

# Trabajo Fin de Grado

## Grado de Ingeniería Aeroespacial

### Diseño de perfiles aerodinámicos mediante metodología inversa

Autor: Aitor Robles Corpa

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

**Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2015





Trabajo Fin de Grado  
Grado de Ingeniería Aeroespacial

# **Diseño de perfiles aerodinámicos mediante metodología inversa**

Autor:

Aitor Robles Corpa

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor Titular

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015



Trabajo Fin de Grado: Diseño de perfiles aerodinámicos mediante metodología inversa

Autor: Aitor Robles Corpa

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el trabajo arriba indicado, compuesto por los siguientes profesores:

Presidente:

Vocal/es:

Secretario:

acuerdan otorgarle la calificación de:

El Secretario del Tribunal

Fecha:



*A mi familia,  
por todo su apoyo, comprensión  
y cariño durante todos estos años.*

*A mis amig@s,  
por esos largos días de biblioteca  
resolviendo problemas juntos.*

*A Pilar y Saúl,  
por enseñarme que las matemáticas son  
algo más que números y operaciones.*

*A mi tutor Miguel Pérez-Saborid,  
por su orientación, apoyo y dedicación.*

*A todos, muchas gracias*



# Resumen

---

El objetivo de este proyecto es el desarrollo de un programa mediante Matlab que sea capaz de calcular las características geométricas de un perfil aerodinámico a partir de una distribución de presiones  $C_p$  especificada. Con el fin de conseguir la mejor precisión posible se utilizan tres metodologías diferentes: la primera basada en el método de paneles de Vortex-Lattice, la segunda con series de Fourier y la tercera adapta la fórmula de inversión de Söhngen. Los códigos han sido desarrollados considerando flujo potencial, es decir, no tienen en cuenta ni efectos viscosos ni compresibilidad del fluido.

La comparación de los resultados se realiza viendo si los perfiles calculados reproducen las secciones buscadas. Para ello, se toman una serie de perfiles en distintas condiciones, y se introducen las presiones del flujo potencial en los programas. Las distribuciones de presiones son obtenidas bien mediante el método de Green implementado por Gordillo[11], o usando el software libre XFLR5.



# Abstract

---

The objective of this project is to develop a program using Matlab to be able to calculate the geometric characteristics of an airfoil from a specified pressure distribution. In order to achieve the best possible accuracy, three different methodologies are used: the first method based on Vortex-Lattice panels, the second is Fourier series and the third adapts Söhngen inversion formula. The codes were developed considering potential flow, in other words, they not consider viscous effects neither fluid compressibility effects.

The comparison of the results is performed to see if the calculated profiles reproduce the searched sections. To this end, a series of profiles under different conditions are considered, and the pressures of potential flow is introduced into the programs. Pressure distributions are obtained either by the method of Green implemented by Gordillo, or using the free software XFLR5.



# Índice

---

<i>Resumen</i>	III
<i>Abstract</i>	V
<i>Índice de Figuras</i>	IX
<i>Índice de Tablas</i>	XI
<i>Introducción</i>	XIII
<b>1. Fundamentos del diseño inverso</b>	<b>1</b>
1.1. Perfiles aerodinámicos	1
1.1.1. Reseña histórica	1
1.1.2. Definición y descripción de un perfil aerodinámico	3
1.1.3. Clasificación de perfiles. Familias	5
Series NACA	6
Clasificación alternativa	7
1.2. Fuerzas aerodinámicas	7
1.2.1. Sustentación y Resistencia	8
1.2.2. Capa límite e influencia de la viscosidad	13
1.3. Métodos de diseño	17
1.3.1. Diseño directo	18
1.3.2. Diseño inverso	20
Código de Eppler	21
Códigos actuales	24
<b>2. Planteamiento del problema</b>	<b>27</b>
2.1. Formulación de las ecuaciones	27
2.2. Resolución teórica	30
2.2.1. Problema de espesor o simétrico	31
2.2.2. Problema de curvatura o antisimétrico	32
2.2.3. Distribución de presiones	33
<b>3. Resolución computacional</b>	<b>35</b>
3.1. Problema de espesor	35
3.1.1. Método de Vortex-Lattice	35
3.1.2. Series de Fourier	37
3.1.3. Fórmula de inversión de Söhngen	39
3.2. Problema de curvatura	42
3.3. Programación	42
3.4. Datos de entrada: Coeficiente de presiones $C_p$	43

---

<b>4. Análisis de los resultados</b>	<b>47</b>
4.1. Primeros pasos: perfiles parabólicos y elípticos	47
4.1.1. Perfiles parabólicos	47
4.1.2. Perfiles elípticos	50
4.2. Perfiles NACA 4 dígitos	53
4.3. Análisis de sensibilidad	58
4.3.1. Mallado	58
4.3.2. Datos de entrada	59
4.3.3. Ángulo de ataque	60
4.3.4. Curvatura y espesor	62
4.4. Flujo real vs Flujo potencial	64
<b>Conclusiones</b>	<b>69</b>
<b>Anexo A. XFLR5</b>	<b>73</b>
<b>Anexo B. Método de Green</b>	<b>79</b>
<b>Anexo C. Código Met. Vortex-Lattice</b>	<b>83</b>
<b>Anexo D. Código Series de Fourier</b>	<b>87</b>
<b>Anexo E. Código Inversión de Söhngen</b>	<b>89</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>93</b>

# Índice de Figuras

---

1.1.	Evolución histórica de los perfiles aerodinámicos [3]	2
1.2.	Justificación del uso de perfiles fuselados para superficies sustentadoras [11]	3
1.3.	Evolución de perfiles en automoción	4
1.4.	Nomenclatura de un perfil alar	4
1.5.	Definición del ángulo de ataque	5
1.6.	Familias de perfiles aerodinámicos	5
1.7.	Origen de las fuerzas aerodinámicas	8
1.8.	Fuerzas aerodinámicas: sustentación y resistencia	9
1.9.	Distribución de sobrepresiones $p' = p - p_\infty$ [13]	9
1.10.	Flujo experimental sobre perfiles simétricos [8]	9
1.11.	Curvas $C_l/\alpha$ [11]	11
1.12.	$C_l/\alpha$ en función de la geometría [13]	11
1.13.	Polar en función del espesor $t$ [11]	12
1.14.	Perfiles de velocidad dentro de la capa límite	13
1.15.	Capa límite sobre secciones	13
1.16.	Evolución de la capa límite [13]	14
1.17.	Capa límite: laminar y turbulenta [8]	14
1.18.	Perfiles de velocidad en la capa límite laminar y turbulenta	15
1.19.	Capa límite sobre perfiles [11]	15
1.20.	Formas de entrada en pérdida [13]	16
1.21.	Perfil en pérdida [8]	16
1.22.	Clasificación de los procesos de diseño	18
1.23.	Proceso de diseño directo [16]	19
1.24.	Theodorsen, Comparación distribución de presiones experimental y teórica [23]	19
1.25.	Proceso de diseño inverso [16]	20
1.26.	Ejemplo de diseño	21
1.27.	Diseño de perfiles [9]	23
1.28.	Método de paneles [9]	23
1.29.	Capa límite [9]	23
1.30.	Fundamentos del método <i>Ball-Spine Algorithm</i>	25
1.31.	Esquema del proceso <i>Ball-Spine Algorithm</i>	25
1.32.	Redes neuronales artificiales	26
1.33.	Estructura de un algoritmo evolutivo	26
2.1.	División del problema completo [11]	30
2.2.	Distribución continua de fuentes [15]	31
2.3.	Distribución continua de torbellinos [15]	32
2.4.	Distribuciones de presión $C_p$	33
3.1.	Vortex-Lattice	36
3.2.	Intensidad de torbellinos $\gamma(x)$ para placa plana	37

3.3.	Cambio de variable $x \rightarrow \theta$	38
3.4.	Comparación entre mallas de integración	41
3.5.	Integración de la pendiente $\frac{dz_e}{dx}$	41
3.6.	Esquema de programación	43
3.7.	Comparación de distribuciones de presiones con flujo potencial a $\alpha = 0^\circ$	44
3.8.	Triángulos semejantes	45
3.9.	Comparación de distribuciones de presiones tras la aproximación lineal en el borde de salida	46
4.1.	Perfil lenticular	47
4.2.	Distribución de presiones asociada a perfiles parabólicos $C_p(x,t)$	48
4.3.	Perfiles parabólicos con $t = 0.1$	49
4.4.	Perfiles parabólicos con $t = 0.2$	49
4.5.	Perfil elíptico	50
4.6.	Distribución de presiones asociada a perfiles elípticos $C_p(x,t)$	51
4.7.	Perfiles elípticos con $t = 0.2$	51
4.8.	Perfiles elípticos con $t = 0.6$	52
4.9.	NACA 0012 , $\alpha = 0^\circ$	54
4.10.	NACA 1412 , $\alpha = 0^\circ$	54
4.11.	NACA 2412 , $\alpha = 0^\circ$	54
4.12.	NACA 0012 , $\alpha = 2^\circ$	55
4.13.	NACA 1412 , $\alpha = 2^\circ$	55
4.14.	NACA 2412 , $\alpha = 2^\circ$	55
4.15.	NACA 0024 , $\alpha = 0^\circ$	56
4.16.	NACA 1424 , $\alpha = 0^\circ$	56
4.17.	NACA 4420 , $\alpha = 0^\circ$	56
4.18.	NACA 0024 , $\alpha = 2^\circ$	57
4.19.	NACA 1424 , $\alpha = 2^\circ$	57
4.20.	NACA 4420 , $\alpha = 2^\circ$	57
4.21.	Estudio del mallado para NACA 0012 , $\alpha = 2^\circ$	58
4.22.	Estudio de los parámetros de entrada para NACA 1412 , $\alpha = 0^\circ$	60
4.23.	Estudio del ángulo de ataque para NACA 0012	61
4.24.	Estudio de la curvatura y el espesor con perfiles NACA 4 dígitos, $\alpha = 0^\circ$	63
4.25.	Comparación flujo real y potencial: NACA 4412 , $\alpha = 0^\circ$	65
4.26.	S. Fourier: Clark Y , $\alpha = 0^\circ$	66
4.27.	S. Fourier: Eppler 211 , $\alpha = 0^\circ$	66
4.28.	S. Fourier: Göttingen 394 , $\alpha = 0^\circ$	66
4.29.	Comparación de métodos de diseño inverso , Boeing 727 , $\alpha = 0^\circ$	67
A.1.	Pantalla inicial del XFLR5	74
A.2.	Pantalla inicial de diseño por método directo	74
A.3.	Diseño de perfiles: NACA 1424 y NACA 0012 con flaps y slaps	75
A.4.	Pantalla inicial del análisis de perfiles	76
A.5.	Configuración del tipo de análisis	76
A.6.	Polar view: características globales	77
A.7.	Distribución de presiones $C_p$ para NACA 1424 a $\alpha = 3^\circ$	78
A.8.	Presentación de los datos exportados	78
B.1.	Superficies para la integral de Green [11]	79
B.2.	Discretización de la geometría en $N$ paneles. Definición de punto medio y vectores tangente y normal de un panel $k$ [11]	80

# Índice de Tablas

---

1.1.	Serie NACA: ventajas, inconvenientes y aplicaciones [1]	6
4.1.	Tiempos de ejecución al variar el mallado	59



# Introducción

---

Si por algo se distingue el ingeniero aeronáutico del resto de ingenieros es por sus conocimientos sobre Aerodinámica. Es la clave que permite explicar y comprender los diversos fenómenos que provoca una corriente fluida sobre un objeto, y cómo aprovecharlos en nuestro beneficio. Existen multitud de superficies que aprovechan estas fuerzas aerodinámicas para distintas aplicaciones como: álabes de compresor, alabes de turbinas de gas y vapor, hélices, rotores, alas, estabilizadores, alerones, spoilers, etc. No obstante, todas ellas parten de la misma base, los perfiles aerodinámicos.

La motivación principal de este proyecto consiste en dar un uso práctico a los conocimientos y herramientas que se han adquirido durante el Grado de Ingeniería Aeroespacial en materia de perfiles. En distintas asignaturas se define la geometría y las propiedades de las secciones, se estudia el comportamiento del flujo a su alrededor, se explican los efectos de la capa límite, y muchas otras cosas; pero en ningún momento se dedica tiempo para hablar sobre cómo se diseñan. Por esta razón surge mi interés, y el origen de este proyecto.

Por otro lado, el motivo de encaminar el trabajo hacia un programa de cálculo es demostrar que hoy en día, bajo la guía de un profesor, cualquier alumno puede crear sus propias rutinas para resolver problemas reales de ingeniería. Tradicionalmente la enseñanza en escuelas de ingeniería se ha basado en clases teóricas en las que se deducen las ecuaciones y se trata de alcanzar soluciones analíticas, que a menudo conllevan largas y tediosas manipulaciones donde el alumno pierde la noción de los conceptos más importantes. Es lógico que durante la formación del ingeniero este deba conocer el origen de las expresiones, pero aún más importante es que sepa aplicarlas adecuadamente y sea capaz de interpretar los resultados. La resolución de las ecuaciones no debe suponer un impedimento. Actualmente, gracias a programas de cálculo numérico como Matlab u Octave, es posible conseguir soluciones de forma numérica con unas cuantas líneas de código, permitiendo al alumno centrarse en las variables del problema. De esta manera el aprendizaje se vuelve más eficiente y ameno. A esto hay que añadirle que, la implementación de programas para resolver problemas prácticos hace que el alumno aplique y desarrolle los conocimientos adquiridos sobre cálculo numérico, imprescindibles en ingeniería.

Los objetivos principales del proyecto son dos. En primer lugar investigar acerca de los posibles métodos que existen para el diseño de perfiles y justificar la necesidad de los mismos. Y segundo, desarrollar un programa de cálculo inspirado en la metodología inversa, bajo las simplificaciones típicas del flujo potencial incompresible. Se evaluarán los resultados y se comparará sus posibilidades respecto a códigos actuales.

El documento está estructurado en cuatro capítulos. El primer capítulo introduce los conceptos básicos relacionados con los perfiles aerodinámicos para justificar la importancia de los diseños, y explica los métodos que existen para abordar el problema de diseño. En el segundo se plantean las ecuaciones del problema que relacionan la forma del perfil con la distribución de presiones, dividiendo el problema en espesor y curvatura. El tercero explica la forma de implementar las soluciones anteriormente encontradas mediante tres métodos numéricos distintos. También se especifica la manera de obtener los datos de entrada necesarios. Por último, en el cuarto capítulo se exponen los resultados, se analizan las características de los tres métodos empleados y se determina cual de ellos es el mejor.



# 1 Fundamentos del diseño inverso

---

Como es natural, antes de abordar cualquier proyecto en ingeniería, es necesario realizar una investigación previa sobre el tema del que se va a tratar, familiarizándose con los conceptos y terminología empleada en dicho campo. El propósito de este primer capítulo es hacer comprender al lector sobre la importancia del diseño de perfiles y cuales son sus fundamentos. Se comenzará por exponer una introducción sobre perfiles aerodinámicos en la que se explica: qué son, cómo surgieron y cuáles son sus características que los hace ser elementos imprescindibles. Además se realizará un estudio sobre los efectos y fuerzas presentes en los perfiles que cualquier ingeniero tiene que tener en cuenta a la hora del diseño. Por último, se hablará sobre los distintos métodos que han surgido a lo largo de la historia con el objetivo de conseguir geometrías cada vez más eficientes. Cabe destacar, que será en este apartado donde el lector podrá comprender el concepto de diseño inverso, que a priori puede resultar extraño o confuso.

## 1.1 Perfiles aerodinámicos

### 1.1.1 Reseña histórica

El primer trabajo serio sobre el desarrollo de las secciones de perfil aerodinámico se inició en la década de 1800. Aunque por aquel entonces ya se sabía que las placas planas producían sustentación al establecer un ángulo de incidencia, algunos intuían que las secciones con curvatura, más parecidas a las alas de las aves, podrían conseguir mayor sustentación y eficiencia.

Bajo esta premisa, HF Phillips patentó una serie de formas aerodinámicas (fig. 1.1.a) en 1884 después de probarlos en uno de los primeros túneles de viento de la historia, en el cual la "corriente artificial de aire" se generaba a partir de la inducción por un chorro de vapor en un tronco de madera a modo de conducto. Casi al mismo tiempo, Otto Lilienthal tenía ideas similares, puesto que creía que la clave del éxito del vuelo residía en la curvatura. Después de estudiar cuidadosamente las formas de las alas de las aves, diseñó y experimentó con una serie de perfiles (fig. 1.1.b) en los que varía tanto el radio de borde de ataque, como el espesor y que están recogidos en su libro *Bird Flight as the Basis of Aviation, 1894*.

En 1903, los hermanos Wright emplearon unas secciones muy parecidas a las propuestas por Lilienthal: delgadas y muy curvadas. Posiblemente la razón de esta selección se debiera a que las primeras pruebas sobre perfiles aerodinámicos se realizaron a muy bajo número de Reynolds, donde dichas secciones se comportan mucho mejor que las más gruesas. Esta creencia errónea de que las superficies aerodinámicas eficientes tenían que ser finas y altamente curvadas fue una de las razones por las que algunos de los primeros aviones eran biplanos.

Pasaron los años y se desarrollaron muchas otras superficies sustentadoras basándose principalmente en ensayo y error. Algunas de las secciones más exitosas de esa época fueron la Clark Y y Göttingen 398, presentes en la fig. 1.1.c, que fueron tomadas como base para una familia de secciones analizadas por la NACA (Comité Consejero Nacional de Aeronáutica) en la década de 1920. Es a partir de la Segunda Guerra Mundial, cuando en los Estados Unidos la NACA, desarrolla la mayor parte de los perfiles empleados en la actualidad. Todos ellos quedaron recogidos en catálogos, como *Summary of Airfoil Data* de Abbott y Von

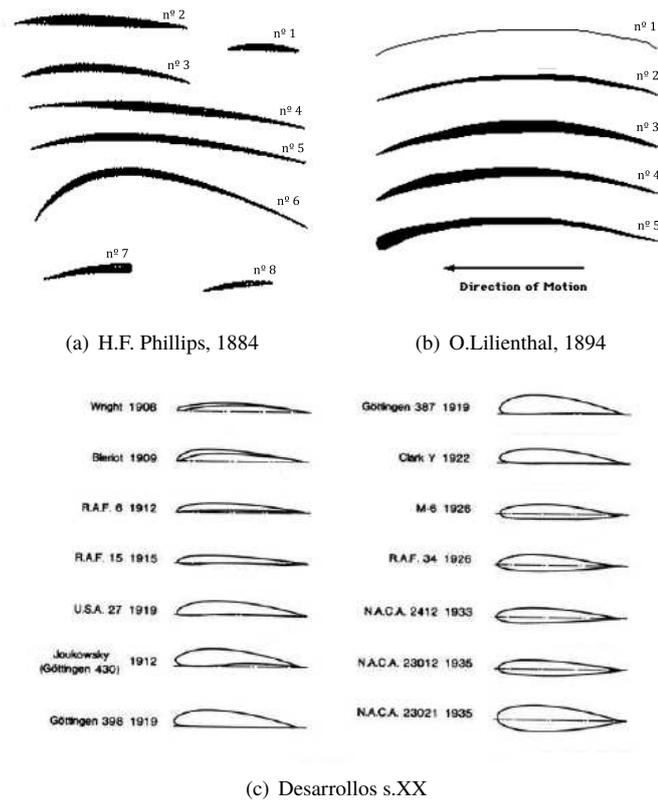


Figura 1.1 Evolución histórica de los perfiles aerodinámicos [3].

Doenhoff [12], donde se define su geometría y sus curvas aerodinámicas. Entre estas secciones destacaban las clasificadas como series de 4 y 5 dígitos.

En los años 50, la NACA dejó de lado el diseño de perfiles para centrarse en el estudio de la aerodinámica a gran velocidad, cuyo objetivo era comprender los fenómenos que ocurren durante un vuelo en régimen transónico y supersónico. Entrados ya en los 60, Somers [22] explica que la NASA (Administración Nacional de la Aeronáutica y del Espacio), sucesora de la NACA, volvió a entrar en el campo de los perfiles con el diseño de perfiles supercríticos por parte de Richard T. Whitcomb. Añade que el conocimiento adquirido durante esos años sirvió para intentar conseguir una nueva serie de flujo turbulento y baja velocidad, mucho más eficiente que los anteriores NACAs. Pese a lograr valores mayores en los coeficiente de sustentación máxima, la resistencia en crucero no fue tan baja como las series de 4 y 5 dígitos.

Lejos de rendirse, la NASA siguió investigando, lo que la llevó hacia los perfiles de flujo laminar natural (NLF). Estas secciones se caracterizan por conseguir mantener el flujo laminar durante gran parte de la cuerda ( $\geq 30\%$ ), tanto en extradós como en intradós, simplemente a base de gradientes favorables de presión. Como se explicará en los siguientes apartados, el mantener flujo laminar sobre el perfil beneficia a la reducción de la resistencia. Por otro lado, Somers [22] apunta que las investigación sobre NLF fueron fomentadas por la aparición de las estructuras compuestas.

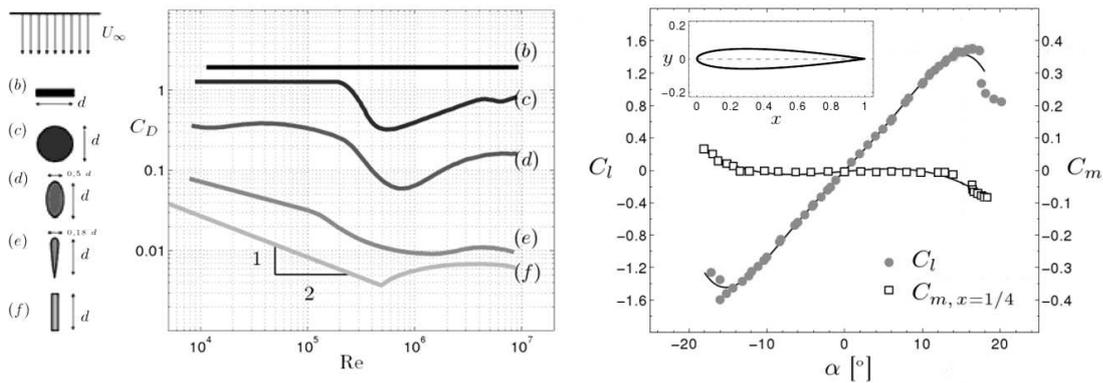
Hoy en día los perfiles son diseñados específicamente para cada aplicación, donde encontramos desde hélices, alas y estabilizadores hasta alabes y carenados. De forma similar a los catálogos existentes en aquella época, actualmente se encuentran en Internet multitud de bases de datos donde pueden ser consultadas las características de muchos perfiles utilizados en aviación civil. Un ejemplo de ello está en [www.airfoiltools.com](http://www.airfoiltools.com), que no sólo permite consultar las gráficas de un perfil sino que además puede mostrar comparativas entre varias secciones. Sin embargo, no toda la información relacionada con los perfiles es pública, como por ejemplo aquellas geometrías asociadas a programas militares o empresas privadas.

1.1.2 Definición y descripción de un perfil aerodinámico

En aeronáutica se denomina perfil aerodinámico, perfil alar, o simplemente perfil, a la forma de la sección transversal de un elemento, que al moverse en el seno de un fluido es capaz de crear una distribución de presiones a su alrededor de manera que genere sustentación. Tal y como explica Anderson [5], la configuración de esta sección, es una de las consideraciones más importantes a la hora de diseñar superficies sustentadoras como alas, o de otros elementos similares como las palas de hélices, los rotores en helicópteros, los álabes de una turbina y/o compresor y estabilizadores. Según el propósito que se quiera conseguir en el diseño de estos cuerpos, los perfiles pueden ser más finos o gruesos, simétricos o no, curvos o poligonales, e incluso poseer una sección variable a lo largo de la envergadura.

Sin embargo, este concepto no se limita solamente a las aeronaves, ya que todo objeto posee un perfil característico. Dependiendo de la relación de aspecto entre la longitud transversal ( $\ell_T$ ) y la longitudinal ( $\ell_L$ ), dichas secciones se dividen entre cuerpos romos y cuerpos fuselados. Los primeros están caracterizados por una relación de aspecto de orden unidad ( $\ell_T/\ell_L \sim O(1)$ ), mientras que los fuselados son más estrechos ( $\ell_T/\ell_L \ll O(1)$ ). No obstante, no todos ellos son actos para generar sustentación ( $L$ ) de forma eficiente, puesto que además de esta fuerza también se tiene en cuenta la resistencia ( $D$ ) que ofrecen al movimiento. Por este motivo, en Aerodinámica es muy común evaluar la eficiencia de los diseños a través del cociente  $L/D$  o de su equivalente con coeficientes adimensionales  $C_L/C_D$ , definiéndose como eficiencia aerodinámica. Gordillo [11] señala que cuanto mayor sea este valor, menor será el empuje necesario para lograr una fuerza de sustentación igual a la del peso total de la aeronave. Añade también, que para la aviación comercial el valor de  $C_L/C_D$  suele estar entre 10 y 20, pudiendo llegar a ser superior a 50 en el caso de ultraligeros.

En conclusión, un diseño aerodinámico será tanto mejor cuanto mayor sea su eficiencia y esto se logra diseñando superficies que consigan  $C_L \sim O(1)$  y  $C_D \ll O(1)$ . Esta condición impone de manera indirecta restricciones sobre los tipos de geometría que se deben usar para las superficies sustentadoras. Observando la fig. 1.2.a, se ve que el coeficiente de resistencia  $C_D$  es de orden unidad para los cuerpos romos y que cae rápidamente al disminuir la relación de aspecto. Además, experimentalmente se demuestra que  $C_L \sim O(1)$  sólo se alcanza para ciertos perfiles fuselados a un ángulo de ataque pequeño como el expuesto en la fig. 1.2.b. Por lo tanto, suponiendo posible conseguir valores de  $C_L \sim O(1)$ , el cumplimiento de la condición  $C_L/C_D \gg 1$  requiere que  $C_D \ll 1$ , y como ya se ha visto esto sólo se logra mediante cuerpos fuselados. Esa es la razón por la cual en el campo de la aeronáutica se emplean cuerpos esbeltos para los perfiles de las superficies sustentadoras y de control. Por este motivo el trabajo se centrará en el diseño de este tipo de geometrías.



(a) Coef. de resistencia en función del número de Reynolds para distintas geometrías (b) Coef. de sustentación y de momento para un NACA 0012

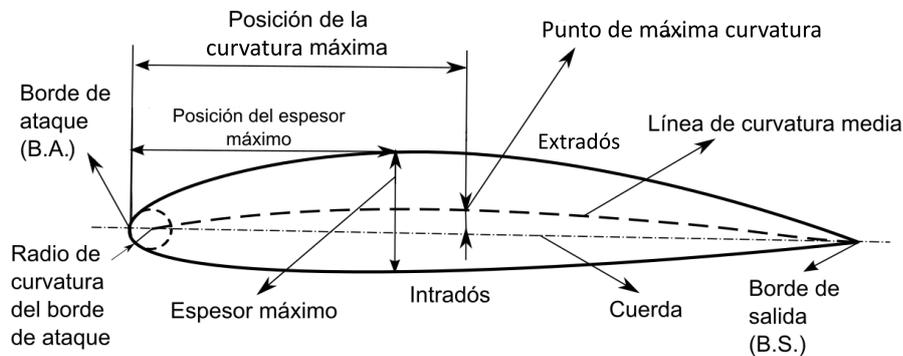
Figura 1.2 Justificación del uso de perfiles fuselados para superficies sustentadoras [11].

No obstante, lo anterior no excluye la presencia de cuerpos romos en la vida real. Aunque no son de interés para el trabajo desarrollado en este documento, la aerodinámica también los estudia con otros propósitos. El ejemplo más cercano lo encontramos en los automóviles (fig. 1.3), cuyas formas han cambiado para conseguir vehículos más eficientes al disminuir su resistencia al avance.



**Figura 1.3** Evolución de perfiles en automoción.

Para comenzar a trabajar con perfiles es preciso definir las características geométricas que los describen. La nomenclatura fue establecida por la NACA en los años 30 cuando comenzó a experimentar con distintas secciones creadas de forma sistemática. La terminología se ilustra en la fig. 1.4, y sus definiciones pueden encontrarse en Anderson [5] y Carmona [13].



**Figura 1.4** Nomenclatura de un perfil alar.

- *Extradós (upper surface)* : parte superior del perfil, generalmente asociada a la cara de succión.
- *Intradós (lower surface)* : parte inferior del perfil, generalmente asociada a la cara de presión.
- *Borde de ataque (leading edge)* : punto más adelantado de la sección (B.A).
- *Borde de salida (trailing edge)* : punto más retrasado de la sección (B.S).
- *Cuerda (chord)* : línea recta que une el borde de ataque con el borde de salida. Es una de las dimensiones principales del perfil.
- *Línea de curvatura media o línea media (mean camber line)* : línea formada por los puntos equidistantes entre extradós e intradós. La forma de esta línea es muy importante en las características aerodinámicas del perfil, puesto que fija la curvatura de la sección. Si la línea de curvatura media está por encima de la cuerda como en la fig. 1.4, se dice que la curvatura es positiva, negativa si cae por debajo y de doble curvatura si en un tramos va por arriba y en otro por debajo.
- *Radio del borde de ataque (leading-edge radius)* : define la forma del borde de ataque como un círculo tangente al extradós e intradós, y cuyo centro se sitúa en la línea tangente en el origen a la línea de curvatura media. Su magnitud define la agudeza del B.A, lo que tiene efectos sobre la entrada en pérdida.
- *Punto de máximo espesor (maximum thickness)* : es el punto sobre la cuerda, cuya distancia entre extradós e intradós medida de forma perpendicular a la cuerda, sea máxima. El espesor máximo es una característica importante, que se suele expresar en porcentaje de la cuerda. El valor varía desde un 3% en los más esbeltos hasta un 18% en los muy gruesos.

- *Curvatura máxima (maximum camber)* : es la máxima distancia entre la línea de curvatura media y la cuerda del perfil. Este valor y su posición a lo largo de la cuerda ayudan a definir la forma de la línea de curvatura media. El valor de la ordenada máxima y su posición suelen darse en forma de porcentaje de la cuerda.
- *Ángulo de ataque (angle of attack)* : es el que forma la dirección de la corriente incidente respecto a la cuerda del perfil. (fig. 1.5)

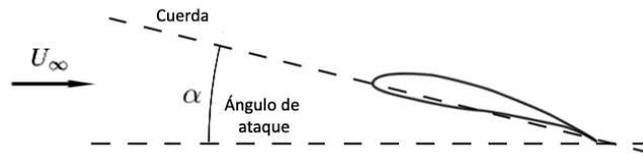


Figura 1.5 Definición del ángulo de ataque.

### 1.1.3 Clasificación de perfiles. Familias

Con el fin de estandarizar la nomenclatura de los perfiles y poder identificarlos de forma inequívoca, se desarrollaron las diferentes series. Sin embargo, cada familia identifica sus perfiles de manera particular con un código numérico en el que cada dígito especifica una característica del perfil siguiendo unas reglas de diseño propias de cada serie. Entre las diferentes familias de perfiles se pueden destacar las series NACA, TsAGI, Joukowsky, Clark Y, RAF, Gottingen, Eppler, NLF, GA, Wortmann, etc.

Las series NACA son las más empleadas en la actualidad, no limitándose únicamente al diseño de alas ni solamente a la aviación. Las series TsAGI son el homólogo ruso de los perfiles NACA, y por ello son muy utilizados en la industria aeronáutica rusa. Por su parte, las secciones Joukowsky fueron las primeras que se definieron de forma teórica, no obstante actualmente no se usan. Los perfiles Clark Y (EE.UU) y RAF (Reino Unido), son los primeros intentos de definir una familia de perfiles, actualmente se emplean para hélices. Por otra parte, las series Gottingen, Eppler y Wortmann son secciones alemanas; donde la primera familia es de uso general, mientras que la segunda y tercera están especializadas en planeadores. Para terminar, los perfiles NLF y GA son los últimos diseños desarrollados por la NASA, empleándose los primeros en planeadores y los segundos en aviones ligeros. [20]

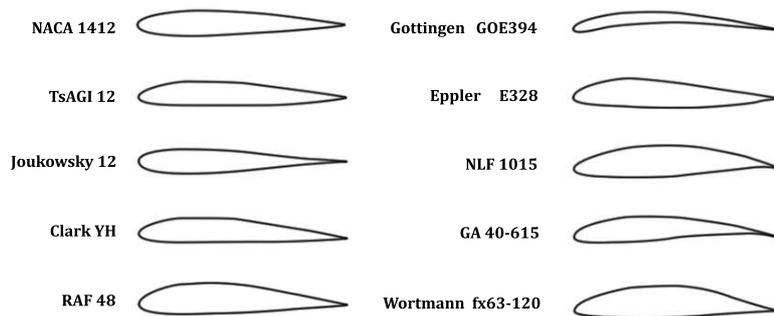


Figura 1.6 Familias de perfiles aerodinámicos.

A pesar de la gran variedad de perfiles que existen, no siempre son escogidos. Hoy en día, gracias a los recursos computacionales de los que se dispone, es más fácil y efectivo para los diseñadores crear y optimizar un perfil específico adaptado a una aplicación particular, en lugar de elegir uno ya existente.

A continuación, puesto que son los más extendidos en la industria aeronáutica y serán los que se usen en este proyecto, se presenta la nomenclatura de las series NACA.

### Serie NACA

Fueron las primeras series en ser desarrolladas de forma sistemática, hasta entonces el diseño de perfiles era arbitrario, basado en la experimentación y modificación de formas conocidas. Las primeras series de perfiles NACA, la de 4 dígitos, 5 dígitos y sus modificaciones, fueron generadas usando ecuaciones analíticas que describen la línea de curvatura y la distribución de espesor a lo largo de la sección.

Posteriormente se emplearon técnicas derivadas de métodos teóricos en lugar de métodos geométricos para tratar de conseguir la distribución de presiones deseadas, dando lugar a la aparición de la serie 1 ó 16 y la serie 6.

La metodología de diseño empezó a cambiar a partir de que la NACA publicará su estudio *The Characteristics of 78 Related Airfoil Sections from Tests in the Variable Density Wind Tunnel*. Tras esta publicación, los diseñadores descubrieron que existía una relación entre los perfiles con mejores características y dos variables: la pendiente de la línea de curvatura y la distribución de espesor respecto esta línea. Así, el diseño se volvió aun más sofisticado, surgiendo series como las series de 7 y 8 dígitos. Sin embargo, en la referencia numérica se siguieron manteniendo valores geométricos. [1]

Puesto que en este estudio se emplearán perfiles NACA de 4 dígitos, es necesario estar familiarizado con su nomenclatura y conocer como está definida su geometría.

Ejemplo: NACA 1412

1º dígito (1): expresa el valor de la curvatura máxima en porcentaje de la cuerda. 1%.

2º dígito (4): expresa la posición de la curvatura máxima en décimas de la cuerda respecto al B.A. 40%.

3º y 4º dígitos (12): indica el espesor máximo del perfil en porcentaje de la cuerda. 12% .

A modo de resumen y para no entrar en más detalle dentro de cada una de las series, se presenta la siguiente Tabla 1.1 donde se muestran las ventajas, inconvenientes y aplicaciones de las series NACA:

**Tabla 1.1** Serie NACA: ventajas, inconvenientes y aplicaciones [1].

Familia	Ventajas	Inconvenientes	Aplicaciones
Serie 4	- Buenas características de pérdida - Centro de presiones aproximadamente constante	- Bajo $C_L$ - Elevada resistencia - Elevado momento de cabeceo	- Aviación general - Estabilizadores - Jets supersónicos - Palas de helicópteros - Soportes - Aletas de misiles y cohetes
Serie 5	- Mayores $C_L$ - Bajo momento de cabeceo - Poco afectado por la rugosidad	- Malas características de entrada en pérdida - Elevada resistencia	- Aviación general - Aviones propulsados por motores de pistón - Jets de negocios
Serie 16	- Evita picos de succión - Baja resistencia a altas velocidades	- Poca sustentación	- Hélices de aeronaves - Hélices de barcos
Serie 6	- Alto $C_L$ - Muy poca resistencia dentro de su rango de operación - Optimizado para altas velocidades con amplias regiones de flujo laminar	- Alta resistencia fuera del rango operativo - Momento de cabeceo elevado - Malas características de entrada en pérdida - Sensible a la rugosidad	- Bombarderos propulsados por motor de pistón - Jets de negocios - Jets supersónicos - Jets de entrenamiento
Serie 7	- Muy poca resistencia dentro de su rango de operación - Bajo momento de cabeceo	- Reducido $C_L$ - Alta resistencia fuera del rango operativo - Malas características de entrada en pérdida - Muy sensible a la rugosidad	- Raramente usados
Serie 8	- Desconocidas	- Desconocidos	Muy raramente usados

### Clasificación alternativa

La clasificación por familias es la más formal y correcta de emplear a la hora de distinguir los perfiles. No obstante, también es posible realizar una clasificación de las secciones atendiendo a diferentes criterios:

\*Según su forma:

- *Simétrico* : son perfiles sin curvatura, es decir la línea media y la cuerda coinciden. Se utilizan generalmente para alas rotativas, como por ejemplo hélices de motores o rotores de helicópteros, ya que su centro de presiones permanece aproximadamente constante ante diferentes ángulos de ataque. Esto se traduce en un buen rendimiento desde la punta hasta la raíz de la pala.
- *Asimétrico* : son aquellos que poseen curvatura. Generan mayor sustentación y tienen un mejor comportamiento ante la entrada en pérdida.

\*Según sus propiedades:

- *De flujo laminar* : son secciones de baja resistencia, que se consiguen con formas delgadas y con poca curvatura. Logran mantener un flujo laminar durante un mayor porcentaje de la cuerda y controlan el punto de transición.
- *De alta sustentación* : son perfiles asimétricos que proporcionan una mayor carga alar, permitiendo que aviones grandes tengan alas más pequeñas con alto alargamiento.
- *De bajo momento* : tienen una baja tendencia a girar hacia delante, bajo momento de cabeceo. Ideales para rotores de helicópteros.
- *Críticos* : son secciones cuyo ángulo de entrada en pérdida es muy superior al resto de perfiles genéricos.

\*Según su régimen de operación:

- *Subsónicos* : destinados para velocidades inferiores a la del sonido. Caracterizados por bordes de ataque muy redondeados.
- *Transónicos* : también conocidos como perfiles supercríticos. Tratan de retrasar la aparición de ondas de choque a velocidades cercanas a la del sonido.
- *Supersónicos* : secciones delgadas con bordes de ataque y salida afilados, empleados para velocidades superiores a la del sonido. Son más sensibles a cambios en el ángulo de ataque.

## 1.2 Fuerzas aerodinámicas

Hasta ahora, lo único que se conoce es que gracias al movimiento de las secciones en el seno de un fluido, se generan las fuerzas aerodinámicas sobre el perfil que son empleadas con diferentes propósitos según el elemento diseñado. Aunque este proyecto esté orientado hacia la aeronáutica, y por tanto hacia los perfiles aerodinámicos usados en el diseño de alas, no hay que olvidar que también se usan en otras disciplinas, cuyo objetivo no es generar sustentación. Dejando a un lado lo anterior, la pregunta clave que se debe responder es ¿cuál es el origen de estas fuerzas aerodinámicas, y por qué la forma de los perfiles es tan importante?

Considérese un perfil aerodinámico que se mueve en el aire, con una cierta velocidad y con un ángulo de ataque positivo como en la fig. 1.7. Experimentalmente se observa que la corriente de aire se mueve a mayor velocidad por el extradós que por el intradós, lo que crea una diferencia de presiones entre ellas que da origen a las fuerzas aerodinámicas. Para explicar la relación existente entre el campo de velocidades y el de presiones hay que recurrir al *Teorema de Bernoulli* deducido de la ecuación de cantidad de movimiento de Mecánica de fluidos [6]. Dicho teorema demuestra para un fluido ideal subsónico que, cuando una corriente se acelera, baja la presión, y por el contrario, cuando se frena aumenta la presión. Por lo tanto, ante este hecho, se entiende que el extradós sea conocido como la cara de succión, y el intradós como la de presión. Cabe destacar que ambos efectos, succión y sobrepresión, son más acusados cerca del borde de ataque, efecto importante que afectará al diseño y que se explicará más adelante.

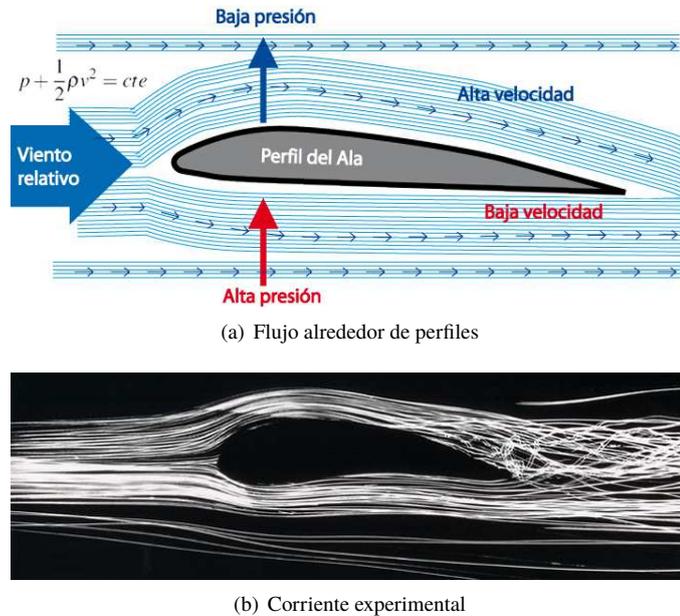


Figura 1.7 Origen de las fuerzas aerodinámicas.

### 1.2.1 Sustentación y Resistencia

Retomando la fuerza aerodinámica, esta se divide siempre en dos componentes: sustentación y resistencia (fig. 1.8). El punto donde se encuentran aplicadas se conoce como *centro de presiones*. La sustentación  $L$  (*lift*) es la componente perpendicular a la corriente incidente, responsable de compensar el peso de la aeronave para que el vuelo sea posible. Su origen depende exclusivamente de la diferencia de presiones entre extradós e intradós. Por su parte, la resistencia  $D$  (*drag*) es la componente paralela a la corriente incidente, siendo una fuerza opuesta al movimiento que debe ser compensada con empuje de los motores. A diferencia de la sustentación, la resistencia no sólo depende de la presión, sino que aparece una componente más que deriva de la fricción del flujo sobre el perfil.

Antes de seguir avanzando es necesario hacer una aclaración sobre la notación usada en Aerodinámica. Cuando se habla de sustentación y resistencia, en algunas ocasiones puede no quedar claro si están referidas a las totales que genera el sólido, o por unidad de longitud propia de los perfiles. Para solucionar este problema, la notación seguida es utilizar letras mayúsculas para referirse a las totales ( $L$  y  $D$ ), mientras que se deja las minúsculas para las secciones ( $l$  y  $d$ ). No obstante, dado el trabajo expuesto en este documento, generalmente cuando se hable de sustentación y resistencia, estarán referidas a perfiles.

