se obtiene : ( $\vec{\nu}$  : Normal exterior a  $\partial Y$ )

$$(2.47) \quad - \int_Y (\tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k + c_{jk} \tilde{\pi}) \delta_{ik} dy + \int_{\partial Y} (\tilde{\omega}_j \tilde{\omega}_k + c_{jk} \tilde{\pi}) y_i \nu_k ds = 0.$$

Puesto que  $\nu_k |_{\Lambda_j^\pm} = \pm \delta_{kj}$ , utilizando (2.35) se tiene  $\tilde{\omega}_k \nu_k |_{\Lambda_k} = 0$ .

Ademas,

$$(2.48) \quad \int_{\partial Y} c_{jk} \tilde{\pi} y_i \nu_k ds = \sum_{\ell=1}^3 \left[ \int_{\Lambda_\ell^+} c_{j\ell} \tilde{\pi} y_i ds_\ell^+ - \int_{\Lambda_\ell^-} c_{j\ell} \tilde{\pi} y_i ds_\ell^- \right] = \\ = c_{ii} \int_{\Lambda_i} \tilde{\pi} ds_i.$$

ii) De igual manera, de la ecuación (2.24) se obtiene

$$(2.49) \quad - \int_V (\tilde{w}_i \tilde{u}_j^{pq} + \tilde{w}_j \tilde{u}_i^{pq}) dy + \int_{\partial V} (\tilde{w}_j \tilde{u}_k^{pq} + \tilde{w}_k \tilde{u}_j^{pq}) y_i v_k ds = \\ = - \int_{\partial V} d_{ij}^{pq} v_k \tilde{\pi} y_i ds - \int_{\partial V} \tilde{u}^{pq} v_j y_i ds.$$

Utilizando las simetrías conocidas para la identidad ; (2.35) y (2.36), se obtiene

$$(2.50) \quad \int_{\partial V} \tilde{w}_j \tilde{u}_j^{pq} v_k y_i ds = \frac{1}{4} (1 - \epsilon_{ji}) (1 - \epsilon_{pi} \epsilon_{qi}) \int_{\Lambda_i} \tilde{w}_j \tilde{u}_i^{pq} ds_i,$$

$$(2.51) \quad \int_{\partial V} \tilde{p}^{pq} v_j y_i ds = \frac{1}{2} \delta_{ij} (1 + \epsilon_{pi} \epsilon_{qi}) \int_{\Lambda_i} \tilde{\mu}^{pq} ds_i,$$

$$(2.52) \quad d_{jk}^{pq} \int_{\partial V} \tilde{\pi} v_k y_i ds = d_{ij}^{pq} \int_{\Lambda_i} \tilde{\pi} ds_i.$$

Nota : Las expresiones (2.46) y (2.47) siguen siendo válidas si se invierten i y j.

Aplicando esta proposición, se obtienen las siguientes estructuras

$$(2.53) \quad \mathcal{T}(I) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}, \quad a_k = \int_{\Lambda_k} \tilde{\pi} ds_k;$$

$$(2.54) \quad A^{12} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha^{12} & 0 \\ \alpha^{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{12} \end{bmatrix}, \quad \alpha^{12} = \int_{\Lambda_1} \tilde{w}_2 \tilde{u}_1^{12} ds + \int_{\Lambda_1} \tilde{\pi} ds, \quad \beta^{12} = \int_{\Lambda_3} \tilde{\mu}^{12} ds_3;$$

$$(2.55) \quad A^{11} = \begin{bmatrix} \beta^{11} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^{11} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{11} \end{bmatrix}, \quad \alpha^{11} = \int_{\Lambda_1} \tilde{\mu}^{11} ds_1, \quad \beta^{11} = \int_{\Lambda_1} \tilde{\pi} ds_1 + \alpha^{11}.$$

y análogas estructuras para el resto de los  $A^{pq}$ .

Las matrices  $A^{pq}$  están interrelacionadas según el siguiente resultado

Proposición 2.6 :

Para todo  $\sigma \in S_3$ , se tiene

$$(2.56) \quad A_{ij}^{pq} = A_{\sigma(i)\sigma(j)}^{\sigma(p)\sigma(q)}.$$

Demostración :

Según las simetrías de la proposición 2.3,

$$\langle \tilde{w}_i \tilde{u}_j^{kl} \rangle (C^\sigma) = \langle \tilde{w}_{\sigma(i)} \tilde{u}_{\sigma(j)}^{\sigma(k)\sigma(l)} \rangle (C);$$

si  $C=I$ , entonces  $C^\sigma = C$ , de donde (2.56). ■

De esta forma, el número de parámetros desconocidos en las expresiones de los  $A^{pq}$  es de 5.

Por último, de (2.11b) se deduce

$$(2.57a) \quad \text{Tr } \mathcal{Z}(I) = 2,$$

y de (2.24c),

$$(2.57b) \quad \begin{cases} \text{Tr } A^{11} = 2 \langle \tilde{u}^{11} \cdot \tilde{w} \rangle = \frac{2}{3}, \\ \text{Tr } A^{12} = 2 \langle \tilde{u}^{12} \cdot \tilde{w} \rangle = 0. \end{cases}$$

Se obtiene así la siguiente estructura para  $A^{11}$ ,  $A^{12}$  :

$$(2.58) \quad A^{11} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - 2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$A^{12} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

donde sólo se desconocen dos parámetros.

Nota : Según la Proposición 2.6,

$$(2.59) \quad A^{11} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1 \\ \beta_1 & \delta_1 & \gamma_1 \end{bmatrix}$$

$$A^{12} = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \beta_2 & \alpha_2 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & \gamma_2 & \delta_2 \end{bmatrix},$$

obteniéndose las demas matrices a partir de  $A^{11}$ ,  $A^{12}$  por permutaciones.

Según la proposición 2.3, se tiene

$$(2.60) \quad \langle \tilde{u}_i^{pq} \tilde{w}_j \rangle = \delta_{ip} \delta_{jq} \langle \tilde{u}_i^{pq} \tilde{w}_j \rangle \quad \text{si } p \neq q \quad \text{y}$$

$$(2.61) \quad \langle \tilde{u}_i^{pq} \tilde{w}_j \rangle = \delta_{ij} \langle \tilde{u}_i^{pq} \tilde{w}_j \rangle \quad \text{si } p=q ;$$

De donde se obtienen de nuevo las estructuras dadas por (2.54), (2.55).

### Conclusión

Segun las simetrías de permutación,

$$(2.62) \quad \mathcal{C}(\mathbf{I}) = \frac{2}{3} \mathbf{I},$$

y entonces

$$(2.63) \quad \mathcal{C}_L(C) = -\alpha \text{Tr} C \mathbf{I} + \beta C + \left(\frac{2}{3} - 3\alpha - \beta\right) D(C_{11}, e_{22}, e_{33})$$

siendo  $D_{ij}(C_{11}, e_{22}, e_{33}) = \delta_{ij} C_{ii}.$

Por tanto, una aproximación lineal respecto a  $C$  de  $R$  viene dada por

$$(2.64) \quad R \simeq \mathcal{q} \left\{ \alpha \text{Tr} C \bar{C}^{-1} + \beta \mathbf{I} + \left(\frac{2}{3} - 3\alpha - \beta\right) (\nabla \bar{a})^T D (\nabla \bar{a})^{-1} \right\},$$

donde

$$(2.65) \quad \bar{C} = \nabla a (\nabla a)^T.$$

Nota : Las condiciones  $\langle \tilde{w} \cdot \tilde{u}^{ij} \rangle = \frac{1}{3} \delta_{ij}$  hacen que  $\tilde{v} = \tilde{u}^{11} + \tilde{u}^{22} + \tilde{u}^{33}$ ,

$$\tilde{q} = \tilde{\mu}^{11} + \tilde{\mu}^{22} + \tilde{\mu}^{33} + \tilde{\pi} \quad \text{verifiquen}$$

$$L(\tilde{v}, \tilde{q}; \tilde{w}, \mathbf{I}) = 0, \quad \nabla \cdot \tilde{v} = 0,$$

$$\langle \tilde{v} \cdot \tilde{w} \rangle = 0.$$

Por tanto,  $v=0$ ;  $A^{11} + A^{22} + A^{33} = \frac{2}{3} \mathbf{I}.$

## 2.2. Tabulación constante respecto a C de $R^{(4)}$

El tensor

$$(2.66) \quad R^{(4)} = \langle \tilde{u}^{(4)} \otimes \omega + \omega \otimes \tilde{u}^{(4)} \rangle$$

constituye el término superior en  $\mathcal{E}$  de la ecuación (1.34) : Depende del campo medio  $u$  y de la matriz  $C$ . A continuación se efectúa una tabulación constante respecto a  $C$  de los términos de viscosidad contenidos en  $R^{(4)}$ .

### a) Expresión de los términos de viscosidad

Segun (1.49),

$$(2.67) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(\tilde{u}^{(4)}, \tilde{p}^{(4)}; \tilde{\omega}, C) = \bar{q}^{-1/2} (\nabla \alpha)^T \left( \frac{1}{2} \bar{q}^{-1} \langle \omega \otimes \omega \rangle : \nabla u \omega - \omega \cdot \nabla u \right) + R \\ \nabla_y \cdot \tilde{u}^{(4)} = \nabla \cdot \omega, \quad \langle \tilde{u}^{(4)}, C^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 0; \\ \tilde{u}^{(4)}, \tilde{p}^{(4)} \text{ Y-periódicos en } y. \end{array} \right.$$

Sea  $\tilde{\chi}$  solución de

$$(2.68) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(\tilde{\chi}, \tilde{v}; \tilde{\omega}, C) = \bar{q}^{-1/2} (\nabla \alpha)^T \left( \frac{1}{2} \bar{q}^{-1} \langle \omega \otimes \omega \rangle : \nabla u \omega - \omega \cdot \nabla u \right) = \bar{q}^{-1/2} \\ \nabla_y \cdot \tilde{\chi} = 0, \quad \langle \tilde{\chi}, C^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 0; \\ \tilde{\chi}, \tilde{v} \text{ Y-periódicos en } y. \end{array} \right.$$

Entonces  $\tilde{u}^{(4)} = \tilde{\chi} + \text{Resto}$ , y este resto no depende explícitamente de  $\nabla u$ .

Se tiene la igualdad

$$\tilde{F} = u_{i,j} \bar{a}_{i,e}^{-1} \bar{a}_{j,m}^{-1} \left( \frac{1}{2} \langle \tilde{\omega}_e \tilde{\omega}_m \rangle \tilde{\omega} - C_{kel} \vec{e}_k \tilde{\omega}_m \right) :$$

Definamos  $\tilde{\chi}^{elm}$  como solución de

$$(2.69) \quad \left\{ \begin{array}{l} L(\tilde{\chi}^{elm}, \tilde{v}^{elm}; \tilde{\omega}, C) = \frac{1}{2} \langle \tilde{\omega}_e \tilde{\omega}_m \rangle \tilde{\omega} - C_{kel} \vec{e}_k \tilde{\omega}_m = \tilde{F}^{elm} \\ \nabla_y \cdot \tilde{\chi}^{elm} = 0; \quad \langle \tilde{\chi}^{elm}, C^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 0, \\ \tilde{\chi}^{elm}, \tilde{v}^{elm} \text{ periódicas en } Y. \end{array} \right.$$

Entonces  $\{P\tilde{F}^{elm}, 0\} = \{\tilde{F}^{elm}, 0\}$ , y

$$(2.70) \quad \tilde{\chi} = u_{i,j} \bar{a}_{i,e}^{-1} \bar{a}_{j,m}^{-1} \tilde{\chi}^{elm}$$

Por tanto, si notamos  $\omega' = (\nabla a)^{-T} \tilde{\omega}$ ,

$$(2.71) \quad \langle \omega \otimes u^{(1)} + u^{(1)} \otimes \omega \rangle = \frac{1}{2} A^{ij} u_{ij} + R$$

donde R no depende de  $\nabla u$ , y

$$(2.72) \quad A^{ij} = \langle \omega' \otimes \chi^{em} + \chi^{em} \otimes \omega' \rangle a_{i,e}^{-1} a_{j,m}^{-1}$$

O sea, en función de  $\tilde{\omega}$  y  $\tilde{\chi}^{em}$ ,

$$(2.73) \quad A^{ij} = (\nabla a)^{-T} \langle \tilde{\omega} \otimes \tilde{\chi}^{em} + \tilde{\chi}^{em} \otimes \tilde{\omega} \rangle (\nabla a)^{-1} a_{i,e}^{-1} a_{j,m}^{-1}.$$

### b) Tabulación

Afín de realizar una tabulación constante respecto a C de los tensores

$$(2.74) \quad B^{em} = \langle \tilde{\omega} \otimes \tilde{\chi}^{em} + \tilde{\chi}^{em} \otimes \tilde{\omega} \rangle,$$

basta considerar que las funciones  $\tilde{F}^{em}$  definidas por (2.69a) verifican las simetrías de posición (2.28), así como los de signo (2.31). Por ello, en el caso de la identidad,  $\tilde{\chi}^{em}$  y  $\tilde{\psi}^{em}$  tienen el comportamiento sobre las fronteras indicado por (2.36) y (2.37); y se verifica

$$(2.75) \quad \begin{cases} \tilde{\chi}_i^{em}(y^{\sigma}; \tilde{\omega}, I) = \tilde{\chi}_{\sigma i}^{em}(y_i; \tilde{\omega}, I), \\ \tilde{\chi}_i^{em}(y^k; \tilde{\omega}, I) = -\varepsilon_{ik} \varepsilon_{elk} \varepsilon_{mrk} \tilde{\chi}_i^{em}(y_i; \tilde{\omega}, I) \\ \tilde{\psi}^{em}(y^k; \tilde{\omega}, I) = \varepsilon_{elk} \varepsilon_{mrk} \tilde{\psi}^{em}(y_i; \tilde{\omega}, I) \end{cases}$$

y también

$$(2.76) \quad \langle \tilde{\chi}_i^{em} \tilde{\omega}_j + \tilde{\chi}_j^{em} \tilde{\omega}_i \rangle = \frac{1}{4} (1 - \varepsilon_{ij}) (1 - \varepsilon_{li} \varepsilon_{mli}) \int_{\Delta_i} \tilde{\omega}_j \tilde{\chi}_i^{em} ds_i + \\ + \frac{1}{2} \delta_{ij} (1 + \varepsilon_{li} \varepsilon_{mli}) \int_{\Delta_i} \tilde{\psi}^{em} ds_i + \\ + \frac{1}{3} \delta_{pq} \delta_{ij} \langle \omega_j y_i \rangle - \delta_{pj} \delta_{qi} \langle \omega_q y_i \rangle.$$

De forma análoga a 2.1.1, se obtiene

$$(2.77) \quad B_{ij}^{lm} = B_{\sigma(i)\sigma(j)}^{\sigma(l)\sigma(m)},$$

pudiendo obtenerse la estructura de los matrices  $B^{lm}$ , bien a partir de (2.75), o bien a partir de las simetrías (2.74), que indican

$$(2.78) \quad \begin{aligned} B_{ij}^{lm} &= \delta_{il} \delta_{jm} B_{ij}^{lm} \quad \text{si } l \neq m, \\ B_{ij}^{lm} &= \delta_{ij} B_{ij}^{lm} \quad \text{si } l = m \end{aligned}$$

se obtiene entonces

$$(2.79) \quad B^{11} = \begin{bmatrix} -2\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad B^{12} = \begin{bmatrix} 0 & \beta & 0 \\ \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

siendo

$$(2.80) \quad \begin{aligned} \alpha &= \int_{\Lambda_2} \tilde{v}^{11} ds_2 = \int_{\Lambda_3} \tilde{v}^{11} ds_3 = \int_{\Lambda_1} \tilde{v}^{11} ds_1 - \frac{2}{3} \langle \omega_1^2 \rangle, \\ \beta &= \int_{\Lambda_1} \tilde{\omega}_2 \tilde{\chi}_1^{12} ds_1 = \int_{\Lambda_2} \tilde{\omega}_1 \tilde{\chi}_2^{12} ds_2 - \langle \omega_2 y_2 \rangle \end{aligned}$$

se obtiene así la aproximación

$$(2.81) \quad \begin{aligned} R^{(1)} &\simeq \frac{1}{7} \langle \tilde{\omega} \otimes \tilde{\chi} + \tilde{\chi} \otimes \tilde{\omega} \rangle (I) = \\ &= \frac{1}{7} \left[ \beta (\nabla u + \nabla u^T) - (3\alpha + 2\beta) D(u_{1,1}; u_{2,2}; u_{3,3}) \right], \end{aligned}$$

que es constante respecto a  $C$ .

En el capítulo 4 se muestran los valores numéricos obtenidos para los los parámetros que aparecen en las aproximaciones de  $R$  y  $R^{(1)}$  aquí efectuadas.

### 3 - Términos de viscosidad en la ecuación de la energía

En la ecuación para la energía turbulenta (1.56) los términos de viscosidad aportados por  $\tilde{u}^{(4)}$  vienen dados a través del vector

$$(2.82) \quad \mathbf{V} = \left\langle (\rho + \tilde{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) \boldsymbol{\omega} + \left( \pi + \frac{1}{2} |\boldsymbol{\omega}|^2 \right) \tilde{u} \right\rangle$$

Tales términos pueden ser, como en el caso de  $\mathbb{R}^{(4)}$ , expresados explícitamente en función de  $\tilde{\omega}$ . Para ello, consideremos que

$$(2.83) \quad \tilde{\mathbf{f}}^{(4)} = (\nabla a)^T (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} + \nabla \pi) + \mathbf{r}, \quad \mathbf{g}^{(4)} = \nabla \cdot \boldsymbol{\omega},$$

donde  $\mathbf{r}$  no depende explícitamente de  $\nabla \varphi$ . Puesto que la dependencia de respecto de  $q$  viene dada por

$$(2.84) \quad \boldsymbol{\omega} = q^{1/2} \boldsymbol{\omega}', \quad \pi = q \tilde{\pi},$$

se tiene

$$(2.85) \quad \begin{cases} \tilde{\mathbf{f}}^{(4)} = \left( \frac{1}{2} \omega'_i \boldsymbol{\omega} + a_{e,i} \vec{e}_e \tilde{\pi} \right) q_{,i} + \text{resto} \\ \mathbf{g}^{(4)} = \frac{1}{2} q^{-1/2} \omega'_{,i} q_{,i} \end{cases}$$

y entonces

$$(2.86) \quad q^{-1/2} \tilde{\mathbf{f}}^{(4)} = 2(q_{,i})^{-1} a_{i,e}^{-1} G^e, \quad \mathbf{g}^{(4)} = (q_{,i})^{-1} a_{i,e}^{-1} \tilde{\omega}_e$$

donde

$$(2.87) \quad \tilde{G}^i = \frac{1}{2} \tilde{\omega}_i \tilde{\omega} + C_{ij} \vec{e}_j \tilde{\pi}$$

Si definimos ahora  $(\tilde{\xi}^i, \tilde{\varphi}^i)$  como solución de

$$(2.88) \quad \begin{cases} L(\tilde{\xi}^i, \tilde{\varphi}^i; \tilde{\omega}, C) + P(2\tilde{G}^i) = 0; \quad \nabla_y \cdot \tilde{\xi}^i + P(\tilde{\omega}_i) = 0 \\ \langle \tilde{\xi}^i \cdot C^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 0; \quad \tilde{\xi}^i, \tilde{\varphi}^i \text{ } \mathcal{Y}\text{-periódicas,} \end{cases}$$

$\tilde{u}^{(4)}, \tilde{p}^{(4)}$  pueden expresarse en la forma

$$(2.89) \quad \tilde{u}^{(4)} = (q_{,i})^{-1/2} a_{i,e}^{-1} \tilde{\xi}^e + \text{resto}, \quad \tilde{p}^{(4)} = (q_{,i})^{-1/2} a_{i,e}^{-1} \tilde{\varphi}^e + \text{resto},$$

y por tanto,

$$(2.90) \quad V = \beta \nabla (q^{3/2}) + \text{resto (independe. de } \nabla q)$$

siendo  $\beta$  el tensor dado por

$$(2.91) \quad \beta_{ij} = \frac{1}{3} \bar{a}_{j,l}^i \langle (\tilde{\varphi}^l + \xi^l \cdot \omega') \omega'_i + (\tilde{\pi} + \frac{1}{2} |\omega'|^2) \xi_i^l \rangle$$

Las simetrías de  $\tilde{\omega}$  permiten asegurar que

$$(2.92) \quad \tilde{G}_R^l(y^\sigma; C^\sigma) = \tilde{G}_{\sigma(k)}^{\sigma(l)}(y_i; C), \quad \forall \sigma \in S_3,$$

y por tanto debe verificarse

$$(2.93) \quad \tilde{\Sigma}_R^l(y^\sigma; C^\sigma) = \tilde{\Sigma}_{\sigma(k)}^{\sigma(l)}(y_i; C), \quad \tilde{\varphi}^l(y^\sigma; C^\sigma) = \tilde{\varphi}^{\sigma(l)}(y_i; C).$$

Para la matriz identidad se tiene

$$(2.94) \quad \beta_{ij} = \beta_{\sigma(i)\sigma(j)}$$

$$(2.95) \quad \beta = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma & \gamma \\ \gamma & \alpha & \gamma \\ \gamma & \gamma & \alpha \end{bmatrix}$$

Por otra parte, las simetrías de signo son

$$(2.96) \quad \tilde{\Sigma}_j^i(y^k; C^k) = \epsilon_{jkr} \epsilon_{irk} \tilde{\Sigma}_j^i(y_i; C) \quad \tilde{\varphi}^i(y^k; C^k) = -\epsilon_{irk} \tilde{\varphi}^i(y_i; C)$$

y entonces, si  $C = I$ :

$$(2.97) \quad \beta_{ij} = \delta_{ij} \beta_{ij},$$

$$(2.98) \quad \beta = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix},$$

con lo cual, aproximando  $V$  por su valor en la identidad, se tiene

$$(2.99) \quad V \simeq \frac{\alpha}{3} \nabla(q^{3/2}).$$

En el capítulo 4, se obtiene numéricamente el valor del parámetro  $\alpha$  .

CAPITULO 3

CALCULO NUMERICO DE LAS FLUCTUACIONES CANONICAS :  
INCORPORACION DE LAS SIMETRIAS AL CASO DISCRETO

Este capítulo presenta la resolución numérica de los problemas de Euler generalizados que aparecen en la definición de  $\tilde{w}$  y  $\tilde{u}^{(1)}$  (Cap. 1, Secc.5). En la Sección 1 se describe la vía de obtención numérica de las simetrías presentadas por la fluctuación canónica, modificando el código numérico desarrollado por Begue [1], que es adaptado en la Sección 2 al problema linealizado.

La importancia de las simetrías teóricas en el cálculo de los tensores de Reynolds  $R$  y  $R^{(1)}$  (Caps. 1,2) hace necesario el desarrollo de un algoritmo de resolución del Laplaciano discreto sobre un mallado simétrico, mediante el uso de la Transformada de Fourier Rápida, descrito en la Sección 3. Por último, se presentan los resultados numéricos obtenidos, en la Sección 4.

1. - Obtención de las Simetrías en la resolución numérica del problema para la fluctuación canónica

Consideremos la ecuación verificada por la fluctuación canónica en el caso reducido del modelo MPP (Cap.1, Secc.5) :

$$(3.1) \quad \begin{cases} \tilde{w} \cdot \nabla_y \tilde{w} + C \nabla_y \tilde{\pi} = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{w} = 0 \quad \text{em } \gamma \\ \|\tilde{w}\|_{[L^2(\gamma)]^3} = 1, \quad \tilde{w} \text{ periódica,} \end{cases}$$

en la cual la condición sobre la norma esta impuesta afín de excluir la solución nula.

En [1], Begue describe un algoritmo de resolución de (3.1) por el método de mínimos cuadrados ; consistente en minimizar el funcional:

$$(3.2) \quad E(\tilde{w}_n) = \int_{\gamma} |\nabla \tilde{E}_n(\tilde{w}_n)|^2 dy, \quad \tilde{w}_n \in W_n$$

donde  $\tilde{E}_n(\tilde{w}_n)$  viene dado por

$$(3.3) \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{E}_n = \tilde{C}^{-1} \nabla \cdot (\tilde{w}_n \otimes \tilde{w}_n) + \nabla \tilde{\pi}_n \\ \tilde{E}_n \in W_n, \quad \langle \tilde{E}_n' \rangle = 0 \end{cases}$$

$$(3.4) \quad \begin{cases} -\Delta \tilde{\pi}_n = \nabla \cdot (\tilde{C}^{-1} \tilde{w}_n \cdot \nabla \tilde{w}_n) \\ \tilde{\pi}_n \in Q_n, \quad \langle \tilde{\pi}_n \rangle = 0 \end{cases}$$

siendo  $W_h$  y  $Q_h$  espacios de velocidades y presiones, respectivamente, afines por trozos y continuas sobre un par de mallados isotropos,  $\tau_{h/2}$  y  $\tau_h$ , de  $Y$ , de forma análoga al caso de la ecuación de Stokes [cf 11, 12].

La talla  $h$  corresponde a  $2^p + 1$  nodos por dimensión, estando esta elección determinada por el uso de la Transformada de Fourier Rápida (F.F.T.) en la resolución de los Laplacianos discretos requeridos por el algoritmo. Se obtienen así soluciones discretas que, en general, dependen de la inicialización dada. Sin embargo, la utilización de mallados isotropos impide la aparición en las soluciones discretas de las propiedades de simetría mostradas en el Capítulo 2, necesarias para la correcta tabulación de los tensores  $Ry R^{(1)}$ . Ello se consigue incorporando mallados simétricos respecto a los planos  $x=0$ ,  $y=0$ ,  $z=0$ , e inicializando el algoritmo con funciones que verifiquen las simetrías. En 3 dimensiones el mallado simétrico no se ajusta al esquema en diferencias de 7 puntos, propio de un mallado isotropo, requerido para la resolución del Laplaciano discreto mediante la F.F.T. Se hace así necesario el desarrollo de un esquema numérico de resolución del Laplaciano discreto sobre mallado simétrico mediante la F.F.T. mostrado en la Sección 3.

## 2. - Resolución numérica del problema de Euler linealizado

Consideremos el problema de Euler linealizado :

$$(3.5) \quad \begin{cases} L(\tilde{v}, p; \tilde{\omega}, c) = \tilde{v} \cdot \nabla_y \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \cdot \nabla_y \tilde{v} + c \nabla_y p = \tilde{f}, & \nabla_y \cdot \tilde{v} = g \text{ en } Y \\ \langle \tilde{v}, \tilde{c}^{-1} \tilde{\omega} \rangle = \alpha \in \mathbb{R}, & \tilde{\omega} \text{ periódica,} \end{cases}$$

Siendo  $\{\tilde{f}, g\} = \{P\tilde{f}, Pg\}$  (se conservan las notaciones del primer Capítulo).

Su resolución numérica ha sido realizada mediante un método de mínimos cuadrados, análogo al desarrollado por Begue [1] para el problema no lineal.

### 2.1 - Caso continuo

Sea  $(V, \|\cdot\|)$  un espacio normado de campos de vectores  $Y$ -periódicos. Dada  $\tilde{v} \in V$ ; definimos el error  $\tilde{\xi}: Y \rightarrow \mathbb{R}^3$  por :

$$(3.6) \quad \begin{cases} -\Delta_y \tilde{\xi} = \tilde{c}^{-1} [\nabla_y \cdot (\tilde{v} \otimes \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \otimes \tilde{v}) - (\tilde{f} + \tilde{\omega} g)] + \nabla p \\ \tilde{\xi} \in V \end{cases}$$

donde  $p: Y \rightarrow \mathbb{R}$  viene dado por

$$(3.7) \begin{cases} -\Delta_y p = \nabla_y \cdot \tilde{c}^{-1} (\tilde{v} \cdot \nabla_y \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \cdot \nabla_y \tilde{v} - \tilde{f}) \\ p \text{ Y-periodico} \end{cases}$$

Entonces, el error cometido al aproximar  $\{\tilde{f}, g\}$  mediante  $\{L(\tilde{v}, p; \tilde{\omega}, c), \nabla_y \cdot \tilde{v}\}$  viene medido por el costo

$$(3.8) \quad J(\tilde{v}) = \|\tilde{\xi}\|^2,$$

donde todas las funciones han sido supuestas suficientemente regulares.

Supongamos  $\tilde{v}$  solución de (1.52). La equivalencia entre (3.5.a) y  $J(v)=0$  sólo es cierta para las  $\tilde{v}$  ergóticas: si definimos las curvas características:  $Z(t, y_0) / y_0 \in Y; t \in \mathbb{R}$  por:

$$(3.9) \quad \begin{cases} dz/dt = \tilde{\omega}(z), \\ Z(0; y_0) = y_0 \end{cases}$$

$\tilde{\omega}$  es ergótica si el grafo de  $Z(\cdot, y)$  cubre densamente  $Y$ , para casi todo  $y \in Y$  (o sea, en realidad hay una sola curva característica).

En este caso,

$$(3.10) \quad (L(\tilde{v}, p; \tilde{\omega}, c) = \tilde{f}, \nabla_y \cdot \tilde{v} = g) \Leftrightarrow J(\tilde{v}) = 0.$$

En efecto, realizemos el cambio de variables

$$(3.11) \quad z = (\nabla a)^T y, \quad \forall y \in Y$$

y definamos

$$(3.12) \quad \begin{aligned} v(z) &= (\nabla a)^{-T} \tilde{v}(y), \quad \omega(z) = (\nabla a)^{-T} \tilde{\omega}(y), \quad p(z) = p(y) \\ K &= (\nabla a)^{-T} Y. \end{aligned}$$

si  $J(v) = 0$ , (3.6)  $J$  (3.7), y quedan transformados en:

$$(3.13) \quad \nabla_z \cdot (v \otimes \omega + \omega \otimes v) + \nabla_z p = f + \omega g \text{ em } K,$$

$$(3.14) \quad -\Delta_z p = \nabla_z \cdot (v \cdot \nabla_z \omega + \omega \cdot \nabla_z v - f) \text{ em } K,$$

respectivamente.

Tomando la divergencia de (3.13), y teniendo en cuenta (3.14), resulta

$$(3.15) \quad \omega \cdot \nabla_z d = 0, \quad d = \nabla_z \cdot v - g.$$

O sea, sobre las características,

$$(3.16) \quad d(\gamma(t, y_0)) = c(y_0)$$

Pero según la hipótesis realizada,  $c$  no depende de  $y_0$ , y por tanto

$$(3.17) \quad \nabla_z \cdot v(z) = \nabla_y \cdot \tilde{v}(y) = g(y) + c;$$

Siendo la constante nula al ser nula la media de  $g$ . Ello, junto con

$$(3.13) \text{ equivale a (3.5a). } \quad \square$$

La ergodicidad, sin embargo, no es cierta en general para las soluciones que nos ocupan, y por ello el problema de minimización a considerar es

$$(3.18) \quad \text{Mim} \{ J(\tilde{v}) \mid \tilde{v} \in V, \nabla \cdot \tilde{v} = g \},$$

cuyas soluciones lo son también de (3.5.a).

