

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

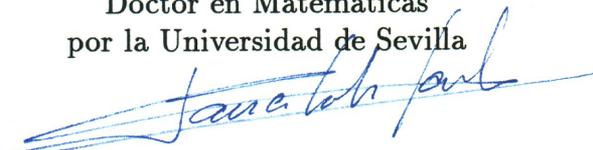
Departamento de Matemática Aplicada I

**SOBRE VISIBILIDAD
EN ESPACIOS n -DIMENSIONALES Y
SUPERFICIES NO PLANAS**

Memoria presentada por

Fco. Javier Cobos Gavala

para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla



Vº Bº

de los Directores:



Fdo: Alberto Márquez Pérez
Prof.T.U. del Departamento de
Matemática Aplicada I
de la Universidad de Sevilla



Fdo: Felipe Mateos Mateos
C.E.U. del Departamento de
Matemática Aplicada I
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, Diciembre de 1995

FACULTAD DE INFORMÁTICA
Y ESTADÍSTICA. BIBLIOTECA

A Isabel



*Mirad atentamente este
paisaje a fin de estar seguros
de que habréis de reconocerlo,
si viajáis un día por el África,
en el desierto.*

(El Principito)
Antoine de Saint-Exupéry

Agradecimientos

Los primeros párrafos del presente trabajo han de ser de satisfacción y agradecimiento. Lo primero, por ser motivo de profunda alegría el haber culminado mi carrera académica y porque es también ilusionante el compartir tareas de investigación con compañeros del departamento. Lo segundo es el agradecimiento. Y éste debo manifestarlo ante todo a quienes con su apoyo y su trabajo han hecho posible la realización de esta tesis.

Debo manifestar mi especial agradecimiento a Felipe Mateos por el apoyo recibido no sólo en la realización de la presente tesis doctoral sino también y principalmente por su apoyo a lo largo de toda mi carrera docente. A Ferran Hurtado, que me inició en la presente línea de investigación, a Juan Carlos Dana que tan desinteresadamente me ha dedicado todo el tiempo necesario para llevar a cabo esta tarea y, a Alberto Márquez de quien he aprendido todo lo que sé de grafos, si es que algo sé, a lo largo de los últimos años, durante los cuales he podido apreciar su profundo talante humano.

Tampoco puedo olvidar en estos momentos a Isabel, mi mujer, por la paciencia que ha demostrado tener en estos años, en los que no he podido dedicarle el tiempo que ella se hubiera merecido.

Gracias a todos.

Resumen

Tres son los problemas fundamentales que presenta el estudio de los grafos de visibilidad: el de la construcción, el de la caracterización y el de la reconstrucción.

El problema de la construcción del grafo de visibilidad para una configuración finita de segmentos sobre el plano se resuelve en tiempo cuadrático. Sin embargo, dado que sobre otras superficies, como puedan ser el cilindro o el toro, dos puntos no sólo definen una geodésica sino toda una familia no finita de ellas, el problema de la construcción de dicho grafo puede ser un problema de naturaleza no finita. En un primer capítulo se estudia este problema, sobre las superficies del cilindro y del toro, dándose algoritmos que, en tiempo finito, determinan si dicho grafo es o no finito.

En cuanto a los problemas de la caracterización y la reconstrucción, los resultados existentes son aún muy escasos. Desde sus inicios, la *Teoría de la Visibilidad* ha tratado de estudiar si cualquier grafo admite una representación de visibilidad, al igual que la admite de manera topológica, sin obtener más que algunos resultados parciales en este sentido.

Mediante generalizaciones, de cualquiera de las dos vías más generales que aparecen en la literatura, se consigue probar que cualquier grafo admite una representación de visibilidad, dedicándose un capítulo a cada una de ellas.

La primera, que denominamos *VHR-visibilidad* y consiste en aumentar la dimensión del espacio euclídeo sobre el que se trabaja, nos conduce a la definición del que llamaremos *índice de representación* de un grafo. La segunda vía, consistente en aumentar el género de la superficie sobre la cual se realiza la representación, nos llevará a definir el *índice bar* de dicho grafo.

En los referidos capítulos se obtienen los índices de representación para algunas familias distinguidas de grafos así como la caracterización de los grafos de índice bar igual a 1, es decir, la caracterización de los grafos que admiten una representación de visibilidad sobre la superficie del toro.

Introducción

El trabajo que se expone a continuación puede enmarcarse, básicamente, dentro de la Teoría de Grafos y la Geometría Computacional así como, desde un punto de vista informático, en la Algorítmica.

Desde que en 1977 se publicase la tesis de Shamos [64] son muchos los trabajos que se publican referentes al tema de la *Visibilidad* de tal manera que, en estos momentos, dicho estudio ha adquirido entidad propia dándose en llamar *Teoría de la Visibilidad*.

En 1983, y enmarcados en la referida teoría, aparecen los primeros trabajos de Avis y Elgindy [5] sobre *grafos de visibilidad de polígonos*. Se trata de aquellos grafos cuyos vértices se corresponden con los vértices de un polígono y existe una conexión entre dos vértices si, y sólo si, el segmento que los une, en el polígono de referencia, no interseca a ninguno de sus lados.

Uno de los primeros problemas que se plantean en relación a dichos grafos de visibilidad consiste en dado un polígono (o bien una determinada configuración finita de segmentos) construir su grafo de visibilidad. Este problema está satisfactoriamente resuelto en el plano desde 1987 por Hershberger [38] no siendo así en el caso de otras superficies. Por ejemplo, dado que, con la métrica usual, dos puntos sobre la superficie de un cilindro o de un toro determinan una infinidad de geodésicas, el estudio de si dos puntos se ven sobre dichas superficies puede convertirse en un problema de naturaleza no finita.

El primer problema que nos planteamos en este trabajo es precisamente el del estudio del grafo de visibilidad de una configuración finita de segmentos sobre las superficies del cilindro y del toro. A este problema se le dedicará el Capítulo 1, en el que se estudiarán condiciones necesarias y/o suficientes para que dicho estudio sea localmente finito en un determinado vértice y se describirán algoritmos que lo realicen.

Algunos de los resultados de este primer capítulo aparecen en el trabajo *Hélices en el cilindro y en el toro y planificación de movimientos de robots* [19] realizado en colaboración con los profesores Dana, Márquez y Mateos.

Otro problema fundamental referente a los grafos de visibilidad es el de su caracterización. Este problema consiste hallar propiedades habituales de la teoría de grafos que permitan definir exactamente la familia de los grafos de visibilidad de polígonos u otras estructuras. Los primeros trabajos en este sentido fueron realizados por Elgindy [26] en 1985 y se dispone aún de pocos resultados en este sentido.

Es conveniente observar que la representación usual de un grafo o *representación topológica*, mediante puntos y arcos de curvas de Jordan, no es la única forma de representación de grafos, ya que una representación de visibilidad del mismo (mediante conjuntos de puntos –en general segmentos– y condiciones de visibilidad) puede proporcionarnos toda la información necesaria sobre éste. Es más, en algunos casos la representación de visibilidad nos produce mejores modelizaciones para el estudio de aplicaciones gráficas que la representación topológica.

En la Tabla 0.1 se esquematizan algunas de las ventajas e inconvenientes que presentan cada uno de los tipos de representación de un grafo.

Uno de los resultados más importantes en teoría de la visibilidad es el teorema de caracterización de los grafos *bar-representables* en el plano dado por Wismath [77] en 1985 e independientemente por Tamassia y Tollis [68] en 1986. En estos grafos (que serán estudiados más adelante) los vértices

vienen representados por segmentos paralelos (barras) situados sobre el plano y las adyacencias entre vértices vienen dadas por una determinada relación de visibilidad conocida como ε -visibilidad.

El primer intento de generalización del referido teorema de caracterización de grafos bar-representables en el plano, lo realizan Bose et al. [10] en 1994 pasando del plano al espacio euclídeo tridimensional \mathbf{R}^3 y obteniendo algunos resultados importantes aunque no una caracterización completa como la existente para el plano.

En el Capítulo 2 del presente trabajo se generalizan los resultados obtenidos para \mathbf{R}^3 por Bose et al. hasta el espacio euclídeo n -dimensional \mathbf{R}^n [18].

Gran parte de los resultados de este capítulo aparecerán en el artículo titulado *On a visibility representation of graphs* [18] realizado en colaboración con los profesores Dana, Hurtado, Márquez y Mateos.

Otra vía de generalización, para la caracterización de los grafos bar-representables, es iniciada por Tamassia y Tollis, los cuales caracterizan en 1989 los grafos bar-representables en la esfera [70] y en 1991 los bar-representables en el cilindro [67].

En el último capítulo de esta tesis (algunos de cuyos resultados se encuentran en el trabajo titulado *Representation of graphs on a torus* [20] realizado en colaboración con los profesores Dana, Márquez y Mateos) se establece la caracterización de los grafos bar-representables en el toro.

Dos resultados a destacar del presente trabajo, no sólo por el hecho de lo que representan, sino también por la cantidad de problemas abiertos que deja para posibles investigaciones posteriores son los siguientes:

- a) Dado un grafo cualquiera G , existe un n tal que G es bar-representable en \mathbf{R}^n . Al menor n que lo verifica se le denominará *índice de representación* de G y se representará por $RI(G)$.

- b) Dado un grafo cualquiera G , existe un n tal que G es bar-representable en una superficie de género n . Al menor n que lo verifica se le denominará *índice bar* de G y se representará por $BI(G)$.

Si el *género* de un grafo G , o género mínimo que ha de tener una superficie en la que se pueda realizar una inmersión de G , se representa por $g(G)$, podemos asegurar que $g(G) \leq BI(G)$ pero un estudio completo de las posibles relaciones entre el índice de representación, el índice bar y el género de un grafo es un problema abierto.

Para poder interpretar los temas de investigación que expondremos a continuación es necesario cierta familiaridad con los conceptos y métodos básicos de la Geometría Computacional. Aunque, si se formula en términos de *geometría constructiva*, pueden remontarse a la Grecia clásica los orígenes de la disciplina [74], es corriente referir la concepción moderna a la tesis de Shamos [64] (1977). Desde entonces han aparecido diversos textos recogiendo colecciones de artículos como el editado por Preparata [57] (1983), el editado por Toussaint [73] (1985) y algunos más estructurados en forma de tratado, como el de Mehlhorn [50] (1984), el de Preparata y Shamos [58] (1985) y el de Edelsbrunner [25] (1987). El texto de Preparata y Shamos [58] puede considerarse de carácter introductorio y es, en esencia, suficiente para comprender los conceptos básicos que utilizaremos.

Por otra parte, la Geometría Computacional es una disciplina híbrida en la que confluyen varias disciplinas, como la Teoría de Grafos, (y, más ampliamente, la Combinatoria), la Informática Teórica, la Geometría Discreta y la Geometría en su sentido más general, de las que es necesario tener cierto conocimiento. Cualesquiera textos introductorios de Teoría de Grafos, como el de Chartrand y Lesniak [13] (1986), y de combinatoria, como el de Roberts [60] (1989) son suficientes para cubrir las referencias que en este ámbito se precisan.

En el campo informático, los ingredientes básicos son Algorítmica, Complejidad y Estructura de Datos. Todo ello se puede cubrir con alguno de los varios libros que hoy ya se consideran *clásicos*, como los de Aho, Hopcroft y

Ullmann [2, 3] (1979,1983), los de Knuth [41] (1973) o los de Mehlhorn [50] (1984). El más reciente texto de Cormen, Leiserson y Rivest [21] (1990) nos parece también una referencia excelente.

Es interesante destacar que si el fuerte desarrollo de la Informática Gráfica ha impulsado especialmente los estudios de configuraciones geométricas en dimensiones dos y tres, ello ha sido uno de los factores que ha auspiciado el vigoroso reavivamiento de investigaciones matemáticas que entroncan con la tradición geométrica más clásica. Prueba indudable de ello es la reciente aparición de textos como el de Klee y Wagon *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory* [40] (1991), o el de Croft, Falconer y Guy *Unsolved Problems in Geometry* [22] (1991), a los que pronto se unirá una versión ampliada del de Moser y Pach *Research Problems in Discrete Geometry* [53] (1991).

El concepto de *visibilidad* y, en general, la *Teoría de la Visibilidad* constituyen, en la actualidad, un fecundo campo de investigación dada su fuerte conexión con otros campos como pueden ser, entre otros, la Investigación Operativa y la Informática. Es además fundamental en muchas aplicaciones que se realizan a través de algoritmos en un ordenador como, por ejemplo, la Robótica [44, 78], la Planificación de Movimientos [48, 51, 35, 59], la Visión por Ordenador [66, 79], el Trazado de Gráficos [49, 8, 61, 68, 69], el CAD/CAM [11, 27], la Arquitectura Asistida por Ordenador [23, 62], el Reconocimiento de Formas [5, 75] o el Diseño de Circuitos VLSI [34, 39, 47, 63, 76].

De particular interés son los problemas relacionados con los grafos de visibilidad de segmentos o *barras* paralelas, cuyas propiedades combinatorias han sido estudiadas de manera intensiva por Duchet [24], Tamassia y Tollis [68], Thomassen [72] y Wismath [77] entre otros.

Cabría, por último señalar la importancia de los grafos de visibilidad en los conocidos problemas de determinación de zonas ocultas para figuras dos y tres dimensionales.

REPRESENTACIÓN DE GRAFOS		
	Topológica	De visibilidad
Vertices	Puntos	Conjuntos (segmentos)
Aristas	Curvas	Relac. de Visibilidad
Ventajas	<p>Facilidad de representación.</p> <p>Es posible utilizar muchas propiedades y resultados topológicos.</p>	<p>Da diferentes representaciones para grafos no isomorfos (cercanas a la definición combinatorial).</p> <p>Produce una buena modelización para algunas aplicaciones gráficas.</p>
Desventajas	<p>Proporciona una misma representación para infinitos grafos no isomorfos.</p>	<p>No es posible utilizar propiedades y resultados topológicos (a menos que, <i>traslademos</i> el problema a otra representación)</p>
Teorema de caracterización	<p><i>Kuratowski</i> (plano)</p>	<p><i>Tamassia y Tollis</i> (plano, cilindro y esfera)</p>

Tabla 0.1: Distintos tipos de representación de grafos.

Contenido

Agradecimientos	i
Resumen	iii
Introducción	v
Contenido	xi
0 Preliminares	1
0.1 Notaciones y terminología	2
0.2 Visibilidad	9
0.3 Bar-visibilidad	15
0.4 Aspectos algorítmicos	18

1	Visibilidad en superficies no planas	21
1.1	Introducción.	22
1.2	Visibilidad en el cilindro	29
1.2.1	Estudio algorítmico	31
1.3	Visibilidad en el Toro	33
1.3.1	Estudio algorítmico	39
1.4	Conclusiones y problemas abiertos	46
2	VHR-visibilidad	49
2.1	Antecedentes	49
2.2	Índice de representación.	52
2.3	Grafos VHR-representables en $\mathbf{R}^{1+1/2}$	58
2.4	Índice de representación de grafos planos.	61
2.5	Índice de representación de grafos completos.	63
2.6	Índice de representación de grafos bipartitos completos.	73
2.7	Conclusiones y problemas abiertos	84

3 Bar-visibilidad en superficies no planas	87
3.1 Antecedentes	88
3.2 Caracterización de los grafos bar-tóricos	92
3.3 Aspectos algorítmicos	109
3.4 Índice bar	111
3.5 Conclusiones y problemas abiertos.	117
Referencias	119

Capítulo 0

Preliminares

El presente capítulo se dedicará a dar las definiciones generales y establecer la notación que se utilizará a lo largo de la presente memoria. Así mismo, se introducirán los conceptos de visibilidad y bar-visibilidad, sobre los que se fundamenta la presente tesis.

Aunque se irán definiendo los conceptos más elementales que se utilizarán a lo largo del trabajo sería recomendable, para quienes no estén familiarizados con dichos conceptos, la lectura de textos, que pueden considerarse ya como clásicos, como son los de Harary [37] de Teoría de Grafos, Preparata y Shamos [58] de Geometría Computacional, Aho, Hopcroft y Ullman [2] de Algorítmica, o los de Nishizeki y Chiba [54] y Chartrand y Lesniak [13] de Algorítmica aplicada a la Teoría de Grafos. Especial atención, por tratar varios de los temas que desarrollaremos en este trabajo, merece el texto de J. O'Rourke [55] titulado *Art Gallery Theorems and Algorithms*.

0.1 Notaciones y terminología

La primera sección de este trabajo se dedica a definir los conceptos básicos que nos permitan una buena comprensión del mismo.

Se define un *grafo* G como un par (V, A) formado por un conjunto de *vértices* V y una colección de *aristas* A , donde cada arista $l \in A$ es un par no ordenado de vértices distintos de G , es decir, $l = \{v_i, v_j\}$ con $v_i, v_j \in V$. Dos aristas son *incidentes* si comparten un vértice. Un vértice v y una arista son *incidentes* si el vértice v es uno de los que definen a dicha arista. Dos vértices se dicen *adyacentes* si ambos definen una arista de G .

Dado un grafo $G = (V, A)$ se denomina *valencia* del vértice $v \in V$ al número de aristas de G que inciden en dicho vértice, y la denotaremos por $\delta(v)$. Si el grafo $G = (V, A)$ posee n vértices y todos ellos poseen la misma valencia, se dice que es *regular*. Como caso particular, si la valencia de cada vértice es $n - 1$, el grafo no admite más aristas y se dice que se trata de un *grafo completo*, denotándose por K_n , donde n representa el número de vértices.

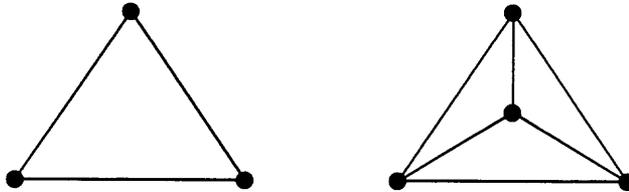
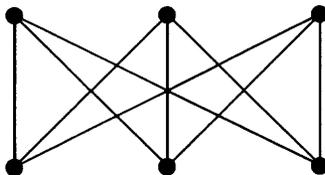


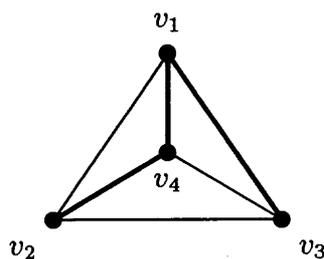
Figura 0.1: Los grafos completos K_3 y K_4 .

Un grafo $G = (V, A)$ se dice que es *bipartito* si podemos hacer una partición del conjunto V en dos subconjuntos V_1 y V_2 de tal forma que cualquier arista $l \in A$ está definida por un vértice de V_1 y otro de V_2 . Un grafo bipartito de $m + n$ vértices (m vértices en V_1 y n en V_2) tal que al añadirle una nueva arista deja de ser bipartito, se dice que es un *grafo bipartito completo* y se denota por $K_{m,n}$.

Figura 0.2: El grafo bipartito completo $K_{3,3}$.

Dados dos vértices v_1 y v_2 de un grafo G , un *camino* en G que une v_1 con v_2 es un conjunto ordenado de vértices $\alpha = \{v_1, w_1, \dots, w_k, v_2\}$ con la condición de que cada vértice sea adyacente al anterior y al posterior. Definiremos la longitud de un camino α como el número de vértices que posee menos 1. También se llama camino en G de v_1 a v_2 a la sucesión de aristas $\{\{v_1, w_1\}, \{w_1, w_2\}, \dots, \{w_k, v_2\}\}$. La longitud de este camino (que es la misma que la de α) viene determinada por el número de aristas que lo componen.

Un camino se dice que es *simple* si no contiene vértices repetidos. Resulta fácil comprobar que si existe un camino que une a los vértices v_i y v_j , existe un camino simple que también los une y por ello, siempre que hablemos de un camino nos estaremos refiriendo a uno simple.

Figura 0.3: Un camino de longitud 3 entre los vértices v_2 y v_3 .

Un *ciclo* es un camino que comienza y termina en el mismo vértice, diciéndose que es *simple* si los únicos vértices que se repiten son el primero y el último. En general al referirnos a un ciclo lo haremos a uno simple.

Sea \mathcal{R} la relación de equivalencia entre los vértices de un grafo G definida por $v \mathcal{R} w$ si, y sólo si, existe un camino en G entre v y w . Llamaremos componentes conexas (o simplemente componentes) de G a las clases de equivalencia del conjunto cociente G/\mathcal{R} , y diremos que un grafo es *conexo* si sólo tiene una componente conexa.

Se dice que el grafo $G' = (V', A')$ es un *subgrafo* de $G = (V, A)$ si $V' \subseteq V$ y $A' \subseteq A$. Dado un grafo $G = (V, A)$ y un conjunto W de vértices de G , se define el *grafo inducido* por $G - W$ como el subgrafo de G cuyo conjunto de vértices es $V' = V - W$ y cuyas aristas son las aristas de G definidas por parejas de vértices de V' . Diremos también que el grafo inducido por $G - W$ es el grafo resultante de *eliminar* de G los vértices de W .

Un vértice v de un grafo G se dice que es un *punto de corte* si el grafo inducido por $G - \{v\}$ posee un número superior de componentes conexas que el grafo G . Un grafo conexo que no posee puntos de corte se dice que es un grafo *2-conexo*.

Si G es un grafo conexo y G' es un subgrafo 2-conexo de G , se dice que G' es *maximal* si cualquier subgrafo de G que contenga a su vez a G' como subgrafo, contiene puntos de corte de G . A los subgrafos maximales 2-conexos de un grafo G se les denomina *bloques* de G . Obsérvese que cada bloque B de un grafo G contiene a todos los puntos de corte adyacentes a vértices de B .

Si G es un grafo 2-conexo, evidentemente, no tiene puntos de corte y, por tanto, el grafo resultante de *eliminar* cualquier vértice de G resulta ser conexo. Sin embargo, puede ocurrir que al eliminar *dos* de sus vértices se rompa la conexión. En ese caso, diremos que dicho par de vértices constituyen una *pareja de corte*. Un grafo 2-conexo que no posea parejas de corte se dice que es *3-conexo*.

En general, para romper la conexión de un grafo conexo será necesario eliminar un conjunto de, al menos, k vértices. A este conjunto de k vértices se le denomina *conjunto de corte* y diremos que el grafo es *k-conexo*.

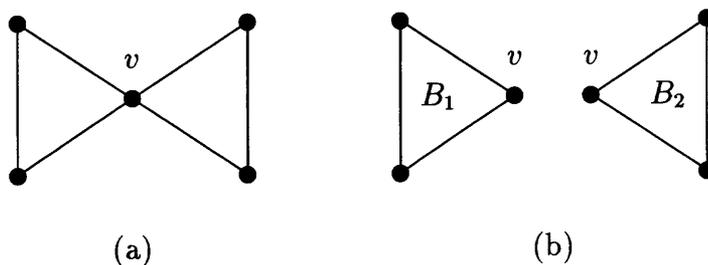


Figura 0.4: Un grafo conexo con un punto de corte v (a) y sus bloques (b).

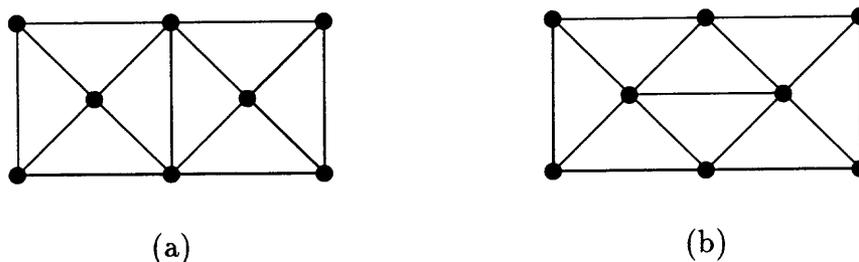


Figura 0.5: Un grafo 2-conexo no 3-conexo (a) y otro 3-conexo (b).

Si $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ son dos grafos y $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ es una aplicación inyectiva de tal forma que si los vértices v y w de G_1 son adyacentes en G_1 entonces $\phi(v)$ y $\phi(w)$ son adyacentes en G_2 , se dice que ϕ es un *homomorfismo* de G_1 en G_2 . Si ϕ es un homomorfismo biyectivo de G_1 en G_2 de forma que ϕ^{-1} es un homomorfismo de G_2 en G_1 entonces se dice que ϕ es un isomorfismo entre G_1 y G_2 . En tal caso, se dice que G_1 y G_2 son isomorfos.

Un grafo $G = (V, A)$ se dice que es *plano* si admite una inmersión plana, es decir, si podemos asociar sus vértices a puntos del plano y sus aristas a arcos de curvas de Jordan que no se intersecten entre sí, salvo en vértices comunes.

Si $l = \{v_1, v_2\}$ es una arista de un grafo $G = (V, A)$, llamaremos *partición* de l al resultado de sustituir dicha arista por el camino simple $\{v_1, w_1, \dots, w_k, v_2\}$

donde los vértices w_i , para $1 \leq i \leq k$, son todos distintos y ninguno de ellos perteneciente a V .

Dado un grafo G se define una *subdivisión* de G al grafo resultante de realizar sucesivas particiones de algunas de sus aristas. Diremos que dos grafos G_1 y G_2 son *homeomorfos* si existe un tercer grafo G_3 que sea subdivisión de G_1 y G_2 .

Un teorema fundamental en Teoría de Grafos es el teorema de Kuratowski de caracterización de grafos planos.

Teorema 0.1.1. [45, Kuratowski] *Un grafo G es plano si, y sólo si, no contiene a ningún subgrafo homeomorfo a K_5 ni a $K_{3,3}$.*

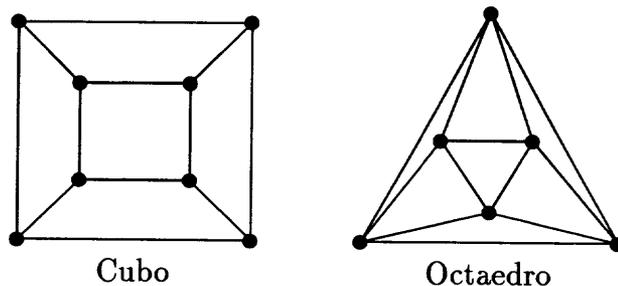


Figura 0.6: Inmersiones planas del cubo y el octaedro.

Como se puede observar, la representación plana del octaedro (ver Figura 0.6) divide al plano en ocho triángulos que se denominan *caras* o *regiones*, una de las cuales tiene área no finita, a ésta se le denomina *cara externa*. En el cubo de la Figura 0.6, las caras son cuadriláteros, dividiendo éste al plano en seis caras. En general, las caras de un grafo serán regiones delimitadas por arcos de curvas.

Obsérvese que el *borde* de una cara (conjunto de aristas que delimitan una cara, o región, de un grafo) es, en general, un camino, y si el grafo G es 2-conexo con, al menos, tres vértices, es un ciclo.

Un grafo G diremos que es *periplano* (*outerplanar*) si admite una inmersión plana que deje a todos sus vértices en una misma cara. La caracterización de estos grafos la da el siguiente teorema:

Teorema 0.1.2. [12, Chartrand y Harary] *Un grafo es periplano si, y sólo si, no contiene a ningún subgrafo homeomorfo a K_4 ni a $K_{2,3}$.*

Existe además un algoritmo debido a S.L. Mitchell [52] que determina si un grafo es periplano en tiempo lineal.

Sean G un grafo y K un subgrafo de G . Se dice que un vértice v de G está *K -periconectado* con otro vértice u de K si existe un camino de u a v que no contiene más vértices de K que el propio u .

Dado un grafo $G=(V, A)$ y un subconjunto no vacío W del conjunto V de los vértices de G , se dice que dicho grafo es *W -periplano* si admite una inmersión plana que deje a los vértices de W en la cara externa. Se encuentran caracterizados por el siguiente teorema:

Teorema 0.1.3. [56, Oubiña y Zuchello] *Sean G un grafo conexo y W un conjunto, no vacío, de vértices de G . El grafo G es W -periplano si, y sólo si, no contiene una subdivisión K de los grafos (A) o (B) de la Figura 0.7 (K_4 y $K_{2,3}$), donde los vértices distinguidos están en W ó K -periconectados con un vértice de W*

Los mismos autores dan un algoritmo [56] que estudia, en tiempo lineal, si un grafo es W -periplano y, en caso de serlo, proporciona una inmersión del mismo dejando a los vértices de W en una misma cara.

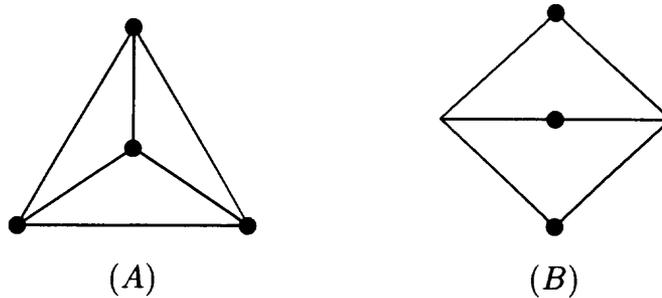


Figura 0.7: Grafos minimales prohibidos para la W -periplanaridad.

Otro tipo particular de grafos de especial importancia son aquellos que tienen las propiedades de ser conexo y carecer de ciclos. Estos grafos reciben el nombre de *árboles*. Si el grafo no es conexo pero carece de ciclos, recibe el nombre de *bosque* (ya que cada una de sus componentes es un árbol).

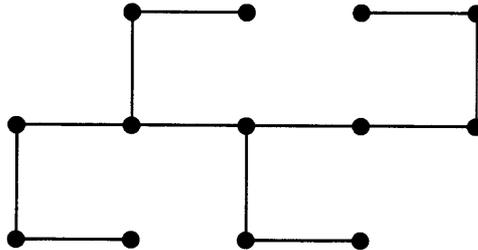


Figura 0.8: Un árbol (grafo conexo y sin ciclos).

El *árbol de bloques-puntos-de-corte* o *block-cutpoint tree* de un grafo conexo G es el grafo cuyos vértices son los bloques y los puntos de corte de G y cuyas aristas conectan cada bloque B con los puntos de corte contenidos en él (se trata, por tanto, de un árbol, ya que es conexo por serlo G y carece de ciclos, pues de contener alguno, los vértices de dicho ciclo que representan puntos de corte de G no podrían ser tales puntos de corte). El *árbol de bloques-puntos-de-corte* de un grafo $G = (V, A)$, que denotaremos por $BCT(G)$, puede

ser construido en tiempo proporcional al número de sus aristas mediante un procedimiento de búsqueda en profundidad o DFS (depth-first search) [29]. Una *oruga* es un árbol cuyos vértices que no son hojas constituyen un camino simple. La Figura 0.9 (a) muestra un grafo cuyo *árbol de bloques-puntos-de-corte*, dado en la Figura 0.9 (b) es una oruga. Los bloques y puntos de corte están representados por círculos y puntos respectivamente.