Experimentalmente se demuestra que todos los cuerpos inmersos en un fluido en movimiento experimentan una resistencia, pero no todos ellos son capaces de generar sustentación, como ya se ha comentado anteriormente. Sólo aparecerá sustentación en los casos en que exista una diferencia de presiones entre las caras del perfil. Es decir, considerando un perfil simétrico a ángulo de ataque nulo, este no sustentará porque su distribución de presiones y velocidades es simétrica y no aparece ninguna fuerza perpendicular resultante (fig. 1.9.a). Por lo tanto, de este hecho se puede deducir que la sustentación es consecuencia del campo de velocidades asimétrico que se forma alrededor de los perfiles. Kutta y Joukowski estudiaron este fenómeno, dando con la clave de la generación de la sustentación, la circulación  $\Gamma$  alrededor del perfil. Demostraron que gracias a la circulación  $\Gamma$ , el campo de velocidades de la corriente libre se ve perturbado de tal forma que se rompe la simetría, consiguiendo una disminución de la presión en el extradós, y un aumento en intradós. La relación entre la circulación y la sustentación que experimenta un sólido se conoce como *fórmula de Kutta*, siendo uno de los resultados fundamentales de la Aerodinámica. Con este argumento, si se vuelve al ejemplo anterior, la razón por la que el perfil simétrico no sustenta es porque el valor de la circulación es nulo ( $\Gamma = 0$ ). La conclusión a la que se llega es que, para que un perfil sustente debe generar circulación ( $\Gamma \neq 0$ ) que defleccione las líneas de corriente de forma asimétrica, lo que se consigue mediante perfiles con curvatura o ángulos de ataque no nulos (fig. 1.9.b y fig. 1.9.c).

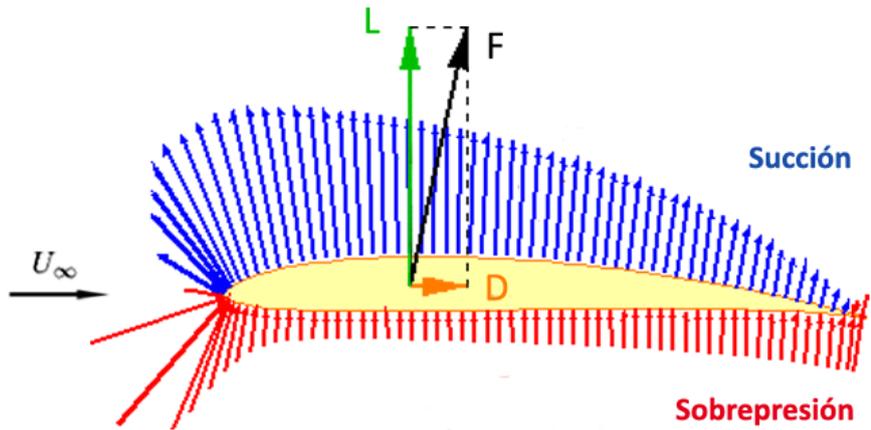


Figura 1.8 Fuerzas aerodinámicas: sustentación y resistencia.

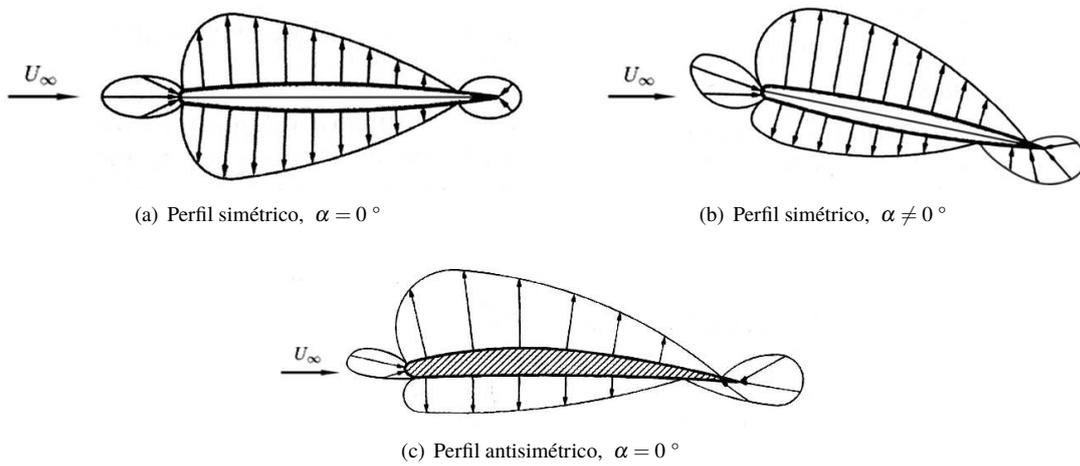


Figura 1.9 Distribución de sobrepresiones  $p' = p - p_\infty$  [13].

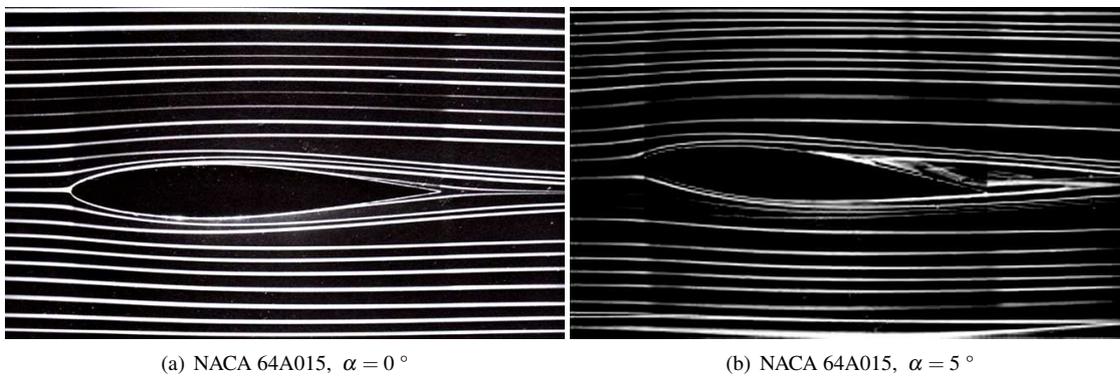


Figura 1.10 Flujo experimental sobre perfiles simétricos [8].

Continuando con el análisis de la sustentación y la resistencia, es preciso, desde el punto de vista del diseñador, conocer la dependencia de estas fuerzas respecto al resto de variables físicas. La Mecánica de fluidos demuestra, mediante análisis dimensional, que de forma genérica cualquier fuerza ejercida por un fluido sobre un sólido bidimensional depende de:

- Geometría del sólido: representada por su longitud característica, lo que en perfiles se corresponde con la cuerda  $c$ .
- Ángulo de ataque  $\alpha$ .
- El fluido: caracterizado por su viscosidad  $\mu$  y su coeficiente adiabático  $\gamma$ .
- Corriente incidente: parámetros del fluido lejos del perfil. Velocidad  $U_\infty$ , densidad  $\rho_\infty$  y temperatura  $T_\infty$ .

$$l = l(c, \alpha, \mu, \gamma, U_\infty, \rho_\infty, T_\infty) \quad (1.1)$$

$$d = d(c, \alpha, \mu, \gamma, U_\infty, \rho_\infty, T_\infty) \quad (1.2)$$

A priori, son muchos los parámetros que influyen en el valor de  $l$  y  $d$ , pero se puede reducir usando análisis dimensional. Empleando el teorema  $\Pi$  y tomando como variables independientes  $c$ ,  $U_\infty$ ,  $\rho_\infty$  y  $T_\infty$ ; las relaciones anteriores son adimensionalizadas:

$$C_l = \frac{l}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} = f\left(\alpha, \frac{\mu}{c\rho_\infty U_\infty}, \frac{U_\infty^2}{\gamma R_g T_\infty}\right) = f(\alpha, \text{Re}, M_\infty) \quad (1.3)$$

$$C_d = \frac{d}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c} = f\left(\alpha, \frac{\mu}{c\rho_\infty U_\infty}, \frac{U_\infty^2}{\gamma R_g T_\infty}\right) = f(\alpha, \text{Re}, M_\infty) \quad (1.4)$$

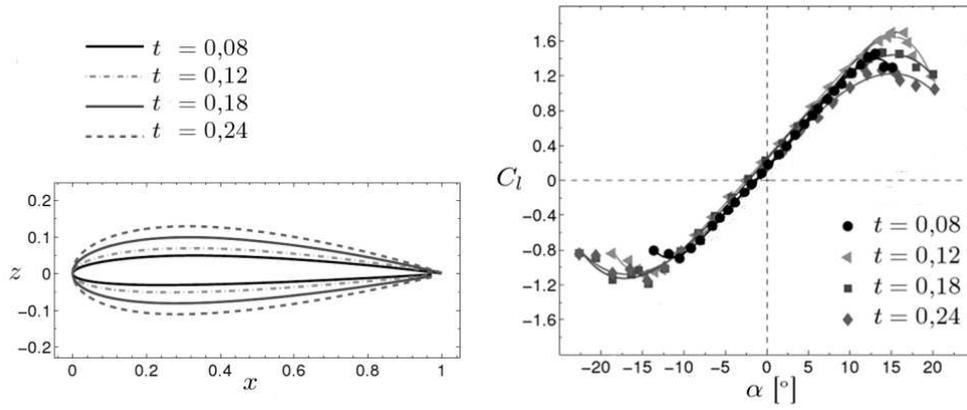
Con esta manipulación se consiguen los coeficientes adimensionales de sustentación  $C_l$  y resistencia  $C_d$ . Son muy importantes en Aerodinámica, pues como se ha explicado anteriormente, se emplean para evaluar las características de los diseños aerodinámicos a través de la eficiencia.

Tras la adimensionalización, se comprueba que estos coeficientes dependen de tres parámetros: ángulo de ataque  $\alpha$ , número de Reynolds  $\text{Re}$  y número de Mach de la corriente incidente  $M_\infty$ . El número de Reynolds determina la relación existente entre las fuerzas convectivas y las viscosas, lo que influye en el tipo de corriente que hay alrededor del perfil. Por su parte el número de Mach, representa la relación entre la velocidad de la corriente incidente  $U_\infty$  y la velocidad del sonido  $a_\infty$ , lo que está relacionado con el grado de compresibilidad del fluido. Trasladados estos parámetros a la aviación, la mayoría de las aeronaves vuelan en régimen subsónico ( $M_\infty < 0,8$ ) a altos números de Reynolds, sin llegar al  $\text{Re}$  crítico que hace que el flujo pase a ser turbulento ( $\text{Re} < 10^7$ ).

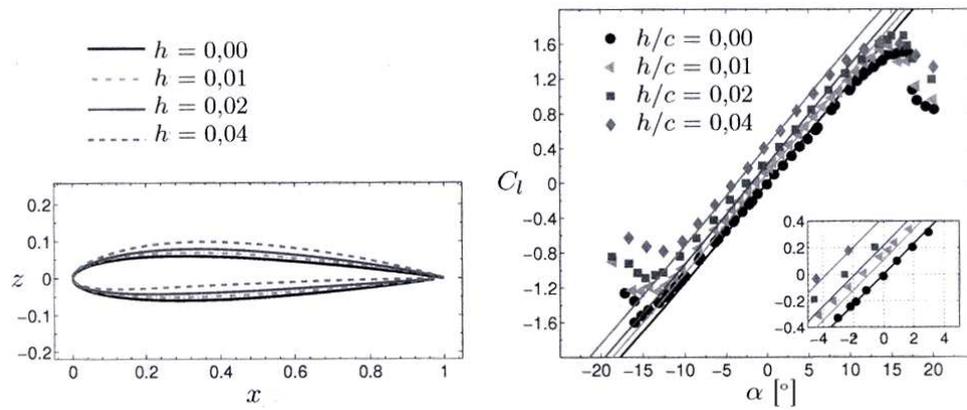
Definido el régimen de vuelo para los perfiles en aviación, el único parámetro que queda es el ángulo de ataque. De esto se deduce que para cada sección, existe una relación biunívoca entre los coeficientes  $C_l$  y  $C_d$ , y el ángulo de ataque, es decir, para cada  $\alpha$  existe un valor único de  $C_l$  y  $C_d$ .

Visto lo anterior, es importante conocer el comportamiento de estos coeficientes respecto al ángulo de ataque, ya que nos mostrará el comportamiento de los valores de sustentación y resistencia según la posición del perfil.

Comenzando por la sustentación, si se representa la gráfica  $C_l/\alpha$  asociada a diferentes perfiles (fig. 1.11), se observa que las curvas comparten una serie de características comunes.



(a) Influencia del espesor  $t$



(b) Influencia de la curvatura  $h$

Figura 1.11 Curvas  $C_l/\alpha$  [11].

En primer lugar, lo más llamativo de estas curvas es que parece que sea cual sea la geometría de la sección, la forma de la curva  $C_l/\alpha$  no cambia. Además, destaca el comportamiento lineal del coeficiente  $C_l$  respecto al ángulo de ataque  $\alpha$  para valores pequeños. En este rango de valores, la sustentación es mayor cuando aumenta  $\alpha$ . Sin embargo este aumento no es infinito, ya que llega un punto en el que la pendiente de la curva comienza a disminuir hasta hacerse negativa, lo que implica que el perfil pierde capacidad de sustentar. Este fenómeno es conocido como *entrada en pérdida del perfil*, el cual está asociado al desprendimiento de la capa límite, como se explicará en el siguiente apartado. El punto de desprendimiento es un punto fijo de cada sección y se caracteriza por sus valor máximo  $C_{l,max}$  asociado a un  $\alpha_{max}$ .

Si estudiamos la influencia de los perfiles sobre las curvas, vemos que efectivamente para perfiles simétricos (fig. 1.11.a), sea cual sea su espesor, para  $\alpha = 0^\circ$  la sustentación es nula. Basta con que el perfil tenga un poco de curvatura para que se genere sustentación con ángulo nulo (fig. 1.11.b). Para estas secciones, la sustentación se anula con ángulos de ataque negativos. En cuanto al  $C_{l,max}$ , se observa que aumenta con el radio de curvatura del B.A, la curvatura y el espesor, siendo este último el que parece ser efecto dominante. A modo de resumen, Carmona [13] muestra en la fig. 1.12 el comportamiento que seguirá esta curva según la geometría de la sección.

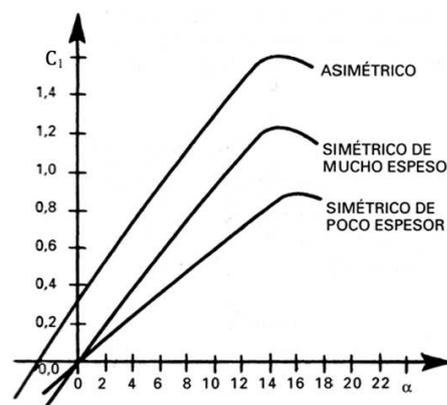


Figura 1.12  $C_l/\alpha$  en función de la geometría [13].

Desde el punto de vista de un vuelo real, estas gráficas son muy importantes puesto que indican a los pilotos el margen de maniobra del que disponen. Durante el vuelo de una aeronave, la sustentación está determinada en cada momento por la condición de vuelo. Suponiendo un valor fijo de la sustentación  $l$ , y teniendo en mente su relación con el coeficiente  $C_l$ , ec. (1.5), es posible ver que los pilotos pueden realizar dos acciones para alcanzar dicho valor. Bien pueden variar el ángulo de ataque  $\alpha$  para conseguir el valor  $C_l(\alpha)$  necesario con una cierta velocidad de vuelo  $U_\infty$ , o bien variar la velocidad  $U_\infty$  sin cambiar el ángulo de ataque  $\alpha$ . Luego a altas velocidades, el ángulo de ataque  $\alpha$  será pequeño (poco  $C_l$ ), mientras que a bajas velocidades ocurre lo contrario, se incrementará  $\alpha$  para poder mantener el mismo nivel de sustentación. No obstante, se ha visto que existe un  $C_{l,max}$  asociado a un  $\alpha_{max}$ , lo que implica que existe un valor mínimo requerido de la velocidad para que el vuelo sea posible. Dicho valor recibe el nombre de *velocidad de entrada en pérdida*, ya que si la velocidad es inferior a este valor, la aeronave no es capaz de generar la sustentación necesaria y caería.

$$l = \frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 c C_l(\alpha) \quad (1.5)$$

Centrándonos ahora en la resistencia de los perfiles, se ha dicho que tiene dos componentes: una debida a presión y la otra a fricción. Ambas están presentes en el coeficiente  $C_d$ . Otra de las curvas más habituales que se usan para estudiar y comparar los perfiles entre sí es *la polar del perfil*, donde se representa  $C_l$  frente a  $C_d$ . Es preciso señalar que la fig. 1.13 muestra que los valores de la resistencia siempre son positivos, es decir, aunque el perfil sustente de forma negativa, esta fuerza siempre se opone al movimiento.

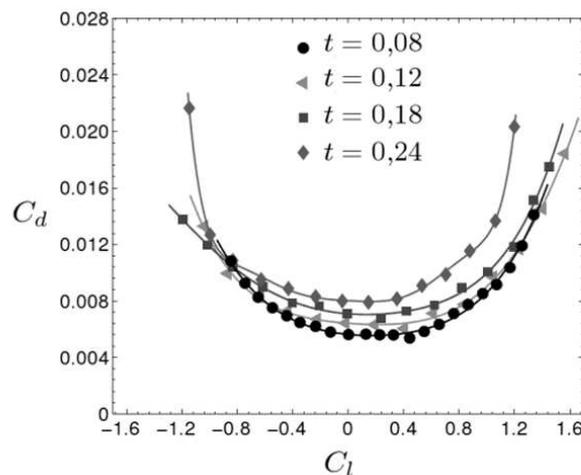


Figura 1.13 Polar en función del espesor  $t$  [11].

Respecto a la resistencia de presión, también es conocida como resistencia de forma, ya que depende en gran medida de la forma de la sección del cuerpo. Carmona [13] señala que esta resistencia está relacionada con la forma de la estela (más o menos gruesa) que deja el objeto tras su paso, puesto que está asociada al punto de desprendimiento de la capa límite y por ende a los esfuerzos viscosos. Cuanto antes se desprende la corriente, mayor es la estela y mayor es la resistencia que se obtiene. Por lo anteriormente expuesto, también puede denominarse resistencia de estela.

Por otra parte, la resistencia de fricción está vinculada al rozamiento que existe entre el fluido y el sólido en la capa límite, debido a los esfuerzos viscosos. Depende en gran medida del tipo predominante de capa límite que haya sobre el perfil. Normalmente su valor suele ser inferior a la debida por la presión, pero no tanto como para ser despreciada en los diseños.

Visto lo visto, el comportamiento de la resistencia pasa inevitablemente por el estudio de la capa límite y la viscosidad.

### 1.2.2 Capa límite e influencia de la viscosidad

Llegados a este punto es necesario explicar que la corriente alrededor de un perfil, es habitualmente descompuesta en dos regiones: exterior e interior. Idea planteada por Prandtl en 1904. La diferencia entre estas dos zonas está en la influencia de los esfuerzos viscosos sobre la corriente, siendo despreciables en el caso exterior donde puede considerarse que el fluido es ideal, pero no en el interior por muy pequeño que sea el valor de la viscosidad del fluido. Por este motivo a la región exterior también se la conoce como región no viscosa, mientras que a la interior se la denomina región viscosa o *capa límite*. Perez-Saborid [6] aclara que la importancia de los efectos viscosos dentro de la capa límite radica en que los gradientes de velocidad en la dirección normal a la superficie son muy acusados al darse en una capa muy delgada, y no por el valor del coeficiente de viscosidad. La diferencia entre estas dos zonas se comprueba experimentalmente observando detenidamente los perfiles de velocidad sobre la sección.

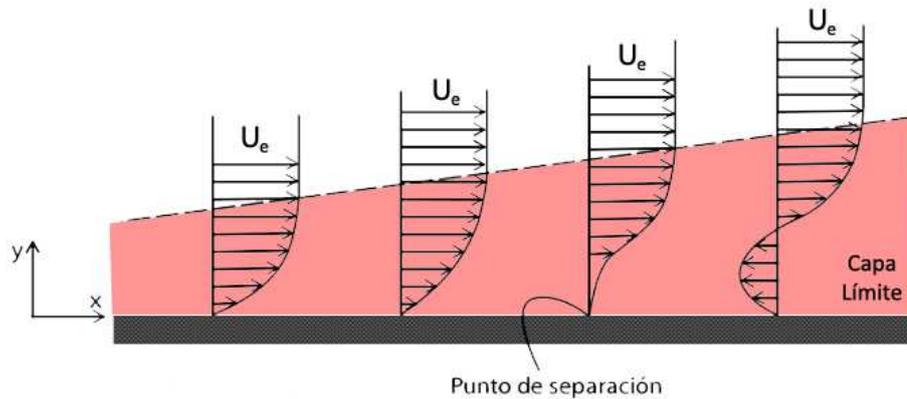
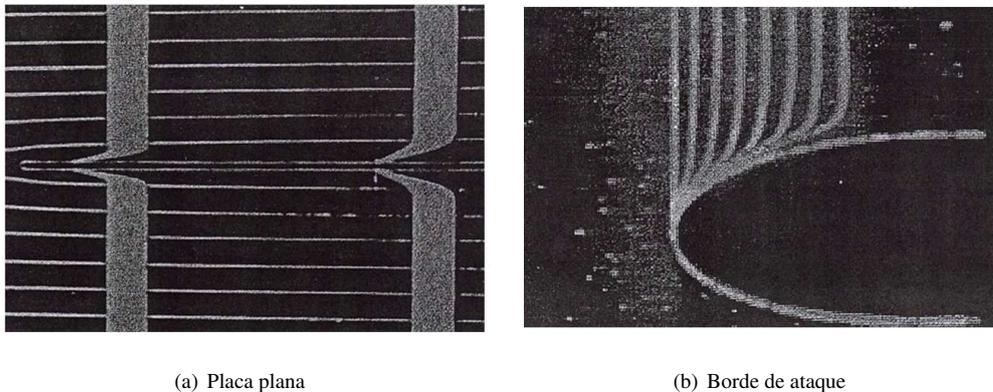


Figura 1.14 Perfiles de velocidad dentro de la capa límite .



(a) Placa plana

(b) Borde de ataque

Figura 1.15 Capa límite sobre secciones .

Estudiando el perfil de velocidades de la fig. 1.14, se aprecia que para un punto  $x$  sobre la sección, lejos de la pared la velocidad es prácticamente constante, lo que se corresponde con la corriente libre. Sin embargo, al acercarnos a la pared, la velocidad comienza a disminuir rápidamente hasta hacerse cero en la pared. Esto es así puesto que, tal y como indica Gordillo [11], los esfuerzos viscosos que actúan sobre las partículas fluidas en las inmediaciones de la superficie del perfil, son los únicos capaces de decelerar el fluido en la dirección tangencial a la superficie del sólido para así hacer cumplir la condición de no deslizamiento del fluido sobre la pared del mismo. Tras esta explicación, se deduce que el espesor  $\delta$  de la capa límite es la distancia entre la pared del perfil y el punto donde el valor de la velocidad sea igual al 99 % de la corriente libre. Se trata de una región en la que se disipa energía, y por tanto cuanto mayor sea su extensión sobre el perfil, afectará a más capas del fluido, aumentando su espesor y disipando más energía, lo que implica una mayor resistencia de fricción.

Al igual que ocurre en cualquier flujo, dentro de la capa límite la corriente puede ser *laminar* o *turbulenta*. En el primer caso, las líneas de corriente fluyen de forma paralela, mientras que en el caso turbulento estas se entrelazan y la corriente se vuelve desordenada. Carmona [13] explica que generalmente el desarrollo de la capa límite empieza por ser laminar cerca del borde de ataque. A medida que esta avanza por la superficie, disipa cada vez más energía haciendo que su espesor crezca lentamente, hasta que llegada una cierta distancia del borde de ataque, la capa límite comienza a verse afectada por unas perturbaciones de tipo ondulatorio que provocan un aumento repentino de su espesor y la destrucción del flujo laminar, pasando a ser turbulento. Este desarrollo queda ilustrado en la fig. 1.16. La región en la que ocurre el paso de laminar a turbulenta se denomina *región de transición*, aunque al ser una zona tan pequeña suele hablarse de *punto de transición*.

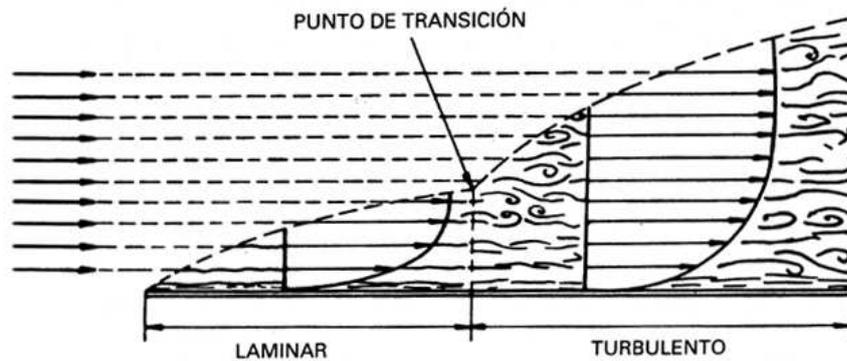


Figura 1.16 Evolución de la capa límite [13].

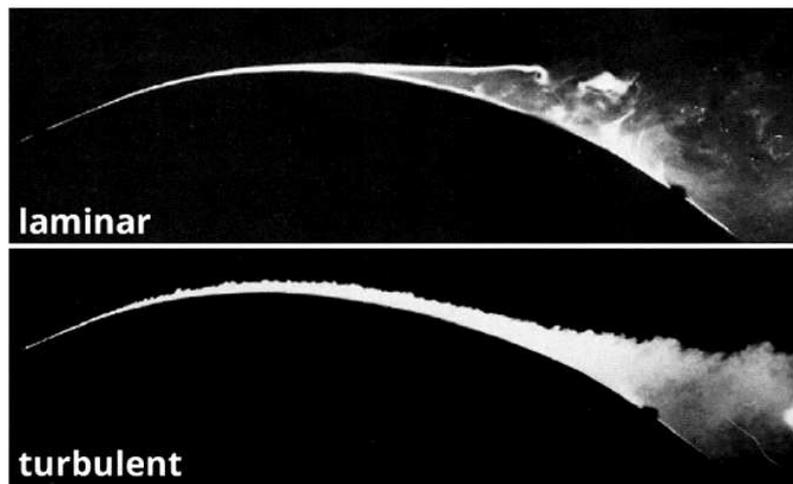


Figura 1.17 Capa límite: laminar y turbulenta [8].

En una capa límite turbulenta las partículas se entremezclan. Las que están alejadas de la pared pasan por zonas cercanas a esta, y viceversa, las próximas a la pared fluyen alejándose de ella. El resultado global es un aumento de la velocidad dentro de la capa límite respecto a la laminar, y esto es debido a que las partículas exteriores de la capa límite absorben energía de la corriente libre y la comunican a las zonas próximas a la pared, consiguiendo una mayor velocidad que para el caso laminar.

Comparando los perfiles de velocidad característicos, fig. 1.18, se observa que cerca de la pared se cumple  $\left(\frac{dv}{dy}\right)_{lam} < \left(\frac{dv}{dy}\right)_{tur}$ , lo que implica que las fuerzas de fricción son mayores para una capa turbulenta que para una laminar. Así que de cara al diseño para reducir la resistencia de fricción, conviene tener capa laminar sobre perfil o en su defecto, intentar retrasar la transición lo máximo posible. Para ello el diseñador debe tener cuidado con la rugosidad de la superficie, las turbulencias de la corriente exterior, y sobretodo controlar los gradientes adversos de presiones sobre la sección.

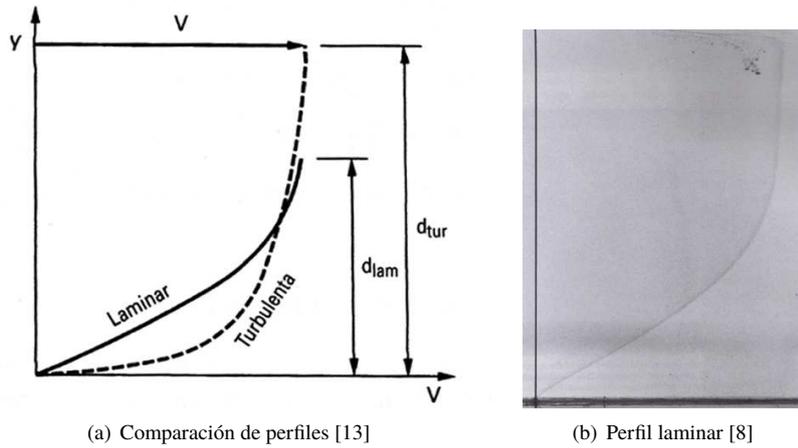


Figura 1.18 Perfiles de velocidad en la capa límite laminar y turbulenta .

Tras lo explicado, uno puede deducir sin dudar, que existe una relación entre la velocidad de la corriente libre y la de la capa límite. No obstante, este razonamiento puede llegar más lejos, puesto que como ya se ha expuesto, la velocidad exterior depende de la distribución de presiones sobre el perfil. Por lo tanto, la capa límite también se ve influenciada por las presiones. En efecto, si el gradiente de presiones es favorable (se fluye hacia zonas de menor presión) la corriente exterior se acelera, y tanto la velocidad exterior como la de la capa límite tienen el mismo sentido. En esta circunstancia se dice que la capa límite permanece *adherida*, porque la corriente exterior fluye alrededor de una región viscosa que coincide prácticamente con el sólido [11]. Por el contrario, si el gradiente de presiones es adverso (se fluye hacia zonas con mayor presión), el flujo libre se ve frenado, siendo mayor esta deceleración en la capa límite debido a los efectos viscosos, lo que puede provocar la inversión del flujo en la región viscosa. Este fenómeno se conoce como *desprendimiento de la capa límite*, pues los efectos viscosos ya no quedan restringidos a una pequeña zona, provocando una estela turbulenta tras el objeto.

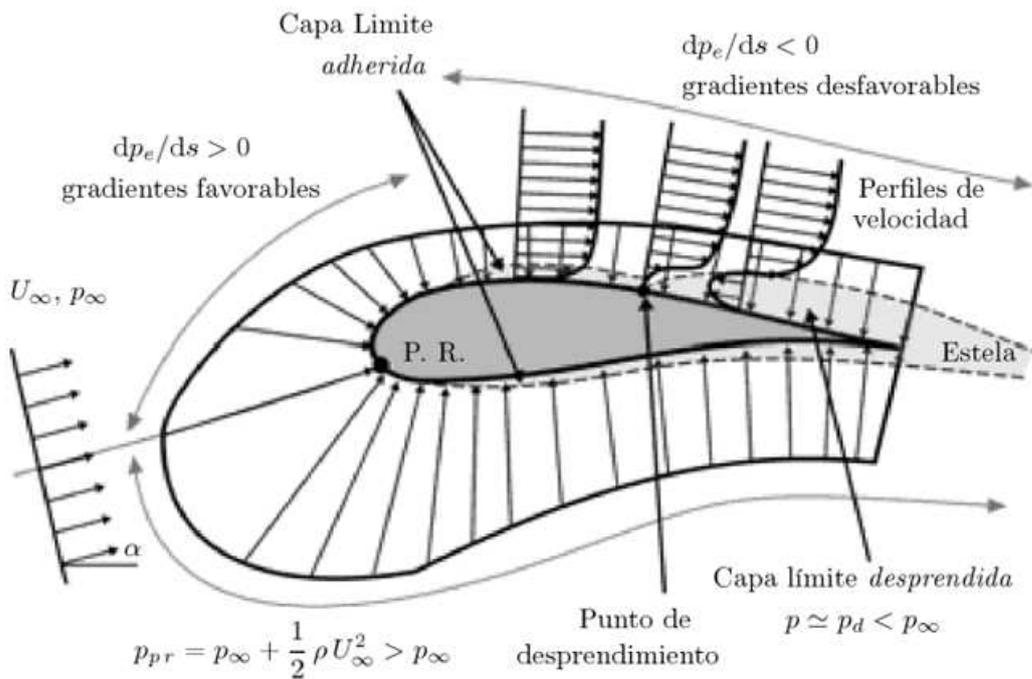


Figura 1.19 Capa límite sobre perfiles [11] .

Trasladados estos conceptos a los perfiles alares, el comportamiento de la capa límite queda ilustrado en la fig. 1.19. Se muestra que de forma genérica la capa permanece adherida en todo el intradós y parte del extradós donde el gradiente es favorable y la corriente se acelera. Además, se ve como tras el pico de succión en el extradós cerca del borde de ataque, el gradiente se vuelve adverso decelerando la corriente hasta llegar al desprendimiento. Esto genera una estela turbulenta cuya presión permanece constante y próxima al valor de la presión en el punto de desprendimiento,  $p_d < p_\infty$ , lo que origina la fuerza de resistencia de forma o estela causada por la diferencia de presiones. Debido a la existencia de viscosidad siempre habrá desprendimiento de la capa límite sobre los perfiles, aunque este tenderá a suceder cerca del borde de salida para ángulos pequeños. Si por el contrario, el punto de desprendimiento se adelanta hacia el borde de ataque, ocurre el fenómeno de *entrada en pérdida*, pues se rompe el flujo laminar sobre el perfil y no es capaz de generar sustentación, lo que además conlleva un gran incremento de la resistencia de presión. El punto de desprendimiento es un punto fijo de cada sección y se caracteriza por sus valor máximo  $C_{l,max}$  asociado a un  $\alpha_{max}$ .

Carmona [13] muestra que existen tres tipos de entrada en pérdida y que estas depende de la forma del perfil. El primer tipo consiste en una entrada en pérdida por el borde de salida, típica de las secciones gruesa ( espesor  $> 14\%$ ) con borde de ataque muy redondeado. La capa límite es turbulenta, aumentando su espesor poco a poco con el ángulo de ataque. Cuando este vale aproximadamente  $10^\circ$ , la capa empieza a desprenderse del B.S., adelantándose el punto de separación hacia el B.A. conforme el ángulo crece. La pérdida de sustentación es gradual y suave incluso una vez alcanzado el valor máximo. El segundo tipo es una entrada en pérdida por el borde de ataque, característica de perfiles de espesor medio ( $\approx 10\%$ ). A un ángulo pequeño la capa límite se desprende cerca del B.A., por lo que la capa todavía es laminar. Tras separarse, se vuelve inestable y se convierte en turbulenta, adhiriéndose de nuevo al perfil y dejando encerrada una pequeña burbuja de recirculación. Al seguir aumentando el ángulo, la burbuja se hace más pequeña hasta que se desprende cerca del B.A. provocando una pérdida brusca. Por último, el tercer tipo es propio de secciones muy finas ( $\approx 5\%$ ). A ciertos ángulos de ataque se forma una burbuja que provoca la disminución de la pendiente de sustentación, pero no la entrada en pérdida. Conforme crece el ángulo, la burbuja se extiende hasta el B.S., momento en el que se alcanza el  $C_{l,max}$ . La pérdida se produce de forma gradual.

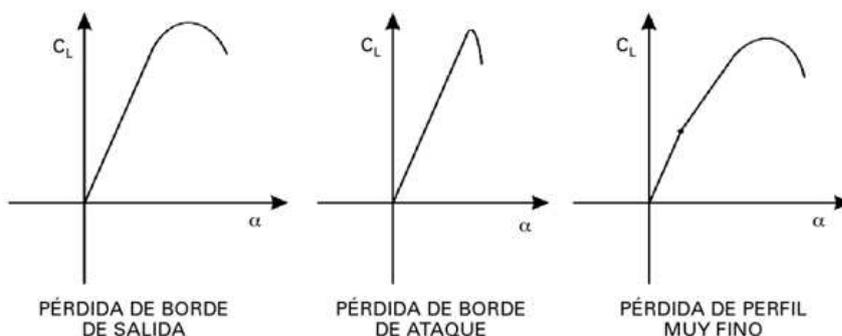


Figura 1.20 Formas de entrada en pérdida [13] .

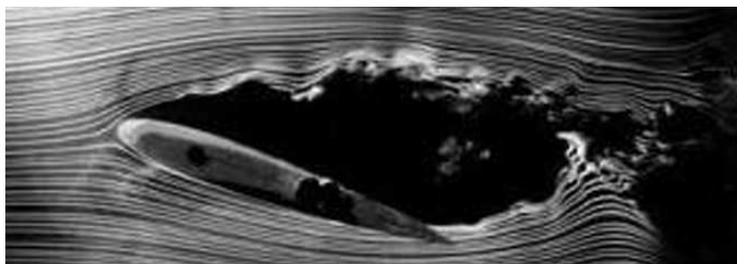


Figura 1.21 Perfil en pérdida [8] .

Al diseñar habrá que tener en mente la entrada en pérdida, por ser un fenómeno no deseado, ya no desde el punto de vista del incremento de la resistencia de forma, si no por seguridad, porque podría ser la causa de un accidente.

Para retrasar el desprendimiento de la capa límite, lo más fácil e inmediato es aumentar la velocidad de la capa límite, dado que se origina por la pérdida de esta. Una de las técnicas para conseguir este aumento consiste en posicionar generadores de vórtices en la superficie del perfil, de tal manera que la capa límite pase a ser turbulenta. Se ha comentado que este tipo de capa posee mayor energía, por lo que es capaz de permanecer adherida durante más tiempo (fig. 1.17), aunque también supondría una mayor resistencia de fricción. Otra forma empleada en los diseños actuales, es la inyección de aire proveniente desde el intradós hasta el extradós, lo que supone un aporte de energía a la capa límite para seguir adherida. Esto último suele combinarse con los dispositivos hipersustentadores, slaps y flaps, que amplían el rango operativo de los perfiles a bajas velocidades.

Como se ha podido comprobar, desde el punto de vista del diseño es fundamental conocer el comportamiento de la capa límite, ya que pese a ser una región muy estrecha cerca del perfil, influye en gran medida en las características aerodinámicas de los perfiles:

- Resistencia de fricción
- Resistencia de presión
- Valor máximo del coeficiente de sustentación  $C_{l,max}$
- Forma de entrada en pérdida

### 1.3 Métodos de diseño

Al comienzo de este documento, se explicó que los primeros diseños fueron fruto de la observación de la naturaleza, generalmente de las alas de las aves, y que se perfeccionaron a base de ensayo y error en rudimentarios túneles de viento. Pronto se dieron cuenta de la importancia de la forma de las secciones para generar las fuerzas aerodinámicas, siendo la piedra angular de la investigación aeronáutica [22].

El objetivo que persigue todo diseñador es conseguir que su diseño cumpla una serie de condiciones y/o que posea una serie de características según la aplicación para la que esté destinada la sección. La idea básica que está detrás de todos los diseños aerodinámicos modernos es: *"las fuerzas aerodinámicas y las características de la capa límite son resultado de la distribución de presiones que se crea alrededor del perfil, y que a su vez depende de la forma del propio perfil"*. Esto implica que el diseñador debe ser capaz de trasladar los requisitos de su diseño a una distribución de presiones que le permita alcanzar sus objetivos. El problema de diseño se reduce entonces a encontrar la forma del perfil asociada a dicha distribución.

Durante los primeros años se empleó de forma exitosa el uso de los catálogos. Estos disponían de información acerca de los datos de las pruebas, lo que hacía posible seleccionar aquel perfil que más se acercara a las necesidades según la aplicación. Algunos de estos catálogos son: *Summary of Airfoil Data* de Abbott y Von Doenhoff [12], *Profilkatalog Stuttgarter* de Althaus y Wortmann, *Low Reynolds Number Airfoil catalog* de Althaus y *Airfoils at Low Speeds* de Selig. [2]

Con el paso del tiempo las aplicaciones se han diversificado, y las propiedades requeridas se han vuelto cada vez más sofisticadas, quedándose fuera del rango cubierto por los catálogos. Aquí es donde surgen multitud de métodos para tratar de determinar los perfiles más adecuados. No obstante, todos los procesos pueden ser agrupados en dos filosofías: métodos directos o métodos inversos. (fig. 1.22)

La necesidad del desarrollo de estos métodos de diseño, está justificada por tres motivos:

- Diseño de perfiles fuera del alcance de los catálogos.
- Diseño específico para cada aplicación.
- Ahorro económico en concepto de pruebas y ensayos.



**Figura 1.22** Clasificación de los procesos de diseño.

Hoy en día, gracias al desarrollo de métodos numéricos y su aplicación al campo de la mecánica de fluidos, existen en el mercado los códigos CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Estos programas permiten simular y estudiar la evolución del campo fluido en infinitud de situaciones. Dentro de las diferentes aplicaciones de los CFD, se encuentra una rama especializada en aerodinámica y diseño de perfiles. La gran mayoría utilizan el método directo simulando ser túneles de viento virtuales donde probar los diseños, dejando los métodos inversos sólo para los códigos más sofisticados. No hay que olvidar que los CFD son una herramienta más para el diseñador, siendo este el que debe tomar las decisiones sobre el diseño. Además, a pesar de las buenas aproximaciones ofrecidas por estos programas, siempre será necesario realizar pruebas en túneles de viento para corroborar con los resultados experimentales. En el caso de este estudio, se ha escogido el programa XFLR5 del que se hablará más adelante.

### 1.3.1 Diseño directo

En un proceso directo, se toma como punto de partida la forma del perfil aerodinámico. Especificada la geometría de la sección, se procede al cálculo de la distribución de presiones a su alrededor, lo que permitirá conocer sus características aerodinámicas tales como: desarrollo de la capa límite, pendiente de sustentación, polar del perfil, ángulo de ataque máximo, posición del centro de presiones, etc. Este proceso queda reflejado en la fig. 1.23. Con toda esta información, se evalúa la forma dada y a continuación se modifica la geometría para tratar de mejorar el o los rendimientos aerodinámicos según los objetivos marcados. Se trata por tanto de un proceso iterativo de optimización hasta conseguir el perfil con el rendimiento deseado. La optimización siempre está ligada a la minimización de una función objetivo relacionada con las propiedades del perfil controladas por estos rendimientos.[16]

Como puede intuirse, es un proceso largo y costoso computacionalmente, pues son necesarias muchas iteraciones para obtener las características deseadas. Además, requiere de experiencia previa, ya que el diseñador tiene que intuir como cambiará la distribución de presiones según las modificaciones que se realicen en la geometría.

Uno de los primeros en trabajar sobre este tipo de metodología fue Theodorsen [23]. En los años 30, presentó un método teórico para calcular la distribución de velocidades a partir de una geometría arbitraria, sin considerar efectos viscosos ni compresibilidad. La idea era emplear la transformación conforme, convirtiendo la geometría del perfil en un círculo, y determinar sobre este tanto la velocidad como la presión. Para finalizar, invertía el proceso y obtenía estas distribuciones asociadas al perfil. Es un método válido para cualquier perfil aerodinámico, incluso para los de gran espesor. La validez de los resultados fruto de este desarrollo analítico quedan patentes en la fig. 1.24.

