

Trabajo Fin de Grado

Grado en Ingeniería Aeroespacial

Modelización de problemas de interacción fluido-estructura con elementos finitos de orden elevado

Autor: Álvaro Pina Macedo

Tutor: Antonio Romero Ordóñez

Dep. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Modelización de problemas de interacción fluido-estructura con elementos finitos de orden elevado

Autor:

Álvaro Pina Macedo

Tutor:

Antonio Romero Ordóñez

Dep. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015

Proyecto Fin de Carrera: Modelización de problemas de interacción fluido-estructura con elementos finitos de orden elevado

Autor: Álvaro Pina Macedo

Tutor: Antonio Romero Ordóñez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2015

El Secretario del Tribunal

| | |
|-------------------------------------------------------------------------|------------|
| Índice | vii |
| Índice de Tablas | ix |
| Índice de Figuras | xi |
| Notación | xi |
| 1 Introducción | 1 |
| 1.1. <i>Motivación</i> | 2 |
| 1.2. <i>Objetivos principales</i> | 2 |
| 1.3. <i>Contribuciones originales</i> | 4 |
| 2 Introducción al método de los elementos finitos | 5 |
| 2.1. <i>Formulación general del problema</i> | 7 |
| 2.1.1. <i>Formulación del problema fluido</i> | 8 |
| 2.1.2. <i>Formulación del problema sólido</i> | 11 |
| 2.1.3. <i>Formulación del problema de interacción fluido-estructura</i> | 18 |
| 3 Funciones de forma | 21 |
| 3.1. <i>Introducción</i> | 21 |
| 3.2. <i>Interpolación nodal y Propiedades de las funciones de forma</i> | 22 |
| 3.3. <i>Transformación de coordenadas globales a naturales</i> | 23 |
| 3.3.1. <i>Elementos isoparamétricos</i> | 24 |
| 3.4. <i>Funciones de forma de elementos unidimensionales</i> | 26 |
| 3.4.1. <i>Elementos de Lagrange</i> | 26 |
| 3.4.2. <i>Elementos de Hermite</i> | 29 |
| 3.5. <i>Funciones de forma de elementos bidimensionales</i> | 31 |
| 3.5.1. <i>Elemento cuadrilátero</i> | 31 |
| 3.6. <i>Integración numérica</i> | 38 |
| 3.6.1. <i>Integración numérica unidimensional</i> | 38 |
| 3.6.2. <i>Integración numérica bidimensional</i> | 39 |
| 3.6.3. <i>Selección del orden de integración requerido</i> | 40 |
| 3.7. <i>Implementación numérica</i> | 40 |
| 4 Requisitos para la convergencia de la solución | 43 |
| 4.1. <i>Condición de continuidad</i> | 43 |
| 4.2. <i>Condición de derivabilidad</i> | 43 |
| 4.3. <i>Condición de Integrabilidad</i> | 43 |
| 4.4. <i>Criterio de la parcela</i> | 44 |
| 4.5. <i>Condición de compatibilidad</i> | 44 |
| 4.6. <i>Condición de polinomio completo</i> | 45 |
| 4.7. <i>Condición de invariancia</i> | 45 |
| 5 Características de la solución obtenida por el MEF | 47 |
| 5.1. <i>Continuidad de desplazamientos</i> | 47 |
| 5.2. <i>Equilibrio en nodos</i> | 47 |
| 5.3. <i>Equilibrio en contornos entre elementos</i> | 47 |

| | | |
|----------|-------------------------------------------------------------------|-----------|
| 5.4. | <i>Condición de contorno en desplazamientos</i> | 48 |
| 5.5. | <i>Tracciones impuestas en el contorno</i> | 48 |
| 5.6. | <i>Equilibrio en el interior de los elementos</i> | 48 |
| 6 | Clasificación de errores en la solución a partir del MEF | 49 |
| 6.1. | <i>Error de discretización</i> | 49 |
| 6.2. | <i>Error de aproximación a la geometría</i> | 50 |
| 6.3. | <i>Error de integración numérica</i> | 50 |
| 6.4. | <i>Error en la solución del sistema de ecuaciones</i> | 50 |
| 7 | Ejemplo práctico para la aplicación de la técnica descrita | 51 |
| 7.1. | <i>Solución del problema fluido</i> | 53 |
| 7.1.1. | Modos de vibración y frecuencias naturales | 54 |
| 7.1.2. | Estudio paramétrico del número de puntos de Gauss necesario | 56 |
| 7.1.3. | Estudio paramétrico del número de elementos por longitud de onda | 59 |
| 7.2. | <i>Solución del problema sólido</i> | 62 |
| 7.2.1. | Modos de vibración y frecuencias de excitación | 62 |
| 7.2.2. | Estudio paramétrico del número de puntos de Gauss | 63 |
| 7.2.3. | Estudio paramétrico del número de elementos por longitud de onda | 65 |
| 7.3. | <i>Solución del problema de interacción fluido-estructura</i> | 69 |
| 7.4. | <i>Estudio de convergencia de la solución</i> | 71 |
| 7.5. | <i>Conclusiones</i> | 72 |
| 8 | Casos prácticos | 75 |
| 8.1. | <i>Problema del fuselaje de un avión</i> | 75 |
| 8.2. | <i>Problema de la cavidad con barrera rígida</i> | 79 |
| 8.3. | <i>Problema de la cavidad con barrera flexible</i> | 81 |
| 9 | Conclusiones y Desarrollos futuros | 85 |
| | Referencias | 87 |

Índice de Tablas

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabla 3-1 Puntos de Gauss para las 8 primeras cuadraturas | 39 |
| Tabla 7-1 Frecuencias naturales del problema fluido para los cuatro tipos de elementos. [Hz] | 56 |
| Tabla 7-2 Número de puntos necesarios para la integración según el orden del elemento | 58 |
| Tabla 7-3 Número de elementos por eje para cada valor de $N\lambda$ en el caso del modo 1 | 60 |
| Tabla 7-4 Número de elementos por eje para cada valor de $N\lambda$ en el caso del modo 9 | 61 |
| Tabla 7-5 Frecuencias naturales del problema sólido para los cuatro tipos de elementos. [Hz] | 63 |
| Tabla 7-6 Número de elementos totales para cada valor de $N\lambda$ en el caso del modo 1 | 67 |
| Tabla 7-7 Número de elementos totales para cada valor de $N\lambda$ en el caso del modo 9 | 68 |
| Tabla 7-8 Frecuencias naturales del problema de interacción. [Hz] | 70 |
| Tabla 7-9 Frecuencias para diferentes órdenes del elemento. Convergencia a la solución exacta. [Hz] | 71 |
| Tabla 8-1 Frecuencias naturales del caso del fuselaje. [Hz] | 79 |
| Tabla 8-2 Frecuencias naturales del caso de la barrera rígida. [Hz] | 81 |
| Tabla 8-3 Frecuencias naturales del caso de la barrera flexible. [Hz] | 83 |

Índice de Figuras

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1-1. Elementos bidimensionales: triangulares y rectangulares | 3 |
| Figura 1-2. Técnicas de adaptabilidad | 3 |
| Figura 2-1. Ejemplos de aplicación del MEF | 6 |
| Figura 2-2. Problema para resolver con MEF | 6 |
| Figura 2-3. Dominios dados en el problema de acoplamiento | 7 |
| Figura 2-4. Elementos de volumen y elementos de lámina | 11 |
| Figura 3-1. Funciones de forma para elemento 1D y 2D | 23 |
| Figura 3-2. Transformación de coordenadas naturales a globales | 23 |
| Figura 3-3. Familia de elementos unidimensionales | 26 |
| Figura 3-4. Elemento lineal, cuadrático, cúbico y cuártico | 26 |
| Figura 3-5. Funciones de forma elemento lineal de Lagrange | 27 |
| Figura 3-6. Funciones de forma cuadráticas de Lagrange | 27 |
| Figura 3-7. Funciones de forma cúbicas de Lagrange | 28 |
| Figura 3-8. Funciones de forma cuárticas de Lagrange | 29 |
| Figura 3-9. Funciones de forma lineales de Hermite | 30 |
| Figura 3-10. Funciones de forma cuadráticos de Hermite | 30 |
| Figura 3-11. Funciones de forma cúbicas de Hermite | 30 |
| Figura 3-12. Funciones de forma lineales de Hermite | 31 |
| Figura 3-13. Distribución de nodos en elemento lagrangiano | 32 |
| Figura 3-14. Triangulo de Pascal para el elemento cuadrático | 32 |
| Figura 3-15. Elemento cuadrilátero de orden lineal | 33 |
| Figura 3-16. Funciones de forma elemento lineal | 34 |
| Figura 3-17. Elemento cuadrilátero de orden cuadrático | 34 |
| Figura 3-18. Funciones de forma elemento cuadrático | 35 |
| Figura 3-19. Elemento cuadrilátero de orden cúbico | 36 |
| Figura 3-20. Funciones de forma elemento cúbico | 37 |
| Figura 3-21. Funciones de forma elemento cuártico | 38 |
| Figura 3-22. Puntos de Gauss para elemento cuadriláteros | 39 |
| Figura 3-23. Número de puntos para integración exacta y número de puntos mínimos | 40 |
| Figura 6-1. Métodos de adaptabilidad h | 49 |
| Figura 7-1. Problema de la cavidad con tapa [1] | 51 |
| Figura 7-2. Malla de elementos lineales | 54 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 7-3.Malla para el resto de elementos | 54 |
| Figura 7-4.Modos de vibración del fluido | 55 |
| Figura 7-5.Estudio paramétrico del número de puntos de Gauss (Modo1) | 57 |
| Figura 7-6. Estudio paramétrico adimensionalizado del número de puntos de Gauss (Modo1) | 59 |
| Figura 7-7.Estudio paramétrico del número de elementos por λ (Modo 1) | 60 |
| Figura 7-8.Estudio paramétrico del número de elementos por λ (Modo 9) | 61 |
| Figura 7-9.Malla del problema sólido para elementos de orden superior al lineal | 62 |
| Figura 7-10.Modos de vibración del sólido | 63 |
| Figura 7-11.Estudio paramétrico del número de puntos de Gauss (Modo1) | 64 |
| Figura 7-12.Estudio paramétrico adimensionalizado del número de puntos de Gauss (Modo1) | 65 |
| Figura 7-13.Estudio paramétrico del número de elementos por λ (Modo 1) | 67 |
| Figura 7-14.Estudio paramétrico del número de elementos por λ (Modo 9) | 69 |
| Figura 7-15.Modos de vibración del problema completo | 70 |
| Figura 7-16.FRF para mallas de 50 y 200 elementos | 72 |
| Figura 8-1.Dimensiones del fuselaje | 75 |
| Figura 8-2.Mallas lineales del problema fluido y estructural del fuselaje | 76 |
| Figura 8-3.Modos de vibración de la estructura del fuselaje sin interacción con el fluido | 76 |
| Figura 8-4.Modos de vibración del fluido del fuselaje sin interacción con la estructura | 77 |
| Figura 8-5.Modos de vibración del problema fluido-estructura del fuselaje | 78 |
| Figura 8-6.Dimensiones de la cavidad con barrera rígida | 79 |
| Figura 8-7.Modos de vibración del fluido del problema de la barrera rígida | 80 |
| Figura 8-8.Mallas lineal y cuártica | 81 |
| Figura 8-9.Modos de vibración de la barrera flexible | 82 |
| Figura 8-10. Modos de vibración del problema fluido-estructura de la barrera rígida | 83 |

Notación

| | |
|---------------|-----------------------------------------------------------|
| MEF | Método de los Elementos Finitos |
| FEM | Finite Element Method |
| GiD | Software de pre y post procesado para simulación numérica |
| Ω_F | Dominio fluido |
| Ω_S | Dominio sólido |
| Γ_F | Interfase de acomplamiento fluido-estructura |
| E | Módulo de Young |
| ν | Coefficiente de Poisson |
| h | Espesor de la placa sólida |
| c_F | Velocidad de propagación del sonido en un fluido |
| ρ | Densidad |
| BEM | Boundary Element Method |
| k | Número de onda |
| λ | Longitud de onda |
| ω | Frecuencia angular |
| p | Presión del fluido |
| β | Coefficiente de absorción del fluido |
| N_i | Funciones de forma del elemento |
| κ | Curvatura |
| ϵ | Deformación |
| σ | Tensión |
| TTV | Principio de los trabajos virtuales (PTV) |
| (ξ, η) | Coordenadas naturales |
| \bar{N}_i | Funciones de aproximación geométrica |
| J | Matriz Jacobiana o Jacobiano |
| ϵ | Error |
| N_G | Número de puntos de Gauss |
| N_λ | Número de elementos por longitud de onda |
| c_L | Velocidad de perturbación longitudinal |
| c_B | Velocidad de perturbación de flexión |

1 INTRODUCCIÓN

Desde tiempos prehistóricos el hombre siempre ha tenido curiosidad por la investigación y desarrollo de utensilios y herramientas que sean de utilidad para su vida en sociedad. Comenzando por pequeñas herramientas para cazar o para cocinar, el hombre no tuvo más remedio que emplear el método de prueba y error para hallar el material y la forma que debían de tener esos utensilios para el correcto cumplimiento de su función.

Los conocimientos constructivos y estructurales en esta época eran mínimos por lo que solo se fabricaron herramientas de gran sencillez. Con el paso de los años, el hombre fue avanzando en la construcción y el desarrollo de nuevos elementos de mayor complejidad. Sin embargo, el método de estudio era siempre el mismo; prueba y error. Esto ralentizaba en gran medida el avance en este campo, ya que solo se podía construir o fabricar objetos empleando materiales, métodos y formas que se sabía que no darían error. Es decir todo el proceso se limitaba a una pequeña región de estudio que se conocía que no generaría la pérdida del objeto como por ejemplo: la rotura de un cuchillo, el derrumbamiento de una casa, el descarrilamiento de un tren, la caída de los aviones, etc.

Sin embargo, a mediados del siglo XX se produjo un descubrimiento que cambiaría por completo la manera de calcular, construir y desarrollar cualquier objeto de utilidad. Este descubrimiento estuvo ligado totalmente al desarrollo de las estructuras, ya que por aquellos años si se quería construir una casa se necesitaban miles de planos, una enorme cantidad de cálculos, muchas personas para realizar la tarea teórica y, lo más importante, un tiempo excesivamente cuantioso.

De esta manera en el año 1943, Richard Courant desarrolló por primera vez el método de los elementos finitos (MEF) y en 1956 un documento publicado por M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin y L.J. Topp estableció la definición de este método de manera definitiva. Estas publicaciones como se ha comentado siempre han estado ligadas al análisis estructural, ya que por aquellos tiempos resultaba de una importancia mayor.

Así pudieron abandonarse los tediosos métodos iterativos de aquellos años que conllevaban un tiempo excesivo, por ejemplo el cálculo de una estructura de un edificio de varios pisos podía llevar varias semanas, lo cual suponía un coste de tiempo que debería invertirse en la optimización de la estructura.

A partir del año 1950, el uso práctico de los elementos finitos se vio altamente incrementado debido a la aparición de la computadora, lo que permitió realizar por primera vez el análisis numérico de las estructuras y por tanto emplear el método de los desplazamientos, ya conocido desde siglos anteriores pero nada útil sin este descubrimiento. A medida que se desarrollaban tanto el tiempo de cálculo como la memoria de los ordenadores, las aplicaciones prácticas del método también crecieron. Esto conllevaba que se estudiaran estructuras más complejas en cuanto a la forma de las mismas o las propiedades del material empleado.

Hoy día el MEF es empleado en gran parte de la industria gracias al avance informático, por ello el uso de este método se ha extendió al cálculo de todo tipo de problemas, no solo al análisis estructural; por ejemplo es muy utilizado para transferencia de calor, flujo de líquidos, transporte de masas y potencial electromagnético.

Cabe destacar que el método está en continuo desarrollo, ya que como se ha explicado antes el ser humano es curioso por naturaleza en la obtención y desarrollo de objetos útiles para la vida en sociedad. Por ello una vez que se ha llegado al MEF, en la actualidad lo que se busca es la optimización a la hora de resolver los distintos problemas que se pueden plantear con este método.

El desarrollo de este documento se basará principalmente en la optimización de la resolución de problemas tanto fluidos como estructurales por el MEF. En la actualidad, la mayoría de empresas e industrias utilizan un mallado lineal del MEF para la resolución de problemas ya que es más sencilla, sin embargo conlleva el

empleo de un mayor número de elementos. En este documento se tratará de obtener soluciones aproximadas a la exacta empleando un número menor de elementos, es decir una discretización con menos elementos pero aumentando el grado de los polinomios de aproximación.

Por tanto se realizarán unos estudios paramétricos para las comparaciones de errores que puedan darse y se llegará a unas conclusiones acerca del número de elementos a emplear, del número de puntos de integración y del tipo de elemento.

1.1. Motivación

En este documento se estudiarán a partir del MEF los problemas de interacción fluido-estructura, es decir aquellos casos en los que una estructura rígida o elástica interactúa con un fluido (líquido o gaseoso).

Sin embargo los estudios realizados aquí tendrán una serie de limitaciones e hipótesis. En primer lugar los diferentes tipos de estructuras deben tener un comportamiento elástico, isotrópico y lineal; es decir los sólidos vuelven a su forma original una vez cesa la fuerza que los deforma y además sus propiedades no varían con la dirección. Por su parte el tipo de fluido que se contemplará aquí debe ser lineal, no viscoso e irrotacional, además todos estos dominios se representarán en 2.5 dimensiones.

La representación en 2.5D implica el análisis de problemas tridimensionales pero donde la coordenada longitudinal (eje z) es constante. Además se concretará definiendo el número de onda como $k_z = 0$, lo que conlleva que los problemas 2.5D realmente se transformen en problemas bidimensionales.

Este tipo de problemas de interacción fluido-estructura son de gran utilidad hoy día ya que están presentes en todos los ámbitos de la vida, por ejemplo en la construcción de puentes, en aviación e incluso en la medicina donde se emplea para modelar el comportamiento del flujo sanguíneo a través del interior de las venas y arterias. De modo que un mayor conocimiento de estos problemas y una optimización de la obtención de la solución, conllevaría grandes avances en muchos campos de estudio.

La manera en la que se resolverán estos problemas será a partir del MEF. Actualmente se emplea el MEF para su resolución pero normalmente se utilizan elementos de orden bajo, como por ejemplo elementos lineales. Sin embargo aquí se realizarán las diferentes modelizaciones de los problemas de interacción mediante elementos de orden elevado, procurando reducir el tiempo de cálculo a partir de una mejora de las funciones de interpolación y una reducción del número de elementos a emplear.

En un primer momento se van a resolver los problemas fluido y estructura de manera independiente con el MEF para luego conectar ambos problemas y obtener los resultados de interacción. Además siempre se intentará obtener la solución lo más aproximada posible a la real y en el menor tiempo; para ello también se realizarán una serie de estudios paramétricos que reduzcan los cálculos al mínimo.

1.2. Objetivos principales

A continuación se explican de forma general los objetivos principales que se persiguen en este documento. El problema se discretiza en una serie de elementos finitos y a su vez en el interior de dichos elementos se encuentran los nodos que forman el mallado. Estos elementos pueden ser regulares o irregulares y pueden tener una forma geométrica determinado, por ejemplo elementos triangulares, elementos cuadriláteros, elementos hexagonales, entre otros; siempre hablando en 2 dimensiones.

Los nodos definidos en el interior del elemento se representan de una manera determinada ya que son los encargados de establecer los grados de libertad del sistema continuo. Estos son algunos ejemplos de elementos con sus nodos:

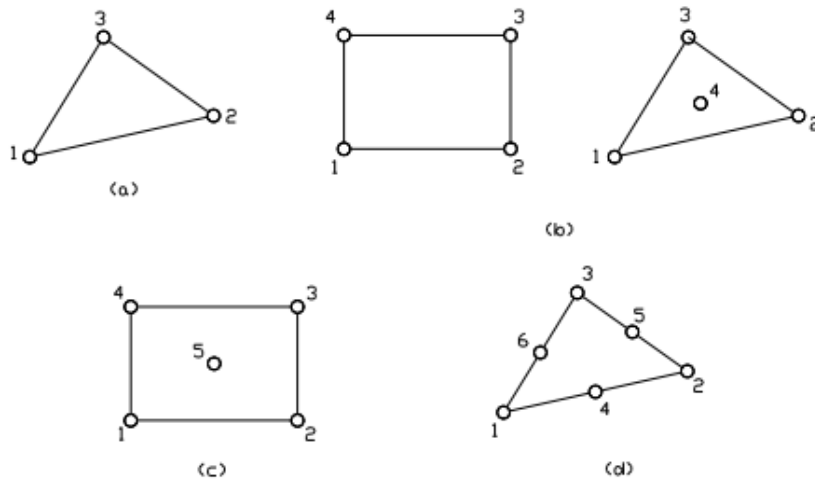


Figura 1-1. Elementos bidimensionales: triangulares y rectangulares

Dependiendo del orden del polinomio a integrar, es decir dependiendo del número de nodos por elemento, la solución aproximada será más o menos correcta. Esto quiere decir que cuanto mayor sea el número de elementos en el mallado mejor será la solución que se obtendrá, por tanto si la discretización es suficientemente fina la solución numérica que se obtendrá aproximará razonablemente bien la solución original. Pero esto implicará que el proceso de cálculo será más largo y tedioso, ya que se deben emplear un número muy elevado de elementos finitos.

Esta técnica de resolución es conocida como método *h* que consiste como se ha explicado antes en el uso de muchos elementos finitos y por tanto la resolución de una gran cantidad de ecuaciones diferenciales, para evitar que el cálculo sea aún más largo se emplean polinomios de aproximación de un orden bajo ya que al existir tantos elementos la aproximación lineal puede ser suficiente para la convergencia a la solución correcta.

Por otra parte, el método que se ha estudiado en este documento no persigue llegar a la convergencia de la solución de la forma en la que se acaba de explicar. La técnica conocida como método *p* lo que establece es un mayor orden de los polinomios de aproximación, es decir aumentando el grado de las funciones de forma la solución se aproximará más a la real comparado con el caso de polinomio de interpolación lineal. Sin embargo se puede emplear una técnica híbrida que consiste en emplear una mezcla de ambos métodos, la cual se designa como método *hp*.

En la siguiente imagen se muestra un ejemplo comparativo entre las distintas técnicas de adaptabilidad, se podrá observar que la más adecuada es la híbrida.

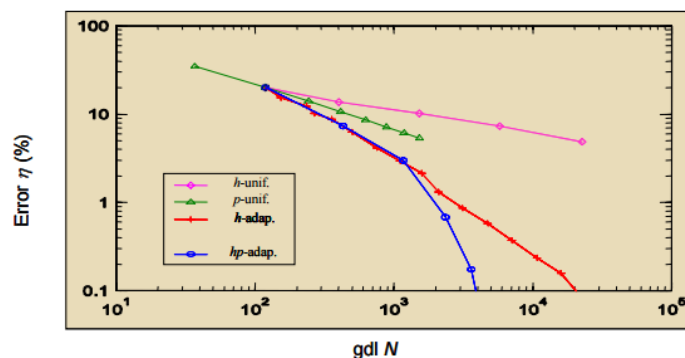


Figura 1-2. Técnicas de adaptabilidad

Esto significa que con un polinomio de orden cúbico, por ejemplo el número de elementos a utilizar para llegar a la solución correcta es menor que los que se debían emplear para los polinomios lineales. El grado de las funciones de forma depende de los nodos que existan por elemento, es decir si para un elemento se tienen 4 nodos ese elemento será lineal pero si tiene 9 el elemento será cuadrático, al igual que sus funciones de forma. Todo esto se explicará de forma detallada en apartados posteriores.

Sin embargo, la mayor sencillez de los elementos de menor orden hace que el cálculo de las matrices del elemento sea más económico que en el caso de elementos más complejos, esto justificaría la competitividad de los primeros, aunque se utilice un mayor número de elementos en este caso.

Por este motivo en la actualidad los elementos de mayor uso son los lineales ya que son los más sencillos y más fáciles de implementar, pero en este documento se tratará de hallar una solución empleando elementos de orden superior y utilizando el menor número de elementos posibles. De esta manera se podrá realizar un estudio comparativo entre los resultados con elementos lineales y los resultados con elementos de orden superior.

El objetivo principal es comprobar que el empleo de un número menor de elementos, pero siendo estos de un orden mayor que el lineal, puede conducir a una solución satisfactoria y de una manera más económica que de la forma que se realiza actualmente. Para ello, se obtendrán las soluciones a un problema típico con el empleo de elementos lineales, cuadráticos, cúbicos y cuárticos, entre otros; una vez se pueda resolver el problema numéricamente solo habrá que realizar una serie de estudios paramétricos acerca de la convergencia a la solución exacta a partir de la modificación del número de elementos, el número de puntos de integración, etc.

1.3. Contribuciones originales

Algunas de los aspectos más originales que se detallarán en este documento son:

- El empleo de programas informáticos Matlab para el análisis numérico de problemas fluidos y estructurales, pero tomando discretizaciones de distintos tipos: elementos lineales, elementos cuadráticos, elementos cúbicos y elementos cuárticos. Por tanto se tiene un programa capaz de calcular las distintas matrices sea cual sea el orden del elemento.
- La resolución de problemas de interacción, es decir en primer lugar se resolverán el problema fluido y el estructural de manera independiente, pero después a partir de unas matrices de conexión se obtendrá la solución del problema de interacción fluido-estructura.
- Como los distintos problemas que se estudian en este documento se resolverán con distintos tipos de elementos, se ha creado una función que puede convertir un elemento lineal en otro de orden superior. De manera que introduciendo como dato de entrada la malla lineal, que se generará con un programa de pre-procesado como es GiD, y el orden del elemento que se quiera implementar, se recibirá como salida la malla con elementos de orden superior. Así se ahorrará un tiempo considerable en la realización de mallas con programas de pre-procesado.
- Como contribuciones originales se expondrán la representación de los distintos modos de vibración y las frecuencias naturales de cada uno de ellos de manera gráfica, tanto para el problema fluido como el estructural y como el de interacción.
- Por último se llegarán a una serie de conclusiones que de obtener resultados satisfactorios permitirán avanzar el gran medida en el campo de los elementos finitos, dejando atrás el empleo de numerosos elementos lineales para la discretización y usando un número menor de elementos pero de un orden mayor, de modo que pueda comprobarse que se llega a una solución aproximada a la exacta pero de una forma más económica que en el caso anterior.

2 INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos (MEF en castellano o FEM en inglés) es un método numérico general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy utilizado en diversos problemas de ingeniería y física, ya que permite resolver problemas que hasta hace pocos años eran prácticamente imposible hallar una solución por los métodos tradicionales.

El MEF lo que hace realmente es realizar un modelo matemático que se asemeje en la mayor medida de lo posible al sistema real que se está estudiando, siendo así más sencillo y más económico que realizar maquetas o prototipos. Sin embargo éste sigue siendo un método aproximado en el cual pueden aparecer distintos errores de cálculo debidos a las hipótesis de la propia formulación.

Este método está diseñado para su empleo en computadoras, es decir para el cálculo numérico. Por ello a partir del mismo se obtiene una solución numérica aproximada sobre un cuerpo, estructura o dominio (medio continuo). El proceso del MEF es dividir dicho dominio en un gran número de subdominios o elementos finitos, esto es lo que se conoce como discretización. Además en el interior de cada uno de esos elementos se definen una serie de puntos que serán los nodos, pudiendo pertenecer estos a más de un elemento. La definición de todos esos nodos formaría lo que se conoce como malla.

Las ecuaciones que describen el comportamiento del medio continuo también regirán el comportamiento de los elementos y definiendo en cada uno de los nodos los grados de libertad del sistema, se consigue pasar de un medio continuo con infinitos grados de libertad gobernado por una ecuación diferencial o un sistema de ecuaciones diferenciales; a un sistema con un n grados de libertad (siendo n un número finito) gobernado un un sistema de ecuaciones (tantas como nodos existan). La matriz de este sistema de ecuaciones, que pueden ser lineales o no, suele denominarse matriz de rigidez del sistema.

La variedad de problemas a los que puede aplicarse el MEF ha crecido en gran cantidad, siempre que las ecuaciones constitutivas y ecuaciones de evolución temporal sean conocidas de antemano. Algunas de las ramas científicas en las que se emplea el método son transmisión de calor, mecánica de fluidos, campos magnéticos, etc. Pero un campo importante de aplicación en la mecánica de medios continuos, donde a partir del mallado en elementos finitos puede obtenerse el campo de desplazamientos y con las deformaciones y tensiones a través de las relaciones cinemáticas y constitutivas.

Algunos ejemplos prácticos para los que se utiliza el MEF en la actualidad son la industria automovilística y aeroespacial, industria energética, arquitectura, estudio de impactos,... Por ello puede comprobarse como a lo largo de los años el MEF ha incrementado la presencia en los procesos de construcción y estudio enormemente; ya que prácticamente se utiliza para estudiar cualquier tipo de problema; incluso los que afectan directamente a la seguridad de las personas.

A continuación se muestran una serie de imágenes en las que pueden verse estos ejemplos:

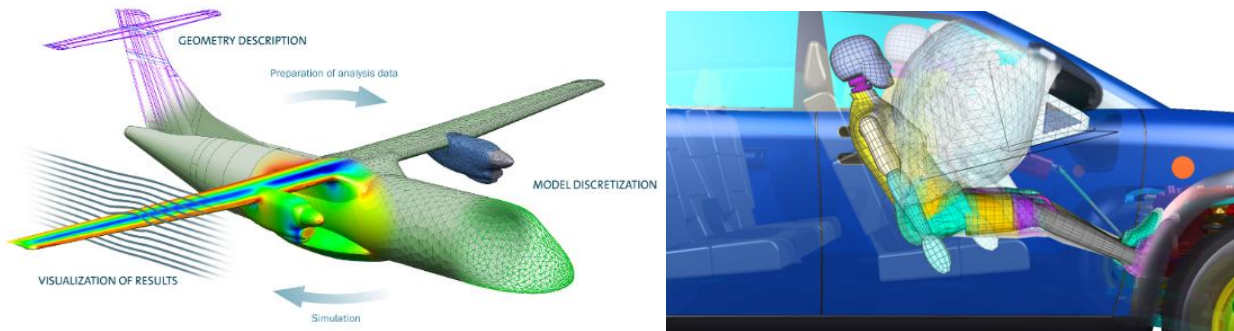


Figura 2-1. Ejemplos de aplicación del MEF

En todo problema a resolver a partir del método de los elementos finitos se puede distinguir tres partes:

- Dominio: se trata de un espacio geométrico que puede ser bidimensional o tridimensional y en dicho espacio es donde se realizará el estudio, es decir donde se realizará el mallado y los cálculos.
- Condiciones de contorno: son valores dados a priori de las variables a calcular y que por tanto modificarán los resultados que se obtendrán. Algunas condiciones de contorno para distintos problemas pueden ser: cargas, desplazamientos, temperaturas, intensidades, voltajes, velocidades, etc.
- Incógnitas: las incógnitas por lo general serán las condiciones de contorno en cada uno de los nodos del mallado, es decir son las variables que se desean conocer tras la resolución del problema y la aplicación de las distintas condiciones de contorno: deformaciones, tensiones, desplazamientos, temperaturas, intensidades, etc.

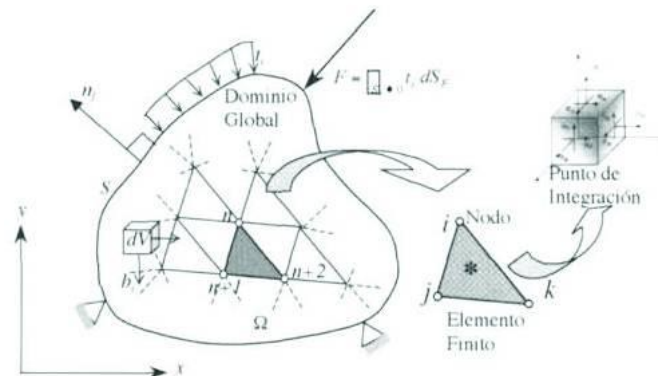


Figura 2-2. Problema para resolver con MEF

Aunque el uso de este método es relativamente nuevo, su formulación se conocía desde hace ya bastante tiempo ya que los primeros indicios de conocimiento de los elementos finitos se remontan a la época de los egipcios los cuales empleaban métodos discretizados, o también a la época de Arquímedes que calculaba todo tipo de volúmenes o superficies de área. Sin embargo el método como se conoce hoy día no tuvo sus primeros desarrollos hasta 1943, año en el que Richard Courant obtuvo soluciones aproximadas mediante el método de Ritz de análisis numéricos. Poco después, distintos científicos de la época establecieron una definición más amplia del análisis numérico centrándose principalmente en la aplicación en el campo de estructuras complejas.