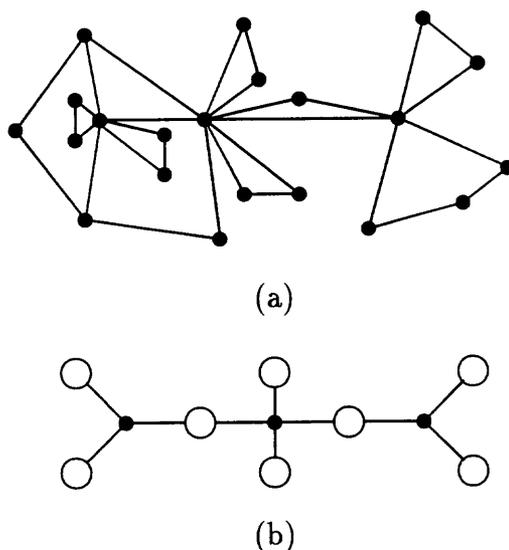


Figura 0.9: (a) Un grafo conexo y (b) su *árbol de bloques-puntos-de-corte* (una oruga).

0.2 Visibilidad

Aunque, como ya hemos comentado, el inicio de la concepción moderna de la teoría de la visibilidad puede fijarse en la tesis de Shamos [64] (1977), existen problemas clásicos de la Geometría con los que se relaciona profundamente y que además son, realmente, los que hacen que surja dicha teoría. Es éste un

buen momento para recordar la particular relevancia que tiene en los trabajos que expondremos a continuación el texto ya reseñado de J. O'Rourke [55].

Sea D un subconjunto de \mathbf{R}^n . Se dice que dos puntos $x, y \in D$ son *visibles* (en D), o que *se ven*, cuando el segmento cerrado que los tiene por extremos está íntegramente contenido en D . La visibilidad es, por tanto, una relación simétrica en D .

Esta definición invoca inmediatamente un concepto clásico en geometría, el de convexidad, con el que se encuentra fuertemente relacionado: un conjunto es *convexo* cuando al elegir arbitrariamente dos de sus puntos, el segmento que los une está totalmente contenido en él. En términos de visibilidad podemos decir que un polígono es convexo si al elegir dos puntos cualesquiera del polígono estos se ven.

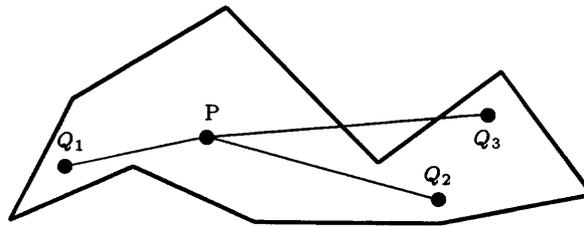


Figura 0.10: Un polígono no convexo.

La información que nos proporciona el hecho de que un polígono sea convexo, en términos de la teoría de la visibilidad, es que un observador que se situase en un punto cualquiera del polígono podría observarlo en su totalidad.

Al no ser convexo el polígono de la Figura 0.10 un observador que se situase, por ejemplo, en el punto P no podría ver lo que ocurre en el punto Q_3 .

Existen, sin embargo, polígonos que, sin ser convexos, pueden ser obser-

vados en su totalidad desde algún punto en particular. Este tipo de polígono recibe el calificativo de *estrellado*.

Obsérvese que, al ser simétrica la relación de visibilidad, el punto R del polígono de la Figura 0.11 sólo es visible desde puntos de la zona **A** mientras que el punto S sólo puede verse desde puntos de la zona **B**. Al ser disjuntas ambas zonas no existe ningún punto del polígono que pueda ver, simultáneamente, a R y S es decir, el polígono tampoco es estrellado.

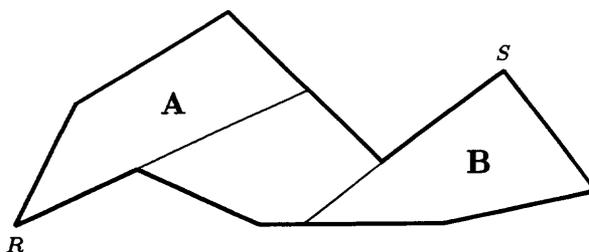


Figura 0.11: Un polígono no estrellado.

Es obvio que la siguiente pregunta que nos hacemos, teniendo en cuenta que no existe ningún punto desde el que observar al polígono en su totalidad, es ¿cuál es el mínimo número de puntos que debemos elegir desde los que poder observar a todo el polígono? En 1973 Victor Klee propuso este problema en el transcurso de un congreso.

En versiones más pintorescas del enunciado se toma el polígono como una *galería de arte poligonal de n lados*, y los puntos buscados son *guardianes* que la vigilan, *cámaras* (que cubran 360 grados) o *focos de luz* que la iluminan. Esta manera de plantear el problema le ha dado el nombre de *problema de la galería de arte*.

La respuesta a este problema fué prontamente obtenida por V. Chvátal [17]: $\lfloor n/3 \rfloor$ guardianes son siempre suficientes y ocasionalmente necesarios para vigilar un polígono de n vértices. Este resultado es conocido actualmente

como *Teorema de la galería de arte*, y se ha extendido en varias direcciones dentro de las matemáticas y de la informática teórica, sobre todo después de la aparición, en 1987, del tratado monográfico escrito por O'Rourke [55] del cual se ha hecho referencia en más de una ocasión en este trabajo. Una panorámica de los avances posteriores puede verse en [65].

En la Figura 0.12 puede verse un polígono que requiere exactamente $\lfloor n/3 \rfloor$ guardianes.

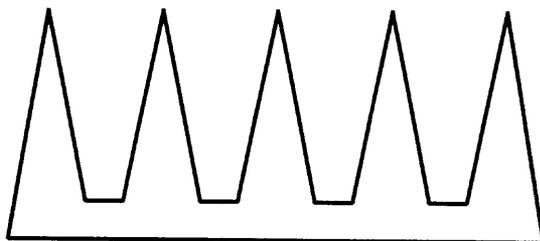


Figura 0.12: Un polígono que requiere, exactamente, $\lfloor n/3 \rfloor$ guardianes.

La demostración original de Chvátal se ramificaba según cierta casuística. Tres años después Fisk [31] obtuvo para la suficiencia una muy sucinta y elegante: triangúlese el polígono de cualquiera de las formas posibles; las diagonales obtenidas, los lados y los vértices conforman el *grafo de triangulación*, que siempre es 3-coloreable; basta tomar los vértices de la clase que corresponda al color menos popular (ver Figura 0.13).

Ambas demostraciones utilizan para la suficiencia *vértices* del polígono dado. Aunque $\lfloor n/3 \rfloor$ son siempre suficientes, en muchas ocasiones (obsérvese la Figura 0.13) basta con menos. Desde el punto de vista computacional es natural buscar un algoritmo que nos dé el mínimo número de vértices necesarios para cada ejemplar de polígono que se tome como entrada. Sin embargo, Lee y Lin [46] demostraron que este problema es de dureza NP, y Aggarwal [1] probó que también es de dureza NP hallar el mínimo número de puntos (no necesariamente vértices) capaces de vigilar el polígono.

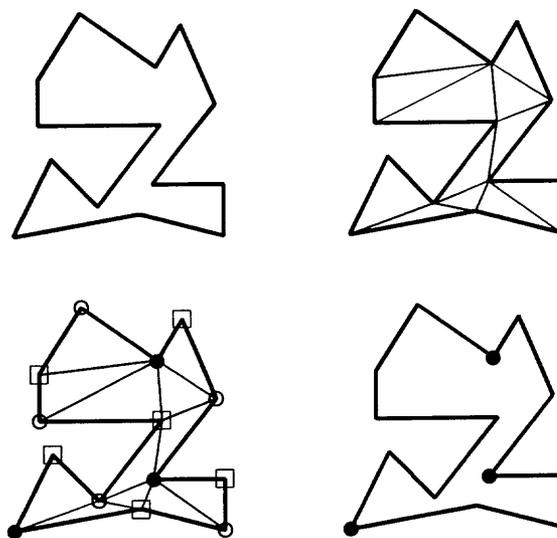


Figura 0.13: Demostración del teorema de la galería de arte.

En sentido contrario al de estos resultados negativos, Avis y Toussaint [6] demostraron que los $\lfloor n/3 \rfloor$ guardianes del Teorema pueden colocarse en tiempo polinomial (hoy sería lineal empleando el algoritmo de triangulación de Chazelle [14]).

Ya dentro de lo que podemos considerar, en el amplio sentido del término, *teoría de la visibilidad*, fueron Avis y Elgindy [5] en 1983 quienes introdujeron los *grafos de visibilidad*.

Dado un polígono simple P , su grafo de visibilidad $G_P = \{V_P, A_P\}$ es el grafo que tiene un vértice por cada vértice de P y una adyacencia entre vértices si los vértices correspondientes de P se ven mutuamente. Estos grafos de visibilidad, de los cuales se da un ejemplo en la Figura 0.14, pueden ser generalizados no sólo para un polígono sino para cualquier configuración de segmentos, entendiendo como *configuración de segmentos* cualquier conjunto

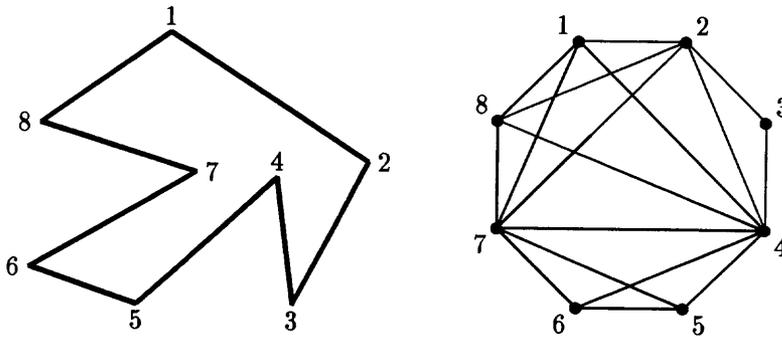


Figura 0.14: Un polígono y su grafo de visibilidad.

de segmentos que se intersectan, a lo más, en sus extremos.

Los tres problemas fundamentales en relación a este grafo son el de su construcción, el de su caracterización y el de su reconstrucción. El primero de ellos, dado un polígono P construir G_P , está satisfactoriamente resuelto en el plano, pues un algoritmo de Hershberger [38] permite hacerlo en tiempo $O(|A_P|)$ donde A_P representa al conjunto de las aristas de G_P y, por tanto, su construcción requiere un tiempo proporcional a su tamaño.

Al tratar de construir el grafo de visibilidad de una configuración de segmentos (arcos de geodésicas) situados sobre otra superficie, por ejemplo de un cilindro o de un toro, nos encontramos con una dificultad que no aparecía en el caso del plano, a saber: dos puntos de un plano definen un único segmento de recta, por lo que es inmediato conocer si dos vértices son o no visibles. Sin embargo, sobre la superficie de un cilindro o de un toro pueden trazarse una infinidad de arcos de geodésica entre dos puntos, por lo que el problema de tratar de conocer si dos vértices son o no visibles sobre dichas superficies puede convertirse, en algunos casos, en un problema de naturaleza no finita.

El problema de caracterización consiste en hallar propiedades habituales de la teoría de grafos que permitan definir, exactamente, la familia de grafos

de visibilidad de polígonos. Sólo se dispone de algunos resultados parciales que serán tratados en capítulos posteriores.

El problema de la reconstrucción consiste en, dado un grafo de visibilidad G , construir un polígono P tal que G_P sea isomorfo a G . En esta línea, iniciada por Elgindy [26], se dispone también de pocos resultados generales aunque sí de algunos para casos muy específicos. Algunos de estos casos serán tratados con posterioridad.

Aunque nos hemos referido siempre al concepto más clásico de visibilidad, como es la visibilidad según una dirección rectilínea, hay que hacer notar que existen otras muchas definiciones de visibilidad [33] como puedan ser las visibilidades circulares, elípticas, parabólicas, etc.

0.3 Bar-visibilidad

Quizás, la forma más frecuente de representar un grafo sea mediante una estructura de tipo topológico. Una tal representación de un grafo asocia puntos a sus vértices y arcos de curvas de Jordan a sus aristas. Este tipo de representación es muy útil por la facilidad que ofrece para encontrar una representación de un grafo dado y porque nos permite utilizar una gran cantidad de herramientas y resultados topológicos. Sin embargo, tiene el inconveniente de que no preserva la estructura combinatoria del grafo.

Otro tipo de representación de un grafo es la que se establece a través de ciertas relaciones existentes entre sus vértices. La más frecuente de ellas es la relación de visibilidad, en cuyo caso hablaremos de una *representación de visibilidad*. En una representación de este tipo los vértices vienen determinados por objetos que pueden, o no, impedir la visibilidad entre otros y las aristas vienen determinadas por ciertas relaciones de visibilidad entre sus vértices. Las ventajas que presenta frente a una representación topológica vienen dadas por ofrecer una buena modelización de algunas aplicaciones gráficas y por dar

una única representación para grafos isomorfos (la más cercana a la definición combinatoria). Como desventajas indicaremos que no se puede hacer uso de las herramientas y resultados topológicos (a menos que traslademos su estudio a otros tipos de representación). Una de las representaciones de visibilidad más conocidas es la *bar-visibilidad*.

En un *grafo de bar-visibilidad*, los vértices representan segmentos verticales y dos vértices son adyacentes si las dos barras verticales que representan pueden verse la una a la otra horizontalmente y de forma no degenerada. En otras palabras, debe existir un rectángulo de altura no nula y limitado a derecha e izquierda por ambas barras de tal forma que no intersekte a ninguna de las demás barras verticales. Esta noción de visibilidad también es denominada, con frecuencia, como ε -visibilidad (Tamassia y Tollis [68]), ya que las barras deben ser capaces de verse entre ellas bajo un *rayo de visibilidad* de grosor $\varepsilon > 0$.

Tal vez, uno de los resultados más satisfactorios en el campo de la teoría de la visibilidad sea el teorema de caracterización de los grafos de *bar-visibilidad* dado por Wismath [77] e, independientemente, por Tamassia y Tollis [68].

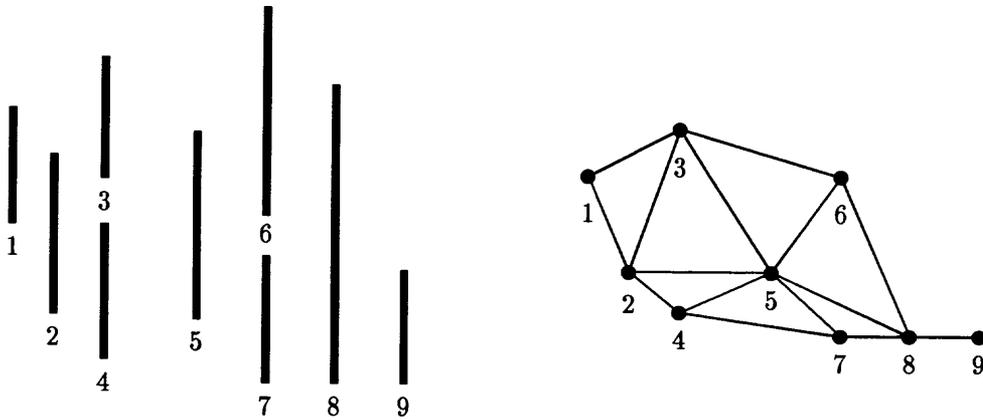


Figura 0.15: Las representaciones *bar* y *topológica* de un grafo.

Diremos que un grafo G es *bar-representable* si existe una configuración de segmentos verticales cuyo grafo de ε -visibilidad es precisamente G .

Teorema 0.3.1. [68, Tamassia y Tollis][77, Wismath] *Un grafo G es bar-representable en el plano si, y sólo si, admite una inmersión plana con todos los puntos de corte situados en la cara externa (o equivalentemente, en una misma cara).*

El problema de la reconstrucción para los grafos de bar-visibilidad está también resuelto en casos particulares, pero no en el caso general.

Evidentemente el anterior resultado está dado para el plano, es decir, para una configuración de barras verticales situadas sobre el plano. Parece entonces lógico tratar de generalizar este estudio siguiendo dos vías diferentes, a saber:

- a) Sobre espacios de dimensiones superiores a 2.
- b) Sobre superficies diferentes al plano.

La primera vía, aumentar la dimensión del espacio, es iniciada en 1994 por Bose et al. [10] con el estudio de la bar-visibilidad de rectángulos paralelos en \mathbf{R}^3 . En el siguiente capítulo de la presente memoria se realiza un estudio de la bar-visibilidad pero esta vez de forma generalizada para hiper-rectángulos paralelos de \mathbf{R}^n utilizando el concepto de ε -visibilidad. El problema general de la bar-visibilidad en \mathbf{R}^n lo denominaremos *VHR-visibilidad* o *visibilidad de hiper-rectángulos*.

En cuanto a la otra vía, es decir, la del estudio de la bar-visibilidad en superficies diferentes al plano, es iniciada por Tamassia y Tollis [70, 71] con el estudio de la bar-visibilidad sobre las superficies de la esfera (1989) y del cilindro (1991). En un capítulo posterior de esta memoria se realiza el estudio de

la bar-visibilidad sobre la superficie del toro y, en general, sobre una superficie de género superior a 1.

Uno de los objetivos fundamentales de este trabajo es: dado un grafo encontrar si es representable por cualquiera de las dos vías, es decir, si existe algún n para el cual sea VHR-representable en \mathbf{R}^n y si existe otro entero m para el cual sea bar-representable en una superficie de género m ya que, para la representación topológica, sabemos que siempre es posible encontrar dicho entero.

Algunos resultados parciales obtenidos hasta la fecha en este sentido son los de VR-visibilidad de Bose et al. [10], los de bar-visibilidad sobre las superficies del cilindro [71] y la esfera [70] de Tamassia y Tollis, así como los trabajos existentes sobre Box-visibilidad o Grafos de intersección [4, 9, 43].

0.4 Aspectos algorítmicos

Dado que algunos de los resultados que se obtienen en este trabajo son algoritmizables debemos establecer, también en este aspecto, la notación que utilizaremos para los algoritmos que se formulen.

El lenguaje de formulación de los algoritmos que presentaremos en esta memoria será un lenguaje de muy alto nivel. Al ser nuestro objetivo el de la claridad, nos expresaremos unas veces utilizando el lenguaje natural, otras pseudocódigo y, cuando nos ha parecido que era lo más conveniente, definimos unas líneas con pseudocódigo y otras con lenguaje natural.

La mayor o menor bondad o *complejidad* de un algoritmo depende de dos factores, a saber:

- El *tiempo* que tarda en realizarse.

- El *espacio* (memoria) que ocupa.

El segundo factor es un problema subsanable (dentro de lo posible), pues basta con ampliar la memoria al tamaño necesario.

El primer factor es el que en realidad va a marcarnos las pautas por las que debe regirse el diseño de un algoritmo, ya que *el tiempo* es un problema que no tiene solución posible.

Sean f y g dos funciones de \mathbf{N} en \mathbf{N} . Se dice que f es del *orden* de g y se expresa por

$$f(n) \text{ es } O(g(n))$$

si existe un número positivo k tal que $f(n) \leq k \cdot g(n)$ cualquiera que sea $n \in \mathbf{N}$.

De esta forma, si el número de operaciones que realiza un algoritmo es

$$3n^3 + 20n^2 + 5n + 11 \leq (3 + 20 + 5 + 11)n^3 = 39n^3$$

diremos que el algoritmo es $O(n^3)$.

Un algoritmo que sea $O(n^p)$ con $p \in \mathbf{N}$ se dice que es *polinomial*, utilizándose el término *lineal* para el caso $p = 1$. En el supuesto de que $p = 0$ se dirá que el algoritmo *corre en tiempo constante*.

Si un algoritmo no puede ser acotado por otro de $O(n^p)$, lo expresaremos diciendo que es de naturaleza NP.

Esta notación, denominada *notación asintótica*, debida a Bachmann [7] (1894), y popularizada desde su incorporación sistemática por Knuth [42], será la que utilizemos en la presente memoria, donde todos los análisis de los algoritmos se refieren a su complejidad computacional correspondiente al peor caso que pueda presentarse.

Capítulo 1

Visibilidad en superficies no planas

A diferencia de lo que ocurre en el plano, al situar dos puntos sobre la superficie de un cilindro o de un toro con la métrica usual, existen infinitas geodésicas que los contienen. Es por ello que dada una configuración de n segmentos (arcos de geodésica) sobre cualquiera de las superficies anteriores, el estudio del grafo de visibilidad asociado a dicha configuración puede ser un problema no finito, es decir, puede darse el caso de que al estudiar la visibilidad entre dos vértices (extremos de los segmentos) nos encontremos sucesivamente con arcos de geodésicas que los unan y que sean todos ellos intersectados por segmentos de la configuración, no pudiendo de esta forma decidir si dichos vértices son visibles entre sí. Contrariamente, puede darse el caso de que existan infinitos arcos de geodésicas que permitan la visibilidad entre ellos pero, dado que la construcción del grafo de visibilidad va a ser una herramienta para otros problemas, como puede ser la determinación del camino más corto entre dos puntos, no podamos decidir cuál de los arcos de geodésica es el que mejor se ajusta a nuestro problema. Es por ello que la construcción del grafo de visibilidad para una configuración de n segmentos que no se intersectan (salvo en sus extremos) –que en el plano es un problema resuelto y existen

algoritmos [55] que lo construyen en tiempo $O(n^2)$ – pueda convertirse ahora en un problema de naturaleza no finita. En éste capítulo se estudia cuándo es finito el estudio de dicho grafo y se dan algoritmos que caracterizan este hecho. Obsérvese la importancia que desde el punto de vista de la Algorítmica tiene este resultado, puesto que se consigue dar un algoritmo que en tiempo finito determina si una determinada estructura es finita o infinita. Es decir, se resuelve de manera finita un problema de naturaleza no finita.

1.1 Introducción.

Uno de los pilares fundamentales para la planificación de movimientos de robots en presencia de obstáculos en el plano, lo representa el grafo de visibilidad de extremos en tales obstáculos. Definimos el *grafo de visibilidad* para un conjunto S de n segmentos de recta que no se intersectan en el plano como el grafo en el que los vértices son los extremos de los segmentos y dos vértices son adyacentes si pueden verse entre ellos (i.e., el segmento de recta que los une no corta a ninguno de los segmentos de S). En ese grafo podemos hallar el camino más corto entre dos puntos teniendo en cuenta los obstáculos existentes.

No obstante, en la mayoría de los casos prácticos, la trayectoria de un robot no está en el plano sino en el espacio, o con más precisión, en una variedad algebraica inmersa en el espacio. Obviamente, la información del camino más corto se encuentra, en estos casos, en el grafo de las geodésicas con extremos en los obstáculos. Los dos principales problemas con los que nos enfrentamos entonces son:

- a) La existencia de infinitas geodésicas entre dos puntos en la mayoría de las variedades.
- b) La dificultad para computar y describir las geodésicas.

Aunque lo segundo sea un problema en la mayoría de las variedades, no lo es en algunos casos específicos. Por ejemplo, las geodésicas del cilindro son muy fáciles de computar y de describir: son las hélices.

Dado que existe un homeomorfismo entre los puntos de un cuadrado unidad, en el que se han identificado los bordes izquierdo y derecho, y los puntos de un cilindro, podemos representar a este último por dicho cuadrado. Igualmente, es posible representar el cilindro como una banda limitada por dos rectas paralelas, a distancia unidad, en la cual se han identificado los puntos que, estando a la misma altura, distan entre sí una unidad. En dicha banda, al cuadrado unidad constituido por aquellos puntos que no tienen otro correspondiente (con la excepción del borde) se le denomina *dominio fundamental* o *balda*. En otras palabras, existe una aplicación que transforma los infinitos puntos de la banda que se obtienen de realizar traslaciones horizontales y enteras de un punto p de la misma, en un punto del cilindro. Es decir, estamos haciendo corresponder a cada punto del cilindro infinitos puntos de la banda.

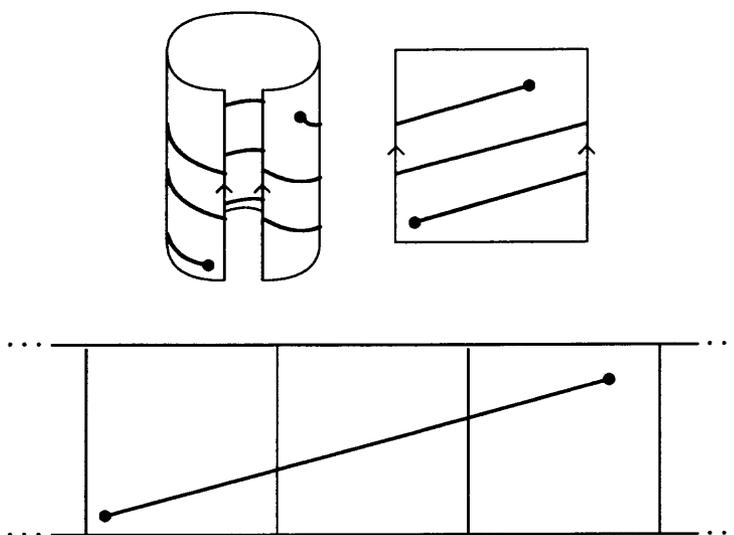


Figura 1.1: Representación de las geodésicas en un cilindro.

Podemos ahora representar un arco de geodésica como un segmento situado sobre dicha banda (ver Figura 1.1). De esta forma es muy fácil describir una geodésica, pues basta con dar las coordenadas de dos de sus puntos.

Además, esta representación proporciona métodos muy buenos para computar algunos invariantes asociados a las geodésicas así, por ejemplo, es fácil hallar el arco de geodésica más corto entre dos puntos (distancia entre dos puntos) en presencia de obstáculos, pues basta considerar los segmentos que pueden trazarse entre ellos sin atravesar ningún obstáculo a través de las sucesivas regiones fundamentales (cuadrados o baldosas de la banda) limítrofes.

Así pues, consideremos la banda infinita $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ de segmentos de recta generada por traslaciones horizontales y enteras de una baldosa $\mathcal{L}(S)$ definida, en el cuadrado unidad $C = [0, 1] \times [0, 1]$, por un conjunto S de n segmentos de recta que no se intersecten (Figura 1.2) y denotemos por P al conjunto de los $2n$ extremos de los segmentos de S . El estudio del grafo de visibilidad de n arcos de geodésica que no se intersectan en el cilindro es equivalente al de la búsqueda de las aristas, con origen en P , del grafo de visibilidad \mathcal{G} de la configuración $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$.

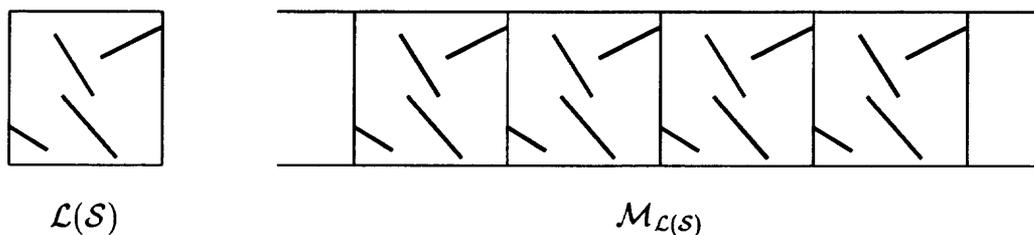


Figura 1.2: Una configuración de segmentos en el cilindro.

En el caso del toro, si consideramos la métrica usual que se obtiene de la representación $S^1 \times S^1$, ninguna de las familias de hélices o geodésicas está contenida en la otra aunque tienen intersección no vacía. No obstante, en la práctica, es más importante asegurar una fácil computación y descripción de las trayectorias que obtener el camino más corto. Por otra parte, en dicha

métrica, la longitud de un arco de hélice no difiere mucho de la longitud del arco de geodésica más cercano y además, usualmente en gran parte de la literatura existente se suele utilizar la métrica del toro plano en el que las dos familias descritas anteriormente coinciden.

De manera análoga al caso del cilindro, existe un homeomorfismo entre los puntos de un toro y los de un rectángulo en el que se han identificado el borde derecho con el izquierdo y el superior con el inferior. Podemos, por tanto, representar el toro por dicho rectángulo (ver Figura 1.3), el cual recibe el nombre de *toro plano* y es el referido anteriormente bajo cuya métrica coinciden las hélices con las geodésicas.

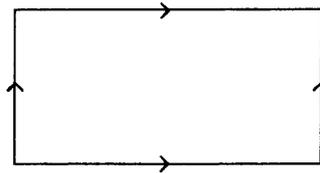


Figura 1.3: Toro plano.

Igualmente, es posible representar al toro como un mosaico formado por traslaciones enteras de un cuadrado unidad en el cual se identifican los puntos que distan una unidad en dirección horizontal o vertical. En dicho mosaico, al cuadrado unidad constituido por aquellos puntos que no tienen otro correspondiente (excepto los del borde) se la denomina *dominio fundamental* o *baldosa* al igual que se hizo en el caso del cilindro. Existe entonces una aplicación que transforma en cada punto p de la baldosa los infinitos puntos del plano que se obtienen mediante traslaciones enteras de dicho punto p . Los infinitos puntos del plano que se corresponden con un determinado punto p del toro diremos que son copias del punto p .

El mosaico generado por traslaciones enteras de dicha baldosa nos permite, al igual que en el caso del cilindro, definir un arco de hélice dando las coordenadas de sus extremos en dicho mosaico (ver la Figura 1.4).

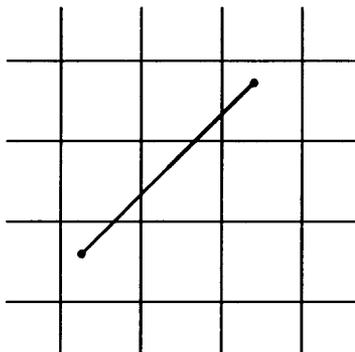


Figura 1.4: Representación de las hélices en un toro.

Consideremos el mosaico no finito y periódico $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ de segmentos de recta generado por traslaciones enteras de una baldosa $\mathcal{L}(S)$ definida, en el cuadrado unidad $C = [0, 1] \times [0, 1]$, por un conjunto S de n segmentos de recta que no se intersectan (Figura 1.5).