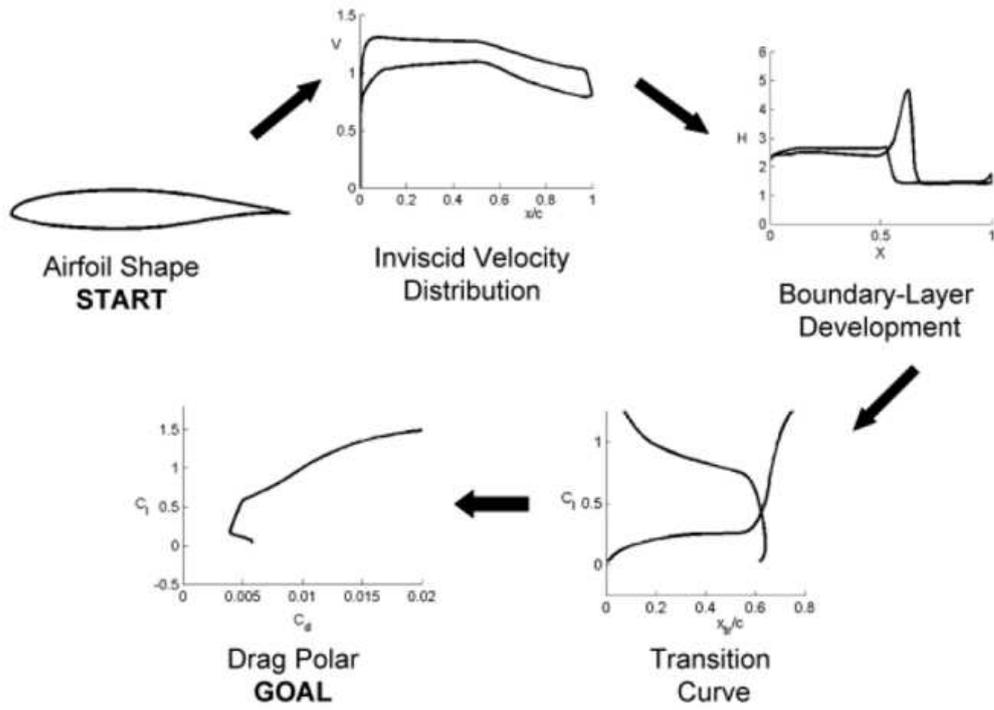


Figura 1.23 Proceso de diseño directo [16].

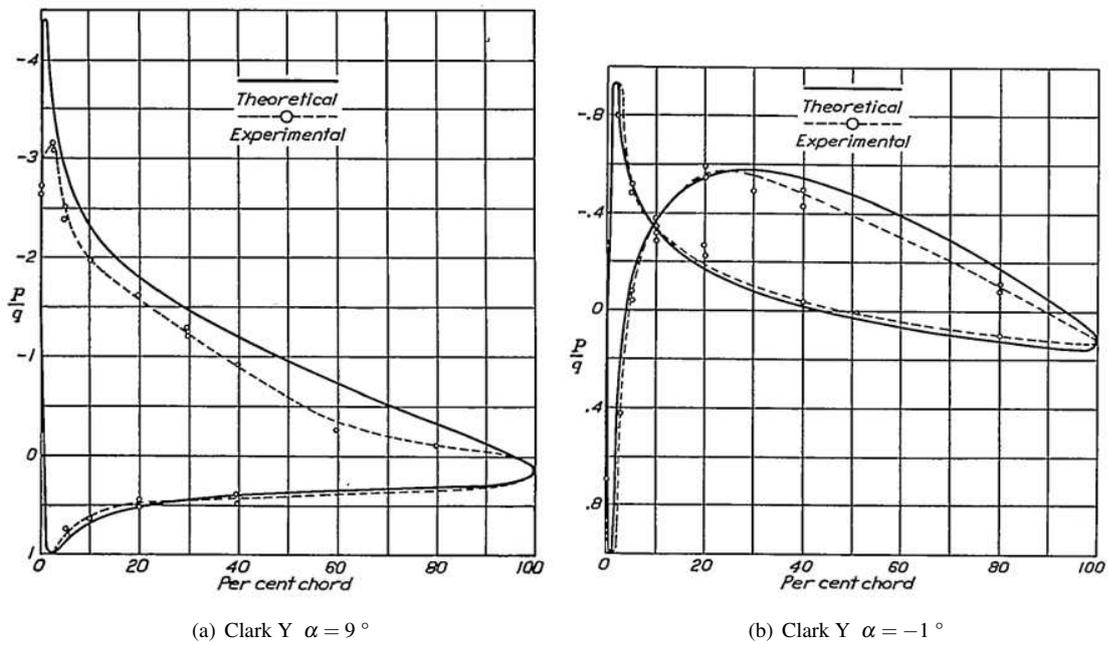


Figura 1.24 Theodorsen, Comparación distribución de presiones experimental y teórica [23].

### 1.3.2 Diseño inverso

Al contrario que en el diseño directo, los métodos inversos comienzan con la definición de las especificaciones aerodinámicas y tratan de determinar la forma de la sección que reproduzca dichas características. El problema se ha invertido, pues las propiedades del perfil que antes eran calculadas como salida del problema, ahora son la entrada para calcular la geometría. Lo más común en todos estos métodos inversos, es que el diseñador defina como función objetivo la distribución de presiones o velocidades sobre el perfil que generen las características aerodinámicas deseadas. Esta filosofía de diseño queda reflejada en la fig. 1.25. Poseen una base teórica sólida, pero es necesario que la distribución de presiones definida, tenga sentido físico.

Jepson[16] apunta que la motivación detrás de estos métodos era aprovechar las relaciones conocidas entre la distribución de presiones o velocidades, y otras propiedades aerodinámicas como sustentación, resistencia, momento de cabeceo y capa límite. Como ya se explicó, de la diferencia de presiones entre extradós e intradós se obtiene la sustentación a cualquier ángulo de ataque. Además, los gradientes de presiones determinan el desarrollo de la capa límite que influye tanto en la resistencia como en la entrada en pérdida que define el  $\alpha_{max}$  y el  $C_{l,max}$ . Se puede concluir, que el rendimiento total del perfil está indirectamente controlado mediante la presión. Esto sugiere que, simplemente ajustando las distribuciones de presiones según los requisitos para el diseño, se pueden conseguir perfiles óptimos para cada aplicación.

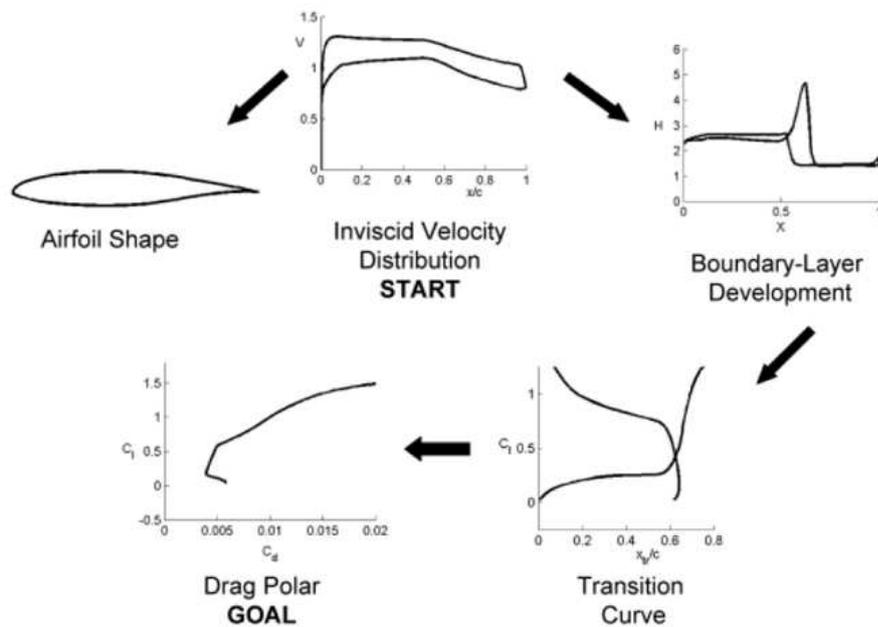


Figura 1.25 Proceso de diseño inverso [16].

Por ejemplo, suponiendo el caso en que el diseñador esté interesado en perfiles para planeadores, deberá buscar secciones capaces de generar gran sustentación y poca resistencia, a pequeños ángulos de ataque, para que la aeronave se mantenga en vuelo el mayor tiempo posible. Atendiendo a estas necesidades, para lograr alta sustentación el perfil deberá generar un pico de succión importante que provoque una gran diferencia de presiones entre extradós e intradós, teniendo cuidado con el gradiente adverso de presiones para no entrar en pérdida; mientras que si se quiere disminuir la resistencia, es fundamental controlar que la capa límite sea laminar. Bajo estas condiciones, el diseñador podría plantear las curvas  $C_p$  mostradas en la fig. 1.26.a como las deseadas para un perfil posicionado a  $\alpha = 3^\circ$ . Cada una de las curvas representa una de las características buscadas: perfiles de alta sustentación en rojo, y perfiles de flujo laminar en azul. Se observa claramente como ambas condiciones parecen contrarias entre sí, ya que la diferencia de presiones en los perfiles laminares es inferior a los de alta sustentación, no consiguen mucha sustentación a pequeños ángulos de ataque puesto que se centran en controlar el gradiente adverso. Invertiendo el problema, los perfiles obtenidos a partir de esas curvas serían NLF1015 y FX 60-100, representados en fig. 1.26.b. Así que, en definitiva, el diseñador debería llegar a una solución de compromiso entre las dos.

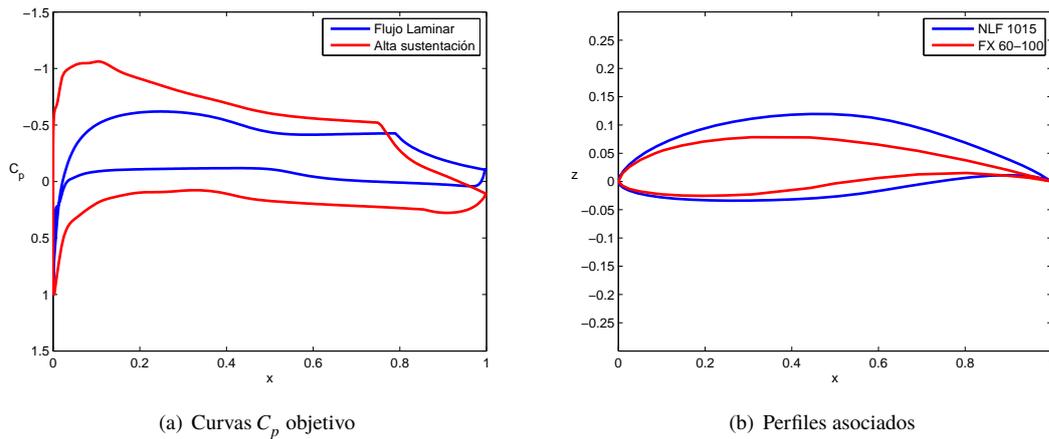


Figura 1.26 Ejemplo de diseño .

Ahora bien, lo realmente complicado de esta metodología está en el hecho de encontrar el procedimiento adecuado para relacionar las presiones con la forma del perfil. Atendiendo a la forma de resolución del problema inverso, se diferencian dos tipos de procesos: directos e iterativos.

*Acoplados o Directos:* emplean una formulación alternativa del problema directo. Hacen que las variables geométricas aparezcan como variables dependientes (explícita o implícitamente). Teóricamente son capaces de encontrar la geometría como función del campo fluido en un único paso [4].

*Desacoplados o Iterativos:* basados en la actualización iterativa de la forma del perfil hasta conseguir la distribución de presiones deseada. Resuelven el problema directo sobre el perfil y comparan la distribución de presiones o los rendimientos obtenidos con los deseados, para a continuación, conforme a los criterios implementados, actualizar la forma del perfil hasta lograr los objetivos marcados [4].

Los métodos inversos son una herramienta que mejoran significativamente la capacidad de diseño de superficies sustentadoras. Sin embargo, las primeras teorías llevadas a cabo por Mangler y Lighthill, tenía un punto débil, ya que sólo eran capaces de calcular los perfiles para un único punto de operación definido por la distribución de velocidades a un ángulo de ataque para flujo no viscoso. Para evaluar el rendimiento de la sección fuera de este punto era necesario recurrir a un análisis pos-diseño. Podría pensarse que es suficiente con un único punto y optimizar el rendimiento del perfil para dicho punto, haciendo que el perfil trabajase siempre en ese punto. Sin embargo, desde el punto de vista de las superficies sustentadoras, los perfiles están sometidos a diferentes condiciones determinadas por los segmentos de vuelo y es preciso que tengan un buen rendimiento dentro de un rango operativo, no exclusivamente en un punto. Nace así la imperiosa necesidad de perfeccionar la metodología hacia procesos de diseño inverso multipuntuales.

### Código de Eppler

En 1957, Eppler publicó uno de los primeros trabajos prácticos realizados sobre esta materia. Somers [22] explica que el código desarrollado por Eppler contenía tres funcionalidades: un método de trazado conformal para el diseño de perfiles a partir de una distribución de velocidades especificada, un método de paneles para analizar el flujo potencial sobre los perfiles, y un método integral para la capa límite. Con este programa era posible tanto diseñar perfiles aerodinámicos con las características de capa límite especificadas, como analizar los perfiles cuya geometría fuera conocida. Representó un gran salto en el campo de diseño de perfiles, y por ello comenzó a ser utilizado por la NASA a partir de 1975.

El método de transformación conforme usado por Eppler es único porque permitía definir la distribución de velocidades a lo largo de la sección para diferentes ángulos de ataque. Es una característica muy importante, pues gracias a ella era posible diseñar secciones cuyo comportamiento se ajusta al definido en distintos puntos de operación (proceso multipuntual).

El proceso de Eppler comienza con la resolución del flujo en el plano  $\zeta$  donde la superficie sustentadora se representa como un círculo de radio unidad. El objetivo que persigue es encontrar una función  $z = z(\zeta)$  que convierta el círculo del plano  $\zeta$  en un perfil aerodinámico en el plano  $z$ , tal y como se representa en la fig. 1.27.a. Esto es lo que se conoce como transformación conforme. Para ello, Eppler parte de la relación entre el potencial de velocidades  $F$ , conocido sobre el círculo, y la velocidad compleja  $\bar{w}$  en  $z$ , ec. (1.6).

$$\bar{w} = ve^{-i\theta} = \frac{dF}{dz} = \frac{dF/d\zeta}{dz/d\zeta} \quad (1.6)$$

Tras manipulaciones y aproximaciones, consiguió llegar a las expresiones ec. (1.7) y ec. (1.8) que permiten conocer la geometría del perfil. No obstante, para poder completar esta operación y conseguir la geometría, es necesario conocer la distribución de velocidades, ya que ambas expresiones depende de la función  $Q$ , que a su vez depende de la velocidad  $v$  sobre la sección.

$$\frac{dx}{d\phi} = -4 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \left| \cos\left(\frac{\phi}{2} - \alpha\right) \right| \frac{1}{v(\phi)} \cos\left(\frac{\phi}{2} + Q(\phi)\right) \quad (1.7)$$

$$\frac{dy}{d\phi} = -4 \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \left| \cos\left(\frac{\phi}{2} - \alpha\right) \right| \frac{1}{v(\phi)} \sin\left(\frac{\phi}{2} + Q(\phi)\right) \quad (1.8)$$

donde  $\phi$  es la variable que vincula los dos planos, siendo  $x = \frac{c}{2}(1 + \cos\phi)$  en  $z$ , y  $\zeta = e^{i\phi}$  en  $\zeta$ .

Durante este desarrollo, también encuentra una relación para la distribución de velocidad  $v(\phi, \alpha)$  en función de  $v^*(\phi, \alpha^*)$  y  $\alpha^*$ , que no depende en ningún caso de la forma de la sección, ec. (1.9). Esta igualdad implica que la distribución de velocidades sobre el perfil  $v^*$  puede ser definida a distintos ángulos de ataque  $\alpha^*$ , logrando que el diseño sea multipuntual. Así, para introducir la función de velocidad  $v(\phi, \alpha)$  necesaria para determinar la geometría utilizando las expresiones anteriores, Eppler decide discretizar el perfil circular del plano  $\zeta$  en pequeñas secciones  $i$  sobre las que define la velocidad  $v_i^*$  constante y el ángulo de ataque  $\alpha_i$ , (fig. 1.27.b).

$$v(\phi, \alpha) = v^*(\phi, \alpha^*) \left| \frac{\cos\left(\frac{\phi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\phi}{2} - \alpha^*\right)} \right| \quad (1.9)$$

Además de lo anterior, el código incluye un modelo de recuperación de la presión en la zona del borde de salida, lo que garantiza la continuidad de la distribución de velocidades para todos los ángulos. Por último, también se introducen una serie de condiciones para que el perfil sea cerrado, con la posibilidad de poder especificar el ángulo del borde de salida [21].

Respecto a la función de análisis de perfiles, Eppler implementó un método de paneles con el fin de calcular la distribución de velocidades sobre una sección dada. Obviamente, esta funcionalidad permitía conocer de forma aproximada las características aerodinámicas de un perfil sin necesidad de realizar pruebas en un túnel de viento, pero desde el punto de vista del diseño, era necesario para determinar el efecto de una desviación en la velocidad. El código implementa paneles de tercer orden con torbellinos distribuidos parabólicamente a lo largo de cada panel, como se muestra en la fig. 1.28. Para lograr esa distribución parabólica la intensidad se modela sobre cada panel con tres funciones dependientes de la posición sobre el panel, ec. (1.10). De manera similar a cualquier otro método de paneles, la intensidad de los torbellinos ( $\gamma_i, \gamma_j, \gamma_p$ ) se calcula de tal forma que se cumpla la condición de velocidad tangente en cada panel. Determinados los torbellinos, por integración se obtiene el valor de la velocidad en cualquier punto P del dominio fluido.

$$\gamma(\xi) = \gamma_i \left(1 - \frac{\xi}{\sigma}\right) \quad \gamma(\xi) = \gamma_j \frac{\xi}{\sigma} \quad \gamma(\xi) = \gamma_p \left(1 - \frac{\xi}{\sigma}\right) \frac{\xi}{\sigma} \quad (1.10)$$

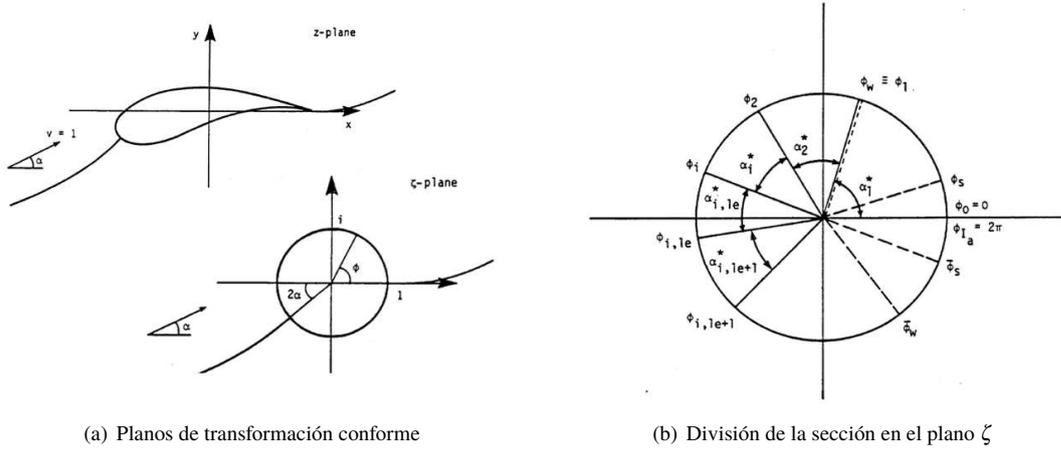


Figura 1.27 Diseño de perfiles [9].

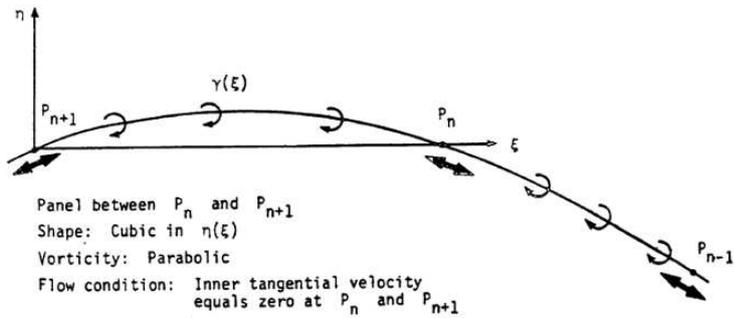


Figura 1.28 Método de paneles [9].

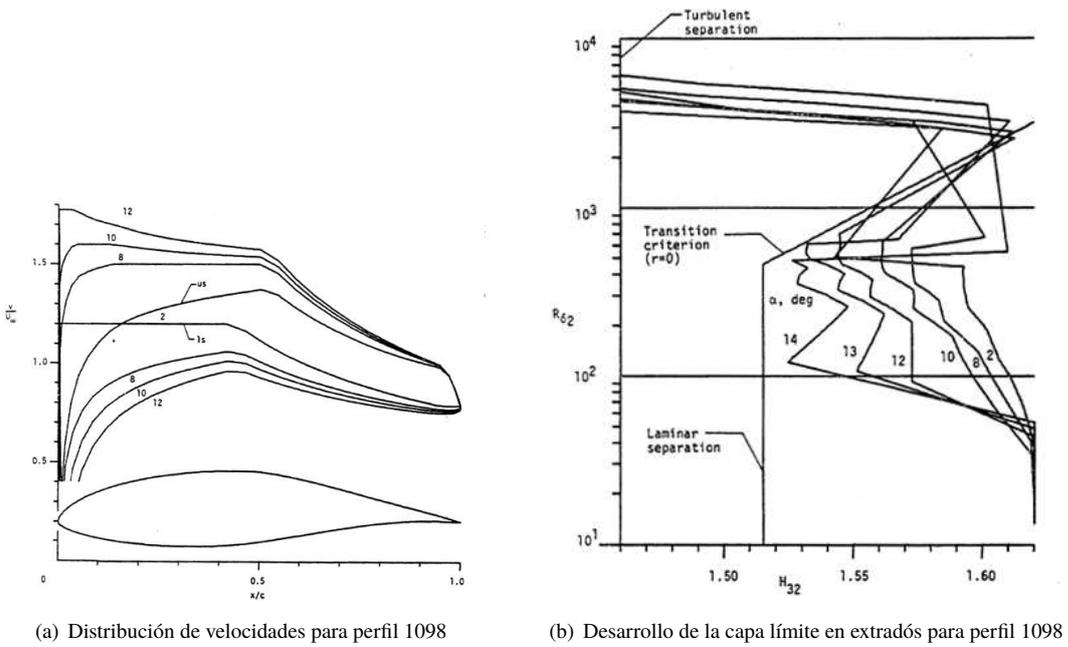


Figura 1.29 Capa límite [9].

Por último, pero no menos importante, está el estudio de la capa límite, imprescindible en el análisis de la resistencia y la entrada en pérdida. El código utiliza un método integral (ec. (1.11) y ec. (1.12)) para predecir la evolución de la capa límite dada una distribución de velocidad. El programa es capaz de determinar si la capa límite es laminar o turbulenta, además de los puntos de transición y desprendimiento, tanto para corriente laminar como turbulenta. El método es semiempírico, pues se basa en una serie de factores experimentales para caracterizar la transición y el desprendimiento [21].

$$\delta'_2 + (2 + H_{12}) \frac{U'}{U} \delta_2 = C_f + \frac{v_0}{U} \quad (1.11)$$

$$\delta'_3 + 3 \frac{U'}{U} \delta_3 = C_p + \frac{v_0}{U} \quad (1.12)$$

donde  $U$  es la velocidad del flujo exterior,  $H_{12}$  factor de forma basado en el espesor de la capa límite,  $C_f$  el coeficiente de fricción,  $C_p$  el coeficiente de disipación y  $v_0$  la velocidad normal a la superficie.

En el caso de la separación, se determina con el factor de forma  $H_{32}$  basado en los espesores de cantidad de movimiento  $\delta_2$  y energía  $\delta_3$ . Para capa límite laminar, existe un valor constante y fiable de dicho factor, 1.515, por debajo del cual se produce el desprendimiento. Por contra, para capa turbulenta, no existe un valor fijo, pero si se conoce que si cae por debajo de 1.46 se desprende, mientras que permanecerá adherida si está por encima de 1.58. Esta incertidumbre hace que los resultados deban ser revisados cuidadosamente en el caso de desprendimiento turbulento.

$$H_{32} = \frac{\delta_3}{\delta_2}$$

$$\text{Desprendimiento C.L. laminar} \quad H_{32} \leq 1.515 \quad (1.13)$$

$$\text{Desprendimiento C.L. turbulenta} \quad H_{32} \leq 1.46$$

Respecto al punto de transición, este queda fijado mediante una ley empírica (ec. (1.14)) que implica al número de Reynolds basado en las condiciones locales  $Re_{\delta_2}$ , al factor de forma  $H_{32}$  y a la rugosidad  $r$ . Para ilustrar los criterios elegidos, Eppler proporciona la fig. 1.29, donde se muestra el desarrollo de la capa límite para diferentes ángulos de ataque [9].

$$\ln Re_{\delta_2} \geq 18.4H_{32} - 21.74 - 0.36r \quad (1.14)$$

Lo más destacado del código de Eppler es la conexión entre el método de capa límite y el de transformación conforme. Este vínculo permite al diseñador controlar las características de la capa límite durante todo el proceso de diseño, puesto que gracias al programa, cuenta con la capacidad de ver que modificaciones son necesarias en la distribución de velocidades para conseguir el comportamiento deseado de la capa límite.

El rango operativo del código fue establecido inicialmente para Reynolds de baja velocidad 3 a  $9 \cdot 10^6$ . Más tarde se comprobó su validez para valores más altos  $\sim 20 \cdot 10^6$ , tras lo cual se pasó a los más bajos  $\sim 0.5 \cdot 10^6$ . Las últimas investigaciones apuntan, que incluso podría ser aplicable a  $\sim 0.1 \cdot 10^6$  [21].

### Códigos actuales

Tomando como base la teoría desarrollada por Eppler, los métodos inversos han progresado mucho en las últimas décadas. Con los programas de diseño inverso modernos, es posible fijar características de presión y/o la capa límite junto con restricciones geométricas deseadas en el diseño de superficies sustentadoras para un rango operativo.

A pesar de estos avances, Jepson [16] insiste en que el diseño inverso de perfiles aerodinámicos todavía implica una cierta cantidad de ensayo y error cuando el diseñador intenta afinar la polar de la sección, o cuando se intenta adaptar la superficie para una aplicación particular. Esta situación está fomentada porque la mayoría de códigos modernos emplean procesos desacoplados en lugar de acoplados, puesto que es más

sencillo la resolución repetitiva del problema directo. Entre los métodos modernos empleados o estudiados hasta ahora para la resolución del problema inverso, destaca el *Ball-Spine Algorithm*.

Se trata de un método inverso desarrollado específicamente para el diseño de perfiles. La clave de este proceso es el uso de una sección variable que cambia su geometría de forma iterativa como si de un globo se tratase. La sección es definida por una serie de nodos, cuyo movimiento está restringido a unas direcciones específicas llamadas *spine*. Esta idea queda reflejada en la fig. 1.30. Así, conociendo la posición de estos nodos, y usando interpolación es posible conocer la forma del perfil en todo momento.

El proceso comienza con la determinación de la forma de la sección según la posición actual de los nodos, seguido del cálculo de las presiones sobre ella. Suponiendo que la distribución de presiones deseadas se encuentra aplicada en la cara interna del perfil, se comparan con las presiones exteriores obtenidas anteriormente. Debido a esta diferencia de presiones, se genera una fuerza sobre cada uno de los nodos, provocando que se desplacen. Efectivamente, igual que en un globo si la presión interior es mayor que la exterior este se hinchará, si ocurre lo contrario, se deshinchará; hasta que las presiones se igualen. Para recrear este fenómeno físico, a cada nodo se le asigna una masa asociada a la porción del perfil que representa. Mediante la proyección de la fuerza y la definición de la aceleración que sufre cada nodo, el método determina los desplazamientos que sufren los nodos en cada iteración (ec. (1.15)). El proceso concluye cuando las aceleraciones son nulas, lo que indica que la presión interior y exterior se han igualado, obteniendo así el perfil. El proceso descrito queda esquematizado en la fig. 1.31.

$$y_i^{(t+\Delta t)} = y_i^{(t)} + \frac{(\Delta t)^2}{2\rho} \Delta P_i \cos \theta_i \tag{1.15}$$

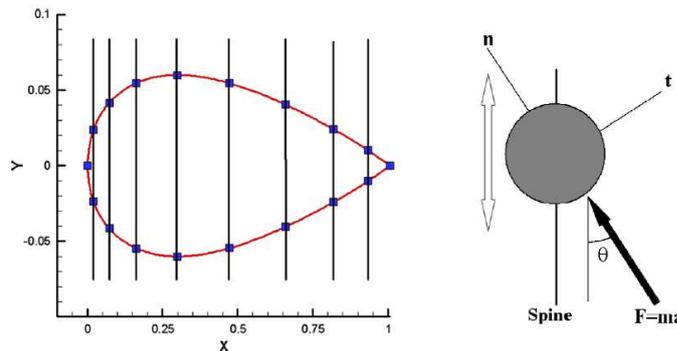


Figura 1.30 Fundamentos del método *Ball-Spine Algorithm* .

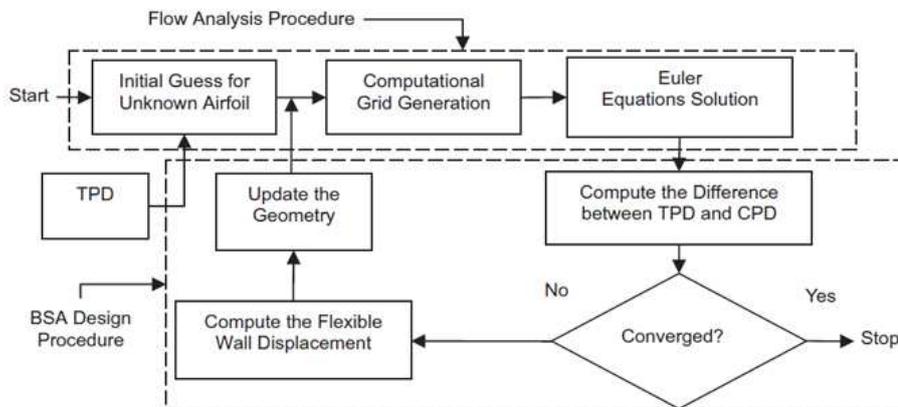


Figura 1.31 Esquema del proceso *Ball-Spine Algorithm* .

Para finalizar, es preciso destacar que actualmente se están estudiando otras metodologías de resolución más modernas derivadas de estudios sobre la inteligencia artificial: redes neuronales artificiales (ANN) y algoritmos evolutivos (EA). Las redes neuronales son un paradigma de aprendizaje y procesamiento automático inspirado en la forma en que funciona el sistema nervioso. Estos sistemas son capaces de emular las relaciones no lineales existentes en la vida real después de someterse a un proceso de aprendizaje. Esta capacidad de aprendizaje y adaptación es lo que caracteriza a estos códigos y los hace tan versátiles. Algunas de sus aplicaciones más destacadas son: procesamiento de señales, reconocimiento de imágenes, filtrado de ruido, robótica, control de procesos, diagnósticos médicos... Por otra parte, los algoritmos evolutivos están basados en mecanismos de evolución biológica. Son ideales para problemas de optimización o búsqueda con espacios extensos y no lineales. La idea detrás de estos métodos es imitar el proceso de evolución, donde solo los más aptos sobreviven y transmiten sus capacidades. Llevado este concepto a la resolución de problemas, consiste en trabajar con una población de individuos que representan las posibles soluciones al problema planteado. Los individuos son sometidos a un proceso de transformación y selección, dando lugar a una nueva generación. Tras varios ciclos, es de esperar que algún individuo esté cerca de la solución buscada.

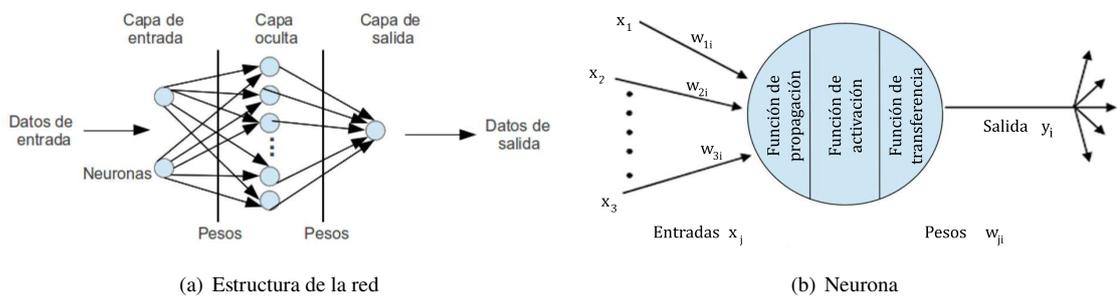


Figura 1.32 Redes neuronales artificiales .

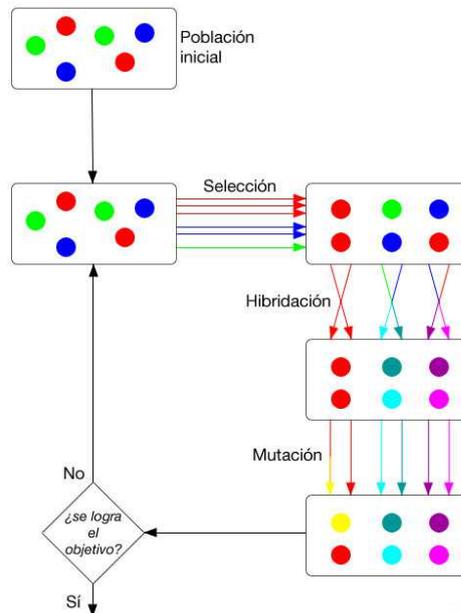


Figura 1.33 Estructura de un algoritmo evolutivo.

## 2 Planteamiento del problema

---

El objetivo de este proyecto consiste en desarrollar un primer acercamiento a los métodos de diseño inverso. Para el planteamiento de las ecuaciones y su resolución, se utilizará la teoría potencial linealizada suponiendo un flujo estacionario en régimen subsónico incompresible. Gracias a que esta teoría no tiene en cuenta los efectos viscosos ( $Re \gg 1$ ), se puede encontrar una relación directa entre la forma del perfil y las características del campo fluido.

### 2.1 Formulación de las ecuaciones

En primer lugar, para abordar el problema de diseño es necesario encontrar la relación existente entre la forma de la sección y el campo fluido a su alrededor. Para comenzar con este desarrollo se parte del sistema de ecuaciones formado por la ecuación de continuidad (ec. (2.1)) y cantidad de movimiento (ec. (2.2)) de Navier-Stokes visto en Mecánica de fluidos [6].

No es necesario incluir la ecuación de la energía porque se va a suponer que el fluido es isentrópico, es decir que la entropía se conserva, y por tanto se puede utilizar la ec. (2.3) para relacionar las variables de densidad y presión.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \tau' + \rho \vec{f}_m \quad (2.2)$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \quad (2.3)$$

Al tratarse de un caso bidimensional se tienen 4 incógnitas: 2 de velocidad ( $\vec{v}(x,z) = [v_x, v_z]$ ), la presión ( $p(x,z)$ ) y la densidad ( $\rho(x,z)$ ). Una revisión de las ecuaciones planteadas y las incógnitas permite confirmar que el problema está cerrado.

El sistema de ecuaciones (2.1) - (2.3) puede simplificarse notablemente para tratar las situaciones de interés en Aerodinámica [11]. Estas correcciones en el sistema aparecen como resultado de comparar los órdenes de magnitud de los distintos miembros de las igualdades, permitiendo despreciar unos términos frente a otros. Esta evaluación se lleva a cabo mediante los números adimensionales, los cuales tienen en cuenta tanto la longitud característica del perfil  $c$ , como la velocidad del movimiento  $U_\infty \gtrsim 10 \text{ m/s}$ . Para el caso aquí tratado se emplearán tres de ellos: número de Reynolds ( $Re$ ), número de Froude ( $Fr$ ) y número de Strouhal ( $St$ ).

- $N^\circ Reynolds$  : mide la importancia relativa que existe entre el orden de magnitud del término de aceleración convectiva  $\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$  y el viscoso  $\nabla \cdot \tau'$  en la ec. (2.2). Así se determina cual es el efecto dominante: las fuerzas inerciales o los esfuerzos viscosos. Al ser la viscosidad y densidad típicas del aire del orden de  $\mu \sim 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$  y  $\rho \sim 1 \text{ kg/m}^3$ , el número de Reynolds cumple que  $Re = \rho_\infty U_\infty c / \mu \gg 1$ .

Se concluye que en primera aproximación se puede despreciar el término de esfuerzos viscosos para el flujo exterior, no siendo así dentro de la capa límite. Se trata de un flujo potencial.

- *Nº Froude* : surge al comparar el término de fuerzas másicas  $\rho \vec{f}_m$  con la aceleración convectiva, dando lugar a la relación  $Fr = U_\infty^2/(gc)$ . Aplicando los ordenes de magnitud vistos anteriormente se deduce que  $Fr \gg 1$ , lo que implica de nuevo, que en primera aproximación, se pueden despreciar las fuerzas másicas.
- *Nº Strouhal* : contrasta la variación de la velocidad debido a dos fenómenos: cambio de posición  $\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$  y cambio de las condiciones de contorno  $\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ . Se trata de estimar si las partículas del campo fluido permanecen el tiempo suficiente como para experimentar una variación de la velocidad debida al tiempo. En el caso abordado  $St = c/(U_\infty t_c) \ll 1$ , lo que indica que el flujo es estacionario como ya se declaró.

Aplicando estas deducciones, se reduce la complejidad de las ecuaciones de continuidad y cantidad de movimiento, ya que se desprecian los términos dependientes del tiempo, las fuerzas másicas y los esfuerzos viscosos.

$$\nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.4)$$

$$\rho \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla p \quad (2.5)$$

Por otra parte, el flujo que se forma alrededor del perfil puede entenderse como el resultado de las perturbaciones sobre la corriente incidente debido a la presencia del perfil en el campo fluido. De esta manera, las magnitudes fluidas pueden ser modeladas mediante los valores de la corriente incidente ( $\vec{x} \rightarrow \infty$ ) más las pequeñas perturbaciones.

$$\vec{v}(x,z) = \vec{U}_\infty + \vec{v}' = U_\infty \vec{i} + u' \vec{i} + w' \vec{k}$$

$$p(x,z) = p_\infty + p'$$

$$\rho(x,z) = \rho_\infty + \rho'$$

donde se cumple que:

$$|v'| \ll U_\infty \quad ; \quad |p'| \ll p_\infty \quad ; \quad |\rho'| \ll \rho_\infty$$

$$|\vec{x}| \rightarrow \infty : \quad \vec{v}' = 0 \quad ; \quad p' = 0 \quad ; \quad \rho' = 0$$

Teniendo en cuenta esta consideración de pequeñas perturbaciones provocadas por perfiles esbeltos, se linealiza el sistema formado por las ecuaciones (2.3) - (2.5). El resultado obtenido es un sistema de ecuaciones (2.6) - (2.8) cuyas incógnitas pasan a ser las perturbaciones en velocidad, presión y densidad. Además, tras esta manipulación, se ha conseguido una relación más directa entre las magnitudes, lo que permite sustituir unas expresiones en otras para llegar a la conexión buscada en este capítulo.

$$\nabla \cdot \vec{v}' = -\frac{U_\infty}{\rho_\infty} \frac{\partial \rho'}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\rho_\infty U_\infty \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x} = -\nabla p' \quad (2.7)$$

$$\rho' = \frac{p'}{a_\infty^2} \quad (2.8)$$

Antes de sustituir y obtener la expresión final, se debe proyectar la ecuación de cantidad de movimiento linealizada sobre la componente  $\vec{i}$ . Al hacer esto se consigue la relación directa entre la velocidad y la presión (2.9) necesaria para poder sustituir en el sistema. Al mismo tiempo, permite conocer una expresión del coeficiente de presiones en función de la velocidad de perturbación (2.10) que será muy práctica en este estudio.

$$p' = -\rho_\infty U_\infty u' \quad (2.9)$$

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} = \frac{p'}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2} = -\frac{2u'}{U_\infty} \quad (2.10)$$

Usando la definición de la divergencia ( $\nabla \cdot \vec{v}' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z}$ ) para el caso bidimensional y tras sustituir las expresiones anteriores, se llega a la ecuación buscada (2.11). Se trata de una igualdad cuya solución proporciona el campo de velocidades alrededor de un perfil. Según el desarrollo seguido, la expresión es válida tanto para fluidos compresibles como incompresibles, ya sea en régimen subsónico o supersónico; el único requisito es que las perturbaciones sean pequeñas.

$$(1 - M_\infty^2) \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \quad (2.11)$$

Para terminar de cerrar el problema queda definir las condiciones de contorno que debe cumplir el campo de velocidades alrededor de la sección. La primera ya fue incluida con la consideración de pequeñas perturbaciones, y es que lejos del objeto las perturbaciones son nulas (2.12). La siguiente es conocida como condición de impenetrabilidad, según la cual la velocidad del flujo sobre el perfil es tangente a la superficie (2.13). De esta forma se consigue relacionar la distribución de velocidades con la forma del perfil. Al tratarse de secciones esbeltas, esta condición puede evaluarse en primera aproximación en  $z \rightarrow 0$ . Por último, debe cumplirse la condición de Kutta-Joukowski según la cual la solución real del problema es aquella en la que la corriente no rebordea el borde de salida. Esta condición junto con el hecho de que las presiones en el borde de salida son iguales tanto en intradós como en extradós, implica que las velocidades en este punto sean las mismas por ambas caras (2.14) y (2.15). Tanto la demostración de estas condiciones como una explicación más extensa de las mismas son ofrecidas por Katz [15] y Gordillo [11].

$$\vec{v}' \rightarrow 0 \quad |\vec{x}'| \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

$$\vec{v}' \cdot \vec{n}_s = 0 \quad ; \quad w'(x, z \rightarrow 0^\pm) = U_\infty \frac{dz_p^\pm}{dx} \quad \forall x \in \text{Perfil} \quad (2.13)$$

$$u'(x, z \rightarrow 0^+) = u'(x, z \rightarrow 0^-) \quad x \in BS \quad \text{Cond. de KJ} \quad (2.14)$$

$$w'(x, z \rightarrow 0^+) = w'(x, z \rightarrow 0^-) \quad x \in BS \quad \text{Cond. de KJ} \quad (2.15)$$

Llegados a este punto, el problema puede ser expresado de forma más sencilla si se expresa en función de un potencial. En este caso puesto que se está considerando el flujo alejado de la superficie del perfil, las partículas fluidas no rotan al estar sometidas a un campo de presiones uniforme. Esto indica que la vorticidad es cero ( $\nabla \times \vec{v}' = \vec{\omega} = 0$ ), lo que implica que la velocidad proviene de un potencial ( $\vec{v}' = \nabla \Phi$ ). Por otra parte, si además se incluye la simplificación de considerar régimen subsónico incompresible ( $M_\infty^2 \ll 1$ ), entonces el problema deriva en la resolución de la ecuación de Laplace. Gordillo [11] explica que la aproximación casi incompresible da buenos resultados cuando el número de Mach satisface  $M_\infty < 0.3$ . También afirma que a diferencia de la ecuación (2.1) la de Laplace es lineal, lo que simplifica enormemente la resolución del flujo exterior a la capa límite.

$$\nabla^2 \Phi' = 0 \quad (2.16)$$

$$\vec{v}' = \nabla \Phi' \rightarrow 0 \quad |\vec{x}'| \rightarrow \infty \quad (2.17)$$

$$\vec{v}' \cdot \vec{n}'_s = 0 \quad ; \quad \frac{\partial \Phi'}{\partial z}(x, z \rightarrow 0^\pm) = U_\infty \frac{dz_p^\pm}{dx} \quad \forall x \in \text{Perfil} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial x}(x, z \rightarrow 0^+) = \frac{\partial \Phi'}{\partial x}(x, z \rightarrow 0^-) \quad x \in BS \quad \text{Cond. de KJ} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial z}(x, z \rightarrow 0^+) = \frac{\partial \Phi'}{\partial z}(x, z \rightarrow 0^-) \quad x \in BS \quad \text{Cond. de KJ} \quad (2.20)$$

## 2.2 Resolución teórica

Lo primero a tener en cuenta para hallar la solución del problema planteado es que gracias a que la ecuación de Laplace es lineal, la solución puede construirse mediante superposición de soluciones elementales  $\Phi_i$ . Históricamente el problema se ha estudiado separándolo en un problema de espesor o simétrico, y un problema de curvatura o antisimétrico (2.22). Esta metodología se apoya en el hecho de que el contorno de los perfiles  $z_p(x)$  está determinado a través de la función de espesor  $z_e(x)$ , y la línea de curvatura  $z_c(x)$ . En el caso de los perfiles NACA de 4 dígitos, estas expresiones están basadas en el valor del máximo espesor  $t$ , máxima curvatura  $h$  y posición de la máxima curvatura  $p$ .