Cabe señalar, por último, que la condición  $\langle \tilde{v} \cdot \bar{c}^1 \omega \rangle = \alpha$  puede ser tratada fácilmente, ya que si  $\tilde{v}$  es solución de (3.5.a), entonces  $\tilde{v} + \lambda \tilde{v}$  también lo es,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . La función

$$(3.19) \quad \tilde{v} - \frac{1}{2} \langle \tilde{v} \cdot \bar{c}^1 \omega \rangle \tilde{\omega}$$

es, pues, solución de (3.5).

## 2.2 Resolución numérica por el método de mínimos cuadrados

Efectuaremos en este apartado una resolución discreta del problema de optimización (3.18). Nuestro objetivo es la tabulación numérica del tensor de Reynolds  $R^{(1)} = \langle \omega \otimes \tilde{u}^{(1)} + \tilde{u}^{(1)} \otimes \omega \rangle$ , cuyas simetrías han sido mostradas en el Capítulo 2. Para hacer aparecer tales simetrías en la solución discreta, será necesario que la geometría del mallado considerado las incorpore. Definamos en primer lugar los mallados que se utilizarán:

a) Mallado Isótropo :  $\mathcal{T}_h^I$

Dado  $N \in \mathbb{N}$ , sea  $h = \frac{1}{N-1}$ , y sean los nodos

$$(3.20) \quad P(k_1, k_2, k_3) = \left( (k_1-1)h - \frac{1}{2}, (k_2-1)h - \frac{1}{2}, (k_3-1)h - \frac{1}{2} \right), \quad 1 \leq k_i \leq N,$$

y los cubos  $k(k_1, k_2, k_3) \mid 1 \leq k_i \leq N-1$ , de vértices

$$(3.21) \quad P(k_1 + \varepsilon_1, k_2 + \varepsilon_2, k_3 + \varepsilon_3) \mid \varepsilon_i, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{0, 1\}.$$

El mallado isótropo  $\mathcal{T}_h^I$ , de  $N$  nodos por dimensión, se obtiene por descomposición de cada cubo  $k(k_1, k_2, k_3)$  en seis tetraedros iguales (Salvo rotaciones y traslaciones).

b) Mallado simétrico :  $\mathcal{T}_h^S$

Dado  $N = 2p+1$ , sea  $h = \frac{1}{2p}$  para  $p \in \mathbb{N}$  ;

El mallado simétrico  $\mathcal{T}_h^S$  es el obtenido a partir de un mallado isótropo de  $[-\frac{1}{2}, 0]^3$ , correspondiente a  $p+1$  nodos por dimensión, mediante simetrías respecto a los planos coordenados  $y_1=0, y_2=0, y_3=0$ .

Notemos  $\mathcal{T}_h$  uno cualquiera de los mallados  $\mathcal{T}_h^I$  ó  $\mathcal{T}_h^S$ .

Los espacios discretos considerados para velocidades y presiones, respectivamente, son :

$$(3.22) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{V}_h = \{ \tilde{v}_h \in [C^0(Y)]^3 \mid \tilde{v}_h|_T \in (\mathbb{P}_1)^3, \forall T \in \mathcal{T}_h, \langle \tilde{v}_h \rangle = 0, \\ \tilde{v}_h \text{ } \gamma\text{-periodico} \} \\ Q_h = \{ q_h \in C^0(Y) \mid q_h|_T \in \mathbb{P}_1, \forall T \in \mathcal{T}_h, \langle q_h \rangle = 0, \\ q_h \text{ } \gamma\text{-periodico} \}, \end{array} \right.$$

donde  $C^0(Y)$  es el espacio de las funciones continuas sobre  $Y$ , y  $\mathbb{P}_1$  el espacio de las funciones afines sobre  $\mathbb{R}^3$ .

Usaremos la notación  $(\cdot, \cdot)$  para el producto escalar en  $[L^2(Y)]^k$ ,  $k = 3 \times 3$

ó  $k = 3$ , entendiendo :

$$(3.23) \quad \left\{ \begin{array}{l} (T, S) = \int_Y T_{ij}(y) S_{ij}(y) dy, \forall T, S \in [L^2(Y)]^{3 \times 3} \\ (\tilde{u}, \tilde{v}) = \int_Y \tilde{u}_i(y) \tilde{v}_i(y) dy, \forall \tilde{u}, \tilde{v} \in [L^2(Y)]^3 \end{array} \right.$$

El problema de optimización (3.18) queda formulado discretamente como sigue obviando la condición  $\nabla_y \cdot v = g$  :

$$(3.24) \quad \min_{\tilde{v}_h \in V_h} J(\tilde{v}_h), \quad J(\tilde{v}_h) = \int_Y |\nabla \tilde{\xi}_h(\tilde{v}_h)|^2 dy,$$

donde el error  $\tilde{\xi}_h$  está definido por :

$$(3.25) \quad \begin{cases} (\nabla \tilde{\xi}_h, \nabla \tilde{u}_h) = -(\bar{c}^{-1}(\tilde{v}_h \otimes \tilde{\omega}_h + \tilde{\omega}_h \otimes \tilde{v}_h), \nabla \tilde{u}_h) + \\ \quad + (\nabla p_h - (\tilde{f}_h + (\tilde{\omega}g)_h), \tilde{u}_h), \quad \forall \tilde{u}_h \in \tilde{V}_h \\ \tilde{\xi}_h \in \tilde{V}_h \end{cases}$$

$$(3.26) \quad \begin{cases} (\nabla p_h, \nabla q_h) = -(\bar{c}^{-1}(\tilde{v}_h \cdot \nabla \tilde{\omega}_h + \tilde{\omega}_h \cdot \nabla \tilde{v}_h - \tilde{f}_h), \nabla q_h), \quad \forall q_h \in Q_h \\ p_h \in Q_h \end{cases}$$

Siendo  $\tilde{f}_h$ ,  $\tilde{v}_h$ ,  $(\tilde{\omega}g)_h$  las funciones interpoladas sobre  $V_h$  de  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{v}$  y  $\tilde{\omega}g$ , respectivamente.

Los problemas (3.25) y (3.26) equivalen a sendos sistemas lineales, que tienen solución única al ser nulas las medias de  $\tilde{\xi}_h$  y  $p_h$ . Numéricamente, estos sistemas han sido resueltos mediante un algoritmo de punto fijo basado en el uso de la F.F.T. (Sec. 3), que permite aprovechar el caracter periódico del problema para obtener un bajo costo de calculo.

El problema (3.24) se resuelve mediante el algoritmo de gradiente conjugado, para cuya implementación es necesario el cálculo del gradiente, realizado como sigue :

Dado  $\tilde{v}_h \in \tilde{V}_h$ , notemos  $\tilde{G}_h = \tilde{G}_h(\tilde{v}_h)$  al gradiente de  $J$  en  $\tilde{v}_h$ .  $\tilde{G}_h$  viene definido por :

$$(3.27) \quad (\nabla \tilde{G}_h, \nabla \tilde{\varphi}_h) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\mathcal{J}(\tilde{v}_h + \lambda \tilde{\varphi}_h) - \mathcal{J}(\tilde{v}_h)}{\lambda} \quad \forall \tilde{\varphi}_h \in \tilde{V}_h.$$

Sea  $\tilde{\eta}_h \in \tilde{V}_h$  definido por

$$(3.28) \quad \begin{cases} (\nabla \tilde{\eta}_h, \nabla \tilde{u}_h) = -(\bar{c}^{-1}(\tilde{\varphi}_h \otimes \tilde{\omega}_h + \tilde{\omega}_h \otimes \tilde{\varphi}_h), \nabla \tilde{u}_h) + (\nabla \mu_h, \tilde{u}_h), \quad \forall \tilde{u}_h \in \tilde{V}_h \\ (\nabla \mu_h, \nabla q_h) = -(\bar{c}^{-1}(\tilde{\varphi}_h \cdot \nabla \tilde{\omega}_h + \tilde{\omega}_h \cdot \nabla \tilde{\varphi}_h), \nabla q_h), \quad \forall q_h \in Q_h \\ \mu_h \in Q_h \end{cases}$$

Entonces

$$(3.29) \quad (\nabla \tilde{G}_h, \nabla \tilde{\varphi}_h) = 2 (\nabla \tilde{\xi}_h, \nabla \tilde{\eta}_h).$$

Afín de expresar el segundo miembro de (3.29) en función de  $\tilde{v}_h$ , definamos  $\Psi_h \in Q_h$  mediante

$$(3.30) \quad (\nabla \Psi_h, \nabla q_h) = -(\tilde{\xi}_h, \nabla q_h), \quad \forall q_h \in Q_h.$$

Entonces se tiene, según (3.22)

$$(3.31) \quad (\nabla \mu_h, \nabla \tilde{\xi}_h) = (\bar{c}^{-1}(\tilde{\varphi}_h \cdot \nabla \tilde{\omega}_h + \tilde{\omega}_h \cdot \nabla \tilde{\varphi}_h), \nabla \Psi_h).$$

Y por tanto, según (3.30),  $\tilde{G}_h$  viene definido por

$$(3.31) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\nabla \tilde{G}_h, \nabla \tilde{\varphi}_h) = -2(\tilde{C}^{-1}(\tilde{\varphi}_h \otimes \tilde{\omega}_h + \tilde{\omega}_h \otimes \tilde{\varphi}_h), \nabla \tilde{\xi}_h) + \\ \quad + 2(\tilde{C}^{-1}(\tilde{\varphi}_h \cdot \nabla \tilde{\omega}_h + \tilde{\omega}_h \cdot \nabla \tilde{\varphi}_h), \nabla \tilde{\psi}_h), \nabla \tilde{\varphi}_h \in \tilde{V}_h; \\ \tilde{G}_h \in \tilde{V}_h \end{array} \right.$$

El algoritmo de gradiente conjugado utilizado es de tipo standard, consistiendo en las siguientes etapas :

0. - Inicialización

- $\tilde{V}^0$  verificando los hipótesis de simetría necesarias al problema
- Número de iteraciones  $N$
- Precisión  $\varepsilon$
- Se toma  $\gamma^{-1} = 0$ ,  $H^{-1} \equiv 0$

Para  $n = 0, \dots, N-1$ .

1. - Cálculo de:

- error  $\tilde{\xi}_h$  según (3.25)-(3.26)
- Gradiente  $\tilde{G}$  según (3.32)

2. - Nueva dirección de descenso del costo.

$$(3.33) \quad - \gamma^m = |\tilde{G}_h^m|^2: \text{ si } \gamma^m < \varepsilon, \text{ se ha alcanzado la precisión deseada}$$

$$(3.34) \quad - \tilde{H}_h^{m+1} = -\tilde{G}_h^m + \frac{\gamma^m}{\gamma^{m-1}} \tilde{H}_h^{m-1}$$

3. - Minimización unidimensional :

$$(3.35) \quad - \rho^m \text{ t. q. } \mathcal{J}(\rho^m) = \underset{\rho \in \mathbb{R}}{\text{Min}} \mathcal{J}(\tilde{v}_h^m + \rho \tilde{H}_h^m)$$

Es posible obtener  $\rho^n$  explícitamente, ya que al ser el operador  $L$  (3.5.a) lineal,  $\mathcal{J}(\tilde{v}_h^n + \rho \tilde{H}_h^n)$  es un polinomio de segundo grado en  $\rho$ .

4. - Nueva solución aproximada :

$$(3.36) \quad - \tilde{v}_h^{m+1} = \tilde{v}_h^m + \rho^m \tilde{H}_h^m$$

En la Sección 4 del presente capítulo se muestran los resultados numéricos obtenidos mediante la aplicación del método de mínimos cuadrados descrito.

La solución discreta depende en general de la inicialización tomada. Por otra parte, es primordial la elección de una inicialización que verifique las propiedades de simetría deseadas para la solución.

Numéricamente, la no inclusión de la condición  $\nabla_y \cdot \tilde{v} = g$  en la formulación (3.24) queda justificada: El algoritmo ha sido implementado para  $g = 0$ . Tomando  $\tilde{v}^0$  de divergencia nula, la solución correspondiente conserva tal propiedad.

### 3. - Resolución del Laplaciano discreto sobre malla simétrica

#### 3.1 Descripción del algoritmo

Consideremos el problema "Laplaciano discreto", cuya resolución es requerida en la obtención numérica de las fluctuaciones.

Dada  $f \in [L^2(\gamma)]^k$ ,  $k=1,3$ , calcular  $u_h \in V_h$  solución de:

$$(3.37) \quad \begin{cases} (\nabla u_h, \nabla w_h) = (f, w_h), \forall w_h \in V_h \\ \langle u_h \rangle = 0 \end{cases}$$

donde

$$(3.38) \quad V_h = \{ w_h \in [C^0(\gamma)]^k \mid w_h|_T \in (P_1)^k, \forall T \in \mathcal{T}_h, w_h \text{ } \gamma\text{-periódico} \}$$

El problema (3.37) equivale a un sistema lineal cuya matriz es no singular al ser  $\langle u_h \rangle = 0$ , y cuya solución existe si  $\langle f \rangle = 0$ .

Afin de resolver (3.37) sobre malla simétrica mediante la F.F.T., consideremos un malla isotropo:  $\mathcal{T}_h^I$ , y otro simétrico:  $\mathcal{T}_h^S$ , según la Sección 1.2, para

$$(3.39) \quad h = \frac{1}{N}, \quad N = 2^p + 1, \quad p \in \mathbb{N}.$$

siendo necesaria la elección de  $N$  de esta forma para posibilitar el uso de la F.F.T.

Sean  $V_h^I$  y  $V_h^S$  los espacios discretos correspondientes a los mallas  $\mathcal{T}_h^I$  y  $\mathcal{T}_h^S$ , respectivamente, según (3.38). Ambos tienen la misma dimensión:

$$(3.40) \quad M = (N-1)^3 = 2^{3p}$$

sean  $\{P_i\}_{i=1}^M$  los nodos  $\{P(k_1, k_2, k_3) \mid 1 \leq k_i \leq N-1\}$ . Entonces, una base canónica de  $V_h^I$  es  $\{w_{ih}^I\}_{i=1}^M$ , siendo

$$(3.41) \quad w_{ih}^I(P_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq M; \quad w_{ih}^I \in V_h^I, \quad 1 \leq i \leq M.$$

Sea  $\{w_{ih}^S\}_{i=1}^M$ , la base canónica de  $V_h^S$ ; definida de forma análoga.

Podemos ahora describir el algoritmo utilizado, como sigue :

0. - Inicialización :

Sea  $u_h^0 = u_i^0 w_{ih}^I \in V_h^I$  la solución de

$$(3.42) \quad \begin{cases} (\nabla u_h^0, \nabla w_h^I) = (f, w_h^I), \forall w_h^I \in V_h^I \\ \langle u_h^0 \rangle = 0 \end{cases}$$

La inicialización tomada es, entonces,

$$(3.43) \quad u_h^0 = u_i^0 w_{ih}^S \in V_h^S$$

1. - Nueva aproximación :

Supongamos conocido  $u_h^n \in V_h^S$ . Definamos el error  $F_h^n \in V_h^I$  como sigue :

$$(3.44) \quad (F_h^n, w_{ih}^I) = (f, w_{ih}^S) - (\nabla u_h^n, \nabla w_{ih}^S)$$

Entonces, el corrector  $r_h^n \in V_h^S$  se define a partir de  $R_h^n = r_i^n w_{ih}^I \in V_h^I$ , solución de

$$(3.45) \quad \begin{cases} (\nabla R_h^n, \nabla w_h^I) = (F_h^n, w_h^I), \forall w_h^I \in V_h^I \\ \langle R_h^n \rangle = 0 \end{cases}$$

en la forma

$$(3.46) \quad r_h^n = r_i^n w_{ih}^S$$

y la nueva aproximación es

$$(3.47) \quad u_h^{n+1} = u_h^n + r_h^n$$

El problema (3.45) tiene solución única, ya que

$$(3.48) \quad \langle F_h^n \rangle = (f, 1) - (\nabla u_h^n, \nabla 1) = \langle f \rangle = 0.$$

### 3.2 Convergencia

En el estudio de la convergencia del algoritmo (3.42)-(3.47) es interesante considerar el caso bidimensional. En primer lugar, definamos los mallados para este caso :

Sean

$$(3.49) \quad Y = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^2; N = 2^p + 1, p \in \mathbb{N}; h = \frac{1}{N-1}.$$

Sean los nodos  $P$  y los cuadrados  $k$ :

$$(3.50) \quad P(k_1, k_2) = \left( (k_1-1)h - \frac{1}{2}, (k_2-1)h - \frac{1}{2} \right), 1 \leq k_i \leq N.$$

$k(k_1, k_2)$  de vértices  $P(k_1 + \varepsilon_1, k_2 + \varepsilon_2)$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0, 1\}$ .

Los mallados isotropo ( $\mathcal{T}_h^I$ ) y simétrico ( $\mathcal{T}_h^S$ ) se definen de forma análoga al caso tridimensional, mediante descomposición de cada cuadrado  $k(k_1, k_2)$  en dos triángulos iguales. (Fig. 1).

La convergencia del algoritmo (3.42)-(3.47) para los casos bi y tridimensional queda expresada como sigue:

Teorema 4.1:

Sea  $U_h \in V_h^S$  la solución del problema

$$(3.51) \quad \begin{cases} (\nabla U_h, \nabla w_h^S) = (f, w_h^S), \forall w_h^S \in V_h^S \\ \langle U_h \rangle = 0. \end{cases}$$

se verifica

- En 2-d,  $U_h = U_h^0$ , definida por (3.42).
- En 3-d, la sucesión definida por (3.42)-(3.47) converge fuerte en  $H^1(Y)$  hacia  $U_h$ .

Demostración

Sean las matrices

$$(3.52) \quad \begin{cases} A^I = [(w_{ih}^I, w_{jh}^I)], 1 \leq i, j \leq M \\ A^S = [(w_{ih}^S, w_{jh}^S)], 1 \leq i, j \leq M \end{cases}$$

y sean los vectores de  $\mathbb{R}^M$ :

$$(3.53) \quad \vec{a} = [u_i^m], 1 \leq i \leq M; \vec{b} = [(f, w_{ih}^S)], 1 \leq i \leq M$$

Entonces, (3.45) puede ser expresado como sigue:

$$(3.54) \quad A^I (a^{m+1} - \tilde{a}^m) = b - A^S \tilde{a}^m$$

Si consideramos los espacios

$$(3.55) \quad \begin{cases} V_{oh}^I = \{w_h^I \in V_h^I / \langle w_h^I \rangle = 0\}, & E^I = \{\lambda \in \mathbb{R}^M \mid \lambda_i w_{ih}^I \in V_{oh}^I\}, \\ V_{oh}^S = \{w_h^S \in V_h^S / \langle w_h^S \rangle = 0\}, & E^S = \{\lambda \in \mathbb{R}^M \mid \lambda_i w_{ih}^S \in V_{oh}^S\}, \end{cases}$$

se tiene  $U_h^n \in V_{oh}^I$ ,  $U_h^n \in V_{oh}^S$ , siendo  $A^I$  inversible sobre  $E^I$  y  $A^S$  inversible sobre  $E^S$ .

$$(3.56) \quad u_i = u_h(P_i), \quad a = [u_i]_{1 \leq i \leq M}.$$

Entonces, (3.51) puede ser escrito como

$$(3.57) \quad A^S a = b,$$

y de (3.54) se deduce

$$(3.58) \quad a^{m+1} - \tilde{a}^m = (A^I)^{-1} A^S (a - \tilde{a}^m)$$

de donde

$$(3.59) \quad \|a^m - \tilde{a}^m\|_{\mathbb{R}^M} \leq \|I - (A^I)^{-1} A^S\| \|a^0 - \tilde{a}^0\|_{\mathbb{R}^M}$$

siendo

$$(3.60) \quad \begin{aligned} \|I - (A^I)^{-1} A^S\| &= \sup_{C \in \mathbb{R}^M - \{0\}} \frac{\|(I - (A^I)^{-1} A^S) C\|_{\mathbb{R}^M}}{\|C\|_{\mathbb{R}^M}} = \\ &= \sup_{C \in \mathbb{R}^M - \{0\}} \frac{\|C^T (A^I - A^S) C\|_{\mathbb{R}^M}}{\|C^T A^I C\|_{\mathbb{R}^M}}. \end{aligned}$$

Calcularemos separadamente esta cantidad para los casos 2-d y 3-d :

a) Caso bidimensional :

Sea un cuadrado  $k$  dividido en 2 triángulos de vértices  $\{P_i\}_{1 \leq i \leq 4}$ , según la figura 1

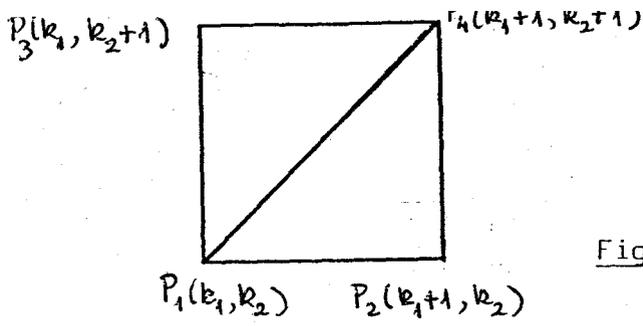


Fig. 1

Sea

$$(3.61) \quad v_i = v_h(P_i), \quad 1 \leq i \leq 4 \quad \text{para } v_h \in V_h^I \text{ ó } V_h^S.$$

para  $v_h \in V_h^I$  se tiene

$$(3.62) \quad \|\nabla v_h\|_{L^2(K)}^2 = (v_2 - v_1)^2 + (v_3 - v_2)^2 + (v_4 - v_3)^2 + (v_1 - v_4)^2,$$

y por tanto

$$(3.63) \quad \|\nabla v_h\|_{L^2(Y)}^2 = [v(P_i)]^T A^I [v(P_i)] = 2 \sum_{k_1, k_2=1}^{2^p} [(v_{(k_1+1, k_2)} - v_{(k_1, k_2)})^2 + (v_{(k_1, k_2+1)} - v_{(k_1, k_2)})^2].$$

Para  $v_h \in V_h^S$ , la expresión (3.63) también es cierta, y por tanto

$$(3.64) \quad \|I - (A^I)^{-1} A^S\| = 0 \iff A^I = A^S.$$

por tanto ;  $U_h^0 = U_h$ .

b) Caso tridimensional

Consideremos un cubo  $k$  de vértices  $\{P_i\}_{1 \leq i \leq 8}$ , dividido de forma regular en 6 tetraedros, según la figura 2.

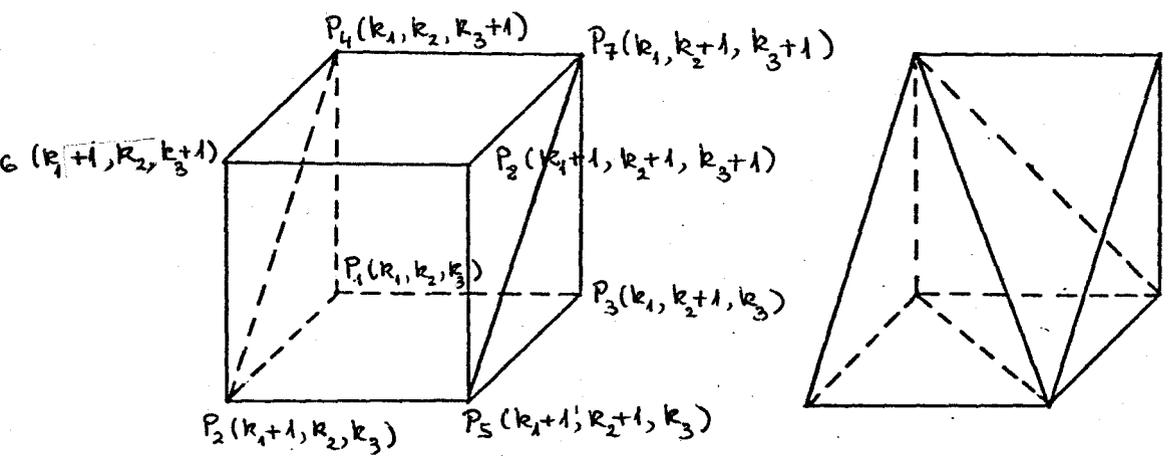


Fig 2.

Dado  $\psi_h \in V_h^I$  o  $V_h^S$ , se tiene

$$(3.65) \quad \|\nabla \psi_h\|_{L(K)}^2 = \frac{h}{6} [2\{(\psi_1 - \psi_2)^2 + (\psi_1 - \psi_3)^2 + (\psi_1 - \psi_4)^2 + (\psi_8 - \psi_3)^2 + (\psi_8 - \psi_6)^2 + (\psi_8 - \psi_7)^2 + (\psi_6 - \psi_4)^2 + (\psi_2 - \psi_6)^2 + (\psi_5 - \psi_2)^2 + (\psi_3 - \psi_5)^2 + (\psi_4 - \psi_3)^2 + (\psi_4 - \psi_7)^2\}].$$

Por tanto, si  $\psi_h \in V_h^I$ ,

$$(3.66) \quad \|\nabla \psi_h\|_{L(Y)}^2 = h \sum_{k_1, k_2, k_3=1}^{2^P} [(\psi_{(k_1+1, k_2, k_3)} - \psi_{(k_1, k_2, k_3)})^2 + (\psi_{(k_1, k_2+1, k_3)} - \psi_{(k_1, k_2, k_3)})^2 + (\psi_{(k_1, k_2, k_3+1)} - \psi_{(k_1, k_2, k_3)})^2];$$

y si  $\psi_h \in V_h^S$ ,

$$(3.67) \quad \|\nabla \psi_h\|_{L(Y)}^2 = h \sum_{k_1, k_2, k_3=1}^{2^P} [(\psi_{(k_1+1, k_2, k_3)} - \psi_{(k_1, k_2, k_3)})^2 + (\psi_{(k_1, k_2+1, k_3)} - \psi_{(k_1, k_2, k_3)})^2 + (\psi_{(k_1, k_2, k_3+1)} - \psi_{(k_1, k_2, k_3)})^2] + \frac{1}{3} h \sum_{k=1}^{2^P} [(\psi_{(k+1, 0, 0)} - \psi_{(k, 0, 0)})^2 + (\psi_{(0, k+1, 0)} - \psi_{(0, k, 0)})^2 + (\psi_{(0, 0, k+1)} - \psi_{(0, 0, k)})^2 + (\psi_{(k+1, l, l)} - \psi_{(k, l, l)})^2 + (\psi_{(l, k+1, l)} - \psi_{(l, k, l)})^2 + (\psi_{(l, l, k+1)} - \psi_{(l, l, k)})^2 + (\psi_{(k+1, l, 0)} - \psi_{(k, l, 0)})^2 + (\psi_{(l, k+1, 0)} - \psi_{(l, k, 0)})^2 + (\psi_{(0, k+1, l)} - \psi_{(0, k, l)})^2 + (\psi_{(0, l, k+1)} - \psi_{(0, l, k)})^2 + (\psi_{(k+1, 0, l)} - \psi_{(k, 0, l)})^2 + (\psi_{(l, 0, k+1)} - \psi_{(l, 0, k)})^2] \text{ siendo } l = 2^{P-1}.$$

Entonces,

$$(3.68) \quad \|I - (A^I)^{-1} A^S\| = \frac{1}{3}. \quad \square$$

Es interesante observar que en el caso 2-d las soluciones discretas correspondientes a los dos mallados considerados coinciden, hecho verificado en la practica.

En el caso 3-d se obtiene una rápida convergencia del algoritmo. En la práctica, la tasa de convergencia dada por (3.68) no es respetada, ya que la F.F.T. solo resuelve exactamente el laplaciano discreto sobre el mallado isótropo si el segundo miembro (f) está en el espacio discreto de Fourier correspondiente a  $2^P + 1$  modos por dimensión. [Cf 15]

#### 4. - Resultados numéricos

##### 4.1. - Problemas Euler :

Las propiedades de simetría descritas en el Capítulo 2 para la fluctuación canónica y sus derivadas han sido obtenidas en la práctica mediante la implementación de los algoritmos descritos en las Secciones 1 y 2 del presente Capítulo sobre un par de mallados  $\tau_{h/2}$  y  $\tau_h$  simétricos, tomando la condición inicial de forma que verifique las simetrías requeridas en cada caso.

Ambos problemas han sido implementados sobre un ordenador DPS68, sistema Multics, usando mallados de 5 nodos por dimensión para la presión y 9 para la velocidad. El problema no lineal ha sido también implementado sobre un ordenador vectorial CRAY 1, correspondiendo los mallados a 9 y 17 nodos por dimensión, respectivamente.

Debido a la condición sobre la norma, el descenso del costo es relativamente lento, pues el gradiente es, en general, muy pequeño. La mayor lentitud corresponde a matrices con varios autovalores iguales. Sin embargo, un costo relativo del orden de  $10^{-2}$  basta para obtener una aproximación de  $R$  y  $R^{(1)}$  regular en función de la matriz  $C$ .

Consideremos el caso de matrices  $C$  diagonales. Según las simetrías, debe tenerse  $\langle \tilde{u}_i, \tilde{u}_j \rangle = 0$  si  $i \neq j$ . En la práctica, se obtienen valores del orden de  $10^{-4}$  sobre el ordenador CRAY 1, y  $10^{-2}$  sobre el DPS68, con unas 20 iteraciones del método de gradiente conjugado.

En el caso del problema lineal, podemos considerar por ejemplo la matriz  $B^{23}$  definida por (2.74), cuya estructura debe ser, según las simetrías,

$$(3.68) \quad B^{23} = \langle \tilde{u}^{23} \otimes \tilde{u} + \tilde{u} \otimes \tilde{u}^{23} \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}$$

Se ha tomado como inicialización  $v^0 \in V_h^S$  :

$$(3.69) \quad \tilde{v}_1^0 = 0, \quad \tilde{v}_2^0 = \tilde{\omega}_3, \quad \tilde{v}_3^0 = \tilde{\omega}_2,$$

siendo  $\tilde{v}$  una solución discreta de (3.34) para  $C = I$ . De esta forma,  $\langle \tilde{v}^0 \otimes \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \otimes \tilde{v}^0 \rangle$  presenta la estructura (3.68). Con 45 iteraciones, el costo relativo es de  $.3 \times 10^{-2}$  obteniéndose la aproximación de  $\langle \tilde{u}^{23} \otimes \tilde{\omega} \rangle$  que sigue :

$$(3.69) \quad \begin{bmatrix} -.74 \times 10^{-2} & .7 \times 10^{-4} & -.2 \times 10^{-3} \\ .7 \times 10^{-4} & -.3 \times 10^{-3} & -.1174 \\ -.2 \times 10^{-3} & -.1174 & -.5 \times 10^{-3} \end{bmatrix}$$

Figuras : 1.- Problemas de Euler.

Figura 3 : Curvas de descenso del costo relativo para el problema no lineal.