En los primeros años, el cálculo de estructuras se realizaba prácticamente de manera manual con el MEF ya que los avances informáticos no habían llegado aún, por lo que al ser un método muy iterativo resultaba enormemente tedioso. Sin embargo la llegada de la computadora permitió el desarrollo del método en gran medida, ya que reducía mucho el tiempo de cálculo de las estructuras y también permitía la optimización de la estructura en estudio.

Con el paso de los años, el ámbito de la informática se ha desarrollado rápidamente lo que ha permitido una mejor definición del MEF y el empleo del mismo en más campos a parte de las estructuras. En la actualidad, se emplea en la mayoría de las industrias, sin olvidar que el MEF se encuentra en fase de desarrollo y gran expansión ya que realmente el empleo práctico ha ido parejo con las innovaciones que se dan en el campo de la arquitectura de ordenadores.

En definitiva, el MEF trata de convertir un problema complicado gobernado por pocas ecuaciones con muchas incógnitas en otro con el mismo número de ecuaciones que incógnitas a partir de una discretización y el posterior mallado. De manera que la resolución de cada una de esas ecuaciones de manera numérica proporcionará una solución aproximada a la real, esto se consigue mediante un conjunto de funciones de forma que actúan como polinomios de aproximación.

Así se logran resolver problemas ingenieriles que en años anteriores eran prácticamente irresolubles.

2.1. Formulación general del problema

Al tratarse de un problema de interacción fluido-estructural los sistemas de ecuaciones que gobiernen el problema deben tener en cuenta el acoplamiento entre ambos dominios. A continuación se explicará la formulación para el dominio fluido, la formulación para el dominio sólido y la formulación para el problema acoplado. Para el primer caso y el último se realizarán los cálculos pertinentes y se obtendrán las matrices necesarias siguiendo el artículo de A. Romero et al. [3]. En este artículo se propone un método de estudio mixto para estudiar los problemas de interacción entre un fluido y un sólido, para ello se realiza una descomposición de dominios que se mostrará más tarde. El acoplamiento en este caso es conocido como BEM-FEM 2.5D, empleando el método de los elementos de contorno para modelar medios sólidos no limitados y el MEF para los dominios sólidos y fluidos. En este estudio que se va a realizar no se empleará el método BEM, únicamente se trabajará con el MEF.

En primer lugar se detallan las distintas partes del problema para luego subdividir la formulación que describe cada una de ellas. Tomando como explicación la imagen de la figura 1 de [3]:

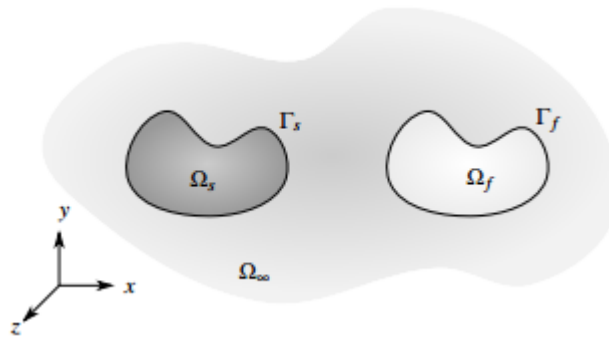


Figura 2-3. Dominios dados en el problema de acoplamiento

El dominio Ω es el del problema de interacción fluido-estructura ya que confina tanto a fluidos como a sólidos y este se descompone en otros tres: Ω_∞ que es el subdominio correspondiente a la región sólida no limitada, Ω_F que es el subdominio fluido y Ω_S que es el subdominio sólido.

Estos subdominios se supondrán que se desarrollan en dos dimensiones pero que se someten a fuentes tridimensionales. El estudio de fluidos y sólidos en 3D precisa de métodos computacionales bastante potentes, por lo que en dicho artículo se opta por el uso de dos dimensiones y media, 2.5D. Los modelos 2.5D tratan de emplear medios homogéneos en una dirección, así la solución es mucho más sencilla de obtener. De manera que en este documento se empleará una formulación para modelos de 2.5D y también para fluidos lineales, no viscosos e irrotacionales.

Como se ha explicado anteriormente, no se hará uso del BEM en ningún momento por lo que se prescinde del subdominio Ω_∞ . En la interfase sólida Γ_S debería cumplirse pues el equilibrio de fuerzas y la compatibilidad de desplazamientos, por su parte en la interfase fluida-sólida Γ_F se debe verificar el equilibrio de presiones normales y la continuidad de los desplazamientos normales, con tensiones cortantes nulas.

Por tanto se tratará de obtener las ecuaciones para cada subdominio y posteriormente se ensamblarán al sistema global, formando el problema de interacción fluido-estructural.

El objetivo es encontrar la solución a problemas tridimensionales mediante la superposición de soluciones bidimensionales con diferentes valores del número de onda longitudinal en la dirección z (k_z). Esta superposición se realizará con una transformada de Fourier inversa:

$$a(\omega, x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{a}(\omega, x, y, k_z) e^{-ik_z z} dk_z \quad (2.1)$$

Donde $a(\omega, x, y, z)$ es una variable que puede ser el desplazamiento o la presión, entre otras; $\hat{a}(\omega, x, y, k_z)$ es el valor de esa variable cuando z es igual al número de onda; y ω es la frecuencia angular.

De manera que con bastantes coeficientes la ecuación converge a la solución correcta.

Se procede ahora a explicar en más detalle la formulación de cada subdominio.

2.1.1 Formulación del problema fluido

Estableciendo que el subdominio fluido es constante en la dirección longitudinal, la ecuación homogénea de Helmholtz en 3D la cual gobierna la propagación de onda en un líquido no viscoso es la siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_F} p^*(\omega, x, y, z) \nabla^2 p(\omega, x, y, z) d\Omega + k^2 \int_{\Omega_F} p^*(\omega, x, y, z) p(\omega, x, y, z) d\Omega \\ - ik\beta \int_{\Omega_F} p^*(\omega, x, y, z) p(\omega, x, y, z) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Donde $k = \omega/c$ es el número de onda del fluido, p es la presión del fluido, p^* es la presión virtual del fluido, β es el coeficiente de absorción del fluido y c es la velocidad de propagación de la onda.

Aplicando el teorema de Green a la ecuación anterior se tiene que:

$$\begin{aligned} -(k^2 - ik\beta) \int_{\Omega_F} p^*(\omega, x, y, z) p(\omega, x, y, z) d\Omega + \int_{\Omega_F} \nabla p^*(\omega, x, y, z) \cdot \nabla p(\omega, x, y, z) d\Omega \\ = \int_{\Gamma_F} p^*(\omega, x, y, z) \mathbf{n}^T \nabla p(\omega, x, y, z) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.3)$$

Donde \mathbf{n} es el vector normal hacia afuera del contorno fluido Γ_F .

Aplicando la relación entre la presión y el desplazamiento de las partículas fluidas:

$$\mathbf{n}^T \nabla p = \omega^2 \rho \mathbf{n}^T \mathbf{u} \quad (2.4)$$

Se tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} -(k^2 - ik\beta) \int_{\Omega_F} p^*(\omega, x, y, z) p(\omega, x, y, z) d\Omega + \int_{\Omega_F} \nabla p^*(\omega, x, y, z) \cdot \nabla p(\omega, x, y, z) d\Omega \\ = \omega^2 \rho \int_{\Gamma_F} p^*(\omega, x, y, z) \mathbf{n}^T \mathbf{u}(\omega, x, y, z) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.5)$$

La presión y el desplazamiento serán discretizados como:

$$\begin{aligned} p &= \mathbf{N}p(\omega, x, y, z) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{N}'\mathbf{u}(\omega, x, y, z) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donde \mathbf{N} y \mathbf{N}' son funciones de forma. Definiendo ahora el operador \mathbf{L} como:

$$\mathbf{L} = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right]^T \quad (2.7)$$

Sustituyendo las ecuaciones (2.6) y (2.7) en la ecuación (2.5) se llega a:

$$-(k^2 - ik\beta) \int_{\Omega_F} p^{*T} \mathbf{N}^T \mathbf{N} p d\Omega + \int_{\Omega_F} p^{*T} \mathbf{N}^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{N} p d\Omega = \omega^2 \rho \int_{\Gamma_F} p^{*T} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}' \mathbf{u} d\Gamma \quad (2.8)$$

A continuación se define una nueva matriz que será:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N} = \mathbf{L}_1\mathbf{N} + \mathbf{L}_2\mathbf{N} \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.9)$$

Donde

$$\mathbf{L}_1 = \left[\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad 0 \right]^T \quad \mathbf{L}_2 = [0 \quad 0 \quad 1]^T \quad (2.10)$$

Sustituyendo estas ecuaciones en (2.8):

$$\begin{aligned} &-(k^2 - ik\beta) \int_{\Omega_F} p^{*T} \mathbf{N}^T \mathbf{N} p d\Omega + \int_{\Omega_F} \left(p^{*T} \mathbf{B}_1^T + \left(\frac{\partial p^*}{\partial z} \right)^T \mathbf{B}_2^T \right) \left(\mathbf{B}_1 p + \mathbf{B}_2 \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) \right) d\Omega \\ &= \omega^2 \rho \int_{\Gamma_F} p^{*T} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}' \mathbf{u} d\Gamma \end{aligned} \quad (2.11)$$

Realizando las operaciones necesarias y teniendo en cuenta que todo se mantendrá constante a lo largo del eje longitudinal, es decir a lo largo de z , se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} &-(k^2 - ik\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} p^{*T} \left(\int_{A_F} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \right) p dz + \int_{-\infty}^{+\infty} p^{*T} \left(\int_{A_F} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1 dA \right) p dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} p^{*T} \left(\int_{A_F} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_2 dA \right) \frac{\partial p}{\partial z} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial p^*}{\partial z} \right)^T \left(\int_{A_F} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_1 dA \right) p dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial p^*}{\partial z} \right)^T \left(\int_{A_F} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_2 dA \right) \frac{\partial p}{\partial z} dz = \omega^2 \rho \int_{-\infty}^{+\infty} p^{*T} \left(\int_{\Sigma_F} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}' d\Sigma \right) \mathbf{u} dz \end{aligned} \quad (2.12)$$

Siendo A_F la sección transversal del subdominio fluido y Σ_F el recinto de dicha sección. Integrando por partes los términos referidos a la presión virtual del fluido se llega a:

$$\begin{aligned}
& -(k^2 - ik\beta) \int_{-\infty}^{+\infty} p^{*T} \left(\int_{A_F} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \right) p dz + \int_{-\infty}^{+\infty} p^{*T} \left(\int_{A_F} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1 dA \right) p dz \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} p^{*T} \left(\int_{A_F} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_2 dA - \int_{A_F} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_1 dA \right) \frac{\partial p}{\partial z} dz \\
& - \int_{-\infty}^{+\infty} p^{*T} \left(\int_{A_F} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_2 dA \right) \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} dz = \omega^2 \rho \int_{-\infty}^{+\infty} p^{*T} \left(\int_{\Sigma_F} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}' d\Sigma \right) \mathbf{u} dz
\end{aligned} \tag{2.13}$$

A partir de la eliminación de la presión virtual y la anulación de todas las integrales extendidas a lo largo de la coordenada longitudinal z , se llega a la ecuación del MEF:

$$\begin{aligned}
& -(k^2 - ik\beta) \mathbf{D} p(\omega, x, y, z) + \mathbf{F}^0 p(\omega, x, y, z) + \mathbf{F}^1 \frac{\partial p(\omega, x, y, z)}{\partial z} - \mathbf{F}^2 \frac{\partial^2 p(\omega, x, y, z)}{\partial z^2} \\
& = \omega^2 \rho \mathbf{R} \mathbf{u}(\omega, x, y, z)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

De manera que las matrices a calcular serán las siguientes:

$$\mathbf{D} = \int_{A_F} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA \tag{2.15}$$

$$\mathbf{F}^0 = \int_{A_F} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1 dA \tag{2.16}$$

$$\mathbf{F}^1 = \int_{A_F} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_2 dA - \int_{A_F} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_1 dA \tag{2.17}$$

$$\mathbf{F}^2 = \int_{A_F} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_2 dA \tag{2.18}$$

$$\mathbf{R} = \int_{\Sigma_F} \mathbf{N}^T \mathbf{n}^T \mathbf{N}' d\Sigma \tag{2.19}$$

Las matrices del fluido \mathbf{D} , \mathbf{F}^0 y \mathbf{F}^1 no dependen de el número de onda k_z y de la frecuencia angular ω . Por su parte \mathbf{R} es la matriz de acoplamiento fluido-masa y relaciona los desplazamientos en el contorno Γ_F con las presiones en el subdominio Ω_F .

Como se explicó anteriormente la ecuación (2.14) se resuelve mediante la transformada de Fourier a lo largo de la coordenada longitudinal:

$$[-(k^2 - ik\beta) \mathbf{D} + \mathbf{F}^0 - ik_z \mathbf{F}^1 - k_z^2 \mathbf{F}^2] \hat{p}(\omega, x, y, k_z) = \omega^2 \rho \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}(\omega, x, y, k_z) \tag{2.20}$$

Considerando que $\partial p(\omega, x, y, z)/\partial z = -ik_z \hat{p}(\omega, x, y, k_z)$ y definiendo las variables con $\hat{}$ como variables dentro del dominio de la frecuencia-número de onda.

Finalmente la expresión (2.20) puede reescribirse considerando una matriz equivalente:

$$\hat{\mathbf{F}}(\omega, k_z) \hat{p}(\omega, x, y, k_z) = \omega^2 \rho \mathbf{R} \hat{\mathbf{u}}(\omega, x, y, k_z) \tag{2.21}$$

Todas estas matrices se han computado en un programa Matlab a partir de las propiedades del fluido descritas en el apartado anterior y los diferentes mallados propuestos.

2.1.2 Formulación del problema sólido

El problema estructural por su parte se desarrollará siguiendo los apuntes de J. Borgions et al. [4], en este texto se obtiene la formulación diferenciando entre dos tipos de problemas del sólido: elementos de volumen y elementos de lámina.

El estudio que se va a realizar en este documento únicamente contempla elementos de lámina por lo que los elementos de volumen no se explicarán a continuación.

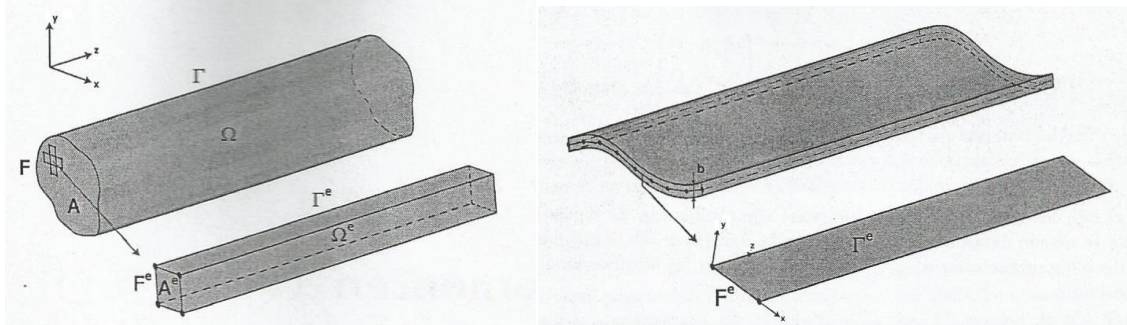


Figura 2-4. Elementos de volumen y elementos de lámina

Como se puede observar en la imagen anterior se seguirá empleando el modelado 2.5D al igual que en el fluido, esto puede realizarse ya que el dominio sólido es constante a lo largo de la coordenada longitudinal (coordenada z).

Centrando el estudio en los elementos de lámina, hay que decir que se da una nueva división en este caso, es decir el campo de desplazamientos de un elemento de lámina está compuesto a su vez de una componente debida al desplazamiento del elemento y otra componente causada por la flexión del mismo. El estudio que se va a realizar es para cuerpos invariantes en una coordenada longitudinal, en este caso la coordenada z; por ello la lámina se modelará con elementos del tipo 2.5D.

El campo de desplazamiento debido al efecto de la traslación en el propio plano de la membrana será:

$$u_{memb}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} u_x(x, y, z, t) \\ u_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Por su parte las componentes causadas por la flexión son:

$$u_{flex}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} u_x(x, y, z, t) \\ u_y(x, y, z, t) \\ u_z(x, y, z, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \frac{\partial u_y}{\partial x} \\ u_y \\ -y \frac{\partial u_y}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \varphi_x \\ u_y \\ -y \varphi_z \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Al igual que se realizó en el caso del fluido se tratará de descomponer las integrales resultantes en una integral extendida sobre el eje longitudinal y otra sobre la superficie del elemento o sobre el contorno de dicha superficie, dependiendo del tipo de integral que nos encontremos. Un ejemplo para el primer caso sería el siguiente:

$$\int_{\Omega_S} \dots d\Omega = \int_{\Gamma_S} \int_{-h/2}^{+h/2} \dots dz d\Gamma \quad (2.24)$$

A continuación se detallan los cálculos para la obtención de las ecuaciones de elementos finitos en los casos de membrana y flexión.

2.1.2.1 Membrana

Discretización

Los cálculos se realizan a nivel elemento para que al final mediante el sumatorio de todos los elementos se obtenga el resultado global. Para ello se dan una serie de funciones de forma $N_j^e(x)$ y unos factores de multiplicación $\mathbf{u}_j^e(z, t)$, con el objetivo de aproximar en la mayor medida de lo posible la solución a la exacta.

La discretización se realizará en el plano de la lámina, suponiendo que $y=0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^e(x, y = 0, z, t) &= \sum_{j=1}^2 N_j^e(x) \mathbf{u}_j^e(z, t) = \mathbf{N}^e(x) \mathbf{u}^e(z, t) \\ &= \begin{bmatrix} N_1^e(x) & 0 & | & N_2^e(x) & 0 \\ 0 & N_1^e(x) & | & 0 & N_2^e(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1x}^e(z, t) \\ u_{1z}^e(z, t) \\ u_{2x}^e(z, t) \\ u_{2z}^e(z, t) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

En el supuesto de que las deformaciones sean pequeñas, la relación entre desplazamientos y deformaciones será la siguiente:

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \mathbf{L} \mathbf{u}^e \quad (2.26)$$

Sabiendo que:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \frac{\partial}{\partial z} \quad (2.27)$$

Haciendo uso de la discretización (2.25), la ecuación (2.26) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon}^e = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^e \\ \epsilon_{zz}^e \\ \gamma_{xz}^e \end{Bmatrix} &= \mathbf{L} \mathbf{u}^e = \mathbf{L}_1 \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e + \mathbf{L}_2 \mathbf{N}^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial z} = \mathbf{B}_1^e \mathbf{u}^e + \mathbf{B}_2^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial z} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & 0 & | & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & | & 0 & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{u}^e + \begin{bmatrix} 0 & 0 & | & 0 & 0 \\ 0 & N_1^e & | & 0 & N_2^e \\ N_1^e & 0 & | & N_2^e & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Este caso de membrana corresponde a un estado de tensión plana, por lo que las ecuaciones constitutivas para un material elástico e isótropo son:

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^e \\ \sigma_{zz}^e \\ \sigma_{xz}^e \end{Bmatrix} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}^e = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^e \\ \epsilon_{zz}^e \\ \gamma_{xz}^e \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Sustituyendo la ecuación (2.28) en la (2.29) se tiene que:

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{D} \left(\mathbf{B}_1^e \mathbf{u}^e + \mathbf{B}_2^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial z} \right) \quad (2.30)$$

TTV

El Principio de los trabajos virtuales o TTV para el caso de la membrana quedaría como sigue:

$$\int_{\Gamma_S} \boldsymbol{\epsilon}^{*T} \boldsymbol{\sigma} h(x) d\Gamma + \int_{\Gamma_S} \mathbf{u}^{*T} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} h(x) d\Gamma = A_u^* \quad (2.31)$$

Siendo A_u^* una fuerza generada en cada elemento. Desarrollando el primer término a partir de las ecuaciones anteriores se llega a:

$$\int_{\Gamma_S} \boldsymbol{\epsilon}^{*T} \boldsymbol{\sigma} h(x) d\Gamma = \int_{\Gamma_S} \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{u}^* + \mathbf{B}_2 \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \mathbf{D} \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{B}_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right) h(x) d\Gamma \quad (2.32)$$

Por lo tanto aplicando el principio de (2.24) se obtendrá dos integrales por cada integral anterior, una referida al eje longitudinal y la otra extendida sobre el contorno de la interfase Γ_S .

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_S} \boldsymbol{\epsilon}^{*T} \boldsymbol{\sigma} h(x) d\Gamma &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \left(\int_C \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 h(x) dC \right) \mathbf{u} dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \left(\int_C \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 h(x) dC \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \left(\int_C \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 h(x) dC \right) \mathbf{u} dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \left(\int_C \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 h(x) dC \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (2.33)$$

Estas integrales se designarán según la siguiente ecuación:

$$\mathbf{k}_{ij} = \int_C \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j h(x) dC \quad (2.34)$$

Las dos últimas integrales se reducirán mediante la integración por partes:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \mathbf{k}_{21} \mathbf{u} dz = \left(\mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{21} \mathbf{u} \right)_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{21} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{21} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \quad (2.35)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \mathbf{k}_{22} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz = \left(\mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{22} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{22} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)^2 dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{22} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)^2 dz \quad (2.36)$$

Por lo tanto, sustituyendo estos resultados en la ecuación (2.33) se tiene que:

$$\int_{\Gamma_S} \boldsymbol{\epsilon}^{*T} \boldsymbol{\sigma} h(x) d\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{11} \mathbf{u} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} (\mathbf{k}_{12} - \mathbf{k}_{21}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{22} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \right)^2 dz \quad (2.37)$$

Por su parte el segundo término de la ecuación (2.31), se resuelve teniendo en cuenta que $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{*T}$, así se llega al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_S} \mathbf{u}^* \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} h(x) d\Gamma &= \int_{\Gamma_S} \mathbf{u}^{*T} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} h(x) d\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \left(\int_C \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} h(x) dC \right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dz \end{aligned} \quad (2.38)$$

Siendo \mathbf{M} la matriz de masa. Por lo que combinando las expresiones (2.37) y (2.38) en la ecuación (2.31) y resolviendo las integrales extendidas a lo largo de la coordenada z , se obtiene lo siguiente

$$\underbrace{\mathbf{k}_{11}^0}_{\mathbf{k}_{11}^0} \mathbf{u} + \underbrace{(\mathbf{k}_{12}^1 - \mathbf{k}_{21}^1)}_{(\mathbf{k}_{12}^1 - \mathbf{k}_{21}^1)} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \underbrace{\mathbf{k}_{22}^2}_{\mathbf{k}_{22}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{A}_u^* \quad (2.39)$$

De manera que aplicando esto último y sumando todas las soluciones por cada elemento, se obtendrá:

$$\mathbf{K}^0 \mathbf{u} + \mathbf{K}^1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{K}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{f}(z, t) \quad (2.40)$$

Las matrices serán entonces las siguientes:

$$\mathbf{K}^0 = \int_C \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 h(x) dC \quad (2.41)$$

$$\mathbf{K}^1 = \int_C \mathbf{B}_1^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 h(x) dC - \int_C \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_1 h(x) dC \quad (2.42)$$

$$\mathbf{K}^2 = \int_C \mathbf{B}_2^T \mathbf{D} \mathbf{B}_2 h(x) dC \quad (2.43)$$

$$\mathbf{M} = \int_C \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} h(x) dC \quad (2.44)$$

Por último realizando la transformada de Fourier se llega a:

$$[\mathbf{K}^0 - ik_z \mathbf{K}^1 + k_z^2 \mathbf{K}^2 - \omega^2 \mathbf{M}] \hat{\mathbf{u}}(x, y, \omega, k_z) = \hat{\mathbf{f}}(x, y, \omega, k_z) \quad (2.45)$$

2.1.2.2 Flexión

Para el caso de la flexión en placas hay que basarse en la teoría de Kirchhoff para láminas delgadas. Una primera hipótesis de esta teoría es que la superficie de la placa está libre de tensiones y deformaciones. En segundo lugar se establece que la tensión perpendicular a la placa es nula $\sigma_{yy} = 0$ y por lo tanto también lo serán $\gamma_{yx} = 0$ y $\gamma_{yz} = 0$.

Discretización

La discretización en este caso también trata de aproximar la solución a la más exacta a partir de unas funciones de forma y unos coeficientes. Al igual que antes se aproximará por $y=0$, sabiendo que la placa es constante a través del espesor $h(x)$.

$$\mathbf{u}_y^e(x, y = 0, z, t) = \sum_{j=1}^2 \mathbf{N}_j^e(x) \mathbf{u}_j^e(z, t) = \mathbf{N}^e(x) \mathbf{u}^e(z, t) \quad (2.46)$$

Los grados de libertad en este caso serán:

$$\mathbf{u}_j^e(z, t) = \begin{Bmatrix} u_{jy}^e(z, t) \\ \varphi_{jx}^e(z, t) \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

La última hipótesis de Kirchhoff (hipótesis de Bernoulli) establece que:

$$u_x^e(x, y, z, t) = -y \frac{\partial u_y^e}{\partial x} = -y \varphi_x^e \quad (2.48)$$

$$u_z^e(x, y, z, t) = -y \frac{\partial u_y^e}{\partial z} = -y \varphi_z^e$$

Suponiendo nuevamente que se dan pequeñas deformaciones, la relación entre deformaciones y desplazamientos se da como sigue:

$$\boldsymbol{\epsilon}^e = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}^e \\ \epsilon_{zz}^e \\ \gamma_{xz}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x^e \\ u_z^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \frac{\partial^2 u_y^e}{\partial x^2} \\ -y \frac{\partial^2 u_y^e}{\partial z^2} \\ -2y \frac{\partial^2 u_y^e}{\partial x \partial z} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} y \kappa_x^e \\ y \kappa_z^e \\ y \kappa_{xz}^e \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

Se define entonces la curvatura como:

$$\boldsymbol{\kappa}^e = -\mathbf{L} \mathbf{u}_y^e = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 u_y^e}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 u_y^e}{\partial z^2} \\ -2 \frac{\partial^2 u_y^e}{\partial x \partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \end{bmatrix} \mathbf{u}_y^e \quad (2.50)$$

Si se divide la matriz \mathbf{L} en otras tres se tendrá que:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 \frac{\partial}{\partial z} + \mathbf{L}_3 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.51)$$

De modo que haciendo uso de la discretización (2.46) y de la matriz (2.51), la ecuación de la curvatura tiene la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\kappa}^e = -\mathbf{L} \mathbf{u}_y^e = -\mathbf{L} \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e = -\mathbf{L}_1 \mathbf{N}^e \mathbf{u}^e - \mathbf{L}_2 \mathbf{N}^e \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial z} - \mathbf{L}_3 \mathbf{N}^e \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial z^2} = \mathbf{B}_1 \mathbf{u}^e + \mathbf{B}_2 \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial z} + \mathbf{B}_3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial z^2}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 \mathbf{N}^e}{\partial x^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}^e + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial x} \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial z} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{N}^e \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial z^2} \quad (2.52)$$

Por su parte las ecuaciones de comportamiento del material serán dadas a partir de la relación (2.29) y del cálculo de los momentos por unidad de longitud:

$$\boldsymbol{\sigma}_F^e = \begin{Bmatrix} m_{xx}^e \\ m_{zz}^e \\ m_{xz}^e \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^e \\ \sigma_{zz}^e \\ \sigma_{xz}^e \end{Bmatrix} dy = \int_{-h/2}^{+h/2} y \boldsymbol{\sigma}^e dy = \int_{-h/2}^{+h/2} y \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}^e dy = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 \mathbf{D} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e dy = \hat{\mathbf{D}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e \quad (2.53)$$

Siendo $\boldsymbol{\epsilon}^e = y \hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e$, por tanto $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \{\kappa_x^e \ \kappa_z^e \ \kappa_{xz}^e\}^T$; además la matriz $\hat{\mathbf{D}} = \frac{h^3}{12} \mathbf{D}$, de manera que:

$$\boldsymbol{\sigma}_F^e = \hat{\mathbf{D}} \boldsymbol{\kappa}^e = \hat{\mathbf{D}} \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{u}^e + \mathbf{B}_2 \frac{\partial \mathbf{u}^e}{\partial z} + \mathbf{B}_3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^e}{\partial z^2} \right) \quad (2.54)$$

TTV

En el caso de la flexión el TTV se reducirá a la siguiente expresión, siempre calculándolo en cada elemento:

$$\int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\kappa}^{*T} \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{\Gamma_s} \mathbf{u}^* \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} h(x) d\Omega = A_u^* \quad (2.55)$$

El primero de los términos se aproxima a partir de las expresiones (2.52) y (2.54):

$$\int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\kappa}^{*T} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma = \int_{\Gamma_s} \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{u}^* + \mathbf{B}_2 \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} + \mathbf{B}_3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial z^2} \right)^T \hat{\mathbf{D}} \left(\mathbf{B}_1 \mathbf{u} + \mathbf{B}_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \mathbf{B}_3 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right) d\Gamma \quad (2.56)$$

Al igual que se realizó para el caso de la membrana, estas integrales se vuelven a dividir en otras dos: una referida al borde del contorno y la otra extendida en el eje longitudinal:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\kappa}^{*T} \boldsymbol{\sigma} d\Gamma &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \left(\int_C \mathbf{B}_1^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_1 dC \right) \mathbf{u} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \left(\int_C \mathbf{B}_1^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_2 dC \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \left(\int_C \mathbf{B}_1^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_3 dC \right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} dz + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \left(\int_C \mathbf{B}_2^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_1 dC \right) \mathbf{u} dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \left(\int_C \mathbf{B}_2^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_2 dC \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \left(\int_C \mathbf{B}_2^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_3 dC \right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial z^2} \right)^T \left(\int_C \mathbf{B}_3^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_1 dC \right) \mathbf{u} dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial z^2} \right)^T \left(\int_C \mathbf{B}_3^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_2 dC \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial z^2} \right)^T \left(\int_C \mathbf{B}_3^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_3 dC \right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} dz \end{aligned} \quad (2.57)$$

Las integrales en el contorno se denominarán:

$$\mathbf{k}_{ij} = \int_C \mathbf{B}_i^T \hat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_j dC \quad (2.58)$$

Se tendrán pues tres tipos de integrales y se tratará de reducirlas al primero de los tipos. El cuarto término se resolverá como:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \mathbf{k}_{21} \mathbf{u} dz = \left(\mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{21} \mathbf{u} \right)_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{21} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{21} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz \quad (2.59)$$

El primer término anterior de la derecha se anula debido a la condición de Sommerfelds. Análogamente con los términos 5 y 7 de la derecha de la ecuación (2.57) se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \mathbf{k}_{22} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} dz \quad (2.60)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \mathbf{k}_{23} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{23} \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} dz \quad (2.61)$$

Respecto al otro tipo de integral que queda se resuelve como en este caso del término 7 de la ecuación (2.57):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial z^2} \right)^T \mathbf{k}_{31} \mathbf{u} dz = - \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial z} \right)^T \mathbf{k}_{31} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{31} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} dz \quad (2.62)$$

Análogamente para los término 8 y 9 de (2.57):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial z^2} \right)^T \mathbf{k}_{32} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{32} \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} dz \quad (2.63)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}^*}{\partial z^2} \right)^T \mathbf{k}_{33} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} dz = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{k}_{33} \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial z^4} dz \quad (2.64)$$

Por lo tanto la ecuación (2.57) se reducirá a:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s} \boldsymbol{\kappa}^T \boldsymbol{\sigma} d\Gamma &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \left[\mathbf{k}_{11} \mathbf{u} + (\mathbf{k}_{12} - \mathbf{k}_{21}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + (\mathbf{k}_{13} - \mathbf{k}_{22} + \mathbf{k}_{31}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} \right. \\ &\quad \left. + (-\mathbf{k}_{23} + \mathbf{k}_{32}) \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} + \mathbf{k}_{33} \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial z^4} \right] dz \end{aligned} \quad (2.65)$$

El segundo término de la ecuación (2.55) se resuelve teniendo en cuenta la igualdad entre $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^{*T}$, por lo que:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_s} \mathbf{u}^* \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} h(x) d\Gamma &= \int_{\Gamma_s} \mathbf{u}^{*T} \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} h(x) d\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \left(\int_C \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} h(x) dC \right) \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} dz \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}^{*T} \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} dz \end{aligned} \quad (2.66)$$

La integral sobre el contorno de la integral (2.66) será entonces la matriz de masa que como se ve es independiente de la coordenada y.