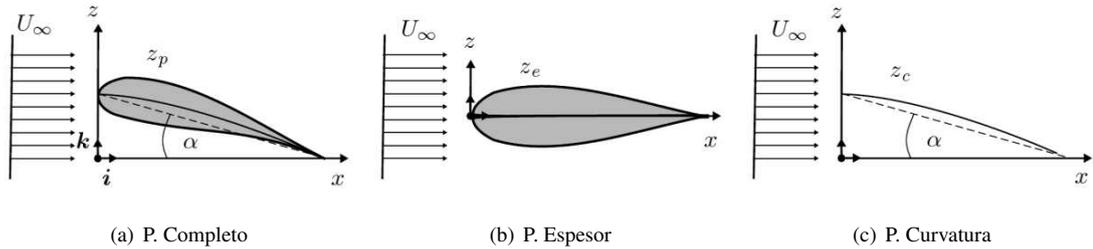


Figura 2.1 División del problema completo [11].

$$z_p(x, t, h, p) = z_c(x, h, p) \pm z_e(x, t) \quad (2.21)$$

Desde otro punto de vista este fenómeno físico se interpreta a través de la condición de impenetrabilidad. Si no existiera el perfil, las líneas de corriente serían uniformes. Al introducir la sección, las líneas de corriente se perturban para cumplir la condición de impenetrabilidad, apareciendo una velocidad vertical  $w'$ . En conclusión, el origen de esta velocidad vertical tiene dos componentes, una debida al espesor del perfil y otra debida a su curvatura (2.23).

$$\Phi' = \Phi'_{\text{espesor}} + \Phi'_{\text{curvatura}} \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial \Phi'_{\text{espesor}}}{\partial z}(x, z \rightarrow 0^\pm) + \frac{\partial \Phi'_{\text{curvatura}}}{\partial z}(x, z \rightarrow 0^\pm) = U_\infty \left( \frac{dz_c}{dx} \pm \frac{dz_e}{dx} \right) \quad (2.23)$$

### 2.2.1 Problema de espesor o simétrico

Dada las características del problema de espesor, Kantz [15] y Gordillo [11] usan una solución elemental de la ecuación de Laplace cuyo campo de velocidades de perturbación generado sea simétrico. De esta manera la solución para este problema consiste en una distribución continua de fuentes situadas a lo largo del eje  $x$  (fig. 2.2). La intensidad de estas fuentes  $v_o(x_o)$  debe ser calculada para cumplir con la condición de impenetrabilidad, obteniendo así la relación buscada entre la velocidad y el espesor del perfil.

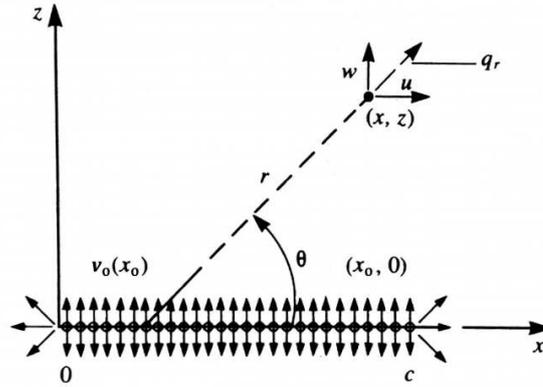


Figura 2.2 Distribución continua de fuentes [15].

La velocidad en cualquier punto del dominio fluido viene determinada por la integración de la distribución de las fuentes (2.24). Se distinguen las dos componentes: velocidad horizontal  $u'_{sim} \vec{i}$  y vertical  $w'_{sim} \vec{k}$ .

$$\vec{v}'_{sim}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^c \frac{v_o(x_o)(x-x_o)}{(x-x_o)^2 + z^2} dx_o \vec{i} + \int_0^c \frac{v_o(x_o)z}{(x-x_o)^2 + z^2} dx_o \vec{k} \right) \quad (2.24)$$

En primer lugar, se calcula el valor de la velocidad vertical  $w'_{sim}(x, z \rightarrow 0)$ , quedando en función de la intensidad de la fuente  $v_o(x)$ . Al relacionar este hecho con la condición de impenetrabilidad, da lugar a la expresión (2.25) que proporciona el valor de la intensidad de cada fuente [15]. Al sustituir esta condición en la integral que proporciona la componente horizontal de velocidad, se obtiene una expresión que la relaciona de forma directa con el espesor del perfil (2.26).

$$w'_{sim}(x, z \rightarrow 0^\pm) = \pm \frac{v_o(x)}{2} = \pm U_\infty \frac{dz_e}{dx}(x) \quad ; \quad v_o(x) = 2U_\infty \frac{dz_e}{dx}(x) \quad (2.25)$$

$$u'_{sim}(x, z \rightarrow 0) = \frac{U_\infty}{\pi} \int_0^c \frac{\frac{dz_e}{dx}(x_o)}{(x-x_o)} dx_o \quad (2.26)$$

A pesar de encontrar la función buscada, esta está escrita en términos de velocidades. Sin embargo el interés de este estudio reside en la distribución de presiones que se forma alrededor de las secciones. Como ya se ha visto anteriormente ambas magnitudes están vinculadas entre sí a través de la igualdad (2.9) o (2.10). Reescribiendo la ecuación anterior, se llega a la expresión buscada para el problema simétrico (2.27).

$$C_{p,sim}(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{\frac{dz_e}{dx}(x_o)}{(x-x_o)} dx_o \quad (2.27)$$

Se trata de una ecuación integral cuyo dato de entrada es la distribución de presiones simétrica  $C_{p,sim}$ . Su resolución proporciona los valores de la pendiente de la función de espesor  $\frac{dz_e}{dx}(x)$  que serán integrados a lo largo del perfil para calcular el espesor  $z_e(x)$ .

### 2.2.2 Problema de curvatura o antisimétrico

Siguiendo la misma estructura, para el problema de curvatura se debe utilizar una solución elemental  $\Phi_i$  cuyo campo de velocidades de perturbación sea antisimétrico. En esta ocasión la distribución continua sobre el eje  $x$  es de torbellinos (fig. 2.3). De igual manera que en el anterior apartado, la intensidad de estos torbellinos  $\gamma_o(x_o)$  debe ser la adecuada para cumplir la condición de impenetrabilidad.

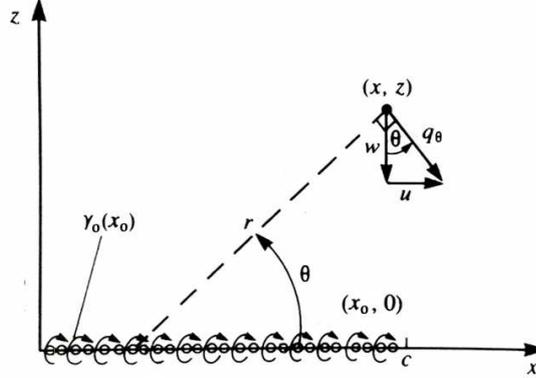


Figura 2.3 Distribución continua de torbellinos [15].

La velocidad en cualquier punto del dominio fluido viene determinada por la integración de la distribución de los torbellinos (2.28). También se distinguen las dos componentes: velocidad horizontal  $u'_{anti} \vec{i}$  y vertical  $w'_{anti} \vec{k}$ .

$$\vec{v}'_{anti}(x, z) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^c \frac{\gamma_o(x_o) z}{(x-x_o)^2 + z^2} dx_o \vec{i} + \int_0^c \frac{-\gamma_o(x_o)(x-x_o)}{(x-x_o)^2 + z^2} dx_o \vec{k} \right) \quad (2.28)$$

Esta vez se comienza por calcular el valor de la velocidad horizontal  $u'_{anti}(x, z \rightarrow 0)$ , obteniendo una relación para el valor de la intensidad de cada torbellino (2.29). Sustituyendo esta expresión en la integral que proporciona la componente vertical  $w'_{anti}$  de la velocidad, e imponiendo la condición de impenetrabilidad, se consigue análogamente una expresión que relaciona directamente la curvatura del perfil con la velocidad de perturbación horizontal (2.30).

$$u'_{anti}(x, z \rightarrow 0^\pm) = \pm \frac{\gamma_o(x)}{2} \quad ; \quad \gamma_o(x) = 2u'_{anti}(x) \quad (2.29)$$

$$w'_{anti}(x, z \rightarrow 0) = U_\infty \frac{dz_c}{dx}(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^c \frac{u'_{anti}(x_o)}{(x-x_o)} dx_o \quad (2.30)$$

Al igual que antes la ecuación está escrita en términos de velocidad, pero utilizando las mismas expresiones anteriores puede ser reescrita en función de la distribución de presiones.

$$\frac{dz_c}{dx}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{C_{p,anti}(x_o)}{(x-x_o)} dx_o \quad (2.31)$$

Se trata de una ecuación cuyo dato de entrada es la distribución de presiones antisimétrica  $C_{p,anti}$ . A diferencia del problema simétrico, ahora no se trata de resolver una ecuación, sino en calcular una integral. Esta integral proporciona directamente los valores de la pendiente de la función de curvatura  $\frac{dz_c}{dx}(x)$  que serán integrados a lo largo del perfil para calcular la curvatura  $z_c(x)$ .

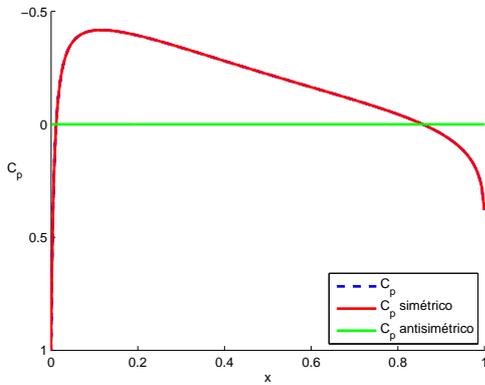
2.2.3 Distribución de presiones

Por último, es necesario dedicar un pequeño apartado a la distribución de presiones, ya que las expresiones encontradas dependen de estos valores. Habitualmente al estudiar el campo de presiones alrededor de un perfil se distingue la presión del extradós  $C_{p,E}$  y la del intradós  $C_{p,I}$ , ya que la diferencia entra ambas proporciona la sustentación. Por lo tanto, lo normal sería emplear estos datos como entrada del problema de diseño. Sin embargo, las expresiones desarrolladas están en función de la distribución simétrica  $C_{p,sim}$  y antisimétrica  $C_{p,anti}$ . Basta con aplicar la definición de ambos coeficientes para poder utilizar los datos de entrada habituales.

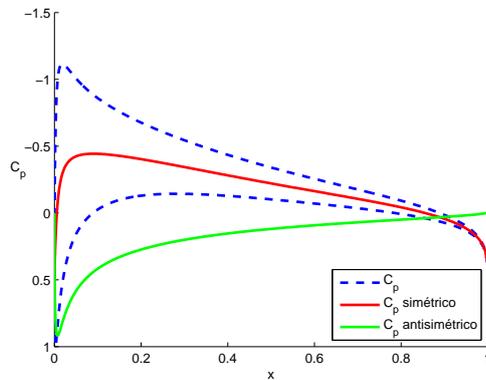
$$C_{p,sim} = \frac{C_{p,E} + C_{p,I}}{2} \tag{2.32}$$

$$C_{p,anti} = C_{p,E} - C_{p,sim} \quad ; \quad C_{p,anti} = \frac{C_{p,I} - C_{p,E}}{2} \tag{2.33}$$

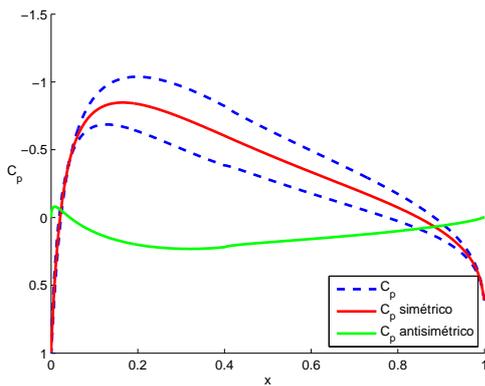
A modo representativo se presentan una serie de gráficas en las que se puede apreciar la diferencia entre las distribuciones de presiones en el extradós e intradós y las distribuciones simétricas y antisimétricas empleadas en las ecuaciones.



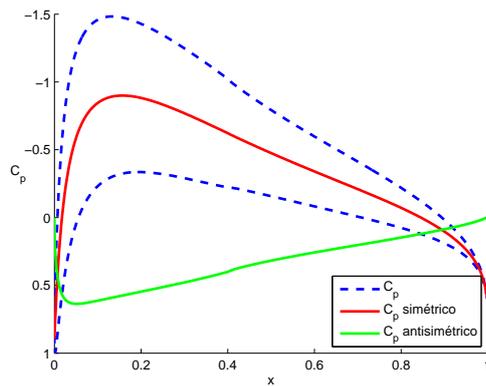
(a) NACA 0012 ,  $\alpha = 0^\circ$



(b) NACA 0012 ,  $\alpha = 3^\circ$



(c) NACA 2424 ,  $\alpha = 0^\circ$



(d) NACA 2424 ,  $\alpha = 3^\circ$

Figura 2.4 Distribuciones de presión  $C_p$ .



## 3 Resolución computacional

---

Formuladas las ecuaciones que proporcionarán los valores de espesor  $z_e(x)$  (2.27) y curvatura  $z_c(x)$  (2.31), se procede a su implementación numérica usando el programa de cálculo Matlab. En este tercer capítulo se van a exponer todos los elementos usados para la resolución computacional de las ecuaciones, desde los diversos métodos numéricos hasta la obtención de los parámetros de entrada  $C_{p,E}$  y  $C_{p,I}$ .

### 3.1 Problema de espesor

A priori, el problema simétrico es el más complejo de resolver. El motivo de esta afirmación reside en el hecho de que se trata de una ecuación integral cuya incógnita  $z_e$  no sólo se encuentra en el integrando, sino que además está derivada, aunque esto último merece menos importancia. Para intentar obtener la solución más exacta posible de este problema se han planteado tres métodos: método de Vortex-Lattice, series de Fourier y fórmula de inversión de Söhngen. Se hace hincapié en resolver este problema porque supone la parte central del programa que se quiere implementar para diseñar perfiles de forma inversa, puesto que el cálculo de la curvatura no presenta ninguna dificultad añadida.

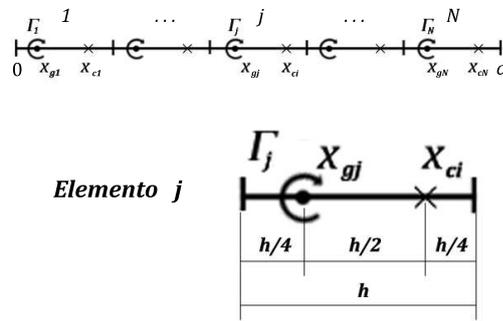
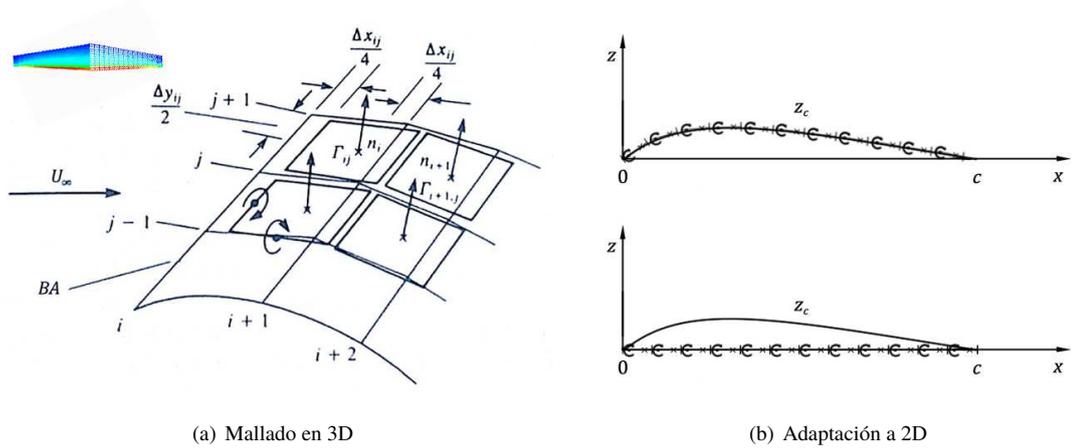
Un detalle a tener en cuenta es que si la distribución de presiones introducida fuera simétrica ( $C_{p,E} = C_{p,I}$ ), el perfil buscado sería simétrico y estaría posicionado a ángulo de ataque nulo. Esto implica que bastaría con resolver el problema de espesor para conocer la geometría. No obstante esa situación será poco frecuente porque la utilidad de los perfiles se centra en su capacidad de generar sustentación a partir de la diferencia de presiones entre extradós e intradós. Sin embargo, será un planteamiento útil para comprobar el correcto funcionamiento de los programas implementados en este apartado.

#### 3.1.1 Método de Vortex-Lattice

En primer lugar se decidió adaptar el método de Vortex-Lattice por tres motivos: la formulación del problema que resuelve es semejante al aquí tratado, es fácil de programar, y por estar familiarizado con él tras la asignatura de Aerodinámica II y conocer su efectividad.

Anderson [5] y Katz [15] explican que se trata de una metodología ampliamente empleada en aerodinámica desde los años 70. Es usado para la estimación de las características aerodinámicas como la sustentación y la resistencia inducida sobre cuerpos de geometría, espesor y orientación arbitraria. Para el caso de alas en 3D, esta técnica numérica consiste en mallar el ala dividiéndola en pequeños paneles  $ij$  e imponer sobre cada uno de ellos una circulación  $\Gamma_{ij}$  tal que se cumpla la condición de impenetrabilidad (fig. 3.1.a). Esta filosofía puede ser adaptada para el estudio de perfiles, que es el caso de este documento. En la literatura existen referencias a esta adaptación a 2D como *Método de paneles*. Al tratarse de una técnica para la estimación de la sustentación y la resistencia inducida, no tiene en cuenta el espesor ni la viscosidad porque estas fuerzas tienen su origen en el problema de curvatura.

Se parte de la misma expresión deducida en el problema de curvatura (3.1), con el objetivo de determinar la circulación  $\Gamma$  del perfil. En primer lugar, siguiendo la analogía 3D, se aproxima la curvatura del perfil por



(c) Panel elemental

**Figura 3.1** Vortex-Lattice.

$N$  elementos rectos de longitud  $h$  que simulan ser placas planas. Adoptando la simplificación de pequeñas perturbaciones, el mallado es trasladado al eje  $x$  (fig. 3.1.b). Sobre cada uno de estos paneles  $j$  se impone un torbellino de circulación  $\Gamma_j = \gamma_j \cdot h$ , situado en la posición  $x_{gj}$ . Adicionalmente se supone que la intensidad de circulación  $\gamma_j$  es uniforme en cada placa. Este mallado permite que la integral sea aproximada como un sumatorio, derivando en una expresión donde las incógnitas son las  $N$  densidades de circulación  $\gamma_j$ . Para terminar de cerrar el problema es necesario evaluar la igualdad en  $N$  puntos diferentes. Con este propósito se define sobre cada panel otro punto  $x_{ci}$ , conocidos como puntos de colocación. De esta manera se obtiene un sistema de ecuaciones  $N \times N$  (3.2).

La clave del éxito de este método está en la posición escogida para cada uno de los puntos  $x_{gj}$  y  $x_{ci}$ . Tomando un elemento genérico  $j$  de longitud  $h$ , el primer punto  $x_{gj}$  se sitúa a una distancia  $h/4$  del comienzo del elemento  $j$ , mientras que el punto de colocación  $x_{ci}$  se posiciona a  $h/4$  del final del elemento (fig. 3.1.c). Esta elección no es ni mucho menos al azar. Al situar el torbellino a esa distancia y evaluarla en el otro punto, se calcula de forma exacta la circulación sobre una placa plana ( $\Gamma = \alpha c \pi U_\infty$ ). En conclusión, las buenas aproximaciones conseguidas por este método están fundamentadas en la aproximación del perfil mediante placas planas, ya que es capaz de reproducir de forma exacta la circulación sobre ellas.

$$U_\infty \frac{dz_c}{dx}(x) = \int_0^c \frac{\gamma_o(x_o)}{2\pi(x_o - x)} dx_o \quad (3.1)$$

$$U_\infty \frac{dz_c}{dx}(x_{ci}) = \sum_{j=1}^N \frac{\gamma_j h}{2\pi(x_{gj} - x_{ci})} \rightarrow b_i = A_{ij} \cdot \gamma_j \quad (3.2)$$

Para demostrar la eficacia de este método, se va a considerar una placa plana posicionada a un ángulo de ataque  $\alpha$  cualquiera, cuya curvatura es  $z_c = -\alpha x$ . Al resolver el sistema numéricamente, se obtiene la distribución de intensidades  $\gamma_j$  a lo largo del eje  $x$ . Al compararlas con la distribución teórica ec. (3.3), como se muestra en la fig. 3.2, se observa que los resultados numéricos casan perfectamente con los teóricos, es decir, esta metodología de integración es capaz de reproducir los resultados teóricos para las intensidades  $\gamma(x)$ . Se puede concluir entonces que Vortex-Lattice es un método de discretización efectivo para resolver problemas integrales.

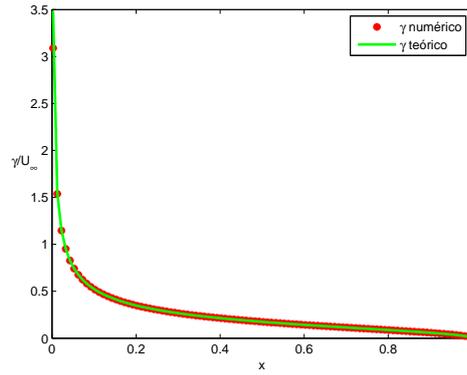


Figura 3.2 Intensidad de torbellinos  $\gamma(x)$  para placa plana.

$$\frac{\gamma}{U_\infty} = 2\alpha \left( \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right) \quad \text{donde} \quad \theta = \arccos \left( 1 - \frac{2x}{c} \right) \quad (3.3)$$

Volviendo al problema de espesor que se busca resolver, si se hecha un vistazo a la ecuación planteada (3.4) y a la que soluciona el método de Vortex-Lattice (3.1), puede verse que son problemas integrales del mismo tipo. Es por ello que se procede a su resolución empleando este proceso (3.5). Sin embargo, hay que tener en cuenta que los valores conseguidos se corresponderán con la pendiente en los puntos  $x_{gj}$  y no con el espesor del perfil. No obstante estos últimos son calculados al integrar de forma numérica la pendiente (3.6). Por último, para que estos resultados se puedan combinar con los resueltos por el problema de curvatura, se decide interpolar los valores a los puntos de colocación  $x_{ci}$ .

$$C_{p,sim}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^c \frac{\frac{dz_e}{dx}(x_o)}{(x_o - x)} dx_o \quad (3.4)$$

$$C_{p,sim}(x_{ci}) = \sum_{j=1}^N \frac{2}{\pi} \frac{\frac{dz_e}{dx}(x_{gj})h}{(x_{gj} - x_{ci})} \quad \longrightarrow \quad b_i = A_{ij} \cdot \left( \frac{dz_e}{dx} \right)_j \quad (3.5)$$

$$z_e(x) = \int_0^x \frac{dz_e}{dx}(x_o) dx_o \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Series de Fourier

Las series de Fourier constituyen una herramienta matemática básica del análisis de Fourier empleado para estudiar funciones periódicas a través de la descomposición de dicha función en una suma infinita de funciones sinusoidales mucho más simples. Es una aplicación usada en muchas ramas de la ingeniería, que incluyen desde análisis vibratorio, acústica, óptica, hasta procesamiento de imágenes y señales. Dada una función periódica  $f(t)$  de periodo  $T$ , la serie de Fourier que aproxima dicha función es:

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \cos \left( \frac{2n\pi}{T} t \right) + b_n \sin \left( \frac{2n\pi}{T} t \right) \right] \quad (3.7)$$

donde  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  son los coeficientes de Fourier.

Mediante esta herramienta y con ayuda de otros resultados que ya se verán, es posible transformar la ecuación integral planteada para el problema de espesor, en otra expresión más fácil de resolver. Con esta manipulación lo que se pretende es que en lugar de tener que calcular los valores del espesor  $z_e(x)$ , las incógnitas pasen a ser los coeficientes de Fourier que modelan la función  $z_e$ .

Para proceder a aproximar el espesor  $z_e$  por medio de una serie de Fourier, primero es necesario realizar un cambio de variable y expresar el espesor en función del ángulo  $\theta$ . Este es un cambio muy empleado cuando se trabaja con perfiles (fig. 3.3). Es interesante echar un vistazo al cambio de los límites entre los que se encuentra la función  $z_e(\theta)$ , donde  $\theta \in [0, \pi]$ . Tal y como se ve en la figura, lo único que se conoce de la función de espesor es que su valor en los extremos debe ser igual a cero para garantizar que el perfil sea cerrado. Por lo tanto, para cumplir esta condición  $z_e(\theta = 0) = z_e(\theta = \pi) = 0$ , la función de espesor debe ser aproximada mediante una serie de senos (3.8).

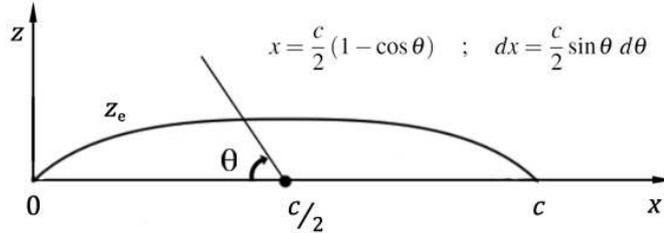


Figura 3.3 Cambio de variable  $x \rightarrow \theta$ .

Definida la forma de la función  $z_e$  como una serie de senos, el objetivo pasa ahora por determinar los coeficientes  $a_n$ . Estos valores deberán ser los adecuados para cumplir la ecuación (2.27), que derivaba de la imposición de la condición de impenetrabilidad. Conocida la forma de la función y empleando la regla de la cadena, se determina la expresión de  $\frac{dz_e}{dx}$  tras el cambio de variable (3.9).

$$z_e(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(n\theta) \quad (3.8)$$

$$\frac{dz_e}{dx} = \frac{dz_e}{d\theta} \frac{d\theta}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \cos(n\theta) \frac{d\theta}{dx} \quad (3.9)$$

Con todos estos elementos se procede a su sustitución en la ecuación integral (2.27). Se observa que la integral resultante en la ecuación (3.10) tras el cambio se corresponde con la integral de Glauert. El resultado de esta integral viene determinado por la expresión (3.11), y su demostración puede ser consultada en *Introducción a la aerodinámica potencial* de Gordillo [11].

$$C_{p,sim}(\theta) = -\frac{4}{c\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta_o)}{\cos(\theta_o) - \cos(\theta)} d\theta_o \quad (3.10)$$

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos(n\theta_o)}{\cos(\theta_o) - \cos(\theta)} d\theta_o = \pi \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \quad (3.11)$$

Operando se ha conseguido eliminar la integral de la ecuación, pero en su lugar se tiene una identidad (3.12) que involucra a un sumatorio donde se encuentran los coeficientes  $a_n$ . Para calcular estos valores, se decide proyectar la ecuación mediante  $\int_0^{\pi} \sin(m\theta)$ , ya que usando la propiedad de ortogonalidad de los senos, todas las integrales excepto aquella en la que  $m = n$ , se harán cero. Esta propiedad queda demostrada en (3.13).

$$C_{p,sim}(\theta) = -\frac{4}{c} \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \frac{\sin(n\theta)}{\sin(\theta)} \quad (3.12)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (\cos([m-n]x) - \cos([m+n]x)) dx = \frac{\pi}{2} \delta_{m,n} \quad (3.13)$$

donde  $\delta_{m,n} \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } m \neq n \\ 1 \text{ si } m = n \end{array} \right\}$

Finalmente se llega a una expresión (3.14) que permite el cálculo directo de los coeficientes  $a_n$  simplemente integrando de forma numérica el coeficiente de presiones simétrico  $C_{p,sim}$ . Conocidos estos valores la función del espesor  $z_e$  queda determinada, puesto que se comenzó este desarrollo definiéndola como una serie de senos (3.8). Al igual que para el método Vortex-Lattice, lo único que queda es determinar el espesor en los mismos puntos donde se calculará la curvatura  $z_c(x_{ci})$ .

$$a_n = -\frac{c}{2n\pi} \int_0^\pi \sin(n\theta) C_{p,sim}(\theta) \sin(\theta) d\theta \quad (3.14)$$

### 3.1.3 Fórmula de inversión de Söhngen

El tercer y último método que se va a probar para resolver la ecuación integral (2.27) consiste en adaptar la fórmula de inversión de Söhngen. Esta fórmula fue deducida por H. Söhngen tras estudiar el problema sustentador en régimen estacionario sobre los perfiles mediante el cálculo de la densidad de circulación. Se trata de un método que permite invertir de forma directa las ecuaciones integrales.

Imagínese que se tienen dos funciones que están relacionadas entre sí por la ecuación integral (3.15), donde  $f(x)$  es conocida y  $g(x)$  desconocida. Mediante Söhngen es posible invertir esta ecuación obteniendo la expresión genérica (3.16) en términos de la variable  $\xi$ .

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{g(x_o)}{x_o - x} dx_o \quad (3.15)$$

$$g(\xi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi_o}{1-\xi_o}} \frac{f(\xi_o)}{\xi - \xi_o} d\xi_o \quad \text{donde } \xi = \frac{2x}{c} - 1 \quad (3.16)$$

Parece un método viable para resolver la ecuación del problema de espesor. El primer paso para poder usar la fórmula es manipular la igualdad (2.27) y conseguir una expresión similar a ec. (3.15) en la que se puedan identificar los términos entre ellas. Observando la ecuación resultante (3.17), es fácil ver que al comparar las igualdades, los términos se corresponden con  $f(x) = \frac{C_{p,sim}(x)}{4}$  y  $g(x) = \frac{dz_e}{dx}(x)$ .

$$\frac{C_{p,sim}}{4}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{\frac{dz_e}{dx}(x_o)}{x_o - x} dx_o \quad (3.17)$$

Conociendo la equivalencia entre los términos y la fórmula que resuelve la ecuación integral, el asunto que ahora debe preocuparnos es la forma de implementar esta solución (3.16). Para tratar de reducir su complejidad se va a manipular matemáticamente. En primer lugar se incorpora el término  $f(\xi)/(\xi - \xi_o)$  mediante suma y resta, lo que permite separar la integral en dos partes (3.18).

$$g(\xi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} \left[ \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi_o}{1-\xi_o}} \frac{f(\xi_o) - f(\xi)}{\xi - \xi_o} d\xi_o + f(\xi) \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi_o}{1-\xi_o}} \frac{1}{\xi - \xi_o} d\xi_o \right] \quad (3.18)$$

$$g(\xi) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1-\xi}{1+\xi}} [I_1 + f(\xi) \cdot I_2]$$

La primera integral  $I_1$  sigue siendo complicada y habrá que calcularla numéricamente, mientras que la segunda  $I_2$  puede ser resuelta analíticamente, ya que  $f(\xi)$  se encuentra fuera del integrando. Centrándonos en hallar el valor de  $I_2$ , se realiza el cambio de variable  $\xi = -\cos \theta$ .

$$I_2 = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi_o}{1-\xi_o}} \frac{1}{\xi - \xi_o} d\xi_o = - \int_0^\pi \sqrt{\frac{1-\cos \theta_o}{1+\cos \theta_o}} \frac{\sin \theta_o}{\cos \theta - \cos \theta_o} d\theta_o \quad (3.19)$$

Nótese que mediante relaciones trigonométricas,  $\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}$ , lo que permite simplificar la expresión y llegar a ec. (3.20). Utilizando la integral de Glauert (3.11) sobre esta última expresión con  $n = 0$  y  $n = 1$ , se halla el valor de  $I_2$ .

$$I_2 = - \int_0^\pi \frac{1 - \cos \theta_o}{\cos \theta - \cos \theta_o} d\theta_o = \pi \quad (3.20)$$

El siguiente paso es el cálculo numérico de  $I_1$ . Analizando la integral (3.21) que determinará su valor, se ve que el integrando presenta dos problemas: una indeterminación cuando  $\xi_o \rightarrow \xi$  y una tendencia a infinito si  $\xi_o \rightarrow 1$ .

$$I_1 = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+\xi_o}{1-\xi_o}} \frac{f(\xi_o) - f(\xi)}{\xi - \xi_o} d\xi_o \quad (3.21)$$

La indeterminación desde el punto de vista del cálculo numérico es fácilmente subsanable empleando un mallado y unos puntos de evaluación adecuados, similar al método de Vortex-Lattice. Sin embargo, la tendencia al infinito del integrando debe ser resuelta con un cambio de variable. Aplicando el cambio  $\xi = 1 - \eta^2$  se tiene que:

$$I_1 = 2 \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{2 - \eta_o^2} \frac{f(\eta_o) - f(\eta)}{(\eta - \eta_o)(\eta + \eta_o)} d\eta_o \quad (3.22)$$

Aproximando numéricamente esta integral por un sumatorio y teniendo en cuenta el valor de  $I_2$ , la expresión que se implementará en Matlab será la siguiente:

$$g(\eta_i) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\eta_i^2}{2 - \eta_i^2}} \left[ \sum_{j=1}^N 2h \sqrt{2 - \eta_{oj}^2} \frac{f(\eta_{oj}) - f(\eta_i)}{(\eta_i - \eta_{oj})(\eta_i + \eta_{oj})} + f(\eta_i)\pi \right] \quad (3.23)$$

donde

$$f(\eta_i) = \frac{C_{p,sim}(\eta_i)}{4} ; \quad g(\eta_i) = \frac{dz_e}{dx_o}(\eta_i)$$

Antes de programar la solución hay que tener en cuenta ciertos detalles que serán vitales para que los cálculos sean correctos. Se necesita conocer la relación entre  $\eta$  y  $x$  ya que influirá en diferentes aspectos como: interpolación de la distribución de presiones, elección del mallado de integración y en la asociación de los valores de la pendiente del espesor. Esta relación se consigue fácilmente tomando los cambios de variable que se han hecho durante el desarrollo, obteniendo la expresión (3.24). Respecto al mallado para la integración numérica, existen dos posibilidades: mallar de forma uniforme en  $x$  o hacerlo sobre  $\eta$ . La distribución de los puntos según la malla queda patente en la fig. 3.4. Teniendo presente que la variable de integración es  $\eta$ , se aprecia perfectamente que si se elige un mallado uniforme sobre  $x$  (fig. 3.4.a), los puntos de integración tienden a agruparse cerca del borde de ataque, mientras que si fuera uniforme en  $\eta$  (fig. 3.4.b), tienden al borde de salida. Ante esta situación se decide escoger el mallado en  $\eta$  porque es conveniente tener bien definido los efectos en el borde de salida, ya que aunque tiende a ser un punto de remanso realmente no lo es.

$$\eta = \sqrt{1 - \xi} = \sqrt{2 \left(1 - \frac{x}{c}\right)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \rightarrow \eta = \sqrt{2} \\ x = c \rightarrow \eta = 0 \end{array} \right. \quad (3.24)$$

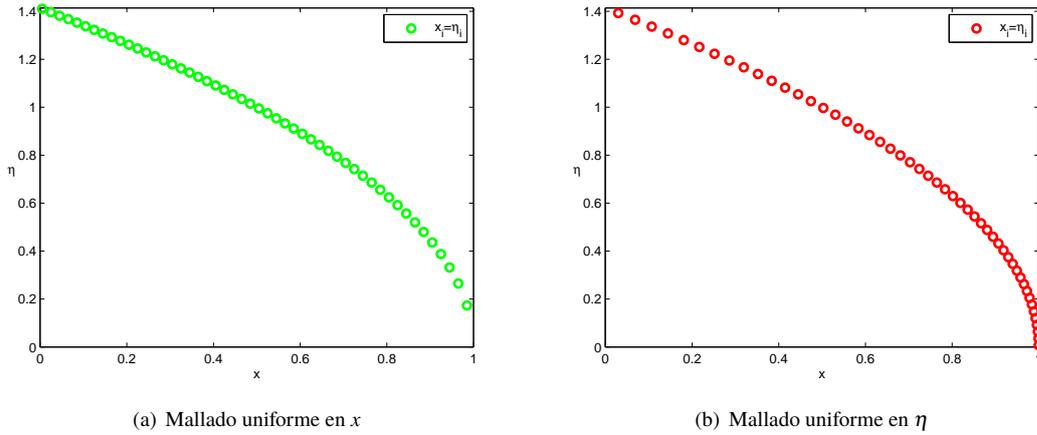


Figura 3.4 Comparación entre mallas de integración.

Por otro lado, revisando la integral planteada en el dominio de  $\eta$  es importante destacar que los valores de la pendiente  $\frac{dz_e}{dx}$  que calculará serán los inversos a los correspondientes al dominio de  $x$ . Esto se debe a los límites de integración impuestos, ya que en el dominio de  $\eta$  se está integrando desde  $\eta = 0$  hasta  $\eta = \sqrt{2}$ , lo que se corresponde en el dominio de  $x$  con la integración desde  $x = c$  hasta  $x = 0$ . Por lo tanto, tal y como ilustra la fig. 3.5, la integral se está calculando desde el borde de salida hasta el borde de ataque obteniendo los valores inversos de la pendiente, que habrá que convertir para operar con ellos según la variable  $x$ . Sin embargo, aquí no se acaba el problema, puesto que al igual que ocurría con Vortex-Lattice, los valores calculados se corresponden con los de la pendiente y no con los del espesor. Por este motivo hay que integrar de nuevo, aunque ya sin tener en cuenta ninguna anomalía más.

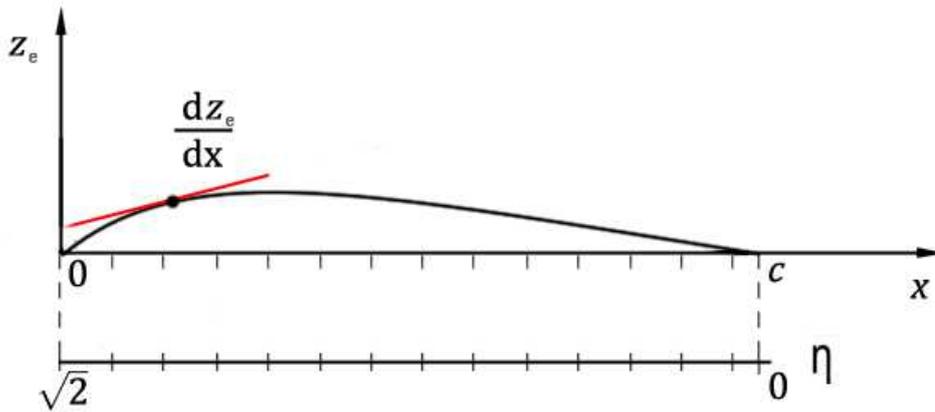


Figura 3.5 Integración de la pendiente  $\frac{dz_e}{dx}$ .

Como se ha podido comprobar en su desarrollo, utilizar la fórmula de inversión de Söhngen supone el método más complejo de los tres. Sin embargo no por ello asegura ser el más efectivo. Esto será comprobado en el capítulo siguiente donde se pondrán a prueba cada una de las funciones y se analizará su sensibilidad al cambio de condiciones.

### 3.2 Problema de curvatura

El broche final para ser capaz de diseñar perfiles de forma inversa pasa por resolver la segunda parte del problema, el antisimétrico. Tradicionalmente el estudio de este problema en la teoría potencial está centrado en el cálculo de la sustentación como resultado de la diferencia de presiones entre el intradós y extradós del perfil. No obstante, el origen de la sustentación está en las perturbaciones provocadas tanto por la curvatura del perfil, como por el ángulo de ataque al que se encuentre. Por este motivo, habitualmente el problema antisimétrico es descompuesto en curvatura y ángulo de ataque  $\alpha$ . Sin embargo, conviene destacar que según el planteamiento que se ha hecho de las ecuaciones en este proyecto para la inversión del problema,  $z_c$  no solo proporcionará el valor de la curvatura sino que además incluye el ángulo de ataque  $\alpha$ . Bajo esta consideración, la geometría que se obtenga como salida del programa estará en la posición adecuada para que se corresponda con la distribución de presiones deseada, desconociendo el ángulo de ataque al que se encuentra.

Se ha dicho en varias ocasiones que la resolución de la ecuación planteada para la curvatura (2.31), no presenta ninguna dificultad. Basta con integrar de forma numérica. Por su sencillez y sus buenas aproximaciones se decide mallar y seguir el ejemplo del método de Vortex-Lattice para aproximar la integral mediante un sumatorio (3.25). Además, para evitar la discontinuidad se toman unos puntos de evaluación  $x_{gj}$  y otros de colocación  $x_{ci}$ .