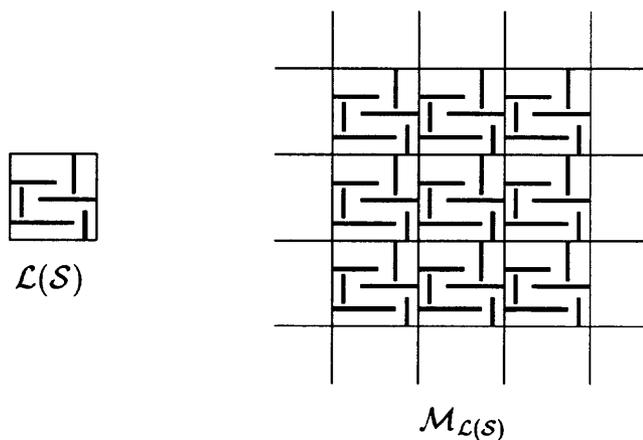


Figura 1.5: Una configuración de segmentos en el toro.

Denotando por P al conjunto de los $2n$ extremos de los segmentos de S , el estudio del grafo de visibilidad para n arcos de geodésicas que no se intersectan

en el toro lo transformamos en la búsqueda de las aristas, con origen en P , del grafo de visibilidad G para la configuración $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$.

Por supuesto, el problema de la existencia de infinitas geodésicas sobre cualquiera de las superficies consideradas no se ha resuelto, pero no es difícil hallar ejemplos de configuraciones de obstáculos donde, por cada par de extremos de tales objetos, sólo existe un número finito de hélices que los eviten.

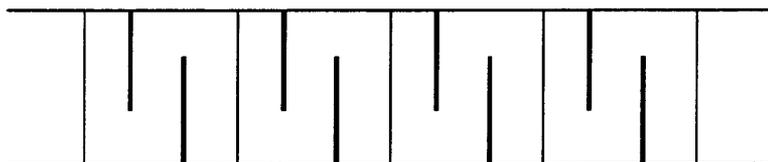


Figura 1.6: Un ejemplo de la aseveración anterior.

El grafo de visibilidad de una configuración de n segmentos en el cilindro o en el toro se dice que es *localmente finito en un vértice v* si sólo existe un número finito de arcos de geodésicas (o hélices en nuestro caso) que lo unan a los restantes vértices de dicha configuración sin intersectar a ningún segmento de ella. En otras palabras, si el vértice v no puede ver a otro vértice w siguiendo infinitas direcciones. En general, diremos que un grafo es *localmente finito* si lo es en todos sus vértices.

La primera cuestión que debemos plantearnos al estudiar el grafo de visibilidad de una configuración de n segmentos en el cilindro o en el toro es si éste es localmente finito. Téngase en cuenta que el grafo de visibilidad nos va a ser de gran utilidad en determinadas aplicaciones como puede ser la búsqueda del camino más corto entre dos puntos, por lo que es evidente la necesidad de la finitud local del grafo para que el problema posea una solución algorítmica.

Aunque el problema de la construcción del grafo de visibilidad ha sido estudiado en el plano para una configuración finita de segmentos [25] no ocurre lo mismo en el caso de otras superficies debido a los motivos comentados

anteriormente. sin embargo, y motivados por el interés que tiene la visibilidad en geometría, al ser tema central en muchas aplicaciones de computación en robótica [44, 78], planificación de movimientos [48, 52], visión [66, 79], gráficos [15, 49], CAD/CAM [11, 27], arquitectura asistida por ordenador [23, 62] y reconocimiento de formas [5, 75], dedicamos este capítulo al estudio de la finitud local de los grafos de visibilidad de configuraciones finitas de segmentos sobre las superficies del cilindro y del toro.

En el caso del cilindro este estudio no presenta grandes dificultades, pero en el caso del toro la situación es más complicada.

Cerraremos el estudio de cada uno de los casos dando un algoritmo que decida si el grafo de visibilidad es, o no, localmente finito.

Consideremos una configuración S de n segmentos en el plano, denotemos por P al conjunto de los $2n$ extremos de los segmentos de S y sea p un punto de P . Para cualquier ángulo α , se define *rayo* r_α como la semirrecta que, con origen en p , forma un ángulo α con la parte positiva del eje OX . De la misma forma, podemos definir el rayo r de pendiente m . Por conveniencia, definiremos r , o en su caso r_α , como una semirrecta abierta, es decir, sin contener al origen.

Si r es un rayo y s un segmento que intersecta a r , diremos que la intersección es *transversa* si el punto de intersección no es uno de los extremos de s , en cuyo caso, diremos que es *no-transversa*.

Diremos que r es intersectado no-transversalmente *a un mismo lado* por n segmentos si las intersecciones son no-transversas y todos los segmentos que intersecta están situados en uno de los semiplanos determinados por la recta que contiene al rayo, sobre el propio rayo o se dan ambas situaciones.

Por último, diremos que r es intersectado no-transversalmente *a ambos lados* si las intersecciones son no-transversas y r intersecta segmentos situados en ambos semiplanos (Figura 1.7).

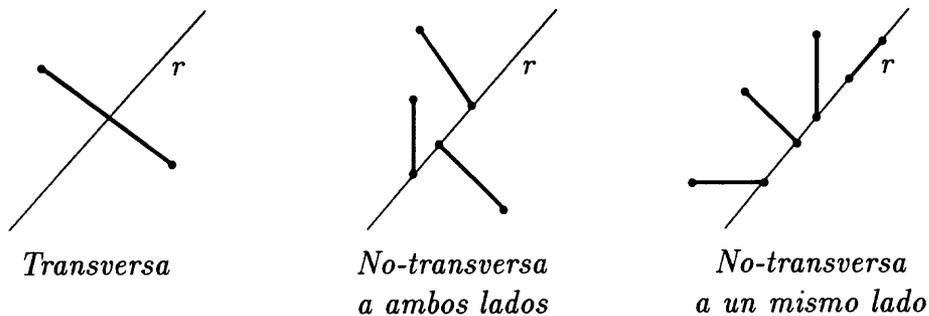


Figura 1.7: Los diferentes tipos de intersección.

En los casos del cilindro y del toro, llamaremos *rayo de visibilidad* a toda semirrecta que partiendo de un vértice del mosaico $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ es intersectada, a lo más, no transversalmente, y a un mismo lado, por segmentos de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$.

1.2 Visibilidad en el cilindro

Una vez establecidos los conceptos básicos más generales, podemos adentrarnos en los casos particulares de cada una de las superficies.

Comenzaremos el estudio de la finitud local del grafo de visibilidad de una configuración de segmentos situados sobre el cilindro dando condiciones necesarias y suficientes para que el grafo de visibilidad no sea localmente finito en un determinado vértice. Finalizaremos dando un algoritmo que determine si dicho grafo de visibilidad es localmente finito.

Teorema 1.2.1. *Sea $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ una banda infinita de segmentos de recta generada por traslaciones horizontales y enteras de una baldosa $\mathcal{L}(S)$ definida, en*

el cuadrado unidad $C = [0, 1] \times [0, 1]$, por un conjunto S de n segmentos de recta que no se intersectan. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- El grafo de visibilidad G de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ no es localmente finito.
- Existe un rayo de visibilidad horizontal que deja segmentos de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ a ambos lados.
- Existe un segmento horizontal de longitud 1 que, dejando segmentos de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ a ambos lados, no intersecta a ningún segmento de la baldosa $\mathcal{L}(S)$.

DEMOSTRACIÓN: Si existe un rayo de visibilidad horizontal r entonces existe una banda horizontal de anchura $\varepsilon > 0$ que no intersecta a ningún segmento de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ y además el vértice origen del rayo de visibilidad puede ver infinitas copias del vértice más cercano al rayo en el lado opuesto al de los segmentos que intersectan no-transversalmente a r (ver Figura 1.8).

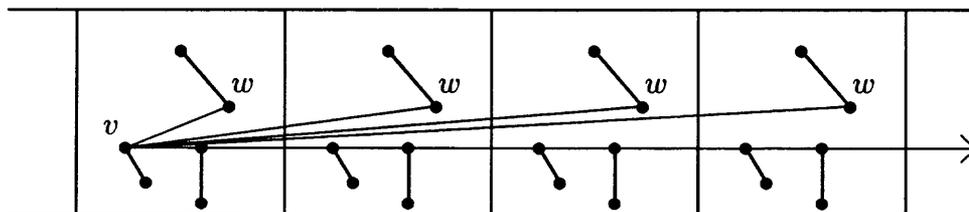


Figura 1.8: v ve a infinitas copias de w .

Recíprocamente, supongamos que el grafo de visibilidad no es localmente finito. Necesariamente un vértice v de $\mathcal{L}(S)$ ve infinitas copias de otro vértice w , por tanto v ve copias de w tan distantes como queramos. Los segmentos que unen v con las diferentes copias de w tienen por límite una semirrecta horizontal que sólo es intersectada no-transversalmente y a un mismo lado por segmentos de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$, en otras palabras, es un rayo de visibilidad. Por tanto, los apartados a y b son equivalentes.

Es fácil observar la equivalencia entre los apartados b y c , pues basta con desplazar verticalmente la recta generada por las traslaciones del segmento hasta que toque a uno de los vértices de la baldosa para tener un rayo de visibilidad con las características del apartado b . Recíprocamente desplazando verticalmente el segmento del rayo que atraviesa a una de las copias de la baldosa se tiene un segmento con las características del apartado c . ■

1.2.1 Estudio algorítmico

En esta sección daremos un algoritmo que estudia si el grafo de visibilidad de una configuración dada de segmentos sobre el cilindro es localmente finito.

Sea $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ un conjunto de n segmentos situados sobre un cilindro y sea $P = \{v_1, v_2, \dots, v_{2n}\}$, con $v_i = (x_i, y_i)$, el conjunto de los $2n$ extremos de los segmentos de S .

Debido a la tercera proposición del Teorema 1.2.1. basta con estudiar si los segmentos horizontales de longitud 1 que pasan por cada uno de los $2n$ puntos de P intersectan a algún segmento de S y en caso de hacerlo, de qué tipo son las intersecciones que produce. Podemos, por tanto, proceder como indica el siguiente algoritmo:

Algoritmo Vis-Cylinder

Paso 1 El algoritmo recibe como entrada al conjunto S de segmentos de la configuración así como el conjunto P de los $2n$ extremos de los segmentos de S .

Paso 2 Mientras $i < 2n$

- Paso 3** $\left\{ \begin{array}{l} L(i) \leftarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = y_i \end{cases} . \text{ Si } L(i) \text{ no interseca a} \\ \text{ningún segmento de } S \text{ y existen valores } y_j \text{ con} \\ 1 \leq j \leq 2n \text{ mayores y menores que } y_i \text{; el grafo no} \\ \text{es localmente finito. FIN} \end{array} \right.$
- Paso 4** $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } L(i) \text{ interseca transversalmente a algún seg-} \\ \text{mento de } S \text{ ir al Paso 6.} \end{array} \right.$
- Paso 5** $\left\{ \begin{array}{l} \text{Si ninguna de las } y_j \text{ de los segmentos que inter-} \\ \text{secta } L(i) \text{ es superior (o ninguna es inferior) a } y_i \\ \text{y existe algún } y_k \text{ con } 1 \leq k \leq 2n \text{ mayor que } y_i \\ \text{(respectivamente menor) el grafo no es localmente} \\ \text{finito. FIN} \end{array} \right.$
- Paso 6** $i \leftarrow i + 1$
- Paso 7** El grafo es localmente finito. FIN

Teniendo en cuenta que al realizarse en un algoritmo un bucle de orden m en uno o varios pasos intermedios de otro bucle de orden n el resultado final es de orden $n \cdot m$, es fácil observar que el anterior algoritmo tiene una complejidad $O(n^2)$ ya que realiza bucles de orden n (n ó $2n$ comparaciones) dentro de otro bucle también de orden n .

Queda entonces probado el siguiente teorema:

Teorema 1.2.2. *El algoritmo Vis-Cylinder estudia si el grafo de visibilidad asociado a una configuración de n arcos de hélice que no se intersectan sobre la superficie de un cilindro es localmente finito en tiempo $O(n^2)$.*

1.3 Visibilidad en el Toro

Al igual que en el caso del cilindro, estudiaremos a continuación cuándo es localmente finito el grafo de visibilidad de una configuración de n segmentos sobre la superficie del toro. Estableceremos condiciones necesarias y/o suficientes para que dicho grafo no sea localmente finito y daremos un algoritmo que estudie dicha finitud.

Comenzaremos pues dando condiciones necesarias y/o suficientes para que el grafo de visibilidad no sea localmente finito.

Consideremos el mosaico no finito y periódico $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ de segmentos de rectas generado por traslaciones enteras de una baldosa $\mathcal{L}(S)$ definida, en el cuadrado unidad $C = [0, 1] \times [0, 1]$, por un conjunto S de n segmentos de rectas que no se intersectan y denominemos vértices a los extremos de los segmentos de S .

Si algún lado de la frontera de $\mathcal{L}(S)$ no es intersectado por ningún segmento de S , el grafo de visibilidad G no es localmente finito. Basta ver para ello que si v es el vértice más cercano a dicho lado y v' es el más cercano al lado opuesto, G no es localmente finito en v ya que desde este vértice se pueden ver infinitas copias de v' , es decir, infinitos puntos del plano que se corresponden con v' en la representación del toro mediante un mosaico.

Si existe una banda horizontal (o vertical) de anchura $\varepsilon > 0$ que atraviesa toda la baldosa sin cortar a ningún segmento de ella, el grafo G no es localmente finito. Basta con desplazar los ejes coordenados para que la nueva baldosa generadora no sea intersectada en uno de sus lados.

Obviamente, la existencia de una banda horizontal o vertical de anchura $\varepsilon > 0$ que atraviese la baldosa $\mathcal{L}(S)$ sin intersectar a ningún segmento es equivalente a la existencia de un segmento horizontal o vertical que cruce la baldosa sin intersectar a ninguno de sus segmentos. Esta condición no es necesaria como puede verse en el ejemplo de la Figura 1.9 donde, aun no

existiendo ningún segmento horizontal ni vertical que no intersecte a ningún segmento de $\mathcal{L}(\mathcal{S})$, ésta genera un mosaico $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(\mathcal{S})}$ cuyo grafo de visibilidad no es localmente finito; por ejemplo, el vértice v ve a infinitas copias de v' .

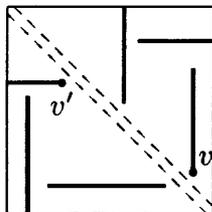


Figura 1.9: Un ejemplo de la no necesidad de la condición anterior.

En la práctica utilizaremos magnitudes enteras en todos los algoritmos. Esto no supone una restricción significativa ya que en cualquier implementación *práctica* de los algoritmos representamos los extremos de los segmentos usando magnitudes enteras (como es habitual en la programación de gráficos en el ordenador) debido a la eficacia de la aritmética entera frente a la de coma flotante. Por tanto, a partir de ahora supondremos que todos los vértices tienen coordenadas racionales.

Lema 1.3.1. *Si un vértice v ve a una copia suya, $v' = v + (q, p)$ con p y q enteros, el grafo no es localmente finito.*

DEMOSTRACIÓN: Construyamos el rectángulo R de lados paralelos a los ejes y diagonal definida por v y v' . Dado que en R sólo existe un número finito de vértices, ha de haber alguno s que sea el más cercano a dicha diagonal. Evidentemente, v ve a infinitas copias de s (Figura 1.10). ■

Lema 1.3.2. *El grafo de visibilidad del mosaico $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(\mathcal{S})}$ no es localmente finito en un vértice v si, y sólo si, existe un rayo de visibilidad con origen en dicho vértice.*

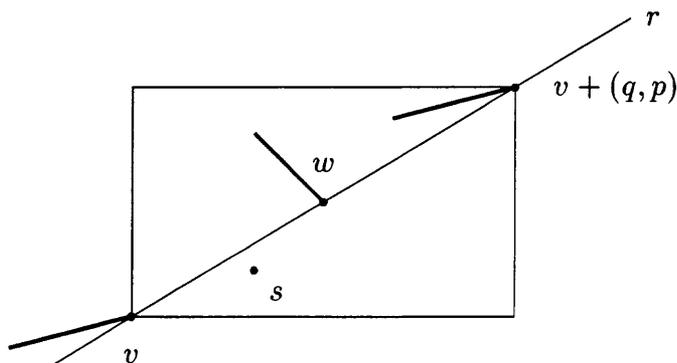


Figura 1.10: Rectángulo definido por dos copias consecutivas de un vértice.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos, en primer lugar, que existe un rayo r de visibilidad de origen v . Este rayo podrá tener pendiente m racional o irracional.

Caso racional. En este caso, cojamos el rectángulo R definido por los vértices extremos v y $v + (q, p)$ y de lados paralelos a los ejes (Figura 1.10) donde p y q son enteros primos entre sí y tales que $p/q = m$.

Como el rayo es intersectado no-transversalmente a un mismo lado, y en R sólo existe un número finito de vértices de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(s)}$, existe un punto s que es el más cercano a r en el lado opuesto de este rayo. Desde el punto s podemos ver infinitas copias del vértice v , por lo que el grafo no es localmente finito.

Caso irracional. Sea $w_i = (\alpha_i, \beta_i)$ un vértice que se encuentre en el lado opuesto al de los segmentos que tienen intersecciones no transversas con r . Todas las copias de w_i son de la forma $w_i + (q, p) = (\alpha_i + q, \beta_i + p)$. Sin pérdida de generalidad podemos considerar el origen v del rayo como origen de coordenadas, por lo que la ecuación del rayo de visibilidad es $y = mx$ con m irracional.

De existir dos copias $w_i + (q, p)$ y $w_i + (q', p')$ de w_i a la misma distancia de r , la recta que las une sería paralela a r y dado que ambas tienen coordenadas racionales, debería ser m racional en contra de la hipótesis, por tanto, todas las copias de w_i están a distinta distancia de r . Como la distancia de $w_i + (q, p)$ a r viene dada por

$$d(w_i + (q, p), r) = \left| \frac{\beta_i + p - m(\alpha_i + q)}{\sqrt{1 + m^2}} \right| = \left| \frac{\beta_i - m\alpha_i}{\sqrt{1 + m^2}} + \frac{p - mq}{\sqrt{1 + m^2}} \right|$$

y no existen dos iguales, tenemos un conjunto $D = \{d(w_i + (q, p), r)\}$ infinito y acotado inferiormente, por lo que ha de tener un ínfimo en p y q . Este ínfimo dependerá sólo de p y q obteniéndose para estos valores los ínfimos de las distancias de las copias de *cualquier* vértice a r . Puede verse entonces que estos ínfimos son diferentes para cada vértice w_i (excepto si existen vértices diferentes a la misma distancia de r).

Este hecho nos dice que existen, a lo más, $2n$ ínfimos diferentes. De entre todos ellos, debe existir uno que sea el mínimo. Supongamos que dicho mínimo corresponde al ínfimo obtenido para el vértice w_a . Eliminemos dicho vértice y todas sus copias. El nuevo ínfimo corresponderá ahora a otro vértice w_b . En la banda paralela a r limitada por ambos ínfimos sólo puede haber copias de w_a y además, debe haber un número infinito de ellas. Necesariamente, una de las copias incluidas en dicha banda ve a otra copia suya, por lo que (por el Lema 1.3.1.) el grafo no es localmente finito.

Recíprocamente, supongamos que el grafo no es localmente finito y probemos que existe un rayo de visibilidad.

Por no ser localmente finito existe, al menos, un vértice del que parte un número no finito de aristas del grafo de visibilidad.

Como las pendientes de estas aristas son diferentes, constituyen un conjunto M infinito y acotado (están comprendidas entre 0 y 2π) por lo que han de tener una pendiente m de acumulación de M .

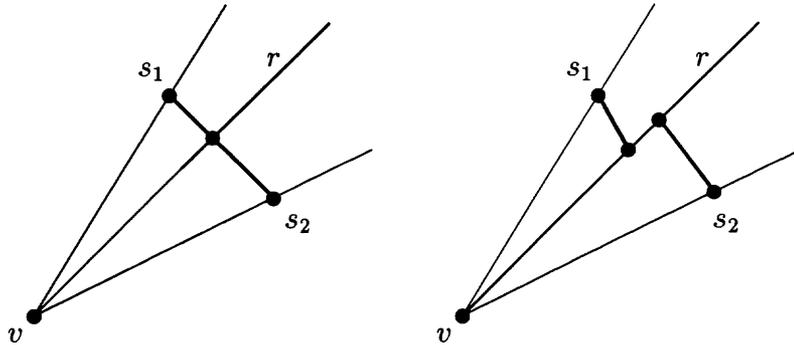


Figura 1.11: r ha de ser un rayo de visibilidad.

La semirrecta de origen v y pendiente m sólo puede ser intersectada no transversalmente y a un mismo lado por segmentos de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$, es decir, es un rayo de visibilidad. En efecto: Si fuese intersectada transversalmente por algún segmento de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ (Figura 1.11), dado que en el triángulo de vértices v , s_1 y s_2 sólo puede existir un número finito de vértices, y dado que el segmento s_1s_2 impide que v pueda ver a otro vértice más allá de dicho segmento entre las direcciones vs_1 y vs_2 , m no podría ser un punto de acumulación de M en contra de la hipótesis. Por tanto, las intersecciones de segmentos de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ con r no pueden ser transversas.

De manera análoga (Figura 1.11) puede verse que no pueden ser no transversas a ambos lados, por lo que han de ser necesariamente no transversas a un mismo lado y por tanto, r es un rayo de visibilidad. ■

El lema anterior nos asegura la existencia de un rayo de visibilidad con origen en un vértice si el grafo de visibilidad no es localmente finito en dicho vértice. Sin embargo, puesto que lo que se pretende conseguir es un algoritmo que en tiempo finito, será difícil localizar dicho rayo de visibilidad cuando la pendiente de éste sea irracional. Sin embargo, este problema queda solucionado mediante el siguiente lema:

Lema 1.3.3. *Si existe un rayo de visibilidad con origen en un vértice v y pendiente irracional, existe otro con origen en otro vértice v' y pendiente racional.*

DEMOSTRACIÓN: Hemos visto que si existe un rayo de visibilidad de origen v y pendiente irracional, entre el mínimo de los ínfimos de las distancias de los vértices de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ y r y el mínimo obtenido eliminando previamente a todas las copias del vértice v' que producía el ínfimo anterior, sólo existen copias del vértice eliminado. Si tomamos dos copias, *mutuamente visibles*, de dicho vértice y trazamos el rayo que parte de uno de los vértices y pasa por el otro, tiene pendiente racional y además es un rayo de visibilidad. ■

Basándonos en los dos lemas anteriores podemos caracterizar a los grafos no localmente finitos mediante el siguiente teorema.

Teorema 1.3.1. *Consideremos el mosaico no finito y periódico $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ de segmentos de recta generado por traslaciones enteras de una baldosa $\mathcal{L}(S)$ definida, en el cuadrado unidad $C = [0, 1] \times [0, 1]$, por un conjunto S de n segmentos de recta que no se intersectan.*

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) *El grafo de visibilidad del mosaico $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ no es localmente finito.*
- b) *Existe un rayo de visibilidad de pendiente racional.*
- c) *Existe una recta de pendiente racional que no intersecta a ningún segmento del mosaico $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$.*

DEMOSTRACIÓN: La demostración la haremos en dos pasos. En primer lugar probaremos la equivalencia entre los apartados a y b para más tarde probar la equivalencia entre los apartados b y c.

- 1) Los apartados a y b son equivalentes. En efecto:

Por el Lema 1.3.2. sabemos que, al no ser el grafo de visibilidad localmente finito, existe un rayo de visibilidad. Éste puede ser de pendiente racional, en cuyo caso estaría probada esta implicación, o de pendiente irracional, en cuyo caso, el Lema 1.3.3. nos asegura la existencia de otro de pendiente racional.

Recíprocamente, si existe un rayo de visibilidad de pendiente racional por el Lema 1.3.2. sabemos que el grafo de visibilidad no es localmente finito.

- 2) Los apartados b y c también son equivalentes. En efecto:

Sea r el rayo de visibilidad de pendiente racional $m = q/p$ y consideremos su origen v en el origen de coordenadas. Si consideramos el rectángulo R de vértices extremos v y $v + (q, p)$ (Figura 1.10) existe un vértice s que es el más cercano a r al lado opuesto de las intersecciones no transversas de r . La recta paralela a r que equidista de r y de s no interseca a ningún segmento de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$.

Recíprocamente, si existe una recta de pendiente racional $m = q/p$ que no interseca a ningún segmento del mosaico y consideramos un punto de ella como origen de coordenadas, el rectángulo definido por los vértices extremos $(0, 0)$ y (q, p) y lados paralelos a los ejes tiene dimensiones finitas y por tanto, contiene a un número finito de vértices de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$. Deben existir, por tanto, dos vértices v y w que sean los más cercanos a la semirrecta uno a cada lado de ésta. Las paralelas a la semirrecta por cada uno de ellos son rayos de visibilidad. ■

1.3.1 Estudio algorítmico

Una vez caracterizados los grafos no localmente finitos, nos planteamos el problema de obtener un algoritmo capaz de estudiar la finitud o no finitud local de dicho grafo, es decir, un algoritmo que determine si es posible trazar un rayo de visibilidad.

Veamos como el Teorema 1.3.1. nos permite describir un algoritmo que detecta si es, o no, posible el trazado de dicho rayo de visibilidad.

Sean $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ los vértices de todos los segmentos de la baldosa $\mathcal{L}(\mathcal{S})$. Tomemos el vértice v_1 extremo del segmento s_1 de la baldosa y prolonguémoslo hasta convertirlo en una semirrecta r .

Pueden ocurrir uno de los siguientes casos:

- a) Los únicos segmentos de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(\mathcal{S})}$ que tienen intersección no vacía con r están situados sobre la propia r .

Es fácil comprobar entonces que la banda limitada por r y su paralela por el vértice s de \mathcal{G} más cercano a ella no contiene vértices de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(\mathcal{S})}$, por lo que puede trazarse una semirrecta que no corte a $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(\mathcal{S})}$, es decir, el grafo no es localmente finito.

- b) Existen segmentos de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(\mathcal{S})}$ que intersectan a r no transversalmente.

En este caso distinguiremos los siguientes apartados:

- b.1) Todas las intersecciones se producen un mismo lado de r en cuyo caso se trata de un rayo de visibilidad y el grafo no es localmente finito.

- b.2) Existen segmentos que intersectan a r a ambos lados.

En este caso procederemos como en la siguiente situación.

- c) Existe algún segmento que intersecta no transversalmente a r .

Sea éste el definido por los vértices que, haciendo un barrido en el sentido de las agujas del reloj (o sentido contrario según el caso), denotaremos por v_i y v_j . Tracemos el segmento que con origen v_1 y extremo en $v = v_1 + (q, p)$ (siguiente copia de v_1) donde p y q son enteros tales que p/q es la pendiente de la recta definida por v_1 y v_j (Figura 1.12).

Si este segmento s' intersecta *no transversalmente* a algún segmento de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(\mathcal{S})}$, estamos en la situación del apartado *a* y si lo intersecta *transversalmente* en la del apartado *b*, en cuyo caso trazariamos un nuevo

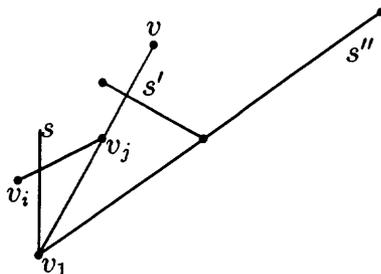


Figura 1.12: La manera de avanzar.

segmento s'' y repetiríamos el proceso hasta hacer un barrido de 180 grados. Repetiríamos después con otro barrido de 180 grados pero en sentido contrario.

Es de resaltar que el hecho de no hacer un barrido de 360 grados sino dos de 180, uno en cada sentido, se debe a que pudiera darse el caso de que en el barrido nos fuésemos acercando a una recta de acumulación y el algoritmo no fuera finito. Al hacer los dos barridos eliminamos esta posibilidad ya que no podemos acumularnos sobre una recta por encontrarnos siempre con una copia del segmento s_1 (Figura 1.13).

Si después de estos barridos no hemos encontrado un segmento $s^{(i)}$ que sólo sea intersectado a un sólo lado por segmentos de G el grafo es localmente finito.

También es de resaltar que podría darse el caso de que al ir avanzando en el barrido nos fuésemos acumulando a una pendiente irracional. Sabemos en este caso que a partir de un determinado momento todos los vértices visibles desde v son copias de un determinado v' . Para evitar el acumularnos a esta pendiente irracional y evitar así que el algoritmo no finalice, procederemos de la siguiente manera: cada vez que obtenemos un vértice v_j que nos produce un avance en el barrido, estudiamos si este vértice ve al v_j utilizado anteriormente. Si estos vértices se ven mutuamente, la semirrecta que partiendo de uno de ellos pasa por el otro es un rayo de visibilidad de pendiente racional, por lo que

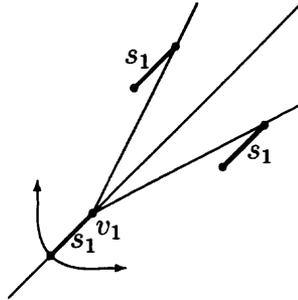


Figura 1.13: Dos barridos impiden acumularnos en una recta.

el grafo de visibilidad no es localmente finito. Si dos de estos vértices nunca se vieran, es que no nos estaríamos acumulando a una pendiente irracional.

Utilizando la función *visión* $vis(v, \alpha)$ descrita en [25] y que definimos a continuación, describiremos un algoritmo que estudia si el grafo de visibilidad G es localmente finito en un punto v .

Definimos la función *visión* $vis(p, \alpha)$ de p en la dirección α como sigue:

(i) $vis(p, \alpha) = \emptyset$, si el rayo r_α de origen p no intersecta a $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$, o si $cl(r_\alpha)$ contiene al segmento de extremo p (denotado por $seg(p)$), y

(ii) $vis(p, \alpha) = s$, si $s \neq seg(p)$ es el segmento en $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ más cercano a p y que intersecta al rayo r_α que emana de p .

Siempre que hablemos del ángulo que forma una semirrecta s , o un segmento, nos estaremos refiriendo al que forma con la parte positiva del eje OX . Lo denotaremos por $ang(s)$.