Combinando las expresiones (2.65) y (2.66) para resolver (2.55) y resolviendo las integrales extendidas a lo largo de la coordenada longitudinal z , se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} & \overbrace{\mathbf{K}^0}^{\mathbf{K}^0} \mathbf{u} + \overbrace{(\mathbf{k}_{12} - \mathbf{k}_{21})}^{\mathbf{K}^1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \overbrace{(\mathbf{k}_{13} - \mathbf{k}_{22} + \mathbf{k}_{31})}^{\mathbf{K}^2} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial z^2} + \overbrace{(-\mathbf{k}_{23} + \mathbf{k}_{32})}^{\mathbf{K}^3} \frac{\partial^3 \mathbf{u}}{\partial z^3} + \overbrace{\mathbf{k}_{33}}^{\mathbf{K}^4} \frac{\partial^4 \mathbf{u}}{\partial z^4} + \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} \\ & = \mathbf{A}_u^* \end{aligned} \quad (2.67)$$

Renombrando las matrices como se muestra en la ecuación (2.67) y mediante superposición de las soluciones de todos los elementos se obtiene:

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}^0 \mathbf{u}(z, t) + \mathbf{K}^1 \frac{\partial \mathbf{u}(z, t)}{\partial z} + \mathbf{K}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{u}(z, t)}{\partial z^2} + \mathbf{K}^3 \frac{\partial^3 \mathbf{u}(z, t)}{\partial z^3} + \mathbf{K}^4 \frac{\partial^4 \mathbf{u}(z, t)}{\partial z^4} + \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{u}(z, t)}{\partial t^2} \\ & = \mathbf{f}(z, t) \end{aligned} \quad (2.68)$$

Las matrices que deben obtenerse entonces son:

$$\mathbf{K}^0 = \int_C \mathbf{B}_1^T \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_1 dC \quad (2.69)$$

$$\mathbf{K}^1 = \int_C \mathbf{B}_1^T \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_2 dC - \int_C \mathbf{B}_2^T \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_1 dC \quad (2.70)$$

$$\mathbf{K}^2 = \int_C \mathbf{B}_1^T \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_3 dC - \int_C \mathbf{B}_2^T \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_2 dC + \int_C \mathbf{B}_3^T \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_1 dC \quad (2.71)$$

$$\mathbf{K}^3 = - \int_C \mathbf{B}_2^T \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_3 dC + \int_C \mathbf{B}_3^T \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_2 dC \quad (2.72)$$

$$\mathbf{K}^4 = \int_C \mathbf{B}_3^T \widehat{\mathbf{D}} \mathbf{B}_3 dC \quad (2.73)$$

$$\mathbf{M} = \int_C \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} h(x) dC \quad (2.74)$$

Realizando la transformada inversa de Fourier como en casos anteriores se obtiene finalmente:

$$(\mathbf{K}^0 - ik_z \mathbf{K}^1 - k_z^2 \mathbf{K}^2 + ik_z^3 \mathbf{K}^3 + k_z^4 \mathbf{K}^4 - \omega^2 \mathbf{M}) \widehat{\mathbf{u}}(x, y, k_z, \omega) = \widehat{\mathbf{f}}(x, y, k_z, \omega) \quad (2.75)$$

Se pueden combinar las ecuaciones de membrana (2.45) y las de flexión (2.75) en una misma expresión, para ello se define una matriz equivalente tal que:

$$\widehat{\mathbf{K}}_S(k_z, \omega) \widehat{\mathbf{u}}(x, y, k_z, \omega) = \widehat{\mathbf{f}}(x, y, k_z, \omega) \quad (2.76)$$

La formulación del sólido también se ha programado en Matlab, tanto las ecuaciones de la membrana como de la flexión.

2.1.3 Formulación del problema de interacción fluido-estructura

El procedimiento a seguir para acoplar las ecuaciones del problema fluido (2.21) y las ecuaciones del problema (2.76) es imponer el equilibrio y la compatibilidad de las presiones normales y desplazamientos,

además de que las tensiones cortantes sean nulas; todo ello en la interfase fluida Γ_F .

Como se dijo anteriormente, únicamente se centrará el estudio en la interacción fluido-sólido en la interfase Γ_F . De manera que la ecuación (2.76), puede subdividirse en otras dos:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{K}}_{ss} & \widehat{\mathbf{K}}_{sf} \\ \widehat{\mathbf{K}}_{fs} & \widehat{\mathbf{K}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_s \\ \widehat{\mathbf{u}}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{f}}_s \\ \widehat{\mathbf{f}}_f \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Donde el subíndice f indica los grados de libertad que el dominio sólido comparte con el dominio fluido y el subíndice s el resto de grados de libertad sólidos que quedan sin compartir.

El vector de carga $\widehat{\mathbf{f}}_f$ en la interfase fluido-sólido se obtiene a partir de la integración de las presiones sobre Γ_F , así se tiene que:

$$\widehat{\mathbf{f}}_f = \int_{\Gamma_F} \mathbf{N}'^T \mathbf{n} \mathbf{N} \widehat{p}_f d\Gamma = \mathbf{R}^T \widehat{p}_f \quad (2.78)$$

Sustituyendo en la ecuación (2.77):

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{K}}_{ss} & \widehat{\mathbf{K}}_{sf} \\ \widehat{\mathbf{K}}_{fs} & \widehat{\mathbf{K}}_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_s \\ \widehat{\mathbf{u}}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{f}}_s \\ \mathbf{R}^T \widehat{p}_f \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

Se realiza un procedimiento similar para el caso de las ecuaciones del fluido (2.21):

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{F}}_{ff} & \widehat{\mathbf{F}}_{fd} \\ \widehat{\mathbf{F}}_{df} & \widehat{\mathbf{F}}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{p}}_f \\ \widehat{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 \rho \mathbf{R} \widehat{\mathbf{u}}_f \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

En este caso el subíndice f representa los grados de libertad que el subdominio fluido comparte con el sólido y d indica el resto de grados de libertad del fluido que no son compartidos.

Finalmente solo quedaría realizar el acoplamiento de las ecuaciones (2.79) y (2.80), llevado a cabo mediante la imposición de las condiciones de equilibrio y compatibilidad de las presiones normales y desplazamientos en la interfase Γ_F , contanto también con la condición de tensiones cortantes nulas. De modo que el ensamblado de ambas ecuaciones quedaría:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{K}}_{ss} & \widehat{\mathbf{K}}_{sf} & 0 & 0 \\ \widehat{\mathbf{K}}_{fs} & \widehat{\mathbf{K}}_{ff} & -\mathbf{R}^T & 0 \\ 0 & -\omega^2 \rho \mathbf{R} & \widehat{\mathbf{F}}_{ff} & \widehat{\mathbf{F}}_{fd} \\ 0 & 0 & \widehat{\mathbf{F}}_{df} & \widehat{\mathbf{F}}_{dd} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{u}}_s \\ \widehat{\mathbf{u}}_f \\ \widehat{\mathbf{p}}_f \\ \widehat{\mathbf{p}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathbf{f}}_s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

La ecuación (2.81) se resolverá para cada frecuencia o número de onda para obtener las soluciones del problema de acoplamiento fluido-sólido.

3 FUNCIONES DE FORMA

En este apartado se tratará de exponer los diferentes tipos de funciones de forma que se pueden emplear en la resolución de problemas del MEF. Como se explicó con anterioridad, el MEF es un método de aproximación por lo que debe emplear funciones que traten de aproximar la solución a la exacta, en este punto es donde entran las funciones de forma que son polinomios de interpolación los cuales buscan la resolución rápida y correcta de las ecuaciones del MEF.

3.1. Introducción

En los problemas de elementos finitos una vez se ha obtenido tanto la discretización como la malla del dominio en estudio, las diferentes incógnitas a resolver se aproximan a partir de una serie de funciones de aproximación que realmente son funciones de interpolación.

Estas funciones se denominan comúnmente funciones de forma y están expresadas en términos de los valores nodales. Estas funciones formulan más fácilmente el MEF y también facilitan la resolución numérica del problema. Con las funciones de forma realmente puede controlarse el grado de precisión que se requiere para la solución del problema, ya que aumentando el orden del polinomio de interpolación la solución será más próxima a la correcta.

Como el dominio está discretizado, con las funciones de forma se puede obtener la solución en cada subdominio empleando la solución en los propios nodos de la malla, así mediante la aproximación con estas funciones se llegaría a la solución en cada subdominio y por tanto en cualquier punto del dominio.

Las funciones de forma se emplean tanto para la discretización del espacio, es decir el propio dominio en estudio, como para la aproximación de la función incógnita dentro del subdominio, es decir en cada uno de los elementos que conforman la discretización.

Por tanto en el MEF se dan dos tipos de funciones de aproximación: unas se emplean para interpolar la función incógnita en los nodos (por ejemplo el campo de desplazamientos) que son las funciones de forma N_i y por otra parte están las que se emplean para aproximar la geometría del elemento y se denominan funciones de interpolación de la geometría \bar{N}_i . Los puntos donde emplear estas funciones pueden o no ser coincidentes, el caso de coincidencia es para elementos isoparamétricos cuyo estudio se realizará posteriormente.

Centrando el estudio en el primero de los tipos, si se quiere interpolar una función ϕ en función del valor de un conjunto de parámetros a_i para cada elemento se deben definir una serie de funciones de forma; de manera que:

$$\phi(x, y, z) \approx \sum N_i(x, y, z)a_i = \mathbf{N}(x, y, z)\mathbf{a} \quad (3.1)$$

Donde \mathbf{N} es la matriz de funciones de forma y \mathbf{a} es un vector con los valores de los parámetros en los distintos nodos, es decir contiene los grados de libertad del elemento. Los grados de libertad que se toman en el MEF son los valores de la función incógnita ϕ en los nodos del elemento. Esto es lo que se denomina interpolación nodal.

En la expresión anterior se han empleado coordenadas espaciales para describir la función de forma pero esto no siempre es así. Normalmente se emplean por su mayor sencillez y por facilitar los cálculos, las coordenadas naturales o locales (ξ, η) en cuyo caso el elemento está normalizado. La transformación de unas coordenadas a

otras se verá en apartados posteriores.

3.2. Interpolación nodal y Propiedades de las funciones de forma

Un estudio de la interpolación nodal que se lleva a cabo en el MEF permitirá explicar el origen de la ecuación (3.1) y en definitiva lo fundamental de este método.

Cuando en un elemento finito se interpola polinómicamente una función $\phi(x, y, z)$ se tiene:

$$\phi(x, y, z) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \dots + \alpha_n x^a y^b z^c = \mathbf{p}^T \boldsymbol{\alpha} \quad (3.2)$$

El vector \mathbf{p} contiene los términos del desarrollo polinómico y $\boldsymbol{\alpha}$ los coeficientes de interpolación. De modo que para un elemento definido por q nodos se tendrá lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & \dots \\ 1 & x_2 & y_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_q & y_q & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\phi} = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha} \quad (3.3)$$

La matriz \mathbf{C} sería la que contiene las posiciones de los puntos nodales y $\boldsymbol{\phi}$ alberga los valores de las funciones de forma en cada uno de los nodos. Suponiendo que existe la inversa de \mathbf{C} , despejando el vector de coeficientes $\boldsymbol{\alpha}$ se tendría que:

$$\phi(x, y, z) = \mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\phi} \quad (3.4)$$

Siendo $\mathbf{p}^T \mathbf{C}^{-1}$ las denominadas funciones de forma que comúnmente se denominan N , de ahí se obtiene la ecuación (3.1).

Una primera condición para realizar la interpolación es que el número de componentes del desarrollo polinómico sea igual al número de nodos del elemento, sin embargo cuando existe más de un grado de libertad por nodo hay que realizar la interpolación por cada uno de los grados de libertad. Por ejemplo para la elasticidad bidimensional se tienen dos variables incógnitas:

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^q N_i(x, y) u_i \quad v(x, y) = \sum_{i=1}^q N_i(x, y) v_i \quad (3.5)$$

Las funciones de forma son tal vez la parte más importante del MEF ya que se encargan de aproximar los valores de la función en cada elemento a partir de los valores nodales ya conocidos. Por este motivo las funciones de forma siempre cumplen las dos siguiente condiciones debido a la vinculación que existe entre los nodos y las mismas:

- a) El valor de una función de forma asociada a un nodo debe valer la unidad cuando está en ese nodo y debe valer cero en el resto de nodos del elemento. De forma matemática sería:

$$N_i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (3.6)$$

Algunos ejemplos de esa propiedad son los siguientes:

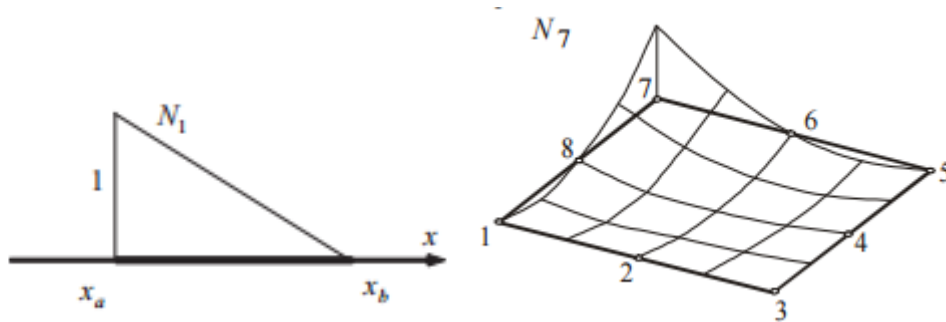


Figura 3-1. Funciones de forma para elemento 1D y 2D

- b) El sumatorio de todas las funciones de forma en un elemento debe ser igual a la unidad en todo el dominio, así se cumpliría la condición a) ya que en ese caso la función valía uno en el nodo y cero en el resto.

Otra propiedad fundamental y también un requisito, como se verá en apartados posteriores, es que las funciones de forma deben cumplir continuidad en la frontera entre elementos. Por ejemplo en elasticidad es necesaria una continuidad C^0 , esto conlleva que en cada una de las fronteras la interpolación solo puede depender de las funciones de forma de los nodos que pertenecen a dicha frontera; de esto se deduce que en la función de forma asociada a un nodo debe ser nula en todas aquellas fronteras donde no está dicho nodo. Esto puede comprobarse también en la figura 3-1, donde se ve que la función de forma es nula en el contorno formado por los nodos 3, 4 y 5 y en el formado por 1, 2 y 3.

3.3. Transformación de coordenadas globales a naturales

Antes se comentó la importancia de las coordenadas naturales o locales en el MEF, es fundamental su uso ya que pueden usarse para todo tipo de dominio aunque tenga una gran complejidad. Esto se debe a que todo elemento real lo convierten en un elemento normalizado a la unidad, sin presencia de curvaturas ni de irregularidades. Sin embargo estos elementos no son reales por lo que se debe hallar una manera de convertir los elementos en coordenadas naturales en elementos en coordenadas globales (cartesianas).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = f \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Siendo f un función capaz de convertir las coordenadas naturales en globales. Normalmente esta transformación de coordenadas de elementos se realiza utilizando las funciones de forma, así conocidas las coordenadas cartesianas de los nodos se puede hacer una interpolación de las coordenadas de un punto.

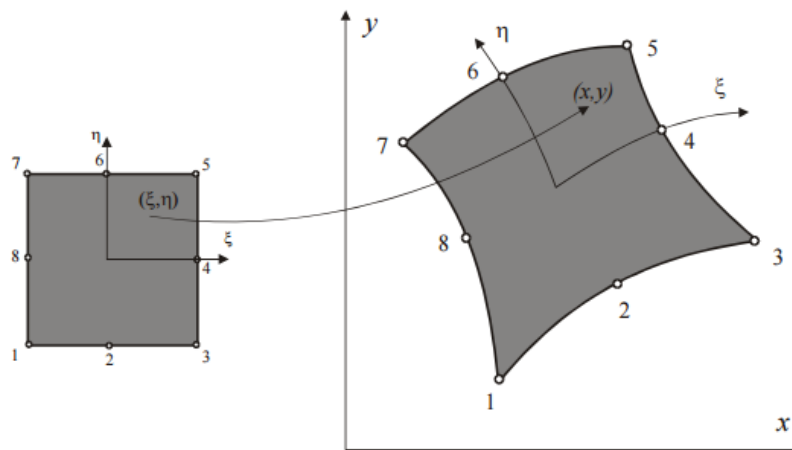


Figura 3-2. Transformación de coordenadas naturales a globales

De modo que se definen las siguientes expresiones para poder realizar esto último:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^q \bar{N}_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^q \bar{N}_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para el caso bidimensional se dan esas aproximaciones donde las funciones \bar{N}_i son funciones de aproximación a la geometría que, como se detalló en la introducción, no tiene por qué coincidir con las funciones empleadas para la interpolación de la variable incógnita. En este punto es donde cobra importancia el elemento isoparamétrico.

3.3.1. Elementos isoparamétricos

Las funciones de interpolación de la variable incógnita N_i y las de aproximación a la geometría \bar{N}_i pueden no coincidir ya que dependerá del problema en cuestión. Es decir, geometrías complejas pueden requerir utilizar polinomios de alto grado para la aproximarlas razonablemente mientras que si la geometría es sencilla puede bastar con una interpolación geométrica lineal, todo ello independiente de la interpolación utilizada en el cálculo de la variable incógnita (por ejemplo el campo de desplazamientos).

Cuando las funciones de geometría son polinomios de mayor grado que las funciones de forma utilizadas para interpolar los desplazamientos, por ejemplo; la formulación recibe el nombre de *superparamétrica*. Cuando es justo al contrario la formulación se denomina *subparamétrica*. Sin embargo el caso más importante sin duda es cuando las funciones de forma y las funciones de aproximación a la geometría tienen ambas el mismo grado, entonces se denomina formulación *isoparamétrica*.

Esta última será precisamente la formulación que se utilizará, por lo que los elementos son isoparamétricos. De esta manera el cálculo de las matrices se facilita en gran medida ya que estos elementos simplifican el paso de unas coordenadas a otras.

Por tanto debido a esto último se tendrá que:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^q N_i(\xi, \eta) x_i \\ y &= \sum_{i=1}^q N_i(\xi, \eta) y_i \end{aligned} \quad (3.9)$$

Donde N_i son las funciones de forma del elemento. Las ecuaciones (3.9) relacionan entonces las coordenadas cartesianas de un punto y las naturales. Dicha relación debe ser unívoca, para lo cual debe cumplirse que el determinante de la matriz Jacobiano de la transformación de coordenadas cartesianas a naturales sea de signo constante en todo el elemento. Con la definición del Jacobiano se hallará además la relación entre las derivadas de unas coordenadas y otras, fundamental para el cálculo de las matrices de la formulación del problema fluido y sólido.

La definición de la matriz Jacobiano pasa por las derivadas de las funciones de forma. Como la transformación que se hace es $(x, y) \leftrightarrow (\xi, \eta)$, aplicando la regla de la cadena se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (3.10)$$

En forma matricial puede hallarse la matriz Jacobiano:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}^e} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathbf{J}^e \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Siendo \mathbf{J}^e la matriz Jacobiano de la transformación de coordenadas naturales a cartesianas. La transformación inversa sería:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{pmatrix} = [\mathbf{J}^e]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}^e|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Donde $|\mathbf{J}^e|$ es el determinante del Jacobiano. Este determinante también permite expresar el diferencial de área en coordenadas naturales:

$$dxdy = |\mathbf{J}^e| d\xi d\eta \quad (3.13)$$

Por tanto para poder realizar la integración para el cálculo de matrices es imprescindible el cálculo del Jacobiano y de su determinante. Para calcular los términos del Jacobiano se emplea la transformación isoparamétrica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial x}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i & \frac{\partial y}{\partial \eta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{aligned} \quad (3.14)$$

El Jacobiano quedaría entonces como:

$$\mathbf{J}^e = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Una vez se obtiene el Jacobiano, se pueden calcular las distintas matrices. Por ejemplo si se quiere calcular una matriz de rigidez, ecuación (2.58) suponiendo espesor h constante, se procede de la siguiente forma:

$$\mathbf{K}_{ij} = \int_A \mathbf{B}_i^T \mathbf{D} \mathbf{B}_j dxdy = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{B}_i^T(\xi, \eta) \mathbf{D} \mathbf{B}_j(\xi, \eta) |\mathbf{J}^e| d\xi d\eta = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{G}_{ij}(\xi, \eta) \frac{1}{|\mathbf{J}^e|} d\xi d\eta \quad (3.16)$$

Siendo \mathbf{G}_{ij} una matriz equivalente al producto de los términos del integrando. Se deduce que los términos del integrando son funciones racionales en (ξ, η) a menos que el determinante del Jacobiano sea constante. Esto solo ocurre en elementos rectangulares o triangulares de lados rectos, en estos casos las integrales se simplifican enormemente.

3.4. Funciones de forma de elementos unidimensionales

Este tipo de elementos son muy útiles, sobre todo para el mallado de contornos y también a los casos de vigas o láminas en 2.5D. A continuación se muestran unos ejemplos de las mismas:

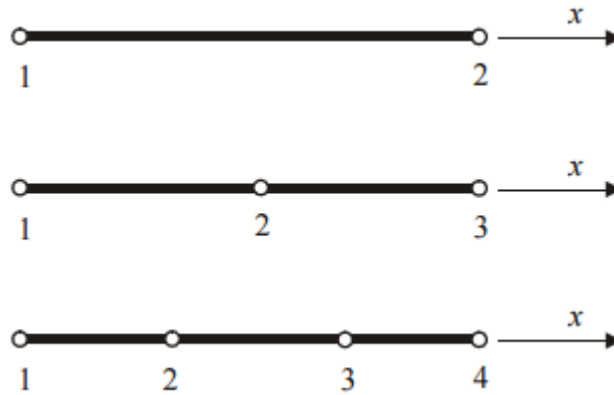


Figura 3-3. Familia de elementos unidimensionales

En el caso de los elementos unidimensionales la interpolación polinómica se puede realizar de dos formas: basada en los polinomios de interpolación de Lagrange o basada en polinomios de interpolación de Hermite.

3.4.1. Elementos de Lagrange

Los elementos de Lagrange son aquellos en los que se emplean funciones de interpolación de la familia de Lagrange, las cuales tienen las propiedades especificadas en el apartado 3.2. Las funciones de forma se construyen a partir de las propiedades dichas antes y con la longitud de dicho elemento. Igualmente que en dos dimensiones también pueden pasarse a coordenadas naturales, solo que en este caso no es necesario ni realizar el Jacobiano.

Hay varios tipos de elementos dependiendo del grado del polinomio y por tanto de los nodos que albergue, por ejemplo un elemento lineal tiene 2 nodos, uno cuadrático tiene 3 y otro cúbico tiene 4. Por tanto se puede decir que:

$$\text{orden} = k - 1$$

Siendo k el número de nodos que se incluyen en el elemento. Los elementos pueden llegar a ser de orden infinito pero en este documento únicamente los definiremos hasta orden cuártico.

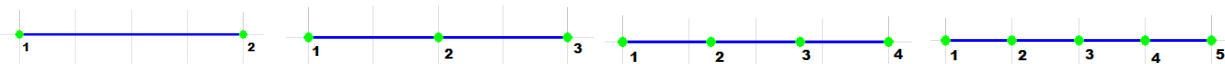


Figura 3-4. Elemento lineal, cuadrático, cúbico y cuártico

Las diferentes funciones de forma se obtiene en coordenadas naturales a partir de:

$$N_i = \prod_{j=1(j \neq i)}^k \left(\frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right) \quad (3.17)$$

De esta manera se pueden hallar las diferentes funciones de forma para cada tipo de elemento. En este trabajo estas funciones serán empleadas sobre todo en contorno del fluido y también en el problema sólido para el caso de la membrana.

La representación y expresión de las mismas es la siguiente:

3.4.1.1 Elemento lineal unidimensional

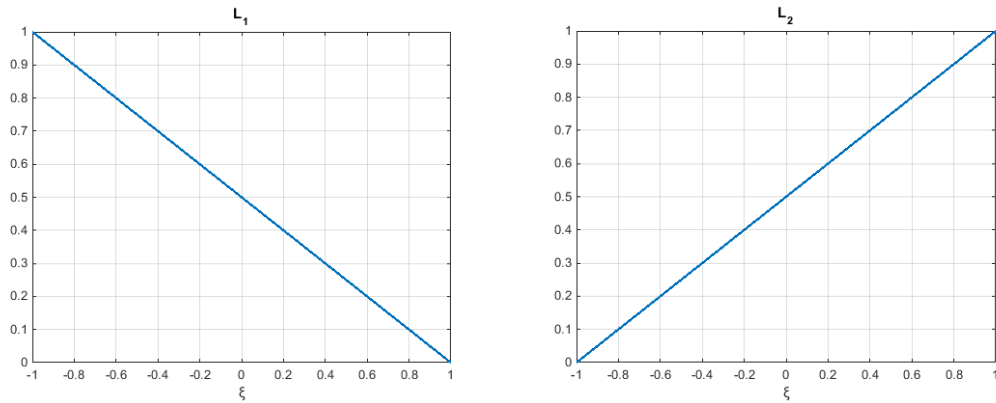


Figura 3-5. Funciones de forma elemento lineal de Lagrange

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2}(1 - \xi) \\
 N_2 &= \frac{1}{2}(1 + \xi)
 \end{aligned}
 \tag{3.18}$$

3.4.1.2 Elemento cuadrático unidimensional

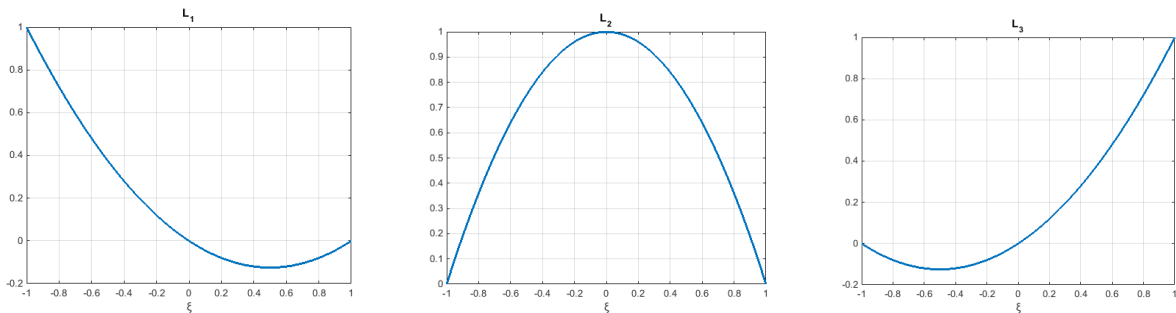


Figura 3-6. Funciones de forma cuadráticas de Lagrange

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \\
 N_2 &= (1 + \xi)(1 - \xi) \\
 N_3 &= \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)
 \end{aligned}
 \tag{3.19}$$

3.4.1.3 Elemento cúbico unidimensional

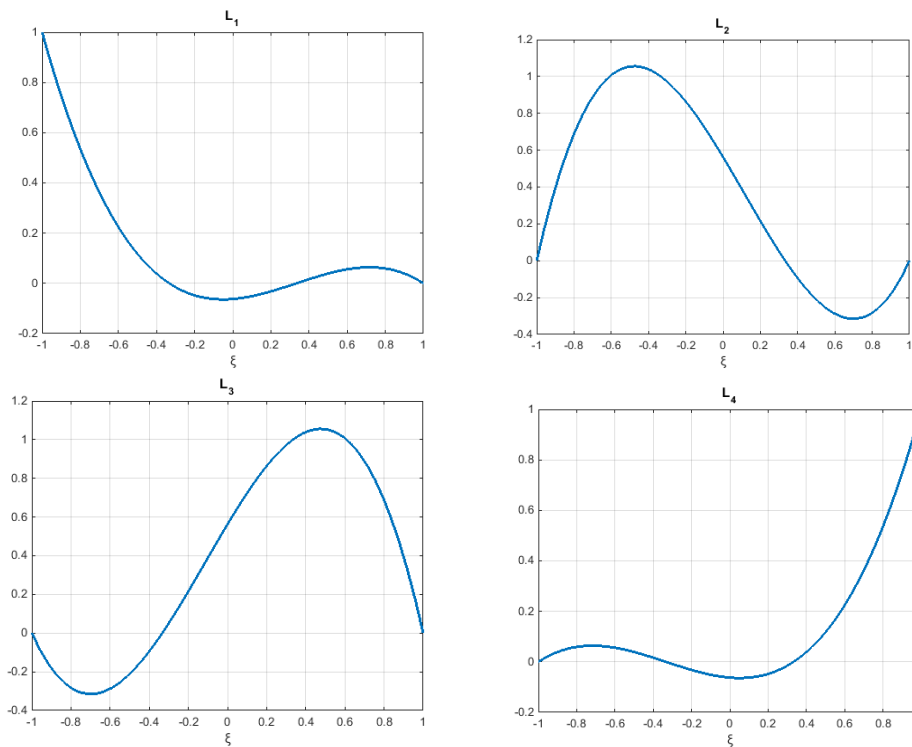
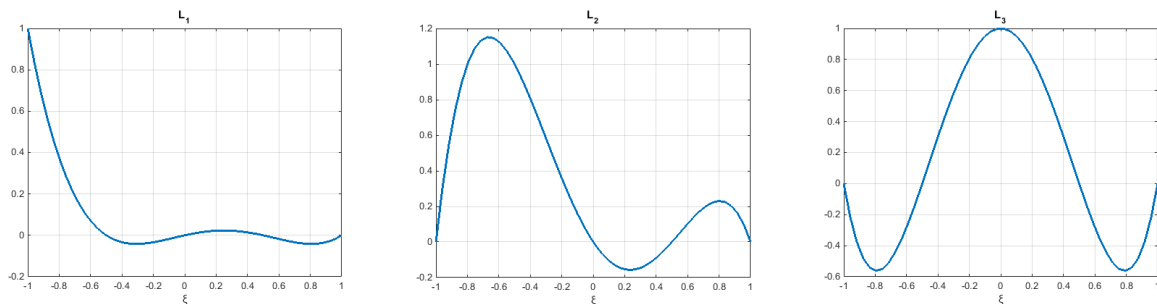


Figura 3-7. Funciones de forma cúbicas de Lagrange

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{9}{16} \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \left(\xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\
 N_2 &= \frac{27}{16} (\xi + 1) \left(\xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\
 N_3 &= -\frac{27}{16} (\xi + 1) \left(\xi + \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\
 N_4 &= \frac{9}{16} (\xi + 1) \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \left(\xi - \frac{1}{3} \right)
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

3.4.1.4 Elemento cuártico



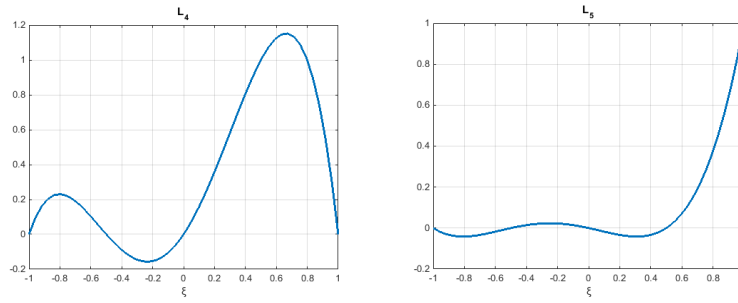


Figura 3-8. Funciones de forma cuárticas de Lagrange

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \frac{1}{6} \xi(4\xi^2 - 1)(\xi - 1) \\
 N_2 &= \frac{4}{3} \xi(\xi^2 - 1)(1 - 2\xi) \\
 N_3 &= (\xi^2 - 1)(1 - 4\xi^2) \\
 N_4 &= \frac{4}{3} \xi(1 - \xi^2)(1 + 2\xi) \\
 N_5 &= \frac{1}{6} \xi(4\xi^2 - 1)(\xi + 1)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

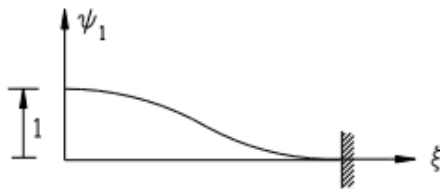
3.4.2. Elementos de Hermite

Así como los polinomios de Lagrange permiten obtener funciones de interpolación de diferente orden cuando los valores de la variable incógnita se especifican en los nodos, en el caso de los polinomios de Hermite se pueden construir funciones de interpolación cuando tanto los valores de la variable incógnita como el de sus derivadas están especificadas en los nodos. En este documento los elementos de Hermite y sus funciones de forma se emplearán para el problema sólido en el caso de la flexión.