Al igual que ocurre en el problema de espesor, los valores calculados mediante esta aproximación son los correspondientes a la pendiente de la curvatura  $\frac{dz_c}{dx}(x)$ , y no a la curvatura  $z_c(x)$  en si, siendo necesario integrar de nuevo (3.26). Así mismo, es importante destacar que estos valores son calculados para los puntos  $x_{ci}$ , dependerá de la elección de la malla que estos valores puedan usarse directamente sobre los obtenidos para el problema de espesor, o haya que interpolar a una serie de puntos comunes.

$$\frac{dz_c}{dx}(x_{ci}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^N \frac{h}{x_{ci} - x_{gj}} C_{p,anti}(x_{gj}) \quad (3.25)$$

$$z_c(x) = \int_0^x \frac{dz_c}{dx}(x_o) dx_o \quad (3.26)$$

La incorporación de estas ecuaciones a las tres funciones anteriormente expuestas será común para todas ellas. La diferencia entre las funciones programadas estará en la forma de resolver el problema de espesor. Para poder compatibilizar correctamente ambos resultados, los cálculos deben hacerse sobre los mismos puntos  $x$ , por ello en el caso de Vortex-Lattice y la fórmula de inversión de Sohngen, se usa el mismo mallado tanto en el espesor como en la curvatura. Respecto a las series de Fourier, la alternativa está en interpolar los resultados a los puntos deseados.

### 3.3 Programación

Con todos estos elementos se han desarrollado tres funciones diferentes para el cálculo de la geometría que corresponde a una cierta distribución de presiones  $C_p$ . Estas funciones siguen una estructura común que queda patente en la fig. 3.6.

Se trata de un programa que toma como parámetros de entrada los vectores  $C_{p,E}$ ,  $C_{p,I}$  y  $s$ , es decir, las presiones en extradós e intradós y los puntos sobre los que se han medido; y devuelve como salida los vectores  $z_{p,E}$ ,  $z_{p,I}$  y  $X$ , que se corresponden con la geometría superior e inferior del perfil calculada en los puntos  $X$ . En primer lugar tras la carga de datos, se resuelve el problema de espesor con uno de los métodos numéricos explicados. Posteriormente se continua con el de curvatura, siendo un bloque idéntico para los tres. Para acabar, los resultados son interpolados a los puntos deseados en los que se busca la geometría. Respecto a la programación interna de cada uno de los bloques, se han realizado siguiendo las mismas instrucciones explicadas en los apartados anteriores.

El objetivo ahora será estudiar y experimentar con cada uno de los programas implementados para determinar cual de ellos consigue mejores aproximaciones.

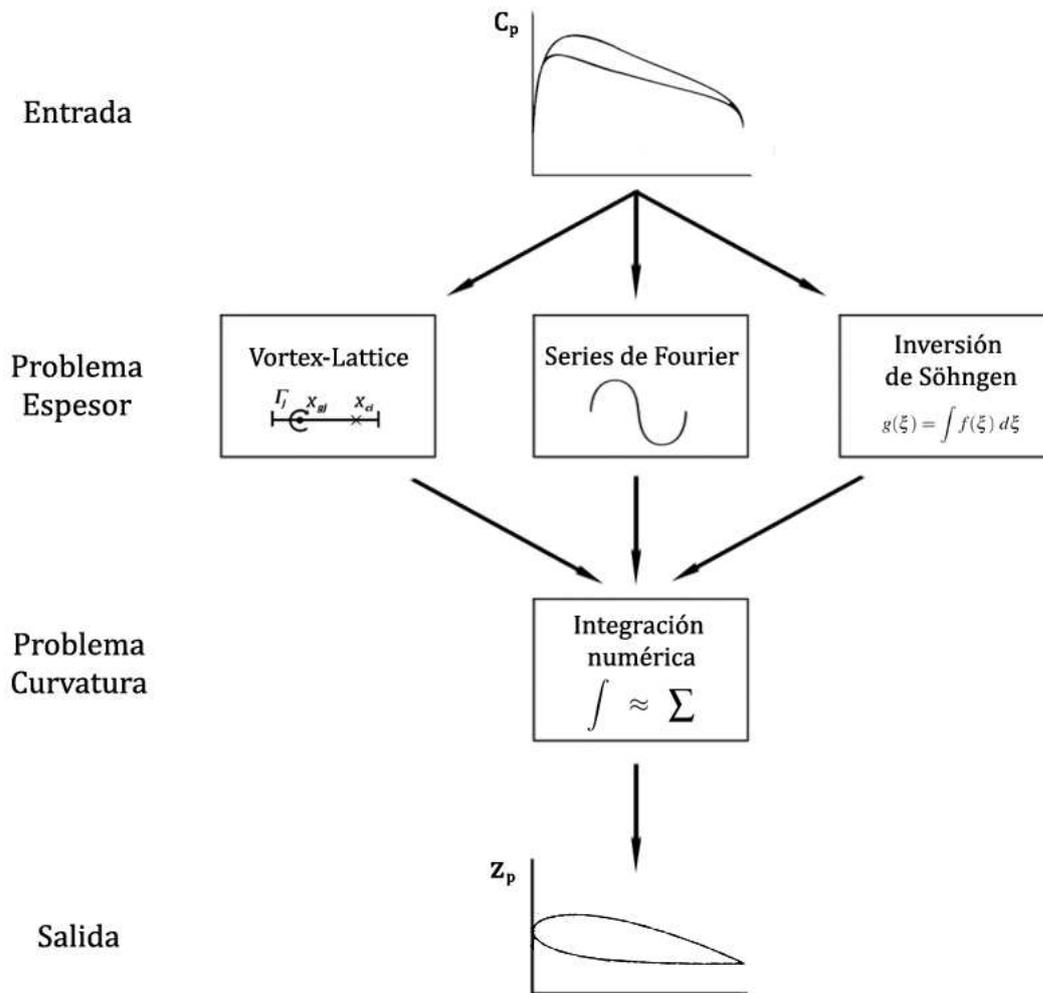


Figura 3.6 Esquema de programación.

### 3.4 Datos de entrada: Coeficiente de presiones $C_p$

Desarrollados los programas, lo único que se necesita para probarlos y evaluar su efectividad es conseguir una serie de distribuciones de presiones que estén asociadas a perfiles conocidos. En principio podría pensarse en usar datos experimentales obtenidos mediante programas CFD o datos sacados de túneles de viento. No obstante, dado que el planteamiento de las ecuaciones y simplificaciones usadas pertenecen a la teoría potencial, los parámetros que se deben introducir como entrada deben ser los asociados al flujo potencial, y no a la corriente real.

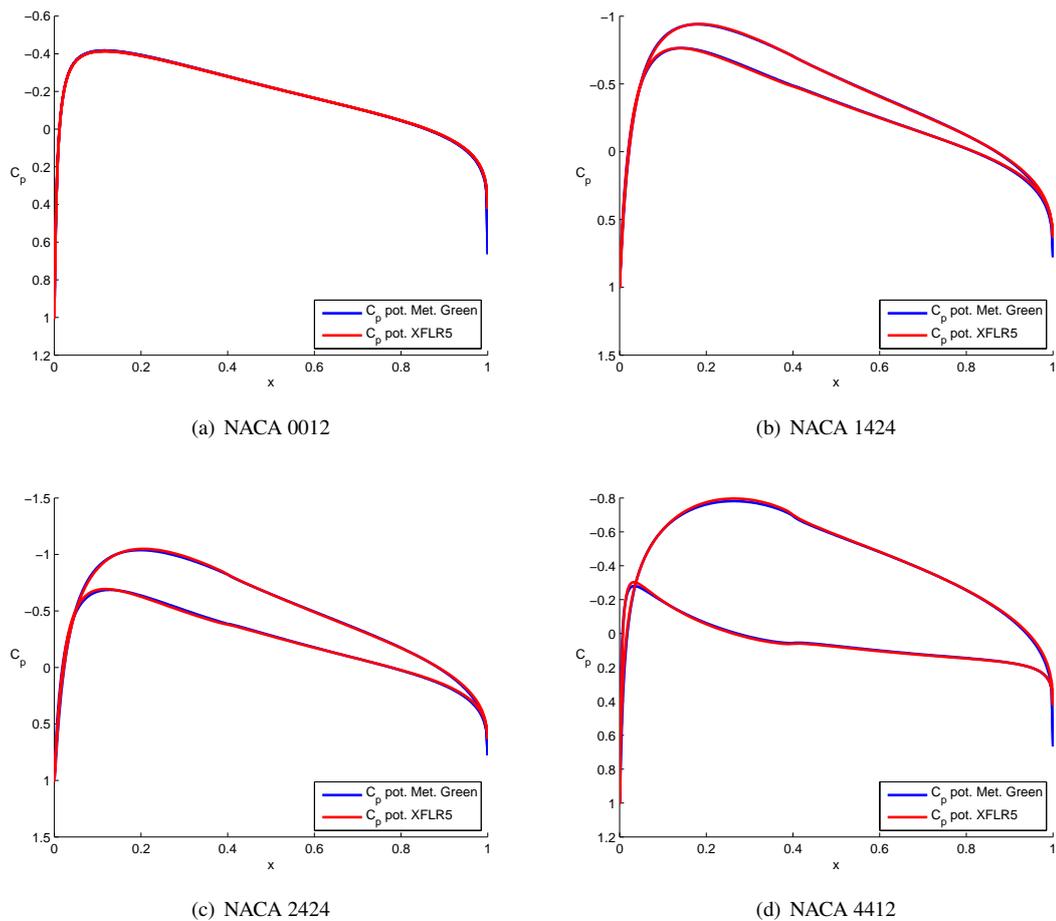
Durante las primeras pruebas con perfiles sencillos como por ejemplo parabólicos, elípticos o en cuña; se emplearon directamente las funciones que surgen de resolver el flujo sobre estas geometrías de forma analítica. Estas expresiones se presentan a menudo en la literatura como ejemplos básicos de resolución del campo fluido alrededor de perfiles. Es una forma de mostrar a los alumnos que aunque la teoría potencial es "sencilla" y realiza muchas simplificaciones, tiene gran utilidad para realizar estimaciones.

En el caso de este proyecto lo que se busca reproducir son geometrías reales; ya sean empleadas para alas de aviones, estabilizadores, alabes de compresores y/o turbina, hélices, etc; en las que no existen expresiones analíticas posibles para flujo potencial. Entonces, ¿de dónde se pueden sacar las distribuciones de presiones correspondientes a estas secciones para flujo potencial? La única forma posible es resolver el flujo alrededor de estos perfiles bajo las consideraciones de corriente potencial.

Llegados a este punto, para garantizar la correcta resolución del flujo potencial alrededor de una geometría arbitraria, se decidió aprovechar el programa proporcionado por Gordillo [11], que fue utilizado en el grado durante las prácticas de Aerodinámica I. El código es capaz de calcular los coeficientes de presiones del extradós e intradós sobre un perfil NACA 4 dígitos genérico para corriente potencial. El programa está basado en la implementación numérica del método de Green [Anexo B]. Otra posible opción que se barajó fue usar el programa XFLR5 [Anexo A]. Se trata de un software CFD libre que cuenta con la opción de calcular la distribución de presiones para flujo no viscoso.

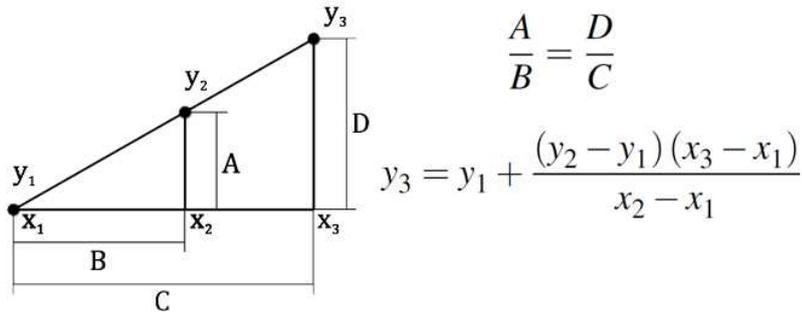
A priori la intuición puede decantarse por pensar que los resultados proporcionados por el XFLR5 serán más precisos que los conseguidos por el método de Green, dados los precedentes del XFLR5. No obstante al tratarse de un programa CFD, no deja de ser una "caja negra" en la que se introduce una geometría y sin saber cómo opera, devuelve los coeficientes de presión. Se hace necesario contrastar los resultados entre ambos programas para tomar una decisión sobre cual emplear.

A primera vista los datos proporcionados por ambos son muy similares entre sí. La mayor discrepancia se encuentra en el borde de salida. En estos últimos puntos se aprecia que el coeficiente de presiones tiende a la unidad, lo que se corresponde con un punto de remanso. Se observa en la fig. 3.7 que esta tendencia es más acusada con el método de Green. Sin embargo hay que aclarar que este fenómeno no se da en la realidad. El borde de salida no es un punto de remanso porque el gradiente de presiones necesario para anular la velocidad en dicho punto es muy desfavorable, lo que conduciría a un desprendimiento de la capa límite.



**Figura 3.7** Comparación de distribuciones de presiones con flujo potencial a  $\alpha = 0^\circ$ .

Para tratar de aliviar este gradiente adverso predicho por el método de Green y hacer que los resultados sean aun más parecidos, se opta por realizar una aproximación lineal en el último punto. Se pretende mantener la misma pendiente en los últimos dos paneles. Para ello el método elegido es el teorema de Tales o más conocido como triángulos semejantes (fig. 3.8).



**Figura 3.8** Triángulos semejantes.

Tras aplicar esta aproximación al método de Green, conviene volver a comparar las distribuciones de presiones de ambos programas. Como se muestra en la fig. 3.9, la diferencia pasa a ser prácticamente nula. Además se ha hecho una ampliación del borde de salida para confirmar la validez de la aproximación lineal.

Puesto que ambos métodos proporcionan los mismos datos, se opta por emplear el método de Green implementado por Gordillo [11]. El motivo principal de esta elección se debe a que el programa está implementado en Matlab y no es una "caja negra". Puede ser adaptado para cualquier geometría e incorporado a las rutinas de cálculo para demostrar la efectividad de las funciones desarrolladas en este proyecto. Si se quisiera utilizar el XFLR5, sería necesario generar una base de datos que recogiese las distribuciones de presiones para los diferentes NACA con distintas condiciones, para posteriormente ser cargadas Matlab.

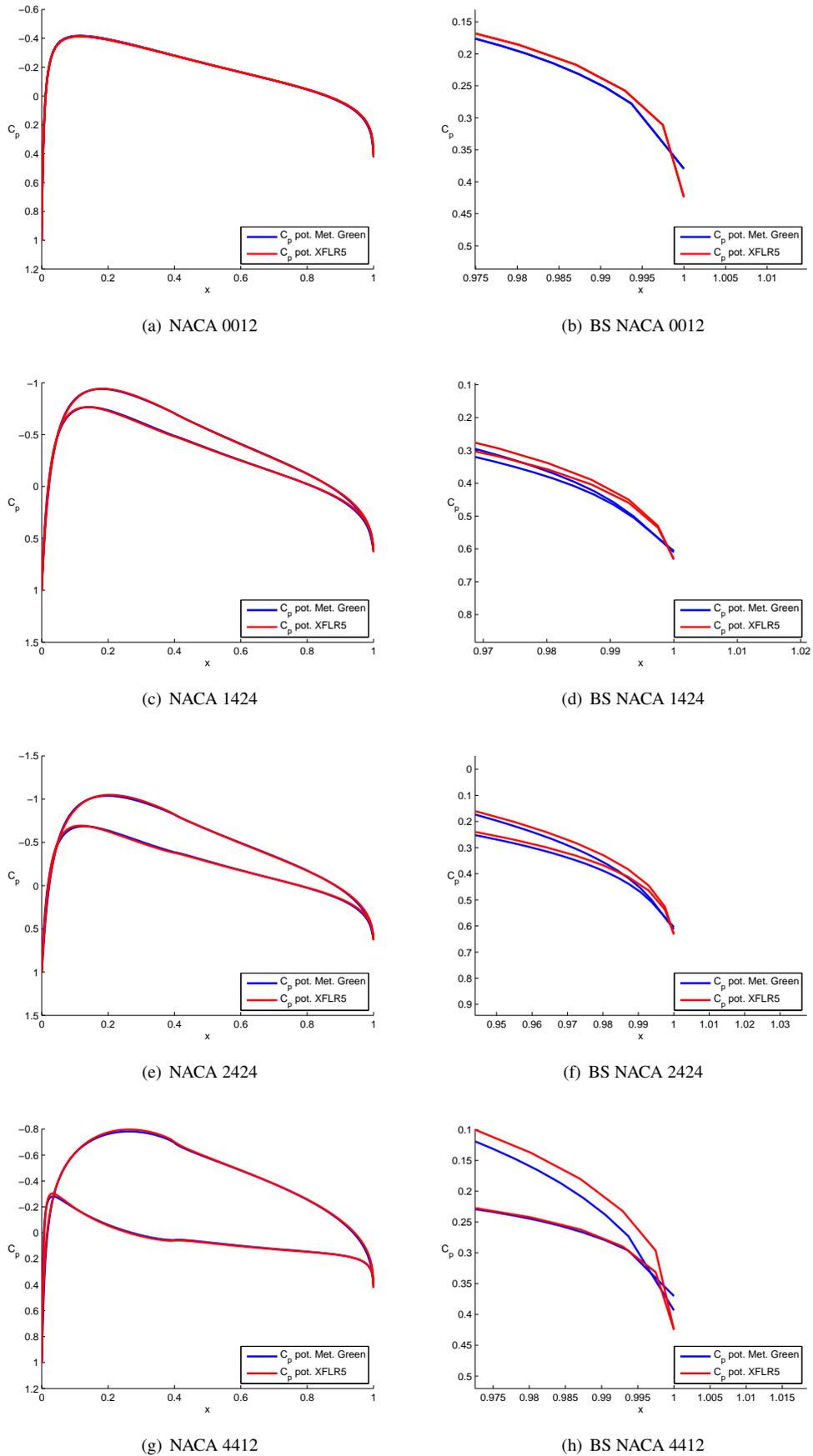


Figura 3.9 Comparación de distribuciones de presiones tras la aproximación lineal en el borde de salida.

## 4 Análisis de los resultados

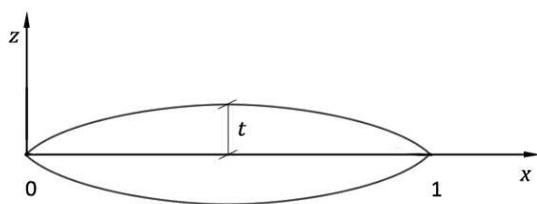
Finalmente tras el estudio de las ecuaciones y la posibilidad de resolverlas numéricamente con tres métodos diferentes, es hora de comprobar cómo de eficaces son y cuales son sus límites. Se mostrarán diferentes ejemplos de perfiles aerodinámicos, desde los más sencillos hasta los más complejos, con o sin ángulo de ataque, que se han usado en este proyecto para evaluar y verificar la validez de los códigos implementados.

### 4.1 Primeros pasos: perfiles parabólicos y elípticos

Para comenzar, se escogieron los perfiles más sencillos presentes en la literatura. Generalmente en teoría potencial las primeras secciones que se estudian son los perfiles parabólicos y elípticos, debido a que su geometría está bien definida y es posible la resolución del campo fluido analíticamente. Estas propiedades suponen una gran ventaja para nuestros intereses por dos motivos. En primer lugar, al ser secciones simétricas, no es necesario resolver el problema de curvatura, por lo tanto los resultados sólo dependerán de las tres metodologías programadas que resuelven el problema de espesor, permitiendo verificar su buen funcionamiento. En segundo lugar, al poder calcular de forma analítica el campo fluido alrededor del perfil, será posible compararlo con la distribución de presiones ofrecida por Met. Green y ver como afecta a la geometría resultante.

#### 4.1.1 Perfiles parabólicos

Estos perfiles también son conocidos como lenticulares. Su geometría se define en función del parámetro  $t$ , que indica el valor del semiespesor máximo que se alcanza en la parte media de la sección (fig. 4.1). Bajo estas características y teniendo en mente que son simétricos ( $z_{p,E} = -z_{p,I}$ ), la geometría viene dada por la siguiente ecuación:



$$z_{p,E}(x,t) = z_e(x,t) = 4tx(1-x) \quad (4.1)$$

donde:

$$\frac{dz_e}{dx} = -8t(x - \frac{1}{2}) \quad (4.2)$$

Figura 4.1 Perfil lenticular.

Empleando la ec. (2.27) vista en el capítulo 2, se procede a conseguir la expresión analítica que determina la distribución de presiones  $C_p$  sobre ambas caras del perfil.

$$C_p(x,t) = -\frac{2}{\pi} \left[ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{x-\varepsilon} \frac{-8t(x_o - \frac{1}{2})}{x-x_o} dx_o + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{-8t(x_o - \frac{1}{2})}{x-x_o} dx_o \right] \quad (4.3)$$

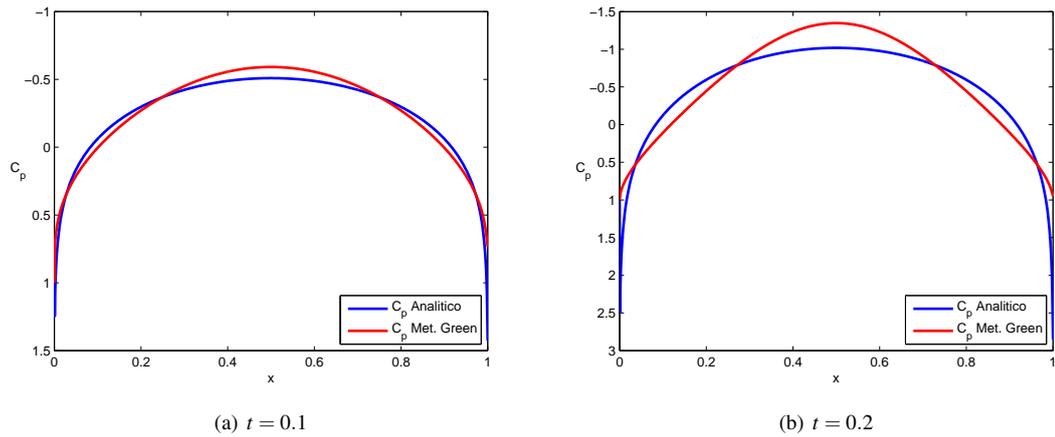
$$\begin{aligned}
C_p(x,t) &= -\frac{16t}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_0^{x-\varepsilon} \frac{\frac{1}{2}-x_o+x-x}{x-x_o} dx_o + \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{\frac{1}{2}-x_o+x-x}{x-x_o} dx_o \right] = \\
&= -\frac{16t}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[ \int_0^{x-\varepsilon} \frac{x-x_o}{x-x_o} dx_o + \left(\frac{1}{2}-x\right) \int_0^{x-\varepsilon} \frac{dx_o}{x-x_o} \right] + \left[ \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{x-x_o}{x-x_o} dx_o + \left(\frac{1}{2}-x\right) \int_{x+\varepsilon}^1 \frac{dx_o}{x-x_o} \right] \right\} = \\
&= -\frac{16t}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[ x-\varepsilon - \left(\frac{1}{2}-x\right) \ln(x-x_o) \Big|_0^{x-\varepsilon} \right] + \left[ 1-x-\varepsilon - \left(\frac{1}{2}-x\right) \ln(x-x_o) \Big|_{x+\varepsilon}^1 \right] \right\} = \\
&= -\frac{16t}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \left[ x-\varepsilon - \left(\frac{1}{2}-x\right) \ln\left(\frac{\varepsilon}{x}\right) \right] + \left[ 1-x-\varepsilon - \left(\frac{1}{2}-x\right) \ln\left(\frac{x-1}{-\varepsilon}\right) \right] \right\} = \\
&= -\frac{16t}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 1-2\varepsilon - \left(\frac{1}{2}-x\right) \left[ \ln\left(\frac{\varepsilon}{x}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right) \right] \right\},
\end{aligned}$$

obteniendo,

$$C_p(x,t) = \frac{16t}{\pi} \left[ \left(\frac{1}{2}-x\right) \ln\left(\frac{1-x}{x}\right) - 1 \right] \quad (4.4)$$

Al compararla gráficamente con el que proporciona el Met. Green se observa cierta semejanza entre ellas, pero no llegan a ser iguales (fig. 4.2). En general, tomando como referencia los valores de la presión en los extremos y en el punto medio, Green proporciona unos valores más bajos, lo que se traduce en una mayor velocidad de la corriente sobre el perfil, provocando posiblemente que el espesor de la sección buscada sea mayor. Además, se hace notable que la diferencia entre ellas es mayor si aumenta el espesor  $t$  del perfil, ya que modelan el flujo de distinta forma.

No obstante, lo importante es comprobar que los códigos funcionan bien y son capaces de reproducir la geometría deseada a partir de las distribuciones de presiones dadas.



**Figura 4.2** Distribución de presiones asociada a perfiles parabólicos  $C_p(x,t)$ .

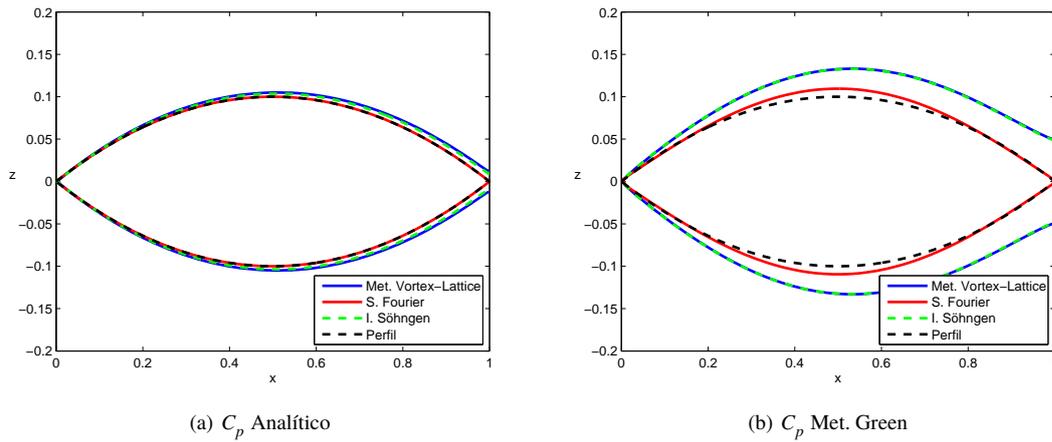


Figura 4.3 Perfiles parabólicos con  $t = 0.1$ .

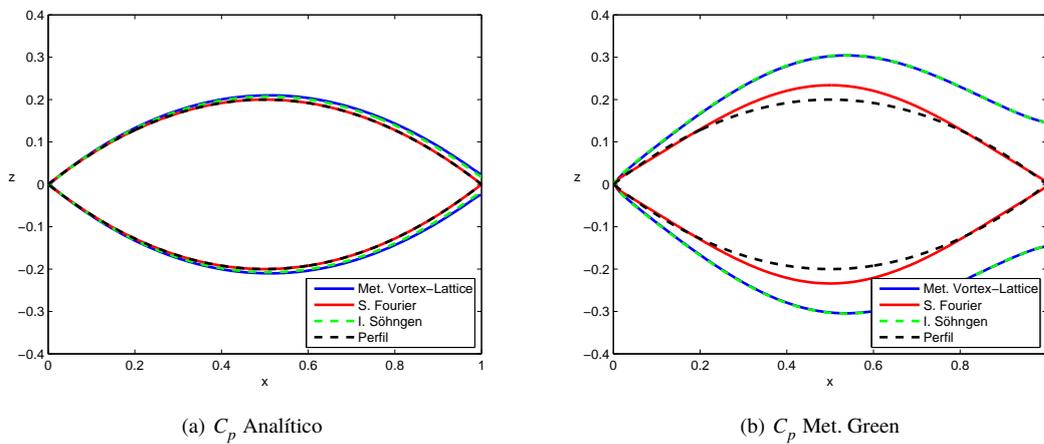


Figura 4.4 Perfiles parabólicos con  $t = 0.2$ .

A través de la fig. 4.3 y fig. 4.4 se muestra que los códigos reproducen casi con exactitud el perfil para el caso de proporcionar como entrada la distribución de presiones exacta ( $C_p$  Analítica), con independencia del espesor  $t$ . Sin embargo, en el caso de introducir los valores determinados por Green, los perfiles conseguidos son menos aproximados al objetivo, aunque tienen cierto parecido en la forma. Efectivamente, como se adelantó para este segundo caso, las secciones calculadas tienen un mayor espesor debido a que los gradientes de velocidades impuestos son mayores que los exactos.

Entrando dentro de los resultados proporcionados por cada método, con independencia tanto del espesor  $t$  como de los parámetros de entrada  $C_p$ , destacan las aproximaciones logradas por las series de Fourier. Respecto a Vortex-Lattice y Söhngen, sorprende que a pesar de ser metodologías tan diferentes, los resultados logrados por ambos sean prácticamente idénticos en cualquiera de los casos aquí expuestos. Si echamos un vistazo a las geometrías, se observa que tanto para Vortex-Lattice como para Söhngen, el borde de salida es abierto, mientras que Fourier consigue geometrías cerradas. Esto se debe a que no se impuso ninguna condición de cierre en estos dos programas. Dependerá de que la presión tenga sentido físico en el borde de salida y tienda a recuperarse sin llegar a ser un punto de remanso.

Todos estos hechos confirman aun más si cabe la gran importancia que tiene la distribución de presiones como parámetro de entrada y su influencia en los resultados. Será necesario realizar más pruebas con los programas y verificar si las tendencias aquí observadas persisten con otras secciones.

### 4.1.2 Perfiles elípticos

El estudio de las geometrías elípticas supone un pequeño paso adelante en busca de los límites que presentan los códigos. Son secciones simétricas cuya geometría es conocida en función del espesor  $t$  (ec. (4.5)). No obstante, a diferencia de los perfiles parabólicos, la pendiente de los elípticos (ec. (4.6)) cuenta con dos singularidades que se corresponden con el borde de ataque ( $x = 0$ ) y el de salida ( $x = 1$ ). Efectivamente, en dichos puntos la pendiente se vuelve infinita, lo que puede traer problemas tanto a la hora de caracterizar el flujo en esas zonas como en reproducir la geometría.

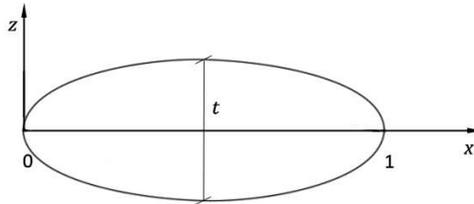


Figura 4.5 Perfil elíptico.

$$\frac{(x-1)^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{z_p^2}{(\frac{t}{2})^2} = 1 \quad ; \quad (4.5)$$

$$z_{p,E}(x,t) = z_e(x,t) = t\sqrt{x(1-x)}$$

donde:

$$\frac{dz_e}{dx} = t \frac{1-2x}{2\sqrt{x(1-x)}} \quad (4.6)$$

Para tratar de modelar el campo de presiones sobre el perfil se emplean tres formas diferentes. La primera se corresponde con el resultado analítico obtenido a través de la ec. (2.27). Se caracteriza por ser constante (ec. (4.7)), pero para emular la caída de presión y la recuperación, se han supuesto como puntos de remanso tanto el B.A como el B.S. Su demostración puede ser consultada en Katz [15]. En segundo lugar se ha aprovechado una expresión (ec. (4.8)) dada en los trabajos de Mecánica de Fluidos II, que caracteriza la velocidad del fluido sobre un cuerpo elíptico con el origen situado en el centro de la elipse y cuyos extremos se sitúan en  $-1$  y  $1$ . Para su uso es preciso determinar los valores de la presión dentro del rango  $[-1,1]$  y posteriormente trasladarlos a  $[0,1]$  con el cambio de variable  $x = \frac{X+1}{2}$ . Por último, el flujo se aproxima numéricamente con el Met. Green.

$$C_p(t) = -2t \quad (4.7)$$

$$u'_e(X,t) = \frac{1+t}{\sqrt{1 + \frac{t^2 X^2}{1-X^2}}} - 1 \quad (4.8)$$

De esta manera se intenta caracterizar el flujo en los extremos de la mejor forma posible, y evitar así que los resultados proporcionados por los programas no sean los adecuados debido a una mala aproximación de la distribución de presiones. En el caso de no coincidir con la potencial, será de utilidad para ver las desviaciones que se producen respecto a la geometría buscada. También es conveniente analizar el efecto que tiene el espesor  $t$ , pues como se ha justificado a lo largo del documento se está interesado en cuerpos esbeltos.

Representando la presión con los tres modelos explicados para los espesores  $t = 0.2$  y  $t = 0.6$  se obtienen la fig. 4.6.a y fig. 4.6.b, respectivamente. Al compararlas, se ve como los modelos de presión implementados coinciden para espesores esbeltos, mientras que para cuerpos romos aparecen desviaciones respecto al potencial  $C_p = -2t$ . No obstante, aunque las presiones sean similares para el caso de  $t = 0.2$ , esto no garantiza que los perfiles calculados de forma inversa reproduzcan la forma deseada, y menos sin saber cómo son afectados por las singularidades del B.A y B.S. Analizando más detenidamente las desviaciones que aparecen con  $t = 0.6$ , la forma de las curvas recuerda a las vistas para perfiles parabólicos, donde la caída de presión y su recuperación es más gradual. Al igual que en el apartado anterior, estos modelos también presentan un valor mínimo de presión menor que la analítica. Así que, es de esperar que la forma que proporcionen los códigos para este caso sea parecida a un perfil lenticular cuyo espesor máximo sea mayor que el espesor de la elipse buscada.

Lo único que se puede asegurar tras estudiar estas gráficas es que el Met. Green con el que se introducen los datos, sólo es válido para perfiles esbeltos. Al emplearse fuera de ese rango las distribuciones de presiones que proporciona no se corresponden con el flujo potencial que utilizan los programas. Por lo tanto, cuando se estudien perfiles alares reales deberá tenerse presente esta limitación y ceñirse a ese rango.

Tras emplear los programas con los tres modelos de presión para las dos geometrías elípticas propuestas, se muestran los resultados en la fig. 4.7 y fig. 4.8.

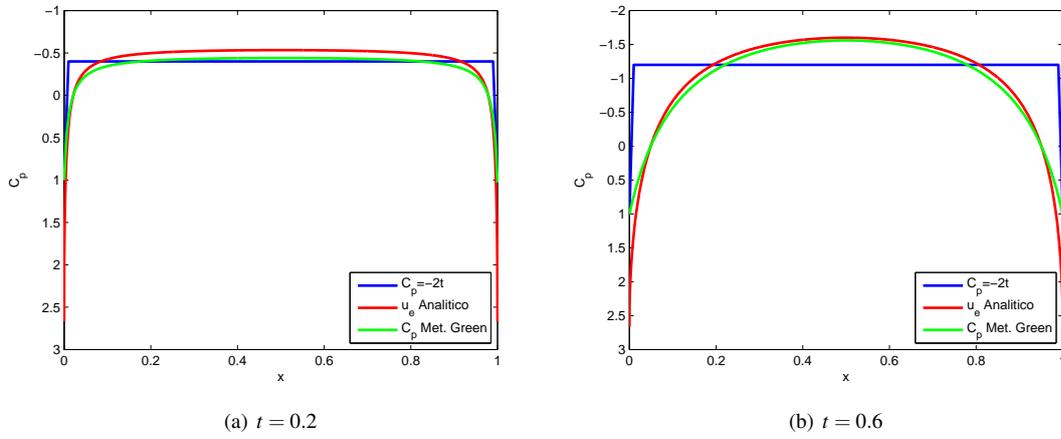


Figura 4.6 Distribución de presiones asociada a perfiles elípticos  $C_p(x,t)$ .

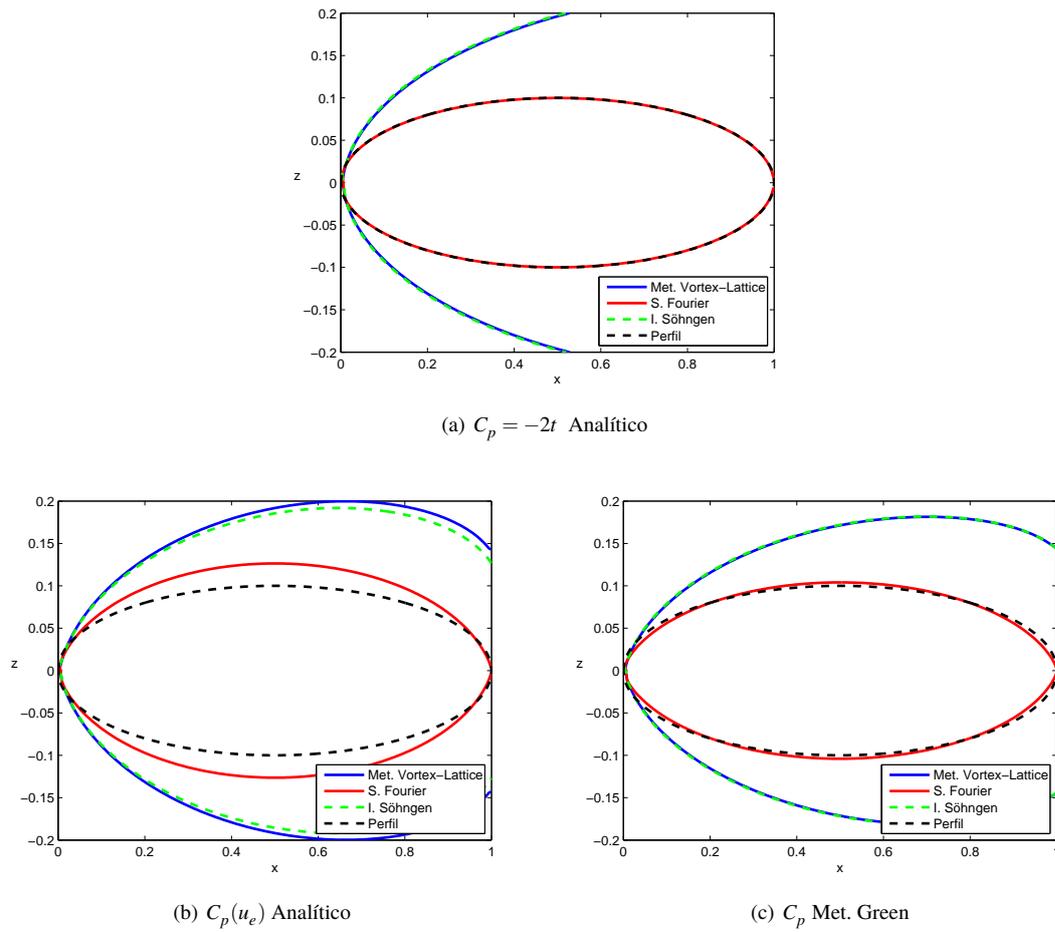
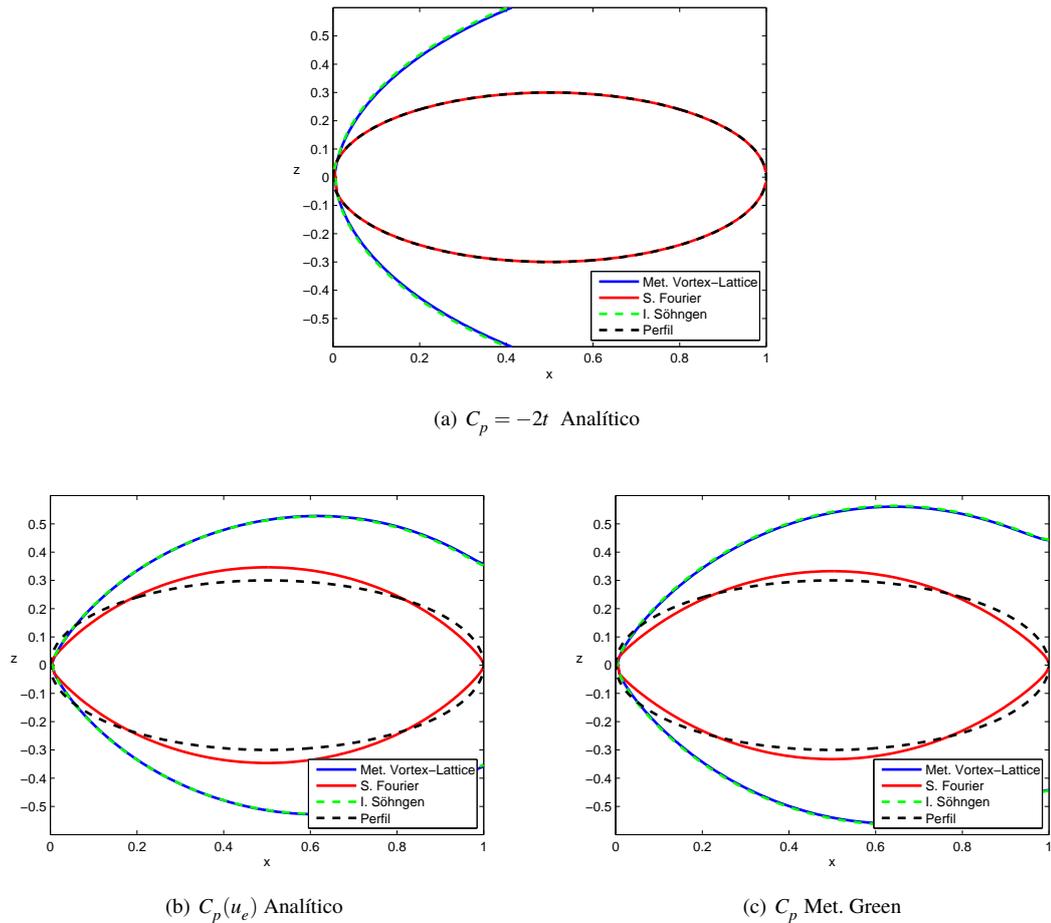


Figura 4.7 Perfiles elípticos con  $t = 0.2$ .



**Figura 4.8** Perfiles elípticos con  $t = 0.6$ .

En esta ocasión a pesar de contar con la distribución de presiones analítica  $C_p = -2t$ , los resultados logrados no son tan buenos como los obtenidos en perfiles lenticulares. La razón está en la pendiente de la curva de presiones. Al ser gradual, los métodos basados en la pendiente del espesor  $\frac{dz_e}{dx}$  evolucionan suavemente, haciendo que el espesor crezca o disminuya poco a poco, como en el caso de las secciones parabólicas. Sin embargo en perfiles elípticos, lo que ocurre es que la presión cambia bruscamente en el B.A., provocando una pendiente de espesor que tiende a infinito y que descontrola el crecimiento del espesor. Al llegar al B.S. la presión vuelve a cambiar, haciendo que los valores de la pendiente de espesor sean negativos, pero no llegan a ser lo suficientemente negativos como para invertir el crecimiento descontrolado del espesor.

El fenómeno anterior se aprecia muy bien cuando se comparan los tres modelos de distribución de presiones con los perfiles conseguidos. Con la analítica, al ser tan brusco el cambio de presión, el espesor no disminuye. Para los otros dos ejemplos,  $C_p(u_e)$  y Met. Green, si se aprecia la disminución del espesor hacia el B.S al contar con un cambio de presión menos brusco.

En general se mantienen las tendencias observadas para secciones lenticulares. Las series de Fourier consiguen muy buenas aproximaciones a la geometría buscada, a pesar de que los datos de entrada no se correspondan con los potenciales. El motivo es que de los tres métodos es el único que no se basa en el cálculo de la pendiente de espesor, si no en los coeficientes de Fourier para modelar la función de espesor. Por su parte, Vortex-Lattice y Söhngen siguen proporcionando resultados muy similares entre sí. Además ambos se ven afectados por las singularidades en las pendientes del B.A. y B.S., descontrolando los valores de espesor calculados en estos métodos.