Se expone a continuación un algoritmo que, teniendo como entrada una determinada configuración de segmentos que no se intersectan sobre la superficie de un toro, estudia la finitud local de su grafo de visibilidad.

Algoritmo Vis-Torus

- Paso 1** $i \leftarrow i + 1$, $v \leftarrow v_i$, $\alpha_0 \leftarrow \text{ang}(\text{seg}(v))$, $\alpha \leftarrow \alpha_0$, $k \leftarrow 1$.
- Paso 2** $s \leftarrow \text{vis}(v, \alpha)$. Si $\alpha = \alpha_0$ y s es una copia de $\text{seg}(v)$ ir al Paso 12.
- Paso 3** Si $|\text{ang}(s) - \alpha| = \pi$, eliminar s y volver al Paso 2.
- Paso 4** Determinar el punto p de intersección de r_α con s . Si p es una copia de v , ir al Paso 12.
- \Rightarrow *Hacemos ahora, en los Pasos 5 y 6, dos barridos de 180 grados cada uno en un sentido, para evitar acumularnos en una recta si la pendiente de la que no interseca a $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(s)}$ es racional.*
- Paso 5** Si $k = 1$ sea e el extremo de s recorriendo éste en un barrido en sentido positivo desde el vértice v y denotemos por ve a la semirrecta que partiendo de v pasa por e . Si e es una copia de v ir al Paso 12.
- Paso 6** Si $k = -1$ sea e el extremo de s recorriendo éste en un barrido en sentido negativo desde el vértice v y denotemos por ve a la semirrecta que partiendo de v pasa por e . Si e es una copia de v ir al Paso 12.
- \Rightarrow *Con el siguiente Paso 7 evitamos acumularnos en una recta si la pendiente de la que no interseca a $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(s)}$ es irracional.*
- Paso 7** Si e es una copia del punto e anterior (la diferencia de sus coordenadas pertenece a \mathbf{Z}^2), comprobar si estas dos copias se ven. En este caso, ir al Paso 12.
- Paso 8** $\beta \leftarrow \text{ang}(ve)$. Si $\alpha = \beta$ eliminar p del segmento s e ir al Paso 2.
- Paso 9** Si $|\beta - \alpha_0| < \pi$ entonces $\alpha \leftarrow \beta$ e ir al Paso 2.
- Paso 10** Si $|\beta - \alpha_0| > \pi$ y $k = 1$ entonces $k \leftarrow -1$, $\alpha \leftarrow \alpha_0$ e ir al Paso 2.
- Paso 11** Si $i = 2n$, el grafo es localmente finito FIN. Si no, ir al Paso 1.

Paso 12 El grafo no es localmente finito FIN.

Para una mejor comprensión y seguimiento del algoritmo se dan a continuación algunos comentarios sobre los sucesivos pasos que lo componen.

El **Paso 1** inicializa las variables.

El **Paso 2** busca el primer segmento que intersecta al rayo que parte del vértice a estudiar. Además, nos dice que si el segmento s es una copia de $seg(v)$, situada en su misma dirección, el grafo no es localmente finito.

El **Paso 3** nos dice que si el segmento que intersecta al rayo está situado sobre él, lo eliminemos y busquemos el siguiente segmento que intersecta a dicho rayo.

El **Paso 4** calcula el punto en el que el rayo intersecta al primer segmento con que se encuentra en su camino. Si este punto es una copia del origen del rayo hemos encontrado un vértice que ve a una copia suya, por lo que el grafo no es localmente finito.

Los **Pasos 5 y 6** realizan los dos barridos de 180 grados, cada uno en un sentido, para evitar acumularnos en una recta si la pendiente de la que no intersecta a $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(s)}$ es racional. En cada uno de ellos, si el extremo del segmento que produce el avance es una copia del origen del rayo, el grafo no es localmente finito.

El **Paso 7** nos evita acumularnos en una recta si la pendiente de la que no intersecta a $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(s)}$ es irracional. Si encontramos un punto que ve a una copia suya el grafo no es localmente finito, pero en el vértice origen del rayo no sabemos como se comporta el grafo.

El **Paso 8** nos detecta que no se produce avance sin que hayamos encontrado dos copias de un mismo punto que se vean, es decir, la intersección del rayo con el segmento que se encuentra en su camino es no transversa. En este caso, eliminamos el punto p de intersección y buscamos el siguiente segmento que intersecte al rayo. Para ello volvemos al Paso 2.

El **Paso 9** nos hace avanzar siempre que el barrido, en cada uno de los sentidos, no haya finalizado los 180 grados.

El **Paso 10** detecta que ha terminado el barrido de 180 grados en un sentido y hace que se inicie el barrido de 180 grados en sentido contrario. Además, si detecta que ya se han realizado ambos barridos nos envía al Paso 11.

El **Paso 11** nos dice que el grafo es localmente finito si el algoritmo se ha realizado ya para los $2n$ vértices del grafo. En caso contrario nos envía al inicio del algoritmo y se comienza de nuevo pero con el vértice siguiente ($i + 1$).

El **Paso 12** es el paso al cual nos envía el algoritmo siempre que detecta que el grafo no es localmente finito.

Podemos, por tanto, enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.3.2. *El algoritmo Vis-Torus, encuentra si el grafo de visibilidad G del grafo periódico y no finito $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$, generado por traslaciones de vector entero de una baldosa $\mathcal{L}(S)$ definida en el cuadrado unidad $C = [0, 1] \times [0, 1]$ por un conjunto S de n segmentos de rectas que no se intersectan, es localmente finito.*

Si G no es localmente finito, el algoritmo Vis-Torus determina la pendiente racional de un rayo de visibilidad.

No es fácil realizar un estudio de la complejidad del algoritmo debido a que al estudiar una dirección de pendiente $m = p/q$, tendremos que buscar si la semirecta considerada es cortada por algún segmento de $\mathcal{M}_{\mathcal{L}(S)}$ anterior a la siguiente copia de v en dicha dirección, es decir: tendremos que estudiarlo en un rectángulo de dimensiones $p \times q$. Por ello, la complejidad dependerá no sólo de n sino que también lo hará de $p \times q$. Basta observar que p y q pueden

hacerse tan grandes como queramos para darnos cuenta de la complejidad del problema.

Obsérvese, en el ejemplo de la Figura 1.14, que basta con ajustar adecuadamente la separación entre los segmentos a y b para que la distancia entre las copias de v_1 y v_2 , visibles entre sí en el mosaico asociado a dicho toro plano, sea tan grande como queramos.

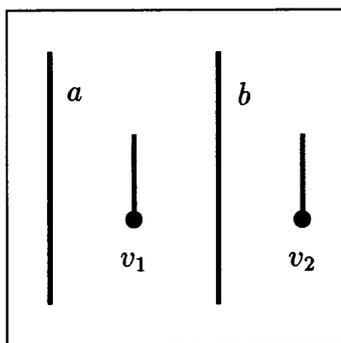


Figura 1.14: v_1 y v_2 pueden verse tan distantes como queramos.

Por tanto, sólo podemos decir que el Algoritmo Vis-torus es finito y resuelve nuestro problema en tiempo acorde a la complejidad de éste.

1.4 Conclusiones y problemas abiertos

Al iniciar el capítulo, lo hicimos con el fin de construir el grafo de visibilidad de una configuración de segmentos (obstáculos) situados sobre las superficies del cilindro o del toro, ya que dicho grafo de visibilidad es el que nos proporciona la información del camino más corto entre dos puntos. Vimos que, para ello, se presentaban dos problemas fundamentales, uno de ellos sólo se presenta en el caso del toro y se evita utilizando las hélices en vez de las geodésicas. El

otro, el de que dos puntos no sólo definen una geodésica sino toda una familia no finita de ellas, es el que nos ha conducido a lo largo del capítulo a dar algoritmos que, en tiempo polinomial en el caso del cilindro y acorde con la dificultad del problema en el caso del toro, detecten si el grafo de visibilidad es localmente finito.

Evidentemente esto no resuelve el problema de la construcción del grafo de visibilidad que era la meta a conseguir. Sin embargo, y aun cuando con pequeñas modificaciones en los algoritmos que se han dado podría construirse dicho grafo, no se ha insistido en tratar de introducir dichas modificaciones ya que, incluso en el supuesto de tener un algoritmo que representase dicho grafo, tendríamos que asegurarnos de que el arco de hélice o de geodésica que el algoritmo dibuje entre dos puntos sea el más corto de todos los arcos de geodésica que puedan trazarse entre ellos.

Por tanto se tiene como un problema abierto el de la búsqueda del arco de hélice (o geodésica) más corto entre los extremos de dos segmentos de la configuración dada.

Además de éste problema, podemos enunciar muchos otros entre los que destacamos los siguientes:

- Determinar cuándo un vértice puede ver a otro en el caso de que el grafo no sea localmente finito. Es decir, definir de alguna manera finita el grafo de visibilidad cuando éste no sea localmente finito.
- Determinar en G todos los caminos de un vértice a otro.
- Mejorar los algoritmos, incluso en el caso localmente finito, para que sólo encuentren el camino más corto entre dos vértices.
- Dar una cota del algoritmo Vis-torus en función del número de segmentos de la baldosa $\mathcal{L}(S)$.
- La paralelización ..., etc.

Capítulo 2

VHR-visibilidad

Como ya se comentó en el Capítulo 0, el problema de la caracterización de los grafos bar-representables está resuelto en el plano y parece lógico tratar de generalizarlo a espacios n -dimensionales, es decir, para rectángulos paralelos en \mathbf{R}^3 y, en general, para hiper-rectángulos paralelos de \mathbf{R}^n con ε -visibilidad. A este problema, que denominaremos, de manera genérica, *VHR-visibilidad* o *visibilidad de hiper-rectángulos* se le dedica el presente capítulo.

2.1 Antecedentes

Los primeros trabajos encaminados a la generalización del estudio de la bar-visibilidad, para espacios de dimensión superior a dos, fueron realizados por Bose et al. [10] (1994) para rectángulos paralelos en \mathbf{R}^3 . Los citados autores estudian *Visibilidad de Rectángulos* en \mathbf{R}^3 , por lo que denominan el problema como *VR-visibilidad*. En este trabajo denominaremos al problema general de la visibilidad de barras en \mathbf{R}^2 , de rectángulos en \mathbf{R}^3 o de hiper-rectángulos en \mathbf{R}^n como VHR-visibilidad, ya que no son sino sucesivas generalizaciones de un

mismo problema. La Figura 2.1 nos muestra la VR-representación de un grafo en \mathbf{R}^3 .

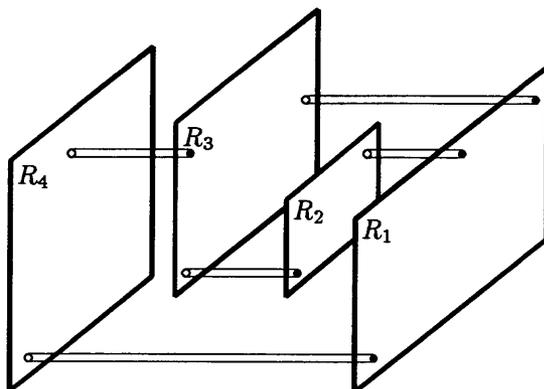


Figura 2.1: VR-representación de un grafo en \mathbf{R}^3 .

Dada en \mathbf{R}^3 una configuración \mathcal{C} de rectángulos paralelos diremos que dos rectángulos R_i y R_j de \mathcal{C} son ε -visibles si existe un cilindro, de radio $\varepsilon > 0$ y eje ortogonal a los rectángulos de la configuración, que partiendo de R_i llega hasta R_j sin intersectar a ningún otro rectángulo de \mathcal{C} . Esta definición puede ser extendida para el caso general de \mathbf{R}^n sin más que generalizar el concepto de cilindro en \mathbf{R}^n .

Aunque no existe, como en el caso plano, una caracterización de los grafos VR-representables en \mathbf{R}^3 , en 1994 Bose et al. [10] obtuvieron importantes resultados para algunos tipos particulares de grafos. Así, para grafos planos cabe destacar el que siempre admitan una VR-representación en \mathbf{R}^3 .

En cuanto a los grafos completos es conocido (Teorema 0.3.1.) que el mayor valor de n para el que K_n es bar-representable en \mathbf{R}^2 es 4, ya que K_5 no es plano y, por tanto, tampoco es bar-representable en \mathbf{R}^2 . En el artículo de Bose et al. [10] se prueba que cualquier grafo completo K_n con $n \leq 20$ es VR-representable en \mathbf{R}^3 y que si $n \geq 103$ entonces K_n no lo es. Esta última cota ha

sido recientemente mejorada por Fekete, Houle y Whitesides [30] reduciéndose de 103 a 56.

En lo concerniente a los grafos bipartitos completos $K_{m,n}$ se sabe, también por los mismos autores, que son siempre VR-representables en \mathbf{R}^3 . Obsérvese con este resultado que $K_{3,3}$, que no es bar-representable en \mathbf{R}^2 , por no ser plano, sí es VR-representable en \mathbf{R}^3 .

Dado un grafo bipartito $G = (V_1 \cup V_2, A)$, se denomina *emparejamiento* a un subconjunto no vacío de A con las propiedades de que no hay dos aristas que incidan en un mismo vértice. Si el emparejamiento contiene aristas incidentes en *todos* los vértices de V_1 se dice que se trata de un *emparejamiento completo*. La Figura 2.2 nos muestra el grafo $K_{6,6} - M$ es decir, el grafo resultante de eliminar el emparejamiento completo $(1 - f, 2 - e, 3 - d, 4 - c, 5 - b, 6 - a)$ del grafo bipartito completo $K_{6,6}$.

Aunque se conoce [10] que todo grafo bipartito completo es VR-representable en \mathbf{R}^3 , Bose et al. conjeturan que $K_{6,6} - M$ no lo es.

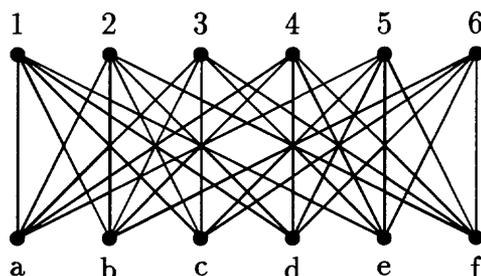


Figura 2.2: $K_{6,6} - M$.

Es conocido que mediante la representación topológica usual cualquier grafo es representable (admite una inmersión) en alguna superficie de género n . Al mínimo valor que pueda tomar n para que dicho grafo admita una inmersión sobre ella es a lo que se denomina *género del grafo*.

Desde sus inicios, la teoría de la visibilidad ha tratado de estudiar si cualquier grafo admite una representación de visibilidad al igual que la admite de forma topológica. En este sentido se encaminan los trabajos que venimos comentando sobre VR-visibilidad de Bose et al. [10] así como otros muchos como puedan ser, por ejemplo los desarrollados sobre Boxicidad, Grafos de intersección [4, 9, 43], etc. Los resultados que se exponen a continuación van dirigidos en esta línea.

Un grafo G diremos que es *VHR-representable* en \mathbf{R}^n si existe una configuración de hiper-rectángulos paralelos en \mathbf{R}^n cuyo grafo de visibilidad (considerando la generalización a \mathbf{R}^n de la ε -visibilidad) es isomorfo a G . Al ser ésta una generalización de la bar-visibilidad y la VR-visibilidad, a partir de ahora se hablará en general de la VHR-visibilidad y sólo ocasionalmente para los casos particulares de \mathbf{R}^2 o \mathbf{R}^3 hablaremos de bar-visibilidad o VR-visibilidad respectivamente.

Hasta el momento, ninguna de las representaciones derivadas de una generalización directa de los resultados obtenidos por Wismath, Tamassia y Tollis o Bose et al. han conseguido representar todo tipo de grafo. Sin embargo, con la definición dada anteriormente de VHR-visibilidad seremos capaces de representar cualquier grafo en \mathbf{R}^n . Ello motiva el hecho de que se dedique el resto del capítulo a estudiar y caracterizar distintas familias de grafos distinguidos.

En la siguiente sección probaremos el resultado comentado anteriormente, es decir: dado cualquier grafo, existe un entero n para el cual es VHR-representable en \mathbf{R}^n . En otras palabras, que cualquier grafo admite una representación de visibilidad.

2.2 Índice de representación.

Si observamos la Figura 2.3 podremos ver una configuración de barras cuyo grafo de ε -visibilidad es K_4 , es decir, la Figura 2.3 prueba que K_4 es VHR-

representable en \mathbf{R}^2 aunque, por el Teorema 0.3.1. (de caracterización de grafos bar-representables en el plano), sabemos que K_5 no lo es, por no ser plano.

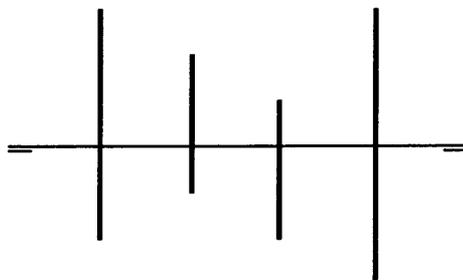


Figura 2.3: K_4 en \mathbf{R}^2 .

Para dicha configuración definimos los segmentos dando la lista

$$[-2, 3] \times \{1\}, [-1, 2] \times \{2\}, [-2, 1] \times \{3\}, [-3, 3] \times \{4\}.$$

En general, definiremos el hiper-rectángulo de \mathbf{R}^n situado en la posición i -ésima mediante el producto cartesiano de $n - 1$ intervalos cerrados $[a_i, b_i]$ por $\{i\}$. En el ejemplo de la Figura 2.1 la lista sería:

$$[-2, 2] \times [-2, 1] \times \{1\}, [-1, 1] \times [-1, 1] \times \{2\},$$

$$[-1, 2] \times [-1, 2] \times \{3\}, [-2, 1] \times [-2, 2] \times \{4\}.$$

como puede verse en la Figura 2.4.

Lema 2.2.1. *Todo grafo VHR-representable en \mathbf{R}^n lo es también en \mathbf{R}^{n+1} .*

DEMOSTRACIÓN: Sea $G_{\mathcal{R}}$ un grafo y \mathcal{R} la configuración de hiper-rectángulos asociada a una VHR-representación de $G_{\mathcal{R}}$ en \mathbf{R}^n , donde

$$R_k = [a_{k1}, b_{k1}] \times [a_{k2}, b_{k2}] \times \cdots \times [a_{kn-1}, b_{kn-1}] \times \{k\} = I_{k1} \times I_{k2} \times \cdots \times I_{kn-1} \times \{k\}$$

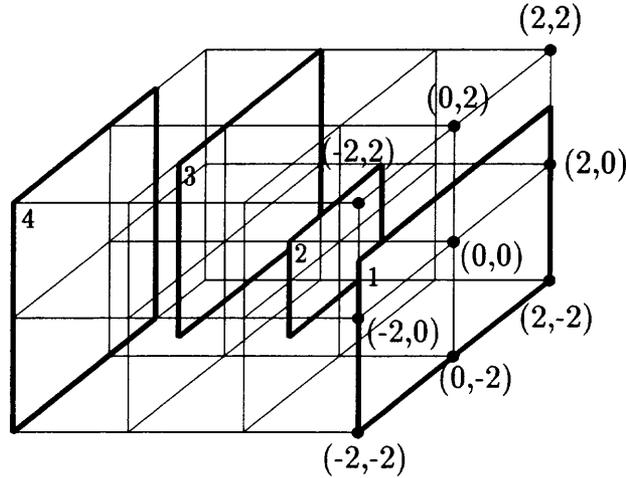


Figura 2.4: Midiendo los rectángulos del grafo de la Figura 2.1.

para $1 \leq k \leq m$.

Es fácil observar que la aplicación f que asocia a cada hiper-rectángulo R_k de la configuración \mathcal{R} el hiper-rectángulo R_k^* de la configuración $\mathcal{R}^* = \{R_1^*, R_2^*, \dots, R_m^*\}$ de hiper-rectángulos de \mathbf{R}^{n+1} definido por

$$\mathbf{R}_k^* = I_{k1} \times I_{k2} \times \dots \times I_{kn-1} \times [0, 1] \times \{k\} \quad 1 \leq k \leq m.$$

es una biyección entre los vértices de los grafos $G_{\mathcal{R}}$ y $G_{\mathcal{R}^*}$ (grafo que representa la configuración \mathcal{R}^*). También es fácil observar que cualquier arista $\{p_i, p_j\}$ de $G_{\mathcal{R}}$ se corresponde con la arista $\{p_i^*, p_j^*\}$ de $G_{\mathcal{R}^*}$. Veamos ahora que cualquier arista $\{p_i^*, p_j^*\}$ de $G_{\mathcal{R}^*}$ se corresponde con la arista $\{p_i, p_j\}$ de $G_{\mathcal{R}}$.

Por ser $\{p_i^*, p_j^*\}$ una arista de $G_{\mathcal{R}^*}$, existe un cilindro C^* en $\mathbf{R}^{n+1/2}$ de radio $\varepsilon > 0$ que se apoya en los hiper-rectángulos R_i^* y R_j^* de la configuración \mathcal{R}^* sin intersectar a ningún otro, es decir, ningún otro hiper-rectángulo obstaculiza la trayectoria de C^* . Considerando las proyecciones en \mathbf{R}^n de R_i^* y R_j^* y del cilindro C^* se obtiene un nuevo cilindro C en \mathbf{R}^n de radio ε que se apoya en R_i y en R_j sin ser obstaculizado por ningún otro hiper-rectángulo de \mathcal{R} , con lo que $\{p_i, p_j\}$ es una arista del grafo $G_{\mathcal{R}}$.

Se tiene entonces que los grafos $G_{\mathcal{R}}$ y $G_{\mathcal{R}^*}$ son isomorfos y, por tanto, podemos asegurar que $G_{\mathcal{R}}$ también es VHR-representable en \mathbf{R}^{n+1} . ■

Basándonos en el resultado anterior podemos probar el siguiente teorema:

Teorema 2.2.1. *Dado un grafo cualquiera G , existe un entero positivo n para el cual G es VHR-representable en \mathbf{R}^n .*

DEMOSTRACIÓN: Haremos la demostración por inducción sobre el número k de vértices del grafo G .

- a) Es evidente que el teorema es cierto para $k = 1$.
- b) Supongamos el teorema cierto para cualquier grafo de k vértices y probémoslo para un grafo G de $k + 1$ vértices.

Sea $G = \{V \cup \{p\}, A \cup \{\{p, p_1\}, \dots, \{p, p_{n_p}\}\}\}$ y sea $G = (V, A)$ el grafo resultante de eliminar de G el vértice p .

Por hipótesis de inducción sabemos que G admite una VHR-representación en \mathbf{R}^n para algún valor de n . Sea entonces $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_k\}$ una configuración de hiper-rectángulos de \mathbf{R}^n cuyo grafo de VHR-visibilidad sea G .

Establezcamos en \mathcal{R} la partición:

$$\mathcal{R} = \{R_{t_1}, R_{t_2}, \dots, R_{t_{n_p}}\} \cup \{Q_{u_1}, Q_{u_2}, \dots, Q_{u_{k-n_p}}\}$$

en la que los hiper-rectángulos $R_{t_i} = I_{t_i,1} \times \dots \times I_{t_i,n-1} \times \{t_i\}$ ($1 \leq i \leq n_p$) corresponden a los que definen los vértices p_{t_i} adyacentes a p en G .

Según el Lema 2.2.1., la configuración

$$\mathcal{R}^* = \{R_{t_1}^*, R_{t_2}^*, \dots, R_{t_{n_p}}^*\} \cup \{Q_{u_1}^*, Q_{u_2}^*, \dots, Q_{u_{k-n_p}}^*\}$$

definida por

$$Q_{u_j}^* = I_{u_j,1} \times \dots \times I_{u_j,n-1} \times \overbrace{[-1, 0] \times \dots \times [-1, 0]}^{n_p} \times \{u_j\}$$

$$\begin{aligned}
R_{t_1}^* &= I_{t_1,1} \times \cdots \times I_{t_1,n-1} \times \overbrace{[-1,1] \times \cdots \times [-1,0] \times \cdots \times [-1,0]}^{n_p} \times \{t_1\} \\
&\vdots \\
R_{t_s}^* &= I_{t_s,1} \times \cdots \times I_{t_s,n-1} \times \overbrace{[-1,0] \times \cdots \times [-1,1] \times \cdots \times [-1,0]}^{n_p} \times \{t_s\} \\
&\vdots \\
R_{t_{n_p}}^* &= I_{t_{n_p},1} \times \cdots \times I_{t_{n_p},n-1} \times \overbrace{[-1,0] \times \cdots \times [-1,0] \times \cdots \times [-1,1]}^{n_p} \times \{t_{n_p}\}
\end{aligned}$$

representa al mismo grafo G , y dado que el hiper-rectángulo R definido por

$$R = I_1 \times \cdots \times I_{n-1} \times \overbrace{[0,1] \times \cdots \times [0,1] \times \cdots \times [0,1]}^{n_p} \times \{k+1\}$$

en el que $I_i = [a_i, b_i]$ con $a_i = \min_j \{x : x \in I_{j,i}\}$ y $b_i = \max_j \{x : x \in I_{j,i}\}$ ve a los $R_{t_i}^*$ pero no a los $Q_{u_j}^*$, la configuración

$$\mathcal{R}^* = \{R_{t_1}^*, R_{t_2}^*, \dots, R_{t_{n_p}}^*\} \cup \{Q_{u_1}^*, Q_{u_2}^*, \dots, Q_{u_{k-n_p}}^*\} \cup R$$

está asociada a una VHR-representación de G en la que el hiper-rectángulo R representa al vértice p .

Hemos construido así una configuración \mathcal{R}^* de $k+1$ hiper-rectángulos cuyo grafo de VHR-visibilidad es G es decir, G es VHR-representable en \mathbf{R}^n para algún valor de n . ■

Una vez probado que la VHR-visibilidad generaliza los métodos de representación mediante visibilidad de Tamassia y Tollis, Wismath y Bose et al. a cualquier dimensión, surge de manera natural el problema de la determinación del menor valor que puede tomar el número $n \in \mathbf{N}$ para que un grafo concreto G sea VHR-representable en \mathbf{R}^n . A este valor lo denominaremos *índice de representación* de G y lo denotaremos por $RI(G)$.

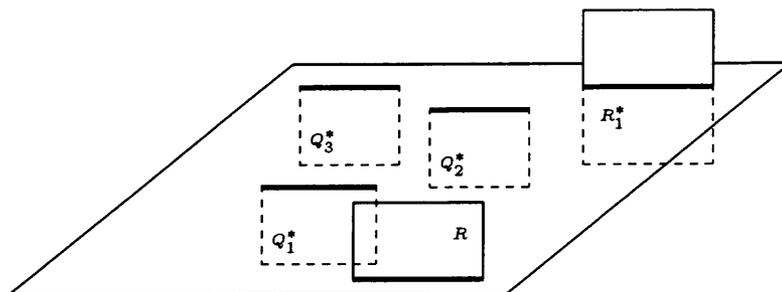


Figura 2.5: Añadir un vértice a una configuración dada.

Es obvia la enorme complejidad del problema, por lo que nos limitaremos, evidentemente, a dar los primeros pasos en este sentido. Así pues, trataremos de estudiar y de fijar o, al menos, de dar cotas para el índice de representación de algunas familias de grafos distinguidos.

Si un grafo admite una VHR-representación en \mathbf{R}^n de forma que todos los hiper-rectángulos de su configuración son de la forma

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{n-2}, b_{n-2}] \times [0, b_{n-1}] \times \{a_n\}$$

es fácil observar que no se utiliza todo el espacio \mathbf{R}^n sino sólo el semiespacio definido por $x_n \geq 0$, y que todos los hiper-rectángulos se encuentran apoyados en el hiperplano de ecuación $x_n = 0$. En este caso se dice que el grafo tiene índice de representación $(n - 1) + 1/2$. Obsérvese que los grafos de índice de representación $1+1/2$ no son los mismos que los de índice 2, así por ejemplo, K_4 tiene índice 2 mientras que K_3 tiene índice $1+1/2$ como puede observarse en la Figura 2.6.

Puede verse, en este caso, que las barras vienen definidas por la lista

$$[0, 2] \times \{1\}, [0, 1] \times \{2\}, [0, 2] \times \{3\}$$

en la que todos los intervalos son de la forma $[0, b]$.



Figura 2.6: K_3 en $\mathbf{R}^{1+1/2}$.

Esta nueva definición puede darnos una mejor visión del problema y nos permitirá obtener mejores resultados. Existen, además, razones adicionales para considerar este concepto más general de índice de representación. Obsérvese, por ejemplo, que si un grafo de n vértices tiene índice de representación $1+1/2$ puede asociarse a una n -upla (a_1, a_2, \dots, a_n) de números enteros de manera que cada vértice v_i del grafo represente a un número a_i de dicha n -upla y si dos vértices v_i y v_j son adyacentes, todos los números a_k con $i < k < j$ son estrictamente menores que a_i y que a_j .

2.3 Grafos VHR-representables en $\mathbf{R}^{1+1/2}$.

Antes de establecer una caracterización para los grafos de índice de representación $1 + 1/2$ daremos algunas definiciones previas.

Sea G un grafo y W un conjunto de vértices de G . Se dice que G es W -periplano si existe una inmersión plana de G que deja a todos los vértices de W en la cara externa. Este concepto fue introducido por Oubiña y Zuchello [56] y los mismos autores dan un algoritmo que en tiempo lineal determina si un grafo es W -periplano para cualquier conjunto W .

Dado un grafo G se define *camino hamiltoniano* como aquel camino simple, si existe, que recorre todos los vértices de G . Un grafo que contiene un camino hamiltoniano (un ciclo o bien un camino abierto) se dice que es *hamiltoniano*.

Decimos que un grafo G es *peri-hamiltoniano* si contiene un camino hamiltoniano de tal forma que existe una inmersión plana de G con todas las *aristas* de dicho camino situadas en la cara externa. Esta definición nos va a permitir caracterizar a los grafos de índice de representación $1+1/2$.

Obsérvese que existen grafos periplanos y hamiltonianos y que, sin embargo, no son peri-hamiltonianos. Basta observar, para ello, el grafo de la Figura 2.7.