Los polinomios de Hermite tendrán un grado de $2k - 1$ y se obtienen a partir de un sistema de ecuaciones constituidas por unos polinomios y una serie de condiciones iniciales:

$$H_i^k(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + a_{k-2} x^{k-2} + \dots + a_1 x + a_0 \tag{3.22}$$

Donde las condiciones iniciales dependen de cada polinomio, un ejemplo sería el siguiente:



$$\begin{aligned}
 H_i^k(x_i) &= 1 \\
 H_i^k(x_j) &= 0 \quad \forall j \neq i \\
 \frac{dH_i^k(x_i)}{dx} &= 0 \\
 \frac{dH_i^k(x_j)}{dx} &= 0 \quad \forall j \neq i
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

De forma que todas las funciones de interpolación deben cumplir estas condiciones dependiendo de cada polinomio.

Las distintas funciones de forma se hallan ahora mediante polinomios de Hermite, de manera que para los mismos elementos de la figura 3-4 empleando la ecuación (3.22) y las distintas condiciones como la (3.23), se obtienen las siguientes funciones de forma:

3.4.2.1 Elemento lineal de Hermite

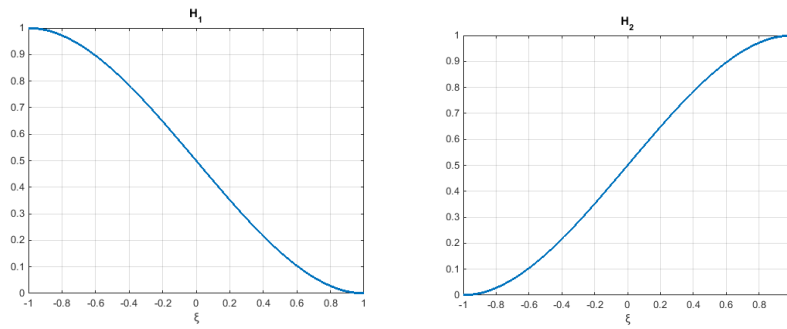


Figura 3-9. Funciones de forma lineales de Hermite

3.4.2.2 Elemento cuadrático de Hermite

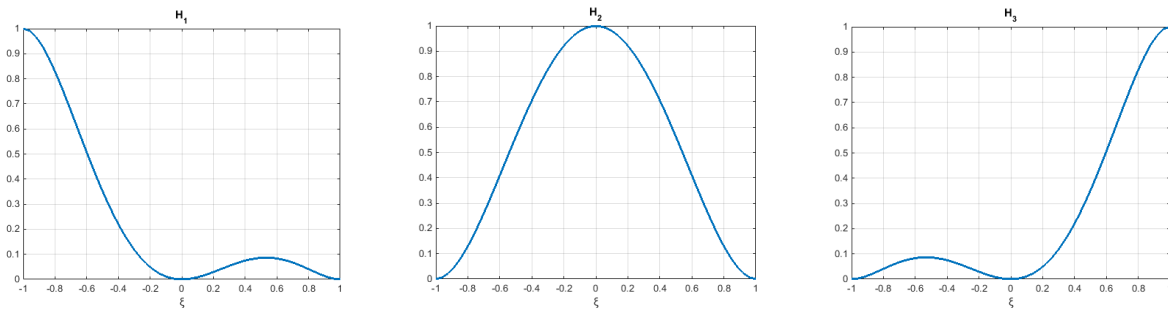


Figura 3-10. Funciones de forma cuadráticos de Hermite

3.4.2.3 Elemento Cúbico de Hermite

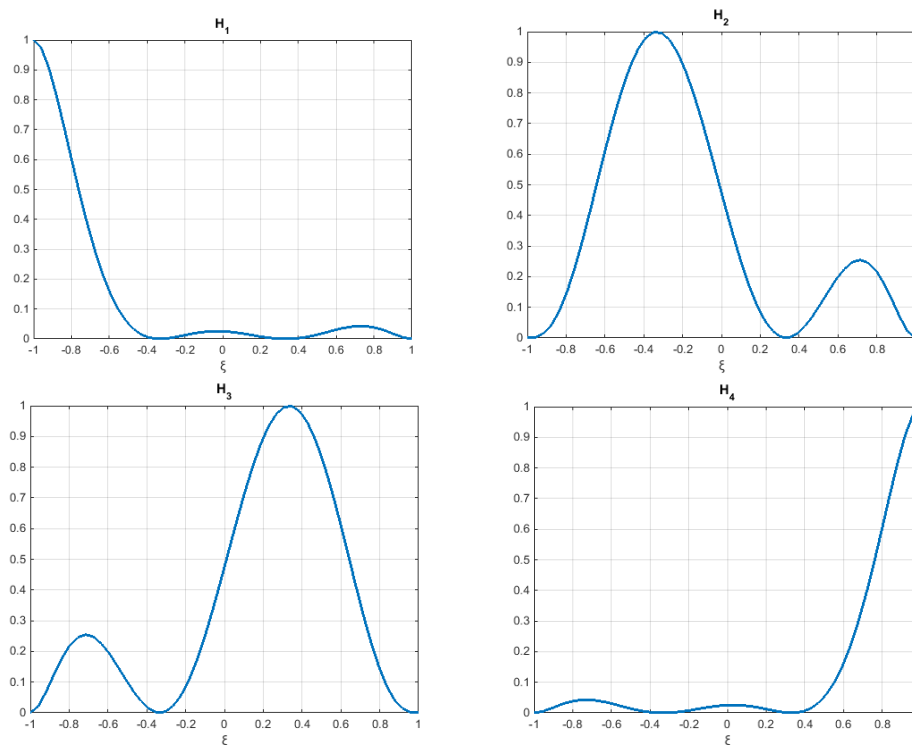


Figura 3-11. Funciones de forma cúbicas de Hermite

3.4.2.4 Elemento cuártico de Hermite

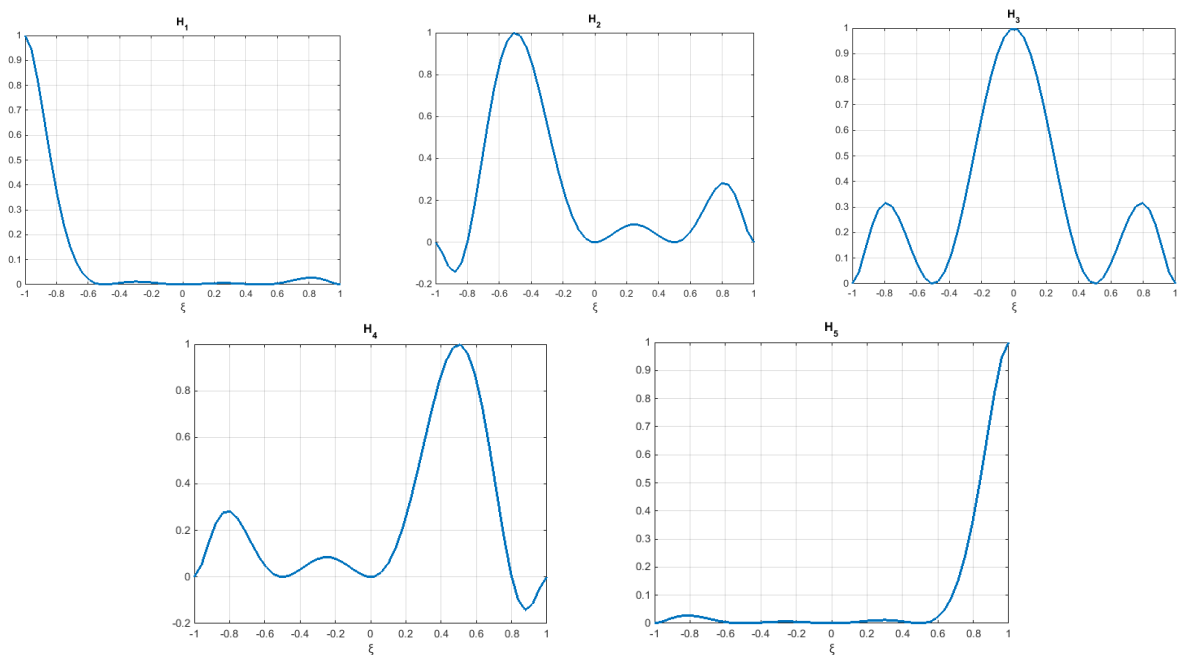


Figura 3-12. Funciones de forma lineales de Hermite

3.5. Funciones de forma de elementos bidimensionales

Para definir los elementos bidimensionales se necesitan dos coordenadas y por tanto pueden formarse elementos mucho más útiles para la resolución de problemas del MEF que en el caso de elementos unidimensionales. Los elementos empleados más usuales son el triangular y el cuadrilátero.

Sin embargo en 2D se da una problemática de la interpolación en coordenadas globales, no como ocurría en elementos unidimensionales donde la continuidad C^0 entre elementos quedaba garantizada independientemente de si la interpolación se realizaba en coordenadas naturales o globales ya que la conexión entre elementos contiguos se realiza únicamente a través de los nodos extremos. Sin embargo en 2D y 3D dicha continuidad no siempre queda garantizada en el caso de utilizar interpolación en coordenadas globales debido a que los elementos contiguos están conectados mediante nodos y aristas.

Cuando se utiliza interpolación en coordenadas cartesianas la continuidad C^0 tan solo puede ser garantizada con elementos triangulares lineales (2D) y los tetraedros lineales (3D), por ello para las funciones de forma bidimensionales se empleará por lo general la interpolación en coordenadas naturales ya que garantizan la continuidad para cualquier tipo de elemento

A continuación se expondrán las diferentes funciones de forma para elementos cuadriláteros.

3.5.1. Elemento cuadrilátero

Los elementos cuadriláteros por su parte son ampliamente usados debido a que cubren una mayor superficie del dominio que los triangulares y por tanto se necesita una discretización con menos elementos.

Dentro de los elementos cuadriláteros hay que diferenciar entre dos tipos: los elementos Lagrangianos y los elementos Serendíptos; sin embargo solo se explicarán los primeros ya que son los que principalmente se han empleado en la realización de este trabajo.

3.5.2.1 Elementos Lagrangianos

Estos elementos se denominan así porque se basan en interpolaciones polinómicas de Lagrange en dos dimensiones y por la disposición de los nodos en el elemento, ya que están distribuidos en forma de malla regular como se muestra en la imagen siguiente:

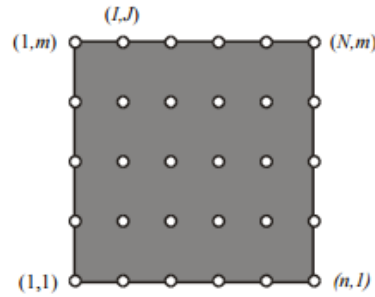


Figura 3-13. Distribución de nodos en elemento Lagrangiano

Se puede observar en la imagen que una vez se defina el número de nodos en cada una de las direcciones ξ y η dicho número no puede variar a lo largo de las diferentes líneas nodales, esta es la principal característica que diferencia un elemento Lagrangiano de uno Serendípito.

Las funciones de forma de un nodo cualquiera se obtendrán como producto de dos polinomios de Lagrange unidimensionales en cada una de las dos coordenadas ξ y η correspondientes a dicho nodo. Así, si $l_i^i(\xi)$ es el polinomio de Lagrange de grado I en dirección ξ del nodo i y $l_j^j(\eta)$ es el de grado J en dirección η , la función de forma de dicho nodo será:

$$N_i(\xi, \eta) = l_i^i(\xi) l_j^j(\eta) \quad (3.24)$$

Donde $l_i^i(\xi)$ y $l_j^j(\eta)$ son los polinomios de Lagrange unidimensionales mostrados en la ecuación (3.17) cambiando las coordenadas según el caso.

Las funciones de forma de los elementos Lagrangianos son fáciles de formular pero no se suelen emplear con gran frecuencia debido a que en el polinomio resultante aparecen términos de grado elevado pero no términos de menor grado, por lo que el polinomio completo no es muy eficaz. Esto puede comprobarse con el triángulo de Pascal, por ejemplo para el elemento cuadrático sería:

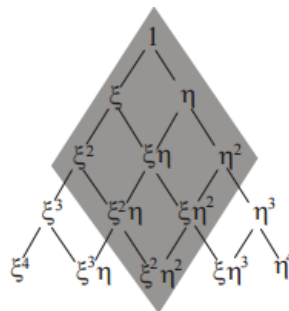


Figura 3-14. Triángulo de Pascal para el elemento cuadrático

A continuación se va a proceder a la obtención de las funciones de forma para cada uno de los tipos de elemento cuadrático Lagrangiano que se han empleado en este trabajo, es decir elemento lineal, cuadrático, cúbico y cuártico.

3.5.2.1.1 Elemento lineal de 4 nodos

Este elemento es el más sencillo de la familia Lagrangiana y tiene únicamente 4 nodos como se muestra a continuación. En coordenadas naturales la representación del elemento y la ordenación de los nodos será la siguiente:

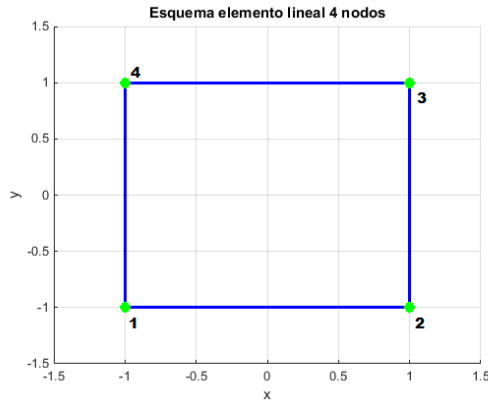


Figura 3-15. Elemento cuadrilátero de orden lineal

Para la obtención de las funciones de forma en un nodo i en coordenadas naturales tendremos que recurrir a los polinomios de Lagrange unidimensionales para el caso lineal descritos en las ecuaciones (3.18). De modo que con esas ecuaciones y la relación (3.24) pueden hallarse las funciones de forma en cada uno de los nodos.

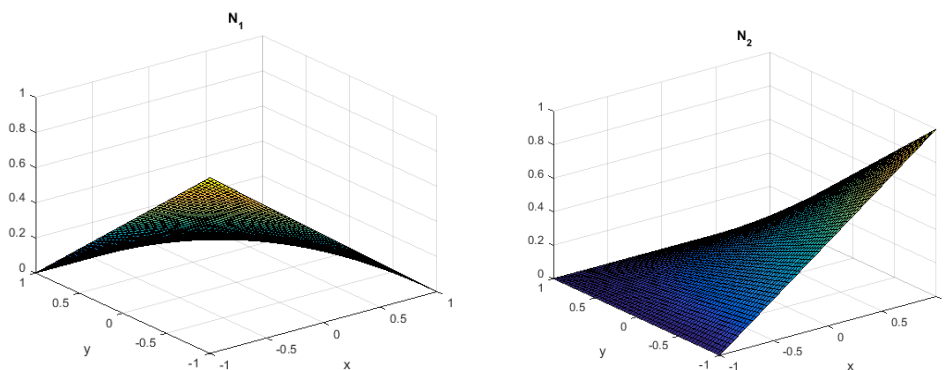
La expresión y la representación de las mismas es la siguiente:

$$N_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i) \tag{3.25}$$

Siendo ξ_i y η_i las mostradas en la siguiente tabla:

| Nodo | ξ_i | η_i |
|------|---------|----------|
| 1 | -1 | -1 |
| 2 | 1 | -1 |
| 3 | 1 | 1 |
| 4 | -1 | 1 |

Sustituyendo los diferentes valores se hallan las funciones de forma en cada uno de los nodos, las cuales se representan a continuación:



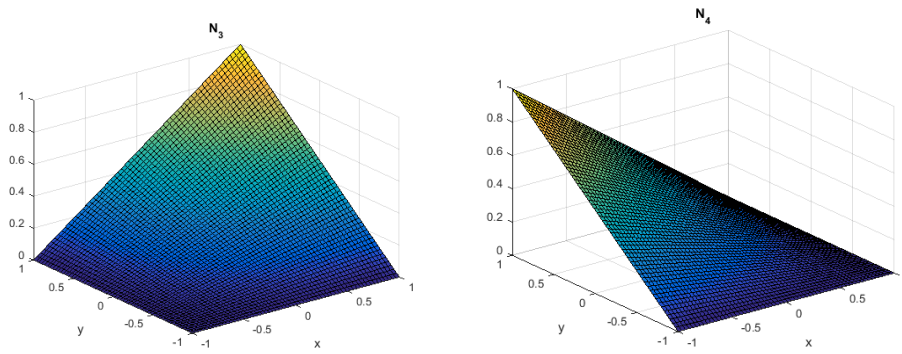


Figura 3-16. Funciones de forma elemento lineal

3.5.2.1.2 Elemento cuadrático de 9 nodos

En este caso para formar las funciones de forma serán necesarios polinomios de Lagrange de segundo orden y estos serán los que se emplearon en el elemento unidimensional en las ecuaciones (3.19). El elemento cuadrático de 9 nodos tiene la siguiente forma:

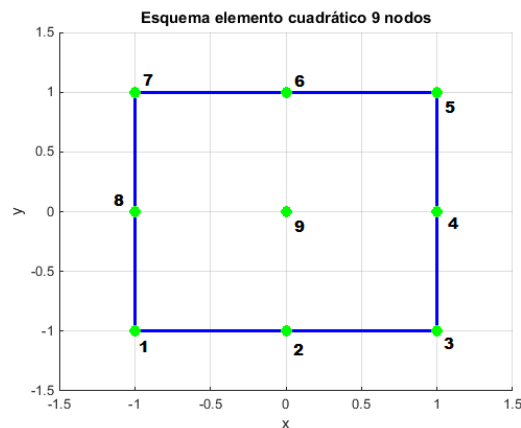


Figura 3-17. Elemento cuadrilátero de orden cuadrático

En este caso se tendrán 9 funciones de forma las cuales se obtendrán a partir de las ecuaciones (3.19) y (3.24). El elemento cuadrático cuenta con tres tipos de ecuaciones:

- a) Nodos esquina

$$N_i = \frac{1}{4}(\xi^2 + \xi\xi_i)(\eta^2 + \eta\eta_i) \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad (3.26)$$

- b) Nodos intermedios en los lados

$$N_i = \frac{1}{2}\eta_i^2(\eta^2 - \eta\eta_i)(1 - \xi^2) + \frac{1}{2}\xi_i^2(\xi^2 - \xi\xi_i)(1 - \eta^2) \quad i = 2, 4, 6, 8 \quad (3.27)$$

- c) Nodo central

$$N_9 = (1 - \xi^2)(1 - \eta^2) \quad i = 1, 3, 5, 7 \quad (3.28)$$

Donde los valores ξ_i y η_i se toman de la siguiente tabla:

| Nodo | ξ_i | η_i |
|------|---------|----------|
| 1 | -1 | -1 |
| 2 | 0 | -1 |
| 3 | 1 | -1 |
| 4 | 1 | 0 |
| 5 | 1 | 1 |
| 6 | 0 | 1 |
| 7 | -1 | 1 |
| 8 | -1 | 0 |
| 9 | 0 | 0 |

Sustituyendo estos valores y representando las funciones se obtiene que:

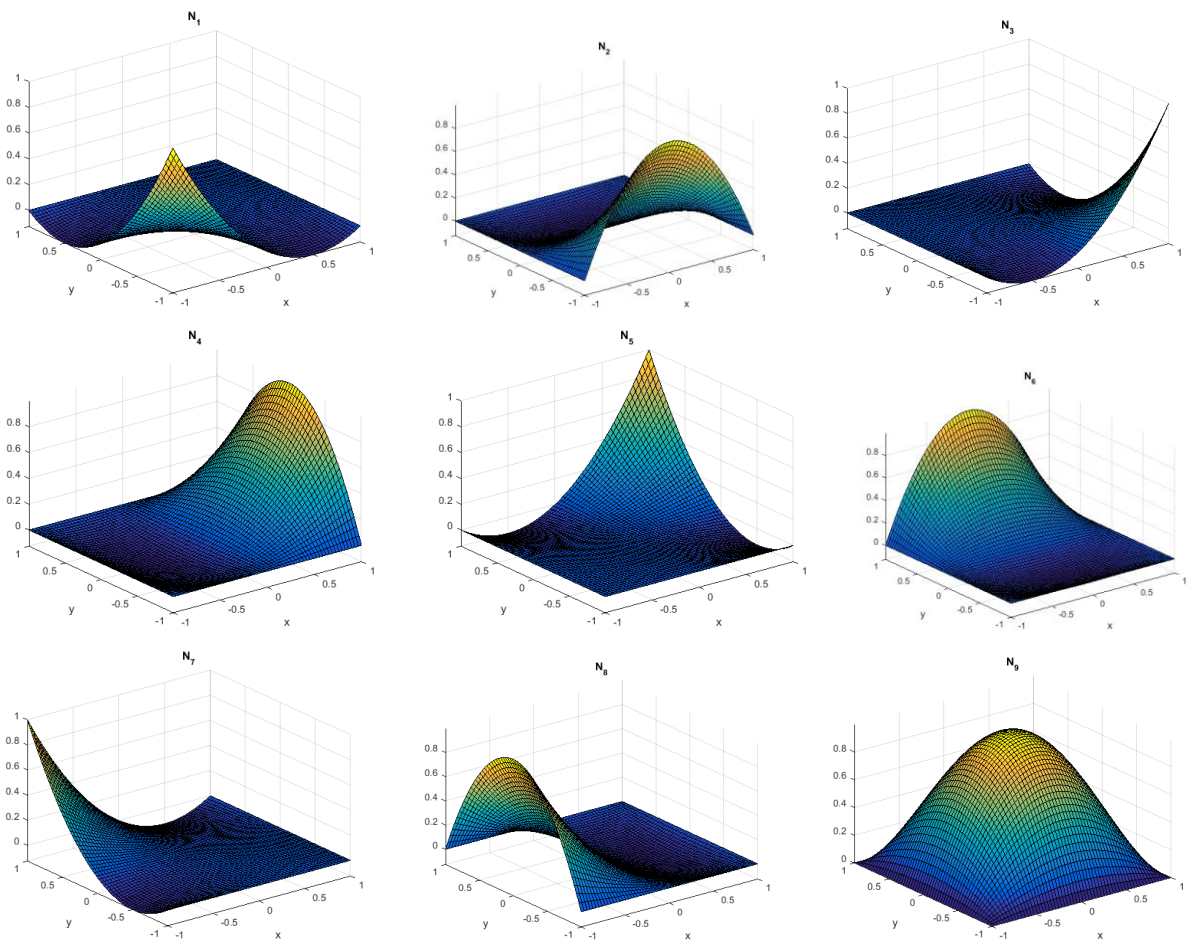


Figura 3-18. Funciones de forma elemento cuadrático

3.5.2.1.3 Elemento cúbico de 16 nodos

Este elemento tiene 4 nodos en cada una de las direcciones ξ y η , cuya representación y ordenación de los nodos puede verse en la siguiente imagen:

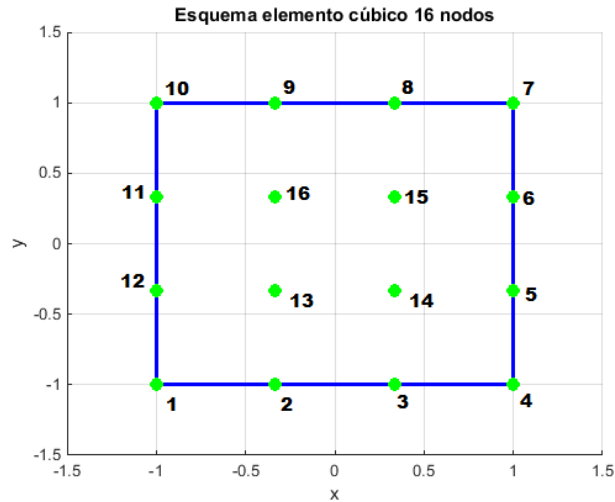
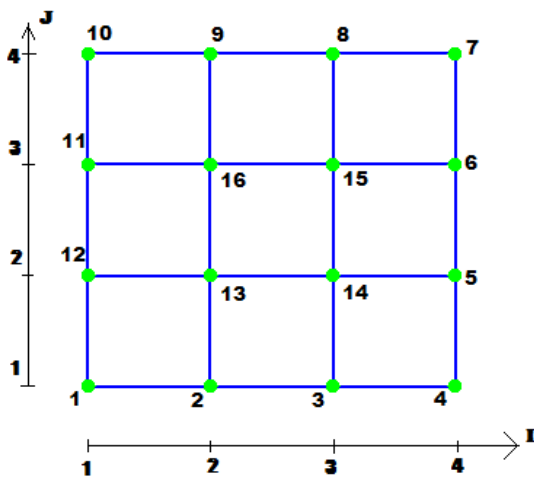


Figura 3-19. Elemento cuadrilátero de orden cúbico

Las funciones de forma en este caso se obtienen por producto de dos polinomios de Lagrange de tercer grado en ξ y η que se deducen de (3.20). De modo que estas ecuaciones junto con la (3.24) permiten obtener las siguientes expresiones, que de forma comprimida darán como resultado cada una de las funciones de forma:

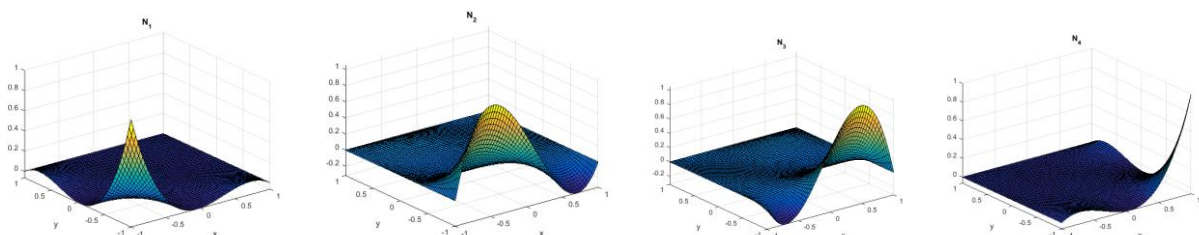
$$N_i(\xi, \eta) = N_I(\xi)N_J(\eta) \quad i = 1, \dots, 16 \quad (3.29)$$

Donde las funciones $N_I(\xi)$ y $N_J(\eta)$ se obtienen a partir de la siguiente tabla y figura:



| I | $N_I(\xi)$ |
|---|------------------------------------------------|
| 1 | $N_1(\xi) = \frac{1}{16}(\xi - 1)(1 - 9\xi^2)$ |
| 2 | $N_2(\xi) = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)$ |
| 3 | $N_3(\xi) = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)$ |
| 4 | $N_4(\xi) = \frac{1}{16}(\xi + 1)(9\xi^2 - 1)$ |

La misma tabla solo que con la variable η valdría para describir $N_J(\eta)$. De modo que una vez se obtengan las funciones de forma su representación será:



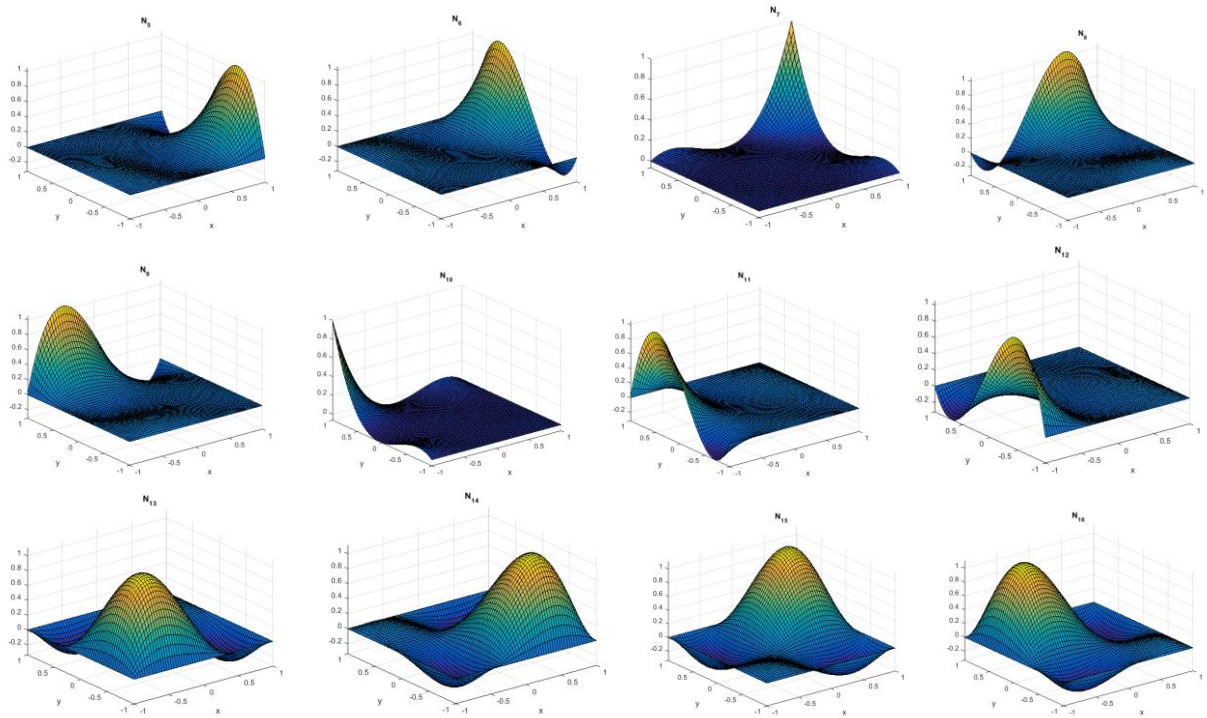
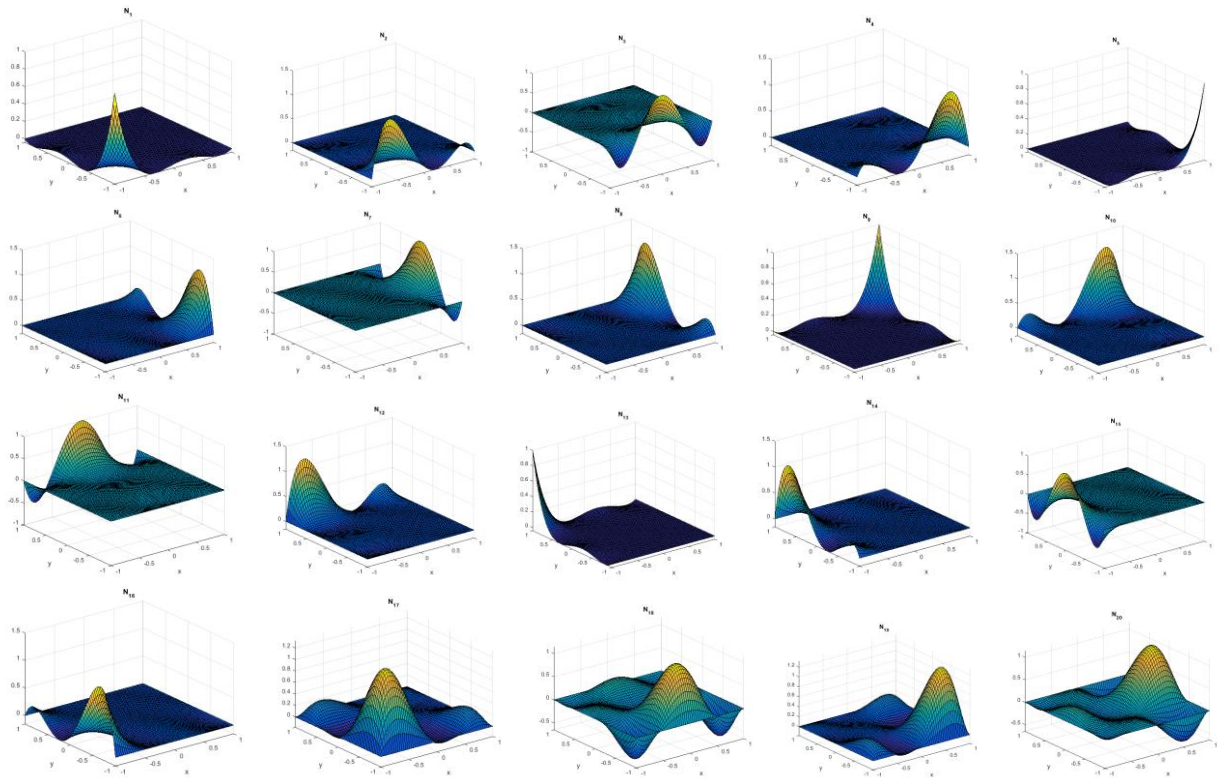


Figura 3-20. Funciones de forma elemento cúbico

3.5.2.1.4 Elemento cuártico de 25 nodos

Este elemento entraría ya en los del tipo de orden superior, es decir tienen polinomios de Lagrange de orden cuártico como los de las ecuaciones (3.21). De manera que siguiendo un procedimiento similar al caso del elemento cúbico, las 25 funciones de forma que se obtienen son las siguientes:



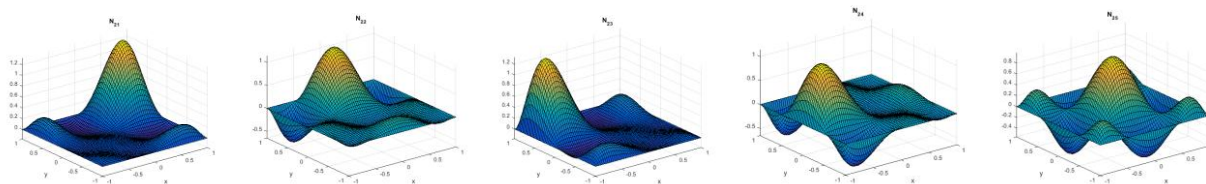


Figura 3-21. Funciones de forma elemento cuártico

3.6. Integración numérica

Para poder realizar todas las integrales necesarias en los problemas del MEF, sobre todo para la obtención de las matrices, es necesario explicar el procedimiento de integración. El cálculo analítico de integrales en un elemento puede ser laborioso por ello es preciso utilizar la integración numérica.