Corresponden a la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Los cálculos se han efectuado con los ordenadores CRAY 1 y DPS68, mediante cuatro iteraciones del Laplaciano discreto.

El descenso inicial sobre CRAY 1 es menor que sobre DPS68 debido a que los gradientes iniciales que aparecen sobre CRAY 1 son muy pequeños ( $\approx 10^{-6}$  frente a  $10^{-3}$  para DPS68). Se observa, sin embargo, un descenso más uniforme sobre CRAY 1 a causa de la mayor fineza del mallado en este caso. Los costos después de 15 iteraciones son prácticamente iguales. El mismo comportamiento comparativo se da para la generalidad de las matrices tabuladas.

Figura 4 : Curva de descenso del costo para el problema lineal. Corresponde al cálculo de  $\tilde{u}^{23}$  definida por (2.24), mediante 4 iteraciones del Laplaciano. El tiempo medio de cálculo por iteración es de 925 segundos de C.P.U.

Figuras 5 y 6 : Curvas de variación relativa del costo y de la norma  $L^2$  del gradiente, respectivamente.

Se han representado tres casos de matrices  $C$  con autovalores de la forma

$$\lambda_1 = \mu + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \sqrt{4\mu + \alpha^2}, \quad \lambda_2 = \mu + \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2} \sqrt{4\mu + \alpha^2}, \quad \lambda_3 = \mu^{-2}$$

para  $\mu = .5, 1$  y  $2$ , y  $\alpha = 2$ .

Los cálculos han sido hechos sobre el ordenador CRAY 1, con 4 iteraciones del Laplaciano. Cada iteración de gradiente conjugado necesita 50s. de CPU, aproximadamente.

Figura 7 : Espectro de las soluciones discretas en los 3 casos anteriores. Se han representado sobre el eje de abscisas los valores

$$S(k) = \sum_{j-1 \leq |k| \leq j} |\hat{w}_n(k)|^2,$$

siendo  $\hat{w}_n = \sum_k \hat{w}_n(k) e^{-ik \cdot y}.$

El interés de estos valores estriba en que la energía turbulenta relativa a  $\tilde{v}$  viene dada por

$$\sum_k S(k)$$

de forma análoga al caso continuo.

Se observa la semejanza de las tres curvas, que presentan una pendiente del orden de  $|k|^{-5}$ . La inicialización tomada es común, en  $|k|^{-2}$ .

## 2. - Resolución Laplaciano discreto sobre mallado simétrico

Las figuras presentadas corresponden a los mallados simétricos de 5 y 9 nodos por dimensión ; con cálculos efectuados por el ordenador DPS68. Se ha dibujado el cociente  $c_n = \|\nabla u^{n+1}\|_{L^2(\gamma)} / \|\nabla u^n\|_{L^2(\gamma)}.$

Figura 8 : Corresponde al segundo miembro

$$f = \cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2 z$$

que no está en ninguna base de Fourier.

Figura 9 : Segundo miembro en ambas bases de Fourier :

$$f = \sin x \sin y \sin z$$

Se observa como en este caso

$$c_m \leq \|I - (A^T)^{-1} A^S\| = \frac{1}{3},$$

lo cual no es verificado en el caso anterior.

## 3. - Visualización de soluciones

Figura 10 : Fluctuación canónica discreta correspondiente a la matriz C de la figura nº 3 , calculada con el ordenador DPS68. Se presentan los cortes de Y con los planos  $y = z$ ,  $x = 2\pi$ . Se pueden observar las simetrías y el carácter periódico de la solución discreta.