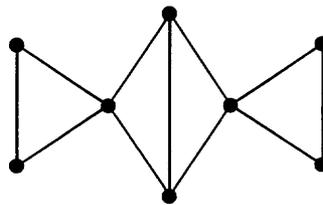


Figura 2.7: Un grafo periplano y hamiltoniano pero no peri-hamiltoniano

Teorema 2.3.1. *Un grafo tiene índice de representación $1 + 1/2$ si, y sólo si, es peri-hamiltoniano.*

DEMOSTRACIÓN: Partamos de una VHR-representación de G en $\mathbf{R}^{1+1/2}$. Situemos los vértices de G en el punto más alto de cada barra vertical y tracemos las aristas desde un vértice a los posteriores adyacentes a él desplazándonos junto a la barra hasta el punto más bajo de ésta desde el que se vé a su barra adyacente y subiendo a lo largo de esta nueva barra hasta su extremo superior, donde está situado el vértice correspondiente (ver Figura 2.8).

Es fácil observar que el grafo es peri-hamiltoniano.

Para demostrar la suficiencia distinguiremos dos casos, según que el grafo conexo G sea, o no, 2-conexo.

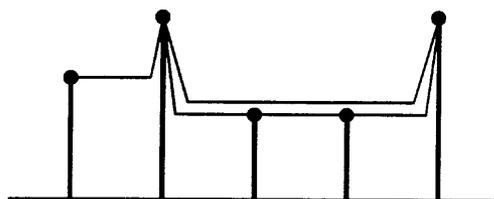


Figura 2.8: Trazado de las aristas en $\mathbf{R}^{1+1/2}$.

En el primero de los casos, es decir, si es 2-conexo, G es un polígono de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ (donde ésta es una de las dos ordenaciones posibles de los vértices de un polígono) con algunas diagonales que no se intersectan.

Representamos el vértice v_i mediante la barra $[0, d_i] \times \{i\}$, donde $d_i - 1$ para $2 \leq i \leq n - 1$ viene dado por el número total de diagonales menos el número de diagonales $\{v_l, v_k\}$ con $l < i < k$, y $d_1 = d_n$ es el número total de diagonales aumentado en dos unidades.

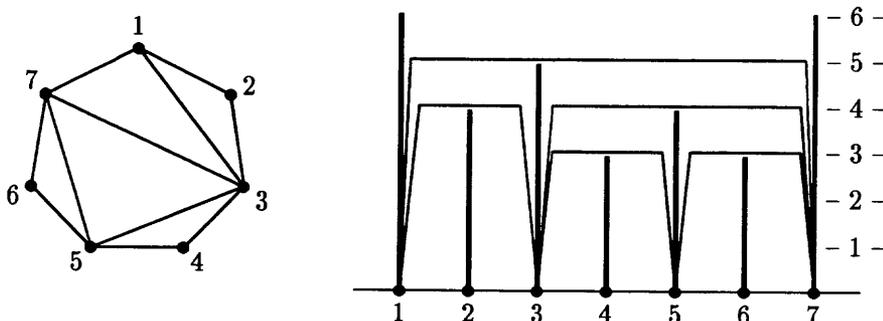


Figura 2.9: Construcción de una VHR-representación en $\mathbf{R}^{1+1/2}$.

Obsérvese que cada diagonal del tipo $\{v_l, v_k\}$ con $l < i < k$ representa una visibilidad entre dos vertices separados por la barra i -ésima, de ahí que reste una unidad a la altura de dicha barra. Dado que el grafo puede no tener diagonales, es decir, tratarse de un ciclo, y para evitar la posibilidad de que

todas las barras interiores tuviesen altura cero, es por lo que mediante este proceso medimos la altura de $d_i - 1$ y no la de d_i . Por último hay que tener en cuenta que, como las barras primera y última son siempre visibles entre sí, es por lo que asignamos a d_1 y d_n una altura igual al número total de diagonales aumentado en dos unidades.

En el segundo caso, si G es conexo pero no 2-conexo, en cada bloque existen, a lo más, dos puntos de corte, situados en primera y última posición del bloque. Ordenando los bloques obtenemos una ordenación de todos los vértices del grafo. Sólo nos queda ahora representar cada bloque de la forma descrita para el caso anterior, pero dándole la misma altura (la mayor de todas) a las barras que representan los puntos de corte. ■

Corolario 2.3.1. *Es posible determinar si el índice de representación de un grafo es $1+1/2$ en tiempo lineal.*

DEMOSTRACIÓN: Basta con observar que introduciendo pequeñas modificaciones en el algoritmo de Mitchell [52] para determinar si un grafo es periplano, podemos determinar en tiempo lineal si un grafo es peri-hamiltoniano y, por tanto, si su índice de representación es $1+1/2$. ■

Para valores del índice de representación superiores a 2 sólo existen resultados parciales y no un teorema de caracterización general como ocurre en los casos $1 + 1/2$ (Teorema 2.3.1.) y 2 (Teorema 0.3.1. de Tamassia y Tollis).

2.4 Índice de representación de grafos planos.

Por el Teorema de caracterización de grafos bar-representables en el plano de Tamassia y Tollis, conocemos que cualquier grafo plano cuyos puntos de

corte se encuentren en su cara externa (puntos de corte-periplano) es bar-representable. Es decir, si G es un grafo *puntos de corte-periplano* entonces $RI(G) \leq 2$. Los grafos planos minimales no bar-representables son, por tanto, los cuatro grafos planos minimales de Halin [36] representados en la Figura 2.10.

Es también conocido el resultado de Bose et al [10] de que todo grafo plano es VR-representable en \mathbf{R}^3 .

Por otra parte sabemos que los grafos planos minimales de Halin tienen índice de representación $2+1/2$ como prueba la Figura 2.10 en la que se representan las proyecciones sobre el plano $x_3 = 0$ de los rectángulos de las configuraciones y en la que se conoce que todos los rectángulos tienen altura 1 excepto los que se indica, a su derecha, que tienen altura 2. Es, por tanto, un problema abierto el determinar si existen grafos planos cuyo índice de representación sea 3.

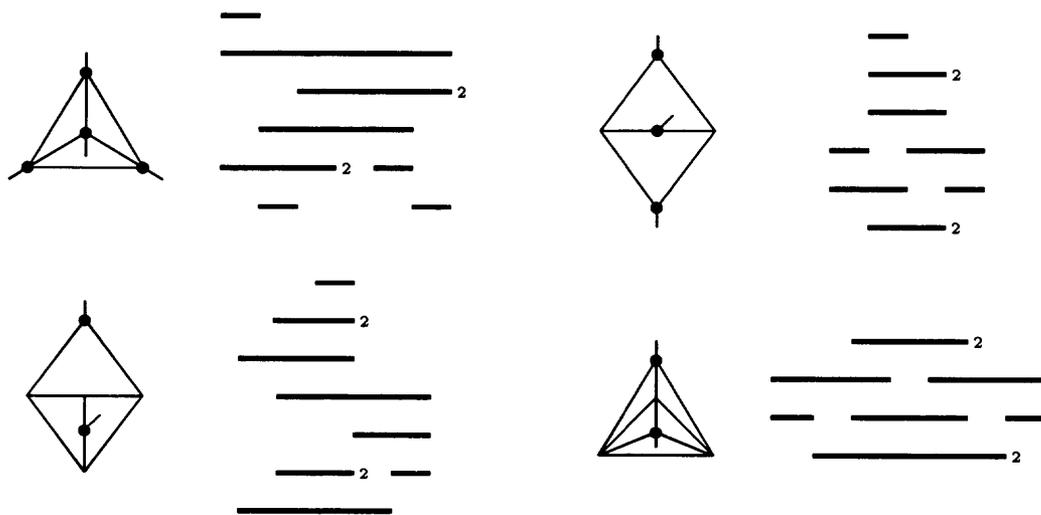


Figura 2.10: VR-representaciones de los grafos de Halin.

Podemos entonces escribir la siguiente tabla que nos resume los resultados

obtenidos para los grafos planos:

<i>Tipo de grafo G</i>	$RI(G)$
Peri-hamiltoniano	$1+1/2$
Puntos de corte-periplano	2
Planos	≤ 3

Tabla 2.1: Índice de representación de los grafos planos.

2.5 Índice de representación de grafos completos.

Una de las familias que no podemos dejar de estudiar, debido a su importancia en Teoría de Grafos y a la especial dedicación que ha merecido por parte de quienes han estudiado diferentes representaciones de visibilidad es la de los grafos completos, a la cual se dedica esta sección.

Hemos visto que en dimensiones $1 + 1/2$ y 2 son VHR-representables los grafos completos K_3 y K_4 respectivamente. En la presente sección probaremos que, para $n > 2$, el grafo completo $K_{5,4n-2}$ es VHR-representable en \mathbf{R}^n .

Teorema 2.5.1. *El grafo completo K_{10} es VHR-representable en $\mathbf{R}^{2+1/2}$.*

DEMOSTRACIÓN: La Figura 2.11 nos presenta una configuración de 10 rectángulos (apoyados sobre un plano) que prueba el teorema.

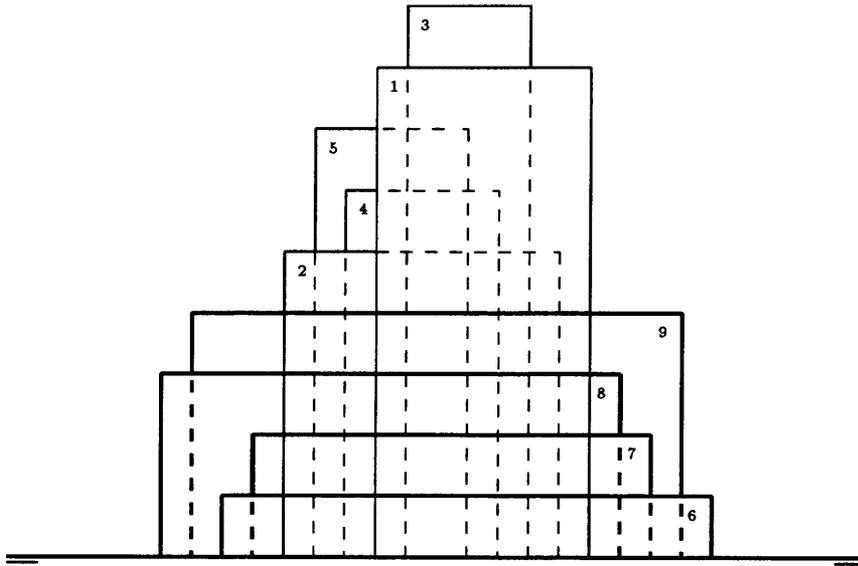


Figura 2.11: K_{10} en $\mathbf{R}^{2+1/2}$.

Estos diez rectángulos están estructurados como una configuración que produce un K_5 (los numerados del 1 al 5) escalonados por la derecha y otra configuración que produce un K_4 (los numerados del 6 al 9) escalonados hacia arriba, de tal forma que al enfrentarlos producen un K_9 . Basta observar que los nueve rectángulos son visibles desde el frente por un nuevo rectángulo de dimensiones adecuadas situado delante del primero, para ver que los diez configuran un K_{10} en $\mathbf{R}^{2+1/2}$. ■

Lema 2.5.1. (Lema de duplicación) Si K_m es VHR-representable en \mathbf{R}^t , K_{2m} lo es en $\mathbf{R}^{t+1/2}$ donde $2t$ es un entero no inferior a 4.

DEMOSTRACIÓN: La demostración la realizaremos en dos pasos. En primer lugar veremos que se puede duplicar el número de hiper-rectángulos que pueden

colocarse, visibles dos a dos, al pasar de una dimensión $(n-1)+1/2$ a dimensión n siendo n un número entero y, en segundo lugar, que también puede duplicarse dicho número al pasar de una dimensión entera n a dimensión $n+1/2$.

a) **Paso de dimensión $(n-1)+1/2$ a dimensión n**

Si tenemos m hiper-rectángulos (apoyados sobre el hiperplano $x_n = 0$) y los prolongamos en la dirección del semiespacio opuesto ($x_n < 0$) en forma escalonada, existe una banda en la que se superponen los m hiper-rectángulos (de no ser así no podrían ser mutuamente visibles), en esta banda y por la nueva prolongación todos están en forma escalonada (Figura 2.12). La misma figura nos muestra como enfrentar dos configuraciones iguales para duplicar el número de hiper-rectángulos al pasar de dimensión $n+1/2$ a dimensión $n+1$.

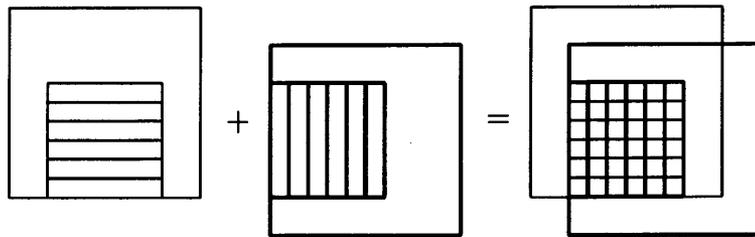


Figura 2.12: Paso de $\mathbf{R}^{n+1/2}$ a \mathbf{R}^{n+1} .

En otras palabras, si tenemos una colección de m hiper-rectángulos en un semiespacio de \mathbf{R}^n ($\mathbf{R}^{(n-1)+1/2}$) representando a K_m y tales que los últimos factores de la definición de cada uno de ellos son de la forma $[0, b_i] \times \{i\}$, consideremos la nueva configuración que se obtiene sustituyendo estos últimos factores de cada hiper-rectángulo por $[-i, b_i] \times \{-i\}$. Podemos, entonces, dar una representación de K_{2m} enfrentando la configuración de partida a la que se obtiene, mediante un giro de 90 grados, de la obtenida a través de los cambios anteriores.

b) **Paso de dimensión n a dimensión $n + 1/2$**

Supongamos que se dispone de una configuración de m hiper-rectángulos visibles dos a dos en \mathbf{R}^n . Debe existir, necesariamente, una banda que los atraviese a todos. Tomando como referencia una variedad de dimensión $n - 1$ ortogonal a todos los hiper-rectángulos y contenida en dicha banda *doblamos* \mathbf{R}^n en ángulo recto y las coordenadas de cada hiper-rectángulo situadas en ambos semiespacios ortogonales nos definen unos nuevos hiper-rectángulos n -dimensionales en una mitad de $\mathbf{R}^{n+1/2}$. Podemos prolongar ahora cada nuevo hiper-rectángulo por la otra mitad de $\mathbf{R}^{n+1/2}$ de forma escalonada, de tal manera que se consiga una franja donde aparezcan todos los hiper-rectángulos escalonados verticalmente.

Si tomamos ahora los m hiper-rectángulos de \mathbf{R}^n y le añadimos la nueva dimensión (para pasar a un semiespacio de \mathbf{R}^{n+1}) de forma escalonada, conseguimos una nueva banda donde aparecen todos ellos escalonados horizontalmente. Enfrentando ambas configuraciones se obtiene otra constituida por $2m$ hiper-rectángulos mutuamente visibles.

Precisando este razonamiento podemos observar que el hecho de la existencia de un hiperplano que intersecta ortogonalmente a todos los hiper-rectángulos de la configuración se traduce en que la definición del i -ésimo hiper-rectángulo finaliza con el producto $[a_i, b_i] \times \{a_i\}$ con $a_i < 0 < b_i$. Sustituyendo, entonces, estos productos por $[-i, b_i] \times [0, -a_i] \times \{a_i\}$ tenemos m hiper-rectángulos en una mitad de \mathbf{R}^{n+1} representando a K_m y tales que los últimos intervalos de las definiciones nos garantizan un escalonamiento en las alturas de los respectivos hiper-rectángulos, es decir, nos garantizan que todos ellos son visibles desde el frente.

Cambiando ahora $[a_i, b_i] \times \{a_i\}$ por $[a_i, b_i] \times [0, i] \times \{-i\}$ y enfrentándola a la configuración anterior, obtenemos una representación de K_{2m} en \mathbf{R}^{n+1} .

Podemos asegurar entonces que al avanzar de media en media dimensión se duplica el número de hiper-rectángulos mutuamente visibles que pueden colocarse. ■

Veamos con un ejemplo el paso de \mathbf{R}^2 a $\mathbf{R}^{2+1/2}$. Partimos de la configuración de cuatro segmentos que producen un K_4 en \mathbf{R}^2 y buscamos una recta que atraviese a los cuatro segmentos (Figura 2.13 (a)).

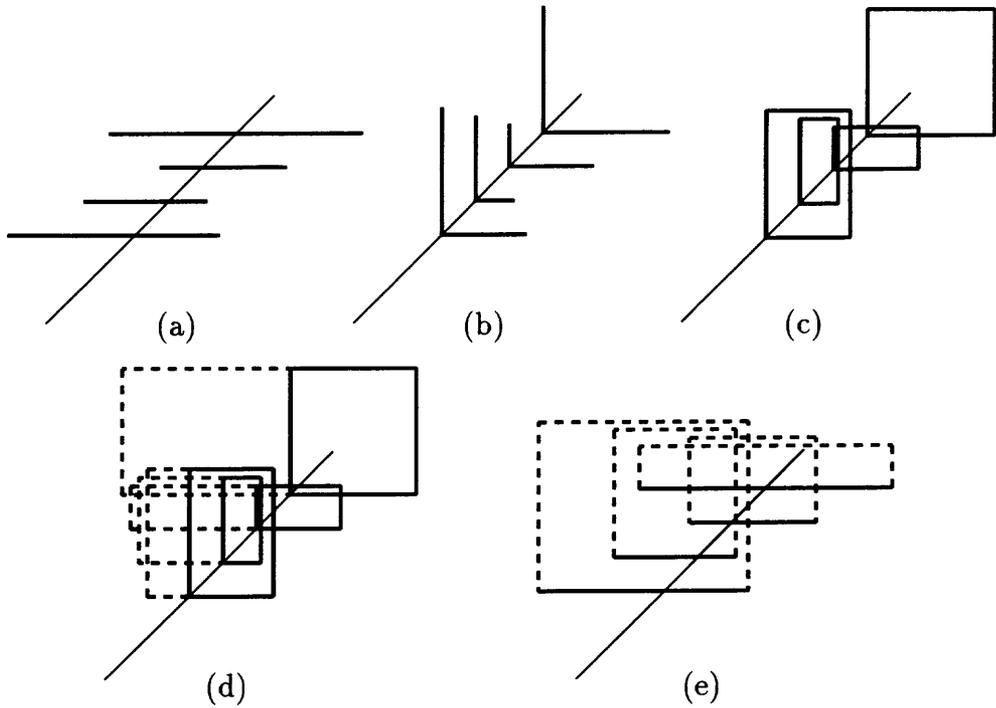


Figura 2.13: Paso de \mathbf{R}^2 a $\mathbf{R}^{2+1/2}$.

Levantamos, ortogonalmente al plano de partida, el semiplano izquierdo (Figura 2.13 (b)) y construimos los rectángulos que definen los segmentos que quedaban a ambos lados de la recta por la que doblamos (Figura 2.13 (c)). Se han construido así cuatro rectángulos visibles dos a dos pero sólo en un cuadrante de \mathbf{R}^3 . Prolongamos ahora hacia la izquierda y de forma escalonada dichos rectángulos para obtener en $\mathbf{R}^{2+1/2}$ una configuración que contiene una banda en la que se encuentran los cuatro rectángulos de forma escalonada (Figura 2.13 (d)).

Construimos ahora otra configuración de cuatro rectángulos en $\mathbf{R}^{2+1/2}$ levantando los segmentos de la configuración de \mathbf{R}^2 en forma escalonada hacia arriba. Conseguimos entonces una banda donde aparecen los cuatro rectángulos escalonados horizontalmente (Figura 2.13 (e)). Basta enfrenar ahora ambas configuraciones para obtener otra de ocho rectángulos en $\mathbf{R}^{2+1/2}$ que constituyen un K_8 .

Prolongando escalonadamente hacia abajo los ocho rectángulos y enfrenando dos configuraciones de este tipo como indica la Figura 2.12, se consigue K_{16} en \mathbf{R}^3 .

El Lema 2.5.1. (lema de duplicación) nos va a permitir obtener cotas para el índice de representación de los grafos completos.

Teorema 2.5.2. $RI(K_{5 \cdot 4^{n-2}}) \leq n$.

DEMOSTRACIÓN: Es una consecuencia directa del Lema 2.5.1. junto con el Teorema 2.5.1. ■

El hecho de que K_{10} sea VHR-representable en $\mathbf{R}^{2+1/2}$ (Teorema 2.5.1.) junto con el Lema 2.5.1. nos lleva a que K_{20} es VHR-representable en \mathbf{R}^3 , obteniéndose el resultado dado por Bose et al. [10] aunque mediante un procedimiento diferente al de estos autores.

Dado que acabamos de encontrar una cota superior para el índice de representación de los grafos completos, la restante tarea será intentar establecer una cota inferior para el índice de representación de dicha familia de grafos completos. En este sentido, los resultados existentes son que K_5 no es VR-representable en \mathbf{R}^2 (por no ser plano) y que Bose et al. [10] prueban que K_{103} no es VHR-representable en \mathbf{R}^3 basándose en el siguiente teorema de Erdős y Szekeres y atendiendo a cierta casuística que estudian como lemas previos.

Teorema 2.5.3. [28, Erdős y Szekeres] *Dados dos enteros cualesquiera p y q ,*

en cualquier sucesión de $p q + 1$ enteros existen $p + 1$ en sentido creciente o $q + 1$ en sentido decreciente.

Como ya se ha comentado anteriormente, esta cota ha sido mejorada hasta 56 por Fekete, Houle y Whitesides [30] basándose en el Lema 2.5.2. que se deduce del Teorema de Erdős 2.5.3. y que Chung [16] atribuye, entre otros autores, a V. Chvátal y J.M. Steele.

Dada una secuencia de números enteros diferentes se dice que es *unimaximal* si sólo posee un máximo, tanto local como global.

Obsérvese que la existencia de una secuencia unimaximal, en uno de los extremos de los intervalos que definen una configuración de hiper-rectángulos, impide el aporte de visibilidad a través de dicha coordenada, por lo que se podrá reducir al valor mínimo toda la secuencia sin alterar la visibilidad entre los hiper-rectángulos y, de esta forma, disminuir en media unidad la dimensión del espacio en el cual se tiene representada dicha configuración.

Lema 2.5.2. [16, V. Chvátal y J.M. Steele] Para todo $m > 1$, en cualquier secuencia de $\binom{m}{2} + 1$ enteros diferentes existe, al menos, una subsecuencia unimaximal de longitud m . Por otra parte, existen secuencias de $\binom{m}{2}$ enteros distintos que no poseen ninguna subsecuencia unimaximal de longitud m .

En este trabajo se obtiene la misma cota obtenida por Fekete, Houle y Whitesides pero siguiendo una vía diferente. Para ello veremos, en primer lugar, que efectivamente las sucesiones unimaximales permiten la reducción en media unidad del espacio donde es representable un determinado grafo.

Lema 2.5.3. Si los hiper-rectángulos de \mathbf{R}^{t+1} definidos por $R_i = [a_{i1}, b_{i1}] \times [a_{i2}, b_{i2}] \times \cdots \times [a_{it}, b_{it}] \times \{i\}$ con $a_{it} \leq 0$ y $b_{it} \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$), representan a un

grafo G y $\{(b_{it}) \ 1 \leq i \leq n\}$ constituye una secuencia unimaximal entonces, los hiper-rectángulos $R'_i = [a_{i1}, b_{i1}] \times [a_{i2}, b_{i2}] \times \cdots \times [a_{it}, 0] \times \{i\}$ de $\mathbf{R}^{t+1/2}$ también representan a G .

DEMOSTRACIÓN: Basta observar que, dado que $b_{it} \geq 0$ ($1 \leq i \leq n$), por encima del nivel 0 no se aportan visibilidades entre los hiper-rectángulos que no existan ya por debajo del mismo (ver Figura 2.14) ya que necesariamente estas han de producirse lateralmente (nunca en altura) pudiéndose, por tanto, *cortar* todos los hiper-rectángulos por dicho nivel, es decir, podemos sustituir todos los intervalos $[a_{it}, b_{it}]$ por $[a_{it}, 0]$ sin perder visibilidades. ■

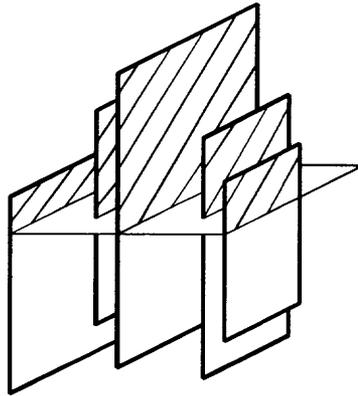


Figura 2.14: Corte por una secuencia unimaximal.

Obsérvese que el lema anterior permite reducir en media unidad la dimensión del espacio en el que está VHR-representado un grafo que posea una sucesión unimaximal como extremos de uno de sus intervalos.

Lema 2.5.4. Sean R_1, R_2, \dots, R_k un conjunto de k hiper-rectángulos mutuamente visibles en \mathbf{R}^t con $R_i = [a_{i1}, b_{i1}] \times [a_{i2}, b_{i2}] \times \cdots \times [a_{it}, b_{it}] \times \{k\}$. Cualquier sucesión (a_{im}) ó (b_{im}) con $1 \leq i \leq k$ y m fijo $1 \leq m \leq t$ puede ser modificada de tal forma que todos sus elementos sean distintos.

DEMOSTRACIÓN: De existir dos elementos iguales basta con incrementar uno de ellos y todos los no inferiores a éstos para conseguir que sean distintos sin perder visibilidades entre los hiper-rectángulos de la configuración. Aplicando el procedimiento, mientras existan elementos iguales, podemos hacerlos todos distintos.

Es conveniente señalar que los cambios anteriores pueden realizarse por tratarse de hiper-rectángulos mutuamente visibles, es decir con los que no nos vamos a encontrar con el problema de que al efectuar dichos cambios se ganen visibilidades que antes no existían. ■

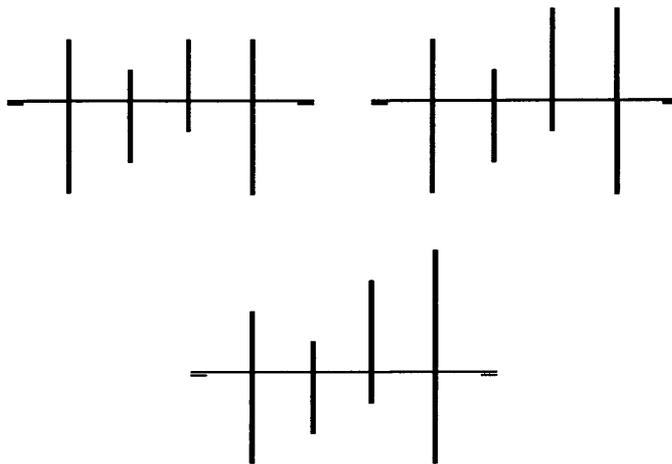


Figura 2.15: Paso de un K_4 con $b_1 = b_3 = b_4$ a otro con todos distintos.

Nos encontramos ahora en condiciones de probar el siguiente teorema que nos permitirá acotar superiormente el K_m VHR-representable en \mathbf{R}^n .

Teorema 2.5.4. $RI(K_{\binom{m}{2}+1}) > RI(K_m)$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $RI(K_m) = l$, que $RI(K_{\binom{m}{2}+1}) = k \leq l$ y

que los extremos superiores de uno de los intervalos que definen a los hiper-recángulos (el mismo para todos ellos) son todos distintos (en caso contrario el Lema 2.5.4. nos permite modificarlos). Tenemos de ésta forma una secuencia de $\binom{m}{2} + 1$ enteros diferentes. Haciendo uso del Lema 2.5.2. sabemos que existen m que forman una secuencia unimaximal, por lo que el Lema 2.5.3. nos asegura una representación de K_m en \mathbf{R}^j con $j = (k - 1) + 1/2 < l$ en contra de la hipótesis de que $RI(K_m) = l$. ■

Corolario 2.5.1. $RI(K_{11}) = 3$.

DEMOSTRACIÓN: Como K_5 no es VHR-representable en \mathbf{R}^2 por tratarse de un grafo no plano, por el Teorema 2.5.4. sabemos que K_{11} no puede serlo en $\mathbf{R}^{2+1/2}$. Por otra parte, al ser representables en \mathbf{R}^3 los grafos completos hasta, al menos, K_{20} podemos asegurar que $RI(K_{11}) = 3$. ■

Corolario 2.5.2. $RI(K_{56}) > 3$.

DEMOSTRACIÓN: Teniendo en cuenta que $\binom{11}{2} + 1 = 56$ y que K_{11} no es VHR-representable en $\mathbf{R}^{2+1/2}$, el Teorema 2.5.4. no asegura que K_{56} no puede serlo en \mathbf{R}^3 . ■

Hemos obtenido así el mismo resultado que Fekete et al.[30] siguiendo una línea diferente (y considerablemente más corta).

Es conveniente hacer notar que sólo conocemos que K_n con $n \leq 20$ es VHR-representable en \mathbf{R}^3 y que K_{56} no lo es, pero desconocemos lo que ocurre si $21 \leq n \leq 55$.

La siguiente tabla nos presenta, de forma esquemática, los resultados obtenidos para los grafos completos.

Dimensión	$1 + 1/2$	2	$2 + 1/2$	3	$n > 2$
K_n es VHR-representable	3	4	10	20	$5 \cdot 4^{n-2}$
K_n no es VHR-representable	4	5	11	56	*

* $\binom{m}{2} + 1$ si K_m no es VHR-representable en $\mathbf{R}^{(n-1)+1/2}$.

Tabla 2.2: VHR-representabilidad de grafos completos.

2.6 Índice de representación de grafos bipartitos completos.

Es conocido [10] que todo grafo bipartito completo es VR-representable en \mathbf{R}^3 .

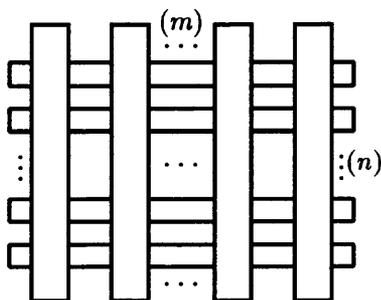


Figura 2.16: Una VHR-representación de $K_{m,n}$ en \mathbf{R}^3 .

Se puede asegurar, entonces, que $RI(K_{m,n}) \leq 3$ cualesquiera que sean $m, n \in \mathbf{N}$.

Ahora bien, se puede ver en la Figura 2.17 que $K_{2,2}$ es VHR-representable en $\mathbf{R}^{1+1/2}$.

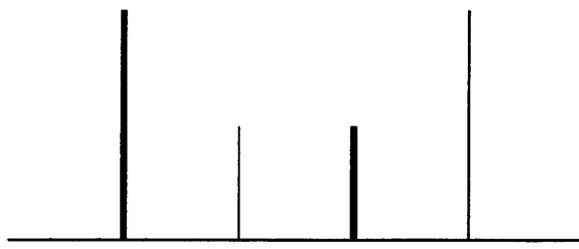


Figura 2.17: $K_{2,2}$ en $\mathbf{R}^{1+1/2}$.