En este apartado se hará la distinción entre integración numérica unidimensional e integración numérica bidimensional. Además como último puntos se establecerán unos procedimientos para seleccionar el orden de integración requerido.

3.6.1. Integración numérica unidimensional

Este caso de integración servirá para extrapolar los resultados a casos bidimensionales y tridimensionales. Para la integración unidimensional el tipo de integrales a considerar serán:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \quad (3.30)$$

La resolución de esta integral se puede obtener de dos formas:

- 1) Cuadratura de Newton-Cotes: este método consiste en definir un número de puntos en el intervalo de integración, normalmente distribuidos uniformemente, y después ajustar el polinomio para que pase exactamente por esos puntos; así se puede hallar la solución integrando exactamente el polinomio.

Este método conduce a una solución del tipo:

$$I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n W_i f(\xi_i) \quad (3.31)$$

Con esta cuadratura se obtienen errores de precisión del orden del tamaño del elemento en coordenadas globales, por lo que no es el método más usado.

- 2) Cuadratura de Gauss-Legendre: en lugar de especificar los puntos de integración se busca la posición de los mismos para obtener la máxima precisión; de modo que para un número de puntos de integración dado el resultado será más exacto. Para este caso en lugar de determinar n incógnitas habrá que hallar $2n$ incógnitas por lo que en principio el polinomio será de grado $2n - 1$ y el error de interpolación es mucho menor que en la anterior cuadratura. Por tanto se puede decir que la cuadratura de Gauss-Legendre integra exactamente un polinomio de grado $2n - 1$ o menor.

Lo importante de esta cuadratura y es, por tanto, el motivo por el cual se utiliza es que emplea el mínimo número de puntos de integración para conseguir un error determinado en el cálculo de la integral. En la siguiente tabla se muestran las coordenadas ξ_i y los pesos W_i para las ocho primeras cuadraturas de Gauss-Legendre:

Tabla 3-1 Puntos de Gauss para las 8 primeras cuadraturas

| n | ξ_i | W_i | Orden de integración exacto: |
|-----|----------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|------------------------------|
| 1 | 0.0000000000 | 2.0000000000 | $p = 1$ |
| 2 | ± 0.5773502692 | 1.0000000000 | $p = 3$ |
| 3 | ± 0.7745966692 0.0000000000 | 0.5555555556 0.8888888889 | $p = 5$ |
| 4 | ± 0.8611363116 ± 0.3399810436 ± 0.9061798459 | 0.3478548451 0.6521451549 0.2369268851 | $p = 7$ |
| 5 | ± 0.5384693101 0.0000000000 ± 0.9324695142 | 0.4786286705 0.5688888889 0.1713244924 | $p = 9$ |
| 6 | ± 0.6612093865 0.2386191861 | 0.3607615730 0.4679139346 | $p = 11$ |

3.6.2. Integración numérica bidimensional

Mediante la formulación isoparamétrica se explicó que se pueden transformar todas las integrales sobre el dominio del elemento a otros sobre el espacio de coordenadas naturales. Para el cálculo de integrales en dos dimensiones se hará necesaria nuevamente una cuadratura de integración numérica que en este caso será la de Gauss-Legendre. Para elementos bidimensionales la integración puede ser sobre dominios cuadriláteros o sobre dominios triangulares.

Para el caso de los cuadriláteros se empleará como se estableció antes la cuadratura de Gauss, pero ahora esta cuadratura debe aplicarse en las dos direcciones es decir tanto a ξ como a η , como se muestra en esta integral:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{-1}^1 d\xi \left[\sum_{q=1}^{n_q} g(\xi, \eta_q) W_q \right] = \sum_{p=1}^{n_p} \sum_{q=1}^{n_q} g(\xi_p, \eta_q) W_p W_q \quad (3.32)$$

Donde n_p y n_q son el número de puntos de integración seleccionados en cada una de las direcciones; ξ_p y η_q son las coordenadas naturales del punto de integración (p, q) ; y W_p y W_q son los pesos correspondientes. Las coordenadas y los pesos se deducen directamente de la tabla expuesta en el punto 3.6.1. para el caso unidimensional. Algunos puntos de integración o puntos de Gauss sobre elementos cuadriláteros son:

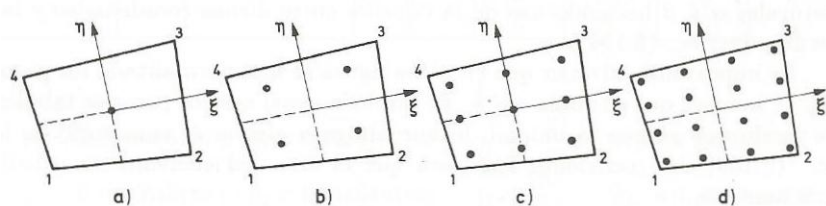


Figura 3-22. Puntos de Gauss para elemento cuadriláteros

3.6.3. Selección del orden de integración requerido

Cuando deja de realizarse la integración exacta y se pasa a integración numérica se cometerá un error adicional que será nulo solo cuando se empleen numerosos puntos de integración. Sin embargo cuantos más puntos de integración se usen mayor será el tiempo de cálculo, por lo que hay que establecer el orden de integración necesario para llegar a una solución muy aproximada a la exacta sin emplear demasiados puntos.

El número de puntos se selecciona de acuerdo con el grado de los polinomios que aparecen en las integrales del elemento. Cuando el elemento es isoparamétrico las integrales contendrán funciones racionales y por tanto dichas integrales no serán exactas. Lo que se persigue es encontrar una cuadratura que integre exactamente la matriz o vector de un elemento rectangular o triangular de lados rectos análogo en el que, por ser el Jacobiano constante, las integrales solo contienen funciones polinómicas.

Por tanto, está demostrado que es suficiente con encontrar una cuadratura que integre exactamente los términos de esa matriz o vector. Este orden de integración recibe el nombre de cuadratura mínima para mantener la convergencia, así una integración no del todo exacta de la matriz conduce a resultados correctos.

En la siguiente imagen tomada del libro, *Cálculo de estructuras por el método de elementos finitos* [5], se puede observar el número de puntos de integración necesarios para la integración exacta y el número mínimo:

| Exacta | Mínima |
|--------|--------|
| 2×2 | 1×1* |
| 3×3 | 2×2 |
| 3×3 | 2×2 |
| n=1 | n=1 |
| n=3 | n=3 |

Figura 3-23. Número de puntos para integración exacta y número de puntos mínimos

Estos números pueden no ser los correctos ya que el número mínimo y exacto puede cambiar dependiendo del autor que se considere, por tanto no es posible dar una regla general aplicable a todos los problemas. El uso de un número de puntos de integración para el resultado exacto o el uso del número de puntos mínimo dependerá del problema en cuestión, del tipo de elemento y de cómo de distorsionados estén esos elementos. Pero se puede decir que la integración mínima es adecuada cuando los elementos están poco distorsionados mientras que la otra es mejor para una mayor distorsión de los mismos.

En definitiva, la selección del orden de integración necesario es una tarea complicada y en este trabajo se realizará un estudio paramétrico del número de puntos de Gauss a utilizar del cual se obtendrán las conclusiones oportunas. Estos estudios se están realizando hoy día porque no es posible establecer unas reglas para la determinación del número de puntos, pero sin duda es algo necesario ya que reducir este número permitiría ahorrar tiempo de cálculo.

3.7. Implementación numérica

Como se ha comentado en apartados anteriores todo este análisis es numérico por lo que se han implementado una serie de programas Matlab para obtener los resultados a los problemas en cuestión. De esta manera tanto las funciones de forma de los diferentes elementos como los puntos de Gauss se han obtenido a partir de funciones Matlab.

En primer lugar, las funciones de forma se implementan para el caso unidimensional y el bidimensional siguiendo las ecuaciones (3.17) y (3.24) y diferenciando los casos de polinomios de Lagrange y de Hermite para problemas unidimensionales. Así se obtienen las funciones mediante una función de forma analítica lo que conlleva que sus derivadas se puedan realizar fácilmente. Gracias a este programa se pueden calcular funciones de forma de cualquier orden, ya que se emplea la expresión general y además las distintas derivadas se realizan numéricamente a partir del lenguaje simbólico de Matlab.

Por otra parte, el cálculo de los puntos de integración también se realiza mediante programación por lo que no se toman los puntos tabulados que se mostraron anteriormente. Para su obtención se tiene una función que genera los diferentes puntos a partir de la Cuadratura de Gauss-Legendre, donde se calculan las posiciones de los distintos nodos y también el peso de cada uno de ellos en un intervalo $[a,b]$. Esto permite entonces generar los puntos de Gauss necesarios para la resolución de las diferentes integrales, además permite variar el número de puntos según se quiera; de esta forma se pueden realizar diferentes estudios paramétricos con el fin de disminuir el tiempo de cálculo.

4 REQUISITOS PARA LA CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN

Para que la solución del problema del MEF sea coherente debe satisfacer una serie de condiciones que garanticen que a medida que se utilicen más elementos para modelar el problema más exacta será la solución. En la práctica no se suelen resolver los problemas con más de dos tipos de mallas porque conlleva un tiempo muy necesario pero siempre se intentará cumplir estas condiciones para que la aproximación sea lo más exacta posible.

Aunque en apartados anteriores se ha hecho referencia en cierta manera a estas condiciones, en este capítulo se explicarán con detalle cada una de ellas, tomando como referencia [5].

4.1. Condición de continuidad

Esta condición en concreto se explica en el capítulo de funciones de forma ya que era un criterio necesario para la formulación de las mismas. Ésta implica que la variable a calcular, por ejemplo el campo de desplazamientos, debe ser continua en el interior de cada uno de los elementos que componen la discretización.

Esta condición se satisface automáticamente al emplearse aproximaciones polinómicas para calcular dicha variable incógnita, por lo que se puede decir que esta condición suele cumplirse por lo general en todos los casos.

4.2. Condición de derivabilidad

También se ha tratado antes aspectos relacionados con la condición de derivabilidad, ya que las funciones de forma se deben obtener teniendo en cuenta que la aproximación polinómica seleccionada tiene que ser derivable al menos hasta el orden de las derivadas que aparecen en las integrales del problema en cuestión.

Si no se tiene la continuidad y por lo tanto la derivabilidad necesarias no se podrán reproducir todos los términos de dichas integrales con la aproximación de los elementos finitos.

4.3. Condición de Integrabilidad

Las funciones de forma deben ser tales que las integrales de la expresión del TTV puedan realizarse es decir tengan una función primitiva. La regla general que existe para decir que una función es integrable es la siguiente: la derivada de orden m de una función es integrable si son continuas sus $m - 1$ primeras derivadas.

Si se extrapola ese principio al problema de elementos finitos se tendrá que si en las integrales del TTV aparecen derivadas de la variable incógnita de orden m , esa variable y también las funciones de forma que la aproximan deben tener una continuidad de clase C_{m-1} ; es decir las primeras $m - 1$ derivadas de la variable en cuestión deben ser continuas.

En el capítulo anterior se habló de elementos con continuidad C_0 , la cual solo garantiza la continuidad en el

interior del elemento debido a que solo aparecen derivadas de primer grado de la variable incógnita. Por consiguiente la continuidad de los casos anteriores quedaría totalmente garantizada.

Esta es una de las condiciones más importante del MEF ya que determina las funciones de forma a escoger en cada uno de los problemas.

4.4. Criterio de la parcela

Este método se basa en seleccionar un conjunto de elementos (parcela) y aplicar en los nodos del contorno de la misma determinados movimientos correspondientes al que realizaría la variable incógnita. Por ejemplo para el caso de un campo de desplazamientos, dichos movimientos de este campo serían conocidos en toda la parcela y aplicados en los nodos del contorno de la misma.

Se dice entonces que el elemento satisface el criterio de la parcela, esto garantizaría la convergencia si la solución obtenida en el interior de la parcela coincide con la que se deduciría del cálculo analítica de la misma.

Realmente es un procedimiento basado en un razonamiento de tipo físico e intuitivo que prácticamente se ha establecido como el más adecuado y utilizado en la práctica. Sin embargo esta prueba no se cumple para algunos elementos.

El criterio de la parcela establece dos importantes condiciones para la convergencia del elemento que poniendo como ejemplo un campo de desplazamientos sería:

- a) Condición de deformación constante: a medida que la malla se hace más fina las condiciones dentro de cada elemento se aproximarán más a las de un estado de deformación constante. Todos los elementos deben tener la capacidad de reproducir dicho estado para garantizar la convergencia en el límite.
- b) Condición de sólido rígido: los movimientos como sólido rígido implican que no se producen deformaciones, esto ocurrirá al someter a un elemento o un conjunto de ellos a un campo de movimientos prescritos en su contorno correspondientes a un movimiento del conjunto como sólido rígido. Es decir se aplican movimientos de sólido rígido en el contorno de la parcela y esto debe generar un estado de deformación nula en su interior. Si no ocurre esto último, habría indicaciones de que dicho elemento puede no ser adecuado para reproducir estados de deformación más complejos.

La condición de sólido rígido se satisface siempre para un elemento aislado cuando la suma de las funciones de forma en cualquiera de los puntos del elemento valga la unidad.

4.5. Condición de compatibilidad

Este requisito junto con los expuestos a continuación no son de tanta importancia como los anteriores, por tanto no siempre se cumplen aunque es deseable que la aproximación de elementos finitos los satisficiera. Se podría decir que los siguientes requisitos no son estrictamente necesarios para la convergencia como los anteriores.

La condición de compatibilidad se basa en que los elementos deben ser compatibles, lo que quiere decir que los movimientos característicos del problema (como desplazamientos en elasticidad) deben ser continuos entre elementos. Esto implicaría que no se dieran saltos entre valores de dichas variables a lo largo de los lados o caras comunes entre elementos.

Los elementos que satisfacen esta condición son los denominados compatibles o conformes.

Esta condición suele satisfacerse siempre que el requisito de continuidad se cumpla, aunque si los elementos son incompatibles o no conformes pueden ser válidos y converger a la solución exacta al refinar un poco más la malla.

En definitiva, para garantizar la convergencia debe satisfacerse la condición de compatibilidad al ir refinando progresivamente la malla, por lo que el incumplimiento de esta condición en una malla gruesa no implica que la solución no sea válida y no llegue a converger.

4.6. Condición de polinomio completo

Cuando se quiere aproximar una función mediante una serie de funciones de forma y unos coeficientes, dicha aproximación será más o menos correcta dependiendo del grado de la función y del número de coeficientes. De manera que el polinomio de aproximación formado por las funciones de forma y sus coeficientes aproximará hasta el grado de la función (m); si y solo si dicho polinomio contiene todos los términos del polinomio de grado m , es decir si es un polinomio completo de grado m .

De modo que la aproximación de elementos finitos depende del polinomio completo de mayor grado contenido en las funciones de forma. La aproximación será óptima cuando todos sus términos forman un polinomio completo y no lo será en caso contrario ya que se añaden términos adicionales que introducen variables que no contribuyen de manera significativa a una mejor aproximación del elemento.

Un ejemplo de polinomios completos e incompletos sería:

$$\text{Polinomio completo de grado 2: } P_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$\text{Aproximación completa de grado 2: } P_2(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2$$

$$\text{Aproximación incompleta de grado 3: } P_3(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4y^2 + a_5x^3$$

Todos los términos pertenecientes a los anteriores polinomios se obtienen del triángulo de Pascal, del cual ya se comentó su importancia en las funciones de forma. Para el caso de elementos bidimensionales se tenía que los elementos de Lagrange presentaban polinomios incompletos que introducían términos parásitos y que por ello surgieron los elementos Serendípitos capaces de reproducir polinomios completos.

Cabe decir que es deseable que las funciones de forma sean polinomios completos pero en el caso de que esto no pueda cumplirse no se impedirá el alcance de la convergencia de la solución.

4.7. Condición de invariancia

Esta condición también fue estudiada sin entrar en detalles en apartados anteriores. Simplemente establece que un elemento no debe tener direcciones preferentes lo que significa tener isotropía geométrica o espacial. Cuando no existe invariancia se obtienen resultados diferentes al variar la dirección del elemento en el espacio en que está definido.

En general un elemento es invariante si todos los desplazamientos se interpolan con los mismos términos polinómicos y a su vez la aproximación es insensible al cambio de una coordenada por otra. La invarianza de un elemento será garantizada cuando las funciones de forma que lo definen sean polinomios completos.

De no existir isotropía se estaría hablando de defectos en el elemento pero los cuales no suponen problemas para llegar a la convergencia

5 CARACTERÍSTICAS DE LA SOLUCIÓN OBTENIDA POR EL MEF

En este capítulo se describirán las distintas características que tiene una solución obtenida por el MEF ya que esto permitirá establecer las diferencias entre la solución exacta y la aproximada que proporciona el MEF. La solución exacta tiene la cualidad de que cualquier elemento que conforma el dominio continuo está en equilibrio, pero en general este requisito no suele corresponder a soluciones aproximadas.

A continuación se describirán las características de la solución obtenida poniendo como ejemplo un campo de desplazamientos.

5.1. Continuidad de desplazamientos

En apartados anteriores se ha descrito esta característica de la solución estableciendo la continuidad entre elementos. Esta continuidad depende de las funciones de interpolación empleadas en la obtención de la variable incógnita y suele satisfacerse para la mayoría de los elementos finitos, concretamente para elementos de continuidad C_0 .

A veces no es tan sencillo encontrar funciones de interpolación que garanticen la continuidad en las fronteras de los elementos de forma automática, en ese caso se estaría hablando de elementos no conformes. Esto suele solucionarse disminuyendo el tamaño del elemento, de esta manera la continuidad tiende a satisfacerse.

5.2. Equilibrio en nodos

La solución del MEF garantiza el equilibrio de las fuerzas nodales y momentos. Este equilibrio en problemas estructurales suele representarse con la ecuación $\mathbf{F} - \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, la cual representa el equilibrio nodal. Esto conllevará que el vector solución \mathbf{u} es tal que las fuerzas y momentos nodales tienen resultante nula y por tanto dicho equilibrio es satisfecho.

5.3. Equilibrio en contornos entre elementos

A lo largo de los contornos entre elementos hay veces que el equilibrio no se satisface, ya que no se puede esperar siempre que los resultados sean iguales en elementos adyacentes. Si la malla definida es suficientemente fina y correcta, estos errores serán pequeños y por tanto no se tendrán en cuenta.

La diferencia entre la solución en elementos contiguos es a veces empleada como un indicador de error de la solución que mostrará lo correcta que es la malla utilizada para el problema en cuestión.

5.4. Condición de contorno en desplazamientos

Cuando se realice la formulación en desplazamientos había que imponer el valor del campo de desplazamientos conocido en los nodos, por lo que los grados de libertad que hubiera en esos nodos dejarían de serlo. De manera que esta condición se sabe que se cumplirá exactamente en los nodos donde se imponga dicho campo.

5.5. Tracciones impuestas en el contorno

Como se ha comentado en el subapartado anterior las condiciones de contorno en desplazamientos impuestas en nodos normalmente son satisfechas pero en el caso de tensiones no ocurre lo mismo.

En diferentes problemas estructurales podrá comprobarse que condiciones de contorno en tensiones aplicadas a un contorno del elemento realmente, tras obtener la solución se verá que no se verifican.

5.6. Equilibrio en el interior de los elementos

En general la solución proporcionada por el MEF no garantiza el equilibrio en el contorno entre elementos ni en los contornos exteriores del dominio, de hecho por lo general tampoco lo garantiza en el interior de los elementos. Esto puede comprobarse fácilmente empleando la ecuación de equilibrio en el interior de los elementos que en dos dimensiones es:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0\end{aligned}\tag{5.1}$$

6 CLASIFICACIÓN DE ERRORES EN LA SOLUCIÓN A PARTIR DEL MEF

El MEF es un método numérico aproximado de análisis por lo que los resultados obtenidos no serán exactos y pueden estar afectados por diversos tipos de errores. A continuación se analizarán los errores más comunes que se dan atendiendo a lo expuesto en [8].

6.1. Error de discretización

Este es uno de los errores más importantes en los problemas del MEF. El error de discretización es inherente al carácter polinómico de la aproximación de elementos finitos. A partir de la comparación entre polinomios completos que se explicó en el apartado 4.6 puede estimarse dicha aproximación.

Realmente este error es llamativo cuando se emplean tamaños de los elementos no suficientemente pequeños para que la solución sea aproximada a la correcta. De manera que habría que tener en cuenta un criterio para seleccionar tamaños de elementos menores en zonas donde se esperen mayores gradientes de deformación y que por el contrario se empleen elementos de mayor tamaño donde el campo sea uniforme. Otro de los métodos que se puede aplicar para paliar errores de este tipo sin cambiar tamaños de elementos es añadir términos polinómicos de mayor grado a las funciones de forma, es decir aumentar el orden del elemento.

Estos dos métodos para disminuir el error basados en refinar progresivamente la malla y en incrementar el grado de las funciones de forma son denominados métodos h y p , respectivamente.

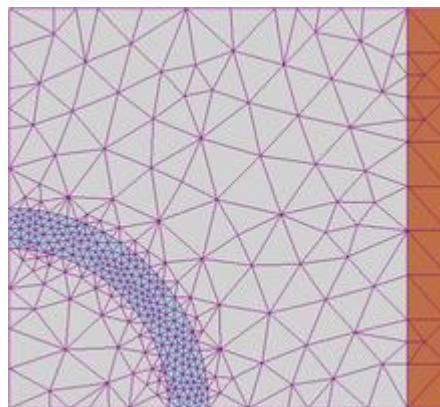


Figura 6-1. Métodos de adaptabilidad h

En esta imagen puede observarse como cerca de la zona objetivo la malla es más fina y por lo tanto se tiene un mayor número de elementos, sin embargo en otras zonas de menor interés se colocan elementos de mayor tamaño haciendo que ahí la malla sea más gruesa.

En la actualidad se utiliza el método hp que consiste en el uso secuencial de ambas técnicas, es decir primero se optimiza el mallado de la geometría y después el orden del polinomio hasta alcanzar el error deseado.

6.2. Error de aproximación a la geometría

Este tipo de errores surgen debido a la diferencia que existe entre el sistema físico y su modelado matemático. Muchos problemas bidimensionales y tridimensionales tienen como contorno curvas cuya reproducción no puede realizarse exactamente con funciones polinómicas, de modo que en estos casos siempre se comete un error al aproximar la geometría de la estructura.

Dicho error puede disminuirse refinando la malla en los contornos o empleando funciones de interpolación de geometría de un orden suficientemente grande como para asemejarse al contorno. En la práctica es usual llegar a un compromiso entre las dos opciones anteriores.

6.3. Error de integración numérica

Anteriormente se comentó la dificultad que existe a la hora de calcular analíticamente las integrales del elemento. El resultado exacto de estas integrales solo se consigue con la selección del orden de integración adecuado aunque esto siempre no es posible. Cuando el orden no es el correcto se comete un error al evaluar las integrales ya que en la mayoría de los casos dichas integrales contienen términos racionales debido a la transformación de coordenadas.

Para los casos anteriores se deberían emplear un gran número de puntos de integración para aproximar correctamente la integral y esto aumentaría el tiempo de cálculo considerablemente. La aproximación de las integrales se realiza a partir de cuadraturas como la de Gauss-Legendre y por tanto siempre hay que intentar tomar un número de puntos de Gauss aceptable para obtener un solución aproximada parecida a la exacta; pero evitando que ese número de puntos sea excesivo.

6.4. Error en la solución del sistema de ecuaciones

Durante la solución del sistema global de ecuaciones algebraicas resultante de la aproximación de elementos finitos pueden aparecer tres tipos de errores característicos: errores por mal condicionamiento de las ecuaciones, errores de truncamiento y errores de redondeo.

El sistema de ecuaciones estará mal condicionado si pequeños cambios de las matrices dan lugar a grandes variaciones en el vector solución, esto suele deberse a la presencia de elementos de gran rigidez conectados a otros de baja rigidez. Sin embargo un mal condicionamiento no implica una solución errónea, esto depende fundamentalmente de los otros dos tipos de errores. Los errores de truncamiento y redondeo se cometen durante la solución del sistema de ecuaciones y son responsables del error total en la solución.

El error de truncamiento es el más importante ya que corta por la máxima cifra que puede retener el ordenador, sin tener en cuenta de qué cifra se trata. Por tanto se prescinde de información esencial para obtener la solución correcta.

Por otra parte, el error de redondeo es debido al ajuste que se realiza automáticamente el ordenador del último dígito de un número durante el cálculo. Este error es menos importante que el de truncamiento pero siempre hay que evitar este tipo de errores cuando es innecesario redondear una cifra.

Una solución para prescindir de este tipo de errores es realizar todos los cálculos empleando una doble precisión, lo que conllevaría una disminución en los errores de truncamiento.

7 EJEMPLO PRÁCTICO PARA LA APLICACIÓN DE LA TÉCNICA DESCRITA

Para llegar a obtener los objetivos propuestos los apartados anteriores, se toma un problema modelo que será objeto de estudio en este documento. Todas las conclusiones a las que se lleguen en un inicio se referirán a este problema y más tarde se extrapolaran a problemas de cualquier tipo, de ahí que al final del documento se realicen dos casos prácticos.

Este problema modelo se ha obtenido del estudio del acoplamiento fluido-estructura BEM-FEM llevado a cabo por Rodríguez-Tembleque et al. [1]. El problema se describe como una cavidad acústica con una tapa flexible y que sufre una excitación armónica.

En esta imagen se muestran las características principales del problema:

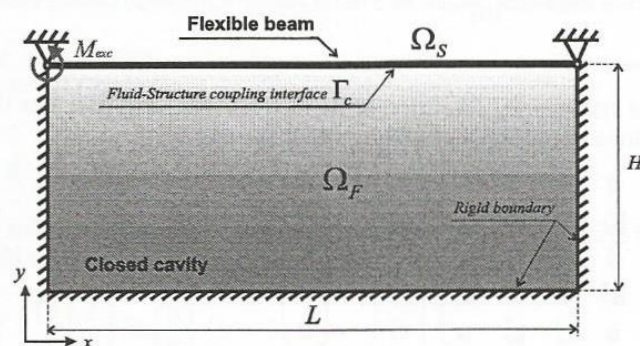


Figura 7-1. Problema de la cavidad con tapa [1]

Como puede observarse se distinguen dos dominios, un dominio fluido rectangular encerrado ya que existen condiciones de contorno de empotramiento en tres de sus lados y un dominio sólido que cerca por tres lados al fluido. Por tanto se tiene una cavidad fluida cerrada Ω_F con unas dimensiones de $L=10$ metros de base por $H=4$ metros de altura, que está restringida por un contorno rígido excepto en la parte superior del dominio.

Es en esta zona donde se encuentra el dominio estructural, es decir la barrera flexible. Este dominio Ω_S tiene una longitud de 10 m y el espesor dependerá de las propiedades estructurales que se definirán con posterioridad. Esta pared sólida es flexible pero tiene impedidos los desplazamientos en ambos extremos, es decir tiene condiciones de contorno de apoyo en $x=0$ y $x=L$. Además como puede observarse el sistema estará sometido a la acción de un momento exterior M_{ext} en uno de los apoyos de la pared flexible, concretamente en $x=0$. Este momento es una excitación armónica que se modela como:

$$M_{ext} = M_0 e^{i\omega t}$$

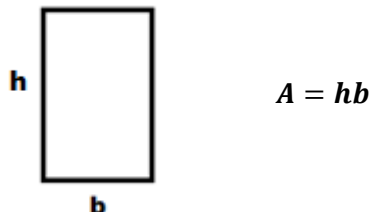
Del estudio de ambos tipos de dominios surge una superficie de interacción fluido-estructural denominado Γ_C .

Las propiedades del dominio estructural son las siguientes:

- Módulo de Young: $E = 2.1 \cdot 10^{11} Pa$
- Inercia de la sección transversal: $I = 1.59 \cdot 10^{-4} m^4$
- Área transversal: $A = 0.02 m^2$

- Masa por unidad de longitud: $m_s = 50 \text{ kg/m}$
- Coeficiente de Poisson: $\nu = 0.3$

De estos valores se puede obtener el espesor del dominio sólido aunque se debe utilizar un espesor equivalente y no el que se obtiene a continuación. Definiendo el área transversal como:



De manera que la inercia conllevará que:

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}Ah^2$$

$$h = 0.3089 \text{ m}$$

Para este caso se utilizará un espesor equivalente igual a 0.118 metros. Este espesor equivalente se ha obtenido dejando fija la densidad y variando dicho espesor para ver cuál es el correcto. Con los datos anteriores también se puede determinar la densidad del material sólido:

$$\rho = \frac{m_s}{A} = 2500 \text{ kg/m}^3$$

Por su parte el fluido en este caso será agua, la cual tiene las siguientes propiedades:

- Velocidades de propagación del sonido en el fluido: $c_F = 1500 \text{ m/s}$
- Densidad: $\rho_F = 1000 \text{ kg/m}^3$

La solución a este problema reside principalmente en calcular los modos de vibración y las frecuencias naturales tanto del dominio fluido como del dominio sólido, y luego obtenerlo todo en el problema de interacción fluido-estructura. Además se deben representar dichos modos de vibración.

Cuando se llegue a la resolución de este problema hay que comprobar que los resultados son correctos, para ello se comparan las soluciones con las que se proporcionan en el artículo de G. Sandberg et al. [2].

De modo que el proceso a seguir en la resolución de este problema se divide en tres partes:

- 1) Primero se resuelve de forma independiente el problema fluido, para ello se debe realizar una malla bidimensional del dominio fluido y calcular los modos de vibración para diferentes tipos de mallas y diferentes tipos de elementos.
- 2) En segundo lugar, se realiza un proceso similar con el problema sólido pero ahora la malla será unidimensional, siempre que se considere el problema global como 2D.
- 3) Por último, tras verificarse los resultados obtenidos con los artículos correspondientes, solo queda realizar el problema de acoplamiento y corroborar de nuevo los resultados.

Otro resultado a obtener en este problema será la representación del desplazamiento del dominio sólido respecto a la frecuencia impuesta en el momento exterior, es decir se trata de calcular la rotación de la barra para una serie de frecuencias de esta manera quedan reflejadas cuáles son las frecuencias naturales. En este caso la comprobación de que el resultado obtenido es correcto se realiza a partir del artículo descrito con anterioridad [1].

Tras detallar todas las propiedades, condiciones y tipos de errores que pueden darse en el MEF, se procede a la resolución del problema de la cavidad con tapa explicado anteriormente. A continuación se resolverán los problemas del fluido, del sólido y de la interacción fluido-estructura.

La resolución del problema consiste en obtener los nueve primeros modos de vibración del fluido y sus frecuencias naturales. Para la obtención de los mismos se debe recurrir a un problema de autovalores y autovectores, de manera que siguiendo la formulación descrita en el apartado 2 se tienen los siguientes sistemas para los tres tipos de problemas; teniendo en cuenta que siempre $k_z = 0$.