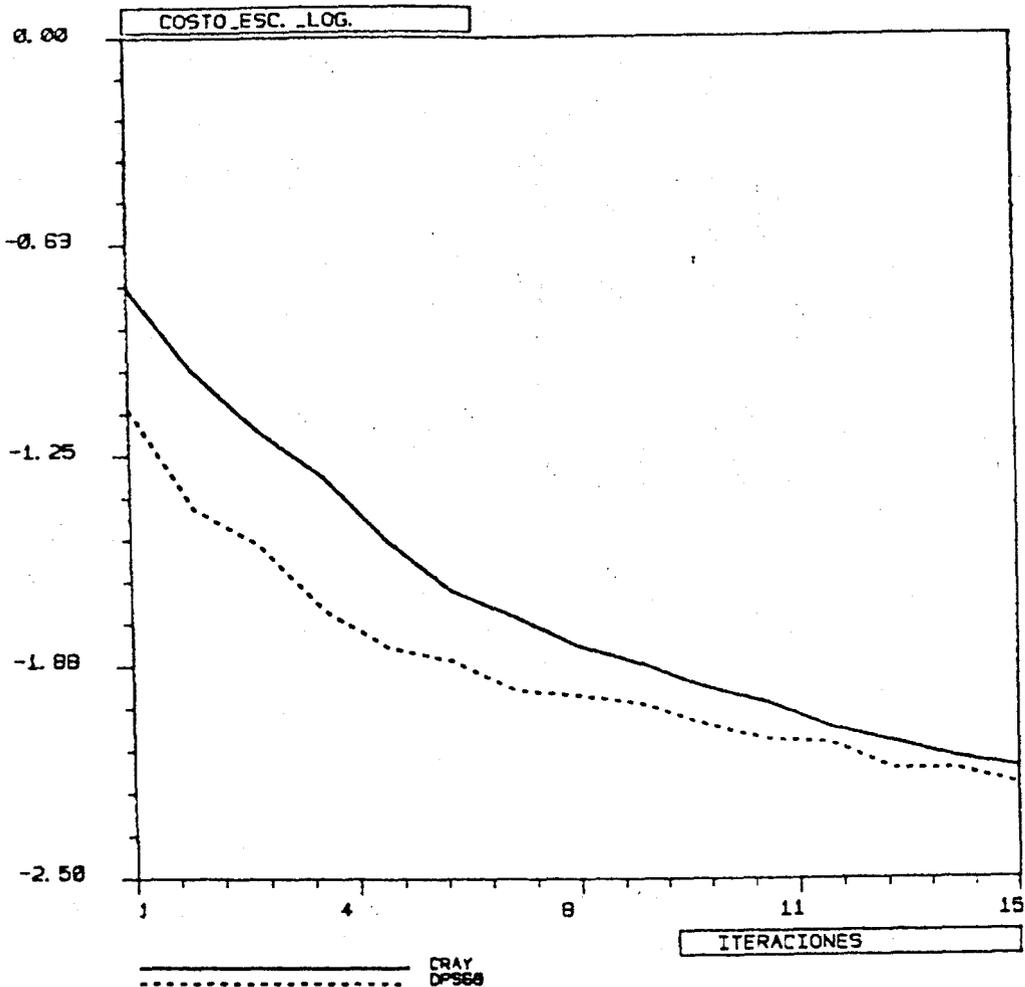


Figura 3

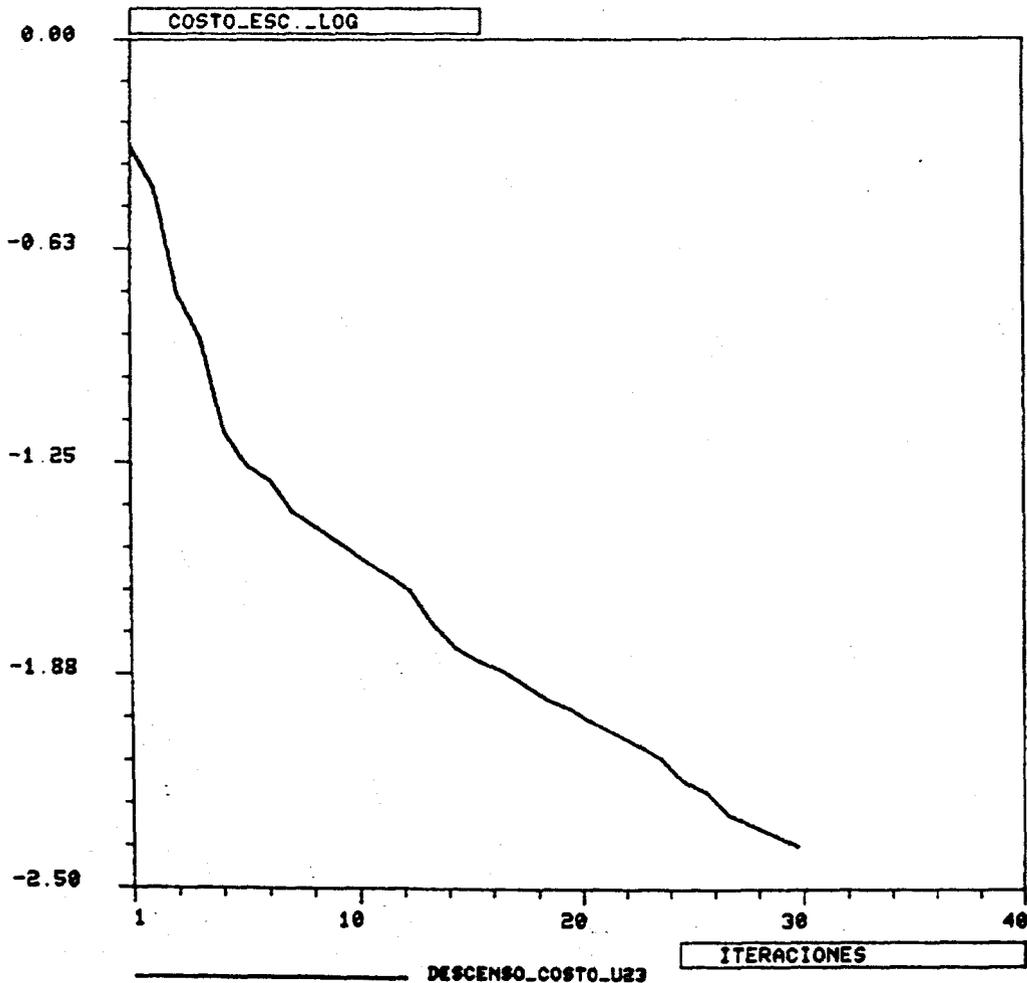


Figura 4

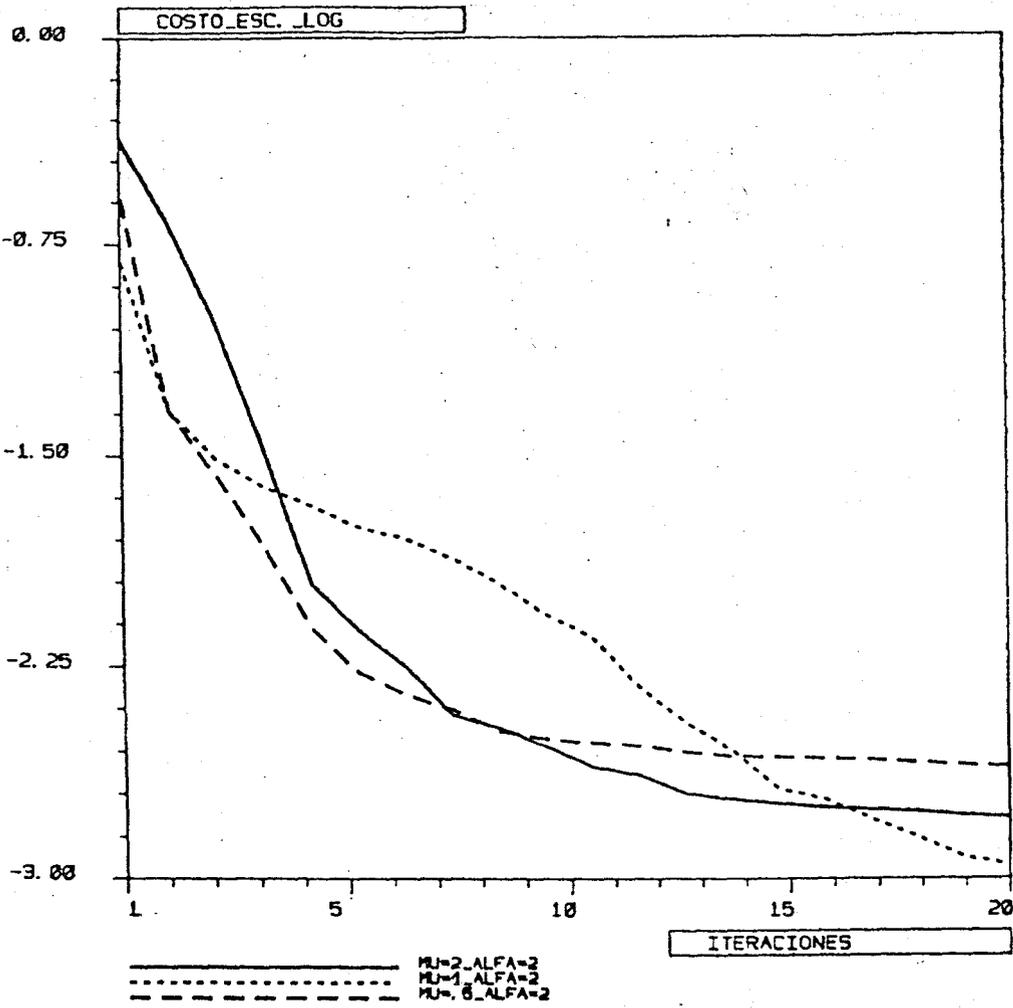


Figura 5

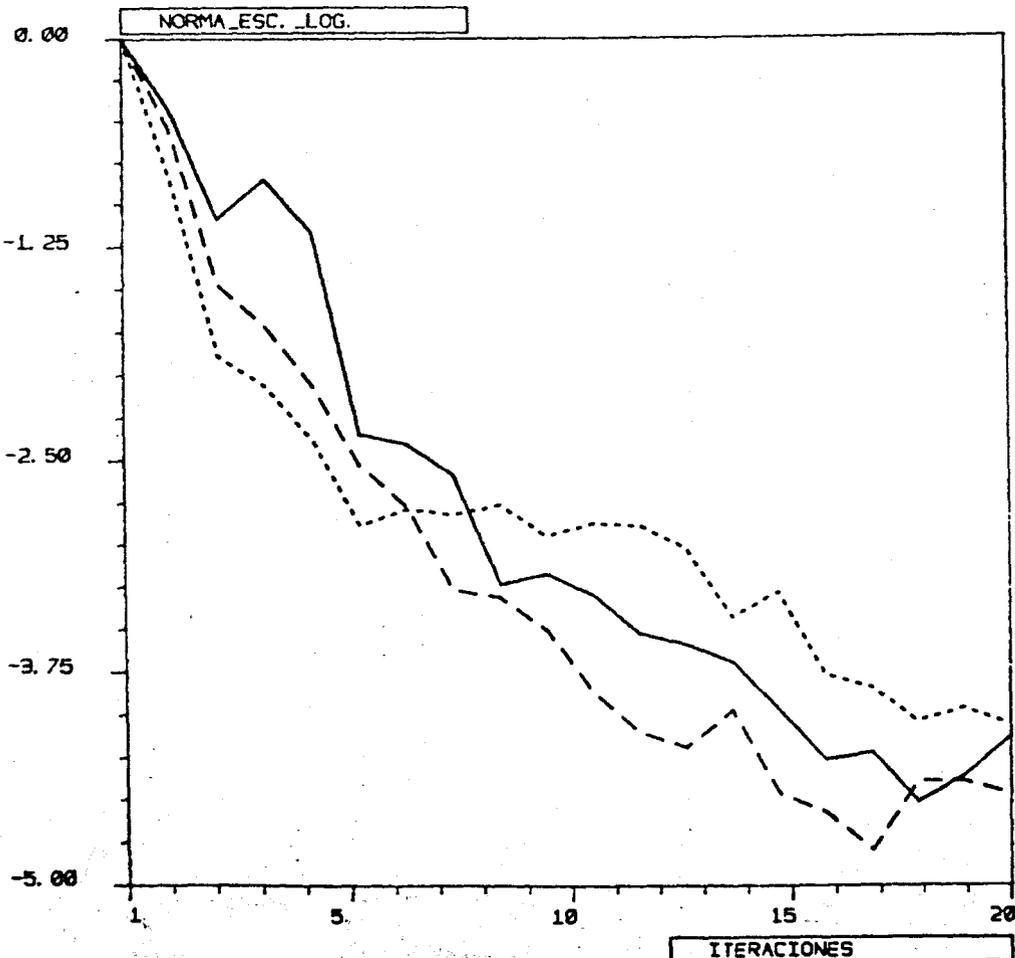


Figura 6

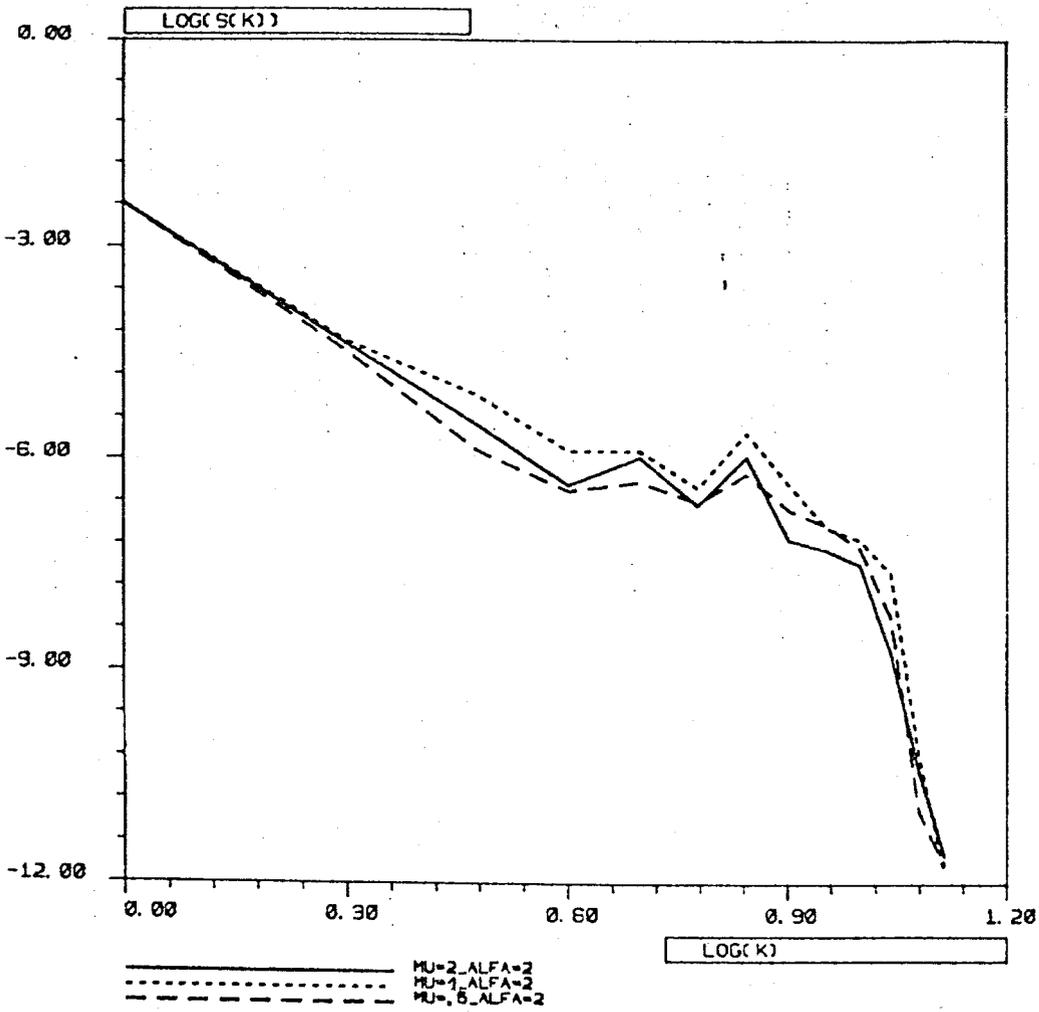


Figura 7

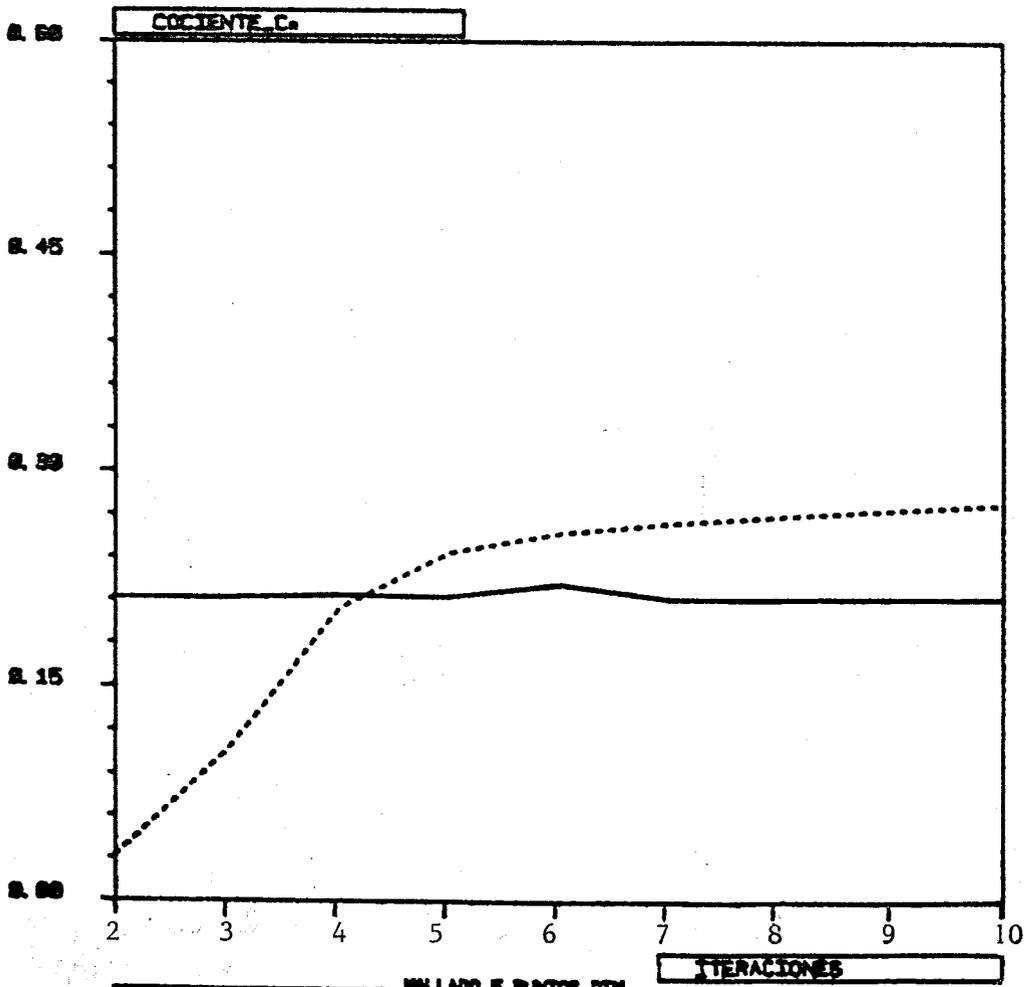


Figura 8a

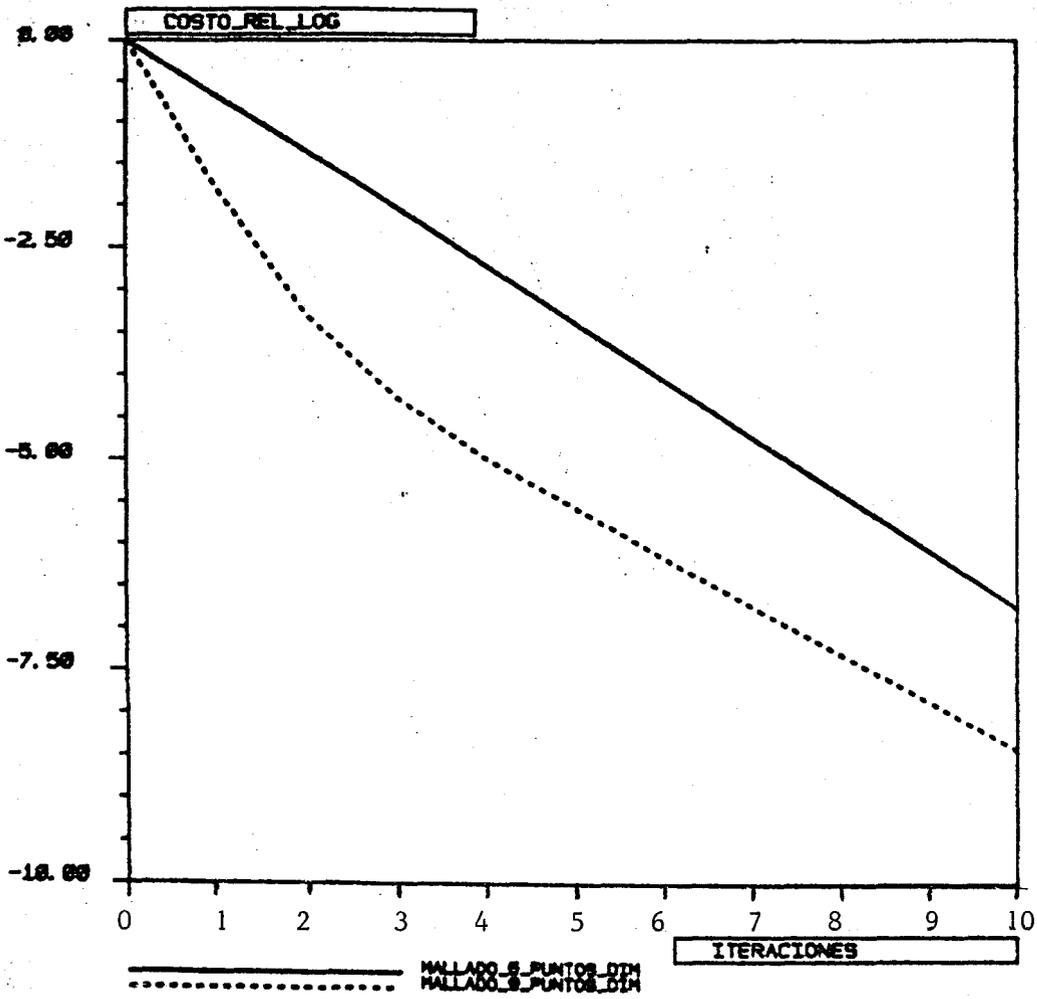


Figura 8b

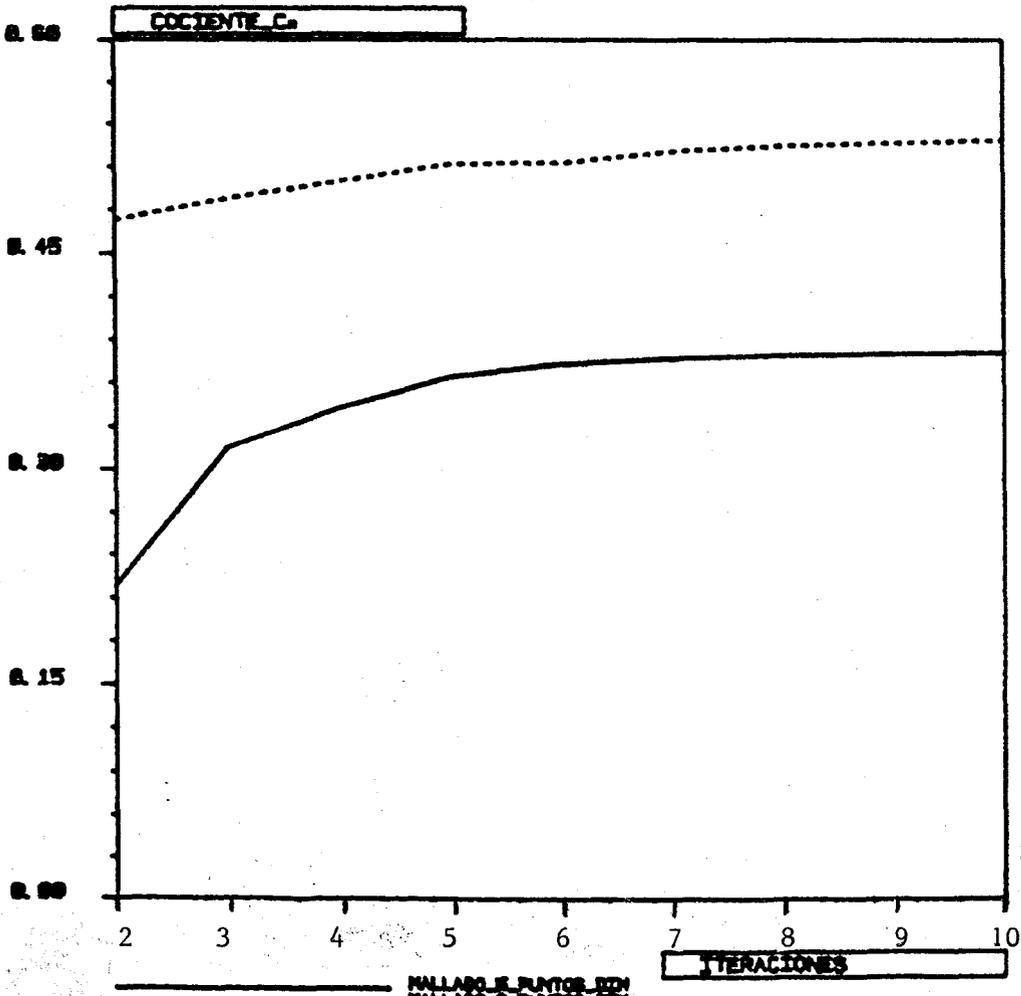


Figura 9a

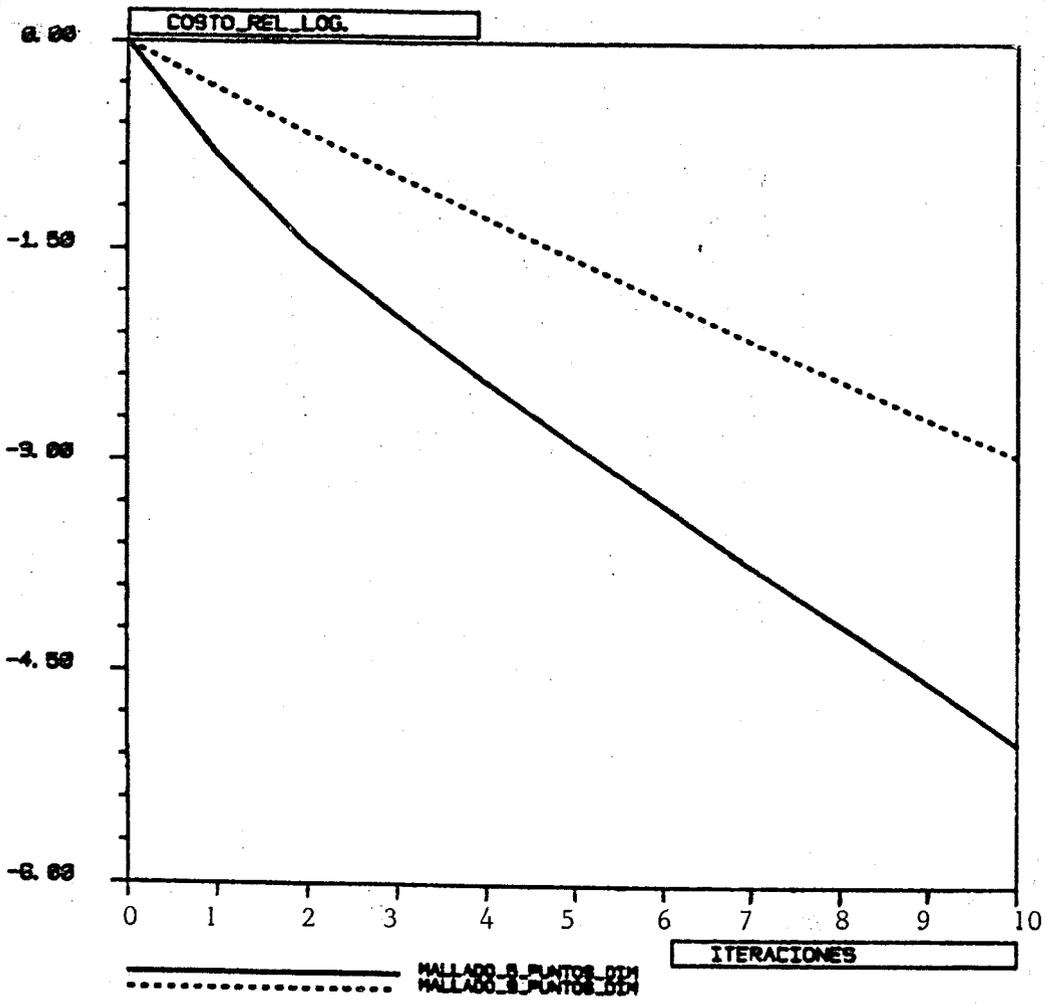


Figura 9b

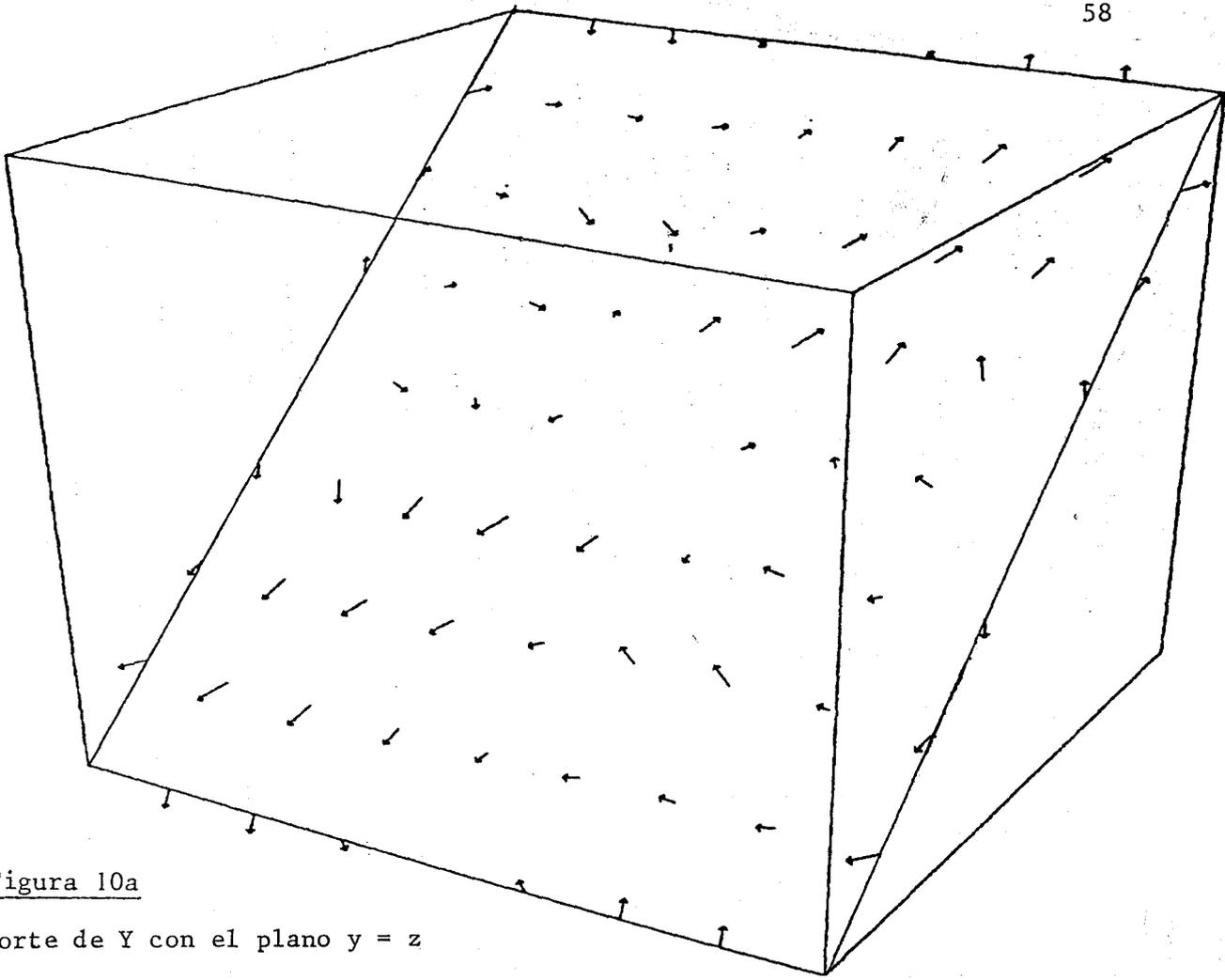


Figura 10a

Corte de Y con el plano  $y = z$

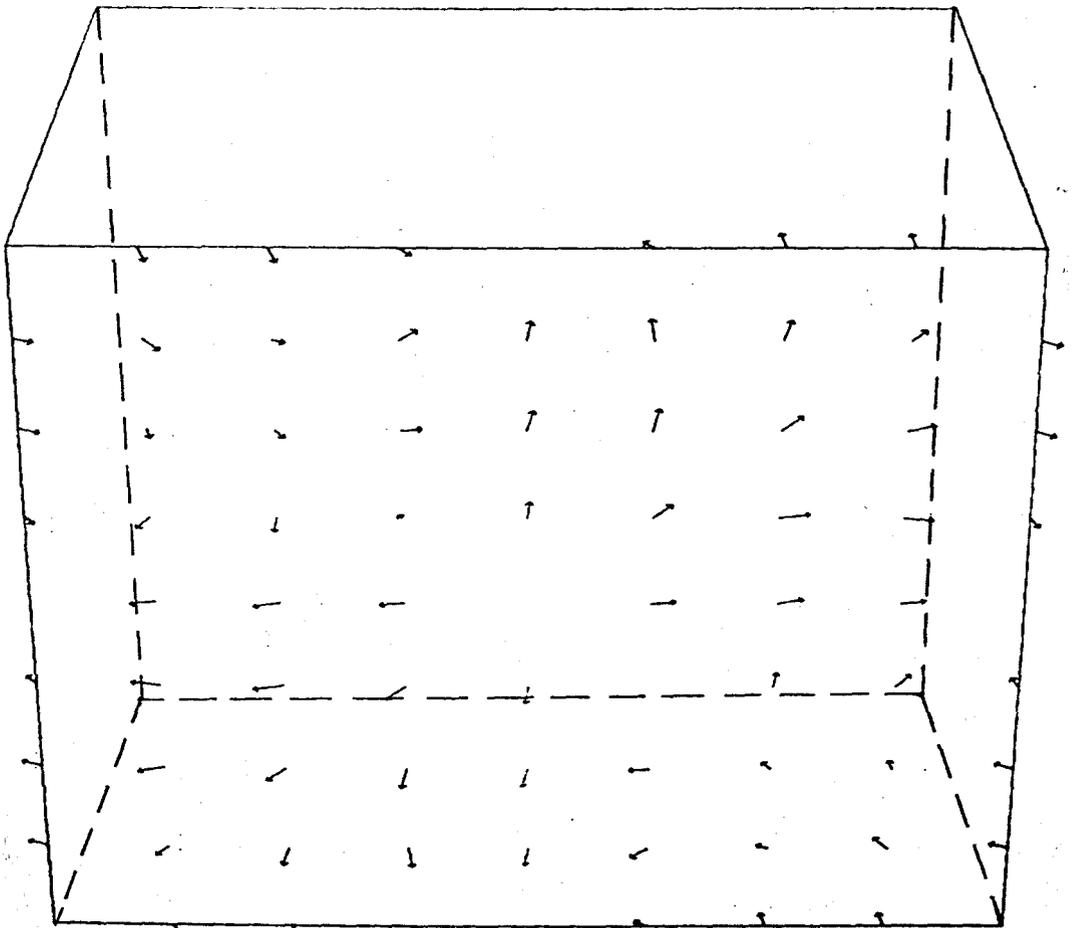


Figura 10b

Corte de Y con el plano  $x = 2\pi$

## CAPITULO 4

### LOS TERMINOS DE VISCOSIDAD EN EL MODELO REDUCIDO : TABULACION DE LOS TENSORES DE CIERRE.

Los términos de orden cero del modelo M.P.P. reducido (Capítulo 1, Sección 5) constituyen una ecuación hiperbólica no lineal para pequeñas variaciones del campo medio, al menos en el caso monodimensional mostrado en la Sección 3. Por ello, la viscosidad turbulenta ha de ser buscada en los términos de orden superior. En la Sección 1 se da una expresión del modelo en que se extrae la dependencia explícita de los términos de orden 1 en función de  $\nabla u$  y  $\nabla q$ ; que presentan carácter de viscosidad turbulenta, según la tabulación numérica mostrada en la Sección 5.

En las Secciones 2, 3 y 4 se estudia la tabulación del tensor  $R$  para turbulencia localmente isótropa: En este caso,  $R$  depende sólo de los invariantes de la matriz  $C$ . Los cálculos son realizados mediante soluciones simétricas que proporcionan una buena aproximación del carácter isótropo (Secc. 6).

Por último, la Sección 7 presenta la expresión de las ecuaciones del modelo en función de las aproximaciones por desarrollo de Taylor desarrolladas en el capítulo 2.

#### 1 - Expresión del modelo reducido en función de los términos de viscosidad turbulenta

Los términos de viscosidad generados por la presencia del corrector de primer orden ( $u^{(1)}$ ) en las ecuaciones del modelo M.P.P. reducido pueden ser expresados en función de fluctuaciones dependientes tan sólo de la matriz  $C = (\nabla a)^T (\nabla a)$ , según se mostro en el capítulo 2, tanto en la ecuación del fluido medio como en la ecuación de la energía. Reteniendo solo tales términos de viscosidad, las ecuaciones (1.55)-(1.56) se expresan como sigue :

$$(4.1a) \quad u_{,t} + u \cdot \nabla u + \nabla p + \nabla \cdot (qR') + \varepsilon \nabla \cdot (q^{1/2} \mathcal{A} : \nabla u) \approx 0(\varepsilon)$$

$$(4.1b) \quad \nabla \cdot u = 0$$

$$(4.2) \quad q_{,t} + u \cdot \nabla q + qR' : \nabla u + \varepsilon \nabla \cdot (\beta \nabla (q^{3/2})) \approx 0(\varepsilon)$$

donde  $R'$ ,  $\beta$  son tensores de orden 2 y  $\mathcal{A}$  es un tensor de orden 4, dependientes solo de  $\nabla a$ , dados por :

$$(4.3) \quad R' = (\nabla a)^T \tilde{R} (\nabla a)^{-1}, \quad \tilde{R} = \langle \tilde{\omega} \otimes \tilde{\omega} \rangle$$

$$(4.4) \quad \mathcal{A}^{ij} = (\nabla a)^T \tilde{A}^{kl} (\nabla a)^{-1} a_{i,k}^{-1} a_{j,l}^{-1}; \quad \tilde{A}^{kl} = \langle \tilde{\omega} \otimes \tilde{\chi}^{kl} + \tilde{\chi}^{kl} \otimes \tilde{\omega} \rangle$$

$$(4.5) \quad \beta_{ij} = \frac{1}{3} (\nabla a)^T \tilde{\beta}_i^{jk} a_{j,k}^{-1}; \quad \tilde{\beta} = \langle (\tilde{\varphi} + \tilde{\xi} \cdot \tilde{\omega}) \tilde{\omega} + (\tilde{\pi} + \frac{1}{2} |\tilde{\omega}'|^2) \tilde{\xi}^k \rangle.$$

Las fluctuaciones  $\tilde{\omega}$ ,  $\tilde{\chi}^{kl}$ ,  $\tilde{\beta}^k$  vienen definidas por (1.52), (2.75) y (2.88) respectivamente :

$$\left\{ \begin{array}{l} T(\tilde{\omega}, \tilde{\pi}; C) = 0; \quad \nabla_y \cdot \tilde{\omega} = 0 \text{ em } Y = -T \frac{1}{2}, \frac{1}{2} L^3; \\ \frac{1}{2} \langle \tilde{\omega} \cdot \tilde{C}^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 1; \quad \tilde{\omega}, \tilde{\pi} \text{ } Y\text{-periódicas} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\tilde{\chi}^{kl}, \tilde{\nu}^{kl}; \tilde{\omega}, C) = \tilde{\nu}^{kl} = \frac{1}{2} \langle \tilde{\omega}_k \tilde{\omega}_l \rangle \tilde{\omega} - \tilde{C}_{ki} \vec{e}_i \tilde{\omega}_l \text{ em } Y; \\ \nabla_y \cdot \tilde{\nu}^{kl} = 0; \quad \langle \tilde{\chi}^{kl} \cdot \tilde{C}^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 0; \quad \tilde{\chi}^{kl}, \tilde{\nu}^{kl} \text{ } Y\text{-periódicas} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L(\tilde{\xi}^k, \tilde{\varphi}; \tilde{\omega}, C) = -2P(\tilde{\xi}^k) = -2P(\frac{1}{2} \tilde{\omega}_k \tilde{\omega} + \tilde{C}_{ki} \vec{e}_i \tilde{\pi}) \text{ em } Y; \\ \nabla_y \cdot \tilde{\varphi} = -\tilde{\omega}_k; \quad \langle \tilde{\xi}^k \cdot \tilde{C}^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 0; \quad \tilde{\xi}^k, \tilde{\varphi} \text{ } Y\text{-periódicas} \end{array} \right.$$

El carácter de viscosidad turbulenta del término  $\nabla \cdot (qR')$  (y también  $\nabla \cdot (q^{1/2} \mathcal{A} : \nabla u)$ ) va a depender de su comportamiento respecto a  $\nabla u$ . En la Sección 3 se estudia la circulación monodimensional en un tubo, caso en que el tensor  $R$  confiere un carácter hiperbólico a los términos en  $\mathcal{E}^0$  de las ecuaciones (4.1)-(4.2) para pequeñas variaciones del campo medio (i.e.,  $C$  próxima a la identidad).

En la Sección 5 se muestra que los términos en  $\varepsilon$  aportan la viscosidad turbulenta, y de ahí el interés de extraer los términos en  $\nabla u$  y  $\nabla q$  en (4.1)-(4.2).

Los términos despreciados en (4.1a) son pequeños respecto a  $u \cdot \nabla u$  o bien respecto a  $\nabla \cdot (q R')$ , al ser de orden uno en  $\varepsilon$ . El término de difusión  $\varepsilon \nabla \cdot (q^2 \mu : \nabla u)$  no se puede despreciar frente a ningún otro en  $\varepsilon^0$ . Lo análogo puede ser dicho sobre la ecuación de la energía (4.2). El sistema (4.1)-(4.2) concierne las variables  $u, q$ ; que aparecen acopladas, y contiene derivadas de estas incógnitas hasta el segundo orden. Su resolución numérica requiere en primer lugar la tabulación numérica de los tensores en un entorno de la matriz unidad. A ello se dedica el resto del capítulo.

## 2 - Turbulencia localmente isótropa

Si suponemos que el campo turbulento inicial es localmente isótropo, la ecuación (4.2a) debe permanecer invariante bajo giros del sistema de referencia.

Afín de expresar esta propiedad, consideremos el espacio  $\Theta_3$  de las matrices ortogonales de orden 3. Dada  $Q \in \Theta_3$ , sean  $x, u, A$  los transformados bajo  $Q$  de  $x, u$  y  $a$ , respectivamente. Se tiene entonces :

$$(4.6) \quad x = Qx, \quad u = Qu, \quad A = Qa, \quad \nabla_x a = Q^T \nabla_x A Q.$$

La ecuación (4.2a), expresada en función de  $x, u, A$  es :

$$(4.7) \quad Q^T \{ u_{,t} + \nabla_x \cdot [ (u \otimes u) + pI + q R' (Q^T \nabla_x A Q) Q^T ] \} = o(\varepsilon).$$

La invariancia bajo rotación requiere que esta expresión coincida con

$$(4.8) \quad Q^T \{ u_{,t} + \nabla_x \cdot [ (u \otimes u) + pI + q R' (\nabla_x A) ] \} = o(\varepsilon).$$

De donde :

$$(4.9) \quad R' (Q^T \nabla_x A Q) = Q^T R' (\nabla_x A) Q, \quad \forall Q \in \Theta_3.$$

Utilizando ahora (4.3) y (4.6d), se tiene la misma propiedad para  $\tilde{R}$  :

$$(4.10) \quad \tilde{R}(Q^T C Q) = Q^T \tilde{R}(C) Q, \quad C = (\nabla_x A)^T (\nabla_x A), \quad \forall Q \in O_3.$$

Por tanto,  $\tilde{R}$  y  $C$  son diagonalizables en la misma base. Al ser  $\det C > 0$ , es posible aplicar el teorema de Rivlin-Ericksen [16] :

$$(4.11) \quad \tilde{R}(C) = \tilde{a}_0 I + \tilde{a}_1 C + \tilde{a}_2 C^2,$$

donde  $\tilde{a}_0$ ,  $\tilde{a}_1$  y  $\tilde{a}_2$  son funciones escalares de los invariantes de la matriz  $C$  :

$$(4.12a) \quad i_1 = \text{tr } C,$$

$$(4.12b) \quad i_2 = \text{tr } (\text{Adj } C),$$

$$(4.12c) \quad i_3 = \det C = 1,$$

y por tanto

$$(4.12) \quad R'(C) = \tilde{a}_0 \bar{C}^{-1} + \tilde{a}_1 I + \tilde{a}_2 \bar{C}^{-1}$$

donde

$$(4.13) \quad \bar{C} = (\nabla a) (\nabla a)^T$$

La matriz  $\bar{C}$  verifica su polinomio característico, según el Teorema de Cayley-Hamilton. Como  $C$  y  $\bar{C}$  tienen los mismos invariantes, se tiene

$$(4.14) \quad \bar{C}^{-1} = \bar{C}^2 - i_1 \bar{C} + i_2 I,$$

y entonces

$$(4.15) \quad R' = a_0 I + a_1 \bar{C} + a_2 \bar{C}^2,$$

siendo

$$(4.16) \quad a_0 = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_0 i_2, \quad a_1 = \tilde{a}_2 - \tilde{a}_0 i_1, \quad a_2 = \tilde{a}_0.$$

De esta forma, la tabulación del tensor  $R'$  queda reducida al cálculo de los tres valores  $a_0, a_1, a_2$  en función de solo dos parámetros (Y no cinco, como en principio se desprende de las propiedades de C).

### 3 - Un caso monodimensional : circulación en un tubo

El papel jugado por el tensor de Reynolds  $R = \rho R'$  en las ecuaciones reducidas (4.1)-(4.2) puede ser ilustrado considerando el caso de circulación unidimensional en un tubo analizado por M.P.P. [ 2 ], [ 4 ]:

$$(4.17) \quad u = (u_1(x_2, t), 0, 0)^t$$

Las coordenadas Lagrangianas  $a$  pueden ser obtenidas explícitamente de (1.26) :

$$(4.18) \quad a(x, t) = (x_1 - \int_0^t u_1(x_2, s) ds, x_2, x_3).$$

De esta forma, las matrices  $\nabla a$  y  $C$  son

$$(4.19) \quad \nabla a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 + \alpha^2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

siendo

$$(4.20) \quad \alpha = - \int_0^t u_{1,2}(x_2, s) ds$$

Puesto que  $\nabla a = \nabla a(x_2, t)$  se tiene  $\omega = \omega(x_2, t)$ , y la ecuación (4.1a) se expresa en la forma

$$(4.21a) \quad u_{1,t} + \langle \omega_1 \omega_2 \rangle_{,2} + P_1 = O(\epsilon),$$

$$(4.21b) \quad \langle \omega_2^2 \rangle_{,2} + P_2 = O(\epsilon),$$

$$(4.21c) \quad \langle \omega_2 \omega_3 \rangle_{,2} + p_{13} = O(\varepsilon).$$

Bajo la hipótesis de isotropía local,  $\langle \omega_2 \omega_3 \rangle = 0$  según (4.15). Para satisfacer (4.21),  $p$  debe ser de la forma

$$(4.22) \quad p = - \langle \omega_2^2 \rangle(x_2, t) + p_0(t)$$

y entonces (4.21) se reduce a

$$(4.23) \quad u_{1,t} + (q\varphi)_{,2} = O(\varepsilon),$$

donde

$$(4.24) \quad \varphi(x_2, t) = \varphi(\alpha(x_2, t)) = - \langle \omega_1' \omega_2' \rangle(\alpha).$$

Por otra parte, la ecuación de la energía es

$$(4.25) \quad q_{,t} + q\varphi u_{1,2} = O(\varepsilon)$$

Al ser  $\alpha_{,t} = -u_{1,2}$ , si definimos

$$(4.26) \quad \Phi(\alpha) = \int_0^\alpha \varphi(\beta) d\beta,$$

se tiene

$$(4.27) \quad q(x_2, t) = q_0(x_2) e^{\Phi(\alpha)} + O(\varepsilon).$$

La ecuación (4.23) puede ahora ser expresada en función de la única variable  $V$  definida por

$$(4.28) \quad V = \int_0^t u_1(x_2, s) ds :$$

$$(4.29a) \quad V_{,tt} + [q_0(x) e^{\Phi(-V, x)} \varphi(-V, x)]_{,x} = O(\varepsilon).$$

$$(4.29b) \quad V(x, 0) = 0, \quad V_{,t}(x, 0) = u_1(x, 0).$$

Se trata de una ecuación en derivadas parciales no lineal, que presenta la siguiente ley de conservación de energía :

$$(4.30) \quad \frac{d}{dt} \left[ \int_a^b \frac{1}{2} |v_t|^2 dt + \int_a^b q_0(x) e^{\phi(-v,x)} dx \right] + \\ + [q_0(x) e^{\phi(-v,x)} \varphi(-v,x) v_t]_{x=a}^{x=b} = 0; \text{ para } a, b \in \mathbb{R}.$$

La ecuación (4.29a) será por tanto una ecuación de ondas no lineal si  $\phi(-\alpha)$  es convexa. En este caso, el problema de valores iniciales (4.29) linealizado está bien planteado, y una condición suficiente para ello es que  $\varphi(\alpha)$  sea creciente.

La función  $\varphi(\alpha)$  está representada en la figura 1. Según las simetrías  $\varphi(\alpha)$  es impar y por ello es creciente en un entorno de  $\alpha=0$  ( $-.05 \leq \alpha \leq .05$ ). Por tanto, (4.29) tiene carácter hiperbólico si  $v_x$  es pequeño.

#### 4 - Tabulación de R mediante isotropía

La tabulación de R respecto a la matriz C ha sido realizada mediante la implementación numérica del algoritmo de resolución del problema para la fluctuación canónica descrito en el Capítulo 3. Se ha tomado una inicialización común  $\tilde{w}_0$  para todas las matrices, que presenta las simetrías correspondientes a la identidad, y tiene un espectro de energía en  $\langle \tilde{w} \rangle$ :

$$(4.31) \quad \tilde{w}_0(y) = \sum_{|k_1| \leq 17} \frac{a}{|k|^2} e^{-ik \cdot y}, \quad a \in \mathbb{R}^3.$$

Los puntos discretos de tabulación se han tomado más densos cerca de la identidad, afín de afinar la expresión de R.

El tiempo de cálculo sobre el ordenador CRAY 1 es de unos 50 segundos de CPU por iteración, y el costo relativo de las soluciones discretas tomadas es del orden de  $10^{-2}$ .

#### 4.1. Caso bidimensional

La circulación bidimensional con turbulencia bidimensional estudiada por M.P.P. [2] corresponde a matrices C con la siguiente estructura :

$$(4.32) \quad C = \begin{bmatrix} a & c & 0 \\ c & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad ab - c^2 = 1.$$

Estas matrices presentan un solo invariante no trivial :

$$(4.33) \quad i_1 = \text{tr } C = a+b+1 \quad (i_2 = i_1, \quad i_3 = 1)$$

sea A la matriz correspondiente a la circulación 2-d :

$$(4.34) \quad A = \begin{bmatrix} a & c \\ c & b \end{bmatrix}$$

se tiene

$$(4.35) \quad A^2 = (i_1 - 1) A - I$$

y entonces  $\tilde{R}$  se puede expresar en la forma

$$(4.36) \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} \tilde{R}_2 & 0 \\ 0 & \tilde{R}_{33} \end{bmatrix}, \quad \tilde{R}_2 = \tilde{b}_0 I + \tilde{b}_1 A,$$

donde

$$(4.37) \quad \tilde{b}_0 = \tilde{a}_0 - \tilde{a}_2, \quad \tilde{b}_1 = \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 (i_1 - 1)$$

Los parámetros  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{b}_0$  y  $\tilde{b}_1$  se obtienen a partir de  $\tilde{R}$  mediante el siguiente sistema lineal :

$$(4.38) \quad \begin{cases} \mu_1 = \tilde{R}_{11} + \tilde{R}_{22} = 2\tilde{a}_0 + (i_1 - 1)\tilde{a}_1 + [(i_1 - 1)^2 - 2]\tilde{a}_2 \\ \mu_2 = \tilde{R}_{33} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 \\ 2 = \langle \tilde{w} \cdot C^{-1} \tilde{w} \rangle = i_1 \tilde{a}_0 + 3\tilde{a}_1 + i_1 \tilde{a}_2 \end{cases}$$

cuyo determinante  $\Delta = (i_1 + 1)(i_1 - 3)$  sólo se anula para la identidad.

La tabulación en función de la única variable  $i_1$  ha sido realizada en la práctica para las matrices C correspondientes al caso monodimensional (Sección 3), en el cual

$$(4.39) \quad i_1 = \alpha^2 + 3, \quad \Delta = \alpha^2(\alpha^2 + 4)$$

teniéndose

$$(4.40a) \quad \tilde{a}_0 = \tilde{\Delta}^{-1} [\mu_1 - (\alpha^2 + 5)\mu_2 + 2]$$

$$(4.40b) \quad \tilde{a}_1 = \alpha^{-2} [(\alpha^2 + 3)\mu_2 - 2]$$

$$(4.40c) \quad \tilde{a}_2 = \tilde{\Delta}^{-1} [-\mu_1 - (2\alpha^2 + 7)\mu_2 + 2\alpha^2 + 6]$$

$$(4.40d) \quad \tilde{b}_0 = \tilde{\Delta}^{-1} [-2\mu_1 - (\alpha^2 + 2)\mu_2 + 2(\alpha^2 + 2)]$$

$$(4.40e) \quad \tilde{b}_1 = \tilde{\Delta}^{-1} [(\alpha^2 + 2)\mu_1 + 2\mu_2 - 4]$$

Las figuras 2 y 3 muestran las tabulaciones de  $\mu_1$  y  $\mu_2$  en función de  $\alpha$ , realizadas sobre los ordenadores DPS68 y CRAY1 respectivamente. Se observa una semejanza entre ambas tabulaciones, siendo más regular la correspondiente al CRAY1, debido a la mayor precisión en los cálculos.

Los parámetros  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1$  y  $\tilde{a}_2$  están representados en la figura 4, y  $\tilde{b}_0$  y  $\tilde{b}_1$  en la 5. Al estar los valores para la identidad sujetos a la única condición  $\langle |w|^2 \rangle = 2$ , se han tomado  $\tilde{a}_i = 2/9$ ,  $1 \leq i \leq 3$ ;  $\tilde{b}_0 = 0$ ,  $\tilde{b}_1 = 2/3$ .

#### 4.2. Caso tridimensional

Para circulaciones tridimensionales, la tabulación ha de ser realizada en función de los dos invariantes  $\lambda_1, \lambda_2$  (4.13). Al ser  $\det C = 1$ , se pueden considerar sólo matrices diagonales de la forma

$$(4.41) \quad C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1;$$

con  $\lambda_i > 0$  ya, que C es definida positiva.

El caso monodimensional (4.19) corresponde a  $\lambda_2 = \lambda_1^{-1}$ , siendo

$$(4.42) \quad \lambda_1 = \lambda_1(\alpha) = 1 + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \sqrt{4 + \alpha^2}, \quad \lambda_2 = \lambda_1(-\alpha), \quad \lambda_3 = 1.$$

según (4.11),  $\tilde{a}_0, \tilde{a}_1$  y  $\tilde{a}_2$  son soluciones del sistema lineal:

$$(4.43) \quad \tilde{R}_{rk} = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \lambda_k + \tilde{a}_2 \lambda_k^2, \quad 1 \leq k \leq 3;$$

cuyo determinante es

$$(4.44) \quad \Delta = (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1),$$

que es nulo para matrices con dos autovalores iguales. Según (4.43), ha de darse

$$(4.45a) \quad \tilde{R}_{\nu\ell} = \delta_{\nu\ell} \tilde{R}_{\nu\nu},$$

$$(4.45b) \quad \lambda_\nu = \lambda_\ell \Rightarrow \tilde{R}_{\nu\nu} = \tilde{R}_{\ell\ell}.$$

Estas propiedades derivan, por otra parte, de las simetrías de paridad (Capítulo 2) de  $\tilde{\omega}$  en el caso de matrices diagonales. Numéricamente, la incorporación de mallados simétricos ha permitido obtenerlas con errores del orden de  $10^{-4}$  utilizando el ordenador CRAY1.

a) Caso no singular

Supongamos  $\Delta \neq 0$ . Se tiene entonces

$$(4.46a) \quad \tilde{\alpha}_0 = \tilde{\Delta}^{-1} [\tilde{R}_{11} \tilde{\lambda}_1^{-1} (\lambda_3 - \lambda_2) - \tilde{R}_{22} \tilde{\lambda}_2^{-1} (\lambda_3 - \lambda_1) + \tilde{R}_{33} \tilde{\lambda}_3^{-1} (\lambda_2 - \lambda_1)],$$

$$(4.46b) \quad \tilde{\alpha}_1 = \tilde{\Delta}^{-1} [-\tilde{R}_{11} (\lambda_3^2 - \lambda_2^2) + \tilde{R}_{22} (\lambda_3^2 - \lambda_1^2) - \tilde{R}_{33} (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)],$$

$$(4.46c) \quad \tilde{\alpha}_2 = \tilde{\Delta}^{-1} [\tilde{R}_{11} (\lambda_3 - \lambda_2) - \tilde{R}_{22} (\lambda_3 - \lambda_1) + \tilde{R}_{33} (\lambda_2 - \lambda_1)].$$

Sea

$$(4.47) \quad \lambda_3 = \mu^2, \quad \mu > 0.$$

se puede generalizar (4.42) bajo la forma :

$$(4.48) \quad \lambda_1 = \lambda_1(\alpha, \mu) = \mu + \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha}{2} \sqrt{4\mu + \alpha^2}, \quad \lambda_2 = \lambda_1(-\alpha, \mu),$$

correspondiendo el caso 1-d a  $\mu=1$ . Es interesante realizar la tabulación sobre las hipérbolas

$$(4.49) \quad \lambda_1 \lambda_2 = \mu^2, \quad \mu > 0,$$

afín de observar la variación de los coeficientes  $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$  respecto al caso 1-D (Figuras 6, 7 y 8).