Por otra parte, $K_{2,n}$ lo es en \mathbf{R}^2 por ser plano y carecer de puntos de corte. Además, $K_{3,n}$ lo es en $\mathbf{R}^{2+1/2}$ como prueba la Figura 2.18, en la que los rectángulos están proyectados sobre el plano $x_3 = 0$ y tienen indicada su altura correspondiente.

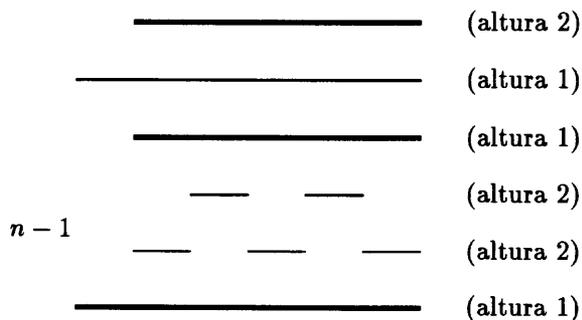


Figura 2.18: $K_{3,n}$ en $\mathbf{R}^{2+1/2}$.

Lema 2.6.1. $RI(K_{4,4}) = 3$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $K_{4,4}$ fuese VHR-representable en $\mathbf{R}^{2+1/2}$ y consideremos las proyecciones de estos rectángulos en \mathbf{R}^2 .

Sea $V = V_1 \cup V_2$ el conjunto de los ocho vértices de $K_{4,4}$ y asignémosles los colores blanco o negro según representen vértices de V_1 o de V_2 respectivamente. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el rectángulo situado en la primera posición es blanco.

Veamos, en primer lugar, que las proyecciones sobre el plano $x_3 = 0$ de todos los rectángulos de todas las posibles configuraciones que puedan darse de $K_{4,4}$ intersectan en toda su anchura (*atraviesan*) a una banda ortogonal a ellas.

Si existe una banda que es atravesada, en su totalidad, por todos los segmentos (proyecciones de los rectángulos sobre \mathbf{R}^2). Consideremos de los cuatro vértices negros de la izquierda el que se encuentre más a la izquierda y de los cuatro vértices negros de la derecha, el que se encuentre más a la derecha. Éstos nos definen una banda en cuyo interior se encuentran los cuatro segmentos negros (ver Figura 2.19). Además, dentro de esta banda no puede existir otra que no corte a algún segmento negro, ya que entonces, al menos, dos segmentos blancos se verían a través de dicha banda.

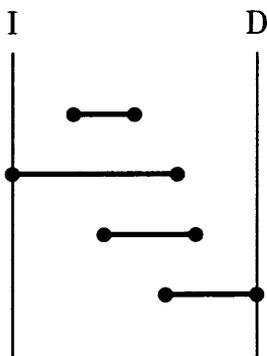


Figura 2.19: La banda más estrecha que contiene a los segmentos negros.

Desplacemos ahora hacia la derecha la frontera izquierda de la banda hasta que toque al primer vértice negro de la derecha con que se encuentre y, de forma análoga, desplazamos hacia la izquierda la frontera derecha de la banda

hasta que toque al primer vértice negro de la izquierda con que se encuentre. Los vértices que definen el desplazamiento pueden no ser únicos, aunque el desplazamiento sí lo es. En el ejemplo de la Figura 2.19 estos desplazamientos quedarían reflejados en la Figura 2.20

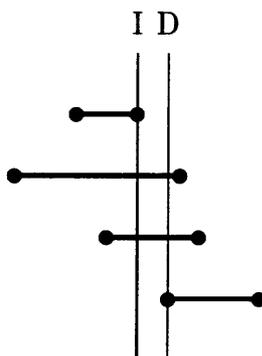


Figura 2.20: La banda de la figura anterior después de los desplazamientos.

Esta nueva banda puede tener anchura positiva, nula o negativa según sea el caso (ver Figura 2.21).

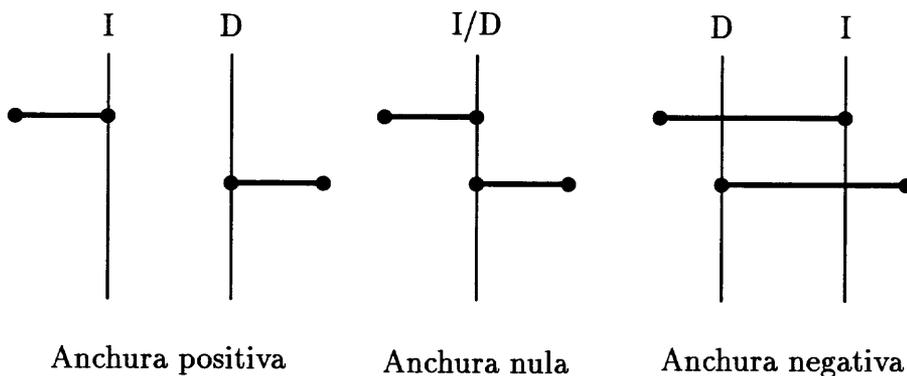


Figura 2.21: Los tres casos que pueden darse según la anchura.

Hagamos, a continuación, un estudio detallado de los tres posibles casos:

Primer caso: anchura positiva

Dado que esta nueva banda B^* está contenida en la banda primitiva B y dado que B no contenía a ninguna subbanda que dejase sin intersectar a algún segmento negro, los dos segmentos que no quedan totalmente fuera de B^* deben cubrirla en su totalidad.

Como los segmentos blancos deben ver a los negros que se encuentran fuera de B^* , deben atravesar totalmente a B^* para así poder ver a los segmentos **a** y **b** según se indica en la Figura 2.22. Además, al ser blanco el primer segmento de la configuración, ésta debe tener la estructura indicada en la Figura 2.23.

El segundo segmento blanco (que ha de atravesar, necesariamente, a la banda B^*) debe estar separado del primero por 1 ó 2 segmentos negros para que éste o éstos impidan la visibilidad entre los dos blancos (ver Figura 2.24).

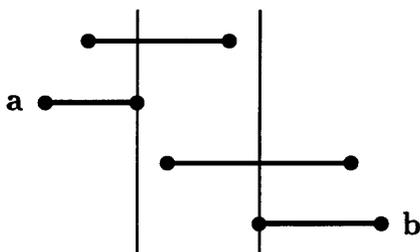


Figura 2.22: Distribución de los segmentos negros en caso de anchura positiva.

En ambos casos es imposible colocar dos nuevos segmentos blancos, por lo que no puede darse una configuración de este tipo.

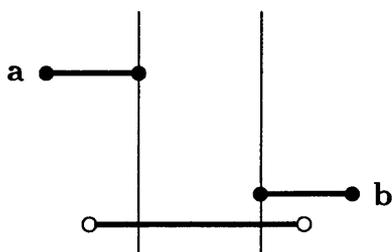


Figura 2.23: El primer segmento blanco.

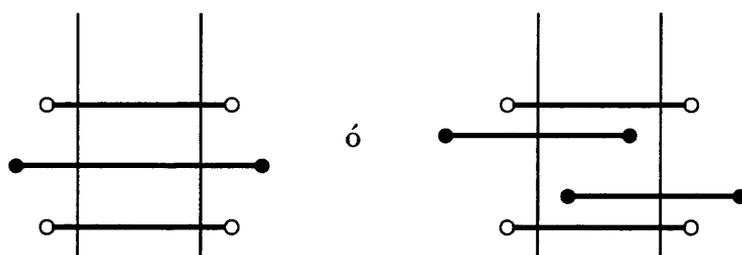


Figura 2.24: El segundo segmento blanco.

Segundo caso: anchura nula

En este caso cualquier segmento blanco debe intersectar a la recta en la que ha degenerado la banda B^* . Los dos primeros segmentos blancos que podemos situar se encontrarán dispuestos según una de las estructuras indicadas en la Figura 2.25.

Un estudio de la casuística que puede presentarse al intentar colocar los otros dos segmentos blancos, teniendo en cuenta que los dos negros que faltan deben intersectar a la línea vertical, nos lleva a contradicciones al igual que en el caso anterior, por lo que tampoco es posible que se de este caso.

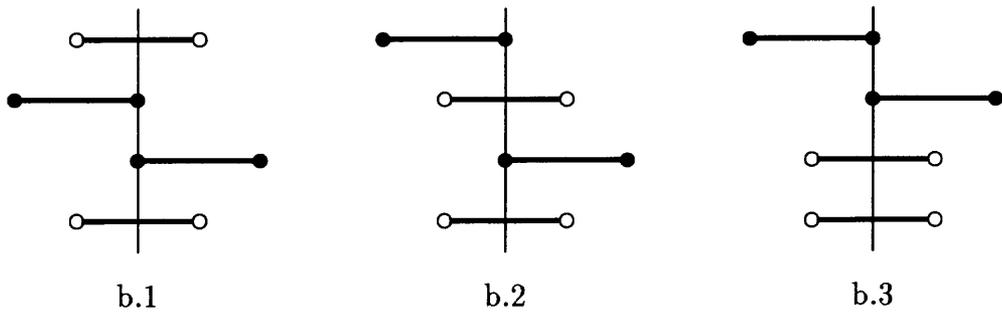


Figura 2.25: Las posibles posiciones de los dos primeros segmentos blancos.

Tercer caso: anchura negativa

En el caso de que la anchura fuera negativa tenemos una configuración del tipo indicado en la Figura 2.26 en la que quedan aún por colocar dos segmentos negros que denotaremos por s_1 y s_2 .

El vértice derecho de s_1 debe estar situado más a la derecha que el vértice derecho de **a** (según se ha definido la banda B^*) y el vértice izquierdo de s_1 debe estar más a la izquierda que el vértice izquierdo de **b**, por la misma razón anterior. Una situación análoga se presenta para el segmento s_2 .

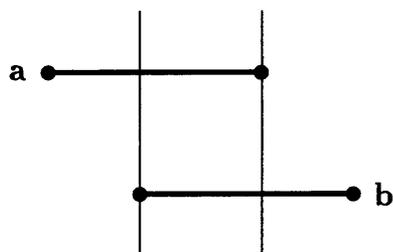


Figura 2.26: Las posiciones de los segmentos **a** y **b**.

Esto nos lleva a que los cuatro segmentos negros atraviesan, en su totalidad, a la banda B^* .

Como suponíamos que el primer segmento de la configuración era blanco, o parte de él o su totalidad debe estar contenido en la banda B^* , ya que debe ver a los dos negros que *definen* dicha banda (Figura 2.27).

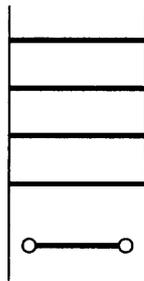


Figura 2.27: La posición del primer segmento.

Obviamente, los otros tres segmentos blancos deben hacer de barrera entre los negros. Además, como tienen que ver a los dos negros que definen la banda B^* , los otros tres blancos deben atravesar, necesariamente y en su totalidad, a la banda B^* obteniéndose una representación como la de la Figura 2.28.

En resumen, las ocho proyecciones deben estar definidas dentro de una banda de anchura no nula y de forma alternada.

Como el primer rectángulo lo hemos supuesto blanco los que ocupan lugar impar deben ser blancos y los de lugar par negros. Eliminando los dos primeros rectángulos de la configuración debe quedarnos una representación de $K_{3,3}$. Estudiaremos a continuación todas las posibles configuraciones de $K_{3,3}$ para añadirle, más tarde, los rectángulos de las posiciones segunda y primera y ver que no es posible conseguir una representación de $K_{4,4}$ en $\mathbf{R}^{2+1/2}$.

Partamos entonces de seis barras paralelas y de igual longitud numeradas

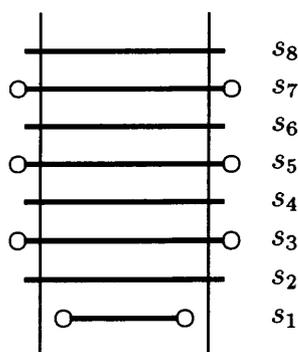


Figura 2.28: Las posiciones de los ocho segmentos.

en forma decreciente del 8 al 3 y de tal manera que las que ocupan lugar par sean negras y las de lugar impar blancas. Para terminar de configurar un $K_{3,3}$ sólo falta establecer las visibilidades entre los vértices 7 y 4, 6 y 3, 8 y 5, y 8 y 3 (ver Figura 2.29).

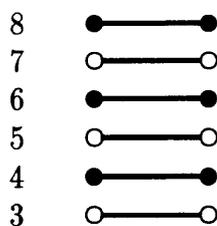


Figura 2.29: Configuración de partida.

Si nos fijamos en 7 y 4, estos dos vértices pueden verse haciendo crecer sus barras correspondientes por la derecha, por la izquierda o bien aumentándoles la altura. Estas tres posibilidades las indicaremos con las notaciones 7-4-D, 7-4-I o 7-4-A respectivamente. Teniendo en cuenta además que si partimos de 7-4-D o 7-4-I iremos obteniendo configuraciones simétricas sólo tendremos que estudiar los casos 7-4-D y 7-4-A.

Si partimos de 7-4-D, los vértices 6 y 3 sólo pueden verse prolongando sus barras por la izquierda o aumentando sus alturas, es decir, de las formas 6-3-I o 6-3-A. Supongamos, en primer lugar que se toma 6-3-I. En este caso ha de darse necesariamente 8-5-A, mientras que pueden darse a continuación 8-3-I, 8-3-D o 8-3-A. Estas tres primeras configuraciones están representadas en la Figura 2.30 en la que las numeraciones entre paréntesis nos indican las alturas de los rectángulos correspondientes.

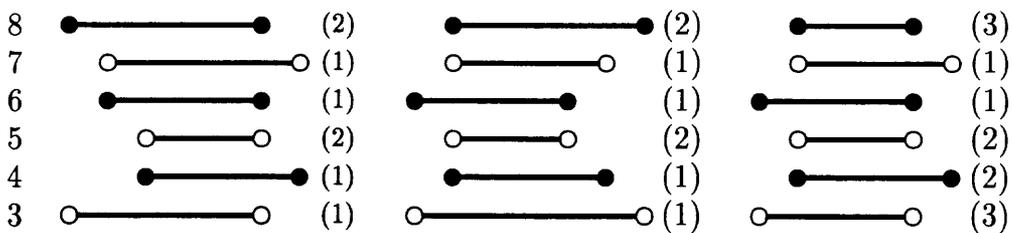


Figura 2.30: Configuraciones posibles a partir de 7-4-D y 6-3-I.

Si en vez de tomar 6-3-I tomamos 6-3-A entonces necesariamente ha de darse 8-5-I para más tarde poder optar entre 8-3-I, 8-3-D o 8-3-A según se muestra en la Figura 2.31.

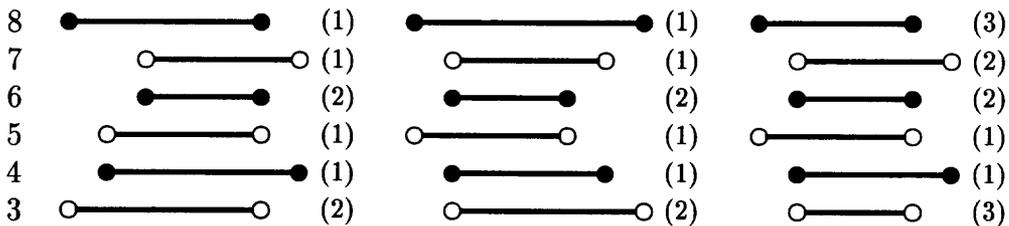


Figura 2.31: Configuraciones posibles a partir de 7-4-D y 6-3-A.

Por último si partimos de 5-2-A podemos continuar con 6-3-D o 6-3-I, pero las dos opciones darán resultados simétricos por lo que sólo estudiamos el caso 6-3-D. Esto nos lleva a que, necesariamente, ha de continuarse con 8-5-I

para posteriormente optar entre 8-3-I, 8-3-D o 8-3-A como puede verse en la Figura 2.32.

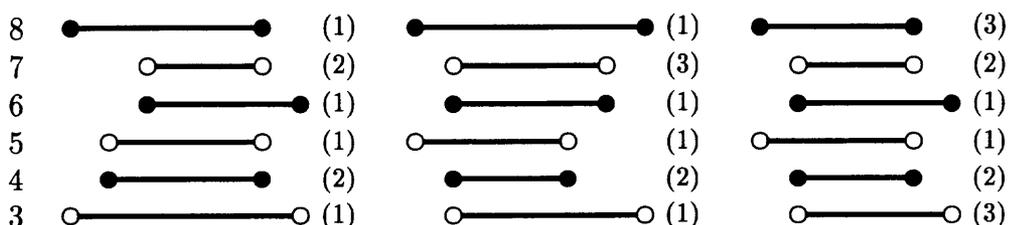


Figura 2.32: Configuraciones posibles a partir de 7-4-A y 6-3-D.

Si tratamos de añadir ahora el vértice 2 a nuestra configuración, para obtener $K_{3,4}$, nos damos cuenta de que sólo las dos primeras configuraciones de la Figura 2.30 admiten esta posibilidad. Para estos dos casos obtenemos las configuraciones de la Figura 2.33.

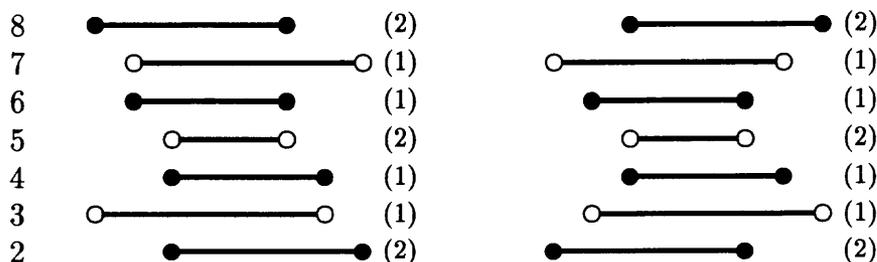


Figura 2.33: Los dos posibles $K_{3,4}$.

Basta observar ahora que en ninguna de las dos configuraciones anteriores es posible añadir el rectángulo blanco 1 para que configure un $K_{4,4}$, por lo que no existe ninguna configuración de 8 rectángulos en $\mathbf{R}^{2+1/2}$ cuyo grafo de ε -visibilidad sea isomorfo a $K_{4,4}$, es decir, el índice de representación de $K_{4,4}$ es 3. ■

Con este último resultado se completa el estudio de la determinación del

índice de representación de los grafos bipartitos completos.

Los resultados obtenidos para dichos grafos se resumen en la siguiente tabla:

$RI(K_{m,n})$	$1+1/2$	2	$2+1/2$	3
m	1 ó 2	1 ó 2	3	≥ 4
n	2	> 2	≥ 3	≥ 4

Tabla 2.3: Índice de representación de los grafos bipartitos completos.

2.7 Conclusiones y problemas abiertos

Se ha introducido en este capítulo el concepto de *índice de representación* de un grafo. Obsérvese que, a diferencia de lo que ocurre con un concepto paralelo a éste como es el de *género* de un grafo G —el cual se define como el género mínimo que ha de tener una superficie (o mínimo número de asas que ha de tener una esfera) para que G admita una inmersión en ella— se da el caso de que el índice de representación de un grafo G puede ser $RI(G) = n$ mientras que el de un subgrafo suyo G' sea $RI(G') > n$ (por ejemplo, $RI(K_{6,6}) = 3$ mientras que $RI(K_{6,6} - M) > 3$). De ahí que se haya denominado *índice* y no *género* de representación.

Es evidente que la introducción de un concepto como el de *índice de representación* de un grafo abre una gran cantidad de problemas en los que trabajar.

En las diferentes secciones de este capítulo se han ido calculando los índices de representación de algunos grafos distinguidos, como los completos, los bi-

partitos completos o los planos y que se resumen en la Tabla 2.4.

<i>Tipos de grafo G</i>	<i>$RI(G)$</i>	<i>Referencia</i>
Peri-hamiltonianos	$1 + 1/2$	Teorema 2.3.1.
Puntos de corte-periplanos	≤ 2	Tamassia y Tollis [68]
Planos	≤ 3	Bose et al. [10]
$K_n \quad n \leq 3$	$1 + 1/2$	
K_4	2	
K_{10}	$2 + 1/2$	Teorema 2.5.1.
K_{11}	3	Corolario 2.5.1.
$K_n \quad n \geq 56$	> 3	Fekete et al. [30]
$K_{5.4^{n-2}} \quad n > 2$	$\leq n$	Teorema 2.5.2.
$K_n \quad n \geq \binom{m}{2} + 1$	$> RI(K_m)$	Teorema 2.5.4.
$K_{1,2} \text{ o } K_{2,2}$	$1 + 1/2$	
$K_{1,n} \text{ o } K_{2,n} \quad n \geq 3$	2	
$K_{3,n} \quad n \geq 3$	$2 + 1/2$	Figura 2.18
$K_{4,4}$	3	Lema 2.6.1.
$K_{m,n} \quad 4 \leq m \leq n$	3	Bose et al. [10]

Tabla 2.4: Índice de representación de grafos destacados.

Al no disponerse de una caracterización de los grafos VHR-representables en \mathbf{R}^n no podemos anticipar el índice de representación de un grafo cualquiera. Es éste un problema abierto que presenta una enorme complejidad y al cual irán encaminados todos los demás resultados que se vayan obteniendo.

Otro problema a resolver es, una vez conocido el índice de representación de un determinado grafo, dar una VHR-representación del mismo.

En general, muchos de los problemas que se plantean en alrededor del concepto de *género* de un grafo pueden formularse ahora en torno al concepto de *índice de representación*.

Capítulo 3

Bar-visibilidad en superficies no planas

En el Capítulo 0 se comentó la conveniencia de generalizar el estudio de la bar-visibilidad siguiendo las dos posibles vías existentes. La primera de ellas, desarrollada en el capítulo anterior, consistía en trasladar el problema del plano al espacio euclídeo n -dimensional \mathbf{R}^n , mientras que otra segunda vía pretende generalizar dicho estudio pasando del plano a otras superficies. Esta última vía de generalización fué iniciada el año 1989 por Tamassia y Tollis [70, 71] con el estudio de la bar-visibilidad sobre las superficies de la esfera y del cilindro.

En el presente capítulo se estudiará el problema de la bar-visibilidad sobre la superficie del toro para iniciar posteriormente su estudio sobre una superficie cualquiera de género n es decir, sobre una esfera de n asas.

3.1 Antecedentes

Un *cilindro* (infinito) C es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta denominada *eje* del cilindro. Un cilindro es también la unión de una familia infinita de circunferencias con sus centros en el eje y trazadas en un plano ortogonal a éste. Alternativamente, C es la unión de una familia infinita de rectas paralelas al eje y a la misma distancia de éste que reciben el nombre de *generatrices*. Las circunferencias y generatrices de C definen de forma natural un sistema de coordenadas, ya que cualquier punto de C queda unívocamente determinado por la intersección de una recta con una circunferencia.

Una *inmersión* en el cilindro de un grafo G es una representación de dicho grafo sobre la superficie del cilindro de tal forma que sus vértices son puntos de la superficie del cilindro y sus aristas arcos de curvas de Jordan que no se intersectan sobre dicha superficie.

De manera análoga al plano puede ser definida la *bar-visibilidad* sobre la superficie de un cilindro, donde los vértices se asocian a barras, o segmentos de rectas generatrices, y donde dos barras son visibles si existe un arco de circunferencia (no degenerado) que no intersecta a ninguna barra.

Conviene recordar, en este punto, la definición dada en la página 8 de *árbol de bloques-puntos-de-corte* de un grafo conexo G como el grafo cuyos vértices son los bloques y los puntos de corte de G y cuyas aristas conectan cada bloque B con los puntos de corte contenidos en él; se denota por $BCT(G)$. Conviene recordar también la definición de *oruga* dada en la página 9 como aquel árbol cuyos vértices que no son hojas constituyen un camino simple.

Ambas estructuras son fundamentales a la hora de caracterizar a los grafos bar-representables en un cilindro o grafos *bar-cilíndricos*. Como se comentó anteriormente, dicha caracterización ha sido estudiada por Tamassia y Tollis [71] y se resume en el siguiente teorema:

Teorema 3.1.1. [71, Tamassia y Tollis] *Un grafo plano es bar-cilíndrico si, y sólo si, su árbol de bloques-puntos-de-corte es una oruga.*

Además, dado un grafo de n vértices, existen algoritmos [71] que, en tiempo lineal, estudian la existencia y construyen una *bar-representación* en el cilindro de dicho grafo.

Se obtienen también en [71] caracterizaciones *duales* de los grafos bar-planos o bar-cilíndricos, siendo importante observar que ninguna de estas dos clases (bar-planos y bar-cilíndricos) está contenida en la otra pero que poseen intersección no vacía. Así, por ejemplo, el grafo de la Figura 3.1 admite una inmersión plana con todos los puntos de corte en la cara externa (la inmersión dada en la figura) por lo que es bar-plano y, sin embargo, dado que su BCT no es una oruga, sabemos que no es bar-cilíndrico.

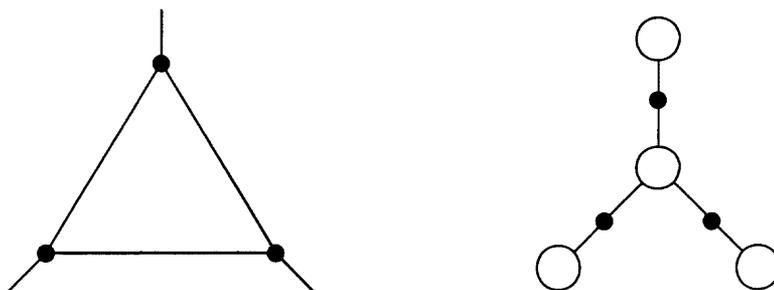


Figura 3.1: Un grafo bar-plano pero no bar-cilíndrico y su BCT.

Al contrario de lo que ocurre con el grafo anterior, el de la Figura 3.2 no admite una inmersión plana que deje a todos los puntos de corte en la cara externa, ya que se trata de uno de los grafos de Halin [36] (ver Figura 2.10), por lo que no es bar-plano pero, sin embargo, su BCT es una oruga y, por tanto, es bar-cilíndrico.

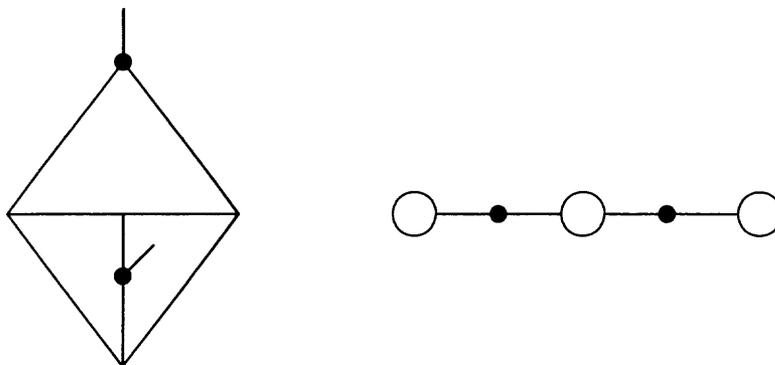


Figura 3.2: Un grafo bar-cilíndrico pero no bar-plano y su BCT.

En la definición de bar-visibilidad en el cilindro podemos cambiar el papel de las barras y los arcos de circunferencia, de tal forma que ahora las barras sean arcos de circunferencias y dos barras sean visibles si existe un segmento de generatriz que no interseca a ninguna otra barra. Esta definición induce un nuevo tipo de bar-representación en el cilindro, la cual es topológicamente equivalente a una *bar-representación en la esfera*, en la que las barras consisten en arcos de *paralelos* (no está permitido un paralelo completo) y la visibilidad está definida por arcos de *meridianos*.

Una caracterización de los grafos bar-representables en la esfera fué dada por Tamassia y Tollis (1989) [70] mediante el siguiente teorema:

Teorema 3.1.2. [70, Tamassia y Tollis] *Un grafo es bar-representable en la esfera si, y sólo si, admite una inmersión plana con todos sus puntos de corte en la frontera de, a lo sumo, dos caras.*

Además, existen algoritmos [70] que, en tiempo lineal, estudian la existencia y dibujan una bar-representación en la esfera de un grafo G .

La Figura 3.3 nos muestra un grafo bar-esférico (sus puntos de corte se encuentran en dos caras) que no es bar-plano (no admite una inmersión plana con los cuatro puntos de corte en la misma cara) ni bar-cilíndrico (su BCT no es una oruga).

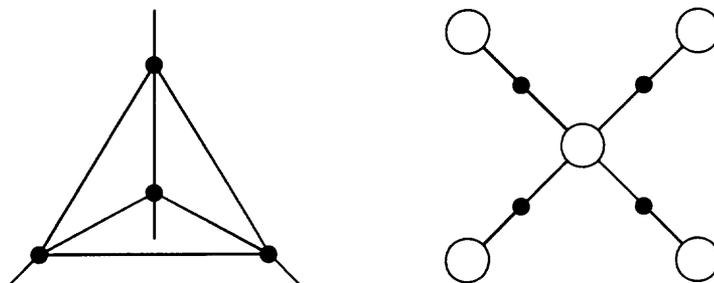


Figura 3.3: Un grafo bar-esférico, no bar-plano ni bar-cilíndrico y su BCT.

Obsérvese que los teoremas que caracterizan la bar-visibility en el plano, la esfera y el cilindro, debidos a Wismath y a Tamassia y Tollis, aportan un interesante resultado diferenciador entre las representaciones de visibilidad y topológica de un grafo ya que, en el caso topológico son equivalentes las representaciones plana, esférica y cilíndrica, no ocurriendo lo mismo en el caso de las representaciones de visibilidad.

En su artículo titulado *Representations of graphs on a cylinder* [71], Tamassia y Tollis plantean como interesante la caracterización de los grafos bar-representables en el toro, y comentan textualmente:

“In this case, the problem appears to be far more difficult, since the graphs that admit such a representation need not be planar”.¹

¹En este caso, el problema parece ser mucho más difícil, ya que los grafos que admiten una tal representación pueden no ser planos.

Es por ello que el primer problema que se afronta en este capítulo sea el de dar solución a este problema, es decir, dar una caracterización de los grafos bar-representables en el toro.