Empezando por el fluido, se tiene que:

$$\left(F_0 - \omega^2 \frac{D}{c^2}\right) \phi = 0 \quad (7.1)$$

De donde se calcularán los nueve modos y sus respectivas frecuencias naturales. Para el caso del problema sólido:

$$(K_0 - \omega^2 M) \phi = 0 \quad (7.2)$$

Por su parte, para el problema de interacción fluido estructura se necesitará un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} M\ddot{u} + K_0 u &= R^T p \\ \frac{D}{c^2} \ddot{p} + F_0 p &= -\rho R \ddot{u} \end{aligned} \quad (7.3)$$

En forma matricial se tiene:

$$\overline{\overline{M}} \begin{pmatrix} M & 0 \\ \rho R & D/c^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{p} \end{pmatrix} + \overline{\overline{K}} \begin{pmatrix} K_0 & -R^T \\ 0 & F_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

De modo que el problema de autovalores y autovectores ahora sería:

$$(\overline{\overline{K}} - \omega^2 \overline{\overline{M}}) \phi = 0 \quad (7.5)$$

Entonces para la resolución se ha optado por cuatro tipos de elementos: lineal, cuadrático, cúbico y cuártico. Además las mallas empleadas en ellos pueden ser distintas unas de otras. De todos estos resultados, se pueden extraer unos estudios paramétricos acerca del número de puntos de Gauss necesarios y también del número de elementos por longitud de onda; ambos estudios se detallarán al final de cada problema.

7.1. Solución del problema fluido

Para el caso del fluido hay que emplear un número mayor de elementos que para el sólido ya que en 2D abarca una dimensión de 10x4 metros. Los elementos a utilizar serán cuadriláteros bidimensionales de Lagrange, dentro de los cuales se comenzará con el elemento lineal que necesita una discretización más fina como se verá a continuación hasta llegar al elemento cuártico que es de mayor orden y tiene una malla más gruesa.

Para la resolución de este problema se toma la formulación del fluido explicada en el apartado 2.1.1., la cual se ha implementado en un programa Matlab para la obtención de las matrices necesarias. Antes de ejecutar el programa anterior, con otro programa de preprocesado GiD se construyen las mallas con los distintos tipos de elementos que se describirán a continuación.

En primer lugar se obtendrá la solución empleando elementos lineales, cuya descripción y funciones de forma han sido explicadas en capítulos anteriores. Concretamente para este tipo de lineal cuadrilátero en 2D se usarán elementos de Lagrange y no Serendípitos.

Al comenzar siempre hay que partir de una malla, de modo que en GiD realiza la discretización del dominio fluido eligiendo una división de 32 elementos en los 10 metros de base y 24 elementos en los 4 metros de altura, de este modo se tendrán un total de 768 elementos. La malla es la siguiente:

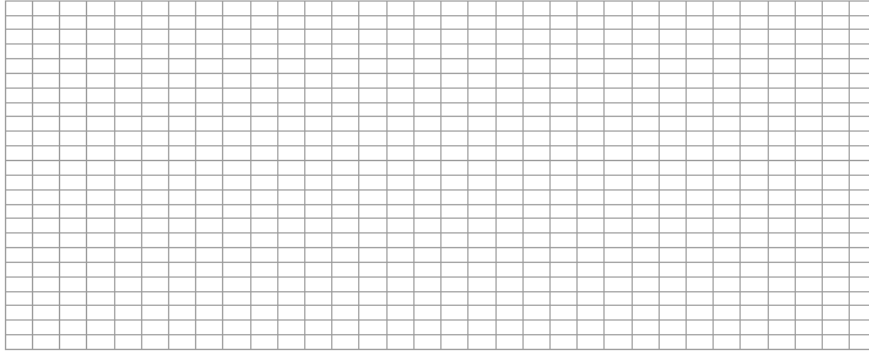


Figura 7-2.Malla de elementos lineales

Como se verá a continuación se necesitan un mayor número de elementos que en el resto de casos ya que el orden de las funciones de forma es menor.

Para el resto de tipos de elementos es decir para elemento cuadrático, cúbico y cuártico, la malla será más gruesa concretamente de 20x10 elementos que hacen un total de 200 elementos. En la siguiente imagen se muestra la malla para estos elementos:

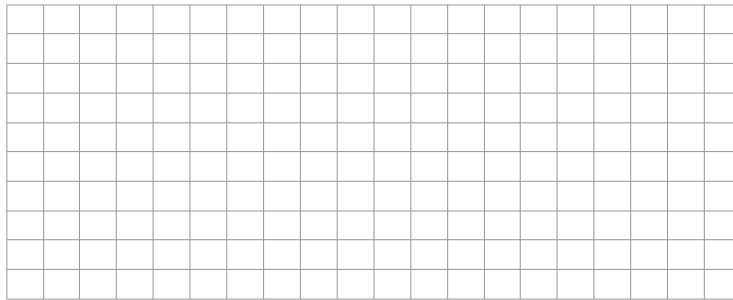
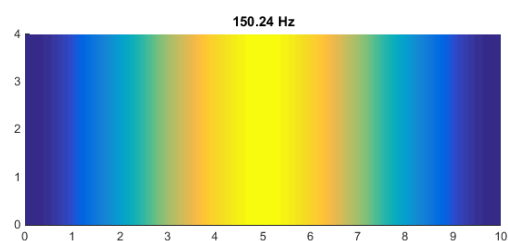
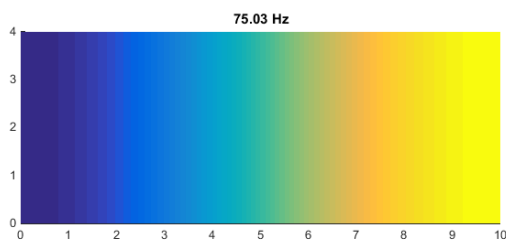


Figura 7-3.Malla para el resto de elementos

Con posterioridad podrá comprobarse que las frecuencias naturales de cada modo son prácticamente iguales para todos los casos.

7.1.1. Modos de vibración y frecuencias naturales

Los modos de vibración que se obtienen del fluido independientemente del tipo de elemento a emplear son los siguientes:



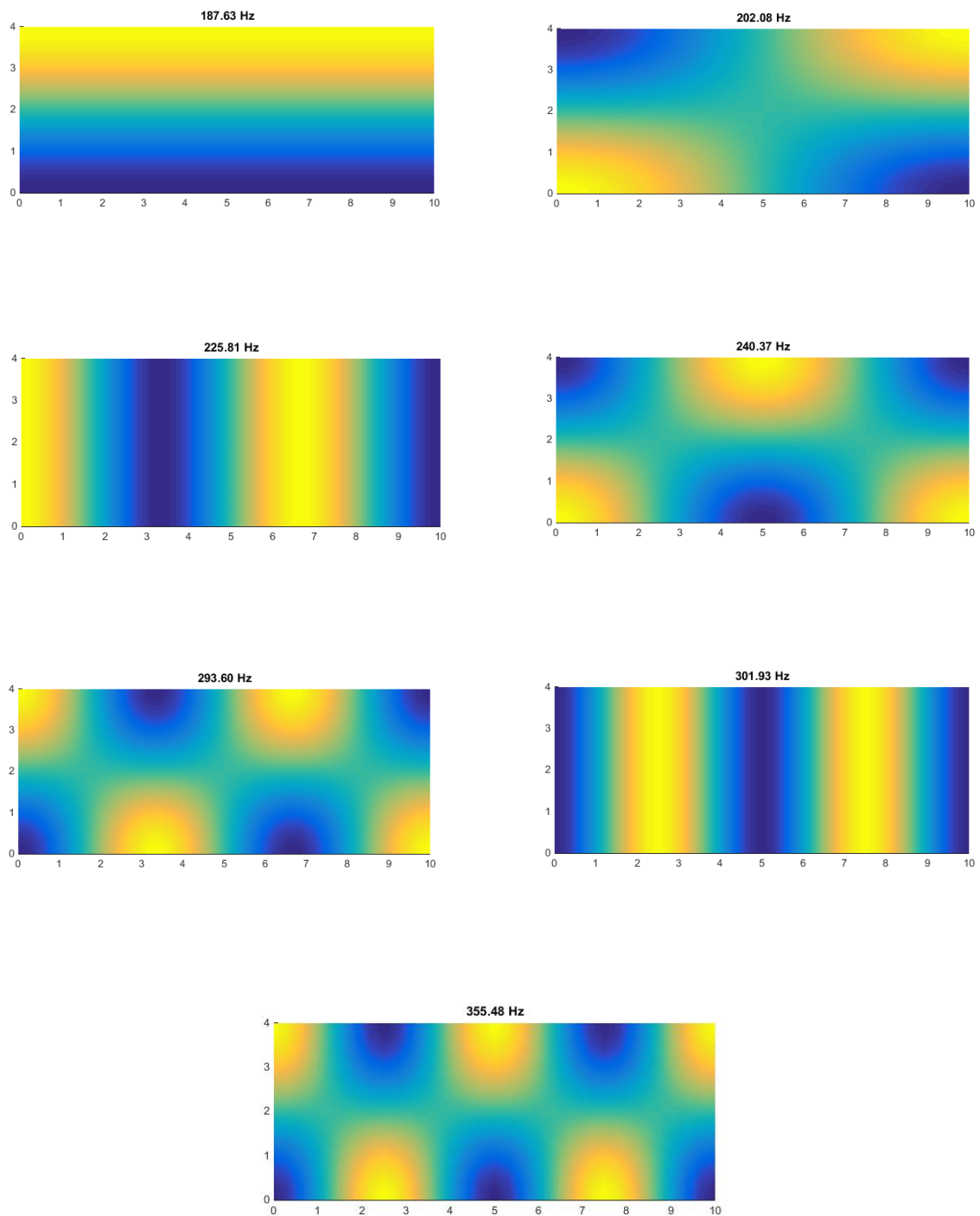


Figura 7-4. Modos de vibración del fluido

Si se comparan estos resultados con los expuestos en [2] se podrá comprobar que el grado de aproximación es bastante bueno, tanto los modos de vibración como sus respectivas frecuencias.

En este caso se muestran las diferentes formas de vibración del fluido, las cuales prácticamente no cambian al modificar el tipo de elemento, sin embargo la frecuencia natural que aparece en cada uno de ellos está referida al caso de elementos lineales.

Una vez mostrados los modos de vibración se procede a la comparación de frecuencias naturales para cada

tipo de elemento. Esta tarea será llevada a cabo mediante la siguiente tabla, en la cual se muestran las distintas frecuencias en Hz para cada modo y cada tipo de elemento:

Tabla 7-1 Frecuencias naturales del problema fluido para los cuatro tipos de elementos. [Hz]

| Modo | Elemento lineal | Elemento cuadrático | Elemento cúbico | Elemento cuártico |
|------|-----------------|---------------------|-----------------|-------------------|
| 1 | 75.03 | 75.00 | 75.00 | 75.00 |
| 2 | 150.24 | 150.00 | 150.00 | 150.00 |
| 3 | 187.63 | 187.50 | 187.50 | 187.50 |
| 4 | 202.08 | 201.94 | 201.94 | 201.94 |
| 5 | 225.81 | 225.01 | 225.00 | 225.00 |
| 6 | 240.37 | 240.12 | 240.12 | 240.12 |
| 7 | 293.60 | 292.89 | 292.88 | 292.88 |
| 8 | 301.93 | 300.03 | 300.00 | 300.00 |
| 9 | 355.48 | 353.80 | 353.77 | 353.77 |

Se puede observar como efectivamente los resultados para los distintos tipos de elemento son muy parecidos. Es cierto que conforme aumenta el número de modo de vibración el error entre elemento lineal y el resto es mayor pero aún así sigue siendo de un valor reducido. Por otra parte puede apreciarse que conforme aumenta el orden del elemento los resultados son más parecidos entre ellos ya que se ha alcanzado la convergencia.

De esta manera se demuestra como una malla gruesa con elementos de un orden mayor puede obtener resultados tan satisfactorios como el emplear una malla muy fina con un elevado número de elementos lineales. Esto se analizará en los siguientes estudios paramétricos.

7.1.2. Estudio paramétrico del número de puntos de Gauss necesario

Este estudio consistirá en ir variando el número de puntos de integración para la resolución de las integrales del problema fluido y anotar a partir de cuántos puntos de Gauss la solución proporcionada por el MEF no es aceptable.

Como el problema fluido es un problema bidimensional, se definirán los puntos de Gauss por cada coordenada, de manera que realmente hay el cuadrado de los puntos en cada eje. Se comenzará por un número de puntos excesivo que se sabe que proporcionará la solución correcta y tras ellos se irá disminuyendo el número hasta llegar a tener un único punto.

Este proceso se realizará para cada tipo de elemento, es decir se comenzará con el lineal y se llegará hasta el cuártico; y se verá el error asociado al primer modo de vibración.

De modo que se comenzará por 26 puntos de Gauss por cada eje, lo que resulta un total de 676 puntos, y así con el programa Matlab se obtendrá la primera frecuencia natural que en este caso se tomará como la exacta. Después se reducirá el número de puntos a 25 por eje y la solución que se obtenga se comparará con la anterior que es la exacta, calculándose el error relativo correspondiente:

$$\varepsilon = \left| \frac{\omega_1^* - \omega_1^i}{\omega_1^*} \right| \quad (7.6)$$

Donde ω_1^* es la primera frecuencia natural exacta y ω_1^i es la primera frecuencia natural dependiente del

número de puntos de Gauss (i).

Por tanto para la malla de 200 elementos anteriormente descrita se realiza este estudio paramétrico comenzando por el elemento de orden lineal hasta llegar al de orden cuártico. Así se representa un gráfico con los errores que se dan dependiendo del número de puntos de integración y del tipo de elemento.

Los errores se representarán de manera logarítmica ya que así se ven mejor los resultados, como para la solución exacta se toma el número de puntos 26, éste no aparecerá en la representación ya que en ese caso el error es cero y su logaritmo por tanto no existe.

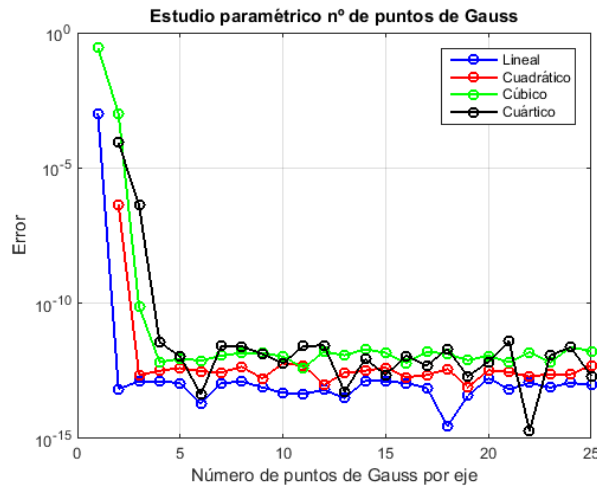


Figura 7-5. Estudio paramétrico del número de puntos de Gauss (Modo1)

Se puede comprobar que para el elemento lineal se necesitan muy pocos puntos de integración para converger a la solución exacta sin embargo para el caso cuártico se necesitan más. Esto se debe fundamentalmente a que en el elemento cuártico se tienen funciones de forma de orden elevado, por tanto su integración precisará de más puntos de Gauss que cuando se integran funciones lineales.

En la imagen se puede apreciar que para el elemento lineal se necesitan un par de puntos por eje para llegar a la solución exacta, para el cuadrático unos 3 puntos, para el cúbico unos 4 ó 5 puntos y para el cuártico unos 6 ó 7 puntos. Hay que tener en cuenta que para los casos de elemento cuadrático y cuártico el primer punto se encuentra en el infinito y por tanto no aparece en la gráfica.

Para mayor exactitud, a continuación se procede al cálculo del orden de las funciones a integrar que se dan en las ecuaciones antes expuestas (2.15) a (2.18), teniendo en cuenta la transformación de coordenadas cartesianas a naturales.

Sabiendo que el jacobiano tiene un orden igual a la derivada de la función de forma se tiene que:

$$\mathbf{D} = \int_{A_F} \mathbf{N}^T \mathbf{N} dA = \int_{A_F} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{J} d\xi d\eta \rightarrow O(\mathbf{D}) = 2O(\mathbf{N}) + O\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right) \quad (7.7)$$

$$\mathbf{F}^0 = \int_{A_F} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1 dA = \int_{A_F} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_1 \mathbf{J} d\xi d\eta \rightarrow O(\mathbf{F}^0) = 3O\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right) \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^1 &= \int_{A_F} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_2 dA - \int_{A_F} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_1 dA = \int_{A_F} \mathbf{B}_1^T \mathbf{B}_2 \mathbf{J} d\xi d\eta - \int_{A_F} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_1 \mathbf{J} d\xi d\eta \\ &\rightarrow O(\mathbf{F}^1) = O\left(\mathbf{N} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right) + O\left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$F^2 = \int_{A_F} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_2 dA = \int_{A_F} \mathbf{B}_2^T \mathbf{B}_2 J d\xi d\eta \rightarrow 2O(N) + O\left(\frac{\partial N}{\partial x}\right) \quad (7.10)$$

Como se conoce el orden de cada tipo de elemento: lineal ($k=2$), cuadrático ($k=3$), cúbico ($k=4$) y cuártico ($k=5$); se puede determinar el orden de los integrando de las integrales anteriores con solo conocer el grado de las funciones de forma. El grado de las funciones de forma bidimensionales se determina a partir del orden del elemento ya que es igual a:

$$O(N) = 2(k - 1) \quad (7.11)$$

Así se determina el orden de esas integrales, las cuales se resolverán a partir de los puntos de Gauss necesarios. El número de puntos de Gauss que se necesita para integrar una función de grado n cumple la siguiente relación:

$$N_G = 2n - 1 \quad (7.12)$$

Siendo N_G el número de puntos de Gauss necesarios para la integración de una función de orden n . De modo que el número de puntos de Gauss necesarios para la integración de las integrales anteriores para cada tipo de elemento se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 7-2 Número de puntos necesarios para la integración según el orden del elemento

| Matrices | Lineal ($k=2$) | Cuadrático ($k=3$) | Cúbico ($k=4$) | Cuártico ($k=5$) |
|---------------|------------------|----------------------|------------------|--------------------|
| D | 9 | 21 | 33 | 45 |
| F^0 | 5 | 17 | 29 | 41 |
| F^1 | 7 | 19 | 31 | 43 |
| F^2 | 9 | 21 | 33 | 45 |
| N_G totales | 2x2-3x3 | 4x4-5x5 | 5x5-6x6 | 6x6-7x7 |

La última fila de la tabla representa el número de puntos de Gauss totales por eje necesario para la integración de (2.15) a (2.18), que como se puede apreciar concuerda con los resultados obtenidos en la figura 7-5 mostrada anteriormente.

En definitiva, con este estudio se puede conocer aproximadamente el número de puntos de Gauss suficiente para la obtención de la solución exacta sin demasiados errores. Esto permitirá realizar los cálculos de manera más rápida y disminuyendo el tiempo de cálculo ya que no se tienen un número excesivo de puntos de integración.

A partir de estos resultados se puede obtener una gráfica similar a la anterior pero adimensionalizada con los puntos de Gauss mínimos necesarios. Esta representación es la siguiente:

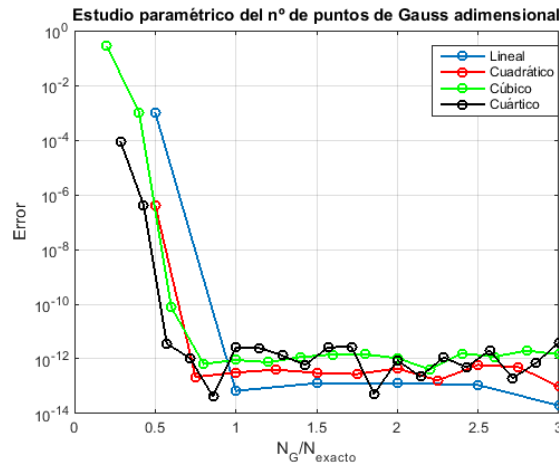


Figura 7-6. Estudio paramétrico adimensionalizado del número de puntos de Gauss (Modo1)

Aquí se puede comprobar que a partir del valor $N_G/N_{exacto} = 1$ la integración de las funciones es exacta por lo que se obtiene una solución correcta, sin embargo por debajo de ese valor aparecerán errores de integración en la solución del problema.

7.1.3. Estudio paramétrico del número de elementos por longitud de onda

Se trata de realizar un estudio similar al anterior, es decir calcular el error que se produce para diferentes tipos de elementos, sin embargo ahora lo que se modifica es el número de elementos de la malla. Esta modificación se realizará en base a la longitud de onda que está relacionada con la frecuencia:

$$\lambda = 2\pi \frac{c}{\omega} \quad (7.13)$$

La longitud de onda realmente es una distancia y lo que se pretende es definir un número de elementos por cada valor de λ , así se obtendrán las distintas mallas. El proceso es el siguiente; una vez calculada la longitud de onda se define un conjunto de números de elementos por longitud de onda N_λ y a partir de estos se puede determinar la longitud de un elemento L_e de la malla:

$$L_e = \frac{\lambda}{N_\lambda} \quad (7.14)$$

Conocida L_e solo queda calcular el número de elementos N_e por cada eje, sabiendo la longitud de la cavidad (10x4 metros), de modo que:

$$N_{e,x} = \frac{10}{L_e} \quad N_{e,y} = \frac{4}{L_e} \quad (7.15)$$

Este estudio se realizará tanto para el primer modo como para el noveno, así se obtienen conclusiones más detalladas.

Modo 1

En primer lugar se calcula el valor de λ que atendiendo a las propiedades del fluido y empleando la ecuación (7.13) resulta:

$$\lambda = \frac{1500}{75} = 20 \text{ m} \quad (7.16)$$

Atendiendo a este valor se define el vector de número de elementos por longitud de onda que será el siguiente:

$$N_\lambda = (5 \quad 10 \quad 15 \quad 20 \quad 25 \quad 30 \quad 35 \quad 40 \quad 45 \quad 50 \quad 55) \quad (7.17)$$

Los resultados del número de elementos totales se muestran en la siguiente tabla atendiendo a las ecuaciones (7.14) y (7.15). En esta tabla se podrá ver el número de elementos por cada lado, es decir por eje; de manera que los elementos totales que conforma el dominio fluido se obtiene del producto de ambos valores:

$$N_{TOTAL} = N_{e,x} \times N_{e,y}$$

Por tanto las diferentes mallas a calcular son las siguientes:

Tabla 7-3 Número de elementos por eje para cada valor de N_λ en el caso del modo 1

| N_λ | L_e | N_e | |
|-------------|-------|----------------|----------------|
| 5 | 4 | $N_{e,x} = 2$ | $N_{e,y} = 1$ |
| 10 | 2 | $N_{e,x} = 5$ | $N_{e,y} = 2$ |
| 15 | 1.333 | $N_{e,x} = 8$ | $N_{e,y} = 3$ |
| 20 | 1 | $N_{e,x} = 10$ | $N_{e,y} = 4$ |
| 25 | 0.8 | $N_{e,x} = 13$ | $N_{e,y} = 5$ |
| 30 | 0.667 | $N_{e,x} = 15$ | $N_{e,y} = 6$ |
| 35 | 0.571 | $N_{e,x} = 18$ | $N_{e,y} = 7$ |
| 40 | 0.5 | $N_{e,x} = 20$ | $N_{e,y} = 8$ |
| 45 | 0.444 | $N_{e,x} = 22$ | $N_{e,y} = 9$ |
| 50 | 0.4 | $N_{e,x} = 25$ | $N_{e,y} = 10$ |
| 55 | 0.364 | $N_{e,x} = 27$ | $N_{e,y} = 11$ |

De manera que la tercera columna definirá las diferentes mallas a estudiar. Al igual que antes se toma como solución exacta la malla más fina, que en este caso será de 27x11, y luego se comparará con el resto de mallas a partir del error calculado con la ecuación (7.6) donde i representa ahora las componentes del vector N_λ .

Así para el modo 1 se tiene la siguiente representación:

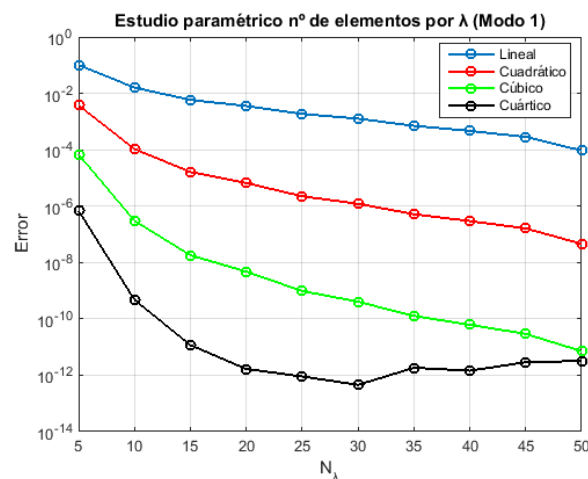


Figura 7-7. Estudio paramétrico del número de elementos por λ (Modo 1)

Como era de esperar a medida que aumenta el orden del elemento, el número de elementos necesarios para la obtención de la solución exacta disminuye. Por ejemplo para orden cuártico a partir de 20 elementos por longitud de onda se obtiene una solución con errores de 10^{-12} , por lo que se puede decir que es exacta.

Este estudio permitirá determinar cuántos elementos son necesarios para llegar a la solución exacta, sin necesidad de definir un número excesivo, lo cual no es nada económico respecto al tiempo de cálculo.

Modo 9

El mismo gráfico se ha realizado para el modo 9, donde la longitud de onda será ahora:

$$\lambda = \frac{1500}{353.8} = 4.24 \text{ m} \tag{7.18}$$

En base a ello se define un nuevo vector N_λ a partir del cual se realiza la siguiente tabla:

Tabla 7-4 Número de elementos por eje para cada valor de N_λ en el caso del modo 9

| N_λ | L_e | N_e | |
|-------------|-------|----------------|----------------|
| 2 | 2.12 | $N_{e,x} = 5$ | $N_{e,y} = 2$ |
| 4 | 1.06 | $N_{e,x} = 10$ | $N_{e,y} = 4$ |
| 6 | 0.707 | $N_{e,x} = 15$ | $N_{e,y} = 6$ |
| 8 | 0.53 | $N_{e,x} = 20$ | $N_{e,y} = 8$ |
| 10 | 0.424 | $N_{e,x} = 22$ | $N_{e,y} = 9$ |
| 12 | 0.353 | $N_{e,x} = 27$ | $N_{e,y} = 11$ |

Se puede observar que ahora se necesitan muchos menos elementos por longitud de onda N_λ que en el caso anterior, es decir el vector N_λ genera mallas del mismo tamaño que en el modo 1 pero empleando un menos número de elementos por longitud de onda. Por ejemplo para llegar a definir una malla de 27x11, en el modo 1 se necesitaban 55 elementos por longitud de onda mientras que en el modo 9 solo se precisa de 12.

Esto es debido a la longitud de onda para cada modo, en el primero λ es mucho mayor que para el modo 9 por lo que se deben emplear bastantes más elementos para cubrir todo el espacio.

Una vez obtenida la tabla se pueden graficar los resultados nuevamente:

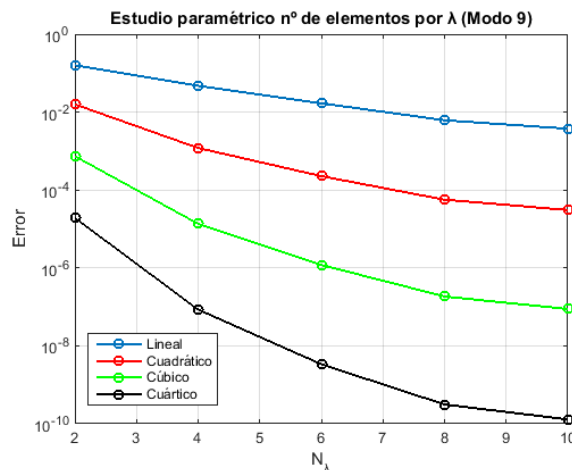


Figura 7-8. Estudio paramétrico del número de elementos por λ (Modo 9)

En la imagen se muestra un mismo comportamiento que para el caso anterior, sin embargo ahora el error es más grande que antes. Esto se debe a que, como se dijo anteriormente, a medida que se avanza en las frecuencias de los modos de vibración el error entre la exacta y la real va aumentando. Por ello errores en el modo 1 son siempre menores que en modos mayores.

7.2. Solución del problema sólido

Para el problema sólido se seguirá un procedimiento similar al del caso fluido, sin embargo ahora los elementos son unidimensionales por lo que hay ciertos cambios.

La obtención de las matrices se realiza a partir de la formulación del sólido explicada en el apartado 2.1.2., que también se implementa en un programa Matlab. Antes en GiD se realiza la discretización del sólido que en este caso será igual que antes, para el elemento lineal se emplean 50 elementos y para el resto 20. La longitud de la tapa son 10 metros que serán cubiertos por un total de 20 elementos. Se utilizan 20 elementos debido a la concordancia que debe existir con el problema fluido donde se discretizaba con 20x10 elementos.

La malla GiD para elementos de orden superior al lineal será:

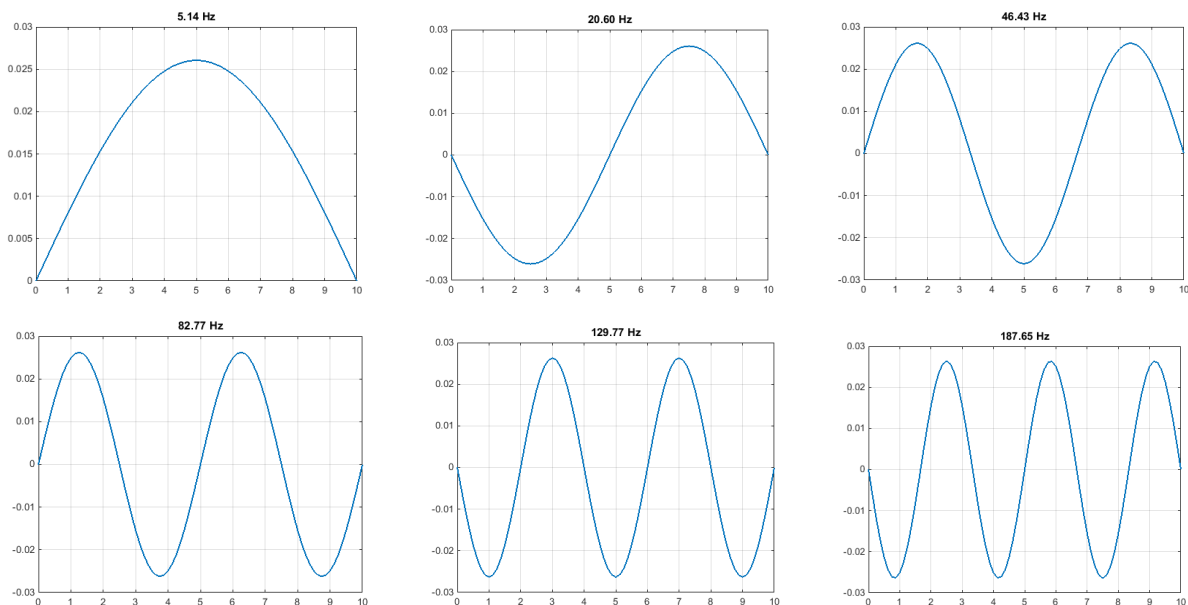
— 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Figura 7-9. Malla del problema sólido para elementos de orden superior al lineal

En este problema se emplearán elementos unidimensionales de Lagrange para el caso de membrana y de Hermite para el caso de flexión.

7.2.1. Modos de vibración y frecuencias de excitación

Para el problema de la estructura, los nueve primeros modos de vibración independientes del orden del elemento son:



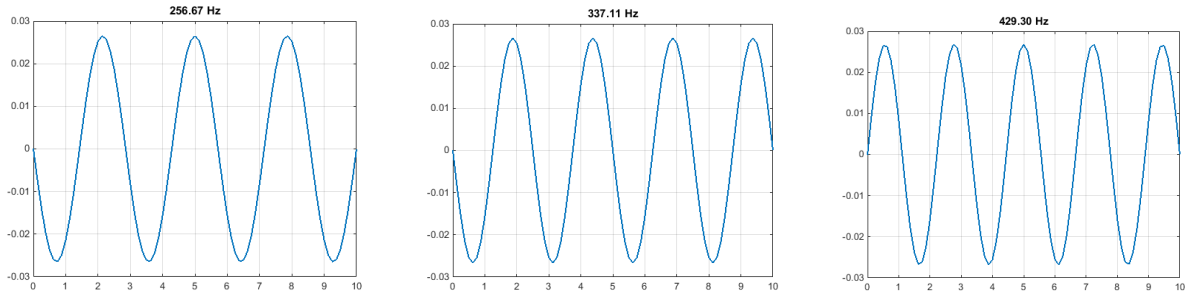


Figura 7-10. Modos de vibración del sólido

La frecuencia que aparece en cada uno de los modos es la correspondiente al caso de elemento cuártico. A continuación se muestra una tabla con las frecuencias para cada modo y orden del elemento.