En definitiva con estos primeros perfiles se ha podido verificar el correcto funcionamiento de los métodos implementados para la resolución del problema de espesor, y su comportamiento frente a los datos de entrada. Aunque puedan parecer que los resultados logrados no son los esperados, han ayudado a comprender que la inversión del problema no es tan sencilla como aparenta ser. Aun así, viendo los perfiles de presiones típicos de las secciones alares esbeltas como los mostrados en la fig. 3.9, se espera que no existan problemas con las pendientes al tratarse de curvas más suaves.

## 4.2 Perfiles NACA 4 dígitos

Para continuar con la experimentación de los programas, se decide pasar al siguiente nivel, reproducir perfiles reales que se utilicen en la práctica. Con este propósito se escogen los perfiles NACA de 4 dígitos, secciones cuya geometría es sistemática, conocida y fácilmente reconocible con la nomenclatura de los perfiles. Se podría haber escogido cualquier otra familia, pero como ya se comentó en el primer capítulo, aun hoy en día los NACA son los más empleados para el diseño de alas.

Con el fin de probar la consistencia de los programas se han seleccionado una serie de perfiles que abarcan todos los rangos posibles, desde los más esbeltas hasta los más grueso, con o sin curvatura. La misión de los códigos será intentar reproducirlos. Posteriormente esos mismos perfiles se han vuelto a evaluar pero con un ángulo de ataque  $\alpha = 2^\circ$ . Como único parámetro de entrada se cuenta con las distribuciones de presiones proporcionadas por el Met. Green definidas con 500 nodos. Respecto a los métodos implementados: Vortex-Lattice y Söhngen se fijan con 200 paneles, y las series de Fourier con 25 coeficientes  $a_n$  para el problema de espesor y 200 paneles para el de curvatura.

Los resultados obtenidos se muestran en las páginas siguientes desde la fig. 4.9 hasta la fig. 4.20. Cada uno de los perfiles se presenta junto a su distribución de presiones.

A primera vista los resultados logrados son muy satisfactorios. Las aproximaciones que se consiguen respecto a las geometrías buscadas, son muy buenas, llegando a ser casi exactas en algunos casos. Se observan pequeñas desviaciones cuando el perfil comienza a tener una curvatura y/o espesor considerables, viéndose incrementadas con el ángulo de ataque. Efectivamente, los primeros perfiles al ser tan esbeltas quedan bajo las simplificaciones realizadas considerando pequeñas perturbaciones, mientras que los últimos quedan algo más alejados, de ahí las desviaciones.

Observando estas desviaciones, según las imágenes, parecen que quedan localizadas en el borde de ataque y sobre la parte media del extradós. La explicación de este fenómeno está en el pico de succión del borde de ataque y los valores que toma la pendiente de presión. Al igual que ocurría para los perfiles elípticos, si el cambio de presión es muy brusco, provoca que la pendiente de espesor alcance valores superiores a los reales. Esto se transmite desde el borde de ataque hasta la parte media del extradós, recuperando la normalidad poco a poco al llegar al borde de salida. Además teniendo en cuenta que el pico de succión aumenta con el ángulo de ataque, es lógico que las desviaciones se vean incrementadas con  $\alpha = 2^\circ$ .

Al estudiar los datos proporcionados por cada uno de los métodos y compararlos, destaca la serie de Fourier como método de inversión sobre los otros dos. No sólo es más preciso, si no que además es más rápido y cuenta con la condición de cierre, lo que le proporciona ventaja frente a los otros. Sin embargo, tampoco hay que despreciar los perfiles conseguidos por Vortex-Lattice y Söhngen. En especial sorprende Vortex-Lattice, ya que un método tan sencillo de implementar como es la conversión de una integral numérica en un sumatorio pueda dar resultados tan próximos. En comparación, Söhngen que logra casi los mismos perfiles que el método anterior, es más complicado de programar y mucho más lento con los cálculos. Por los motivos expuestos, parece que existe un claro vencedor como método inverso.

Llegados a este punto es conveniente realizar un análisis más exhaustivo donde se controlen cada uno de los parámetros que influyen sobre los tres métodos. De esta manera se podrá determinar su sensibilidad ante el cambio de las condiciones, necesario para seguir evaluando las capacidades de los códigos.

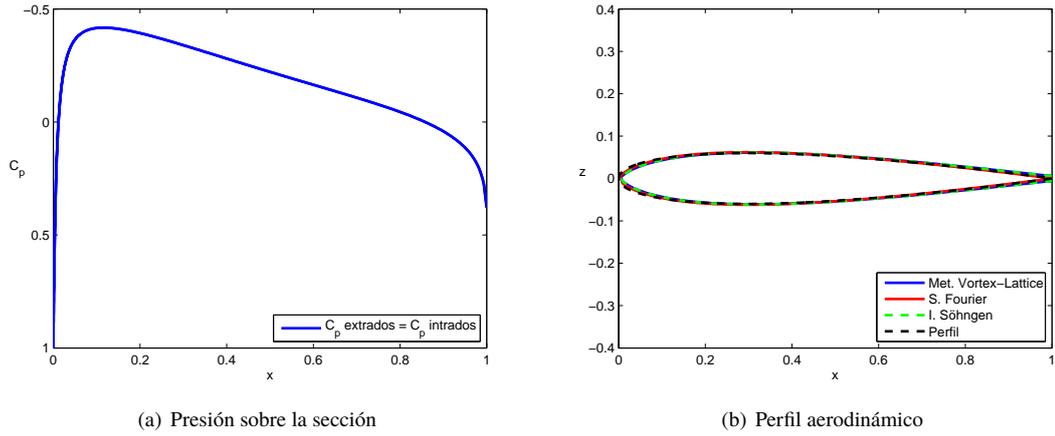


Figura 4.9 NACA 0012 ,  $\alpha = 0^\circ$ .

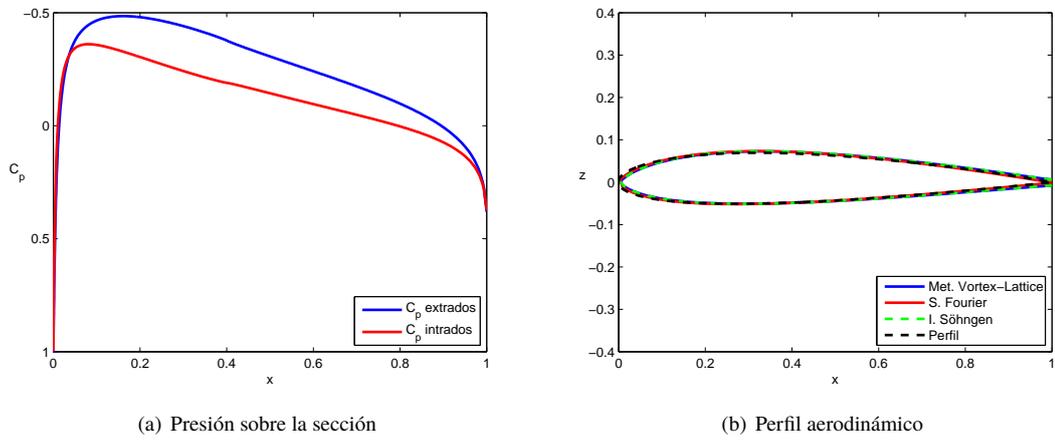


Figura 4.10 NACA 1412 ,  $\alpha = 0^\circ$ .

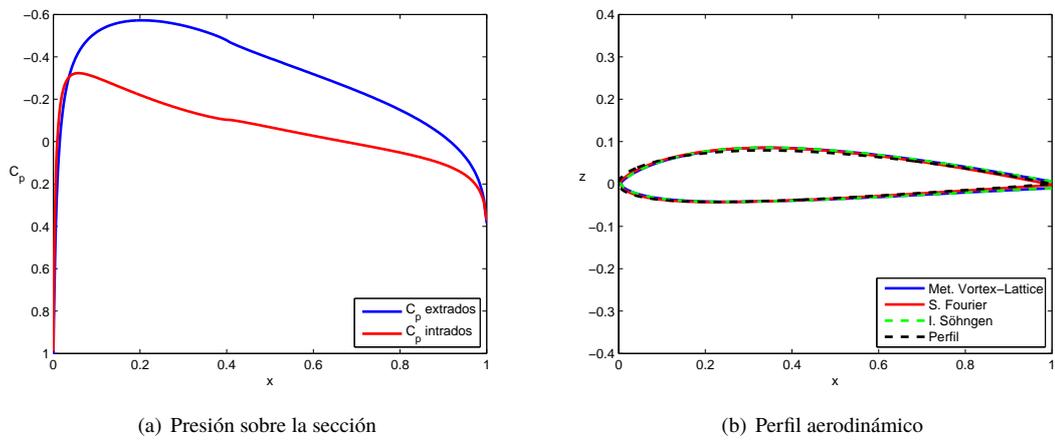
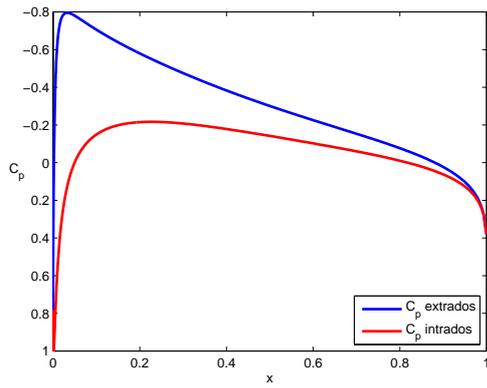
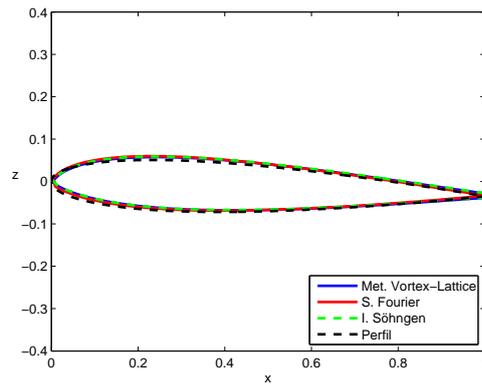


Figura 4.11 NACA 2412 ,  $\alpha = 0^\circ$ .

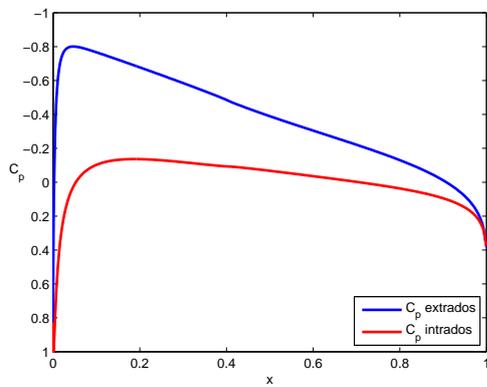


(a) Presión sobre la sección

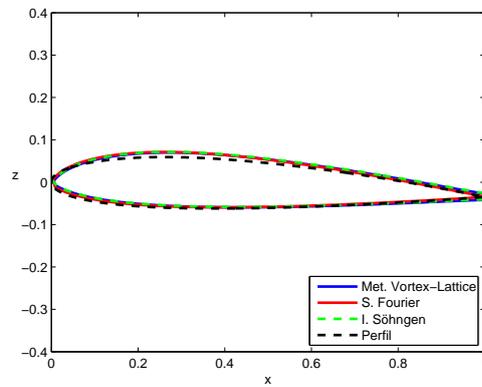


(b) Perfil aerodinámico

Figura 4.12 NACA 0012 ,  $\alpha = 2^\circ$ .

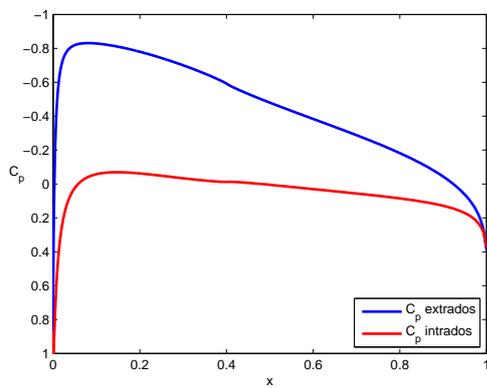


(a) Presión sobre la sección

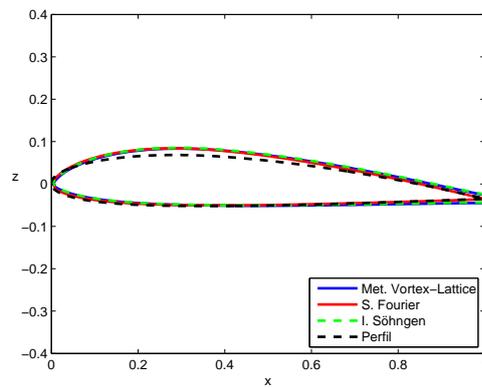


(b) Perfil aerodinámico

Figura 4.13 NACA 1412 ,  $\alpha = 2^\circ$ .



(a) Presión sobre la sección



(b) Perfil aerodinámico

Figura 4.14 NACA 2412 ,  $\alpha = 2^\circ$ .

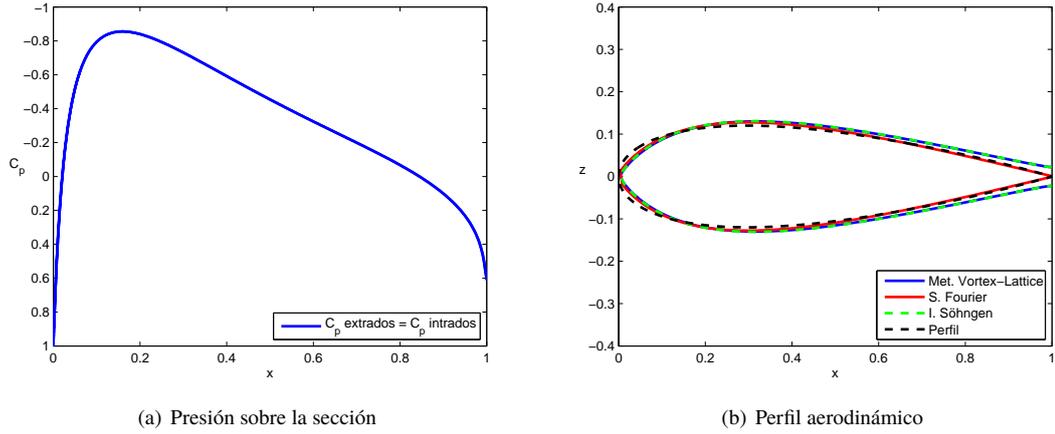


Figura 4.15 NACA 0024 ,  $\alpha = 0^\circ$ .

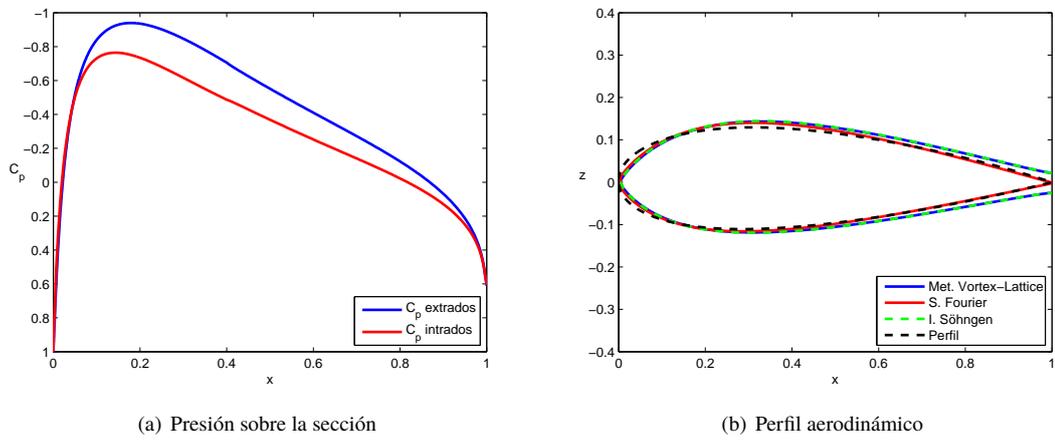


Figura 4.16 NACA 1424 ,  $\alpha = 0^\circ$ .

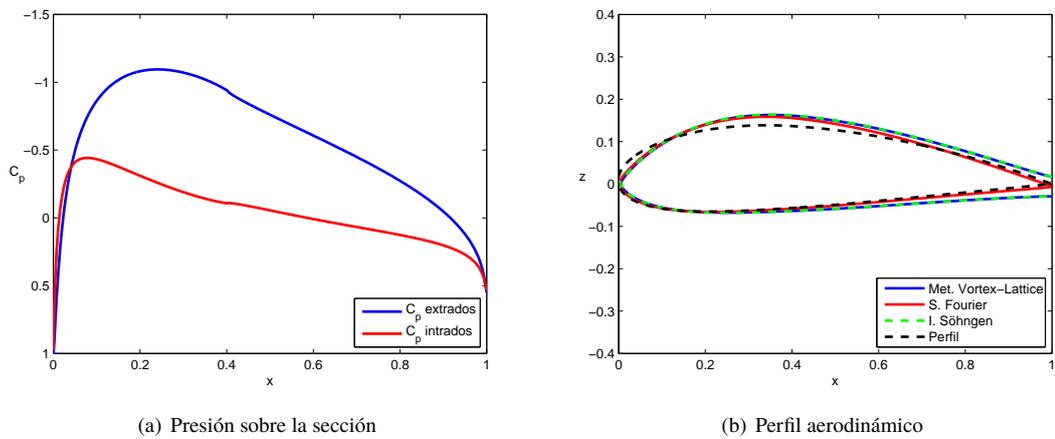
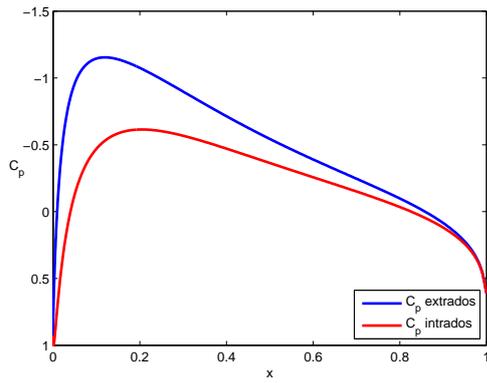
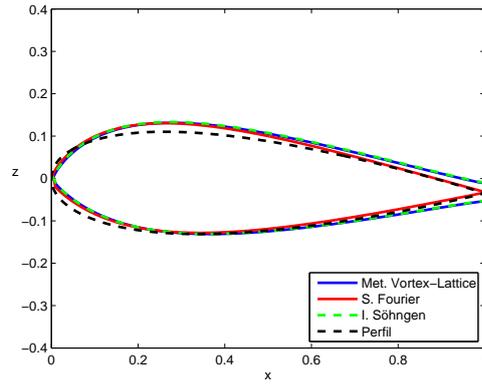


Figura 4.17 NACA 4420 ,  $\alpha = 0^\circ$ .

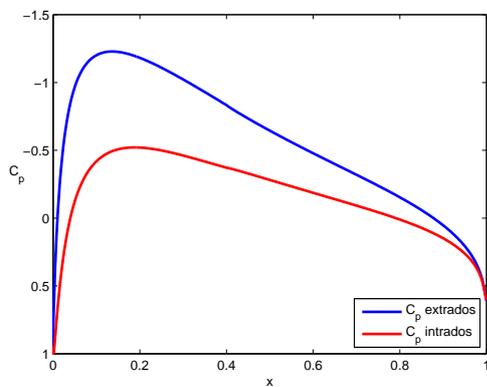


(a) Presión sobre la sección

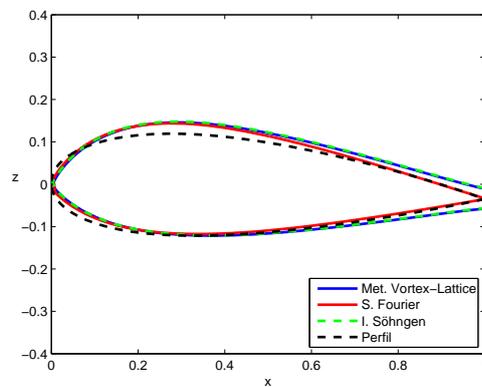


(b) Perfil aerodinámico

Figura 4.18 NACA 0024 ,  $\alpha = 2^\circ$ .

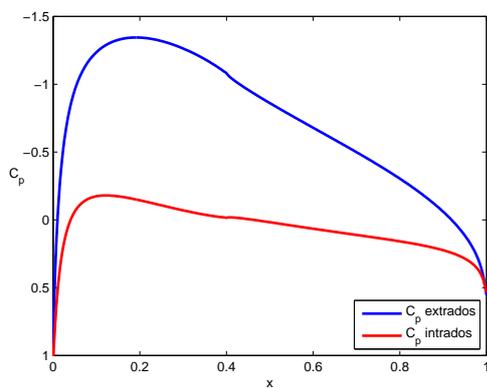


(a) Presión sobre la sección

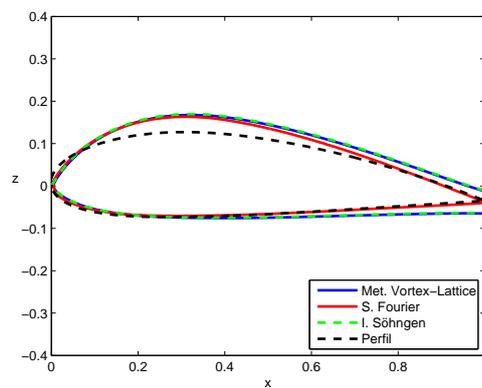


(b) Perfil aerodinámico

Figura 4.19 NACA 1424 ,  $\alpha = 2^\circ$ .



(a) Presión sobre la sección



(b) Perfil aerodinámico

Figura 4.20 NACA 4420 ,  $\alpha = 2^\circ$ .

### 4.3 Análisis de sensibilidad

Justificada la utilidad de este examen sobre los programas, lo primero es revisar los códigos y determinar los parámetros sobre los que el usuario tiene control. Recordando la idea original del proyecto, un usuario real sólo puede actuar sobre el refinamiento de la malla definido y sobre la distribución de presiones que introduce como datos de entrada. En cambio, como se está en disposición de intentar reproducir perfiles NACA, se puede aprovechar para estudiar dónde se encuentran los límites permitidos de ángulo de ataque, curvatura y espesor para los que se deja de cumplir las condiciones de pequeñas perturbaciones impuestas.

#### 4.3.1 Mallado

Lo más inmediato es modificar el número de paneles definidos sobre el eje para el cálculo del perfil. Esto es válido tanto para Vortex-Lattice como Söhngen que emplean la misma malla para el problema de espesor y el de curvatura, pero no es suficiente para las series de Fourier. En su caso hay que distinguir entre el número de coeficientes  $a_n$  para el espesor y los paneles para la curvatura.

El objetivo de este análisis es ver como influye el refinamiento de la malla en los resultados y en los tiempos de cálculo. Para ello se escoge un perfil que los códigos no tengan problemas en reproducir como por ejemplo un NACA 0012 con  $\alpha = 2^\circ$ . Se introduce la distribución de presiones obtenida por Met. Green con 500 nodos, y resuelve iterativamente con diferentes mallados. Las diferentes mallas planteadas constan desde 100 paneles hasta los 300. Respecto al número de coeficientes de Fourier se han considerado los valores 3, 5, 7, 10 y 25. Los resultados conseguidos se muestran en las siguientes figuras:

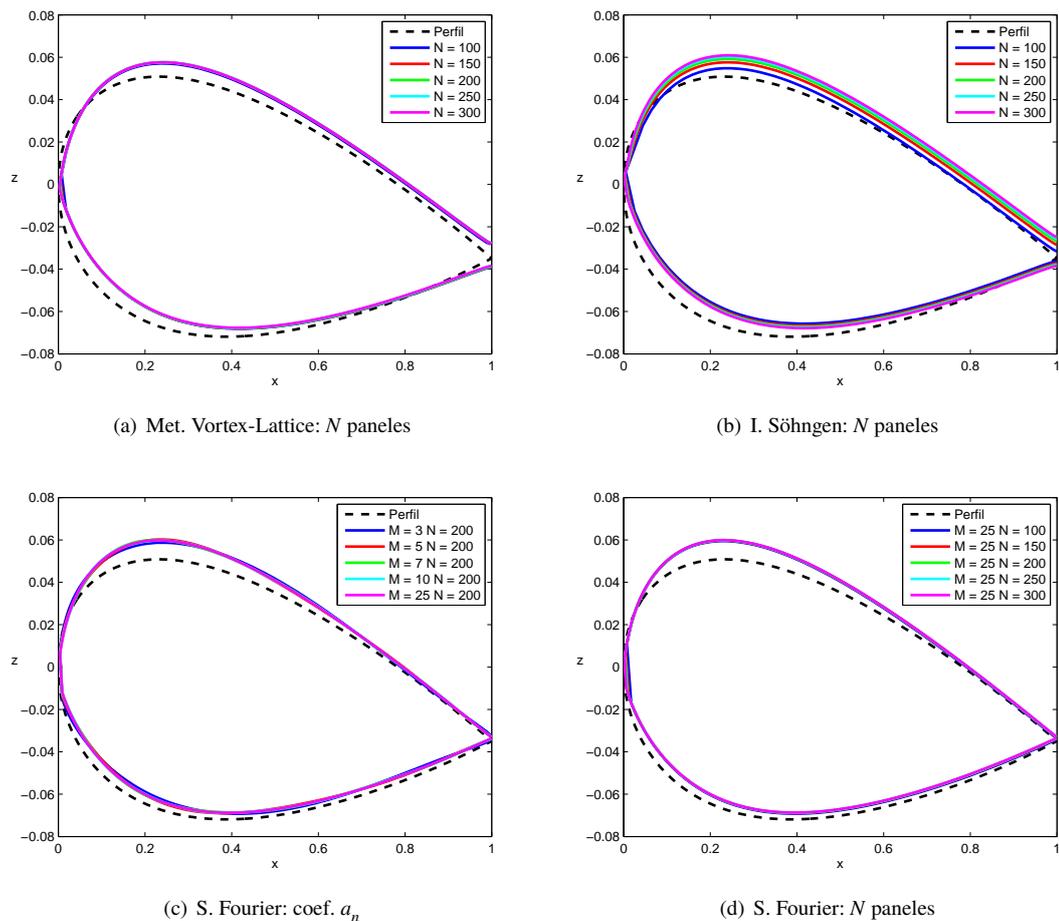


Figura 4.21 Estudio del mallado para NACA 0012,  $\alpha = 2^\circ$ .

**Tabla 4.1** Tiempos de ejecución al variar el mallado.

Nº Paneles	Vortex-Lattice	Söhngen	Fourier
100	1.0124 s	3.1152 s	0.8277 s
150	1.3098 s	6.6177 s	0.8323 s
200	1.7403 s	11.1961 s	0.814 - 1.028 s
250	2.196 s	17.2829 s	1.2484 s
300	2.6934 s	24.6996 s	1.4556 s

A la vista de los resultados el refinamiento de la malla parece que no es algo que deba preocuparnos en exceso. La mayor discrepancia entre los resultados logrados por diferentes mallados se encuentra para la inversión de Söhngen, claramente apreciable en el extradós. Además, como puede comprobarse en la Tabla 4.1, el tiempo de ejecución se ve incrementado considerablemente al aumentar el número de paneles. Por el contrario, en Met. Vortex-Lattice y series de Fourier, las diferencias entre los perfiles apenas son visibles. Observando sus tiempos, lógicamente también aumentan con el mallado, pero no en la misma medida. Ante estos hechos, para llegar a un compromiso entre precisión y tiempo de ejecución, se decide fijar las mallas en 200 paneles y 25 coeficientes  $a_n$ .

### 4.3.2 Datos de entrada

Los únicos parámetros de entrada necesarios en el diseño inverso en este proyecto son los valores de las distribuciones de presión sobre ambas caras del perfil. Recordando lo visto en el primer capítulo, los diseñadores tienen control directo sobre ellas, pues son los encargados de convertir las características aerodinámicas deseadas en las distribuciones de presiones necesarias para conseguirlas. Como es natural los datos pueden tener distintos grados de precisión. Aunque ya se ha mencionado en varias ocasiones la importancia de los valores introducidos, se quiere mostrar como se comportan los programas implementados ante la inexactitud de los datos disponibles para perfiles reales.

Con este objetivo se ha escogido el perfil NACA 1412 posicionado a ángulo de ataque nulo. Para simular la desviación de los datos de entrada, se ha tomado el Met. Green que aproxima la distribución de presiones sobre el perfil y se ha variado el número de nodos  $N$  que utiliza. Las cantidades seleccionadas han sido 25, 50, 100, 200 y 300. De esta manera se consiguen los distintos grados de precisión para los datos de entrada que se necesitan en este análisis. Prueba de ello queda representado en la fig. 4.22.a, donde se muestran los  $C_p$  calculados por Green. Por último, basta con pasar estos valores a los códigos, fijados con 200 paneles y 25 coeficientes, e ilustrar los resultados.

Comparando las distintas distribuciones  $C_p$ , se ve que la diferencia entre ellas es mínima, salvo en el borde de salida, lo que seguro traerá problemas. Estudiando las secciones de la fig. 4.22.b, fig. 4.22.c y fig. 4.22.d, conseguidas con las distintas distribuciones de presiones, se observa discrepancia entre los perfiles resultantes de Vortex-Lattice y Söhngen. Como era de esperar, según las tendencias vistas para secciones parabólicas y elípticas, las desviaciones quedan localizadas en el borde de salida. Cuanto más precisos son los datos de entrada  $C_p$ , mejor calculadas son las pendientes y más cerradas son las secciones obtenidas por estos códigos. Por otro lado, los resultados logrados por las series de Fourier parecen no inmutarse al variar la precisión de los valores de entrada. Es una propiedad muy importante, ya que lo normal durante el proceso de diseño es que aparezcan interferencias o se usen aproximaciones que distorsionen las presiones.

Ante estas pruebas, el mejor comportamiento viene por parte de las series de Fourier. No obstante, si se tiene precaución con la precisión de los datos de entrada y en especial con los valores en el borde de salida, los tres métodos proporcionan buenos resultados. Así que a fin de continuar con el proyecto y poder seguir evaluando los códigos mediante comparación como hasta ahora, se decide fijar el número de nodos en 500. Tras los resultados expuestos con 300 nodos, ahora es de esperar una mayor exactitud en los datos sin un gran incremento de tiempo en el cálculo de la distribución de presiones.

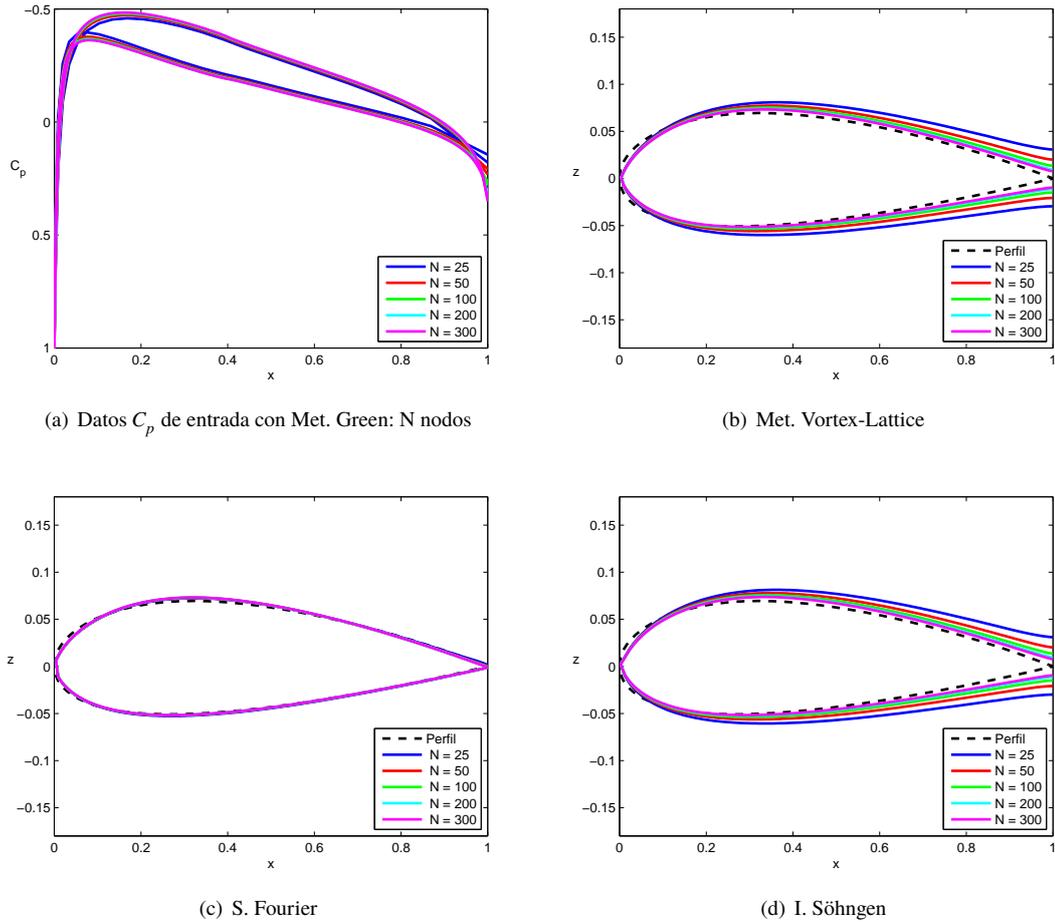
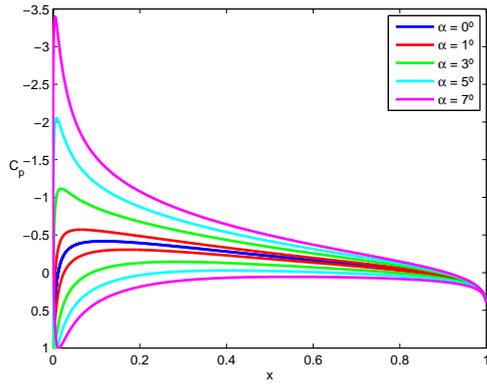
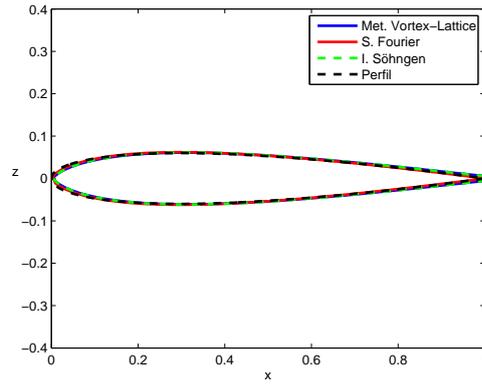
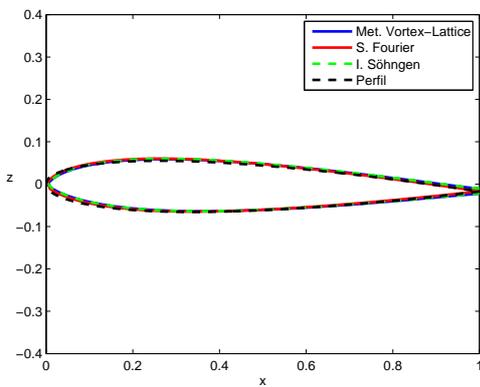
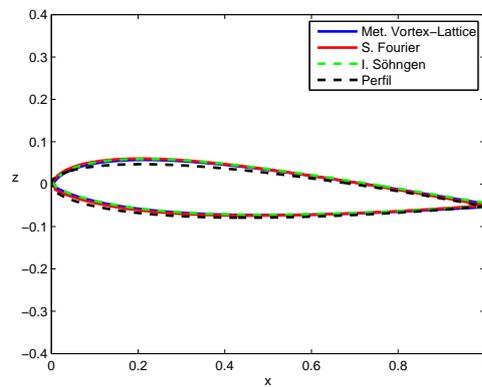
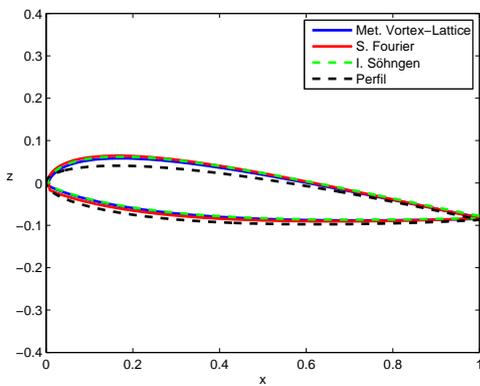
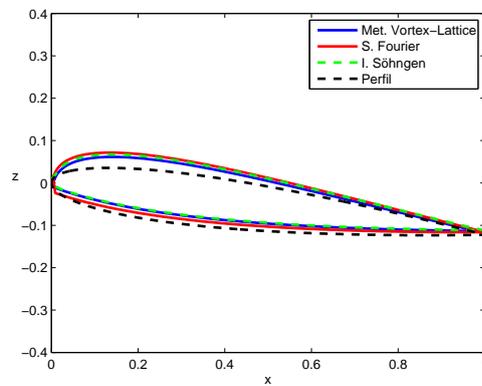


Figura 4.22 Estudio de los parámetros de entrada para NACA 1412 ,  $\alpha = 0^\circ$ .

### 4.3.3 Ángulo de ataque

Llega el turno de analizar la posición de los perfiles respecto a la corriente libre, definido como ángulo de ataque. En particular, durante la formulación fue considerado junto a la curvatura para el problema antisimétrico sin dividir el problema entre ellos. Por lo tanto, aunque se trate de un perfil simétrico, si este está posicionado a un ángulo de ataque no nulo, el bloque que resuelve el problema de curvatura debe actuar para corregir los valores de espesor y colocarlos al mismo ángulo de ataque. Lo importante de este asunto es que se ha visto en resultados previos, que el ángulo de ataque incrementa la diferencia de presiones entre ambas caras, generando más sustentación. Fenómeno que ocurre debido al aumento del pico de succión en el extradós. Llegará un momento en que la aceleración del flujo sea tal, que las simplificaciones hechas basándose en pequeñas perturbaciones no sean válidas. Así que, el objetivo de este apartado es determinar el valor máximo del ángulo de ataque ( $\alpha_{max}$ ) para el cual los resultados calculados con los códigos siguen dando buenas aproximaciones.

Para este estudio es preciso partir de un perfil simétrico que los programas reproduzcan perfectamente a ángulo de ataque nulo. Es necesario que sea simétrico para eliminar la influencia de la curvatura en el problema antisimétrico, dejando solo el ángulo de ataque. El proceso a seguir es simple, incrementar el ángulo de ataque de la sección deseada y compararla con los perfiles calculados por los programas. Bajo estas restricciones se decide escoger un perfil NACA 0012 y someterlo a ángulos comprendidos entre  $0^\circ$  y  $7^\circ$ . Respecto al resto de parámetros sobre los que el usuario tiene control, se mantiene lo establecido en los anteriores apartados: Green con 500 nodos y los códigos con 200 paneles y 25 coeficientes. A fin de tener más datos para el análisis, los perfiles resultantes se acompañan de una gráfica que muestra como varía la distribución de presiones con el aumento del ángulo de ataque.

(a) Distribucion de presiones NACA 0012 para varios  $\alpha$ (b) Perfiles  $\alpha = 0^\circ$ (c) Perfiles  $\alpha = 1^\circ$ (d) Perfiles  $\alpha = 3^\circ$ (e) Perfiles  $\alpha = 5^\circ$ (f) Perfiles  $\alpha = 7^\circ$ **Figura 4.23** Estudio del ángulo de ataque para NACA 0012.

Analizando las secciones de las imágenes, se confirma lo que se ya se sospechaba. A medida que aumenta el ángulo de ataque, los códigos no son capaces de reproducir la forma deseada. En particular el error se encuentra en el cálculo del espesor y no en la posición del perfil, ya que si se observan los puntos inicial y final, estos coinciden con la sección buscada, y por tanto, también el ángulo que forman. Una vez más nos encontramos con que la singularidad en el borde de ataque provoca errores en el cálculo del espesor, pero esta vez afecta a los tres métodos por igual. La razón está en que al calcular  $C_{p,sim}$  necesario para el problema simétrico, en le B.A no se corresponde con la distribución para  $\alpha = 0^\circ$ . Tras estudiar los datos, se puede establecer el límite de ángulo de ataque entre  $2^\circ$  y  $3^\circ$ .

Realmente el usuario no tiene control sobre este parámetro, pero según las conclusiones sacadas, lo que el usuario debe ver es que si la posición del perfil resultante tiene un alto ángulo de ataque, probablemente los resultados no sean del todo válidos.

#### 4.3.4 Curvatura y espesor

Por último, pero no menos importante, hay que determinar donde se encuentran los límites de curvatura y espesor. Según lo visto en apartados anteriores, es lógico pensar que también existan unos valores de curvatura y de espesor a partir de los cuales las perturbaciones no sean pequeñas. De igual forma que para el ángulo de ataque, se quiere ver como actúa el bloque de resolución del problema antisimétrico cuando sólo existe curvatura. No obstante, también hay que tener presente el problema simétrico, ya que parece que es el que limita la capacidad de los códigos en el diseño inverso. Así que además de los límites, se estudiará qué influye más en las desviaciones de los resultados, si la curvatura o el espesor.

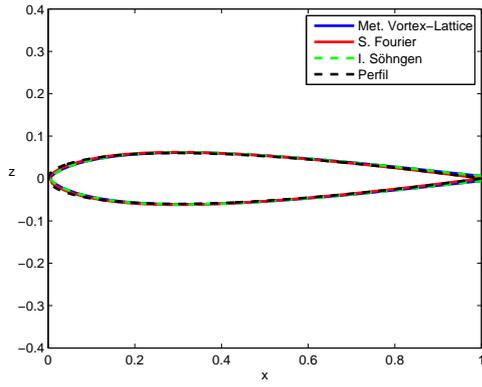
Para distinguir los efectos producidos por la curvatura y el espesor sobre los resultados, se decide escoger como punto de partida dos perfiles simétricos con distinto espesor a  $\alpha = 0^\circ$ . En este caso concreto se han seleccionado el NACA 0012 y NACA 0024 (fig. 4.24.a y fig. 4.24.b). Estas secciones representan los dos extremos que nos preocupan, perfiles esbeltos y gruesos. Tomándolos como referencia, se procede a incrementar el valor de la curvatura poco a poco, dando lugar a los resultados mostrados en las fig. 4.24.c - fig. 4.24.h. La primera columna muestra los perfiles esbeltos (NACA XX12) y la segunda los gruesos (NACA XX24). Los parámetros que controla el usuario y con los que han sido obtenidos los resultados, siguen fijados en: 500 nodos, 200 paneles y 25 coeficientes.