De hecho, basta realizar la tabulación para  $\lambda_1 \geq \mu (\Leftrightarrow \alpha \geq 0)$ , ya que las matrices  $C(\lambda, \mu^2 \lambda^{-1}, \mu^{-2})$  y  $C(\mu^2 \lambda^{-1}, \lambda, \mu^{-2})$  tienen los mismos invariantes.

Por otra parte, la expresión (4.42) permite escoger los puntos discretos de tabulación en  $\alpha$  a partir de los puntos tomados para el caso 1-D: si estos son  $\{\alpha_i, 1 \leq i \leq N\}$ , se toma

$$(4.50) \quad \lambda_i(\mu) = \mu + \frac{\alpha_i^2}{2} + \frac{\alpha_i}{2} + \sqrt{4\mu + \alpha_i^2}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

#### b) Caso singular

Supongamos  $\lambda_1 = \lambda_2 = \mu$ . Según la condición  $\langle \tilde{\omega}, \tilde{C}^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 2$ ,  $\tilde{R}$  es de la forma

$$(4.51) \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & \varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi = \frac{2}{\mu^2} (1 - \rho/\mu)$$

se trata, pues, de la tabulación del parámetro  $\rho$  sobre la recta  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Es de hacer notar que el único caso singular para circulaciones bidimensionales es  $C = I$ . □

La tabulación de  $R'$  en función de los invariantes viene dada por la expresión de estos en función de  $\alpha, \mu$ :

$$(4.52a) \quad i_1 = \mu^{-2} + 2\mu + \alpha^2,$$

$$(4.52b) \quad i_2 = \alpha^2 \mu^{-2} + 2\mu^{-1} + \mu^2,$$

y de la expresión de  $R'$  en función de  $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ : (4.15)-(4.16).

#### 5. Tabulaciones mediante desarrollos de Taylor

Las expresiones mediante desarrollos de Taylor de los tensores  $R, A$  y  $\beta$  dadas en el Capítulo 2 han sido calculadas numéricamente como se indica a continuación:

5.1. Tabulación de R

Según (2.46), R es aproximado linealmente respecto a C por

$$(4.53) \quad R \approx \eta \{ \zeta \operatorname{Tr} C \bar{C}^{-1} + \sigma I + (\frac{2}{3} - 3\zeta - \sigma) (\nabla a)^{-T} D (\nabla a)^{-1} \},$$

donde

$$(4.54) \quad \bar{C} = (\nabla a) (\nabla a)^T, \quad D_{ij} = \delta_{ij} C_{ii};$$

y los parámetros  $\zeta, \sigma$  vienen dados a través de las derivadas formales de  $\tilde{\omega}$  respecto a  $C_{33}, C_{23}$  ( $\tilde{u}^{33}, \tilde{u}^{23}$  respectivamente) :

$$(4.55) \quad A^{33} = \langle \tilde{u}^{33} \otimes \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \otimes \tilde{u}^{33} \rangle = \begin{bmatrix} \zeta & 0 & 0 \\ 0 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} - 2\zeta \end{bmatrix}$$

$$(4.56) \quad A^{23} = \langle \tilde{u}^{23} \otimes \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \otimes \tilde{u}^{23} \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \\ 0 & \sigma & 0 \end{bmatrix}$$

Numéricamente, los valores de  $\zeta, \sigma$  han sido calculados resolviendo los problemas lineales verificados por  $\tilde{u}^{33}$  y  $\tilde{u}^{23}$  (2.24). Teniendo en cuenta las simetrías, las inicializaciones tomadas han sido

$$(4.57) \quad \tilde{u}_0^{33} = \frac{1}{3} \tilde{\omega}, \quad (\tilde{u}_0^{23})_1 = 0, \quad (\tilde{u}_0^{23})_2 = \tilde{\omega}_3, \quad (\tilde{u}_0^{23})_3 = \tilde{\omega}_2.$$

Después de 60 iteraciones para  $\tilde{u}^{33}$  y 30 para  $\tilde{u}^{23}$  se obtiene :

$$(4.58) \quad \langle \tilde{\omega} \otimes \tilde{u}^{33} \rangle = \begin{bmatrix} .0952 & .0003 & -.0003 \\ .00004 & .1134 & .0003 \\ -.0004 & .0005 & .1194 \end{bmatrix}$$

$$(4.59) \quad \langle \tilde{\omega} \otimes \tilde{u}^{23} \rangle = \begin{bmatrix} -.0074 & -.00007 & .0002 \\ -.00007 & .0027 & .1174 \\ .0002 & .1174 & .0046 \end{bmatrix}$$

Prácticamente, se tienen los valores  $\zeta = \frac{2}{q}$ ,  $\sigma = \frac{2}{q}$  (considerando válidas los dos primeras cifras decimales), y entonces

$$(4.60) \quad \tilde{R} = \frac{2}{q} (\text{Tr } C \bar{C}^{-1} + I - (\nabla a)^T D (\nabla a)^{-1})$$

En el caso monodimensional, se obtiene

$$(4.61a) \quad \tilde{R}_{11} = \left(\frac{2}{3} - 2\zeta\right) \alpha^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{q} \alpha^2 + \frac{2}{3}$$

$$(4.61b) \quad \tilde{R}_{12} = \sigma \alpha = \frac{2}{q} \alpha$$

$$(4.61c) \quad R_{22} = \tilde{R}_{33} = \zeta \alpha^2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{q} \alpha^2 + \frac{2}{3}$$

La tabulación de Taylor en este caso consiste, pues, en aproximar la curva  $\alpha \rightarrow \tilde{R}_{12}$  por su tangente en el origen.

La expresión (4.60) resulta aceptable si  $\nabla a$  queda cerca de la identidad lo cual se tiene si el campo medio  $u$  es casi lineal en  $x$ . Ello es cierto, por ejemplo, para tiempo pequeño.

## 5.2. Tabulación de $A$ :

El tensor  $A$  es aproximado de forma constante respecto de  $C$  según (2.81) :

$$(4.62) \quad A : \nabla u = \tau (\nabla u + \nabla u^T) - (3\delta + \tau) D(u_{1,1}; u_{2,2}; u_{3,3})$$

donde  $\delta$  y  $\tau$  vienen dados por

$$(4.63) \quad B^{33} = \langle \tilde{\omega} \otimes \tilde{\chi}^{33} + \tilde{\chi}^{33} \otimes \tilde{\omega} \rangle = \begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & \delta & 0 \\ 0 & 0 & -2\delta \end{bmatrix}$$

$$(4.64) \quad B^{23} = \langle \tilde{\omega} \otimes \tilde{\chi}^{23} + \tilde{\chi}^{23} \otimes \tilde{\omega} \rangle = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & \tau & 0 \end{bmatrix}$$

$\tilde{\chi}^{33}$ ,  $\tilde{\chi}^{23}$  son soluciones del problema lineal (2.69)

$$(4.65) \quad \begin{cases} L(\tilde{\chi}^{em}, \tilde{\psi}^{em}; \tilde{\omega}, I) = F(I), \quad \nabla \cdot \tilde{\chi}^{em} = 0; \\ \langle \tilde{\chi}^{em} \cdot \tilde{\omega} \rangle = 0; \quad \tilde{\chi}^{em}, \tilde{\psi}^{em} \text{ } \gamma\text{-periódicos} \end{cases}$$

El cálculo numérico de  $\delta, \gamma$  ha sido realizado inicializando el algoritmo para el problema lineal (4.65) de la misma forma que para  $\tilde{u}^{23}, \tilde{u}^{33}$ , ya que  $\tilde{\chi}^{em}$  y  $\tilde{\psi}^{em}$  presentan las mismas simetrías. Se ha realizado 40 iteraciones para  $\tilde{\chi}^{33}$  y 30 para  $\tilde{\chi}^{23}$ , obteniéndose las aproximaciones:

$$(4.66) \quad \langle \tilde{\omega} \otimes \tilde{\chi}^{33} \rangle = \begin{bmatrix} .088 & -.1 \times 10^{-5} & -.2 \times 10^{-5} \\ .8 \times 10^{-6} & .08 & .6 \times 10^{-6} \\ .1 \times 10^{-5} & -.2 \times 10^{-5} & .168 \end{bmatrix}$$

$$(4.67) \quad \langle \tilde{\omega} \otimes \tilde{\chi}^{23} \rangle = \begin{bmatrix} .9 \times 10^{-2} & .8 \times 10^{-6} & .5 \times 10^{-6} \\ -.8 \times 10^{-6} & -.3 \times 10^{-2} & -.224 \\ 10^{-7} & -.224 & -.7 \times 10^{-2} \end{bmatrix}$$

Prácticamente,  $\delta = \frac{1}{6}$  y  $\gamma = -\frac{4}{9}$ . Por tanto,

$$(4.68) \quad A: \nabla u \approx -\frac{4}{9} (\nabla u + \nabla u^T) + \frac{7}{18} D(u_{1,1}; u_{2,2}; u_{3,3})$$

De esta forma, el tensor  $A$  aporta términos de viscosidad turbulenta, de forma análoga al modelo  $k$ - $\epsilon$ , como se esperaba al considerar los términos de primer orden en el desarrollo (4.1)-(4.2).

### 5.3. Tabulación de $\beta$

El tensor  $\beta$  ha sido tabulado calculando en primer lugar una función  $\tilde{\xi}_d^k$  tal que

$$(4.69) \quad \nabla \cdot \tilde{\xi}_d^k = -\tilde{\omega}_k; \quad \langle \tilde{\xi}_d^k \cdot \tilde{c}^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 0$$

y resolviendo el problema lineal

$$(4.70) \quad \begin{cases} L(\tilde{\xi}^k, \tilde{\varphi}^k; \tilde{\omega}, C) = -2P(\tilde{G}^k) - \tilde{\omega} \cdot \nabla \tilde{\xi}_d^k - \tilde{\xi}_d^k \cdot \nabla \tilde{\omega}; \quad \nabla \cdot \tilde{\xi}^k = 0; \\ \langle \tilde{\xi}^k \cdot \tilde{c}^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 0; \quad \tilde{\xi}^k, \tilde{\varphi}^k \text{ } \gamma\text{-periódicos} \end{cases}$$

y entonces

$$(4.71) \quad \tilde{\xi}^k = \tilde{\xi}^k + \tilde{\xi}_d^k$$

se tiene la siguiente aproximación para  $Q = I$ :

$$(4.72) \quad \beta(I) \approx \begin{bmatrix} .02315 & 10^{-6} & 10^{-5} \\ 10^{-6} & .02315 & 10^{-5} \\ 10^{-5} & 10^{-6} & .02315 \end{bmatrix}$$

obtenida mediante el calculo discreto de  $\tilde{\xi}^1$ . La inicialización tomada presenta las simetrías de  $\tilde{\xi}^1$ .

#### 6. Isotropía de las soluciones discretas simétricas :

En principio, las fluctuaciones discretas simétricas  $\tilde{\omega}$  no confieren al tensor  $\tilde{R}$  caracter isótropo.

Sin embargo, si  $C$  es diagonal, como se ha tomado en la tabulación tridimensional, las simetrías de  $\tilde{\omega}$  imponen  $\tilde{R}$  diagonal, y por tanto expresable en función de  $C$  en la forma indicada por el Teorema de Rivlin-Ericksen (4.15). Para matrices  $C$  no diagonales, se obtiene una buena aproximación del carácter isótropo de  $\tilde{R}$ : Por ejemplo, tomando  $C$  monodimensional para  $\alpha = 1$ :

$$(4.73) \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y la matriz ortogonal  $Q$  dada por

$$(4.74) \quad Q = \begin{bmatrix} \cos\varphi \cos\theta & \cos\varphi \operatorname{sen}\theta & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi \cos\theta & -\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta & \cos\varphi \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \text{ para } \varphi = \pi/3, \theta = 7\pi/9,$$

se obtiene

$$(4.75) \quad \tilde{R}(Q^T C Q) = \begin{bmatrix} .0197 & .0061 & .1059 \\ .0061 & .0192 & -.0946 \\ .1059 & -.0946 & 5.100 \end{bmatrix}$$

$$(4.76) \quad Q^T \tilde{R}(C) Q = \begin{bmatrix} .0660 & -.0053 & .1160 \\ -.0053 & .0638 & -.1015 \\ .1160 & -.1015 & 4.6283 \end{bmatrix}$$

Puede, pues, considerarse aceptable la tabulación en el caso isotrópico mediante las soluciones simétricas.

### 7. Las ecuaciones M.P.P. segun el desarrollo de Taylor

Si llevamos las aproximaciones realizadas en 4.3-4.5 a la expresión del modelo en función de los términos de viscosidad (4.1)-(4.2), las ecuaciones del modelo toman la siguiente expresión :

$$(4.77) \quad u_{,t} + u \cdot \nabla u + \nabla \cdot (q R^L) + \varepsilon \nabla \cdot \left\{ q^{1/2} [\mu (\nabla u + \nabla u^T) + \rho D(\nabla u)] \right\} = 0,$$

$$(4.78) \quad \nabla \cdot u = 0,$$

$$(4.79) \quad q_{,t} + u \cdot \nabla q + \frac{1}{2} q R^L : (\nabla u + \nabla u^T) + \varepsilon \nabla \cdot [\beta (\nabla q^{3/2})] = 0,$$

donde

$$(4.80) \quad R^L = \zeta \text{Tr}((\nabla a^T)(\nabla a)) (\nabla a^{-T}) (\nabla a^{-1}) + \sigma I + \tau (\nabla a)^{-1} D((\nabla a)^T(\nabla a)) (\nabla a^T)$$

$$(4.81) \quad D_{ij}(C) = \delta_{ij} C_{ii}, \quad \beta = \begin{bmatrix} .02 & 0 & 0 \\ 0 & .02 & 0 \\ 0 & 0 & .02 \end{bmatrix}$$

$$(4.82) \quad \mu = -\frac{7}{q}, \quad \rho = \frac{7}{18}, \quad \zeta = \frac{2}{q}, \quad \sigma = \frac{2}{q}, \quad \tau = \frac{2}{q}$$

El tensor R confiere a estas ecuaciones un caracter hiperbólico (caso monodimensional), mientras que los terminos en  $\varepsilon$  aportan la viscosidad turbulenta.

La aproximación de Taylor del modelo es tan solo lineal, y produce la aparición de terminos "extraños" (Matriz D (4.81)). Es posible expresar todos los términos de (1) segun la invariancia por rotaciones [17], que confieren al modelo una gran semejanza con el modelo k- $\varepsilon$ . La tabulación numérica de los parámetros que aquí aparecen, así como la implementación numerica de las ecuaciones del modelo con los términos de primer orden, suponen en un arduo trabajo, continuación inmediata del presentado aquí.

## Figuras

Figura 1 :  $\langle \tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_2 \rangle$  monodimensional .

Se trata de una función impar y, como se observa en la figura, creciente en un pequeño intervalo entorno al origen.

Figuras 2 y 3 : Parámetros  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , resp.

usados en la tabulación bidimensional, tabulados sobre los ordenadores DPS68 (Fig. 2) y CRAY1 (Fig. 3) (Funciones pares).

Ambas figuras se asemejan bastante, siendo la correspondiente al CRAY1 mucho más regular a causa de la mayor precisión en los cálculos. Tal semejanza es un dato interesante, si se recuerda que las soluciones dependen de la inicialización tomada en el algoritmo de gradiente conjugado. De hecho, las inicializaciones tomadas para ambas tabulaciones han sido diferentes, si bien con espectro en  $|K|^{-2}$ .

Los dos parámetros parecen, según las figuras, converger a un mismo valor asintótico.

Figuras 4 y 5 : Parámetros  $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2; \tilde{b}_0, \tilde{b}_1$ , respectivamente, correspondientes al caso monodimensional, usados en la tabulación bidimensional.

Figuras 6, 7 y 8 : Coeficientes  $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ , caso general.

Figuras 9, 10 y 11 : Tabulaciones de  $\langle |\omega_1|^2 \rangle, \langle |\omega_2|^2 \rangle$  y  $\langle |\omega_3|^2 \rangle$ ; caso tridimensional.

Se trata en todos los casos de funciones regulares, con aparente límite asintótico respecto de  $\alpha$ .

La variación respecto a  $\mu$ , por otra parte, parece también ser regular. Es de observar que  $\langle |\omega_2|^2 \rangle$  es prácticamente nulo para  $\alpha > 2.5$  en los tres casos.

Los valores correspondientes a  $\mu = 1$  han sido extrapolados de la tabulación monodimensional, suponiendo la invariancia de  $\tilde{R}$  bajo transformaciones ortogonales. Las curvas obtenidas concuerdan bien con las otras dos tabulaciones realizadas propiamente (Secc. 5).

Figuras 12, 13 y 14 : Curvas de nivel correspondientes a la tabulación bidimensional de  $\langle \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{w}_2^2 \rangle$ ,  $\langle \tilde{w}_1^2 \rangle$ , resp.

La curva exterior es  $ab=1$  (curva de nivel correspondiente a  $\langle \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \rangle$ ), y las demás corresponden a valores escalonados uniformemente hasta los máximos :

$$\max \langle \tilde{w}_1^2 \rangle = 9.126, \quad \max \langle \tilde{w}_1 \tilde{w}_2 \rangle = 3.449.$$

La figura correspondiente a  $\langle \tilde{w}_2^2 \rangle$  es la simétrica de la correspondiente a  $\langle \tilde{w}_1^2 \rangle$  respecto de la recta  $a = b$ , al ser  $\tilde{w}_1(a, b) = \tilde{w}_2(b, a)$ .