Tabla 7-5 Frecuencias naturales del problema sólido para los cuatro tipos de elementos. [Hz]

| Modo | Elemento lineal | Elemento cuadrático | Elemento cúbico | Elemento cuártico |
|------|-----------------|---------------------|-----------------|-------------------|
| 1 | 5.14 | 5.14 | 5.14 | 5.14 |
| 2 | 20.58 | 20.60 | 20.60 | 20.60 |
| 3 | 46.36 | 46.77 | 46.42 | 46.43 |
| 4 | 82.55 | 82.89 | 82.74 | 82.77 |
| 5 | 129.26 | 130.06 | 129.72 | 129.77 |
| 6 | 186.60 | 188.26 | 187.54 | 187.65 |
| 7 | 254.73 | 257.79 | 256.47 | 256.67 |
| 8 | 333.83 | 339.02 | 336.76 | 337.11 |
| 9 | 424.13 | 432.35 | 428.76 | 429.30 |

El comportamiento es similar al caso fluido, a medida que los modos avanzan los errores son mayores pero para elementos de orden superior al lineal estos no cambian tanto. Por tanto se puede demostrar que para una malla más gruesa y con elementos de orden superior también se puede llegar a la solución exacta.

7.2.2. Estudio paramétrico del número de puntos de Gauss

Al igual que para el problema fluido se calculará el error para distintos números de puntos de integración. En este caso los elementos son unidimensionales por lo que el número de puntos no es referido al eje sino al total.

De modo que para una malla de 20 elementos como la mostrada en la figura 7-9 se calcula la primera frecuencia natural comenzando por 51 puntos de Gauss hasta llegar a un único punto, luego se va calculando el error con la ecuación (7.6). Este estudio se realizará para cada tipo de elemento y los resultados se muestran en la siguiente figura:

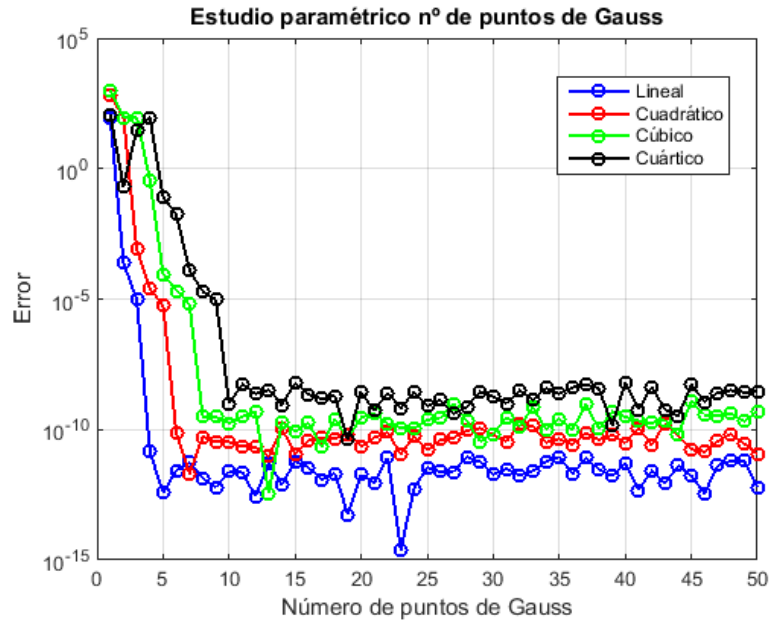


Figura 7-11. Estudio paramétrico del número de puntos de Gauss (Modo1)

La figura muestra que se necesitan menos puntos de Gauss para el elemento lineal que para el resto de elementos ya que cuanto mayor es el orden del mismo más puntos de integración necesitará, al igual que ocurría en el problema fluido.

Análogamente al problema fluido, se procede al cálculo del orden de las integrales con las que se obtienen las matrices. Sin embargo ahora se tienen dos casos: el problema de la membrana que utiliza elementos de Lagrange y el problema de flexión que utiliza elementos de Hermite.

El orden de las funciones de forma se obtiene a partir del grado del elemento, de manera que para elementos de Lagrange unidimensionales y de Hermite serán:

$$O(N_{Lagrange}) = (k - 1) \quad O(N_{Hermite}) = 2(k - 1) + 1 \quad (7.19)$$

Con la expresión (7.19a) se puede calcular el orden de las integrales (2.41) a (2.44) y con la expresión (7.19b) las integrales (2.69) a (2.74). Una vez conocido el orden se puede hallar el número de puntos de Gauss necesario con la expresión anterior (7.12) para ambos tipos de problemas.

Así se obtendrá una tabla similar a la del apartado 7.1.2 para la flexión y otra para la membrana.

De modo que tomando un valor aproximado del número de puntos de Gauss necesario a partir de ambas tablas se llega a la siguiente representación adimensionalizada, donde se muestra a partir de qué número de puntos de integración se obtendrán resultados prácticamente exactos:

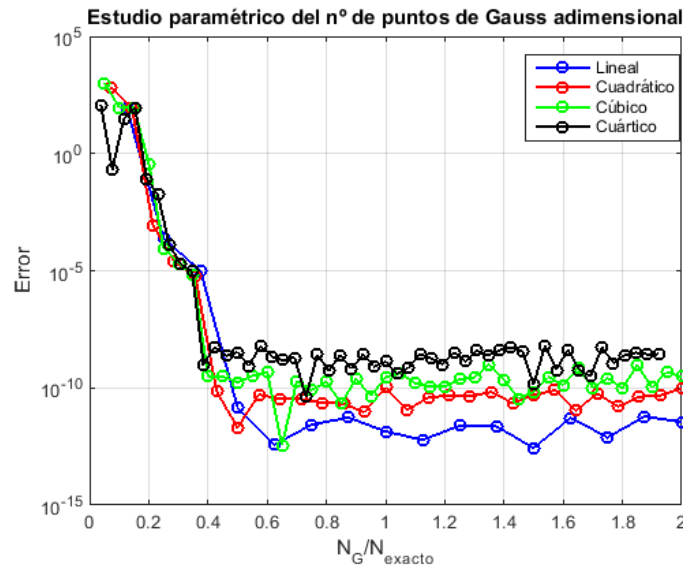


Figura 7-12. Estudio paramétrico adimensionalizado del número de puntos de Gauss (Modo1)

Aquí se aprecia como efectivamente se necesitan más puntos de Gauss para elementos de mayor orden que para elementos lineales para converger a la solución exacta.

7.2.3. Estudio paramétrico del número de elementos por longitud de onda

Este estudio precisa del conocimiento de la longitud de onda pero en el caso de un sólido dicho valor no se obtiene de manera similar al caso del fluido. Para ello se debe recurrir a la teoría de vibraciones en las estructuras explicada en documentos como *Vibration of structures* [6] o también en libros como Ingeniería acústica de Michael Möser [7].

En primer lugar cabe decir que existen dos tipos de ondas acústicas: las ondas longitudinales y las ondas de flexión. Para la resolución del problema sólido son interesantes las segundas pero se estudiarán ambas ya que existe una relación.

En primer lugar, las ondas longitudinales son descritas como una deformación de las partículas de volumen y por tanto la velocidad del sonido en las mismas es conocida para varios tipos de dominio.

La velocidad del sonido para el caso de una viga, un sólido 3D y una placa sería:

$$c_{L,viga} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad c_{L,sólido} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad c_{L,placa} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{E}{(1-\nu^2)}} \quad (7.20)$$

En los problemas de 2.5D del MEF que se están resolviendo interesará elegir el caso de la placa ya que realmente es un problema tridimensional.

Con respecto a las ondas de flexión, éstas son las más importantes en las estructuras ya que realmente son deformaciones en la dirección normal a través de la sección transversal. De modo que a partir de la teoría de Euler-Bernoulli desarrollada en [6] se llega a la ecuación diferencial de las ondas de flexión:

$$B \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0 \quad (7.21)$$

Donde $B = EI$ es la rigidez a flexión, ζ es el desplazamiento en la dirección normal y $m = \rho S$ es la masa por unidad de longitud.

Las soluciones de esta ecuación según la teoría de Euler-Bernoulli se dan a través del número de onda k_B que representa la relación entre la frecuencia y la longitud de onda:

$$k_B^4 = \frac{\omega^2 m}{B} \quad (7.22)$$

El número de onda guarda relación con la longitud de onda a partir de la siguiente expresión:

$$k_B = \frac{2\pi}{\lambda_B} \quad (7.23)$$

Por ello a partir de las expresiones (7.22) y (7.23) se llega a:

$$k_B = \frac{\omega}{c_B} \quad \rightarrow \quad c_B = \frac{\omega}{k_B} = \frac{\omega}{\frac{2\pi}{\lambda_B}} = \frac{\omega \lambda_B}{2\pi} = \sqrt[4]{\frac{B\omega^2}{m}} \quad (7.24)$$

Esta velocidad del sonido solo es válida cuando la longitud de onda sea mayor que seis veces el espesor de la placa, pero en este problema sólido se cumple de manera olgada.

Solo quedaría relacionar este valor de la velocidad del sonido en ondas de flexión con ondas longitudinales, lo cual se realiza a partir de (7.24):

$$c_B = \sqrt[4]{\frac{EI\omega^2}{\rho S}} = \sqrt[4]{\frac{Eh^2\omega^2}{12\rho}} = \sqrt[4]{c_L^2 \frac{h^2\omega^2}{12}} = \sqrt{c_L \frac{h\omega}{\sqrt{12}}} = \sqrt{c_L \frac{h2\pi f}{\sqrt{12}}} = \sqrt{c_L h f} \sqrt{\frac{2\pi}{\sqrt{12}}} \quad (7.25)$$

$$\rightarrow \quad c_B = \sqrt{1.8 c_L h f}$$

Ésta sería entonces la propagación de las ondas de flexión en el sólido. Para el problema en cuestión se empleará como c_L la respectiva a la placa y se calculará c_B tanto para el modo 1 como para el modo 9.

Modo 1

Análogamente a como se hizo para el fluido, se debe determinar el número de elementos totales a partir del número de elementos por longitud de onda. En primer lugar se calcula la longitud de onda a partir de la ecuación (7.13), pero para ello es necesario conocer la velocidad del sonido dada a continuación por la expresión (7.25) y (7.20). Entonces tomando las propiedades del problema sólido y el valor de la primera frecuencia natural (5.14 Hz) se tiene que:

$$c_L = 9607.7 \frac{m}{s} \quad \rightarrow \quad c_B = 102.42 \text{ m/s} \quad (7.26)$$

Así se puede proceder al cálculo de la longitud de onda:

$$\lambda = \frac{102.42}{5.14} = 20 \text{ m} \quad (7.27)$$

Para el modo 1 se ha elegido el siguiente vector de número de elementos por longitud de onda:

$$N_\lambda = (2 \quad 8 \quad 14 \quad 20 \quad 26 \quad 32 \quad 38 \quad 44 \quad 50 \quad 56)$$

Ahora no se calculará un número de elementos para cada eje sino que como el problema sólido es unidimensional, se obtendrá el número de elementos totales. Por tanto conociendo la longitud de la tapa sólida que son 10 metros se conocerá directamente la discretización que se debe realizar.

Siguiendo el mismo procedimiento que en el caso del fluido la tabla que se obtiene es la siguiente:

Tabla 7-6 Número de elementos totales para cada valor de N_λ en el caso del modo 1

| N_λ | L_e | N_e |
|-------------|-------|-------|
| 2 | 10 | 1 |
| 8 | 2.5 | 4 |
| 14 | 1.429 | 7 |
| 20 | 1 | 10 |
| 26 | 0.769 | 13 |
| 32 | 0.625 | 16 |
| 38 | 0.526 | 19 |
| 44 | 0.454 | 22 |
| 50 | 0.4 | 25 |
| 56 | 0.357 | 28 |

Una vez determinadas las mallas se pueden graficar los resultados y esto se muestra a continuación en la representación del error por N_λ :

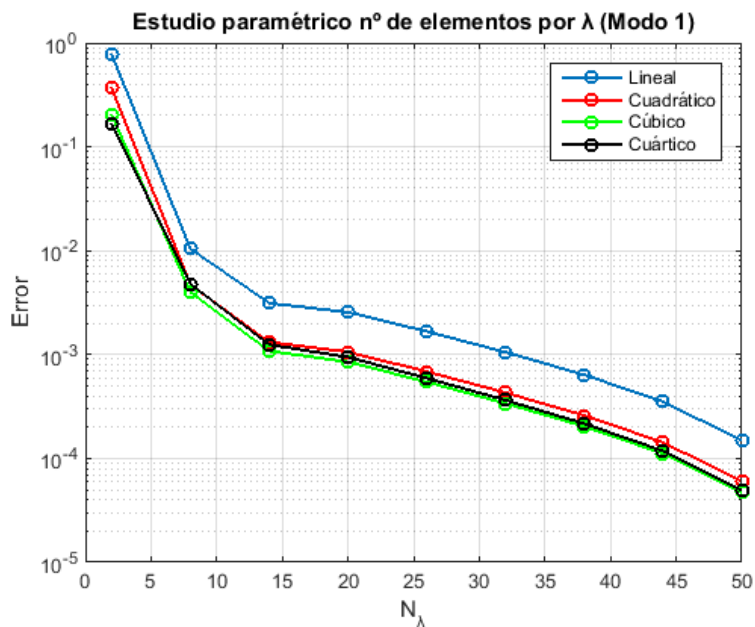


Figura 7-13. Estudio paramétrico del número de elementos por λ (Modo 1)

Como se esperaba a medida que aumenta el número de elementos el error disminuye y también se ve que este error es menor cuanto mayor sea el orden del elemento. Se deduce pues que se puede obtener una solución muy aproximada a la exacta empleando menos elementos de un orden elevado que elementos lineales, ya que por ejemplo el error para $N_\lambda = 15$ para elemento cuártico tiene el mismo error que para $N_\lambda = 33$ en el caso de elementos lineales.

Modo 9

Para realizar nuevamente el estudio se deben calcular las velocidades de propagación y la longitud de onda otra vez ya que éstas dependen de la frecuencia natural que para el modo 9 será de unos 428 Hz.

Por tanto a partir de las propiedades del sólido y las ecuaciones (7.25) y (7.20) se tiene:

$$c_L = 9607.7 \frac{m}{s} \rightarrow c_B = 934.56 m/s \quad (7.28)$$

Así la longitud de onda será:

$$\lambda = \frac{934.56}{428} = 2.21 m \quad (7.29)$$

Conocida la longitud de onda, se elige el vector de número de elementos por longitud de onda que será el mostrado a continuación:

$$N_\lambda = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8)$$

Como se explicó en el problema fluido, el modo 9 necesita muchos menos elementos por longitud de onda que el modo. Por tanto se pueden obtener las mismas mallas y discretizaciones pero con un número menor de N_λ , esto se debía al valor de la longitud de onda ya que a mayor λ mayor será el número de elementos para cubrir ese espacio.

De manera que las mallas a realizar se muestran en la siguiente tabla:

Tabla 7-7 Número de elementos totales para cada valor de N_λ en el caso del modo 9

| N_λ | L_e | N_e |
|-------------|-------|-------|
| 1 | 2.21 | 4 |
| 2 | 1.105 | 9 |
| 3 | 0.736 | 14 |
| 4 | 0.553 | 18 |
| 5 | 0.442 | 23 |
| 6 | 0.368 | 27 |
| 7 | 0.315 | 32 |
| 8 | 0.276 | 36 |

La representación del error cometido con respecto al número de elementos por longitud de onda es la siguiente:

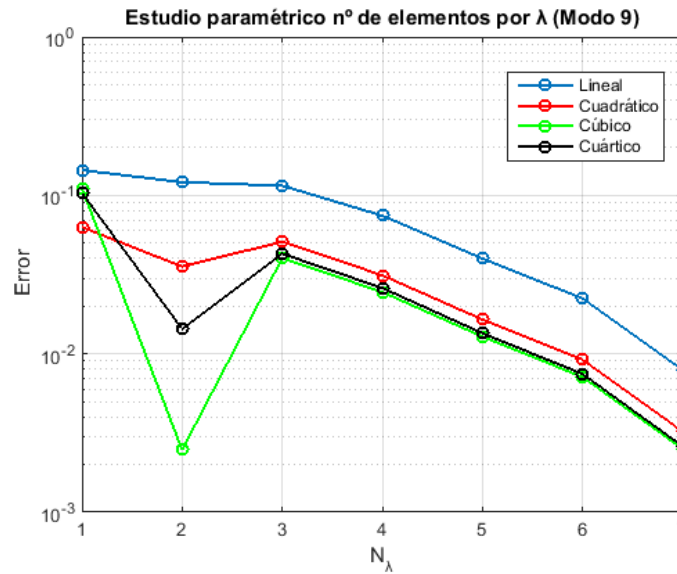


Figura 7-14. Estudio paramétrico del número de elementos por λ (Modo 9)

El comportamiento es similar al caso del modo 1 solo que ahora el error es mayor ya que como se explicó a medida que aumenta el modo de vibración el error crece. Además se pueden observar ciertos puntos que se salen del comportamiento general, por ejemplo para $N_\lambda = 2$ se da un error muy pequeño en lo elementos cúbico y cuártico; esto realmente es un caso aislado ya que normalmente cuanto mayor es N_λ el error cometido va disminuyendo.

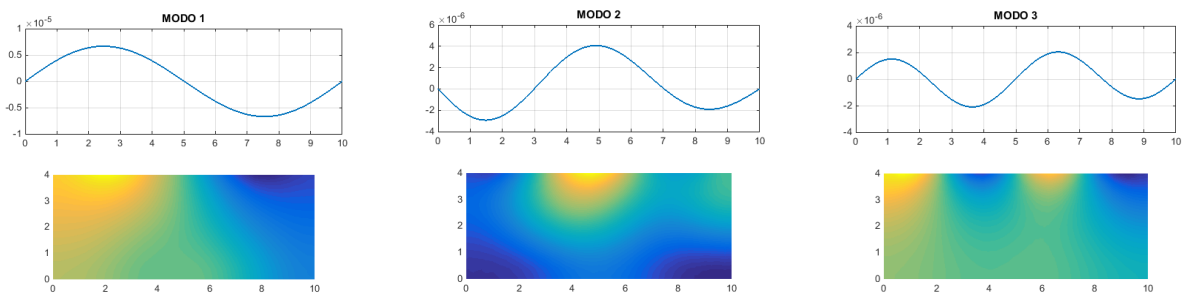
7.3. Solución del problema de interacción fluido-estructura

Una vez resueltos los problemas del fluido y del sólido de manera independiente, ahora se trata de conectar ambos problemas y obtener una solución global. Para ellos se debe realizar un proceso de conexión de nodos mediante la formulación del apartado 2.1.3 que también se implementará en un programa Matlab.

Las mallas empleadas en el problema sólido y fluido deben ser continuas unas con otras, de modo que si la malla del fluido es de 20x10 elementos la del sólido debe ser de 20.

A continuación se resolverá el problema de interacción obteniendo nuevamente los modos de vibración y las distintas frecuencias de excitación.

Los nueve primeros modos de vibración del problema son:



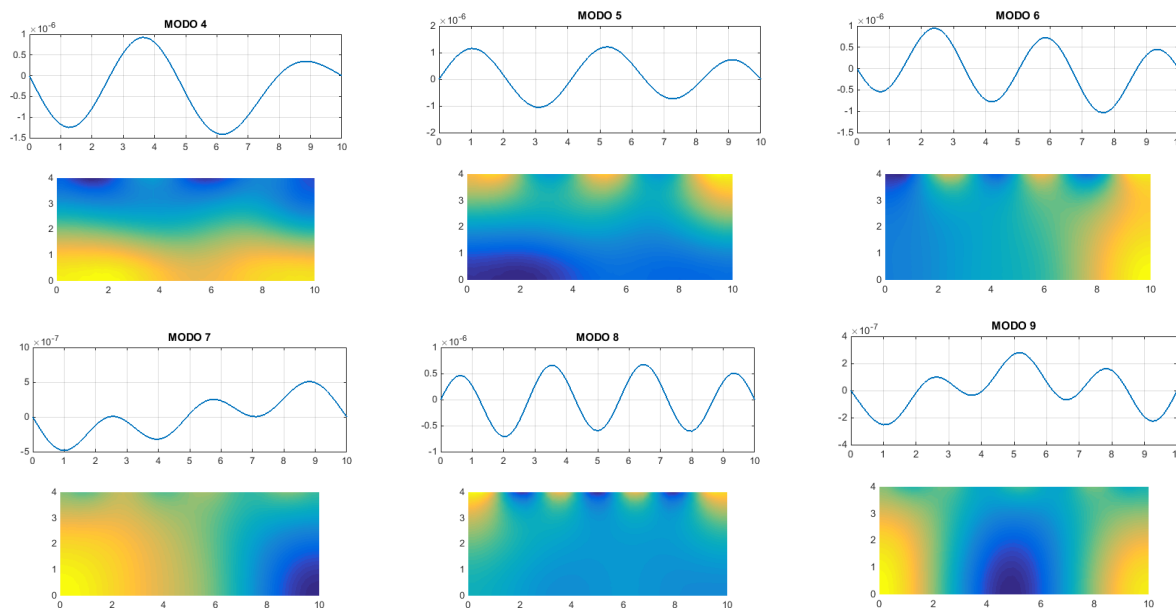


Figura 7-15. Modos de vibración del problema completo

Los modos de vibración que se han obtenido son los mismos para todo tipo de elementos, sin embargo las frecuencias de cada uno de ellos si tienen cierta variación con respecto al orden del elemento.

Para la obtención de dichas frecuencias se resolverá el problema con los cuatro tipos de elementos y se expondrán los resultados en una tabla. Las mallas que se emplearán para la resolución serán las descritas para los problemas anteriores y también hay que definir las del contorno del fluido.

Por tanto para el fluido se tendrá una malla para el dominio de 200 elementos y una para el contorno de 60 elementos; por su parte el sólido empleará una malla de 20 elementos lineales. Estas son para los elementos de orden superior al lineal, para el lineal se utilizará la malla anteriormente descrita de 768 elementos para el fluido, otra de 112 para el contorno del fluido y por último una discretización del sólido de 32 elementos.

Así los resultados para cada uno de los tipos de elementos son los siguientes:

Tabla 7-8 Frecuencias naturales del problema de interacción. [Hz]

| Modo | Elemento lineal | Elemento cuadrático | Elemento cúbico | Elemento cuártico |
|------|-----------------|---------------------|-----------------|-------------------|
| 1 | 6.17 | 6.16 | 6.16 | 6.32 |
| 2 | 18.33 | 18.29 | 18.21 | 18.31 |
| 3 | 38.60 | 38.47 | 38.37 | 37.64 |
| 4 | 65.80 | 65.37 | 65.22 | 53.53 |
| 5 | 87.92 | 87.82 | 87.91 | 66.20 |
| 6 | 101.07 | 100.57 | 100.16 | 102.81 |
| 7 | 118.48 | 118.30 | 118.47 | 122.81 |
| 8 | 151.24 | 150.08 | 148.59 | 150.18 |
| 9 | 174.95 | 174.66 | 172.23 | 179.54 |

Nuevamente el comportamiento es similar al de casos anteriores y por tanto se demuestra que una malla lineal con un elevado número de elementos puede ser equivalente a una malla gruesa con elementos de orden superior.

Estos resultados también pueden ser comparados con los del artículo [2] donde puede comprobarse que son muy similares.

7.4. Estudio de convergencia de la solución

Una vez estudiados tres tipos de problemas y teniendo en cuenta los estudios paramétricos acerca del número de puntos de Gauss y del número de elementos por longitud de onda, se puede llegar a una solución exacta empleando muchos menos elementos pero siendo estos de orden superior.

En los problemas anteriores se empleó una malla de 200 elementos para el caso de orden mayor al lineal, pero incluso podría analizarse una malla más gruesa y comprobar que converge a la solución exacta. Para ello a continuación se elegirá una malla que no tenga un número excesivo de elementos y se analizará en primer lugar con elementos de tipo lineal y después con el resto de elementos; para que finalmente los resultados puedan compararse con los de la solución exacta. La solución exacta que se tomará es la de la tabla anterior referida a una malla de 768 elementos lineales.

Por ejemplo se pone en estudio una malla bastante gruesa como es la de 10x5 que da un total de 50 elementos en el dominio fluido, con 30 en el contorno del mismo y 10 para el sólido. Cuando se calculen los resultados para el elemento de tipo lineal podrá comprobarse que distan mucho de los exactos calculados anteriormente, sin embargo si para esa misma malla se va utilizando un elemento de mayor orden, poco a poco convergerá a la solución exacta.

En la siguiente tabla se muestra la evolución de resultados para una malla de 50 elementos a medida que avanza el orden del elemento que conforma la malla:

Tabla 7-9 Frecuencias para diferentes órdenes del elemento. Convergencia a la solución exacta. [Hz]

| Modo | Elemento lineal | Elemento cuadrático | Elemento cúbico | Elemento cuártico | Solución exacta |
|------|-----------------|---------------------|-----------------|-------------------|-----------------|
| 1 | 6.37 | 6.20 | 6.17 | 6.17 | 6.17 |
| 2 | 19.63 | 18.57 | 18.44 | 18.44 | 18.33 |
| 3 | 43.18 | 39.46 | 39.04 | 39.09 | 38.60 |
| 4 | 75.66 | 67.85 | 66.88 | 67.01 | 65.80 |
| 5 | 90.25 | 88.32 | 88.25 | 88.36 | 87.92 |
| 6 | 110.97 | 104.28 | 102.87 | 103.09 | 101.07 |
| 7 | 133.41 | 120.41 | 119.61 | 119.90 | 118.48 |
| 8 | 173.36 | 159.12 | 155.39 | 155.70 | 151.24 |
| 9 | 196.89 | 176.14 | 175.53 | 175.76 | 174.95 |

En esta tabla se puede apreciar el enorme cambio que hay al pasar del elemento lineal a otro de orden superior. Los errores cometidos al emplear una malla gruesa con elementos lineales son bastante significativos sin embargo al aumentar el orden de esos elementos rápidamente convergen a la solución exacta haciendo que dichos errores disminuyan en gran medida.

Para finalizar la resolución del problema completo, se va a calcular la función de respuesta en frecuencia o FRF. Al cociente entre la respuesta (en cualquiera de sus formas: desplazamiento, velocidad o aceleración) y la

excitación que la genera se le denomina FRF. Esta función como su nombre indica está expresada en el dominio de la frecuencia, por tanto se trata de una magnitud compleja.

Para este problema la respuesta que se genera es una rotación y la excitación que la provoca es el momento aplicado en uno de los apoyos de la placa sólida. Por lo que el FRF será:

$$FRF = \frac{\delta(t)}{M_{ext}(t)} = \frac{\delta}{M_o} \quad (7.30)$$

Siendo δ la rotación de la viga que actúa como tapa y M_o el momento aplicado.

Para la representación de esta variable compleja se realizará un barrido de frecuencias desde 1 Hz hasta 100 Hz, tomando 500 valores de frecuencias. Esto se aplicará primero a la malla de 50 elementos antes descrita y posteriormente a la malla de 200 elementos, así podrá observarse que para las distintas frecuencias naturales del problema la rotación tiende a ser mucho más elevada. Como la malla de 50 elementos es menos precisa el valor de δ en las frecuencias naturales será bastante más elevado que para la malla de 200 elementos. Se puede decir que la primera malla hace tender la rotación al infinito mientras que la otra no.

Ambos tipos de mallas emplearán elementos de orden lineal, la única diferencia está entonces en el número de elementos.

Tomando como excitación el momento unidad en ese apoyo, la representación del FRF para los dos tipos de mallas es el siguiente:

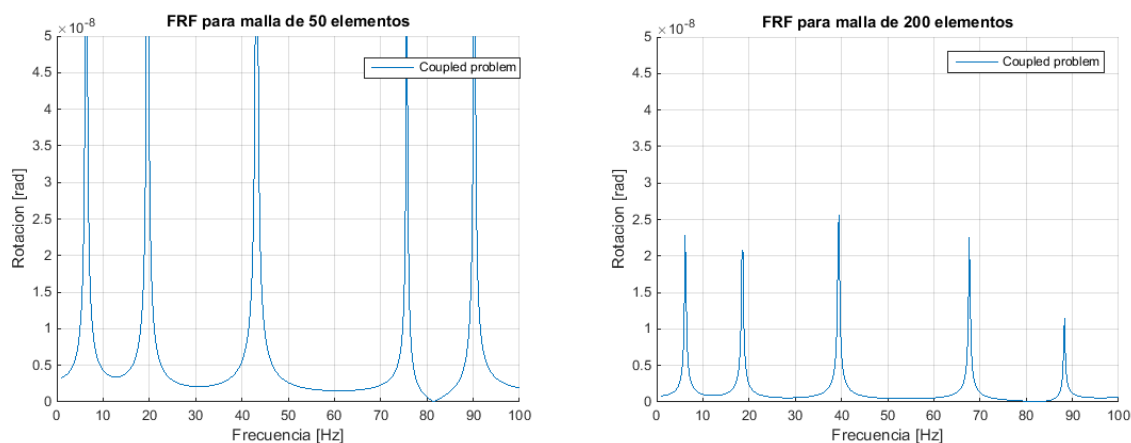


Figura 7-16.FRF para mallas de 50 y 200 elementos

En estas figuras se puede ver como efectivamente se cumple lo explicado con anterioridad. La representación del FRF para este problema puede verificarse en el artículo [1], donde se comprueba que coincide de manera prácticamente exacta.

7.5. Conclusiones

Con los resultados del problema fluido, del problema sólido y del problema de interacción se puede concluir que las mallas gruesas de elementos de elevado orden son efectivas. En la actualidad las más usadas son las mallas lineales debido a su facilidad de cálculo y su sencillez en la construcción, sin embargo precisan de un gran número de elementos y por tanto de tiempo de cálculo.

Con los resultados anteriores se ha demostrado que una malla con muchos menos elementos, de 768 que tenía la lineal se pasa a 200, cuyos elementos sean de orden mayor al lineal, se pueden obtener resultados muy satisfactorios. Sin embargo con esta malla de 200 elementos, en el caso de que estos fueran lineales, generaría bastantes errores comparados con elementos de orden superior.

Se puede decir incluso que la malla de 200 elementos no es tan gruesa como podría llegar a ser, es decir se

puede disminuir el número de elementos aún más hasta llegar a una solución convergente. Este proceso es el que se ha realizado anteriormente al analizar una malla de 50 elementos y comprobar la convergencia a la solución exacta.

Por otra parte de los estudios paramétricos llevados a cabo anteriormente también se puede determinar aproximadamente el número de puntos de Gauss mínimos necesarios para que la integración de las ecuaciones sea muy aproximada a la exacta. Esto permitirá que no haya un número de puntos de integración excesivamente grande y que por tanto el tiempo de cálculo disminuya, ya que se reducen los cálculos que debe realizar el programa. Para cada elemento hay un número de puntos de Gauss mínimo necesario que no es el mismo por lo que deben ir modificándose cuando se cambia el orden del elemento a emplear en la malla.

También se realizó el estudio paramétrico del número de elementos por longitud de onda que básicamente viene a corroborar lo que se ha explicado acerca de las mallas finas y gruesas anteriormente. La longitud de onda realmente es la distancia real que recorre una perturbación en un intervalo de tiempo y lo que se pretende es cubrir esa distancia con un número de elementos, de forma que cuanto menor sea ese número de elementos menor será la aproximación a la solución exacta. Sin embargo aumentando el orden de los elementos, dicha aproximación mejora sustancialmente y provoca que se puedan dar resultados tan satisfactorios como los de la tabla anterior.

En definitiva, estos resultados demuestran que las mallas finas lineales pueden sustituirse de manera eficaz por mallas más gruesas con elementos de orden superior. Además se ahorraría un tiempo de cálculo significativo realizando esto y teniendo en cuenta los estudios paramétricos; es decir introduciendo el número de puntos de integración mínimo necesario y construyendo la malla del problema con el mínimo número de elementos por λ posible. De esta manera se obtienen soluciones próximas a la exacta de forma más económica y rápida

8 CASOS PRÁCTICOS

A continuación se expondrá tres casos prácticos cuya resolución se ha realizado teniendo en cuenta todo lo explicado para el problema de la cavidad con tapa. La solución consistirá en la obtención de los nueve primeros modos de vibración con sus respectivas frecuencias para dos casos: una malla de elementos lineales y una malla de elementos cuárticos.

8.1. Problema del fuselaje de un avión

En este problema se trata de analizar la interacción que existe entre la estructura del fuselaje de un avión y el fluido que encierra. Para ello se realizará nuevamente un estudio en 2.5 dimensiones para $k_z = 0$, tomando como referencia el artículo de G. Sandberg y P. Göransson [8].