Observando los perfiles resultantes de los tres códigos, queda patenten que aunque no sean iguales a los buscados, las aproximaciones conseguidas en todos los casos son muy buenas. Son tanto mejores cuanto más simples son los perfiles, debido a lo que ya se ha explicado en varias ocasiones, el pico de succión en el extradós. Respecto a los métodos empleados, las series de Fourier continua siendo el mejor de los tres. Sin embargo, todo esto sólo reafirma las observaciones realizadas en los apartados anteriores, sin aportar nada nuevo.

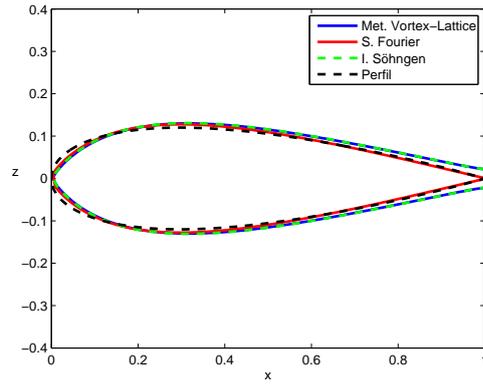
Lo interesante es fijarse en las desviaciones. Analizando los perfiles simétricos de referencia, se ve como para el más esbelto (fig. 4.24.a) los métodos reproducen casi con exactitud la sección, mientras que para el más grueso (fig. 4.24.b) aparecen las primeras desviaciones. Son muy discretas, pero existen. A medida que aumenta la curvatura, se hacen cada vez más notables. En el caso del perfil esbelto, las desviaciones comienzan a notarse cuando la curvatura alcanza un valor considerable (fig. 4.24.g). Con estos datos y después de experimentar con otros valores, es conveniente establecer un límite máximo de espesor del 18%, valor también sugerido por Carmona [13]. Por otro lado, con la curvatura se podría ser más permisivo dependiendo del espesor de la sección, pero sería recomendable que no excediera el 4%.

Ante estos hechos se puede afirmar que la variable que más influye en los resultados proporcionados por los códigos, es el espesor de las secciones que se intenta imitar. Dejando en un segundo plano a la curvatura. Como ya ocurrió con la posición del perfil, ni la curvatura ni el espesor son parámetros que el diseñador controle, son fruto de la pendiente de la distribución de presiones y la diferencia entre el extradós e intradós. Deberá actuarse de la misma forma. Si durante el proceso de diseño los perfiles obtenidos cuentan con un espesor excesivo y algo de curvatura, el usuario debe ser consciente de que los resultados tienen ciertas desviaciones.

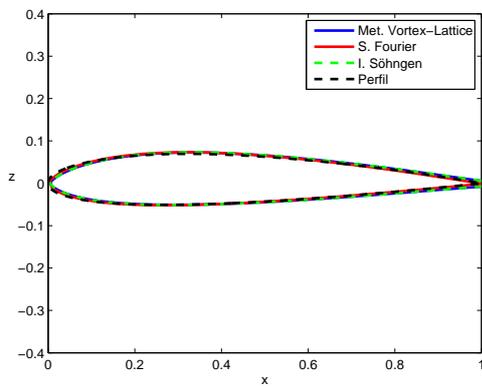
Para terminar, es interesante fijarse y comparar las imágenes del apartado anterior (fig. 4.23) con las aquí presentes. Partiendo de la misma sección simétrica de control (NACA 0012), se ve como las desviaciones debidas al ángulo de ataque son más importantes que las provocadas por la curvatura y el espesor. Era de esperar, puesto que el pico de succión se ven influenciado en mayor medida por la posición del perfil que por la geometría. Por lo tanto, a la hora de evaluar la precisión de los resultados será necesario valorar primero la posición, y después su espesor.



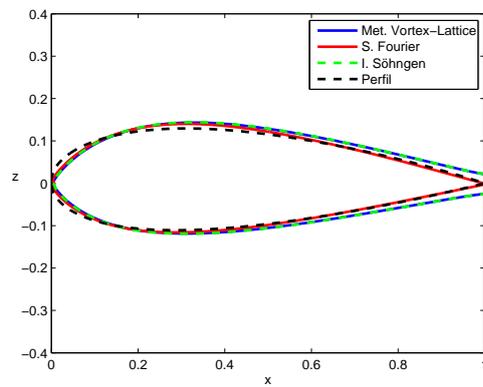
(a) NACA 0012



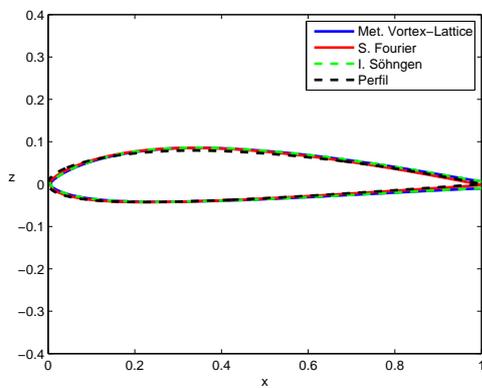
(b) NACA 0024



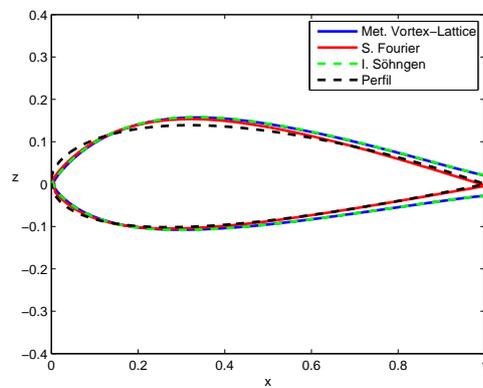
(c) NACA 1412



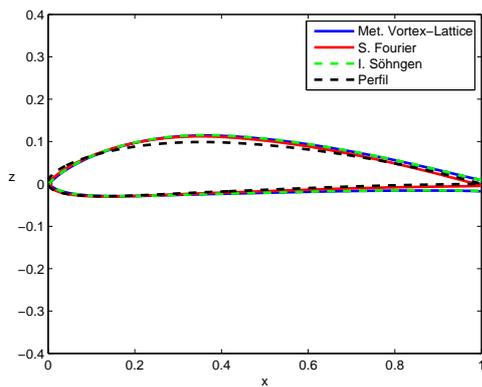
(d) NACA 1424



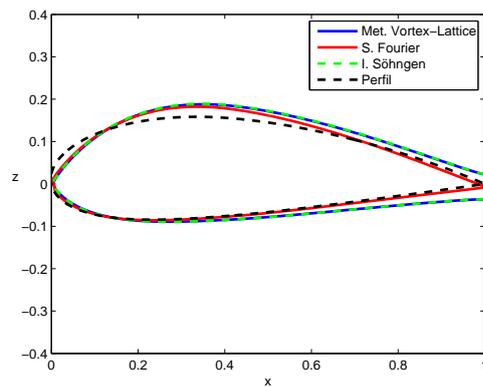
(e) NACA 2412



(f) NACA 2424



(g) NACA 4412



(h) NACA 4424

Figura 4.24 Estudio de la curvatura y el espesor con perfiles NACA 4 dígitos,  $\alpha = 0^\circ$ .

#### 4.4 Flujo real vs Flujo potencial

Todo el proyecto ha sido enfocado al estudio de la corriente potencial alrededor de perfiles, flujo que se define de forma teórica bajo ciertas simplificaciones y que permite explicar muchos de los fenómenos que ocurren en la Aerodinámica. No obstante, su carácter teórico es el que puede hacer dudar de su utilidad en casos reales. Como defiende Gordillo [11], la Aerodinámica potencial es aquella que se dedica a estudiar el flujo alrededor de objetos fuselados en los casos en los que los esfuerzos viscosos se encuentren confinados en regiones muy estrechas del dominio fluido. Podría parecer que esta situación es muy particular y queda lejos de la realidad, sin embargo no es así, el flujo alrededor tanto de las superficies sustentadoras como de las estabilizadoras y de control, puede ser calculado usando técnicas de la Aerodinámica potencial en todo el dominio excepto en la capa límite y la estela.

Atendiendo a este razonamiento, se entiende que los valores de presión empleados para el diseño inverso de perfiles, calculados del flujo potencial, son válidos siempre y cuando la capa límite sea una región muy estrecha y no interfiera en exceso con el flujo exterior. Dicho de otro modo, puede que la diferencia entre las distribuciones reales y potenciales de presión sea mínima. Así que, llegados a este punto resulta interesante plantearse la siguiente situación ¿qué ocurre si a los códigos se les introducen datos reales en lugar de los potenciales?

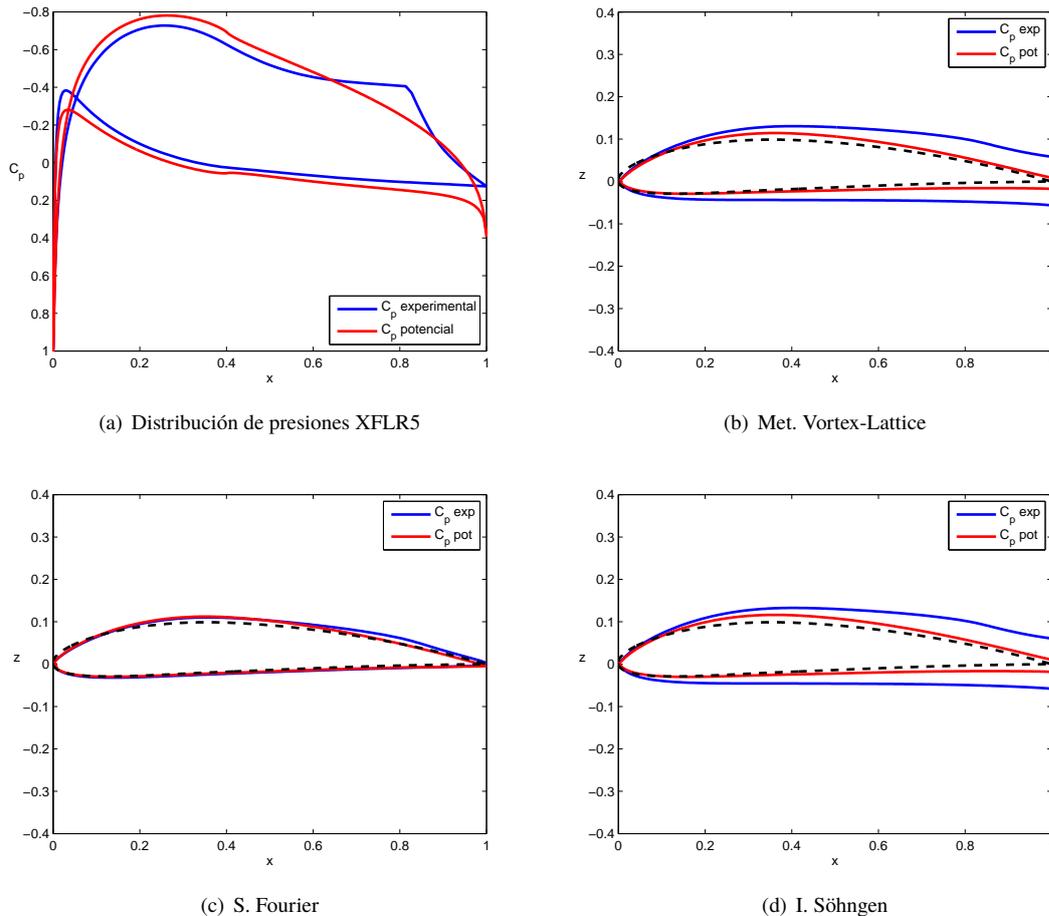
A priori, según la sensibilidad vista que presenta los programas ante ligeros cambios en los datos de entrada, se espera que los perfiles resultantes no sean iguales, aunque esto dependerá de lo diferentes que sean las dos distribuciones entre sí. En especial, Vortex-Lattice y Söhngen, son los más sensibles ante esta circunstancia, mientras que Fourier parece tolerar mejor las discrepancias. Para contrastar estas ideas basta con tomar ambas distribuciones y comparar los resultados.

En esta ocasión no se usará el Met. Green implementado en Matlab, si no el programa XFLR5, ya que es capaz de calcular las presiones en el caso real con viscosidad y en el potencial. Los datos son obtenidos mediante un mallado uniforme de 300 paneles y almacenados en un archivo *.txt* para su importación en Matlab, conforme a la explicación dada en el Anexo A. Una vez introducidas las presiones, se aplica la misma rutina de cálculo bajo los parámetros fijados. El perfil escogido es un NACA 4412 con  $\alpha = 0^\circ$ . Al tratarse de un perfil esbelto con una curvatura moderada y sin ángulo de ataque, se confía en que los resultados asociados a la distribución potencial sean buenos, haciendo más fácil la comparación respecto a los reales.

Realizados los cálculos, los resultados son mostrados en la fig. 4.25, donde el color azul se asocia con el flujo real viscoso y el rojo con la corriente potencial. Al comparar las presiones, se ve como efectivamente ambas son muy parecidas excepto en las inmediaciones del borde de salida. Según los datos mostrados en XFLR5, la diferencia está causada por el crecimiento de la capa límite, la cual pasa de ser laminar a turbulenta en ese entorno. El flujo se frena y la presión se recupera. Como se intuyó, debido a estas discrepancias entre los efectos reales y el comportamiento teórico, las secciones asociadas a la corriente viscosa no consiguen reproducir la forma deseada cuando se emplea Vortex-Lattice o Söhngen (fig. 4.25.b y fig. 4.25.d). Sin embargo, la cosa cambia cuando se usan las series de Fourier, obteniendo unos perfiles muy próximos para ambos flujos. Puede verse en la fig. 4.25.c que en el entorno de la transición de la capa límite, la sección "real" tiene un poco más de espesor y termina con una mayor pendiente, lo que concuerda con las presiones. Aunque ya se tenía nociones sobre la tolerancia de este método ante desviaciones en los datos de entrada, sorprende ver lo flexible que es.

Tras los datos obtenidos, se concluye entonces que por muy pequeños que puedan parecer los efectos viscosos al estar confinados en una región muy estrecha del espacio, siempre afectarán al flujo exterior en mayor o menor medida. Además habrá que tener especial cuidado con el crecimiento de la capa límite. Si la capa límite alcanza un determinado espesor, se da la transición a turbulento, lo que nos aleja del rango de las pequeñas perturbaciones, e invalida las ecuaciones empleadas. Todo esto deberá ser tenido en cuenta por el diseñador a la hora de definir la distribución de presiones según las características deseadas.

Por otra parte se ha visto que las series de Fourier aceptan como datos de entrada las presiones reales. Para tratar de demostrar que no es un caso aislado, se quiere seguir experimentando con otros ejemplos.



**Figura 4.25** Comparación flujo real y potencial: NACA 4412 ,  $\alpha = 0^\circ$ .

Siguiendo el mismo proceso anterior que admite los datos exportados de XFLR5, se opta por probar perfiles de otras familias. Se busca que sean diferentes, pero al mismo tiempo deben respetar las restricciones fijadas durante el análisis de sensibilidad. En particular se pone especial atención a que sean esbeltas. Adicionalmente se van a suponer posicionados a ángulo de ataque nulo. Tras consultar la base de datos *UIUC* [19], se han escogido los siguientes: Clark Y , Eppler 221 y Göttingen 394.

Se observa que para el perfil Clark Y (fig. 4.26), las presiones son muy parecidas salvo por el efecto de la transición en el borde de salida, igual que ocurría antes. En cambio, en las otras dos secciones restantes (fig. 4.27 y fig. 4.28), existe una mayor diferencia entre las distribuciones, destacando el caso del Eppler 211. Sin embargo a pesar de estos efectos, los resultados siguen la misma tendencia que lo ilustrado para la sección NACA. Las secciones obtenidas asociadas a los flujos reales son muy buenas, con pequeñas desviaciones puntuales localizadas en el borde de salida. Ante estos resultados, se confirma que las series de Fourier son el mejor método para resolver el problema de diseño inverso.

Importante destacar que esta capacidad de aceptar como datos de entrada las presiones reales supone una enorme ventaja, porque no se tratan de valores teóricos estimados analíticamente de las ecuaciones simplificadas, si no de datos reales propios de un túnel de viento. Aunque bien es cierto que estas distribuciones se corresponden con flujos subsónicos bajos, donde la capa límite es laminar sobre la mayor parte del perfil. No obstante, para este proyecto esto supone un primer paso hacia un método viable para el diseño inverso de perfiles.

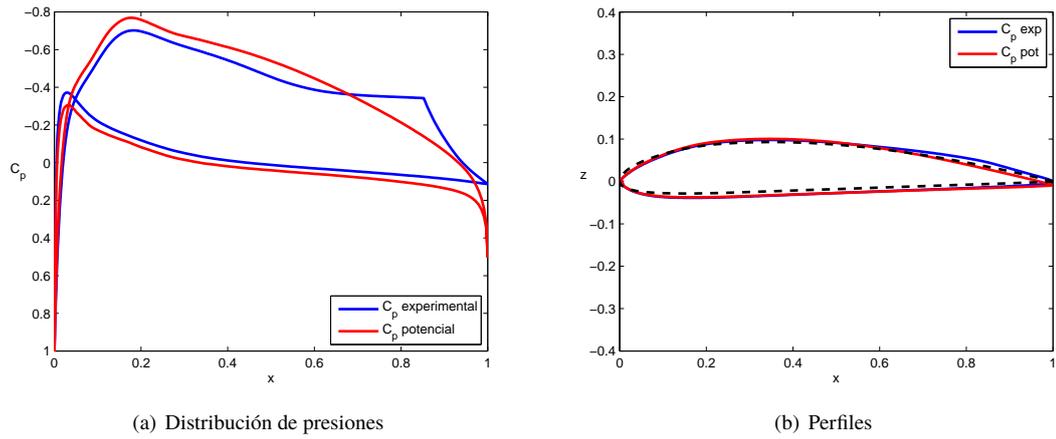


Figura 4.26 S. Fourier: Clark Y ,  $\alpha = 0^\circ$ .

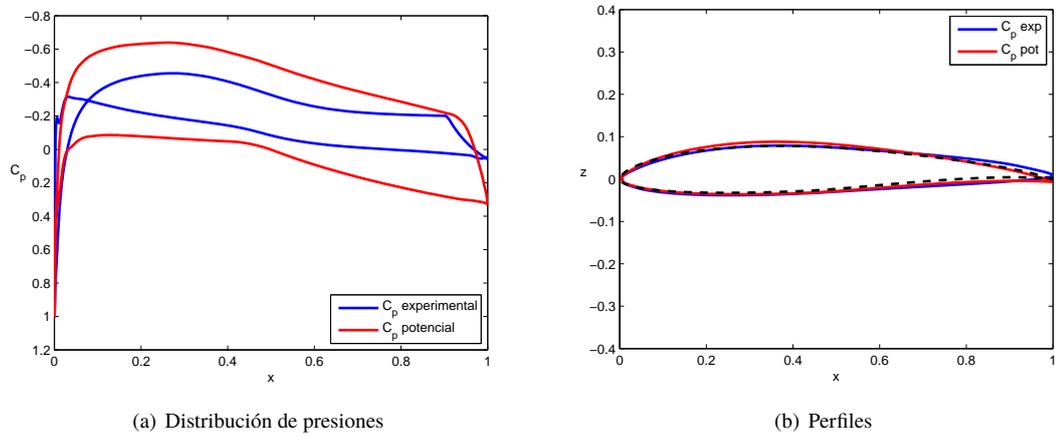


Figura 4.27 S. Fourier: Eppler 211 ,  $\alpha = 0^\circ$ .

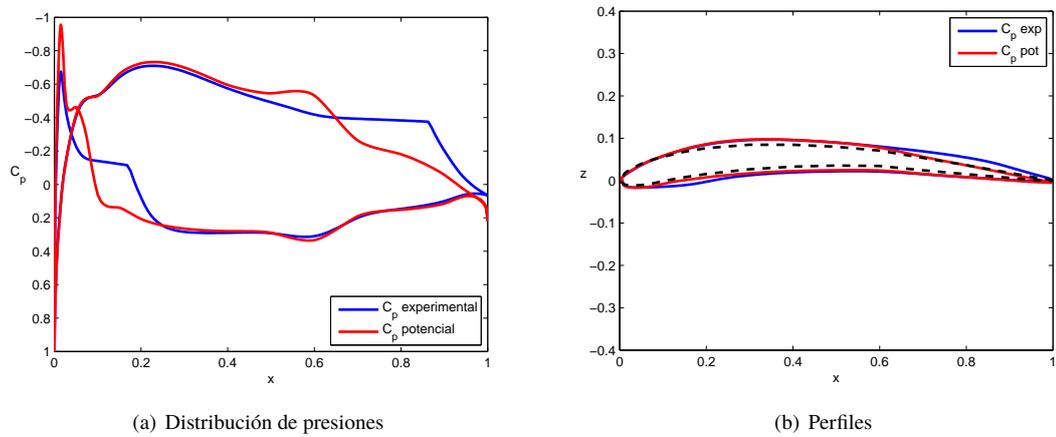
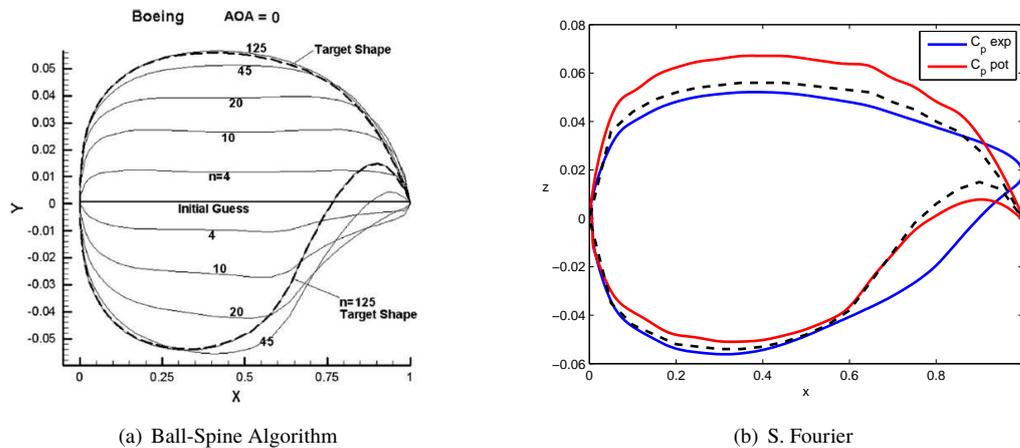


Figura 4.28 S. Fourier: Göttingen 394 ,  $\alpha = 0^\circ$ .

Esta última idea sugiere que, desde el punto de vista de aplicación práctica, sería interesante comparar los resultados aquí obtenidos con los ofrecidos por otros métodos reales para el diseño inverso. De los métodos presentados en el capítulo 1, se decide escoger el *Ball-Spine Algorithm (BSA)* porque está desarrollado únicamente para solucionar el problema de diseño, y no como los otros dos que son rutinas para resolver de forma general cualquier problema no lineal. La comparación entre ambos métodos se hace tomando el perfil BOEING 727 estudiado en [4] con ángulo de ataque nulo. Debe puntualizarse que aunque las condiciones no son las mismas para ambos casos, sirve para ilustrar la precisión de ambos programas.

Viendo la fig. 4.29, es evidente que no existe ni punto de comparación entre ellos. A base de realizar muchas iteraciones resolviendo el problema directo, BSA es capaz de corregir la diferencia con la distribución de presiones objetivo, mientras que Fourier invierte el problema y lo resuelve en un único paso, consiguiendo peores aproximaciones. La ventaja de BSA sobre Fourier, está en que separa el problema de diseño en dos partes independientes: un bloque que resuelve el campo fluido alrededor de un objeto, y otro bloque que corrige la forma de la sección según las diferencias entre las presiones. De esta forma consigue que el cálculo de las presiones sea más preciso, pudiendo considerar efectos viscosos en diferentes regímenes como subsónico o transónico. Fourier se ve limitado por las simplificaciones hechas que permitieron invertir el problema de diseño.



**Figura 4.29** Comparación de métodos de diseño inverso , Boeing 727,  $\alpha = 0^\circ$ .



# Conclusiones

---

El desarrollo de superficies sustentadoras pasa inevitablemente por el estudio de los perfiles aerodinámicos. Como se ha demostrado, existe un vínculo entre el campo fluido y la forma de las secciones. Es vital su comprensión porque las fuerzas aerodinámicas tienen su origen en la deflexión de las líneas de corriente provocadas por el perfil. No todos los cuerpos son aptos para generar sustentación, sólo aquellos que sean esbeltos. También hay que poner especial atención a los esfuerzos viscosos confinados en la capa límite. A pesar de ser una región muy estrecha adyacente a la superficie, tiene gran influencia en el comportamiento aerodinámico de los perfiles, y en particular en la entrada en pérdida. Dependiendo de la aplicación se buscan unas características aerodinámicas concretas, de ahí que surjan las diferentes formas, clasificadas en familias. Fruto de la experimentación surgieron los primeros catálogos, que sirvieron como base para la selección de perfiles durante los primeros años.

El desarrollo de métodos de diseño de perfiles aerodinámicos está justificado por tres motivos: el diseño de secciones que quedan fuera del alcance de los catálogos, diseño eficiente y específico para cada aplicación, y el ahorro económico en concepto de pruebas y tiempo. Muchas personas han trabajado en este campo, pero todos los procesos son agrupados en dos filosofías: métodos directos y métodos inversos. Los directos toman como punto de partida la forma del perfil aerodinámico y calculan la distribución de presiones sobre ellos, para posteriormente optimizar la sección. En cambio los inversos, comienzan definiendo la distribución de presiones objetivo y determinan la forma del perfil. La ventaja de los métodos inversos sobre los directos es que las propiedades aerodinámicas como sustentación, resistencia y capa límite pueden ser transformadas en una distribución de presiones. En esta materia destacó Eppler, al implementar un código que permitía diseñar perfiles aerodinámicos con las características de capa límite especificadas y analizar secciones de geometría conocida. Actualmente, se investigan técnicas iterativas como BSA, o incluso otras pertenecientes a la rama de inteligencia artificial como ANN y EA.

En este proyecto se ha tratado de dar los primeros pasos en busca de un método de diseño de perfiles. Para ello se ha partido de las ecuaciones generales de Navier-Stokes de Mecánica de fluidos y se han aplicado las simplificaciones clásica para flujo potencial considerando pequeñas perturbaciones, llegando al problema de Laplace que resuelven el flujo exterior alrededor de un objeto en la Aerodinámica potencial. Dividiendo el problema en espesor y curvatura se encuentran las ecuaciones que relacionan directamente la geometría con las presiones. Invertiendo estas expresiones, se consigue un método inverso que permite conocer la forma del perfil a partir de las distribuciones de presiones impuestas en una única iteración. En un primer momento puede pensarse que el flujo potencial no tiene validez en aplicaciones reales, pero a lo largo del proyecto se ha justificado que esto no es así. Ciertamente es que no tiene en cuenta los efectos viscosos aunque estos sí influyen sobre las presiones, pero como en todos los avances, se comienza estudiando los casos sencillos.

Dada la complejidad de las expresiones invertidas para el cálculo de la geometría, se opta por probar tres métodos diferentes para resolver dichas ecuaciones: un método basado en paneles de Vortex-Lattice, resolución mediante series de Fourier, y usando la fórmula de inversión de Söhngen. Así que el proyecto pasa por evaluar y determinar cual es el mejor de los tres. Para comprobar la integridad de estos programas se decide probar si son capaces de reproducir perfiles reales a partir de sus distribuciones de presiones. Las secciones consideradas han sido perfiles NACA de 4 dígitos de todo tipo a diferentes ángulos de ataque.

Los primeros resultados conseguidos son muy positivos, pues las tres secciones calculadas son muy próximas a los perfiles objetivo. No obstante no son lo suficientemente concluyentes como para decantar la balanza por ninguno de ellos, así que se realizó un análisis más exhaustivo controlando cada una de las variables del problema.

El método basado en Vortex-Lattice es el más sencillo de los tres en cuanto a comprensión e implementación. Muy rápido en los cálculos. La precisión de sus resultados no varía por el número de paneles en el mallado. En cambio, se ve afectado por los errores en los datos de entrada. Buen comportamiento en perfiles esbeltos con curvatura, no tanto si el espesor se ve incrementado. Pierde precisión si el ángulo de ataque supera los  $2^\circ$ . Otro inconveniente es que no cuenta con ninguna condición de cierre, por eso todas las secciones tienen el borde de salida abierto. Debido a esto, depende mucho de los valores de las presiones en ese entorno. En general se puede calificar como un método aceptable, respetando siempre sus limitaciones.

En cuanto a las series de Fourier, la primera dificultad pasa por convertir las ecuaciones en una expresión para el cálculo de los coeficientes  $a_n$ . Es el más rápido de los tres. Su precisión es muy buena, no varía ni por el número de coeficientes ni por el de paneles. Incluye una condición de cierre, garantizando perfiles cerrados. Pero lo más sorprendente de este método es la tolerancia que tiene ante las desviaciones en los datos de entrada. Tal es así, que es capaz incluso de admitir las distribuciones de presiones reales con los efectos viscosos consiguiendo buenas aproximaciones. Al igual que Vortex-Lattice, su precisión también se ve afectado por espesores y ángulos de ataques excesivos. Como método inverso, es el más adecuado.

Respecto a la fórmula de inversión de Söhngen, es el más complejo de adaptar de los tres, lo que sin embargo no se traduce en mejores resultados. De hecho, los valores que proporciona son casi iguales a los obtenidos por Vortex-Lattice. Es el más lento, y además sus tiempos se incrementan de forma exponencial cuando se aumenta el número de paneles del mallado. A esto hay que añadirle que también se ve afectada su precisión, debido a que el mallado no es uniforme a lo largo de la cuerda. Se comporta igual que Vortex-Lattice cuando los datos de entrada tienen pequeñas desviaciones. Tampoco cuenta con una condición de cierre. También sufre la misma pérdida de precisión con el espesor y el ángulo de ataque. Así que en definitiva, este método no tiene ninguna ventaja sobre los otros dos, y por ello debe ser descartado.

Elegidas las series de Fourier como el mejor método de los tres para el diseño inverso, se quiso contrastar con los resultados propios de un método mucho más elaborado como el BSA. Aunque las aproximaciones conseguidas siguen siendo buenas, en comparación quedan muy lejos de las ofrecidas por el método iterativo. Por otra parte, los códigos aquí desarrollados sólo son válidos mientras se den pequeñas perturbaciones en una corriente subsónica baja. En cambio, el algoritmo BSA tiene un rango de aplicación mucho más amplio al contar con un bloque independiente para el análisis del flujo. Por estos motivos se llega a la conclusión de que, aunque se ha demostrado la validez de los resultados proporcionados por las series de Fourier para casos reales, queda lejos de poderse aplicar en casos prácticos. Podría utilizarse como una primera aproximación en la búsqueda de los perfiles, y usar esos datos en programas más sofisticados.

No obstante, el trabajo desarrollado tiene un valor académico importante, comenzando por la identificación del problema que se quiere resolver y sus variables hasta la gestión y documentación del trabajo. Me ha permitido ampliar mis conocimientos adquiridos en la carrera y he podido usar distintas herramientas para resolver un problema real.

Por último, la conclusión más importante que se puede sacar de este proyecto es que la dificultad del problema inverso está precisamente en que las ecuaciones no son fácilmente invertibles. A pesar de realizar las simplificaciones pertinentes para poder invertirlos, se siguen cometiendo errores y/o están limitadas a un cierto rango. Por ello se concluye que lo más conveniente para desarrollar métodos de diseño es que sean programas iterativos donde se calcule el campo fluido de forma directa y se compare con el deseado.

Ante las conclusiones expuestas, se propone como futuras líneas de investigación para continuar con este trabajo:

- Investigación y desarrollo de una metodología iterativa para el diseño de perfiles.
- Estudiar cómo las características aerodinámicas pueden ser transformadas en una distribución de presiones.





### Introducción

XFLR5 es un software libre y gratuito que permite a sus usuarios introducirse en el mundo del diseño y análisis en la industria aeronáutica. Fernández [10] apunta que XFLR5 aparece como el sucesor natural del XFOIL y que ambos programas permiten diseñar y estudiar los perfiles alares. Como predecesor, XFOIL se presenta en formato de software libre y permite el análisis y diseño de perfiles alares en régimen subsónico. Fue creado por Mark Drela como una herramienta de diseño para el proyecto Daedalus en el MIT (Massachusetts Institute of Technology) en los años 80. El proyecto Daedalus consistía en diseñar una aeronave impulsada por el hombre, y prueba de su éxito es que ostenta el record de duración y distancia en esta categoría con más de 115 km y casi 4 horas de duración.

XFOIL fue programado en FORTRAN, pero tras demostrar su gran utilidad y pese a ser un software algo antiguo, hace que hoy incluso pasados más de 20 años se siga utilizando. Su sucesor XFLR5 está programado en C++, sin embargo conserva toda la esencia del XFOIL al emplear los mismos algoritmos, es decir, sólo se ha traducido a un lenguaje de programación más moderno.

XFLR5 permite analizar desde perfiles y alas hasta incluso aviones que operen a números de Reynolds bajos. Además cuenta con una función de diseño mediante gráficos. Fernández [10] aclara que los diseños actuales en aeronáutica son obtenidos mediante softwares mucho más avanzados, pero no por ello los resultados de XFLR5 dejan de ser válidos. Hay que tener en mente que este programa sirve como una herramienta básica para poder realizar cálculos complejos y obtener aproximaciones muy buenas a la realidad para diseñar aviones de aeromodelismo o planeadores, siempre teniendo presente que bajo ninguna circunstancia debe utilizarse para el diseño de aviones tripulados o de tamaño real.

Pese a las distintas posibilidades mencionadas que ofrece XFLR5, el interés de este apéndice se centrará en las funciones relacionadas con los perfiles bidimensionales y el proceso seguido para obtener las distribuciones de presiones, puesto que esa es la razón de su uso para este proyecto.

### Análisis y diseño de perfiles

Con este apartado lo que se pretende es mostrar el proceso que se sigue a la hora de diseñar y/o analizar un perfil con el programa XFLR5. De esta forma, se podrá comprender como se han obtenido los datos de las distribuciones de presiones para contrastarlos con los del método de Green. Además también se verán todas las posibilidades de análisis que ofrece.

En primer lugar se explicará como introducir la geometría del perfil, y las opciones que existen para ello. Una vez hecho esto, se procederá a mostrar los distintos análisis que el programa XFLR5 es capaz de realizar. Por último se presentarán las gráficas que permiten la evaluación de las características del perfil, entre las que se encuentra la distribución de presiones  $C_p$ .

Al iniciar el programa, la pantalla que aparece es la siguiente:



Figura A.1 Pantalla inicial del XFLR5.

Al tratarse de un proyecto nuevo, lo primero que se debe hacer es introducir el perfil que se quiere analizar y/o diseñar. Desplegando el menú *File*, se puede acceder a las distintas funciones de las que dispone el programa. Para introducir la geometría se pincha en *Direct Foil Design*, apareciendo la pantalla que representará la forma del o los perfiles (fig. A.2). Es posible tener varios perfiles al mismo tiempo, apareciendo superpuestos en distintos colores. Para definir la geometría se cuenta con tres posibilidades: diseñar el perfil manipulando los splines, importar un perfil o, en el caso de los perfiles NACA de 4 y 5 dígitos, cargarlo directamente.

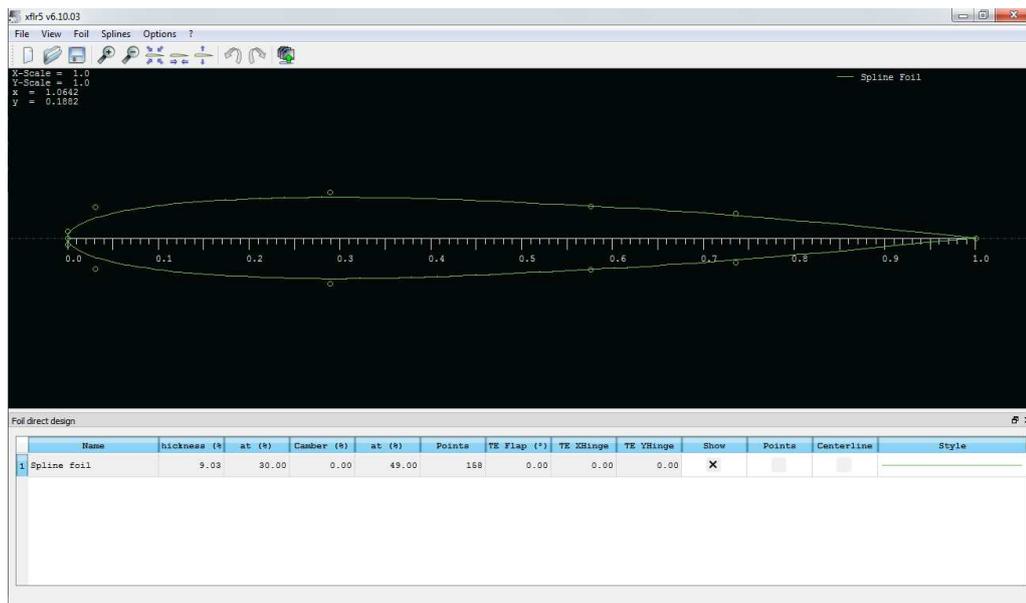


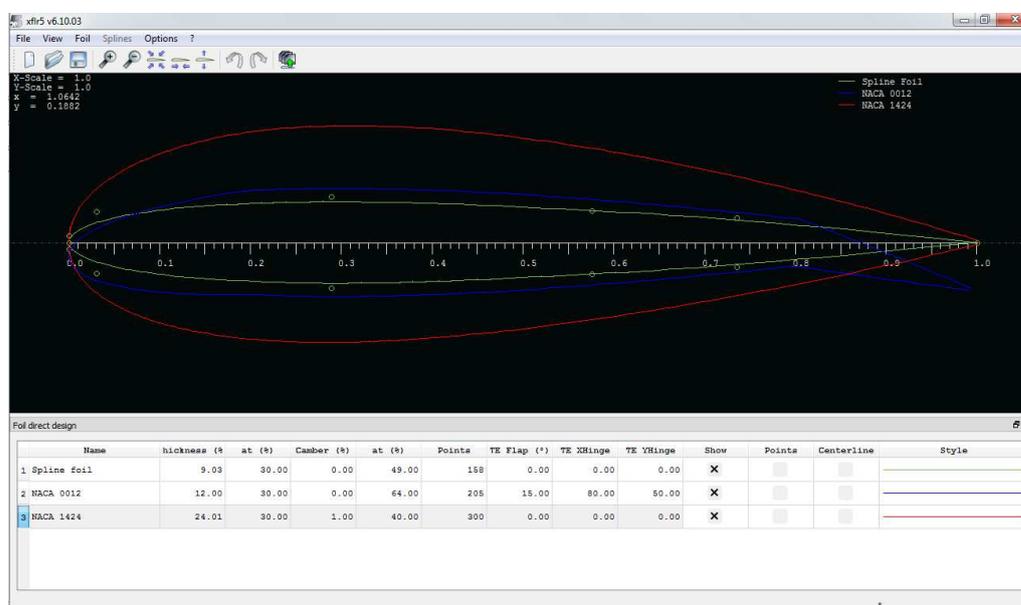
Figura A.2 Pantalla inicial de diseño por método directo.

Pinchando directamente sobre los puntos (*Control Points*) del perfil (fig. A.2), se puede modificar la geometría. Este tipo de puntos, *Splined Points*, permiten tener un gran control sobre la geometría, a la vez que hacen muy sencillas las variaciones del perfil. Hay que tener en cuenta que el programa no avisará de si lo que se está haciendo es incongruente. Esta posibilidad es interesante para ver qué efectos provoca el cambio de la geometría sobre las características sustentadoras del perfil. Este proceso es lo que se ha definido como un diseño directo. Conseguida la geometría deseada, hay que almacenar los *splines* como un perfil para que se tenga en cuenta en los análisis. Para ello, en el menú *Splines* se selecciona la opción *Store Splines as a Foil* y se le asigna un nombre a la geometría.

Sin embargo, si lo que se desea es analizar un perfil conocido y no diseñarlo, lo más conveniente es importar su geometría. Para ello la *UIUC Applied Aerodynamics Group*[19] cuenta con una base de datos que recoge más de 1500 diseños que se pueden descargar e importar a XFLR5. Descargado el archivo con extensión *.dat*, basta con abrirlo desde el menú *File* para que aparezca la geometría cargada en la pantalla.

En el caso de los perfiles NACA de 4 y 5 dígitos, el programa cuenta con la opción de cargarlos directamente, sin necesidad de importarlos. Esta opción se encuentra desplegando el menú *Foil* y pinchando en *Naca Foils*. Se abrirá una ventana donde se pide introducir el código numérico que identifica al perfil, así como el número de paneles en los que estará dividido. Como puede imaginarse, el número de paneles es importante de cara al posterior análisis, ya que influirá en la precisión de los datos y en el tiempo de cálculo.

Esta última opción es la que mejor se adapta para el proyecto planteado en este documento, ya que se trabaja con perfiles NACA de 4 dígitos. A modo de ejemplo, se ilustrarán los pasos seguidos para conseguir las distribuciones de presiones con un perfil NACA 1424 con 300 paneles. Se observa que en la parte inferior de la pantalla (fig. A.3) aparece la información correspondiente a los perfiles que se hayan cargado, tal como espesor (*thickness*), curvatura (*camber*), así como la posición máxima de éstas referido al tanto por ciento de la cuerda. Además informa también del número de puntos de los que consta el perfil, e incluso aportaría información sobre los flaps en caso de tenerlos.



**Figura A.3** Diseño de perfiles: NACA 1424 y NACA 0012 con flaps y slaps.

Antes de proceder al análisis, hay que destacar que haciendo click derecho se despliega un menú con el que se pueden realizar modificaciones sobre los perfiles cargados con distintas finalidades. Entre las más importantes destacan: redefinir las coordenadas (*Edit Foil Coordinates*), lo que está más orientado hacia el diseño puesto que cambiaría la geometría importada; refinar el panelado del perfil (*Refine Globally o Locally*), es decir, aumentar el número de paneles para conseguir un mejor análisis ya sea sobre todo el perfil o localmente; y la capacidad de incluir en el perfil tanto flaps como slats (*Set Flap*).

Una vez creado o modificado un perfil este puede ser exportado con extensión *.dat*. Como ya se ha visto, este tipo de archivos cargan de forma automática la geometría. De esta forma se pueden guardar los diseños creados para posteriores análisis y comparaciones.

Definidos los perfiles es hora de pasar a su análisis. Se vuelve a desplegar el menú *File* seleccionando esta vez *Xfoil Direct Analysis*, apareciendo la pantalla correspondiente (fig. A.4). En la barra superior se observan un desplegable que permite elegir entre los perfiles cargados. Al seleccionar cualquiera de ellos, aparece su representación gráfica en la parte inferior.