3.2 Caracterización de los grafos bar-tóricos

Un *toro* es la figura geométrica generada al girar un disco circular Q de radio r alrededor de un eje situado a una distancia $d > r$ del centro de Q . En lo sucesivo, al hablar de un toro nos estaremos refiriendo a su superficie.

El conjunto C_1 de las circunferencias que generan cada uno de los puntos de la frontera de Q en su recorrido alrededor del eje, denominadas *paralelos* y el conjunto C_2 de las circunferencias que constituyen la frontera de Q en cada momento de su giro alrededor del eje, denominadas *meridianos*, constituyen un sistema de coordenadas ortogonal, ya que cada punto de la superficie del toro viene determinado unívocamente por la intersección de un paralelo con un meridiano (ver Figura 3.4).

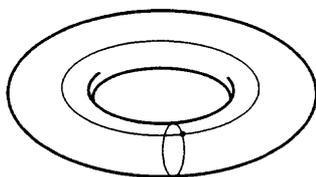


Figura 3.4: Sistema de coordenadas en el toro.

Diremos que un grafo es *tórico* si podemos situar sus vértices sobre la superficie de un toro y considerar sus aristas como arcos de curvas de Jordan que no se intersecten sobre dicha superficie, o lo que es lo mismo, si admite una inmersión en el toro.

Como ya se comentó en el Capítulo 1 podemos *cortar* y *desarrollar* el toro por un paralelo y un meridiano para obtener una representación de éste de la forma indicada en la Figura 3.5 en la que los bordes superior e inferior así como el derecho y el izquierdo del rectángulo obtenido se encuentran respectivamente identificados (fruto de un homeomorfismo entre los puntos del toro y los del rectángulo así obtenido). Esta representación del toro sobre el plano recibe el nombre de *toro plano* y será la que utilizemos de ahora en adelante (puesto que la métrica que daremos en el toro será la heredada de esta representación). Así, los arcos de geodésicas del toro coincidirán con segmentos de rectas sobre el toro plano.

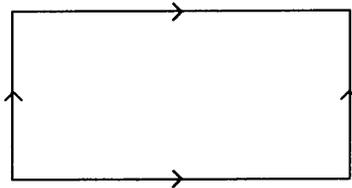
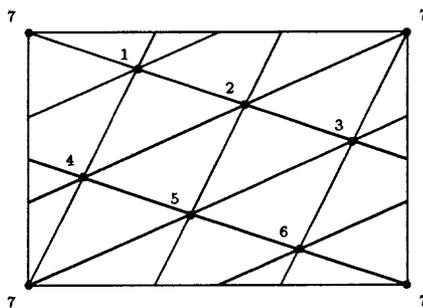


Figura 3.5: Toro plano.

Conviene recordar en este punto la existencia de grafos tóricos que no son planos. Así, por ejemplo, K_7 sabemos que no es plano y, sin embargo, admite una inmersión en el toro como puede verse en la Figura 3.6.

Figura 3.6: K_7 es tórico.

Al definir la *bar-visibility* en el toro consideraremos los segmentos como arcos de paralelos con visibilidad (no degenerada) ortogonal a ellos, es decir, visibles en la dirección de los meridianos. Obsérvese que en la representación en el *toro plano*, las barras son segmentos horizontales y la visibilidad se define en dirección vertical.

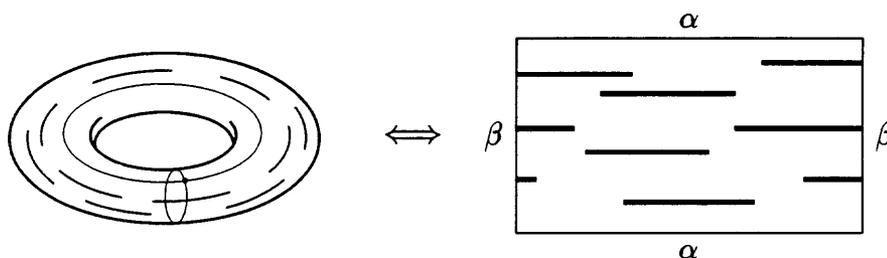


Figura 3.7: Una bar-representación de un grafo en el toro.

Un grafo G se dice *bar-tórico* si existe una configuración de segmentos sobre el toro cuyo grafo de visibilidad (utilizando la ε -visibilidad) sea isomorfo a G .

Podemos observar, por los teoremas de caracterización, que una condición necesaria para que un grafo sea bar-representable en el plano, el cilindro o la esfera es que sea plano, en otras palabras, para que sea bar-representable en una superficie de género 0 el género del grafo ha de ser 0. Esta condición también puede ser generalizada al caso del toro.

Teorema 3.2.1. *Una condición necesaria para que un grafo sea bar-tórico es que sea tórico es decir, su género ha de ser menor o igual que 1.*

DEMOSTRACIÓN: Si el grafo es bar-tórico podemos construir una bar-representación en el toro de dicho grafo. Basta entonces con situar un vértice en el extremo izquierdo de cada una de las barras y trazar cada arista $\{u, v\}$ moviéndonos paralelamente a la barra correspondiente al vértice u hasta llegar

al punto desde el que la barra u ve a la barra v para seguir dicha dirección de visibilidad hasta llegar a las proximidades de la barra v y desplazarnos, por último, paralelamente a ésta hasta llegar a su extremo izquierdo, punto éste donde se ha situado el vértice v de la inmersión que se está trazando. ■

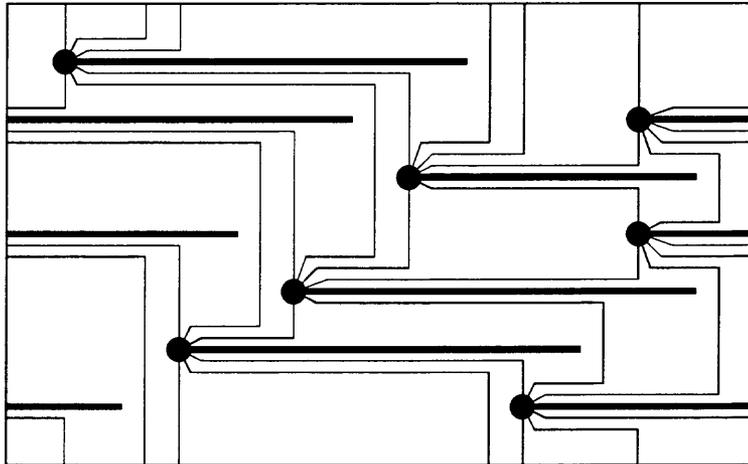


Figura 3.8: Construcción de una inmersión topológica a partir de una representación bar.

La caracterización de los grafos bar-tóricos se hará atendiendo a que el grafo tórico G , objeto del estudio, se encuentre en uno de los siguientes casos:

- Caso 1:** G es no conexo,
- Caso 2:** G es 3-conexo,
- Caso 3:** G es conexo y plano,
- Caso 4:** G es conexo no 2-conexo y no plano, o
- Caso 5:** G es 2-conexo pero no 3-conexo y no plano.

Estos cinco casos están representados, de forma esquemática, en la siguiente figura:

	No-planos	Planos
No conexos	Caso 1	
Conexos no 2-conexos	Caso 4	Caso 3
2-conexos no 3-conexos	Caso 5	
3-conexos	Caso 2	

Figura 3.9: Los cinco casos a considerar.

Teorema 3.2.2. (CASO 1) *Un grafo no conexo es bar-tórico si, y sólo si, es bar-cilíndrico.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que si es bar-tórico es también bar-cilíndrico. En efecto: por ser no conexo estará constituido por más de una componente conexa. Como el grafo admite una bar representación en el toro, cada una de las componentes también la admite de tal manera que podemos trazar, entre cada dos componentes, un meridiano que no intersekte a ninguna barra.

Cada una de las componentes se encuentra entonces bar-representada en un cilindro, es decir, cada componente es bar-cilíndrica y, por tanto, el grafo es bar-cilíndrico.

Recíprocamente, si el grafo es bar-cilíndrico, identificando los extremos del cilindro obtenemos una bar-representación, en el toro, de dicho grafo. ■

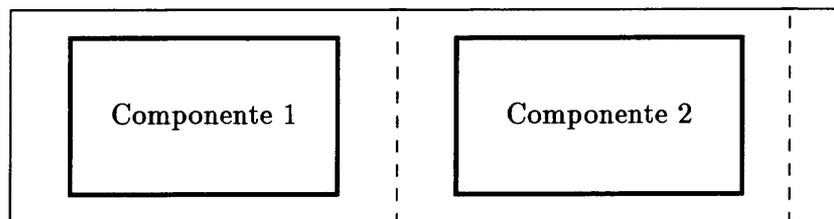


Figura 3.10: Un grafo no conexo en el toro.

Es interesante observar que, a diferencia de lo que ocurre en el plano y en el cilindro, y como consecuencia del Teorema 3.2.2., es posible encontrar grafos no conexos cuyas componentes son todas bar-tóricas y que, sin embargo, el grafo no lo es. Por ejemplo, las componentes del grafo de la Figura 3.11 (a) son bar-tóricas como prueba la Figura 3.11 (b), pero como no son bar-cilíndricas (sus BCT's no son orugas) el grafo (a) no es bar-cilíndrico y, por tanto, tampoco es bar-tórico.

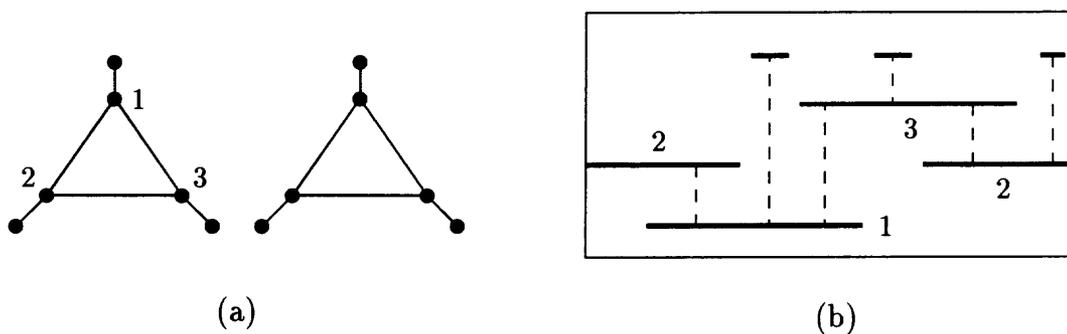


Figura 3.11: Un grafo no conexo y no bar-tórico (a) cuyas componentes son bar-tóricas (b).

De los respectivos teoremas de caracterización se deduce que cualquier grafo plano 2-conexo admite una bar-representación en el plano, la esfera y el cilindro. Esto ya no es cierto en el caso del toro es decir, no todo grafo tórico

y 2-conexo es bar-tórico. Sin embargo, aumentando el grado de exigencia de la conectividad podemos conseguir un resultado similar para esta última superficie.

Teorema 3.2.3. (CASO 2) *Todo grafo tórico y 3-conexo es bar-tórico.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que el grafo G sea tórico y 3-conexo pero no cilíndrico; pues en caso de ser cilíndrico, al ser 3-conexo, su BCT sería una oruga y, por lo que también sería bar-cilíndrico y, por tanto, bar-tórico con lo que estaría probado el teorema.

En cualquier inmersión de G en el toro debe existir un ciclo C que rodee a éste en la dirección de los meridianos. De no ser así, existiría otro meridiano por el cual podríamos cortar el toro y obtener una representación de G en el cilindro, en contra de la hipótesis de no ser cilíndrico.

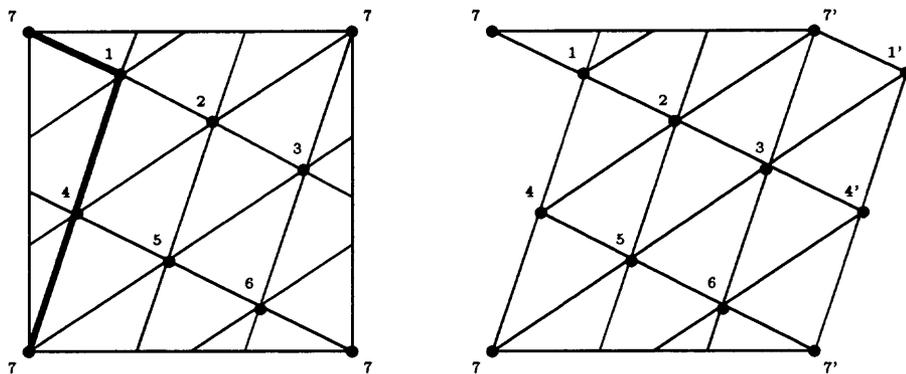


Figura 3.12: Podemos cortar a lo largo de un ciclo que rodee al toro.

Cortando por dicho ciclo, y duplicando los vértices y aristas del ciclo por el que hemos cortado, se obtiene un nuevo grafo G' así como una representación en el cilindro de este nuevo grafo (ver Figura 3.12).

Si G' no es 2-conexo debe existir, al menos, un vértice de corte v y dos bloques que intersecten cada uno a una de las copias del ciclo C (de no ser así G no podría ser 3-conexo) por lo que podemos modificar el ciclo C (ver Figura 3.13) de tal forma que contenga al vértice v y resulte ahora un nuevo grafo G'' 2-conexo. Podemos por tanto suponer, sin pérdida de generalidad, que G' es 2-conexo.

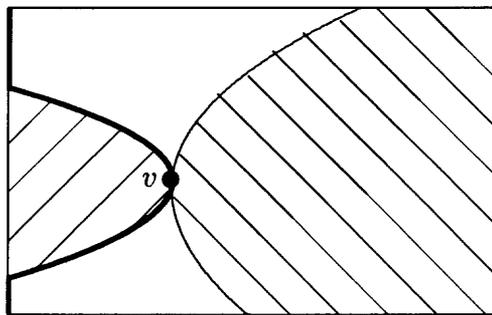


Figura 3.13: Modificando el ciclo por el que cortamos, G' es 2-conexo.

Después de cortar y renombrar los vértices v_1, v_2, \dots, v_k de una de las copias del ciclo C como w_1, w_2, \dots, w_k , obtenemos un grafo G' cilíndrico y 2-conexo. Además, la elección del ciclo C hace que nos encontremos en las hipótesis exigidas en [71] para que el grafo sea bar-cilíndrico y admita una bar representación en la que los vértices v_1, v_2, \dots, v_k y los renombrados como w_1, w_2, \dots, w_k se encuentren en las caras que Tamassia y Tollis [71] denominan *Izquierda* y *Derecha* y manteniendo la topología (ver Figura 3.14) es decir, dispuestos en el mismo orden en ambas caras (examinando los trabajos de Tamassia y Tollis [71] ésto siempre es posible).

Basta con volver a identificar nuevamente los vértices v_i y w_i ($1 \leq i \leq k$) para obtener una bar-representación de G en el toro, lo que prueba que G es bar-tórico. ■

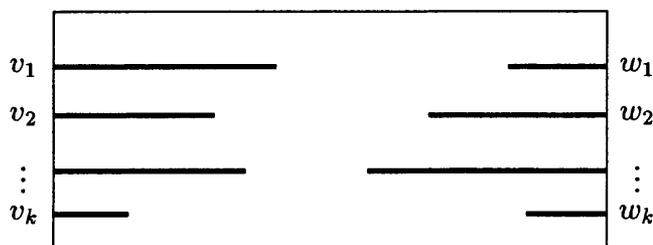


Figura 3.14: Las caras *Izquierda* y *Derecha* de una bar-representación en el cilindro de G' .

Un ejemplo de grafo tórico y 3-conexo es K_7 , por lo que el Teorema 3.2.3. nos asegura su bar-toricidad. La Figura 3.15 nos muestra una bar-representación de dicho grafo sobre el toro.

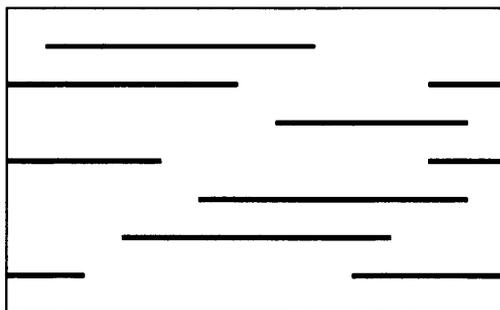


Figura 3.15: Una bar-representación de K_7 en el toro.

El caso de los grafos conexos no 3-conexos se estudiará en tres apartados según muestra la Figura 3.9. El primero de ellos estudia el caso de los grafos planos.

Conviene recordar ahora el concepto de K -periconectividad introducido por Oubiña y Zuchello [56] y que ya fue definido en la página 7. Dado un grafo G y un subgrafo suyo K , se dice que un vértice v de G está K -periconectado con

otro vértice u de K si existe un camino de u a v que no contiene más vértices de K que el propio u . Teniendo en cuenta esta definición se puede enunciar el siguiente teorema que caracteriza a los grafos bar-tóricos encuadrados dentro del que se ha dado en enumerar como Caso 3.

Teorema 3.2.4. (CASO 3) *Un grafo conexo y plano es bar-tórico si, y sólo si, no contiene a un conjunto K de tres vértices de corte y un vértice v , tal que v esté K -periconectado con los vértices de K .*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que si el grafo G no contiene a un conjunto K de tres vértices de corte tales que cualquiera de ellos esté K -periconectado con otro vértice v de G , éste es bar-tórico. Supondremos además que G no es bar-cilíndrico ya que, en caso contrario, ya sería bar-tórico.

Por no ser bar-cilíndrico sabemos que el $BCT(G)$ no es una oruga, debiendo tener una estructura formada por un bloque central B que contenga, al menos, tres puntos de corte de G . Además, este bloque central debe contener al conjunto C de todos los puntos de corte de G ya que, de otra forma, existiría, al menos, un vértice u K -periconectado a los de un conjunto $K = \{c_1, c_2, c_3\}$ de tres puntos de corte de G (como puede verse en la Figura 3.16) en contra de las hipótesis.

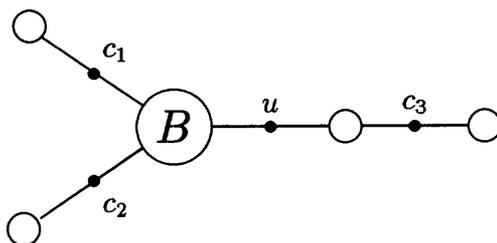


Figura 3.16: u está $\{c_1, c_2, c_3\}$ -periconectado a c_1 , c_2 y c_3 .

Además, dicho bloque central no puede ser 3-conexo ya que, de serlo, se contradice la hipótesis de no existir el conjunto K . En efecto: consideremos

el bloque B junto con los tres puntos de corte c_1 , c_2 y c_3 y consideremos otro punto cualquiera v de B . Por ser B conexo existe, al menos, un camino de v a c_1 . Por ser 2-conexo deben existir, al menos, dos caminos de v a c_2 : elijamos uno de ellos. Si este camino contiene al camino elegido entre v y c_1 elegimos el otro, por lo que el camino elegido no contiene al anterior, aunque puede contener parte de él, en cuyo caso buscamos el último vértice común a ambos y lo denotamos por v' . Este nuevo vértice (que puede ser el propio v) está conectado por caminos disjuntos con c_1 y c_2 . Como estamos suponiendo que B es 3-conexo, v' debe estar conectado por, al menos, tres caminos diferentes a c_3 , por lo que debe existir algún camino de v' a c_3 que no contenga totalmente a ninguno de los caminos elegidos para conectar v' con c_1 y c_2 . Este camino puede contener parte comunes con los anteriores pero es ese caso buscamos el último punto común a dos de ellos y lo renombramos como v'' . Este último vértice v'' está K -periconectado con los tres puntos de corte en contra de la hipótesis.

Como B no es 3-conexo, es posible ordenar $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ de tal forma que c_{i-1} y c_{i+1} separen a c_i del resto de los vértices de C , y llamamos B_i al conjunto de vértices de B que están C -periconectados con cada c_i y c_{i+1} (B_n lo constituyen los vértices de B que están C -periconectados con c_1 y c_n) (ver Figura 3.17).

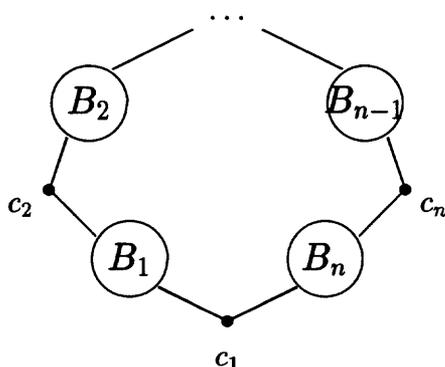


Figura 3.17: La estructura del bloque central B .

Consideremos los árboles de bloques-puntos-de-corte o BCT's correspondientes a cada subgrafo $B_i \cup \{c_i, c_{i+1}\}$. Cada uno de estos BCT's es una oruga, pues de no existir un camino simple entre estos BCT's conteniendo a los puntos de corte de B_i , se puede encontrar un conjunto de tres puntos de corte $K = \{p_1, p_2, p_3\}$ y otro vértice v de B_i tal que v esté K -periconectado con cada vértice de K en contra de la hipótesis. Entonces, por la caracterización de Tamassia y Tollis [71], B_i es bar-cilíndrico y en una bar-representación de B_i , c_i y c_{i+1} están situados en las caras *Izquierda* y *Derecha* respectivamente.

Por tanto, es posible dar una bar-representación en el cilindro del grafo obtenido de B duplicando el vértice c_1 en dos vértices c' y c'' donde c' es adyacente a los vértices de B_1 que eran adyacentes a c_1 , y c'' es adyacente a los vértices de B_n que eran adyacentes a c_1 (ver Figura 3.18).

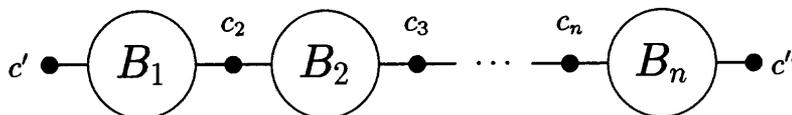


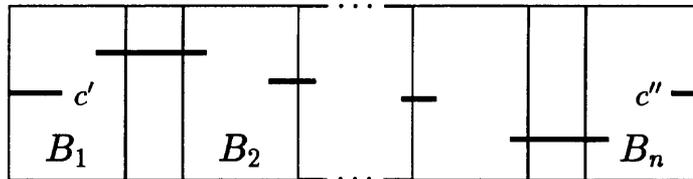
Figura 3.18: El bloque B después de desdoblar el vértice c_1 en c' y c'' .

Esta bar-representación en el cilindro induce una bar-representación en el toro de B (basta unir las barras que representan a c' y c''), a partir de la cual es fácil dar una representación bar-tórica de todo el grafo G (ver Figura 3.19).

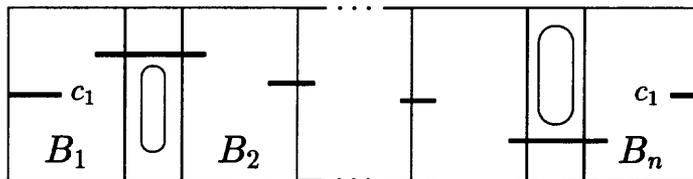
Recíprocamente, si G es bar-tórico y existe un conjunto $K = \{c_1, c_2, c_3\}$ de tres puntos de corte, no puede existir otro vértice v K -periconectado con ninguno de ellos ya que cada punto de corte establece un meridiano que no interseca a ninguna barra de la bar-representación en el toro, es decir, al existir tres puntos de corte deben existir tres bandas B_1 , B_2 y B_3 en el toro, según muestra la Figura 3.20, conectadas por dichos puntos de corte.

Cualquier vértice que estuviese K -periconectado a c_1 , c_2 o c_3 haría que, al menos, uno de ellos no fuese punto de corte, ya que la barra correspondiente al vértice v debería, necesariamente, atravesar una de las zonas de separación

y, por tanto, la eliminación del punto c_i correspondiente no desconectaría al grafo. ■



(a)



(b)

Figura 3.19: Bar-representaciones de B en el cilindro (a) y G en el toro (b).

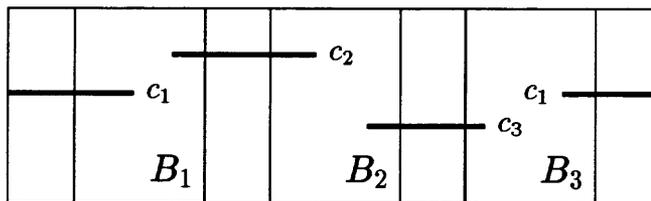


Figura 3.20: Tres puntos de corte determinan tres bandas en el toro.

Una vez resuelto el caso plano, estudiamos el caso no plano. En primer lugar consideramos el caso no 2-conexo. De hecho, es éste la clave para resolver el caso 2-conexo. En ambos casos, dividiremos el grafo en dos *partes* por un conjunto de corte, donde si G es un grafo y C un conjunto de corte de G ,

llamamos *parte* a cualquier subgrafo inducido por una componente de $G - C$ y C .

Teorema 3.2.5. (CASO 4) *Sean G un grafo tórico conexo y no plano, v un punto de corte de G y B_1, \dots, B_n las partes de G relativas a v . El grafo G es bar-tórico si, y sólo si, B_1, \dots, B_{n-1} son planas y 2-conexas, y $B_n - \{v\}$ admite una bar-representación en el cilindro con todos los vértices adyacentes a v situados en las caras Izquierda y Derecha.*

DEMOSTRACIÓN: Si v es un punto de corte de un grafo bar-tórico G entonces una representación bar-tórica de G es:

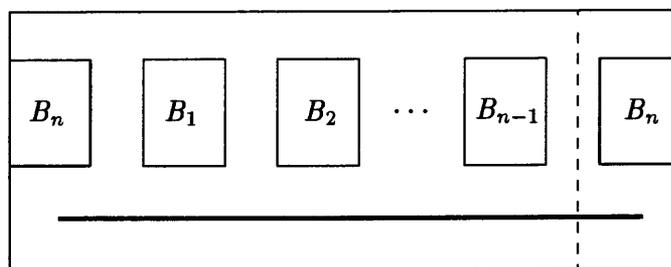


Figura 3.21 : Una representación bar-tórica de un grafo con un punto de corte.

Claramente, las partes B_i ($1 \leq i \leq n - 1$) son bar-cilíndricas y 2-conexas (y, por tanto, planas y 2-conexas). Esto implica que la parte B_n es no-plana pero, cortando por el meridiano marcado obtenemos una representación bar-cilíndrica de B_n^* (grafo obtenido de B_n duplicando v).

Entonces, los vértices de $B_n - \{v\}$ adyacentes a v están situados en las caras *Izquierda* y *Derecha* en una representación bar-cilíndrica.

Recíprocamente, si trazamos una representación bar-cilíndrica de $B_n - \{v\}$ con los vértices adyacentes a v en las caras *Izquierda* y *Derecha*, podemos

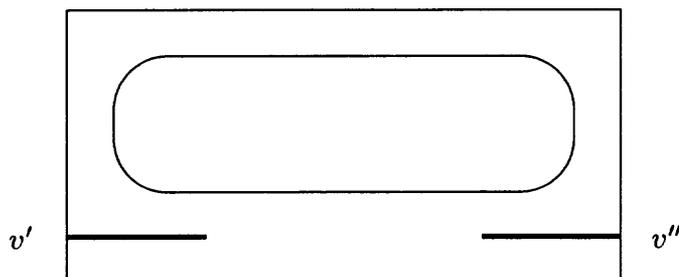


Figura 3.22: Una representación bar-cilíndrica de B_n^* .

prolongar en escalera todas las barras de dichas caras y añadir una nueva barra que represente al vértice v para obtener de esta forma una representación bar-tórica de B_n . ■

Una vez caracterizado el caso no 2-conexo y utilizando las mismas ideas, podremos caracterizar a aquellos grafos tóricos no 3-conexos que son bar-tóricos. Para ello, utilizaremos la siguiente definición que hace referencia a barras que representan vértices.

Diremos que dos barras que representan a una pareja de corte de G son *no-paralelas* si existe un meridiano que sólo intersecta a una de las barras, dicha barra la denominaremos *singular* mientras que si, por el contrario, cualquier meridiano que corte a una de ellas corta también a la otra, diremos que las barras son *paralelas* (ver Figura 3.23). Obsérvese que siempre existen meridianos que cortan, a lo sumo, a las dos barras.

Cuando el grafo es 2-conexo consideraremos dos casos diferentes, según que las barras correspondientes a los puntos de corte sean *paralelas* o *no paralelas*.

Cuando un grafo 2-conexo admite una bar-representación en el toro en la que existe una pareja de corte no-paralela, nos encontramos, en términos generales, en el caso del Teorema 3.2.5.

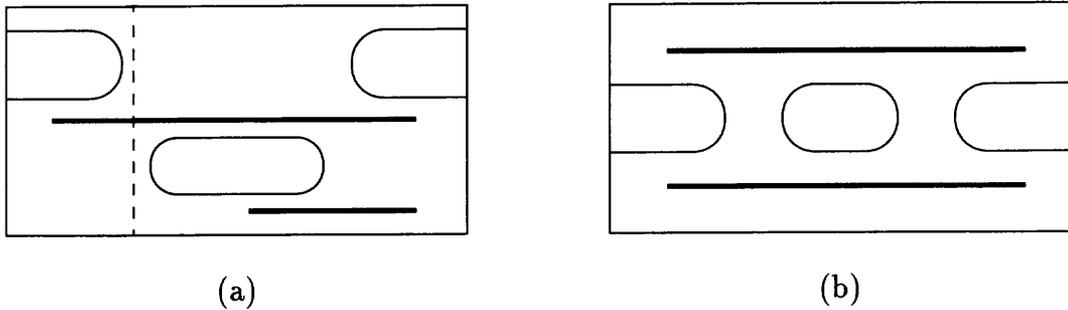


Figura 3.23: Una pareja de corte con una barra singular (a) y dos barras paralelas (b).

Teorema 3.2.6. (CASO 5a) Sean G un grafo tórico, 2-conexo y no plano y $C = \{v_1, v_2\}$ una pareja de corte de G . El grafo G admite una bar-representación en el toro y la barra que representa a v_1 es una barra singular si, y sólo si, $G - \{v_1\}$ admite una bar-representación en el cilindro con todos los vértices adyacentes a v_1 situados en las caras Izquierda y Derecha.

DEMOSTRACIÓN: La demostración de este teorema corre de manera similar a la del Teorema 3.2.5., sin más que observar que la barra correspondiente al punto v_1 puede jugar el mismo papel que hacía el vértice v en la anterior demostración. ■

Finalmente, consideremos el caso de los grafos 2-conexos en los que todas las parejas de corte en todas sus bar-representaciones son paralelas.