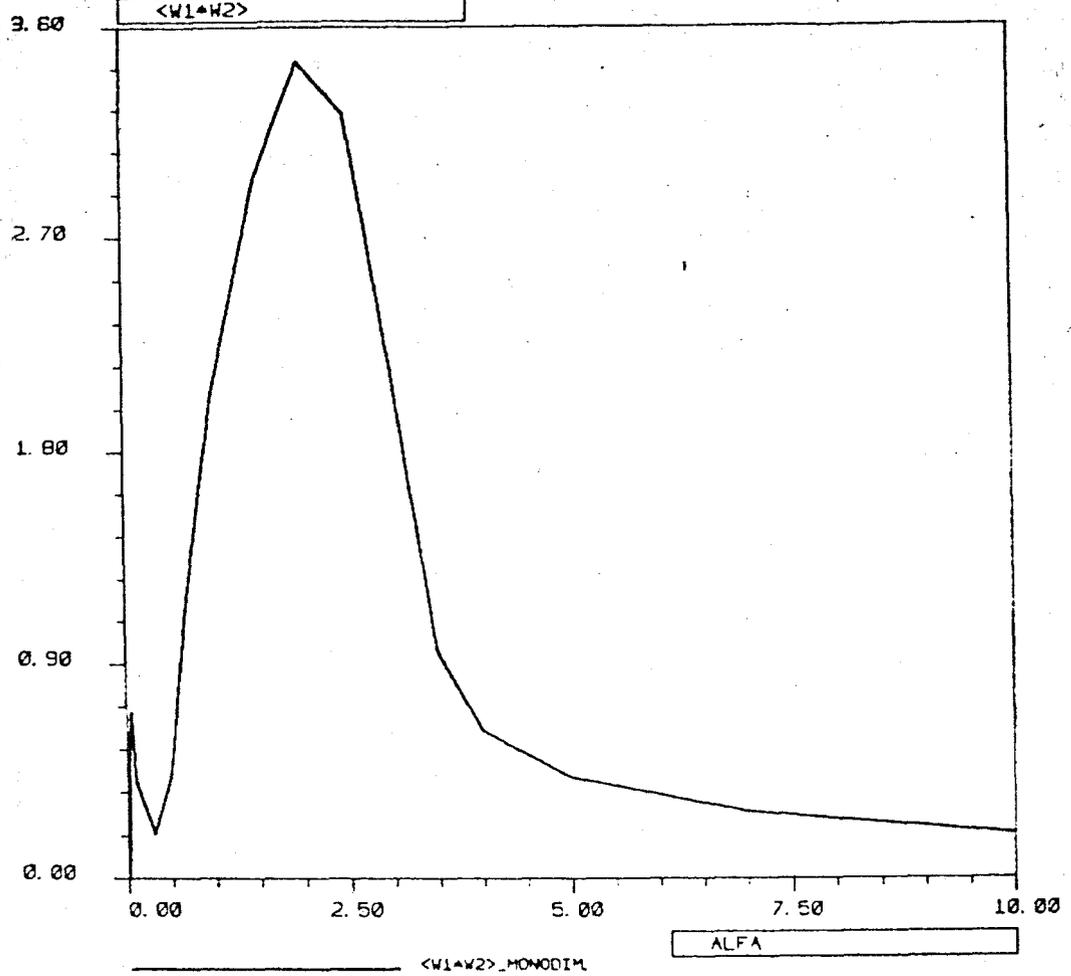


Figura 1

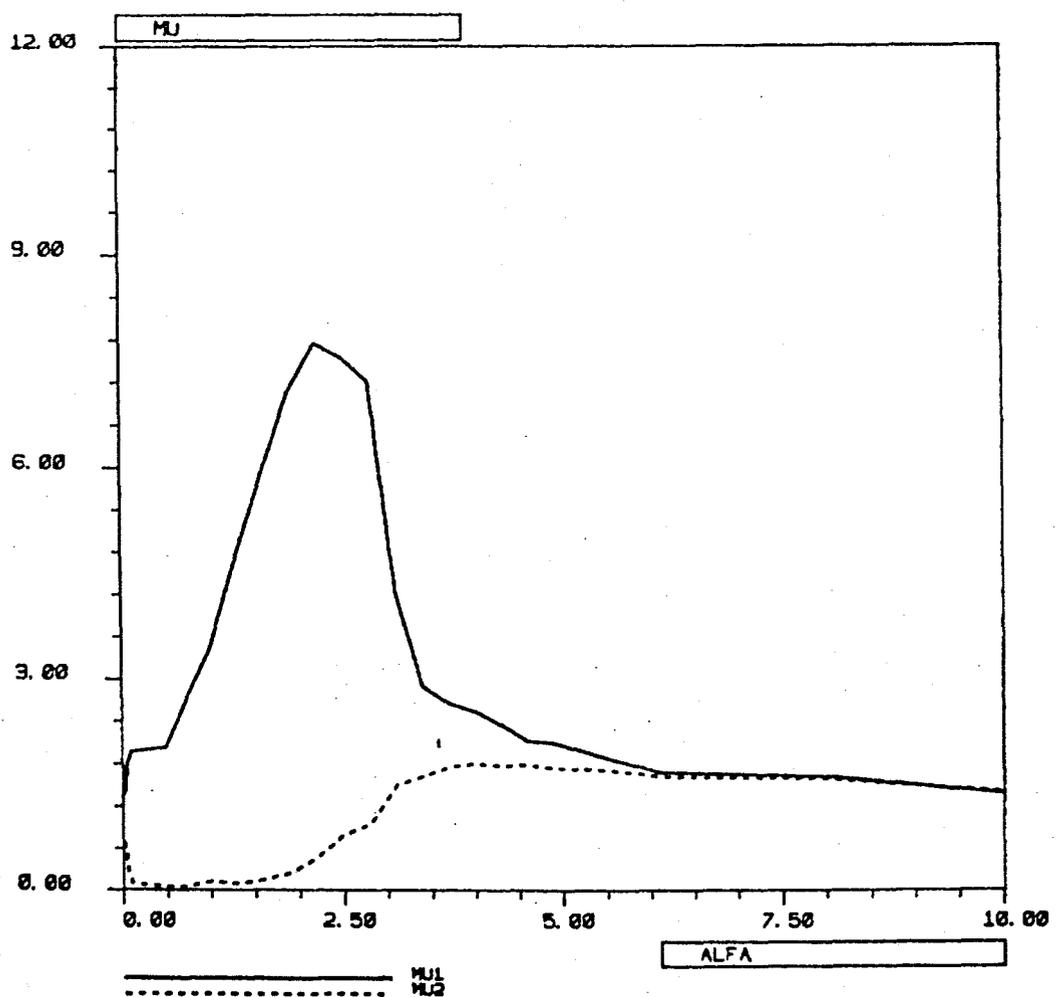


Figura 2

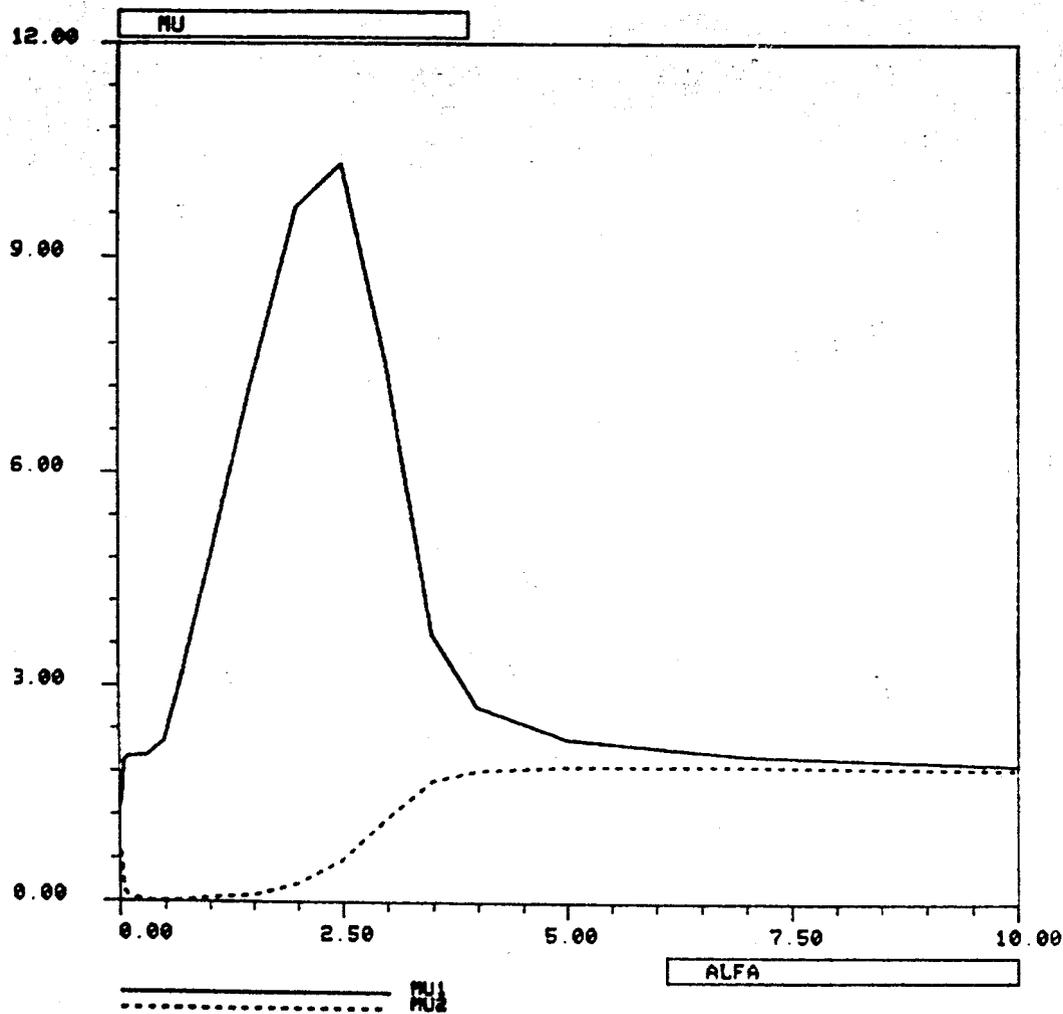


Figura 3

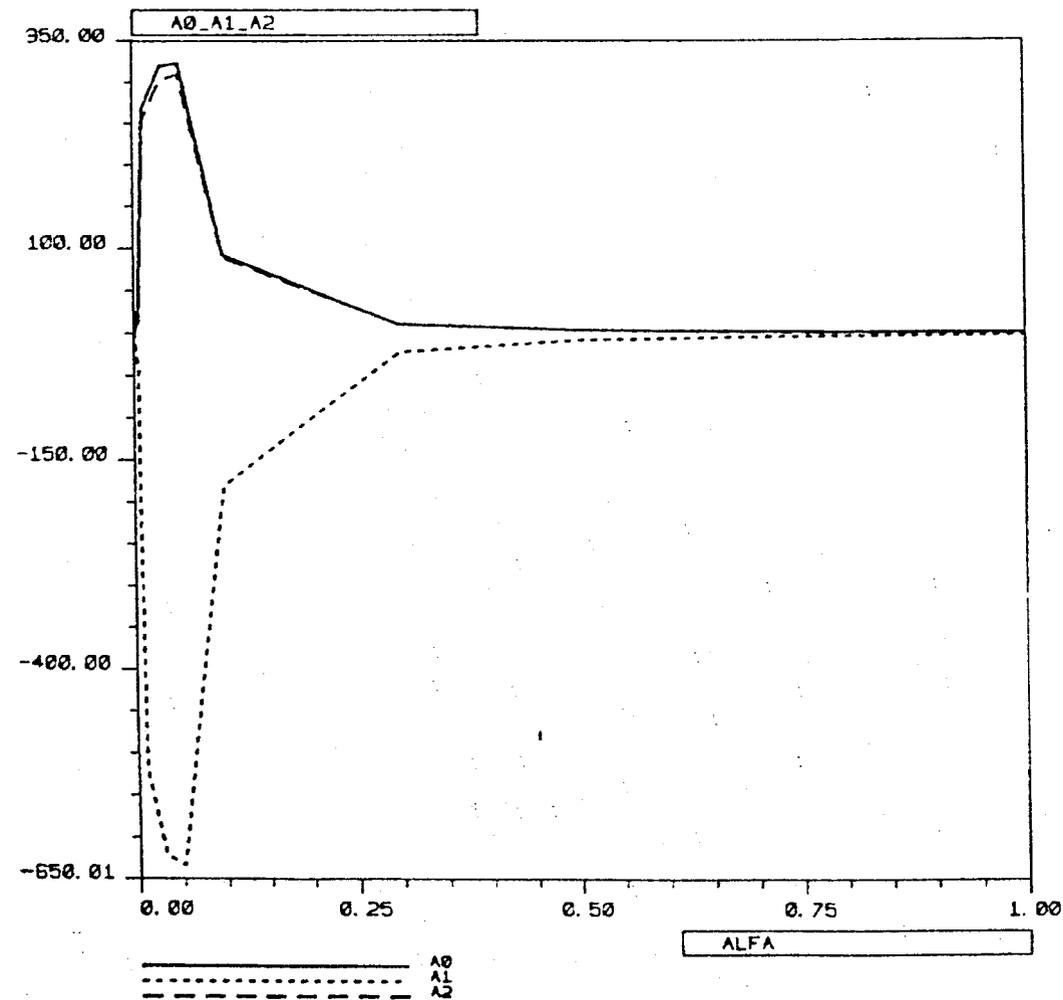


Figura 4a

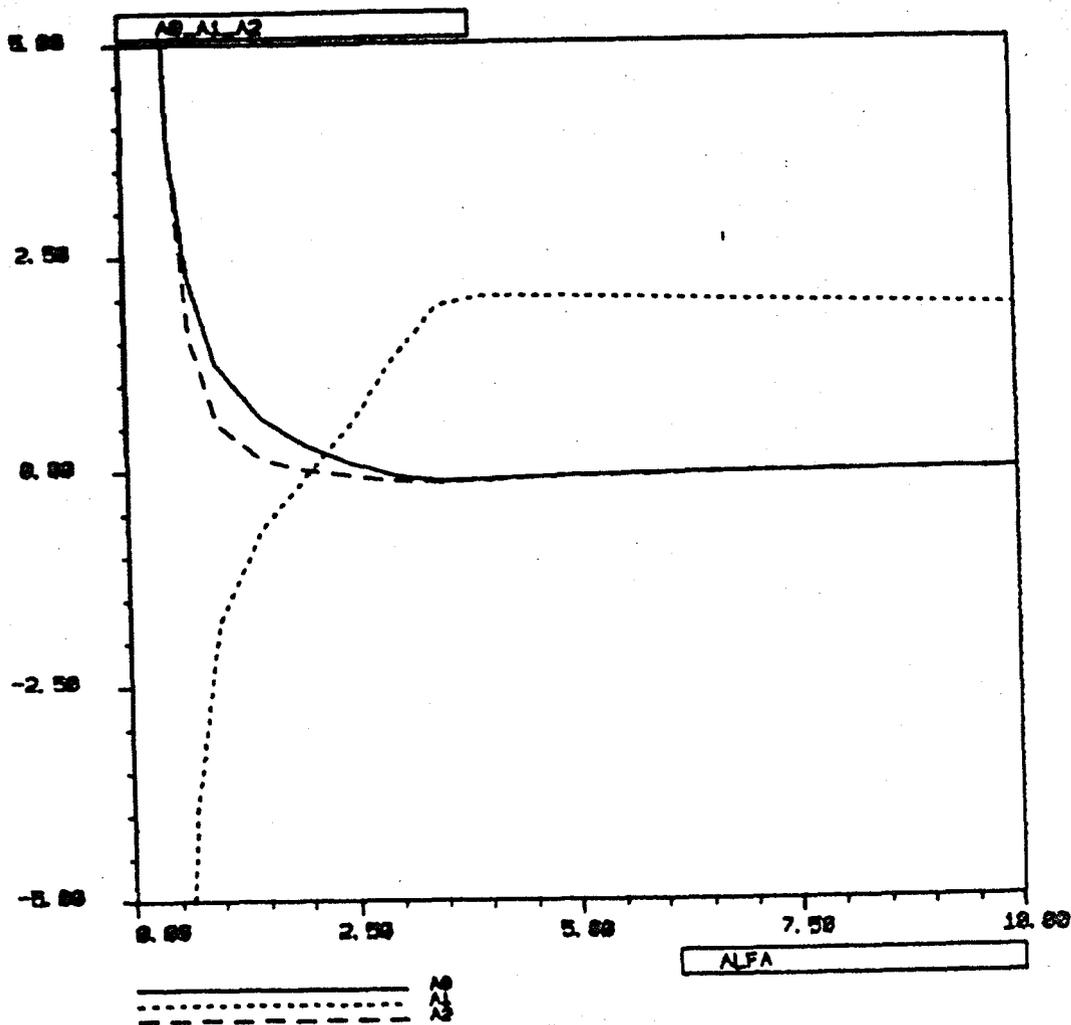


Figura 4b

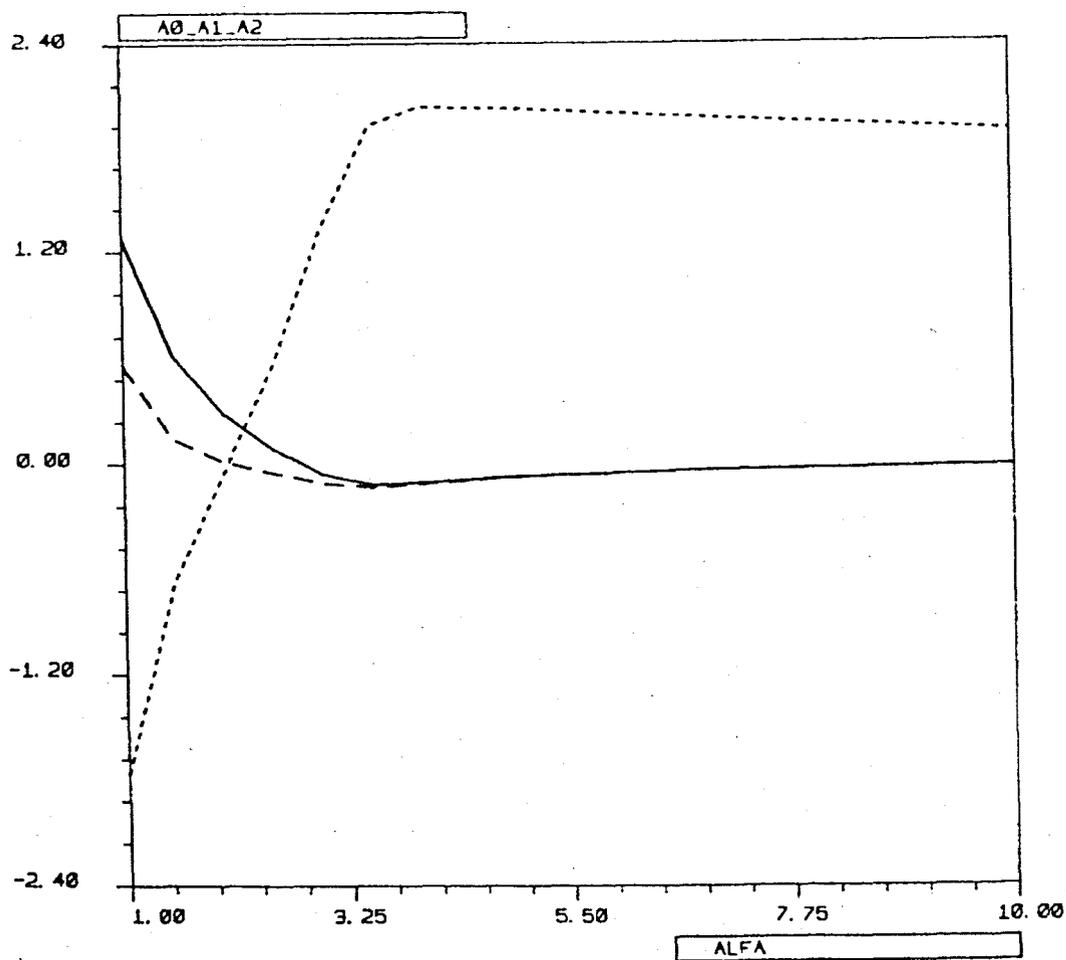


Figura 4c

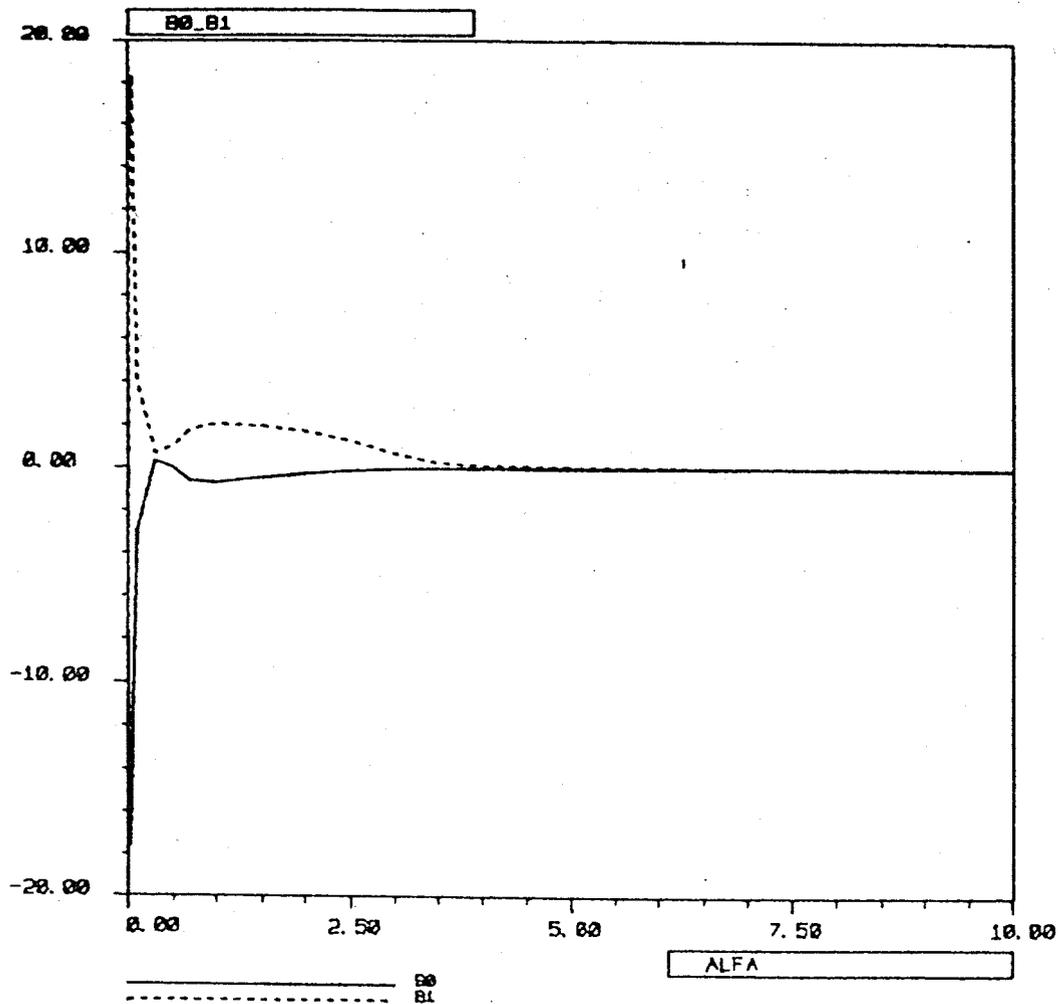


Figura 5a

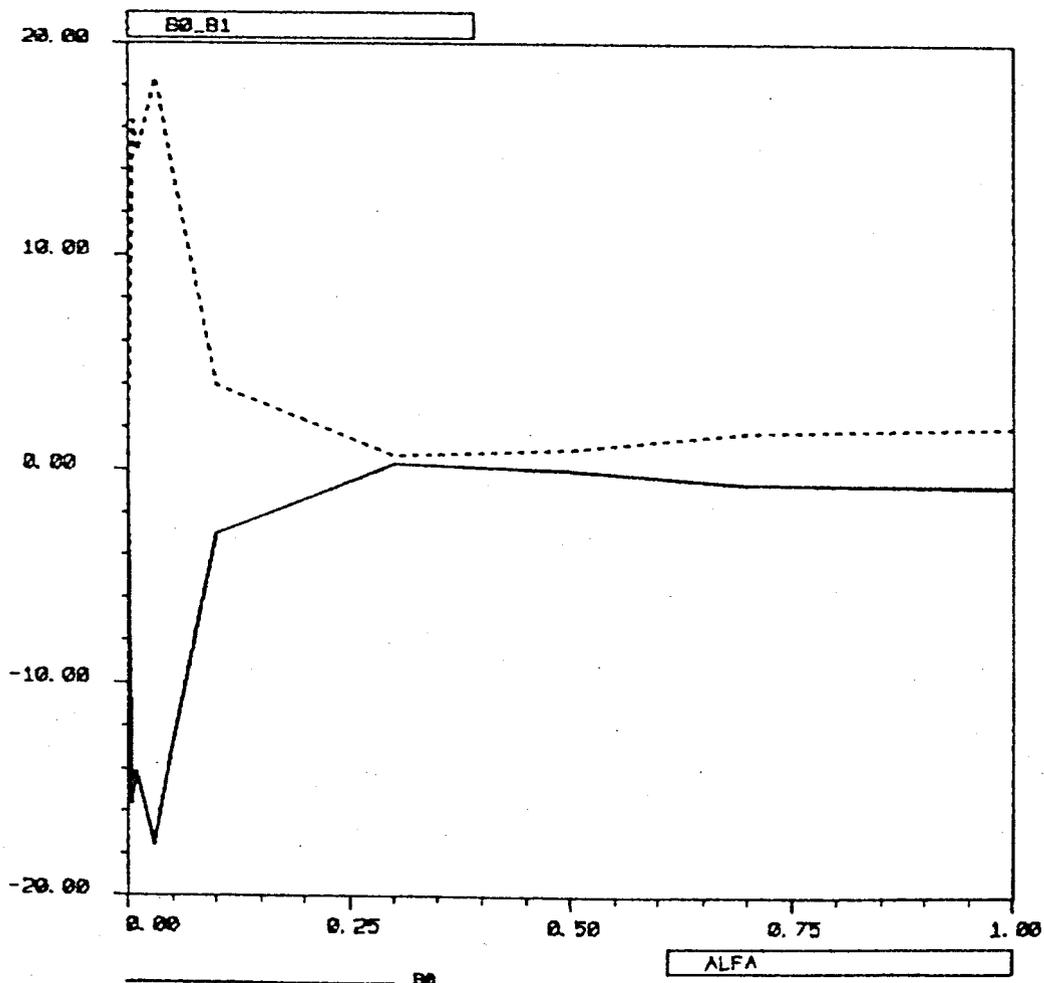


Figura 5b

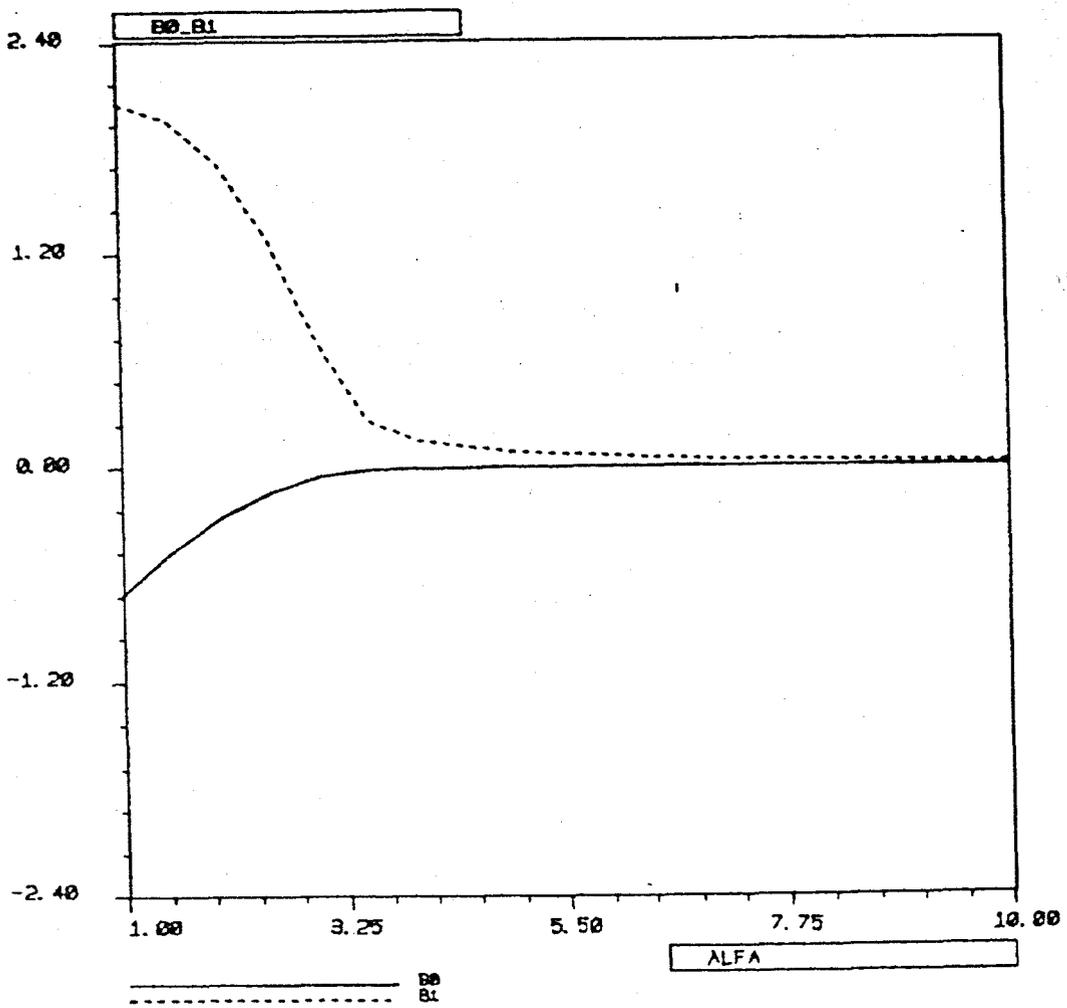


Figura 5c

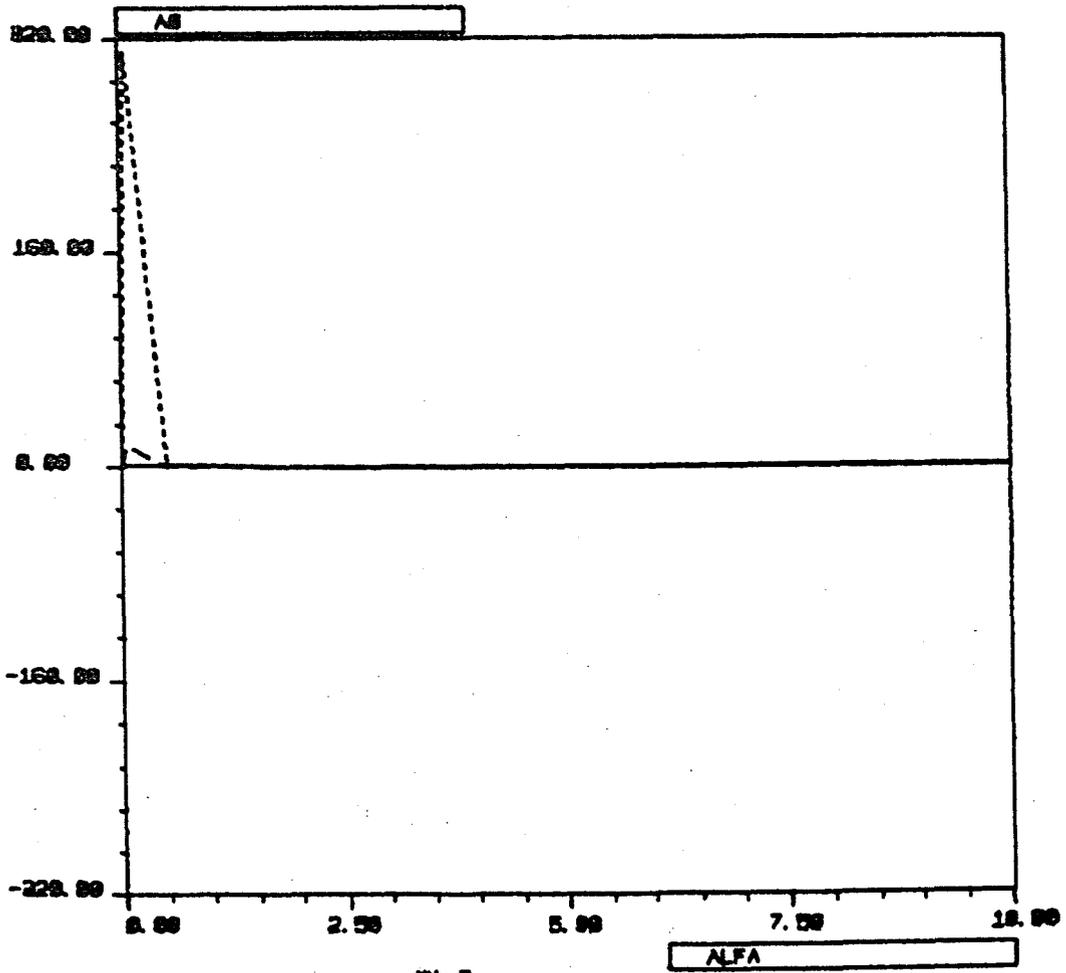
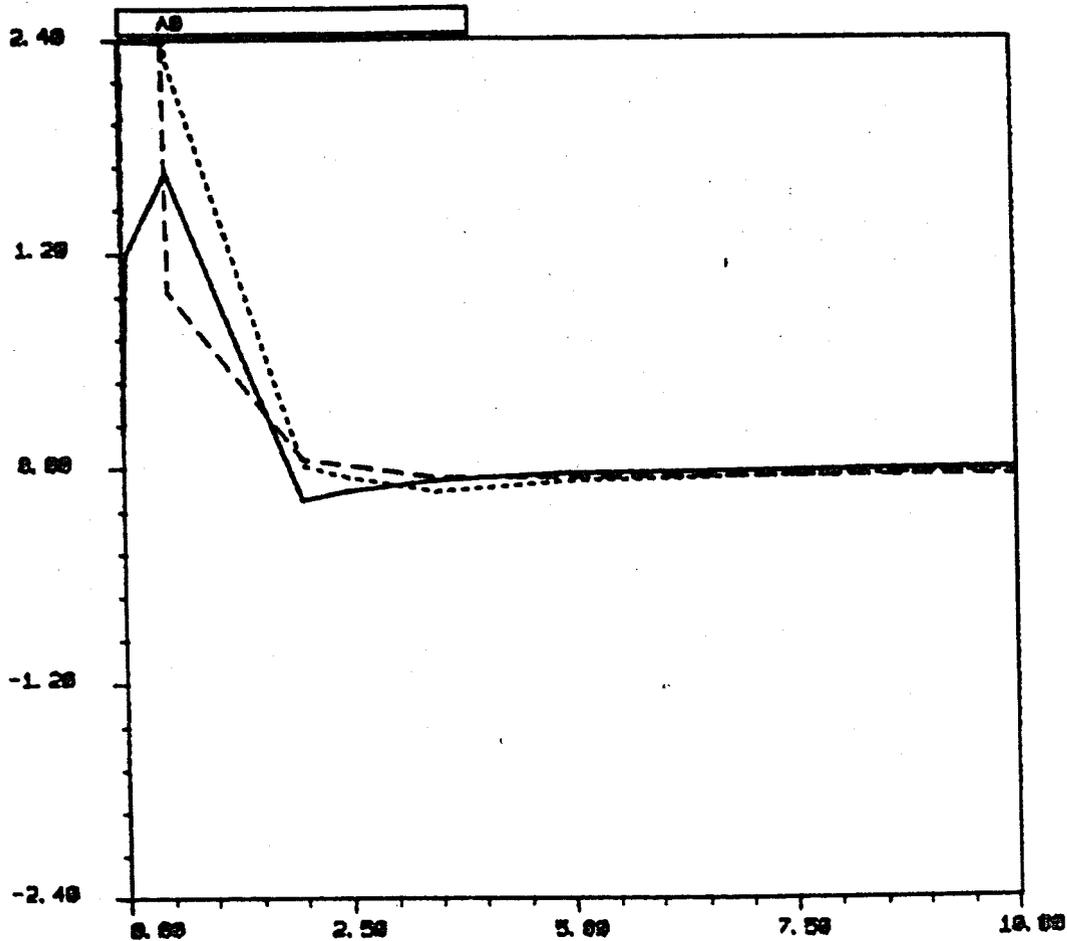