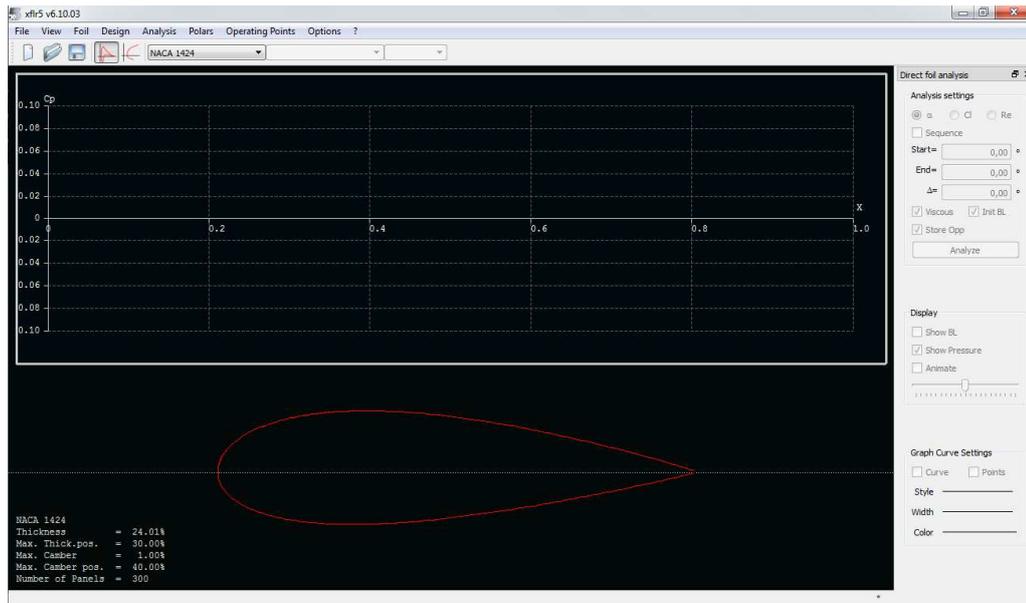


Figura A.4 Pantalla inicial del análisis de perfiles.

El análisis a realizar será un *Batch analysis*, que se encuentra en la pestaña *Analysis*. Sobre este tipo de procesos, Fernández[10] explica que se llama *Batch* cuando las instrucciones insertadas en él, son realizadas de forma secuencial y automática por el ordenador. A continuación lo que se debe hacer es configurar el análisis que se va a realizar sobre el perfil. La ventana de configuración (fig. A.5) se encuentra dividida en varias partes, lo que hace más cómodo la preparación.

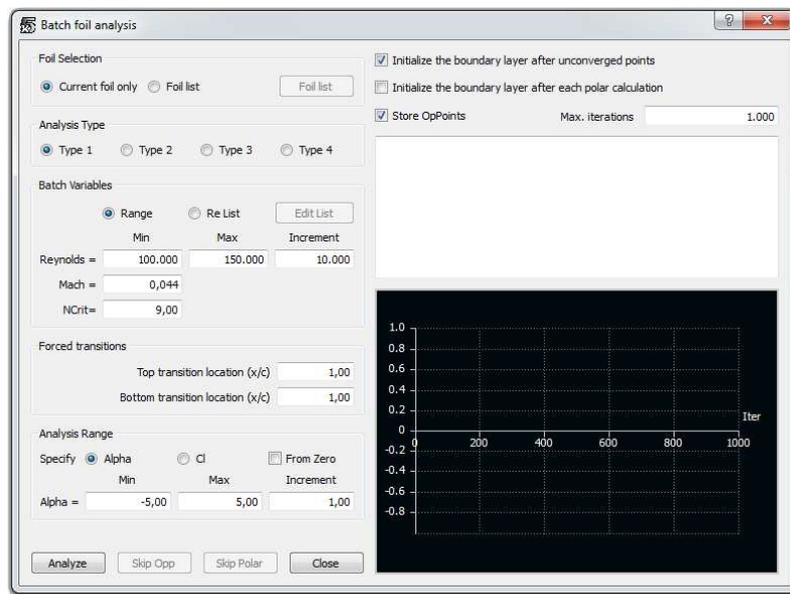


Figura A.5 Configuración del tipo de análisis.

En primer lugar se elige el perfil a analizar. Puede ser aquel que fue seleccionado con el desplegable, o elegir desde un listado varios de los cargados previamente. El siguiente paso consisten en definir el tipo de análisis que se quiere. XFLR5 cuenta con 4 tipos, diferenciándose entre sí por las variables empleadas en el barrido principal. El más convencional y usado en este proyecto es el Tipo 1 porque permite un control directo sobre el número de Reynolds. El siguiente bloque permite forzar puntos de transición de la capa límite tanto en extradós como en intradós. El último de los bloques determina la variable sobre la que realizar un barrido secundario una vez fijada la variable del barrido principal.

Por ejemplo, para el caso aquí ilustrado se ha elegido el perfil NACA 1424 para analizar. Posteriormente se selecciona un análisis para un rango de  $Re$  que va desde 100.000 hasta 150.000, con un incremento de 10.000, fijando  $M = 0,044$  y considerando que la corriente no está perturbada  $N = 9$ . No se fuerzan los puntos de transición. Por último, para cada valor de  $Re$  se analizará el perfil a diferentes ángulos de ataque  $\alpha$  que van desde  $-5^\circ$  hasta  $5^\circ$  con un paso de  $1^\circ$ .

Se pulsa el botón *Analyze* y comienza el análisis, dando como resultado las diferentes gráficas. Para estudiar los resultados XFLR5 dispone de dos interfaces diferentes.

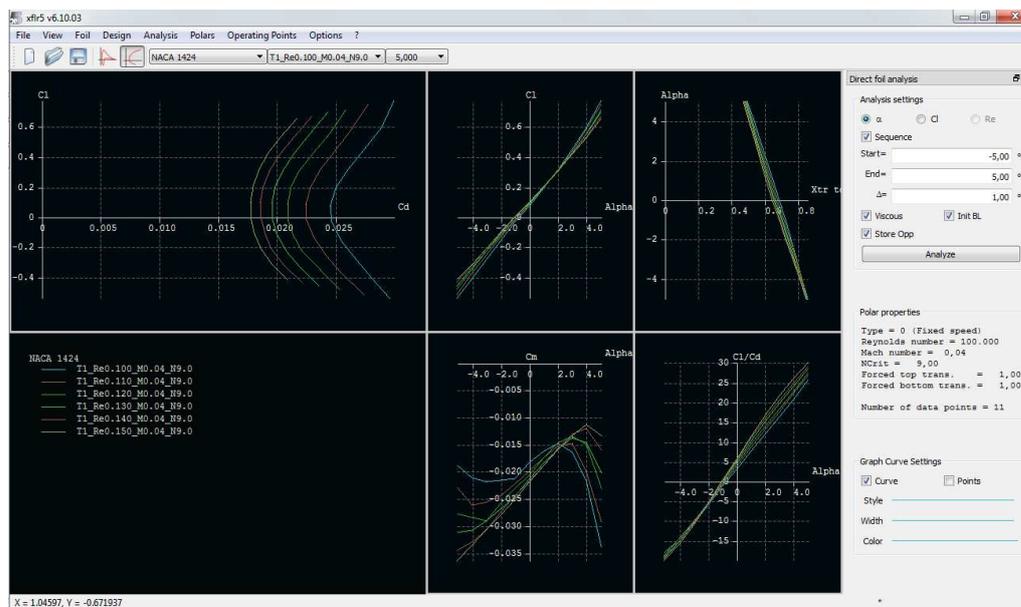


Figura A.6 Polar view: características globales.

Por defecto la primera que aparece es la *Polar view*, donde se representan todos los datos obtenidos para los diferentes perfiles (fig. A.6). Da una visión general de la evolución de las características de los perfiles según las condiciones definidas en el análisis. La comparación entre las diferentes geometrías es inmediata. Las gráficas que ofrece de forma predeterminada son: la polar del perfil ( $C_l/C_d$ ), evolución de la sustentación ( $C_l/\alpha$ ), comportamiento del punto de transición en extradós ( $\alpha/Xtr t$ ), coeficiente de momento ( $C_m/\alpha$ ) y evolución de la eficiencia ( $C_l/C_d/\alpha$ ). Sin embargo, si se quiere se pueden cambiar las variables representadas en la gráfica haciendo *click* derecho en *Current Graph/ Define Graph Setting*.

Por otra parte la segunda interfaz, *OpPoint view*, permite ver la distribución de presiones  $C_p$  sobre el perfil para cada una de las situaciones en las que fue analizado (fig. A.7). Sin duda alguna, esta es la gráfica que resulta más interesante para los propósitos del proyecto. En la barra superior, mediante los tres desplegables se eligen el perfil, las condiciones del barrido principal y el valor de la variable en el barrido secundario. Siguiendo con el ejemplo, se escoge el perfil NACA 1424 a  $Re = 100.000$ ,  $M = 0.044$  y  $N = 9$ , y en el tercer desplegable se selecciona el ángulo de ataque  $\alpha = 3^\circ$ .

Situado en la esquina inferior izquierda se ven datos relacionados con la geometría del perfil, mientras que en el lado derecho se ven las características aerodinámicas del perfil para la configuración seleccionada. Mediante el menú de la derecha, en la parte de *display*, se pueden marcar las opciones para que muestre sobre el perfil la capa límite (*Show BL*), la presión y el centro de presiones (*Show Pressure*), o animar la gráfica para ver su evolución respecto a la variable secundaria. No obstante lo que se necesita para el proyecto son los valores de la presión asociados a un flujo potencial (*Show Inviscid Curve*). Esta opción se encuentra en el menú *Operating Points/Cp Graph*. Al marcarla, aparece sobre la gráfica una curva puntea representando los valores correspondientes a flujo no viscoso.

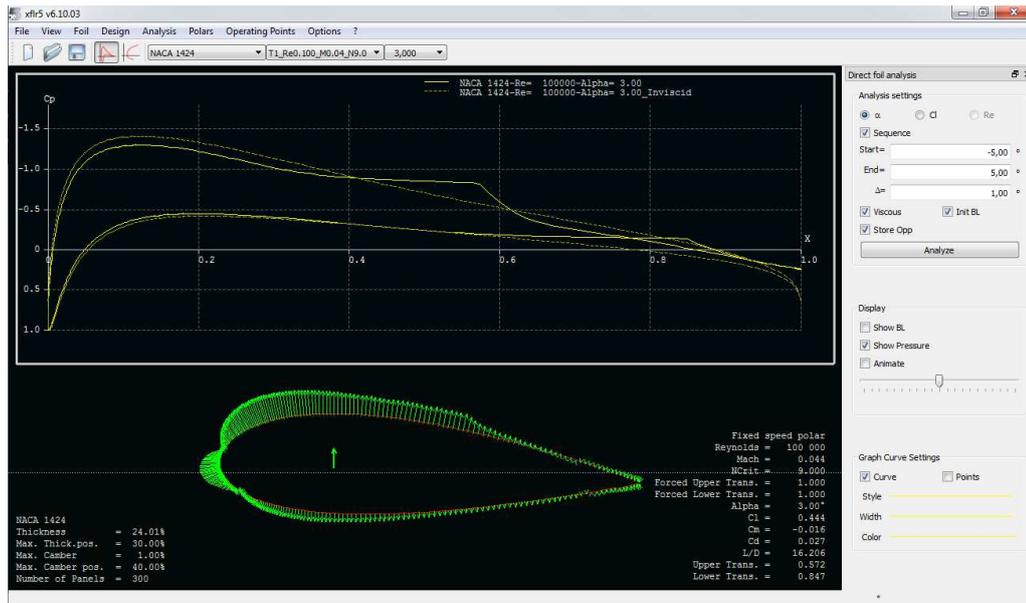


Figura A.7 Distribucion de presiones  $C_p$  para NACA 1424 a  $\alpha = 3^\circ$ .

Por último, sólo queda exportar estos valores. Se vuelve al menú *Operating Points/Cp Graph* y se elige *Export Graph*. Esto genera un archivo *.txt* que posteriormente puede ser importado a Matlab. Si se abre (fig. A.8), se observa que los datos están agrupados en columnas, y sin más que borrar la primera línea, pueden ser leídos como una matriz en Matlab.

X	NACA 1424-Re= 100000-Alpha= 3.00	X	NACA 1424-Re= 100000-Alpha= 3.00_Inviscid
1	0.2473609	1	0.633554
0.9974774	0.2445503	0.5290593	0.5290593
0.9929085	0.2377737	0.448257	0.448257
0.9870521	0.2287453	0.3860328	0.3860328
0.9801884	0.2177552	0.3334728	0.3334728
0.9724844	0.2050339	0.2872045	0.2872045
0.9640559	0.1907267	0.2453291	0.2453291
0.9549902	0.1749654	0.2067305	0.2067305
0.9453566	0.1578815	0.1706804	0.1706804
0.9352124	0.139615	0.1366757	0.1366757
0.9246063	0.120316	0.1043509	0.1043509
0.9135802	0.1001427	0.07342982	0.07342982
0.9021712	0.07925807	0.04369622	0.04369622
0.8904123	0.05782438	0.01497592	0.01497592
0.8783331	0.03599871	-0.0128752	-0.0128752
0.8659609	0.01392837	-0.03997912	-0.03997912
0.8533205	-0.008252188	-0.06644116	-0.06644116
0.8404347	-0.03042332	-0.09235385	-0.09235385
0.827325	-0.05248094	-0.1177997	-0.1177997
0.8140113	-0.07433649	-0.1428531	-0.1428531
0.8005122	-0.09591678	-0.1675819	-0.1675819
0.7868454	-0.1171647	-0.1920484	-0.1920484
0.7730275	-0.1380418	-0.2163104	-0.2163104
0.7590742	-0.1585363	-0.2404213	-0.2404213
0.7450005	-0.1786782	-0.264431	-0.264431
0.7308209	-0.1985701	-0.2883861	-0.2883861
0.7165489	-0.2184422	-0.3123299	-0.3123299
0.7021977	-0.2387469	-0.3363031	-0.3363031
0.6877799	-0.2603128	-0.3603431	-0.3603431
0.6733075	-0.2845767	-0.3844852	-0.3844852
0.6587922	-0.3138451	-0.4087616	-0.4087616
0.6442453	-0.3515596	-0.4332021	-0.4332021
0.6296777	-0.4026759	-0.4578339	-0.4578339

Figura A.8 Presentación de los datos exportados.

# Anexo B

## Método de Green

Es un método numérico usado ampliamente en la resolución de problemas ingenieriles basado en la fórmula de Green y la discretización del entorno. Según esta fórmula, dadas dos funciones armónicas  $\Phi$  y  $\Psi$  acotadas en un dominio conexo  $\Omega$  cuya frontera  $\Sigma$  es continua a trozos, se cumple ec. (B.1). [6]

$$\int_{\Sigma} (\Psi \nabla \Phi - \Phi \nabla \Psi) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_{\Omega} (\Psi \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 \Psi) \, d\omega = 0 \quad (B.1)$$

Aplicado al problema aerodinámico tratado en este proyecto, resuelve el problema (ec. (B.2)) expresando el valor del potencial sobre cualquier punto de la superficie del objeto como la superposición de una distribución continua de dos tipos de soluciones básicas: fuentes situadas sobre la superficie,  $\psi_j = \ln \|\vec{x} - \vec{x}_j\|$ , donde  $\vec{x}_j \in \Sigma_s$  y dobletes situados sobre la superficie del objeto y orientados según la normal exterior al mismo,  $\vec{n} \cdot \nabla \psi_j$ . Para llegar a esa expresión (ec. (B.3)), se parte de la integral de Green y se evalúa en la superficie  $\Sigma_c = \Sigma_{\infty} \cup \Sigma_e \cup \Sigma_s \cup \Sigma_{e+} \cup \Sigma_{e-}$ , mostrada en la fig. B.1. La demostración completa del cálculo de la integral de superficie  $\Sigma_c$  para el potencial de velocidades  $\phi$ , puede ser consultada en *Introducción a la aerodinámica potencial* [11].

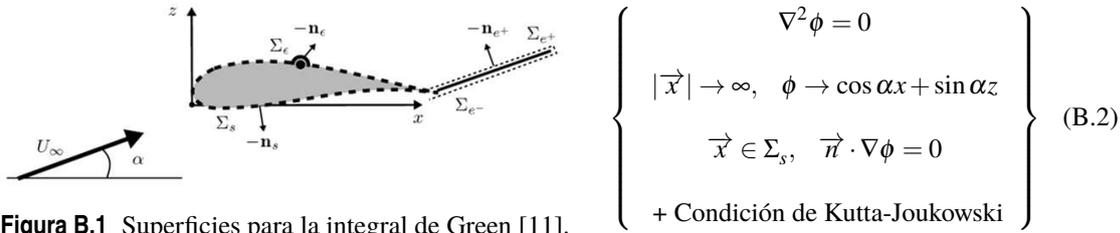
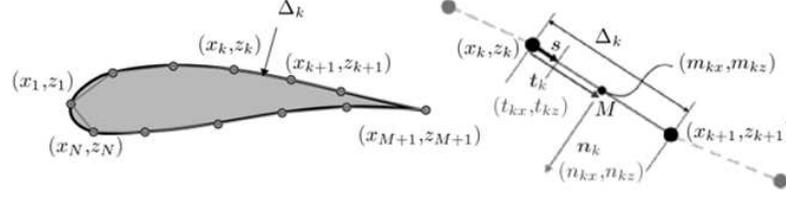


Figura B.1 Superficies para la integral de Green [11].

La ecuación de Green para el cálculo del potencial se expresa como:

$$\phi(x_j, z_j) = 2(x_j \cos \alpha + z_j \sin \alpha) + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_s} \phi(x, z) \frac{(\vec{x} - \vec{x}_j) \cdot \vec{n}}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^2} d\sigma + \frac{\Gamma}{\pi} \int_{\Sigma_e} \frac{(\vec{x} - \vec{x}_j) \cdot (-\vec{k} \cos \alpha + \vec{i} \sin \alpha)}{|\vec{x} - \vec{x}_j|^2} d\sigma \quad (B.3)$$

donde  $\vec{x}_j = x_j \vec{i} + z_j \vec{k}$  es el punto sobre la superficie del perfil  $\Sigma_s$  sobre el que se sitúa el doblete y por tanto, es un punto fijo durante la integración, mientras que  $\vec{x} = x \vec{i} + z \vec{k}$  es un vector de posición sobre  $\Sigma_s$  y  $\Sigma_e$  que sí varía en la integración. Como puede comprobarse, el potencial está expresado como la suma de los potenciales de una distribución continua de dobletes orientados según la normal de las superficies  $\Sigma_s$  y  $\Sigma_e$  de intensidades  $\phi(x, z)$  y  $\Gamma$ , respectivamente. Para el caso de flujo potencial, la intensidad de las fuentes es nula, debido a que se cumple la condición de impenetrabilidad.[11]



**Figura B.2** Discretización de la geometría en  $N$  paneles. Definición de punto medio y vectores tangente y normal de un panel  $k$  [11].

Las  $N$  ecuaciones de la expresión (B.3), una por cada doblete, forman el sistema de ecuaciones que se utiliza para resolver numéricamente el flujo potencial alrededor de un sólido de geometría dada. En primer lugar se discretiza la superficie del objeto  $\Sigma_s$  en  $N$  paneles. Cada panel  $k$ , tiene una longitud  $\Delta_k$  definida desde el nodo  $k$  hasta el nodo  $k+1$  (fig. B.2). Se definen  $N+1$  nodos, donde el nodo  $N+1$  se hace coincidir con el primer nodo, consiguiendo así los  $N$  paneles. Conociendo el vector posición de estos nodos,  $\vec{r}_k = x_k \vec{i} + z_k \vec{k}$ , se puede calcular el punto medio y la longitud de cada panel  $k$  como:

$$\vec{m}_k = m_{kx} \vec{i} + m_{kz} \vec{k} = \frac{x_{k+1} + x_k}{2} \vec{i} + \frac{z_{k+1} + z_k}{2} \vec{k}$$

$$\Delta_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (z_{k+1} - z_k)^2}$$

, además de los vectores tangente y normal:

$$\vec{t}_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta_k} \vec{i} + \frac{z_{k+1} - z_k}{\Delta_k} \vec{k}$$

$$\vec{n}_k = \frac{z_{k+1} - z_k}{\Delta_k} \vec{i} - \frac{x_{k+1} - x_k}{\Delta_k} \vec{k}$$

, e incluso la distancia entre puntos medios:

$$\Delta'_k = \sqrt{(m_{(k+1)x} - m_{kx})^2 + (m_{(k+1)z} - m_{kz})^2}$$

Colocando los  $N$  dobletes en los puntos medios de cada panel  $k$ , y suponiendo que el valor del potencial  $\phi_k$  es constante a lo largo de cada panel, la ecuación integral pasa a expresarse como:

$$\phi_j = 2(m_{jx} \cos \alpha + m_{jz} \sin \alpha) + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^N \phi_k \int_0^{\Delta_k} \frac{(\vec{x} - \vec{m}_j) \cdot \vec{n}_k}{|\vec{x} - \vec{m}_j|^2} ds + \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\vec{x} - \vec{m}_j) \cdot (-\vec{k} \cos \alpha + \vec{i} \sin \alpha)}{|\vec{x} - \vec{m}_j|^2} ds \quad (\text{B.4})$$

donde el valor de las integrales es:

$$\text{si } k = j, \quad \int_0^{\Delta_k} \frac{(\vec{x} - \vec{m}_j) \cdot \vec{n}_k}{|\vec{x} - \vec{m}_j|^2} ds = 0, \quad (\vec{x} - \vec{m}_k) \perp \vec{n}_k$$

$$\text{si } k \neq j, \quad \int_0^{\Delta_k} \frac{(\vec{x} - \vec{m}_j) \cdot \vec{n}_k}{|\vec{x} - \vec{m}_j|^2} ds = \arctan \left[ \frac{\Delta_k + (\vec{r}_k - \vec{m}_j) \cdot \vec{t}_k}{(\vec{r}_k - \vec{m}_j) \cdot \vec{n}_k} \right] - \arctan \left[ \frac{(\vec{r}_k - \vec{m}_j) \cdot \vec{t}_k}{(\vec{r}_k - \vec{m}_j) \cdot \vec{n}_k} \right]$$

$$\int_0^\infty \frac{(\vec{x} - \vec{m}_j) \cdot (-\vec{k} \cos \alpha + \vec{i} \sin \alpha)}{|\vec{x} - \vec{m}_j|^2} ds = \left[ \frac{\pi}{2} \text{sign}[(1 - m_{jx}) \sin \alpha + m_{jz} \cos \alpha] - \arctan \left( \frac{(1 - m_{jx}) \cos \alpha - m_{jz} \sin \alpha}{(1 - m_{jx}) \sin \alpha + m_{jz} \cos \alpha} \right) \right]$$

Cabe destacar que se cuenta con  $N$  ecuaciones, pero el sistema tiene  $N + 1$  incógnitas, los  $N$  potenciales  $\phi_j$  y el valor de la circulación  $\Gamma$ . Por lo tanto es necesario buscar una ecuación adicional para que el sistema quede cerrado. Dicha condición adicional es la condición de Kutta, que impone que la velocidad en el borde de salida tiene que ser igual cuando se calcule por el intradós que por el extradós. Considerando que el borde de salida se encuentra en el nodo  $M + 1$ , se debe cumplir que:

$$\frac{\phi_M - \phi_{M-1}}{\Delta'_{M-1}} = \frac{\phi_{M+1} - \phi_{M+2}}{\Delta'_{M+1}} \quad (\text{B.5})$$

En resumen, el método de Green permite hallar el potencial sobre la superficie del perfil mediante la resolución del siguiente sistema lineal de  $N + 1$  ecuaciones ( $j \in [1, N]$ ) para las  $N + 1$  incógnitas  $[\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_N, \Gamma]$ , que son los valores del potencial  $\phi_k$  en los puntos medios de cada panel y la circulación  $\Gamma$ . [11]

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N (\delta_{jk} - R_{jk}) \phi_k - \Gamma f_j = 2(m_{jx} \cos \alpha + m_{jz} \sin \alpha) \\ \frac{\phi_M - \phi_{M-1}}{\Delta'_{M-1}} - \frac{\phi_{M+1} - \phi_{M+2}}{\Delta'_{M+1}} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

donde:

$$R_{jk} = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left( \arctan \left[ \frac{b_{jk}^s + \Delta_k}{b_{jk}^n} \right] - \arctan \left[ \frac{b_{jk}^s}{b_{jk}^n} \right] \right) & k \neq j \\ 0 & k = j \end{cases}$$

con

$$b_{jk}^s = (\vec{r}_k - \vec{m}_j) \cdot \vec{t}_k \quad \text{y} \quad b_{jk}^n = (\vec{r}_k - \vec{m}_j) \cdot \vec{n}_k$$

y

$$f_j = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\pi}{2} \text{sign}[(1 - m_{jx}) \sin \alpha + m_{jz} \cos \alpha] - \arctan \left( \frac{(1 - m_{jx}) \cos \alpha - m_{jz} \sin \alpha}{(1 - m_{jx}) \sin \alpha + m_{jz} \cos \alpha} \right) \right]$$

Una vez resuelto el sistema, los coeficientes de presiones sobre el perfil se obtienen como:

$$C_p(\vec{r}_k) = 1 - \left( \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\Delta'_{k-1}} \right)^2 \quad (\text{B.7})$$

El código asociado a la implementación de la resolución de este sistema se encuentra disponible en el Apéndice E de *Introducción a la aerodinámica potencial* [11].



# Anexo C

## Código Met. Vortex-Lattice

---

```
% =====  
%           RESOLUCION FLUJO POTENCIAL   --->  VORTEX LATTICE  
% =====  
% Función que resuelve el problema simétrico y antisimétrico con flujo  
% potencial, de forma inversa. Partiendo de los coeficientes de presiones  
% de extradós e intradós, el objetivo es conocer cual es la forma del perfil.  
%  
% Tanto para resolver el problema de ESPESOR como el de CURVATURA, se  
% emplea Vortex-Lattice para calcular las derivadas de espesor y curvatura,  
% lo que permite determinar la geometria del perfil.  
%  
% En el caso del problema de ESPESOR se calcula la intensidad de las  
% fuentes, ya que están relacionadas con el cambio de la geometría. Como  
% dato conocido, se cuenta con la velocidad de perturbación horizontal,  
% gracias a su relación con la distribucion de presiones.  
%  
% Por otro lado, para el problema de CURVATURA, la distribución de  
% presiones nos indica cual es la intensidad de los torbellinos, teniendo  
% que calcular las velocidades de perturbación verticales, las cuales están  
% relacionadas con la derivada de la curvatura.  
%  
%=====  
%  
% Parametros de entrada  
%-----  
% Re           Reynolds  
% s           Vector adimensional de coordenadas horizontal donde están  
%             medidos Cp [0 - 1]  
% Cp_extradós Distribución de presiones en el extradós  
% Cp_intradós Distribución de presiones en el intradós  
%  
% Parámetros de salida  
%-----  
% zpE         Geometría de extradós  
% zpI         Geometría de intradós  
% X           Vector adimensional de coordenadas horizontales donde esta  
%             calculada la geometría del perfil  
%  
%=====
```

function [zpE,zpI,X]=fp\_VL(Re,s,Cp\_extradós,Cp\_intradós)

```

%% Parametros iniciales del problema

%%Parametros del perfil
c=1; % Cuerda del perfil [m]
N=200; % Número de paneles
h=c/N; % Long de cada panel [m]

disp([' Vortex-Lattice --> N° Paneles = ', num2str(N) ])

%%Puntos de centro de torbellinos/fuentes Xgj de cada panel
xg(1:N)=((1:N)-1)*h+h/4;
%%Puntos de colocacion Xci
xc(1:N)=xg+h/2;

%%Condiciones de la corriente incidente [Sistema internacional]
rhoinf=1.225; % Densidad [kg/m^3] [Aire]
nu=1.5e-5; % Viscosidad/Densidad [m^2/s] [Aire]
Uinf=Re*nu/c; % Velocidad [m/s]

%% Problema Simétrico o de Espesor

CpI_xc=interp1(s,Cp_intrados,xc); % Interpolación de Cp para intradós y
CpE_xc=interp1(s,Cp_extrados,xc); % extradós en los puntos de colocación Xci
u_sim=-Uinf/4*(CpI_xc+CpE_xc); % Velocidad de perturbación simétrica

% Matriz Aij
for i=1:N
for j=1:N
A(i,j)=h/pi*Uinf/(xc(i)-xg(j));
end
end
%%Término independiente bi
b(1:N,1)=u_sim';

%%Resolucion del sistema
Dze(1:N,1)=A\b; % Derivada del espesor en los puntos Xgj

FDze = @(x)interp1(xg,Dze,x); % Función para interpolar la Dze
for j=1:N
ze_g(j)=quad(FDze,0.0025,xg(j)); % Espesor en los puntos Xgj
end

ze=interp1(xg,ze_g,xc); % Espesor en los puntos Xci
ze(N)=ze_g(N);

%% Problema Antisimétrico o de Curvatura

CpI_xg=interp1(s,Cp_intrados,xg); % Interpolación de Cp para intradós y
CpE_xg=interp1(s,Cp_extrados,xg); % extradós en los puntos de colocación Xgj

gamma_ext=-Uinf/2*(CpE_xg-CpI_xg); % Densidades de circulación en los puntos Xgj

% Matriz Bij
for i=1:N
for j=1:N
B(i,j)=h/2/pi/(xg(j)-xc(i));
end
end

```

---

```
end

Dzc=B*gamma_ext'/Uinf;           % Derivada de la curvatura en los puntos Xci

FDzc = @(x)interp1(xc,Dzc,x);    % Función para interpolar la Dzc
for i=1:N
zc(i)=quad(FDzc,0.0075,xc(i));   % Curvatura en los puntos Xci
end

%% Problema completo. Determinación de la geometría
X=xc;
zpE=zc+ze; % Extradós
zpI=zc-ze; % Intradós
```



# Anexo D

## Código Series de Fourier

---

```
% =====  
% RESOLUCION FLUJO POTENCIAL ---> SERIE DE FOURIER  
% =====  
% Función que resuelve el problema simétrico y antisimétrico con flujo  
% potencial, de forma inversa. Partiendo de los coeficientes de presiones  
% de extradós e intradós, el objetivo es conocer cual es la forma del perfil.  
%  
% Para resolver el problema de ESPESOR se decide aproximar la geometría por  
% una serie de Fourier, de forma que las incógnitas pasen a ser los  
% coeficientes a_n.  
%  
% Respecto al problema de CURVATURA, se mantiene la forma de resolución  
% basada en el método de los paneles.  
%  
%=====  
%  
% Parámetros de entrada  
%-----  
% Re Reynolds  
% s Vector adimensional de coordenadas horizontal donde estan  
% medidos Cp [0 - 1]  
% Cp_extradós Distribución de presiones en el extradós  
% Cp_intradós Distribución de presiones en el intradós  
%  
% Parámetros de salida  
%-----  
% zpE Geometría de extradós  
% zpI Geometría de intradós  
% X Vector adimensional de coordenadas horizontales donde está  
% calculada la geometría del perfil  
%  
%=====
```

```
function [zpE,zpI,X]=fp_Fourier(Re,s,Cp_extradós,Cp_intradós)
```

```
%% Parametros iniciales del problema
```

```
%Parametros del perfil  
c=1; % Cuerda del perfil [m]  
M=25; % Número de coeficientes a_n de la Serie de Fourier  
N=200; % Número de paneles  
h=c/N; % Long de cada panel [m]
```

```

disp([' Serie de Fourier --> A_n= ', num2str(M), ' y N° Paneles = ', num2str(N) ])

%Puntos de centro de torbellinos/fuentes Xgj de cada panel
xg(1:N)=((1:N)-1)*h+h/4;
%Puntos de colocacion Xci
xc(1:N)=xg+h/2;

%Condiciones de la corriente incidente [Sistema internacional]
rhoinf=1.225; % Densidad [kg/m^3] [Aire]
nu=1.5e-5; % Viscosidad/Densidad [m^2/s] [Aire]
Uinf=Re*nu/c; % Velocidad [m/s]

%% Problema Simétrico o de Espesor

theta=acos(1-2*s/c); % Ángulo theta asociado a los puntos s
u_sim=-Uinf/4*(Cp_intrados+Cp_extrados); % Velocidad de perturbación simétrica
% en los puntos s ó theta

% Cálculo de los a_n
for i=1:M
Int = @(x)interp1(theta,u_sim,x).*sin(i*x).*sin(x); % Funcion a integrar en theta
a_n(i)=c/(i*pi*Uinf)*quadgk(Int,0,pi); % Integral para el cálculo de a_n
end

T=acos(1-2*xc/c); % Theta asociado a los puntos Xci

ze=zeros(1,length(T));
for i=1:M % Construcción del espesor según
ze=ze+a_n(i)*sin(i*T); % la serie de Fourier
end

%% Problema Antisimétrico o de Curvatura

CpI_xg=interp1(s,Cp_intrados,xg); % Interpolación de Cp para intradós y
CpE_xg=interp1(s,Cp_extrados,xg); % extradós en los puntos de colocación Xgj

gamma_ext=-Uinf/2*(CpE_xg-CpI_xg); % Densidades de circulación en los puntos Xgj

% Matriz Bij
for i=1:N
for j=1:N
B(i,j)=h/2/pi/(xg(j)-xc(i));
end
end

Dzc=B*gamma_ext'/Uinf; % Derivada de la curvatura en los puntos Xci

FDzc = @(x)interp1(xc,Dzc,x); % Función para interpolar la Dzc
for i=1:N
zc(i)=quadgk(FDzc,0.0075,xc(i)); % Curvatura en los puntos Xci
end

%% Problema completo. Determinación de la geometría
X=xc;
zpE=zc+ze; % Extradós
zpI=zc-ze; % Intradós

```

# Anexo E

## Código Inversión de Söhngen

---

```

% =====
%           RESOLUCIÓN FLUJO POTENCIAL   --->  SÖHNGEN
% =====
% Función que resuelve el problema simétrico y antisimétrico con flujo
% potencial, de forma inversa. Partiendo de los coeficientes de presiones
% de extradós e intradós, el objetivo es conocer cual es la forma del perfil.
%
% Para resolver el problema de ESPESOR se utilizara la fórmula de inversión
% de Söhngen, la cual permite invertir el calculo y sacar la incógnita
% fuera del integrando.
%
% Respecto al problema de CURVATURA, se mantiene la forma de resolución
% basada en el método de los paneles.
%
%=====
%
% Parámetros de entrada
%-----
% Re           Reynolds
% s            Vector adimensional de coordenadas horizontal donde están
%              medidos Cp [0 - 1]
% Cp_extradós  Distribución de presiones en el extradós
% Cp_intradós  Distribución de presiones en el intradós
%
% Parámetros de salida
%-----
% zpE          Geometría de extradós
% zpI          Geometría de intradós
% X            Vector adimensional de coordenadas horizontales donde está
%              calculada la geometría del perfil
%
%=====

function [zpE,zpI,X]=fp_Sonhgen(Re,s,Cp_extradós,Cp_intradós)

%% Parámetros iniciales del problema

%Parámetros del perfil
c=1;                % Cuerda del perfil      [m]
N=200;              % Número de paneles

disp([' I. Söhngen -->  Nº Paneles = ', num2str(N) ])

```

```

%Condiciones de la corriente incidente [Sistema internacional]
rhoinf=1.225; % Densidad [kg/m^3] [Aire]
nu=1.5e-5; % Viscosidad/Densidad [m^2/s] [Aire]
Uinf=Re*nu/c; % Velocidad [m/s]

%% Problema Simétrico o de Espesor

% Mallado para el problema de espesor.
h=sqrt(2)/N; % Long de cada panel [m]
ng(1:N,1)=((1:N)-1)*h+h/4; % Puntos de integración Ngj de cada panel
nc(1:N,1)=ng+h/2; % Puntos de colocación Nci

ng=flipud(ng); % Se le da la vuelta al vector para que se
nc=flipud(nc); % corresponda con X desde 0 hasta 1.

xg=1-ng.^2/2; % Para poder interpolar en Cp, tengo que
xc=1-nc.^2/2; % conocer los valores de Xc que corresponden a Nc

CpI_xc=interp1(s,Cp_intrados,xc); % Interpolación de Cp para intradós y
CpE_xc=interp1(s,Cp_extradados,xc); % extradós en los puntos de colocación Xci

CpI_nc=CpI_xc;
CpE_nc=CpE_xc;

clear CpI_xc CpE_xc

f_nc=(CpI_nc+CpE_nc)/8; % Función f(nc_i)

% Matriz Aij % Para calcular el sumatorio
for i=1:N
for j=1:N
f_ng=interp1(nc,f_nc,ng(j));
A(i,j)=2*h*sqrt(2-ng(j)^2)*(f_ng-f_nc(i))/((nc(i)-ng(j))*(nc(i)+ng(j)));
end
end

A(:,N)=A(:,N-1); % Puesto el último punto xg(1) queda por delante de xc(1),
% no se puede interpolar, lo approximo por el valor del penúltimo panel

S=sum(A,2); % Sumatorio para nc_i

Raiz=2/pi*sqrt(nc.^2./(2-nc.^2));

Dze(1:N,1)=Raiz.*(S+f_nc*pi); % Derivada del espesor en los puntos nc_i

Dze=-Dze;

% IMPORTANTE: debido a la fórmula de inversión, el valor de la derivada está
% calculado en Nc, que va desde 0 hasta sqrt(2), si pasamos al dominio del
% perfil, esto se corresponde con Xc desde 1 hasta 0, por lo tanto, lo que
% se obtiene es el valor inverso de la pendiente y hay que cambiarlo.

FDze = @(x)interp1(xc,Dze,x); % Función para interpolar la Dze
for j=1:N-1

```

```

ze_g(j)=quadgk(FDze,xc(1),xg(j));      % Espesor en los puntos Xgj
end

ze_g(N)=ze_g(N-2)+(ze_g(N-1)...      % Aproximación por pendiente constante
-ze_g(N-2))*(xc(N-1)-xc(N-2))/(xc(N-1)-xc(N-2));

ze=interp1(xg,ze_g,xc);              % Espesor en los puntos Xci

ze(1)=ze(3)+(ze(2)...                % Aproximación por pendiente constante
-ze(3))*(xc(1)-xc(3))/(xc(2)-xc(3));

%% Problema Antisimétrico o de Curvatura

% Mallado para el problema de curvatura
h=c/N;
xg_c(1:N)=((1:N)-1)*h+h/4;           % Puntos de centro de torbellinos Xgj
xc_c(1:N)=xg_c+h/2;                 % Puntos de colocacion Xci

CpI_xg=interp1(s,Cp_intrados,xg_c);  % Interpolación de Cp para intradós y
CpE_xg=interp1(s,Cp_extradós,xg_c);  % extradós en los puntos de colocación Xgj

gamma_ext=-Uinf/2*(CpE_xg-CpI_xg);   % Densidades de circulación en los puntos Xgj

% Matriz Bij
for i=1:N
for j=1:N
B(i,j)=h/2/pi/(xg_c(j)-xc_c(i));
end
end

Dzc=B*gamma_ext'/Uinf;              % Derivada de la curvatura en los puntos Xci

FDzc = @(x)interp1(xc_c,Dzc,x);     % Función para interpolar la Dzc
for i=1:N
zc(i)=quad(FDzc,xc_c(1),xc_c(i));   % Curvatura en los puntos Xci
end

zc=interp1(xc_c,zc,xc);

for i=1:N
if xc(i)<xc_c(1)
zc(1)=zc(3)+(zc(2)...              % Aproximación por pendiente constante
-zc(3))*(xc(1)-xc(3))/(xc(2)-xc(3));
elseif xc(i)>xc_c(N)
zc(i)=zc(i-2)+(zc(i-1)...          % Aproximación por pendiente constante
-zc(i-2))*(xc(i-1)-xc(i-2))/(xc(i-1)-xc(i-2));
end
end

%% Problema completo. Determinación de la geometría
X=xc;
zpE=zc+ze;    % Extradós
zpI=zc-ze;    % Intradós

```



# Bibliografía

---

- [1] *The naca airfoil series*, <http://people.clarkson.edu/~pmarzoc/AE429/The%20NACA%20airfoil%20series.pdf>.
- [2] Aircraft Aerodynamics and Design Group Stanford University, *Airfoil design methods*, <http://adg.stanford.edu/aa241/airfoils/airfoildesign.html>.
- [3] ———, *History of airfoil development*, <http://adg.stanford.edu/aa241/airfoils/airfoilhistory.html>.
- [4] M. Nili Ahmadabadi, F. Ghadak, and Mohammadi M., *Subsonic and transonic airfoil inverse design via ball-spine algorithm*, Elsevier, Computers and Fluids (2013).
- [5] J.D Anderson, *Fundamentals of aerodynamics*, 4<sup>a</sup> ed., McGraw-Hill, 2007.
- [6] Antonio Barrero Ripoll and Miguel Pérez-Saborid Sánchez Pastor, *Fundamentos y aplicaciones de la mecánica de fluidos*, McGraw-Hill.
- [7] L. Di Angelo and P. Di Stefano, *An evolutionary geometric primitive for automatic design synthesis of functional shapes: The case of airfoils*, Elsevier, Advances in Engineering Software (2014).
- [8] Milton Van Dyke, *An album of fluid motion*, 11<sup>a</sup> ed., The parabolic press, 2007.
- [9] R. Eppler and Dan M. Somers, *A computer program for the design and analysis of low-speed airfoils*, NASA TM 80210, 1980.
- [10] Lucas Fernández-Peña Mollá, *Xflr5 v4.17 software de análisis de perfiles, planos y aviones: estudio y diseño de un cn-235*, Universidad Carlos III de Madrid, 2012.
- [11] José Manue Gordillo Arias de Saavedra and Guillaume Riboux Acher, *Introducción a la aerodinámica potencial*, 1<sup>a</sup> ed., Paraninfo, 2012.
- [12] Ira H. Abbott and Albert E. Von Doenhoff, *Summary of airfoil*, NACA Report N° 824, 1945.
- [13] Anibal Isidoro Carmona, *Aerodinámica y actuaciones del avión*, 12<sup>a</sup> ed., Thomsom-Paraninfo, 2004.
- [14] Fernando Izaurieta and Carlos Saavedra, *Redes neuronales artificiales*, Charlas de fisica (1999).
- [15] Joseph Katz and Allen Plotkin, *Low-speed aerodynamics*, 2<sup>a</sup> ed., Cambridge University Press.
- [16] Jeffrey Keith Jepson, *Enhancement to the inverse design of low speed natural laminar flow airfoils*, Master's thesis, North Carolina State University. Aerospace Engineering. MSc Thesis, 2003.
- [17] Alfonso Mateos Andaluz, *Algoritmos evolutivos y algoritmos genéticos*, Universidad Carlos III de Madrid.
- [18] Miguel Ángel Muñoz, *Manual de vuelo*, <http://www.manualvuelo.com>.
- [19] UIUC Applied Aerodynamics Group. Department of Aerospace Engineering, *Uiuc airfoil coordinates database*, [http://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord\\_database.html](http://m-selig.ae.illinois.edu/ads/coord_database.html).

- [20] Gustavo H. Scarpin, *Aerodinamica de perfiles*, Instituto Universitario Aeronáutico.
- [21] Dan M Somers, *Eppler airfoil design and analysis code*, <http://www.airfoils.com/eppler.htm>.
- [22] ———, *Subsonic airfoil design*, <http://www.airfoils.com/airfoil.htm>.
- [23] Theodore Theodorsen, *Theory of wing section of arbitrary shape*, NACA Report Nº 411, 1931.