Dado un grafo tórico G y una pareja de corte $C = \{v_1, v_2\}$, diremos que la bar-representación en el cilindro de $G - C$ es $\{v_1, v_2\}$ -extensible si los vértices adyacentes a v_1 o a v_2 , están representados por barras situados en las caras *Izquierda* y *Derecha* de tal forma que los ciclos correspondientes a estas dos caras pueden ser descompuestos en dos intervalos en uno de los cuales están todas las barras que representan vértices adyacentes a v_1 y en el otro todas las que representan vértices adyacentes a v_2 (esos intervalos sólo se intersectan en

los extremos) y además, existe una generatriz del cilindro que intersecta a los dos intervalos correspondientes a v_i ($i = 1, 2$) en ambas caras.

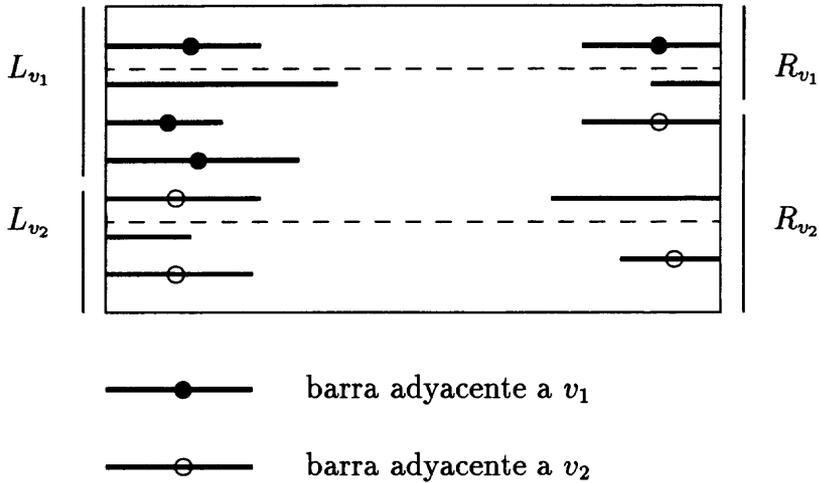


Figura 3.24: Una bar-representación $\{v_1, v_2\}$ -extensible de $G-C$ en el cilindro.

Teorema 3.2.7. (CASO 5b) Sean G un grafo tórico, 2-conexo y no-plano, $C = \{v_1, v_2\}$ una pareja de corte de G , y B_1, \dots, B_n las partes of G inducidas por C . El grafo G es bar-tórico y las barras que representan a v_1 y v_2 son paralelas si, y sólo si B_1, \dots, B_{n-1} son planas y 2-conexas, y $B_n - \{C\}$ tiene una bar-representación $\{v_1, v_2\}$ -extensible en el cilindro.

DEMOSTRACIÓN: De nuevo la demostración es muy similar a la del Teorema 3.2.5. teniendo en cuenta que cuando antes cortábamos por un meridiano específico para poder así obtener una representación bar-cilíndrica de B_n^* , el papel de dicho meridiano debe jugarlo ahora uno que sólo corte a las dos barras paralelas. ■

3.3 Aspectos algorítmicos

La caracterización de los grafos bar-tóricos se ha realizado considerando cinco casos diferentes dependiendo de que el grafo G sea:

- 1) no-conexo,
- 2) 3-conexo,
- 3) conexo y plano,
- 4) conexo, no-2-conexo y no plano, o
- 5) 2-conexo, no-3-conexo y no plano.

Si queremos desarrollar un algoritmo que estudie si el grafo G es bar-tórico debemos conocer, en primer lugar, en cuál de los casos nos encontramos es decir, debemos conocer si el grafo G es 2-conexo o 3-conexo y si es o no plano. Pero es bien conocido que todas estas cuestiones pueden ser estudiadas en tiempo lineal (véase, por ejemplo [3]).

Si G se encuentra en el primer caso recuérdese que bar-tórico es equivalente a bar-cilíndrico y, por tanto, Tamassia y Tollis [71] dan un algoritmo que, en tiempo lineal, encuentra una bar-representación de G , si ésta existe, y además obtenemos de forma automática una bar-representación en el toro. En los otros casos, también podemos utilizar el algoritmo de Tamassia y Tollis [71].

Cuando G es 3-conexo, siguiendo la demostración del Teorema 3.2.5. sólo es necesario encontrar un ciclo que rodee al toro, lo que es equivalente a encontrar un camino entre dos puntos fijos de un grafo plano y esto también puede conseguirse en tiempo lineal.

Un algoritmo de búsqueda en profundidad nos permite decidir si existe un punto K -periconectado con los vértices de un subgrafo K de G como prueban

Oubiña y Zuchello [56]. Por tanto, es posible resolver el tercer caso en tiempo lineal.

Cuando el grafo no es plano se presentan algunos problemas. Básicamente, en este caso es necesario decidir cuándo un subgrafo dado es W -2-periplano y, en su caso, si los vértices de W pueden ser situados en las caras *Izquierda* y *Derecha* de una inmersión en el cilindro.

Ambos problemas pueden ser resueltos con facilidad si el subgrafo tiene un punto de corte. En ese caso, como el subgrafo es bar-cilíndrico, su árbol de bloques-puntos-de-corte es una oruga [71], en esta oruga los puntos de corte están situados en un camino, y el ser W -2-periplano de tal manera que los vértices de W puedan ser situados en las caras *Izquierda* y *Derecha* de una inmersión en el cilindro, es equivalente a determinar si los vértices de W están situados en dos bloques que sean adyacentes en el árbol de bloques-puntos-de-corte a los dos puntos de corte extremos del camino, y si en cada uno de estos bloques, los vértices de W están en una cara. Todo ello puede ser resuelto, en tiempo lineal (determinar cuándo admite un grafo una inmersión plana con un conjunto seleccionado de vértices en la misma cara es un problema resuelto por Oubiña y Zucchello [56] en tiempo lineal).

El caso más complicado aparece cuando el subgrafo es 2-conexo. En este caso, sólo es necesario verificar que el subgrafo es W -2-periplano, ya que, en un grafo plano 2-conexo, es posible situar dos caras cualesquiera en las caras *Izquierda* y *Derecha* de una representación bar-cilíndrica (see [71]). Esto es equivalente a conocer si dado un grafo plano es bar-esférico, y en [70] un algoritmo resuelve este problema en tiempo lineal.

El siguiente teorema resume los resultados obtenidos en esta sección.

Teorema 3.3.1. *Dado un grafo tórico, existe un algoritmo que, en tiempo lineal, estudia la existencia, y construye, una bar-representación suya en el toro.*

3.4 Índice bar

Una vez realizado el estudio sobre la superficie del toro surge, de manera natural, el problema de la bar-visibilidad sobre superficies de género mayor que uno, es decir, sobre esferas de n asas con $n > 1$.

El primer problema que debemos resolver es el de encontrar representaciones planas de las superficies de género n . Para ello, podemos hacer uso del *teorema general de la clasificación de las superficies* [32] que nos dice:

Teorema 3.4.1. *Toda superficie cerrada, conexa y orientable es homeomorfa a una de las superficies poligonales estándares S_0, S_1, S_2, \dots .*

Estas superficies poligonales estándares S_n viene definidas por polígonos de $4n$ lados los que se han identificado sus lados dos a dos según el esquema representado en la Figura 3.25.

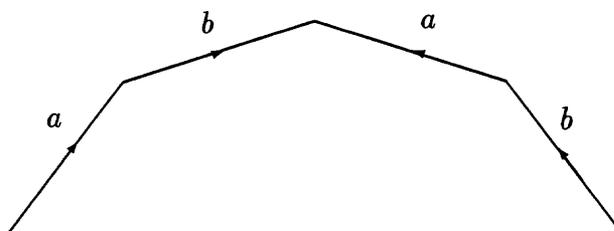


Figura 3.25: Una de las *asas* de una esfera de n asas.

Así, por ejemplo, la manera usual de representar al doble toro, o esfera de dos asas, es mediante un octógono con sus lados identificados dos a dos según el esquema de la Figura 3.26.

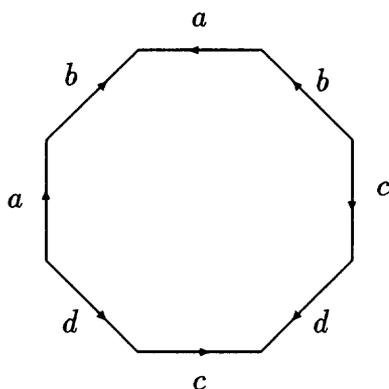


Figura 3.26: Representación poligonal del doble toro.

Sin embargo, podemos observar que en todas las representaciones de visibilidad que venimos realizando, tanto en el plano como en la esfera, en el cilindro o en el toro, ha sido fundamental el hecho de disponer de un sistema de referencia ortogonal que nos permita representar las barras en una dirección y definir la visibilidad ortogonalmente a ésta. Como puede verse, las superficies poligonales estándares carecen de dicho sistema de referencia ortogonal, por lo que nos vemos en la obligación de establecer otras formas de representación de superficies que admitan tales sistemas de referencia.

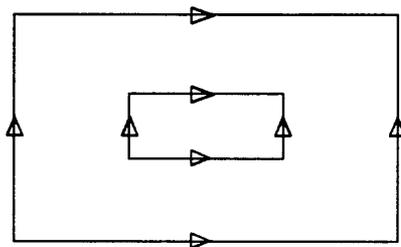


Figura 3.27: El doble toro.

Si consideramos el toro plano y *recortamos* una *ventana* (un rectángulo de lados paralelos a los del toro plano) en el cual identificamos el borde superior con el inferior así como el derecho con el izquierdo, obtenemos una superficie plana homeomorfa al doble toro (ver Figura 3.27) pues basta con observar que la ventana que hemos introducido le agrega un asa al toro (una circunferencia que rodee a dicha ventana representará a la circunferencia de unión de las dos asas del doble toro).

Podemos observar que los bordes del toro plano inicial y los de la ventana que hemos añadido se corresponden con un paralelo y un meridiano correspondiente a cada una de sus asas (ver Figura 3.28) al igual los lados a, b, c y d del octógono que representa, usualmente, al doble toro se corresponden con las curvas cerradas indicadas en la Figura 3.29.

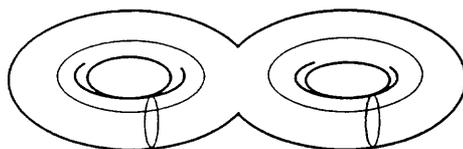


Figura 3.28: Las secciones en el doble toro que producen O_2 .

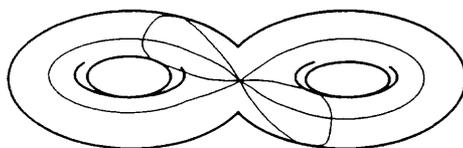


Figura 3.29: Las secciones en el doble toro que producen S_2 .

Además, si denominamos *superficie ortogonal estándar* O_n ($n > 0$) a la superficie resultante de abrir $n - 1$ ventanas en el toro plano (véase la Figura 3.30) e identificamos O_0 con S_0 , podemos dar el siguiente teorema general de clasificación de superficies:

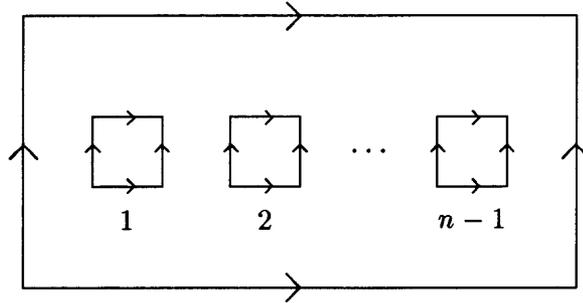


Figura 3.30: La superficie ortogonal estándar O_n .

Teorema 3.4.2. *Toda superficie cerrada, conexa y orientable es homeomorfa a una de las superficies ortogonales estándares O_0, O_1, O_2, \dots .*

Puede observarse, además, que esta forma de representación permite una mayor simplicidad no sólo en representaciones de visibilidad sino también en representaciones topológicas. Así, por ejemplo, puede verse en la Figura 3.31 una sencilla representación de K_8 en el doble toro.

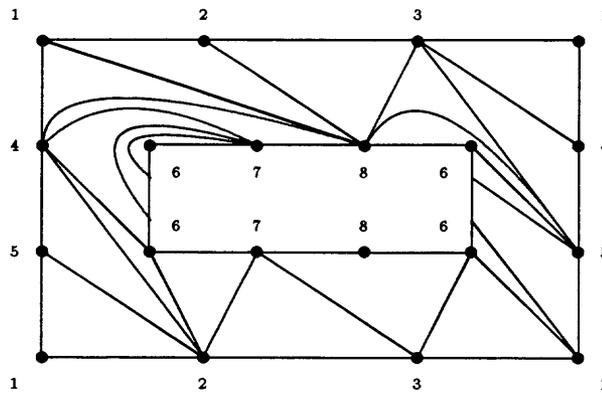


Figura 3.31: K_8 en el doble toro.

Una vez establecida la manera de representar una esfera de n asas con un sistema ortogonal de referencia, estamos en condiciones de poder generalizar el concepto de bar-visibilidad para una superficie cualquiera de género n .

Decimos que un grafo G es bar-representable en una superficie de género n si existe una bar-representación de G en la superficie ortogonal estándar O_n donde las barras vienen representadas por segmentos horizontales y la visibilidad (no degenerada) es ortogonal a ellos.

Teorema 3.4.3. *Todo grafo es bar-representable en una esfera de n asas.*

DEMOSTRACIÓN: La demostración la haremos haciendo inducción sobre el número de vértices del grafo G . Para grafos de menos de cinco vértices, al ser planos son bar-representables en el plano y, por tanto, en la esfera, es decir son bar-representables en una superficie de género cero.

Sea G un grafo de p vértices y supongamos que $G - \{v\}$ (grafo resultante de eliminar un vértice de G) es bar-representable en una esfera de m asas, y veamos que entonces G es bar-representable en una esfera de n asas. En efecto: partamos de una bar-representación de $G - \{v\}$ en una esfera de m asas y añadamos una nueva barra, que representará al vértice v y que recorra casi toda la superficie.

Marquemos ahora los vértices (barras) adyacentes al vértice v . Si existe alguna barra que impida que v vea a alguna de sus adyacentes, añadimos nuevas ventanas sobre todas las barras que impiden dicha visibilidad. Si por el contrario v ve a alguna barra que corresponda a un vértice w no adyacente a él, añadimos ventanas sobre la barra correspondiente a v y/o sobre la barra correspondiente a w de forma que, entre todas las ventanas añadidas, se impida dicha visibilidad. Así, por ejemplo, en la Figura 3.32 podemos observar como se ha conseguido la visibilidad entre v y 1 añadiendo una ventana en la barra 6 y entre v y 2 añadiendo otra ventana en la barra 7 mientras que se ha impedido la visibilidad entre v y 5 añadiendo una ventana en v y entre v y 7 añadiendo tres ventanas, una en 7 y dos en v . ■

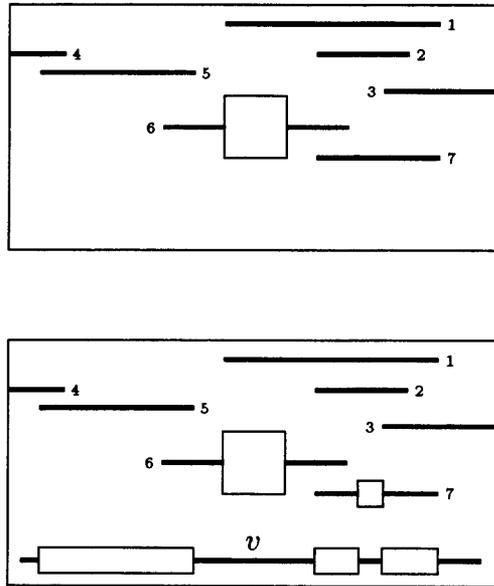


Figura 3.32: Cómo añadir un nuevo vértice v que sólo vea a 1, 2, 3, 4 y 6.

De manera análoga a la definición de *género* de un grafo podemos dar la siguiente: si un grafo G es bar-representable en una esfera de n asas pero no lo es en una de $n - 1$ asas, diremos que tiene *índice bar* n y lo denotaremos por $BI(G) = n$.

Teorema 3.4.4. *Para todo grafo G , se verifica que $BI(G) \geq g(G)$.*

DEMOSTRACIÓN: La demostración de este teorema es totalmente equivalente a la realizada con anterioridad para el caso del toro en el Teorema 3.2.1. ■

3.5 Conclusiones y problemas abiertos.

Al igual que el de *índice de representación*, el de *índice bar* es un concepto que no debemos confundir con las ideas de *género* o de *dimensión* pues puede darse el caso de que el índice bar de un grafo sea n mientras que el de un subgrafo suyo sea mayor que n .

Por ejemplo, el grafo G de la Figura 3.33, al ser plano y 3-conexo, es bar-tórico (Teorema 3.2.3.) es decir, tiene índice bar igual a 1 y, sin embargo, posee un subgrafo no conexo (dibujado en trazo grueso) que no lo es, en otras palabras, cuyo índice bar es mayor que el de G .

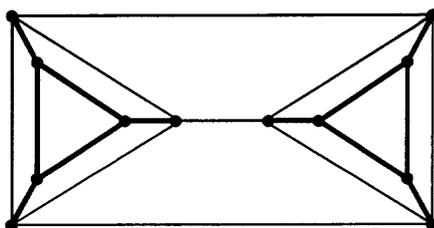


Figura 3.33: Un grafo bar-tórico con un subgrafo que no lo es.

Se ha dado, atendiendo a cierta casuística, una caracterización de los grafos bar-representables en el toro y se ha visto que existen algoritmos que en tiempo polinomial dibujan, si existe, la bar-representación en el toro de un grafo dado.

Una vez estudiados y resueltos los problemas de la representación y caracterización de los grafos bar-representables en superficies de géneros 0 (plano, esfera y cilindro) y 1 (toro) se plantea el problema de determinar el índice bar de un grafo G cualquiera, o bién el otro (aun más complejo) de, una vez determinado su índice bar, dar una bar-representación del grafo en la esfera de n asas correspondiente.

En definitiva, todos los problemas que se abrieron al introducir el con-

cepto de *género* de un grafo y que se reabrieron con el concepto de *índice de representación* pueden ser trasladados ahora al de *índice bar*.

Así, por ejemplo, dado que es conocido que la determinación del género de un grafo es un problema NP surge, de manera natural, la pregunta de si la determinación del índice bar de un grafo cualquiera es también un problema NP.

Sería también interesante tratar de buscar relaciones entre el índice de representación, el índice bar y el género de un grafo.

Referencias

- [1] A. Aggarwal. *The Art Gallery Theorem: its Variations, Applications and Algorithmic Aspects*. PhD thesis, The John Hopkins University, Baltimore, 1984.
- [2] A. V. Aho, J. E. Hopcroft y J. D. Ullman. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
- [3] A. V. Aho, J. E. Hopcroft y J. D. Ullman. *Data Structures and Algorithms*. Addison-Wesley Publishing Company, 1983.
- [4] H. Alt, M. Godau y S. Whitesides. Universal 3-Dimensional Visibility Representations for Graphs. Abstract presented at *Graph Drawing'95*. Passau. Germany.
- [5] D. Avis y H. Elgindy. A combinatorial approach to polygon similarity. *IEEE Transactions on Information Theory IT*, 29 (1983) 148–150.
- [6] D. Avis y G. T. Toussaint. An efficient algorithm for decomposing a polygon into star-shaped pieces. *Pattern Recognition*, 13 (1981) 295–298.
- [7] P. Bachmann. *Die analytische Zahlentheorie*. Teubner, Leipzig, 1894.
- [8] G. Di Battista y R. Tamassia. Algorithms for plane representations of acyclic digraphs. *Theoretical Computer Science*, 61 (1988) 175–198.
- [9] S. Bellantoni, I. Ben-Arroyo Hartman, T. Przytycka y S. Whitesides. Grid intersection graphs and boxicity. North-Holland. *Discrete Mathematics*, 114 (1993) 41–49.

-
- [10] P. Bose, H. Everett, S. Fekete, A. Lubiw, H. Meijer, K. Romanik, T. Shermer y S. Whitesides. On a Visibility Representation for Graphs in Three Dimensions. In David Avis y Prosenjit Bose, editors, *Snapshots in Computational and Discrete Geometry*, volume III, McGill University, July 1994. Technical Report SOCS-94.50.
- [11] W. Bronsvoort. Boundary evaluation and direct display of CSG models. *Computer-Aided Design*, 20 (1988) 416–419.
- [12] G. Chartrand y F. Harary. Planar permutation graphs. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect B 3 (1967) 433–438.
- [13] G. Chartrand y L. Lesniak. *Graphs & Digraphs*. Wadsworth & Brooks/Cole, 1986.
- [14] B. Chazelle. Triangulating a simple polygon in linear time. *Discrete and Computational Geometry*, 6 no. 5 (1991) 485–524.
- [15] B. Chazelle y J. Incerpi. Triangulation and shape-complexity. *ACM Trans. Graph*, 3 (1984) 135–152.
- [16] F.R.K. Chung. On unimodal subsequences. *J. Combinatorial Theory*, Series A, v. 29 (1980) 267–279.
- [17] V. Chvátal. A combinatorial theorem in plane geometry. *Journal of Combinatorial Theory*, series B, 18 (1975) 39–41.
- [18] F.J. Cobos, J.C. Dana, F. Hurtado, A. Márquez y F. Mateos. On a Visibility Representation of Graphs. *Graph Drawing'95*. Lecture Notes in Computer Science. Springer-Verlag. Berlin. (Por aparecer).
- [19] F.J. Cobos, J.C. Dana, A. Márquez y F. Mateos. Hélices en el cilindro y en el toro y planificación de movimientos de robots. Prepublicación MA1-01-95X del Dpto. de Matemática Aplicada I de la Universidad de Sevilla. 1995.
- [20] F.J. Cobos, J.C. Dana, A. Márquez y F. Mateos. Representation of graphs on a torus. Prepublicación MA1-02-95X del Dpto. de Matemática Aplicada I de la Universidad de Sevilla. 1995.

- [21] T. Cormen, C. Leiserson y R. Rivest. *Introduction to Algorithms*. McGraw-Hill, 1990.
- [22] H. Croft, K. Falcon y R. Guy. *Unsolved Problems in Geometry*. Springer-Verlag, 1991.
- [23] L. Davis y M. Benedikt. Computational models of space: Isovist and isovist fields. *Computer Graphics and Image Processing*, 11 (1979) 49–72.
- [24] P. Duchet, Y. Hamidouze, M. Las Vergnas y H. Meyniel. Representing a planar graph by vertical lines joining different levels. *Discrete Math.*, 46 (1983) 319–321.
- [25] H. Edelsbrunner. *Algorithms in Combinatorial Geometry*. Springer-Verlag, 1987.
- [26] H. Elgindy. *Hierarchical Decomposition of Polygons with Applications*. PhD thesis, McGill University, 1985.
- [27] K. Eo y C. Kyung. Hybrid shadow testing scheme for any tracing. *Computer-Aided Design*, 21 (1989) 38–48.
- [28] P. Erdős y A. Szekeres. A combinatorial problem in geometry. *Compositio Mathematica*, v. 2 (1935) 463–470.
- [29] S. Even. *Graph Algorithms*. Computer Science Press, Potomac. MD, 1979.
- [30] S.P. Fekete, M.E. Houle y S. Whitesides. New Results on a Visibility Representation of Graphs in 3D. Abstract presented at *Graph Drawing'95*, Passau. Germany.
- [31] S. Fisk. A short proof of Chvátal's Watchman theorem. *Journal of Combinatorial Theory, series B*, 24 (1978) 374.
- [32] M. Fréchet y Ky Fan. *Initiation to Combinatorial Topology*. Boston: Prindle. Weber and Schmidt, 1967.
- [33] J. García. *Problemas Algorítmico-combinatorios de Visibilidad*. PhD thesis, Universidad Politécnica, Madrid, 1995.

-
- [34] M. Garey, D. Johnson y H. So. An application of graph coloring to printed circuit testing. *IEEE Trans. Circuits and Systems.*, CAS-23 (1976) 591–598.
- [35] L. J. Guibas y F. F. Yao. On traslating a set of rectangles. In F. P. Preparata, editor, *Advances in Computing Research*, volume 1, pages 61–77. JAI Press Inc, Greenwich. CT., 1976.
- [36] R. Halin. Zur häufungspunktfreien Darstellung adzählbarer Graphen in der Ebene. *Arch. Math.*, 17 (1966) 239–242.
- [37] F. Harary. *Graph Theory*. Addison Wesley. Reading Mass., 1969.
- [38] J. Hershberger. Finding the visibility graph of a polygon in time proportional to its size. In *Proc. 3rd ACM Symposium on Computational Geometry*, pages 11–20, 1987.
- [39] M. Y. Hsueh y D. O. Pederson. Computer-aided layout of LSI circuit bulding bloks. *Proc. IEEE Int. Symp. on Circuits and Systems.*, pages 474–477.
- [40] V. Klee y S. Wagon. *Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and NUMBER Theory*. Number 11 in Math. Assoc. of America. Dolcaini Mathematical Expositions, 1991.
- [41] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming*. Addison-Wesley, 1973.
- [42] D. E. Knuth. Big omicron and big omega and big theta. *SIGACT News*, 8(2) (1976) 18–24.
- [43] J. Kratochvil y T. Przytycka. Grid intersection graphs and boxicity on surfaces. Abstract presented at *Graph Drawing'95*. Passau. Germany.
- [44] R. Kuc y M. Siegel. Efficient representation of reflecting structures for a sonar navigation model. In *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1987.
- [45] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15 (1930) 271–283.

- [46] D. Lee y A. Lin. Computational complexity of art gallery problems. *IEEE Transactions on Information Theory IT*, 32 (1986) 276–282.
- [47] E. Lodi y L. Pagli. A VLSI algorithm for a visibility problem. In P. Bertolazzi y F. Luccio, editors, *VLSI: Algorithms and Architectures*, pages 125–134. North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [48] T. Lozano-Pérez y M. Wesley. An optimal for planning collision-free paths among polyhedral obstacles. *Communications of the ACM*, 22 (1979) 560–570.
- [49] M. McKenna. Worst case optimal hidden-surface removals. *ACM Trans. Graph.*, 6 (1987) 19–28.
- [50] K. Mehlhorn. *Data Structures and Algorithms*. Springer-Verlag, 1984.
- [51] A.A. Melkman. On-line construction of the convex hull of a simple poly-line. *Information Processing Letters*, 25 (1987) 11–12.
- [52] S.L. Mitchell. Linear algorithms to recognize outerplanar and maximal outerplanar graphs. *Information Processing Letters*, 9(5) (1979) 229–232.
- [53] W. Moser y J. Pach. *Research Problems in Discrete Geometry*. McGill-University, 1991.
- [54] T. Nishizeki y N. Chiba. *Planar Graphs: Theory and Algorithms*, volume 32 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, 1988.
- [55] J. O'Rourke. *Art Gallery Theorems and Algorithms*. Oxford University Press, 1987.
- [56] L. Oubiña y R. Zucchello. A generalization of outerplanar graphs. *Discrete Mathematics, North-Holland*, 1(51) (1984) 243–249.
- [57] F. P. Preparata. *Computational Geometry*. Jai Press, 1983.
- [58] F.P. Preparata y M.I. Shamos. *Computational Geometry*. Springer-Verlag, 1985.

- [59] I. Rival y J. Urrutia. Representing orders by translating convex figures in the plane. *Order*, 4 (1988) 319–339.
- [60] F. S. Roberts. *Applied Combinatorics*. Prentice-Hall, 1984.
- [61] P. Rosenstiehl y E. Tarjan. Rectilinear planar layouts of planar graphs and bipolar orientations. *Discrete and Computational Geometry*, 1 (1986) 342–351.
- [62] G. Roy y J. Owen. Sr: a pc-based cad system for shadow and reflection studies in the built environment. *Computer-Aided Design*, 21 (1989) 497–504.
- [63] M. Schlag, F. Luccio, P. Maestrini, D. T. Lee y C. K. Wong. A visibility problem in VLSI layout compaction. In F. P. Preparata, editor, *Advances in Computing Research*, volume 2, pages 259–282. JAI Press Inc, Greenwich. CT., 1985.
- [64] M. I. Shamos. *Computational Geometry*. PhD dissertation, Yale University, 1977.
- [65] T. Shermer. Recent results in art galleries. In *Proceedings of the IEEE*, september 1992.
- [66] J. Stenstrom y C. Connolly. Building wire frames for multiple range views. In *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1986.
- [67] R. Tamassia y I. G. Tollis. Representations of a cylinder. *Discrete Mathematics*, 4(1) (1991) 139–149.
- [68] R. Tamassia y I.G. Tollis. A unified approach to visibility representations of planar graphs. *Discrete and Computational Geometry*, 1 (1986) 321–341.
- [69] R. Tamassia y I.G. Tollis. Planar and grid embedding in linear time. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, CAS-36 (1989) 1230–1234.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

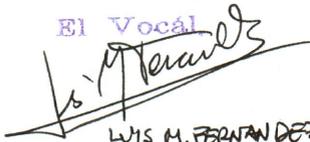
Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de

D. Fco. Javier Cobos Gavala
titulada Sobre visibilidad en espacios n-dimensionales y superficies no planas

acordó otorgarle la calificación de Apto Cum Laude

Sevilla, 15 de diciembre 1995

El Vocal,

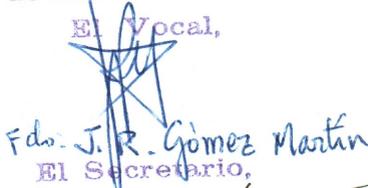


LUIS M. FERNANDEZ PEREZ

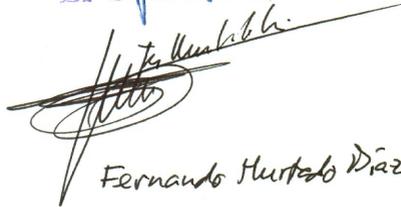
El Presidente



El Vocal,

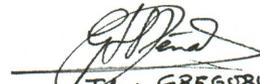


Fco. J. R. Gomez Martin
El Secretario,



Fernando Hurtado Diaz

El Vocal,



Fco.: GREGORIO HERNANDEZ

El Doctorado,