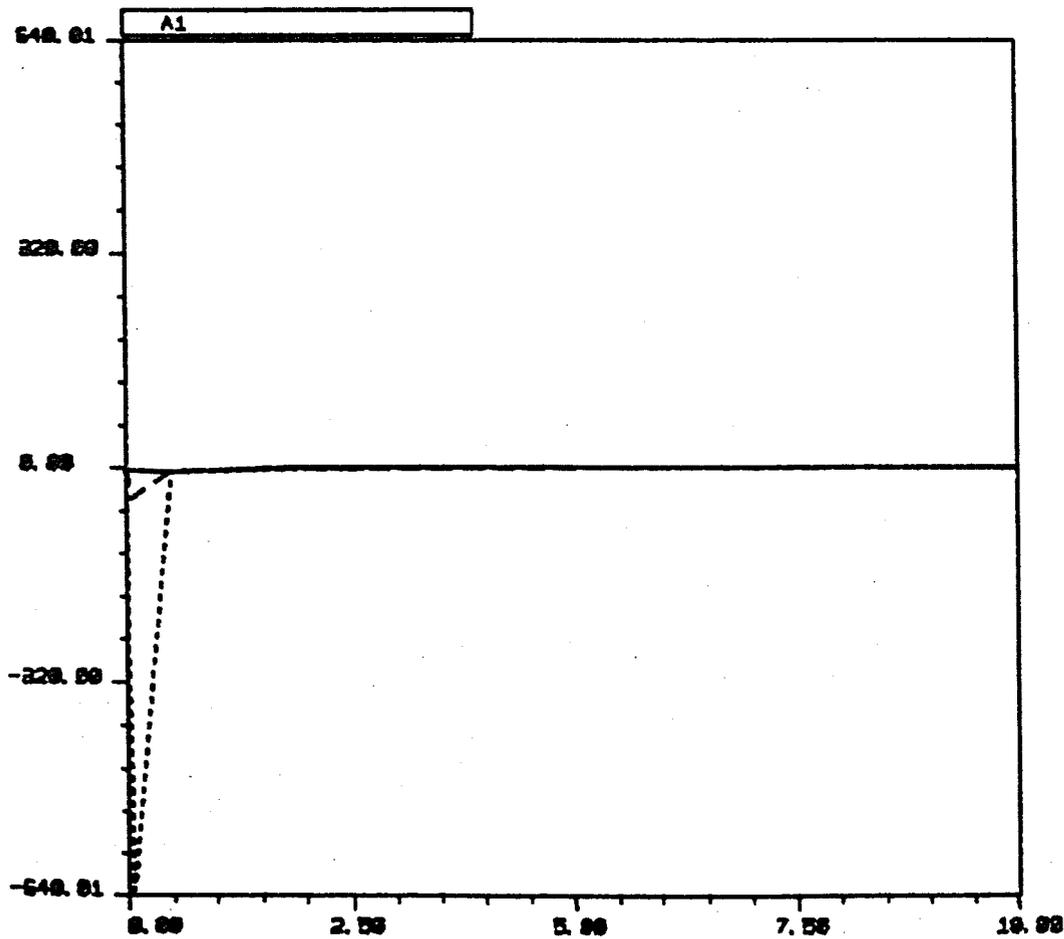
Figura 6a



ALFA

————  $\mu_1$   
 - - - -  $\mu_2$   
 .....  $\mu_3$

Figura 6b



ALFA

————  $\mu_1$   
 - - - -  $\mu_2$   
 .....  $\mu_3$

Figura 7a

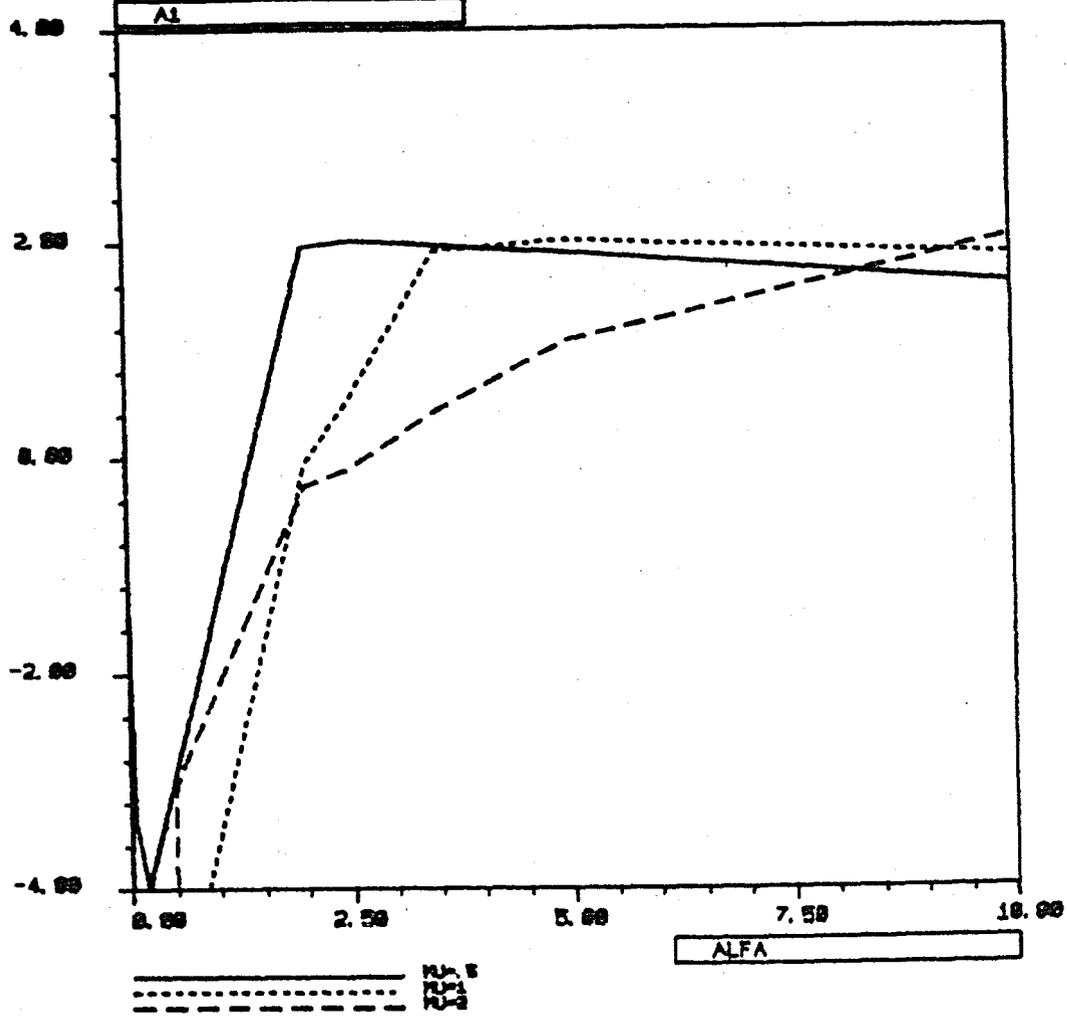


Figura 7b

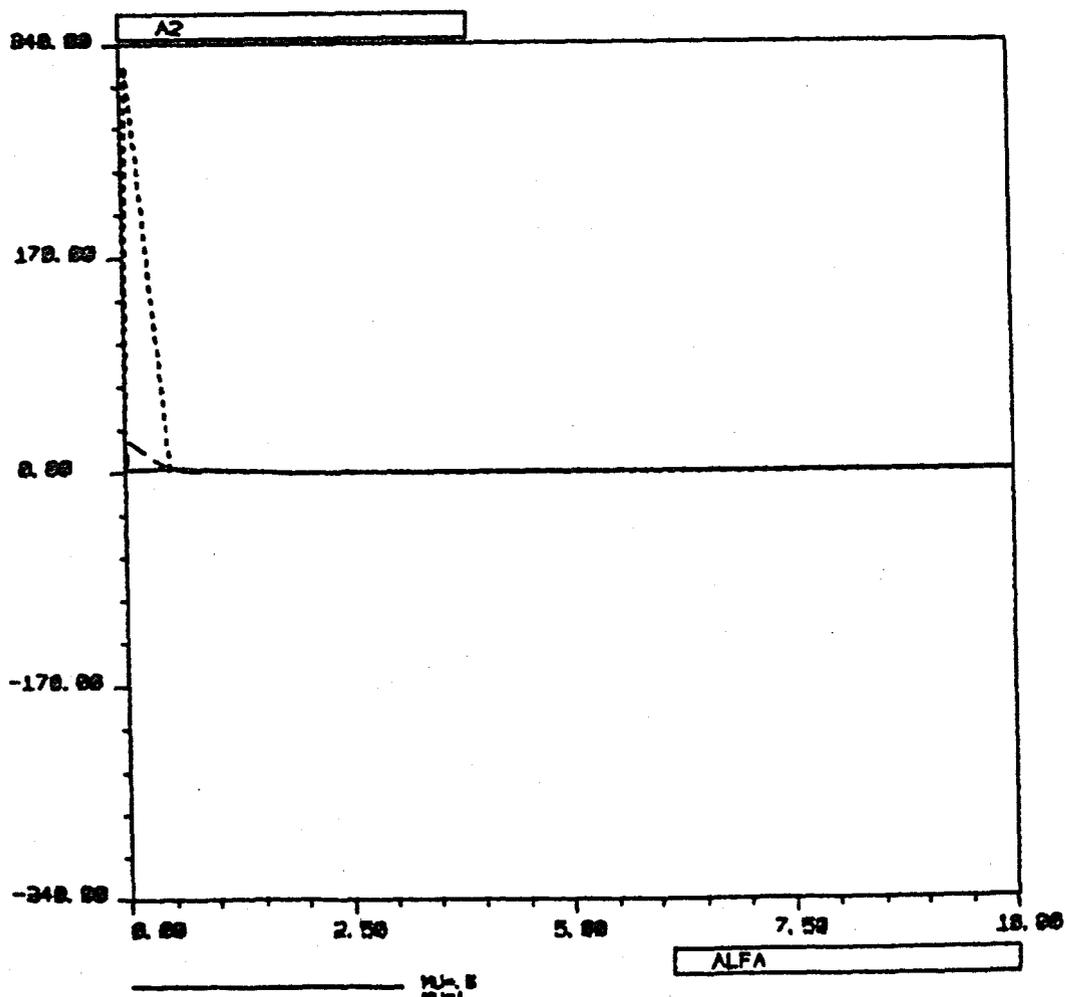


Figura 8a

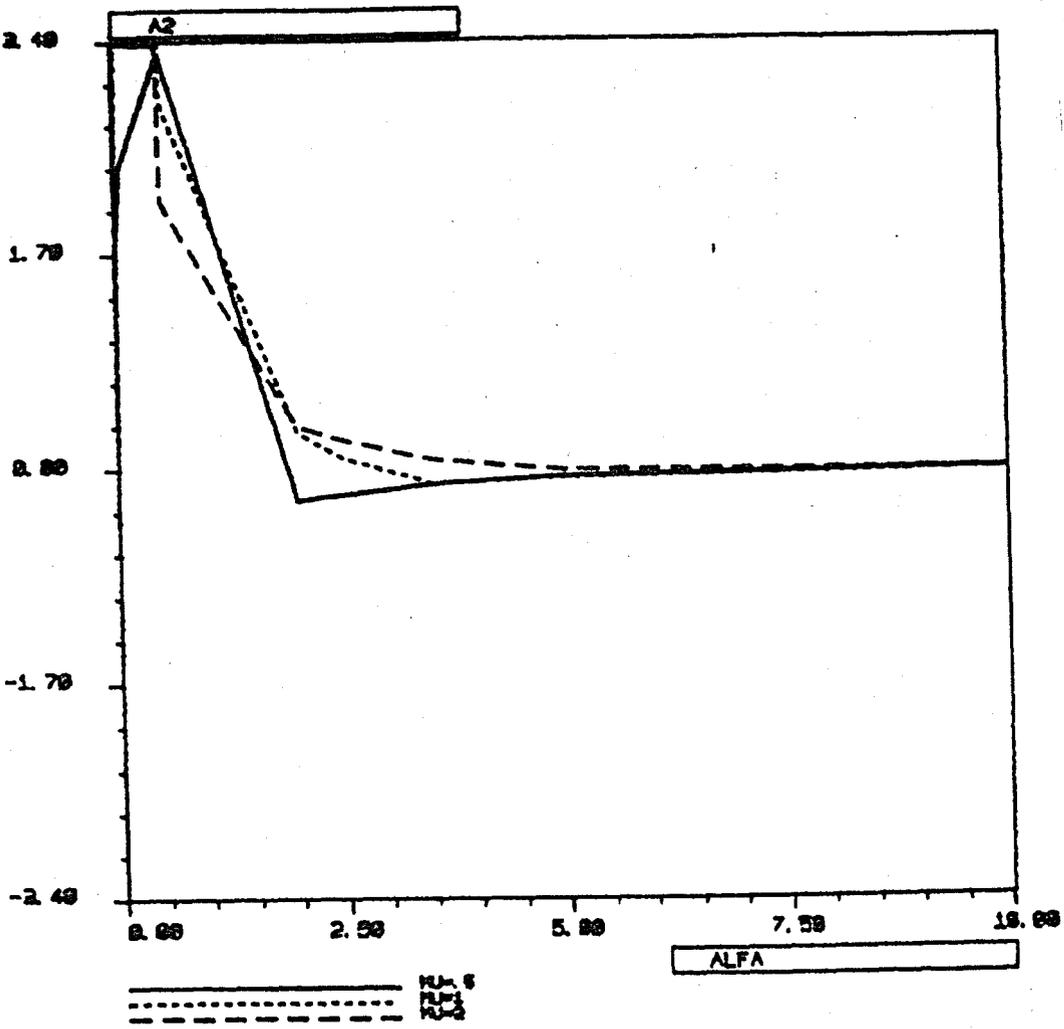


Figura 8b

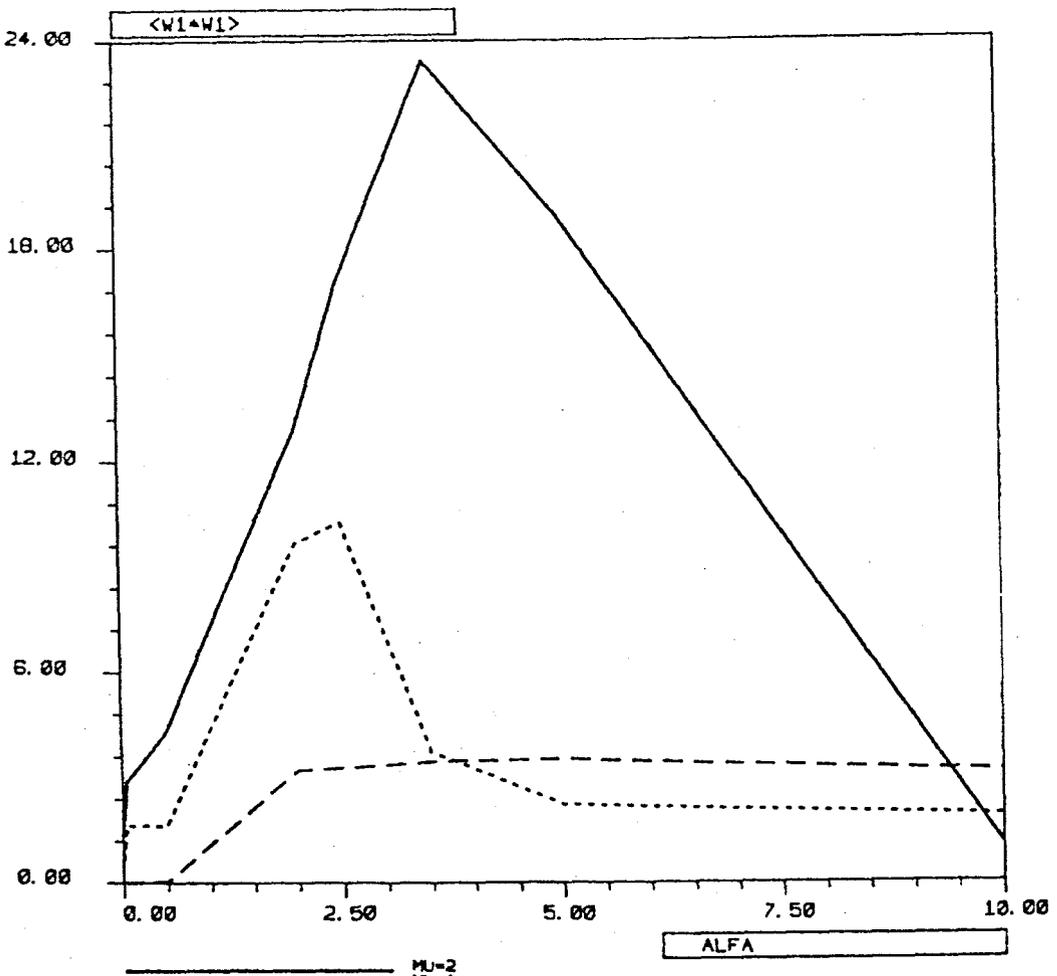


Figura 9

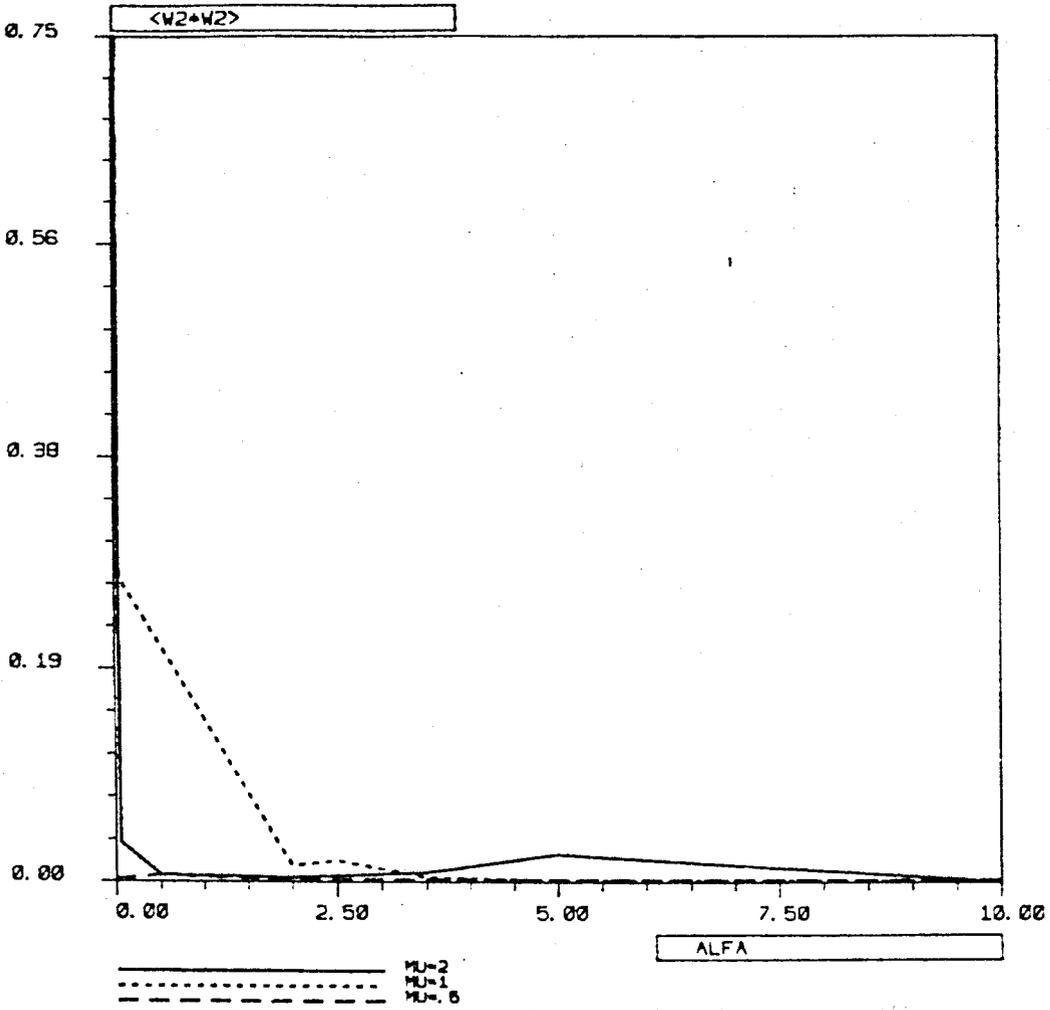


Figura 10

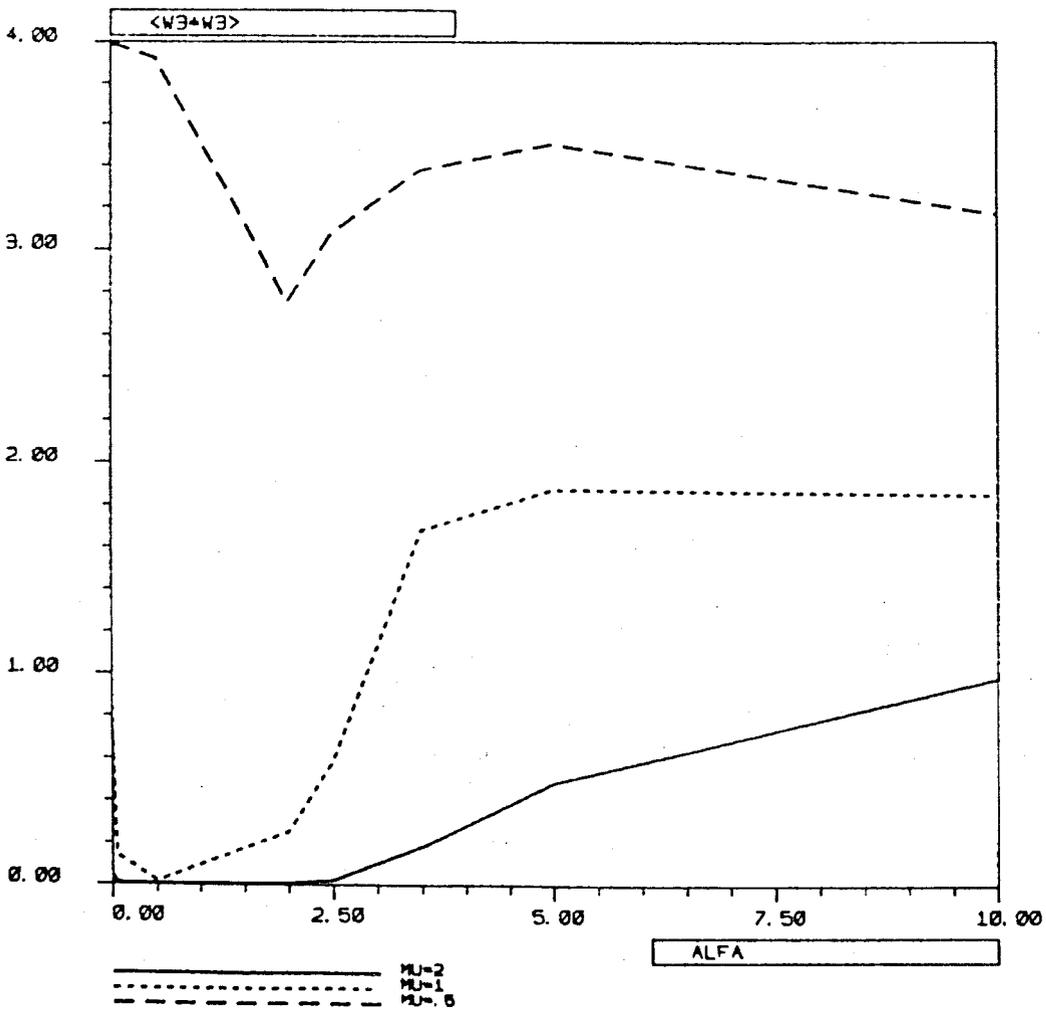


Figura 11

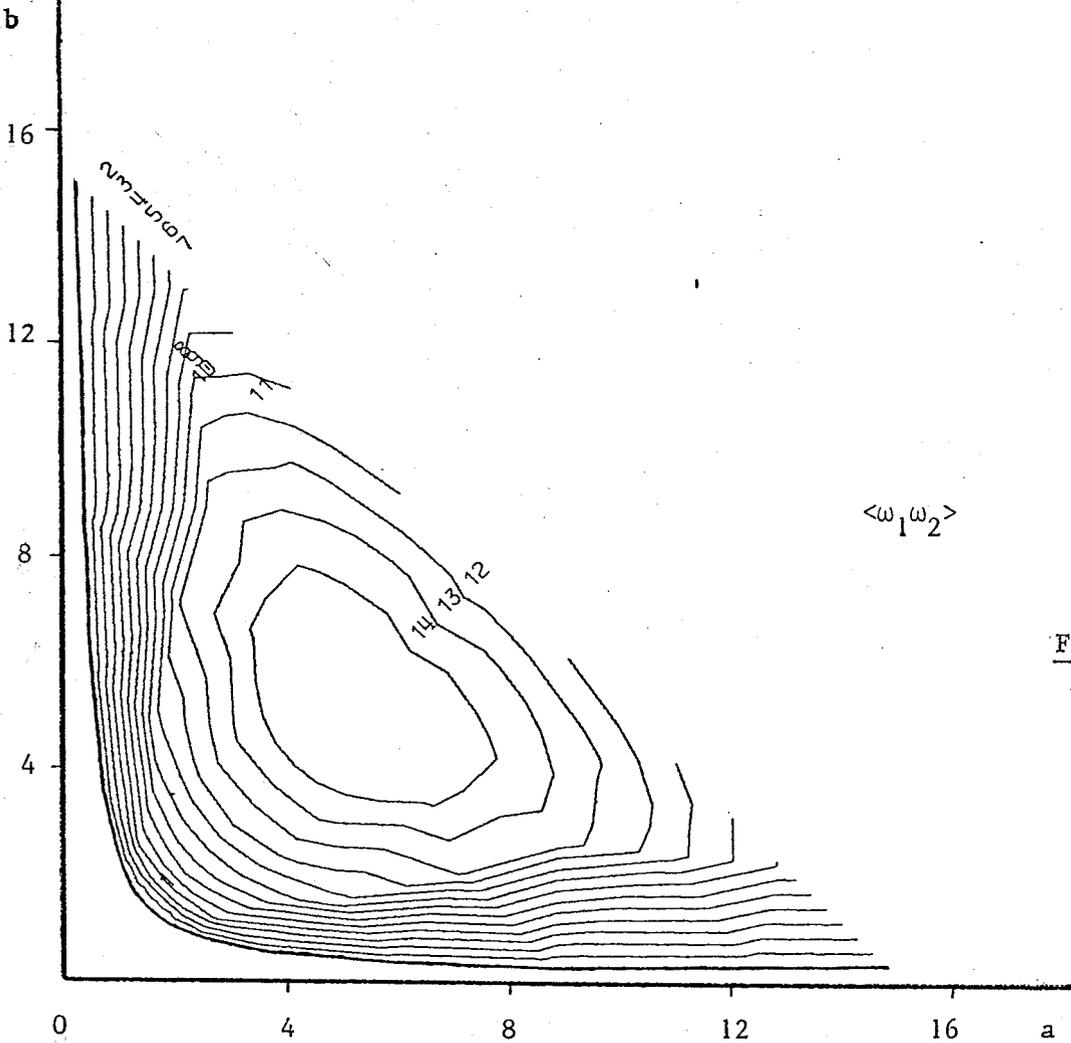


Figura 12

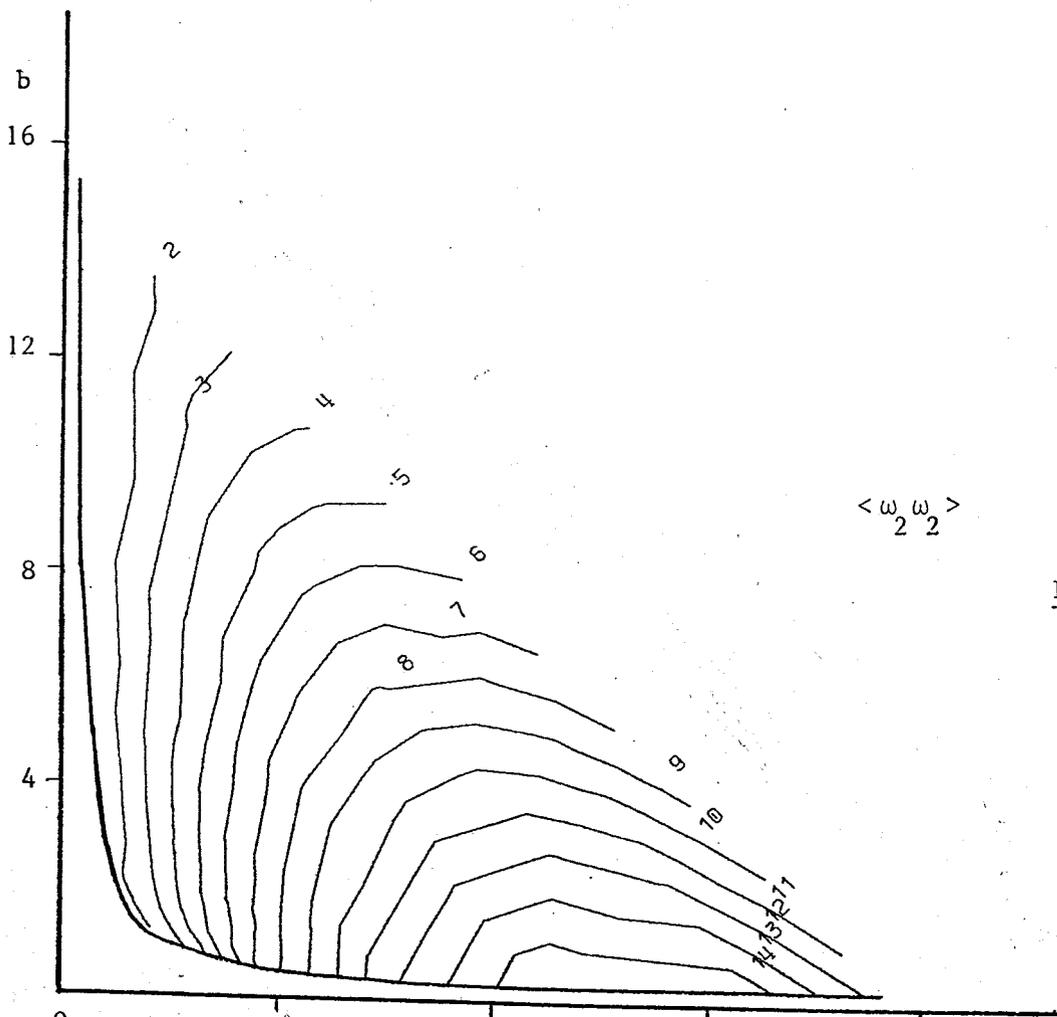


Figura 13

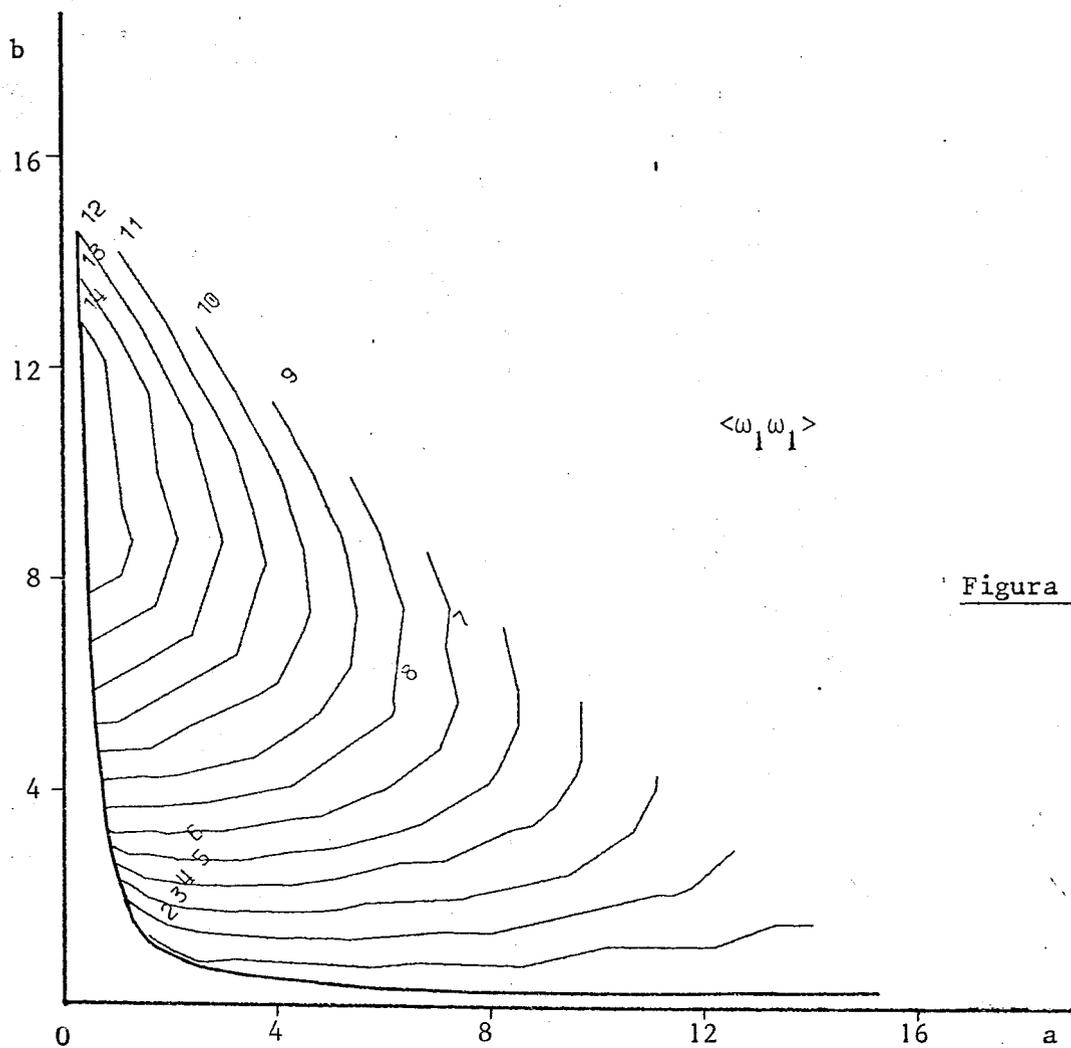


Figura 14

Apéndice 1

Calculo de los desarrollos asintóticos

Consideremos los desarrollos asintóticos de  $u^\varepsilon, p^\varepsilon$  bajo la forma

$$(A1.1) \quad u^\varepsilon = \sum_{q \geq 0} u^{(q)} \varepsilon^q, \quad p^\varepsilon = \sum_{q \geq 0} p^{(q)} \varepsilon^q$$

Siendo

$$(A1.2) \quad u^{(0)} = u + \omega, \quad p^{(0)} = p + \pi$$

Entonces, se tienen las siguientes fórmulas de derivación :

$$(A1.3) \quad u_{i,\alpha}^\varepsilon = \sum_{q \geq -1} (u_{i,k}^{(q+1)} a_{k,\alpha} + u_{i,z}^{(q+1)} s_{i,\alpha} + u_{i,\alpha}^{(q)}) \varepsilon^q$$

donde  $\alpha = t, 0, 1, 2, 3$  y  $s_{i,0} = 0, 1 \leq i \leq 3$ ; y se conviene

$$u^{(-1)} \equiv 0; \text{ y}$$

$$(A1.4) \quad p_{i,i}^\varepsilon = \sum_{q \geq -1} (p_{i,k}^{(q+1)} a_{k,i} + p_{i,i}^{(q)}) \varepsilon^q$$

Se tiene entonces

$$(A1.5) \quad u_{i,j}^\varepsilon u_j^\varepsilon = \sum_{q \geq -1} \left[ \sum_{r=-1}^q (u_{i,k}^{(r+1)} a_{k,j} + u_{i,j}^{(r)}) u_j^{(q-r)} \right] \varepsilon^q.$$

El operador de Euler (1.1) se expresa ahora en la forma :

$$(A1.6) \quad u_{i,t}^\varepsilon + u_{i,j}^\varepsilon u_j^\varepsilon + p_{i,i}^\varepsilon = \varepsilon^{-1} (s_{i,t} \omega_{i,z} + \omega_{i,k} a_{k,j} \omega_j + \pi_{i,k} a_{k,i}) + \\ + s_{i,t} u_{i,z}^{(1)} + (\omega_{i,k} u_j^{(1)} + u_{i,k}^{(1)} \omega_j) a_{k,j} + p_{i,k}^{(1)} a_{k,i} + \\ + (u_i + \omega_i)_{,t} + (\omega_j + \omega_j) (u_i + \omega_i)_{,j} + (\pi + p)_{,i} + \\ + \varepsilon [s_{i,t} u_{i,z}^{(2)} + (\omega_{i,k} u_j^{(2)} + u_{i,k}^{(2)} \omega_j) a_{k,j} + p_{i,k}^{(2)} a_{k,i} + \\ + u_{i,t}^{(1)} + (\omega_j + \omega_j) u_{i,j}^{(1)} + u_{i,j}^{(1)} (u_i + \omega_i)_{,j} + p_{i,i}^{(1)} + u_j^{(1)} a_{k,j} u_{i,k}^{(1)}] + \\ + \sum_{q \geq 3} \varepsilon^{q-1} [s_{i,t} u_{i,z}^{(q)} + (\omega_{i,k} u_j^{(q)} + u_{i,k}^{(q)} \omega_j) a_{k,j} + p_{i,k}^{(q)} a_{k,i} +$$

$$\begin{aligned}
 & + u_{i,t}^{(q-1)} + (u_j + w_j) u_{i,j}^{(q-1)} + u_j (a_{i,t} + w_i)_{i,j} + P_{i,i}^{(q-1)} + u_j^{(q-1)} a_{kij} u_{i,k}^{(1)} + \\
 & + \sum_{r=1}^{q-2} (u_{i,k}^{(r-1)} a_{kij} + u_{i,j}^{(r)}) u_j^{(q-r-1)} + \\
 & + (\varepsilon^{-1} w_{i,k} + \sum_{q \geq 0} \varepsilon^q u_{i,k}^{(q+1)}) (a_{k,t} + a_{kij} u_j),
 \end{aligned}$$

Siendo (1.14) la expresión condensada de (A1.6)

Por otra parte, (1.2) resulta ser, según (A1.3) :

$$\begin{aligned}
 (A1.7) \quad \nabla \cdot u^e = & \varepsilon^{-1} (w_{i,k} a_{k,i}) + u_{i,k}^{(1)} a_{k,i} + u_{i,i} + w_{i,i} + \\
 & + \sum_{q \geq 1} \varepsilon^{q-1} (u_{i,k}^{(q+1)} a_{k,i} + u_{i,i}^{(q)})
 \end{aligned}$$

de donde (1.24).

Apéndice 2

1. Invariantes de la Ecuación Generalizada de Euler

Consideremos la siguiente generalización de las ecuaciones de Euler para fluidos incompresibles :

$$\left. \begin{aligned} (A2.1) \quad T(\tilde{\omega}, \tilde{\pi}; C) &= b \tilde{\omega}_{, \tau} + \tilde{\omega} \cdot \nabla \tilde{\omega} + G^T G \nabla \tilde{\pi} = 0 \\ (A2.2) \quad \nabla \cdot \tilde{\omega} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{em } ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[ \times ]0, 1[ = Z$$

(A2.3)  $\tilde{\omega}(y, \tau), \tilde{\pi}(y, \tau)$  periódicos en  $Z$

donde  $G$  es una matriz no singular de orden  $3 \times 3$  y  $b \in \mathbb{R}^3$ ,  $b \neq 0$ .

Notemos

$$(A2.4) \quad C = G^T G; \quad \gamma = ]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[^3.$$

Sea  $\{\tilde{\omega}, \tilde{\pi}\}$  una solución de (A2.1)-(A2.3) tal que

$$(A2.5) \quad \tilde{\omega} \in H^1([0, 1]; [H^1(\gamma)]^3); \quad \tilde{\pi} \in L^2([0, 1]; L^2(\gamma));$$

entonces

$$(A2.6) \quad i) \quad \langle T \rangle = b \langle \tilde{\omega} \rangle_{, \tau} - \langle \tilde{\omega} \cdot \nabla_y \tilde{\omega} \rangle,$$

y por tanto

$$(A2.7) \quad \langle \tilde{\omega} \rangle = 0.$$

$$(A2.8) \quad ii) \quad \langle \tilde{v} \cdot C^{-1} T \rangle = b \langle \tilde{v} \cdot \omega_{, \tau} \rangle - \langle \tilde{v} \cdot b \rangle - \langle \nabla \cdot \tilde{v} (\frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi) \rangle,$$

para toda función  $\tilde{v} \in L^2([0, 1]; [H^1(\gamma)]^3)$ .

Sea

$$(A2.9) \quad v = (G \nabla) \times \omega.$$

Si se toma  $\tilde{v} = \tilde{\omega}$ , se tiene

$$(A2.10) \quad \langle \tilde{\omega} \cdot C^{-1} T \rangle = \frac{1}{2} b \langle |\omega|^2 \rangle_{, \tau} - \langle \nabla \cdot \tilde{\omega} (\frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi) \rangle$$

y por tanto,

$$(A2.11) \quad \langle \tilde{\omega} \cdot C^{-1} \tilde{\omega} \rangle = \langle |\omega|^2 \rangle = 0;$$

para  $\tilde{\sigma} = \tilde{\gamma}$ ,

$$(A2.12) \quad \langle \tilde{r} \cdot C^{-1} \tilde{\omega} \rangle = b \langle r \cdot \omega, \tau \rangle = \frac{1}{2} b \langle r \cdot \omega \rangle, \tau$$

de donde

$$(A2.13) \quad \langle \tilde{r} \cdot C^{-1} \tilde{\omega} \rangle, \tau = \langle r \cdot \omega \rangle, \tau = 0.$$

## 2. Condiciones de Compatibilidad de la Ecuación Linealizada

Consideremos las ecuaciones linealizadas de (A2.1)-(A2.2) :

$$\left. \begin{aligned} (A2.14) \quad L(\tilde{u}, \tilde{p}; \tilde{\omega}, C) &= b \tilde{u}_{,\tau} + \tilde{u} \cdot \nabla \tilde{\omega} + \tilde{\omega} \cdot \nabla \tilde{u} + C \nabla \tilde{p} = \tilde{f} \\ (A2.15) \quad \nabla \cdot \tilde{u} &= g \end{aligned} \right\} \text{ em } \mathbb{Z};$$

$\tilde{u}, \tilde{p}$  periódicas en  $\mathbb{Z}$

donde  $\tilde{f}_i, g$  son funciones periódicas de  $L^2([0,1]; H^1(\gamma))$ .

Sean  $\tilde{u} \in H^1([0,1]; [H^1(\gamma)]^3)$ ,  $p \in L^2([0,1]; L^2(\gamma))$ , y

adoptemos la notación (1.38).

Tomando la media de (A2.14), se tiene

$$(A2.17) \quad \langle L + \nabla \cdot \tilde{\omega} \tilde{u} + \nabla \cdot \tilde{u} \tilde{\omega} \rangle = b \langle \tilde{u} \rangle, \tau$$

de donde se obtiene la primera condición :

$$(A2.18) \quad \langle \langle \tilde{f} + \tilde{\omega} g \rangle \rangle = 0;$$

multiplicando escalarmente (A2.14) por  $C^{-1} \tilde{\omega}$ ,

$$(A2.19) \quad \langle \tilde{\omega} \cdot C^{-1} L + (\frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi) \nabla \cdot \tilde{\omega} + (u \cdot \omega + \pi) \nabla \cdot \tilde{u} \rangle = \\ = b \langle u \cdot \omega \rangle, \tau,$$

que implica la segunda condición :

$$(A2.20) \quad \langle\langle \tilde{f} \cdot \tilde{c}^{-1} \tilde{\omega} + (\frac{1}{2} \tilde{\omega} \cdot \tilde{c}^{-1} \tilde{\omega} + \tilde{\pi}) g \rangle\rangle = \langle\langle f \cdot \omega + (\frac{1}{2} |\omega|^2 + \tau) g \rangle\rangle = 0.$$

El producto escalar de (A2.14) por  $\tilde{c}^{-1} \tilde{r}$  da

$$(A2.21) \quad \langle \tilde{r} \cdot \tilde{c}^{-1} L \rangle = \frac{1}{2} b \langle u \cdot (\nabla \times \omega + \omega \cdot (\nabla \times u)), \tau \rangle,$$

siendo por tanto la tercera condición :

$$(A2.22) \quad \langle\langle \tilde{f} \cdot \tilde{c}^{-1} \tilde{r} \rangle\rangle = \langle\langle f \cdot r \rangle\rangle = 0.$$

La cuarta condición se obtiene tomando la media respecto a  $y$  de (A2.15)

$$(A2.23) \quad \langle g \rangle = 0.$$

Notas : 1) Las igualdades (A2.17), (A2.19) y (A2.21) pueden ser obtenidas mediante diferenciación formal de (A2.6), (A2.10) y (A2.12), respectivamente, al igual que el operador  $L$  (A2.14) a partir de  $T$  (A2.1).

2) En el caso estacionario se tienen las mismas condiciones (A2.18), (A2.20) y (A2.22), estando las medias tomadas solo respecto a  $y$ , además de la condición (A2.23).

### Apéndice 3

#### Obtención de las ecuaciones del modelo

Las condiciones de compatibilidad mostradas en el Apéndice 2 aplicadas a los ecuaciones (1.29) y (1.30) determinan

$$(A3.1) \quad \langle f^{(1)} + \omega g^{(1)} \rangle + \varepsilon \langle f^{(2)} + \omega g^{(2)} \rangle = o(\varepsilon),$$

$$(A3.2) \quad \langle g^{(1)} \rangle + \langle \sum_{k \geq 2} \varepsilon^k g^{(k)} \rangle = \langle g^{(1)} \rangle = 0,$$

$$(A3.3) \quad \langle f \cdot \omega + \frac{1}{2}(|\omega|^2 + \pi) g^{(1)} \rangle + \varepsilon \langle f \cdot \omega + \frac{1}{2}(|\omega|^2 + \pi) g^{(2)} \rangle = o(\varepsilon) \quad \&$$

$$(A3.4) \quad \langle f \cdot r \rangle + \varepsilon \langle f \cdot r \rangle = o(\varepsilon),$$

conservando las notaciones del Capítulo 1.

#### 1. - Terminos en $\varepsilon^0$

El cálculo de los terminos en  $\varepsilon^0$  de (A3.1)-(A3.3) ha sido ya realizado por M.P.P. [2], siendo

$$(A3.5) \quad \langle f^{(1)} + \omega g^{(1)} \rangle = u_{,t} + u \cdot \nabla u + \nabla p + \nabla \cdot \langle \omega \otimes \omega \rangle,$$

$$(A3.6) \quad \langle g^{(1)} \rangle = \nabla \cdot u,$$

$$(A3.7) \quad \langle f \cdot \omega + (\frac{1}{2}|\omega|^2 + \pi) g^{(1)} \rangle = q_{,t} + u \cdot \nabla q + \langle \omega \otimes \omega \rangle : \nabla u + \nabla \cdot \langle (\frac{1}{2}|\omega|^2 + \pi) \omega \rangle \cdot$$

Es fácil obtener

$$(A3.8) \quad \langle f \cdot r \rangle = \frac{1}{2} \langle \omega \cdot r \rangle_{,t} + u \cdot \nabla (\frac{1}{2} \langle \omega \cdot r \rangle) + \langle \omega \otimes r \rangle : \nabla u + \langle (\omega \cdot \nabla \omega + \nabla \pi) \cdot r \rangle$$

Afin de transformar esta expresión, consideremos dos funciones  $v^{(1)}, v^{(2)} \in [H^1(\gamma)]^3$ . Notemos  $r^{(i)} = (\nabla \alpha \nabla) \times v^{(i)}$ ,  $i=1,2$ .

Entonces

$$(A3.9) \quad \langle v_i^{(1)} v_j^{(2)} - v_j^{(1)} v_i^{(2)} \rangle = \varepsilon_{ijk} [a_{n,p} \langle v_i^{(1)} v_j^{(2)} \rangle + \langle v_k^{(2)} \nabla_j \cdot v^{(1)} \rangle],$$

donde  $\epsilon_{ijk}$  es el tensor alternado de tercer orden, y las medias estan tomadas en  $y$ .

Ello implica, en particular,

$$(A3.10) \quad \langle \omega \otimes r \rangle = \frac{1}{2} \langle \omega \otimes r + r \otimes \omega \rangle.$$

Por otra parte,

$$\omega \cdot \nabla \omega = -\omega \times (\nabla \times \omega) + \frac{1}{2} \nabla |\omega|^2,$$

y entonces

$$\langle (\omega \cdot \nabla \omega + \nabla \pi) \cdot r \rangle = \langle \nabla \left( \frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi \right) \cdot r \rangle - \langle \omega \times (\nabla \times \omega) \cdot r \rangle$$

La ecuación (1.27) puede ser escrita en la forma

$$S_{,t} \omega_{,z} - \omega \times r + \nabla \alpha \nabla_y \left( \frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi \right) = 0.$$

Ello permite de asegurar :

$$\begin{aligned} \langle \omega \times (\nabla \times \omega) \cdot r \rangle &= -S_{,t} \langle \omega_{,z} \cdot \nabla \times \omega \rangle - \langle (\nabla \alpha \nabla_y) \left( \frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi \right) \cdot \nabla \times \omega \rangle \\ \Rightarrow \langle \omega \times (\nabla \times \omega) \cdot r \rangle &= -S_{,t} \langle \omega_{,z} \cdot \nabla \times \omega \rangle - \langle \left( \frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi \right) \nabla \cdot r \rangle. \end{aligned}$$

De donde

$$(A3.11) \quad \langle (\omega \cdot \nabla \omega + \nabla \pi) \cdot r \rangle = \nabla \cdot \left\langle \left( \frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi \right) r \right\rangle + S_{,t} \langle \omega_{,z} \cdot \nabla \times \omega \rangle$$

Terminos en  $\epsilon^1$

Fácilmente se obtiene

$$(A3.12) \quad \langle f^{(2)} + \omega g^{(2)} \rangle = \nabla \cdot \langle \omega \otimes u^{(1)} + u^{(1)} \otimes \omega \rangle$$

Para calcular los términos en  $\epsilon^1$  de (A3.3) y (A3.4), consideremos la ecuación (1.53), verificada por  $\tilde{u}^{(1)}$ . Multiplicando esta expresión por  $C^{-1} \tilde{u}^{(1)}$  y  $C^{-1} \tilde{p}^{(1)}$ , se obtiene, respectivamente :

$$(A3.13) \quad \begin{aligned} \langle \omega f^{(2)} + \left( \frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi \right) g^{(2)} \rangle &= \langle \omega \cdot u^{(1)} \rangle_{,t} + u \cdot \nabla \langle \omega \cdot u^{(1)} \rangle + \\ &+ \langle \omega \otimes u^{(1)} + u^{(1)} \otimes \omega \rangle : \nabla u + \\ &+ \nabla \cdot \langle \omega (u^{(1)} \cdot \omega + p^{(1)}) + u^{(1)} \left( \frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi \right) \rangle + \\ &+ \rho^{(1)} \langle \omega \cdot u^{(1)} \rangle + \tau^{(1)} \langle r \cdot u^{(1)} \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (A3.14) \quad \langle \dot{q}^{(2)} \cdot r \rangle &= \frac{1}{2} \langle \dot{u}^{(4)} \cdot r + \rho^{(4)} \cdot \omega \rangle_t + \frac{1}{2} u \cdot \nabla \langle \dot{u}^{(4)} \cdot r + \rho^{(4)} \cdot \omega \rangle + \\
 &+ \frac{1}{2} \langle \dot{u}^{(4)} \otimes r + r \otimes \dot{u}^{(4)} + \omega \otimes r + r \otimes \omega \rangle : \nabla u + \\
 &+ \frac{1}{2} \langle \nabla \cdot \omega \omega \rangle \cdot \nabla \times u + \nabla \cdot \langle r (\dot{u}^{(4)} \cdot \omega + \rho^{(4)}) + r^{(4)} (\frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi) \rangle + \\
 &+ \beta^{(4)} \langle \dot{u}^{(4)} \cdot r \rangle + \gamma^{(4)} \langle (\nabla \alpha \nabla_y) \omega \cdot (\nabla \alpha \nabla_y) \dot{u}^{(4)} \rangle.
 \end{aligned}$$

Para la obtención de esta expresión se ha usado la igualdad, deducida de (A3.9)

$$(A3.15) \quad \langle \dot{u}_i^{(4)} r_j + \omega_i r_j^{(4)} \rangle = \langle \dot{u}_j^{(4)} r_i + \omega_j r_i^{(4)} \rangle + \epsilon_{ijk} \langle \omega_k \nabla_y \cdot \tilde{u}^{(4)} \rangle,$$

además de la igualdad

$$\begin{aligned}
 (A3.16) \quad \langle (\dot{u}^{(4)} \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla \dot{u}^{(4)} + \nabla \rho^{(4)}) \cdot r + (\omega \cdot \nabla \omega + \nabla \pi) \cdot \rho^{(4)} \rangle &= \\
 = \nabla \cdot \langle (\frac{1}{2} |\omega|^2 + \pi) \rho^{(4)} + (\rho^{(4)} + \dot{u}^{(4)} \cdot \omega) r \rangle + s_{,t} \langle \dot{u}_{,t}^{(4)} \cdot \nabla \times \omega + \omega_{,t} \cdot \nabla \times \dot{u}^{(4)} \rangle,
 \end{aligned}$$

obtenida de forma similar a (A3.11).

Por último, los términos en  $\beta^{(4)}$  y  $\gamma^{(4)}$  de (A3.14) y (A3.15)

no afectan las ecuaciones (1.35) y (1.36) puesto que

$$(A3.17) \quad \beta^{(4)} = o(\epsilon), \quad \gamma^{(4)} = o(\epsilon).$$

En efecto, (A3.3) y (A3.4) pueden escribirse como

$$(A3.18) \quad \begin{cases} \beta^{(4)} q + \gamma^{(4)} h = o(\epsilon) \\ 2\beta^{(4)} h + \gamma^{(4)} \langle |r|^2 \rangle = o(\epsilon). \end{cases}$$

Es de hacer notar que (A3.17) no podrá deducirse de (A3.18)

si

$$(A3.19) \quad \langle |\omega|^2 \rangle \langle |r|^2 \rangle - \langle \omega \cdot r \rangle^2 = 0,$$

lo cual ocurre solamente en el caso de las  $\tilde{\omega}$  degeneradas tratado en el Apéndice 4.

## Apéndice 4

Proyección sobre  $[\ker(L^*, \nabla_y \cdot)]^\perp$ 

## 1. - Caracterización de la proyección

Sea el problema generalizado de Euler linealizado :

$$(A4.1) \quad \begin{cases} L(\tilde{u}, \tilde{p}; \tilde{\omega}, c) = \tilde{f}, \\ \nabla_y \cdot \tilde{u} = g. \end{cases}$$

Una condición necesaria para que este problema tenga solución es que esté en el espacio ortogonal de  $\ker(L^*, \nabla_y \cdot)$ , donde  $L^*$  es el operador adjunto de  $L$ , definido por

$$(A4.2) \quad L^*(\tilde{v}, \tilde{\mu}; \tilde{\omega}, c) = -[s_{,t} \tilde{v} + \tilde{\omega} \cdot \nabla_y \tilde{v} + (c \nabla_y) \tilde{v} \cdot c^{-1} \tilde{\omega}] + c \nabla_y \tilde{\mu}$$

para  $\tilde{v}: \gamma \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\tilde{\mu}: \gamma \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Sabemos que  $[\ker(L^*, \nabla_y \cdot)]^\perp$  está contenido en el conjunto de pares que verifican las condiciones de compatibilidad. Hasta ahora, se conocen las mostradas en el Apéndice 2, y no se ha demostrado que estas sean las únicas (En dos dimensiones, existe una infinidad, cf [9]).

Consideraremos, pues, las proyecciones sobre este conjunto de pares ; que notamos  $A$  y enmarcamos funcionalmente como sigue :

Si

$$(A4.4) \quad Z = \gamma \times ]0, 1[ , \quad V = [L^2(Z)]^3 \times L^{2/3}(Z),$$

con las notaciones del Apéndice 2,

$$(A4.5) \quad A = \{ (\tilde{f}, g) \in V \text{ t. } q \cdot \langle g \rangle = 0, \langle \tilde{f} + \tilde{\omega} g \rangle = 0, \\ \langle \tilde{f} \cdot c^{-1} \tilde{\omega} + (\tilde{\pi} + \frac{1}{2} \tilde{\omega} \cdot c^{-1} \tilde{\omega}) g \rangle = 0, \langle \tilde{f} \cdot c^{-1} \tilde{\omega} \rangle = 0 \}$$

suponiendo  $\tilde{\omega} \in H^1(\gamma, [H^1(\gamma)]^3)$ ,  $\gamma$ -periódica.

La proyección sobre  $A$  de un par  $(\tilde{f}, g) \in V$  existe y es única, al ser  $A$  un subespacio cerrado de  $V$ , y viene expresada en la forma

$$(A4.6) \quad \begin{cases} P\tilde{f} = \tilde{f} + \alpha + \beta \omega + \gamma R & | \quad \tilde{f} = (\nabla a)^T \tilde{f}, \quad P\tilde{f} = (\nabla a)^T P\tilde{f} \\ P g = g + \mu & ; \quad \alpha \in \mathbb{R}^3; \beta, \gamma, \mu \in \mathbb{R} \end{cases}$$

donde

$$(A4.7) \quad R = \frac{r}{\langle |r|^2 \rangle^{1/2}}.$$

sean las notaciones

$$(A4.8) \quad \begin{cases} I_1 = \langle\langle \omega \rangle\rangle = \langle \omega \rangle, \\ I_2 = \langle\langle |\omega|^2 \rangle\rangle = \langle |\omega|^2 \rangle, \\ I_3 = \langle\langle \omega \cdot R \rangle\rangle = \langle \omega \cdot r \rangle \langle |r|^2 \rangle^{-1/2} \end{cases}$$

$$(A4.9) \quad \begin{cases} i_1 = \langle g \rangle \\ i_2 = \langle\langle f + \omega g \rangle\rangle \\ i_3 = \langle\langle f \cdot \omega + (\frac{1}{2}|\omega|^2 + \pi) g \rangle\rangle \\ i_4 = \langle\langle f \cdot R \rangle\rangle \end{cases}$$

Entonces, si  $\Delta = I_2 - |I_1|^2 - I_3^2$ ,

$$(A4.10) \quad \beta = [i_1(\frac{1}{2}I_2 - |I_1|^2) + i_2 \cdot I_1 - i_3 + i_4 I_3] / \Delta,$$

$$(A4.11) \quad \gamma = [i_1(|I_1|^2 - \frac{1}{2}I_2) I_3 - i_2 \cdot I_1 I_3 + i_3 I_3 + i_4(|I_1|^2 - I_2)] / \Delta,$$

$$(A4.12) \quad \mu = -i_1,$$

$$(A4.13) \quad \alpha = (i_1 - \beta) I_1 - i_2.$$

Si  $\tilde{\omega}$  es impar,  $I_1 = 0$ ,  $I_3 = 0$  y se tiene

$$(A4.14) \quad \beta = \frac{1}{2}i_1 - i_3 / I_2, \quad \gamma = -i_4$$

## 2. - Fluctuaciones canónicas degeneradas

Según (A4.10) y (A4.11), no se podrá definir  $\mathcal{P}\tilde{\xi}$  si

$$(A4.15) \quad \Delta = I_2 - |I_1|^2 - I_3^2 = 0.$$

Sea

$$(A4.16) \quad \omega^* = \omega - \langle \omega \rangle - \langle \omega \cdot R \rangle R.$$

Entonces,

$$(A4.17) \quad \langle |\omega^*|^2 \rangle = I_2 - |I_1|^2 - I_3^2$$

Afin de caracterizar (A4.15), supongamos  $\omega^* = 0$ .

Entonces,

$$(A4.18) \quad \omega = \langle \omega \cdot R \rangle R + \langle \omega \rangle,$$

y la ecuación (1.52.a) equivale a

$$(A4.19) \quad \nabla_x \cdot \omega = 0, \quad \nabla_y \cdot \tilde{\omega} = 0.$$

Se trata, pues, de un caso degenerado, tratado por Henon [10] para  $C = I$ , y generalizado por M.P.P. [2]; quienes han obtenido la expresión explícita de tales soluciones.  $\square$

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. BEGUE : Simulation de la Turbulence par Méthode d'Homogénéisation. Tesis 3er. Cic. Univ. Paris VI. Paris, Dec. 1983.
- [2] D. Mc LAUGHLIN, G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU : Simulation Numérique de la Turbulence par Homogénéisation des Structures de Sous-maillles. Rapport INRIA N° 188. Le Chesnay-Francia, Feb. 1983.
- [3] A.S. MONIN, A.M. YAGLOM : Statistical Fluid Mechanics of Turbulence, Vol 2. (1985) MIT Press.
- [4] D. MACHLAUGHLIN, G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU : Convection on Microstructures and Related Problems. Proc. INRIA Conf. Versailles Dic. 1981 ; North Holland (R. GLOWINSKI ed.).
- [5] C. BEGUE, T. CHACON, O. PIRONNEAU : Contrat DRET N° 81/683, Contribution INRIA (1984).
- [6] C. BEGUE, T. CHACON, D. MACHLAUGHLIN, G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU : Convection on Microstructures, II. Proc. INRIA Conf. Versailles Dic. 1983, North Holland (R. GLOWINSKI ed.), a aparecer.
- [7] W.C. Reynolds : Computation of Turbulent Flows. Am. Rev. Fluid. Mech. 8 (1975), 183-208.
- [8] A. LEONARD : Energy Cascade in Large Eddy Simulations of Turbulent Fluid Flows. Adv. Geophys. 18A (1974), 237-248.
- [9] P.J. OLVER : A Nonlinear Hamiltonian System Structure for the Euler Equations. Journal Math. Anal. Appl. 89, 233-250 (1982).
- [10] M. HENON : Numerical Exploration of Hamiltonian Systems (To Appear).
- [11] R. GLOWINSKI, B. MANTEL, J. PERIAUX : Numerical Solutions of the Time-dependent Navier Stokes Equation for Incompressible Viscous Fluids by Finite Element Alternating Direction methods. Num. Math. Aer. Flu. Dyn., Reading.
- [12] R. GLOWINSKI, O. PIRONNEAU : On Numerical Methods for the Stokes Problem. En. Meth. Fin. El. Anal., cap. 13. J. WILEY & SONS (R. GLOWINSKI, E.Y. RODIN, O.C. ZIENKIEWICZ Ed.), Chichester 1979, P. 243-264.

- [13] R. GLOWINSKI, B. MANTEL, J. PERIAUX, O. PIRONNEAU, G. POIRIER : An Efficient Preconditioned Conjugate Gradient Method Applied to Nonlinear Problems in Fluid Dynamics. Procc INRIA Conf. Versailles, Dic. 1979.
- [14] M.O. BRISTEAU, R. GLOWINSKI, J. PERIAUX, P. PERRIER, O. PIRONNEAU, G. POIRIER : Applications of Optimal Control and Finite Element Methods to the Calculation of Transonic Flows and Incompressible Viscous Flows. Rapport INRIA N° 294.
- [15] B. MERCIER : Analyse Numérique des Méthodes Spectrales. Note CEA-N-2278, Juin 1981.
- [16] Ph. CIARLET : Lectures On Three-Dimensional Elasticity. Tata Institute Lectures on Mathematics. Springer-Verlag, BERLIN 1983.
- [17] T. CHACON, O. PIRONNEAU : On the Mathematical Foundations of the  $k-\epsilon$  Turbulent Model. A aparecer.
- [18] P. PERRIER, O. PIRONNEAU : Subgrid Turbulence Modelling by Homogenization. Math. Modell. Vol. 2, P 295-317 (1981).
- [19] B.E. LAUNDER, D.B. SPALDING : Mathematical Models of Turbulence. Academic Press (1972).
- [20] O. PIRONNEAU : Homogenization Transport Processes and Turbulence Modelling. Proc. INRIA - Novosibirsk, Dic. 1978.
- [21] G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU : On the Asymptotic Behavior of Motion in Random Flows in "Stochastic Nonlinear Systems". Arnold-Lefever eds. Springer (1981).
- [22] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPANICOLAOU : Asymptotic Methods for Periodic Structures ; North Holland, (1978).
- [23] A. CRAYA : Turbulence. Coloquio C1, Journal de Physique, Suplemento 1, T. 37. Enero 1976.
- [24] J.S. SMAGORINSKY : Mon. Weather Rev. 91, 99-164.
- [25] D.C. LESLIE : Theoretical Investigation of Schumann's Model for Subgrid Reynolds Stress. QM TU Report 20/78 (1978).

- [26] D.C. LESLIE, G.L. QUARINI : The Application of Turbulence Theory to the Formulation of Subgrid Modelling Procedure. J. Fluid. Mech., 91, 65 (1979).
- [27] J.W. DEARDOFF : A Numerical Study of 3-d Turbulent Channel Flow at Large Reynolds Numbers. J. Fluid. Mech., 41, 2, 453-480 (1970).
- [28] K. HORIUTI : Study of Incompressible Turbulent Channel Flow by Large Eddy Simulation. Ph. D. Thesis, Tokyo University (1981).
- [29] P. MOIN, J. KIM : Numerical Investigation of Turbulent Channel Flow. NASA Report 81 309 (1981).
- [30] U. SHUMANN : Subgrid Scale Model for Finite Difference Simulations of Turbulent Flows in Plane Channel and Annuli. J. Comp. Phys. 18, 376-404 (1975).
- [31] S.V. PANTANKAR, V.S. PRATAB, D.B. SPALDING : Prediction of Turbulent Flows in Curved Pipes. J. Fluid. Mech. 67, (3) 583-595 (1975).
- [32] J.P. BENQUE : Modelisation d'Écoulements Turbulents Isothermes, EDF Report, LNH HE 041/7812 (1978).
- [33] Y. COEFFE : Les Modèles de Turbulence  $k - \epsilon$  Appliqués à l'Écoulement Plan EDF Report LNH HE 041/80. 04 (1980).
- [34] P.L. VIOLET : On the Modelling of Turbulence Heat and Mass Transfert for the Computation of Buoyancy Affected Flows. Proc. Int. Conf., Num. Met. Laminar and Turbulent Flow, Venecia (1981).
- [35] D. MC LAUGHLIN, G. PAPANICOLAOU, O. PIRONNEAU : Nonlinear Evolution Equations with Rapidly Oscillating Initial Data. Lecture Notes in Physics 154, Springer (1981).
- [36] V. ARNOLD : Méthodes Mathématiques de la Mécanique Classique. MIR (1974).
- [37] J. LAUFER : Investigation of Turbulent Flow in a 2-d Channel. NACA Report TN1053 (1950)
- [38] M. BERCOVIER, O. PIRONNEAU, V. SASTRI : Finite Element and Characteristics for some Parabolic-Hyperbolic Problems. Appl. Math. Modelling, Vol. 7. April 1983.

- [39] C. BARDOS : Existence et Unicité de la Solution de l'Equation d'Euler en Dimension Deux. J. Math. Anal. Appl. Vol 40, 769-790 (1972).
- [40] MATHIEU : Cours de Turbulence. Ecole d'été EDF-CEA 1982.
- [41] MODULEF ; Club and Subroutine Library, IRIA, 78150 Le Chesnay (1976).

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
FACULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

... al Tribunal interesado por los absque firmados  
... la fecha, para juzgar la tesis presentada  
D. Baus Charón Rebollo  
1ª Contribución al Modelo M.P.P. de  
Barbaleina

... otorgarle la calificación de Sobresaliente "Cum  
Laudem"

Sevilla, 22 de Septiembre 1984

El Vocal,

El Vocal,

El

F. Michard Lengua  
Presidente.

El Secretario,

Atencio

El

M. Alfaro

E. S. A.

J. D.