Las dimensiones no han sido especificadas en dicha referencia pero se tomarán las siguientes mostradas a continuación en mm:

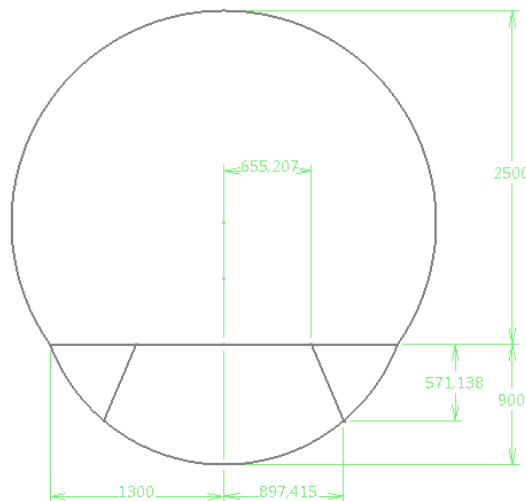


Figura 8-1. Dimensiones del fuselaje

Con respecto a las propiedades, el fluido encerrado será aire con una densidad igual a $\rho_F = 1 \text{ kg/m}^3$ y una velocidad de propagación del sonido igual a $c_F = 340 \text{ m/s}$. Por lo que respecta a las propiedades de la estructura se tomarán como datos: $E = 0.7 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$ y como espesor equivalente se tomará $h = 0.05 \text{ m}$.

Respecto a las condiciones de contorno, para la realización de los problemas estructurales se ha optado por no imponer condiciones de contorno en ningún punto. Por tanto no se impide ni desplazamiento en el plano ni el giro; sin embargo en todos los nodos se restringe el desplazamiento en la dirección z , es decir el movimiento longitudinal.

De modo que para la obtención de estos modos se ha ejecutado el programa a partir de una malla lineal y se ha calculado cada problema para la propia malla lineal y una malla de orden cuártico. Las mallas lineales empleadas para fluido y estructura son las siguientes:

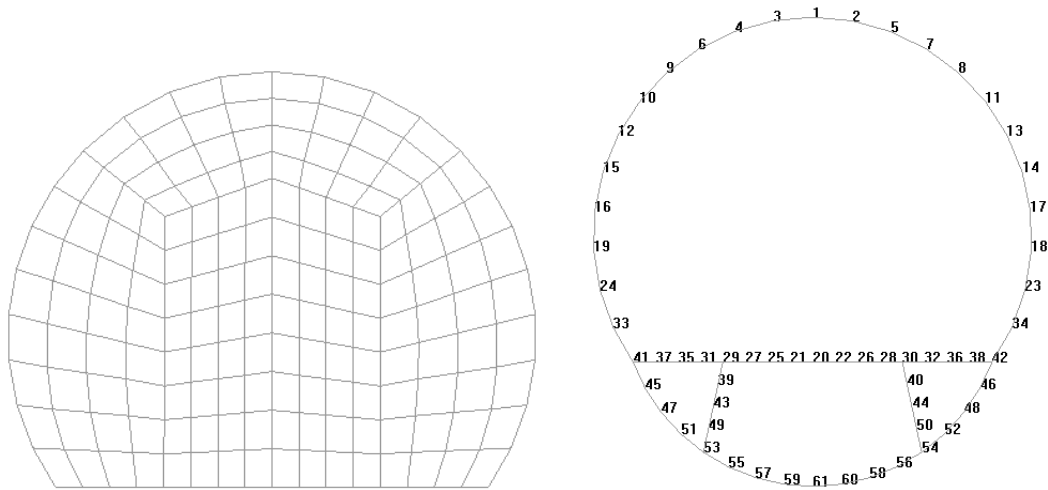


Figura 8-2. Mallas lineales del problema fluido y estructural del fuselaje

Una vez conocidas las propiedades y dimensiones del problema, se pueden realizar como antes estudios paramétricos que conducirán a las mismas conclusiones. Por ellos los nueve primeros modos de vibración de la estructura son los siguientes:

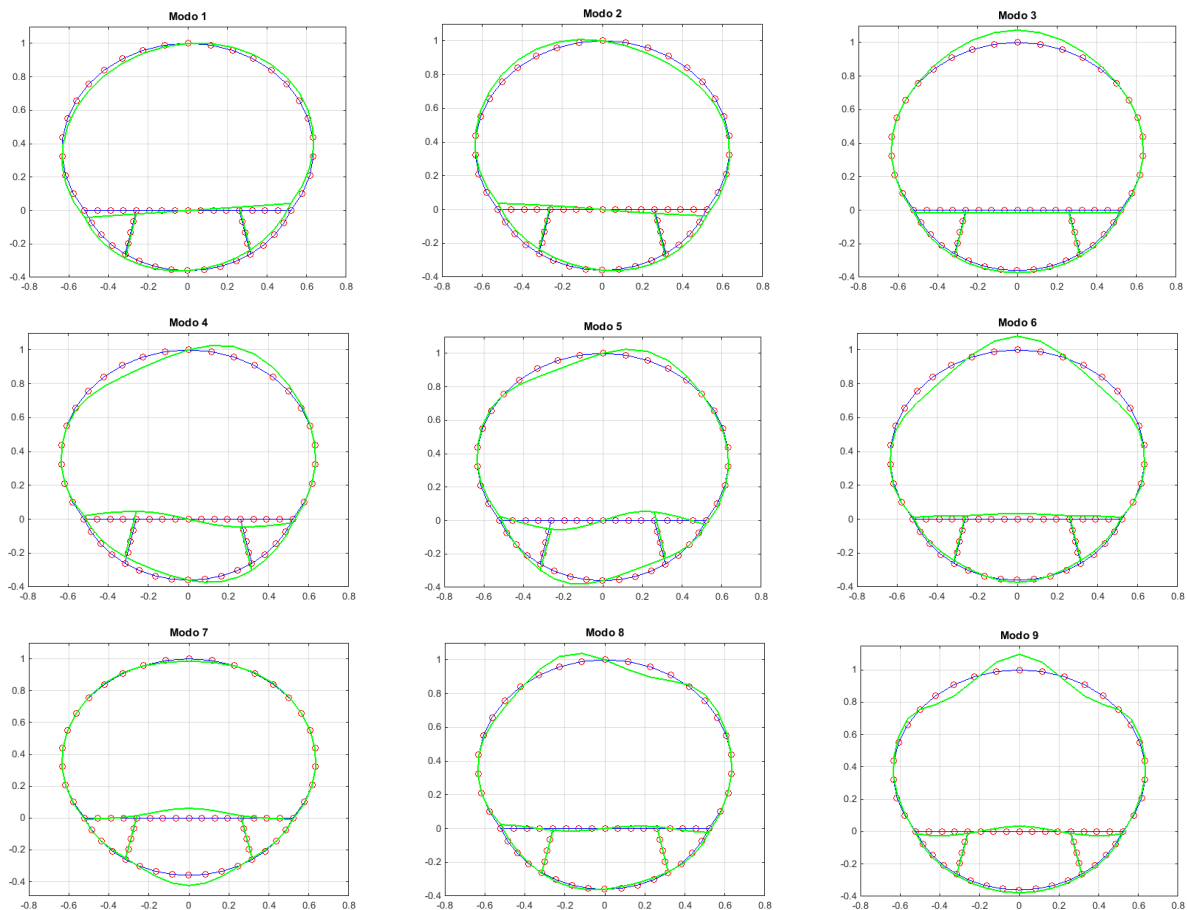


Figura 8-3. Modos de vibración de la estructura del fuselaje sin interacción con el fluido

En la representación de los modos hay que distinguir la estructura indeformada que sería la línea azul, la deformada que sería la línea verde y los diferentes nodos que son los círculos rojos. Para que la deformación del fuselaje puede apreciarse se han adimensionalizado las dimensiones de la estructura, esto se ha realizado

dividiendo todas ellas entre el valor máximo que era 2.5 metros.

A continuación se muestran los modos de vibración del dominio fluido que encierra el fuselaje:

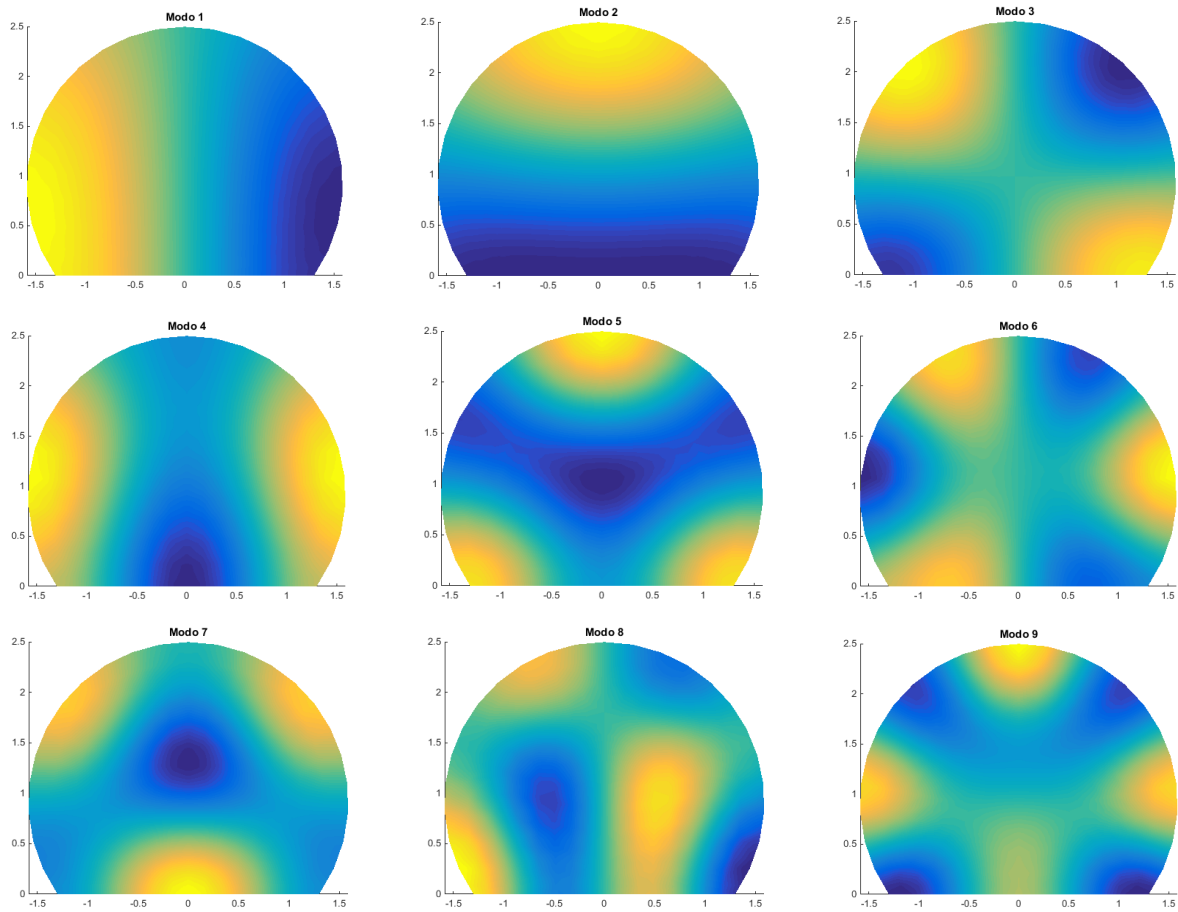
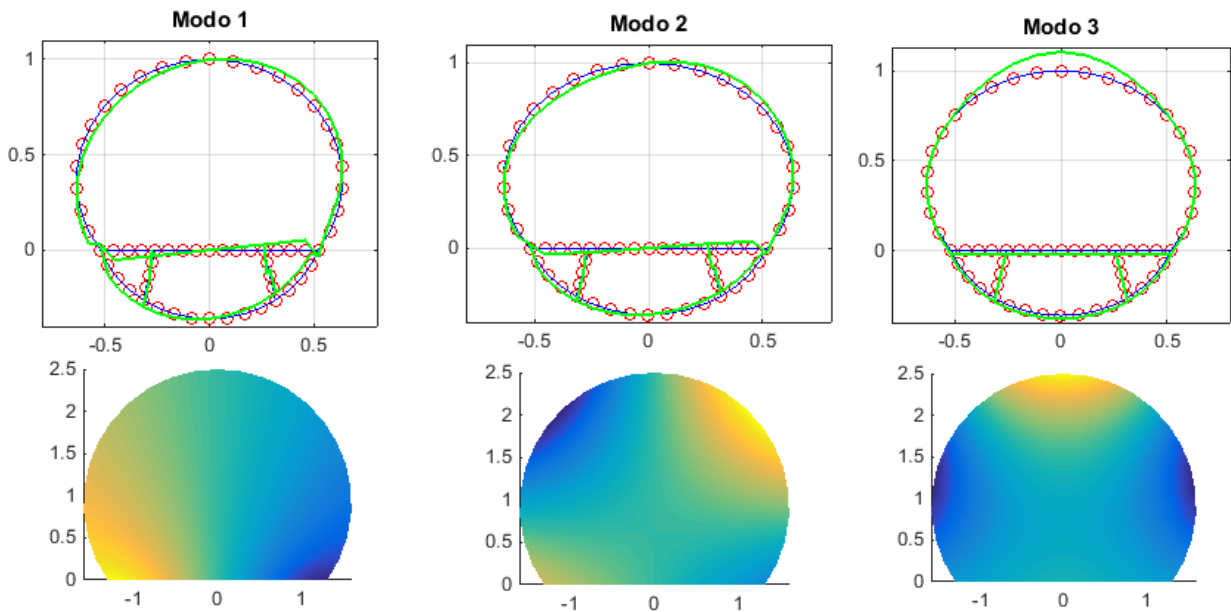


Figura 8-4. Modos de vibración del fluido del fuselaje sin interacción con la estructura

Estos son los distintos modos en los que puede vibrar el fluido dentro de la estructura del fuselaje. Únicamente quedaría la interacción entre estructura y fluido, cuyos resultados son:



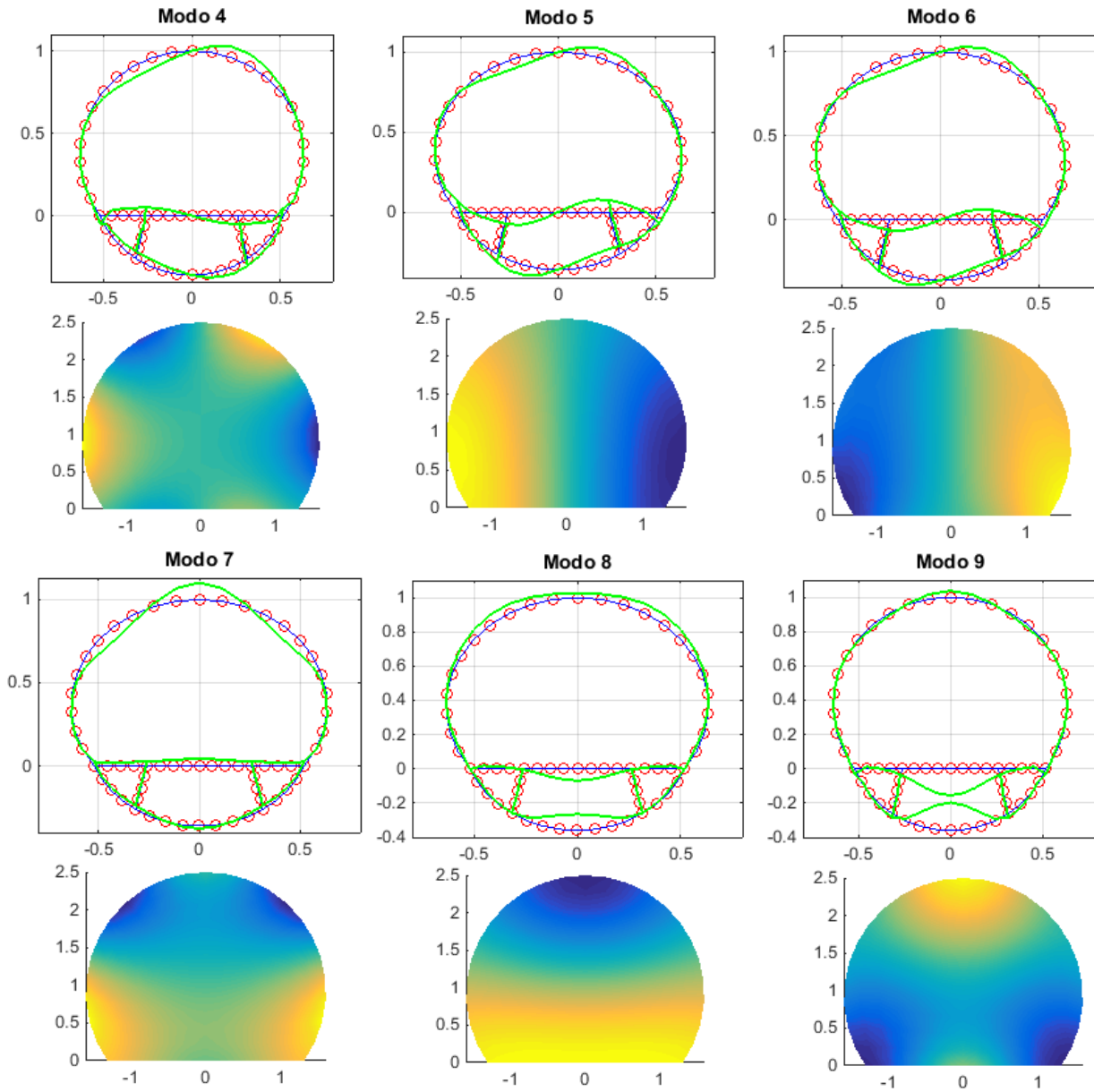


Figura 8-5. Modos de vibración del problema fluido-estructura del fuselaje

A continuación se mostrarán los resultados obtenidos en una tabla donde se diferencia entre malla lineal y malla cuártica y a su vez entre problema fluido, estructural y de interacción. De manera que las nueve frecuencias naturales de vibración para cada uno de los problemas son las siguientes:

Tabla 8-1 Frecuencias naturales del caso del fuselaje. [Hz]

| Modos | Malla lineal | | | Malla cuártica | | |
|-------|--------------|-----------|----------------|----------------|-----------|----------------|
| | P. fluido | P. sólido | P. interacción | P. fluido | P. sólido | P. interacción |
| 1 | 60.14 | 2.13 | 2.13 | 60.04 | 2.13 | 2.13 |
| 2 | 74.98 | 13.35 | 13.33 | 74.77 | 13.32 | 13.29 |
| 3 | 109.10 | 22.72 | 22.67 | 108.62 | 22.61 | 22.58 |
| 4 | 115.02 | 41.81 | 41.76 | 114.24 | 41.49 | 41.45 |
| 5 | 139.56 | 63.22 | 60.21 | 138.12 | 62.62 | 62.59 |
| 6 | 159.22 | 66.98 | 63.20 | 157.03 | 66.04 | 62.61 |
| 7 | 163.00 | 89.38 | 66.86 | 161.20 | 88.61 | 65.95 |
| 8 | 182.03 | 109.14 | 75.09 | 179.43 | 106.68 | 81.91 |
| 9 | 193.70 | 136.55 | 89.37 | 189.72 | 132.66 | 88.64 |

Como se puede apreciar, los problemas fluido y sólido coinciden prácticamente para los dos casos de mallas, sin embargo en el problema de interacción se tienen modos en los que hay una diferencia más apreciable pero no son tan significativas. Por lo que puede corroborarse nuevamente las conclusiones descritas en el apartado anterior.

Algunos de estos resultados ya fueron obtenidos por G. Sandberg en [8], donde pueden verificarse algunas de las frecuencias obtenidas en el problema fluido. Sin embargo debido a que en dicho artículo no se tienen las dimensiones de la estructura, las frecuencias del problema sólido y del problema de interacción no coinciden exactamente con las presentadas en [8].

8.2. Problema de la cavidad con barrera rígida

Este problema es similar al de la tapa solo que ahora se tiene una barrera rígida en el interior de la cavidad y no hay tapa. La barrera rígida se caracterizará porque no se producen deformaciones en ella lo que ocasiona que los modos de vibración del fluido cambien.

Para las dimensiones de dicha cavidad hay que fijarse en el artículo de G. Sandberg [9], donde aparecen dos problemas uno con la barrera rígida y otro con la barrera flexible pero las dimensiones son iguales para ambos. Por otra parte las propiedades del fluido y estructura son las siguientes:

- Fluido: se trata de aire por lo que $\rho_F = 1 \text{ kg/m}^3$ y $c_F = 340 \text{ m/s}$.
- Estructura: se supondrá un material cuyas propiedades son: $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$, $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$, $\nu = 0.3$ y el espesor equivalente igual a $h = 0.118$; las mismas que para el caso de la cavidad con tapa.

Como condiciones de contorno hay que tener en cuenta que el movimiento en el eje longitudinal está restringido en todos los puntos y además se tiene una condición de apoyo en el extremo de la barrera que da a la cavidad. Las dimensiones son las mostradas a continuación:

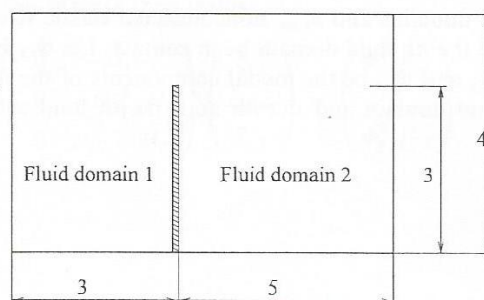


Figura 8-6. Dimensiones de la cavidad con barrera rígida

Al igual que en el caso del fuselaje se obtendrán los distintos resultados con una malla lineal muy fina y una malla cuártica no tan fina, y luego se comprobará que el método es fiable.

En primer lugar habría que representar los modos de vibración de la estructura, pero como en este caso se tiene una barrera rígida; dicha estructura no se deformará y por tanto no es necesaria su representación. Se consigue que la barrera sea rígida dibujando dos líneas coincidentes en el programa de preprocesado GiD, para que sea flexible con una única línea basta. Existen pequeñas deformaciones en la barrera pero al superponerlas con la indeformada no se aprecian grandes cambios, este es el motivo de porque no se tiene en cuenta.

Por su parte los modos de vibración del fluido sí van cambiando aunque la barrera sea rígida, de manera que estos modos son los siguientes:

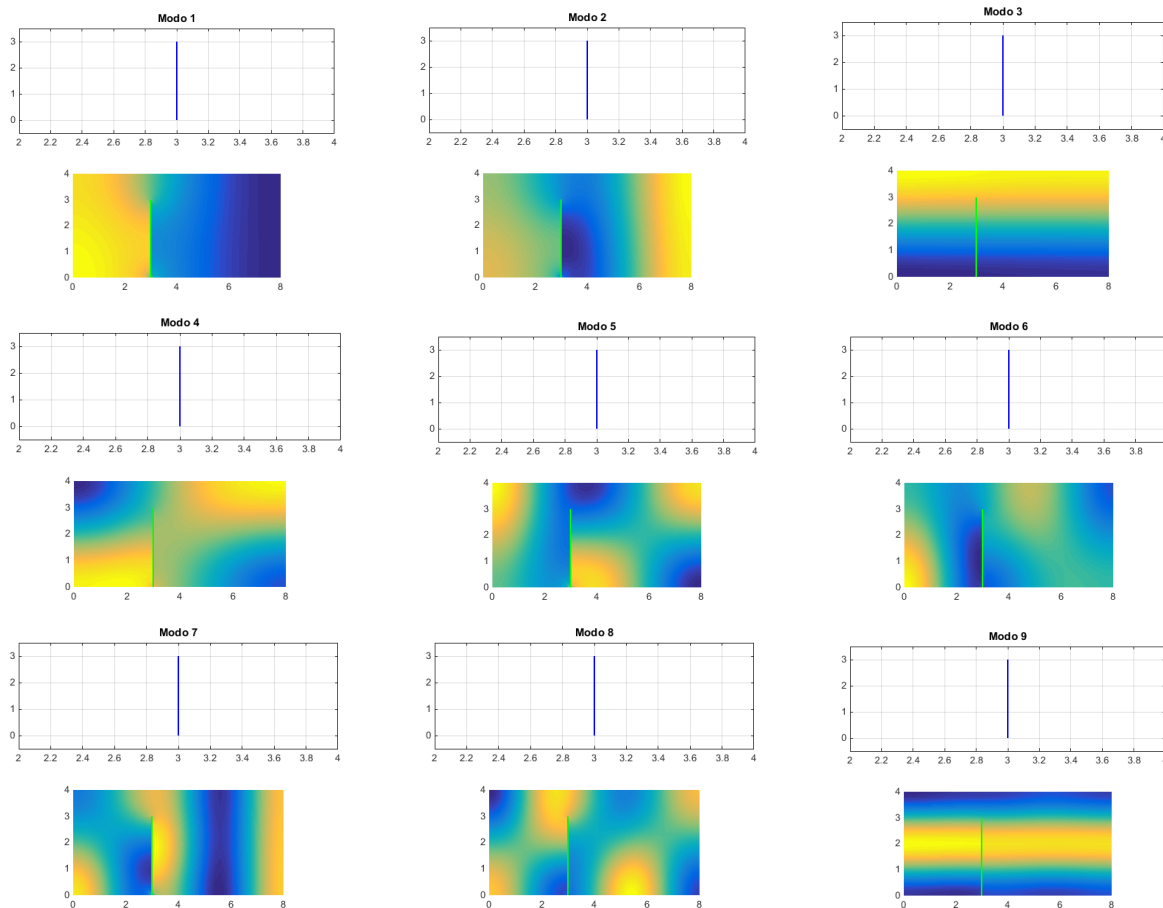


Figura 8-7. Modos de vibración del fluido del problema de la barrera rígida

Se puede apreciar en la imagen la presencia de la barrera rígida y por tanto la no deformación de la misma, algo que también se da en los modos del problema de interacción fluido-estructura. Por este motivo tampoco será necesaria la representación de los modos del problema de interacción, ya que al permanecer rígida la barrera no existirá dicha interacción y los modos y frecuencias naturales serán equivalentes a los del problema fluido

A continuación se mostrarán los resultados de las frecuencias naturales para los dos tipos de mallas siguientes:

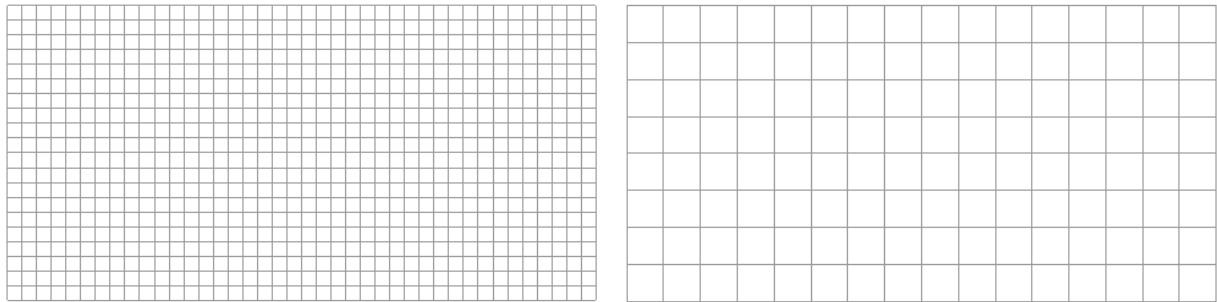


Figura 8-8. Mallas lineal y cuártica

Ambas mallas tienen sus respectivas discretizaciones de la estructura continua con el número de elementos empleados en las mallas.

De modo que calculando las nueve primeras frecuencias naturales para los dos tipos de mallas y únicamente para el problema fluido se tiene:

Tabla 8-2 Frecuencias naturales del caso de la barrera rígida. [Hz]

| Modo | Malla lineal | Malla cuártica |
|------|--------------|----------------|
| 1 | 16.39 | 16.08 |
| 2 | 37.60 | 37.34 |
| 3 | 42.54 | 42.50 |
| 4 | 46.74 | 46.63 |
| 5 | 57.38 | 57.08 |
| 6 | 61.49 | 61.32 |
| 7 | 70.36 | 69.98 |
| 8 | 76.46 | 76.24 |
| 9 | 85.35 | 85.00 |

Se puede apreciar en la tabla que los resultados son prácticamente iguales para los dos tipos de malla por lo que se cumplen las observaciones analizadas en la conclusión del apartado anterior.

Los resultados para el problema de interacción que son los mismos que para el problema fluido pueden comprobarse en el artículo antes mencionado [9], donde se puede ver que prácticamente coinciden con los mostrados aquí.

8.3. Problema de la cavidad con barrera flexible

Este problema es exactamente el mismo que el del apartado anterior solo que ahora la barrera es flexible y por lo tanto se puede deformar interactuando con el fluido. Las propiedades de fluido y estructura serán las mismas que antes, al igual que las condiciones de contorno y las mallas a emplear.

Para introducir una barrera flexible hay que crear una discontinuidad en el fluido, para ello se tienen que conectar los nodos de la barrera con el contorno del fluido; así se conseguirá la deformación de la barrera interactuando con el fluido.

En este problema, la barrera sí se deforma por lo que los modos de vibración de la misma son los mostrados a continuación:

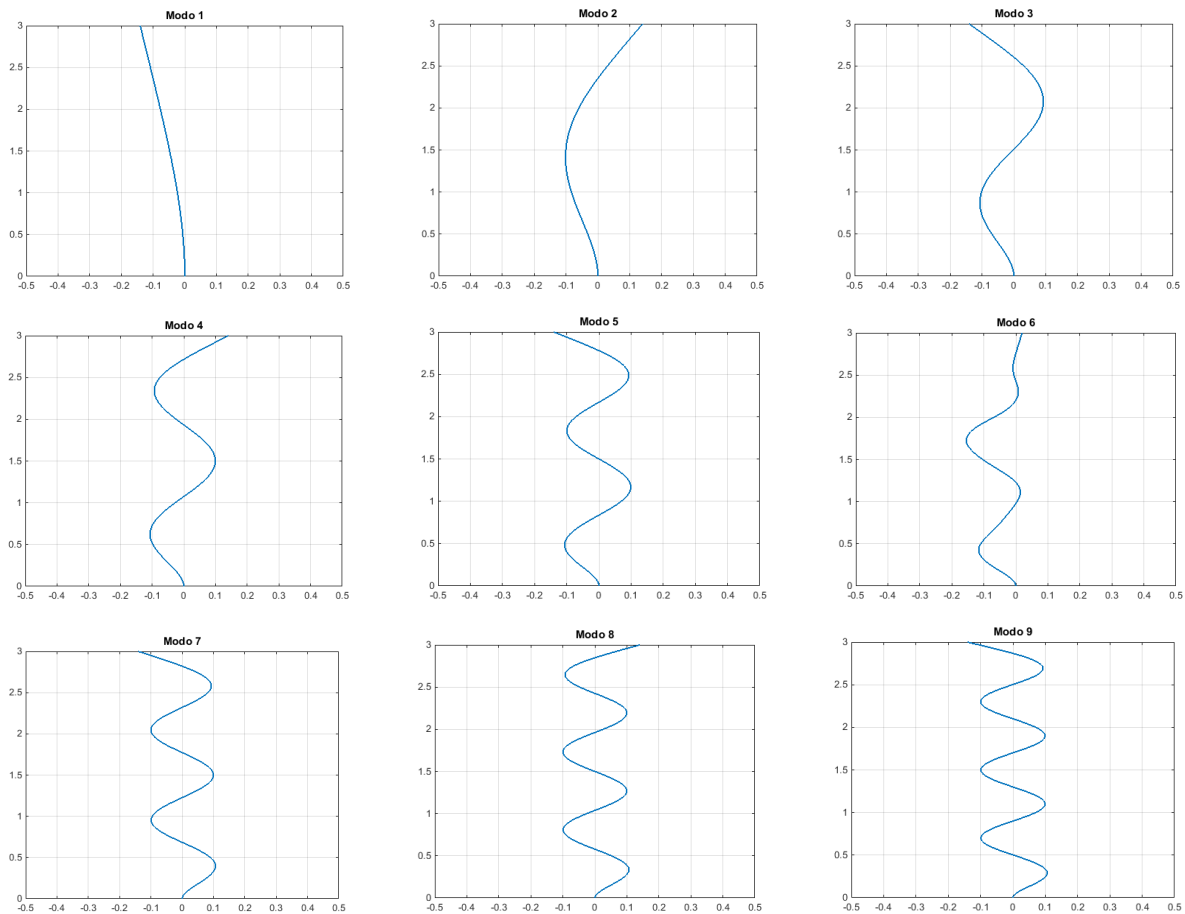
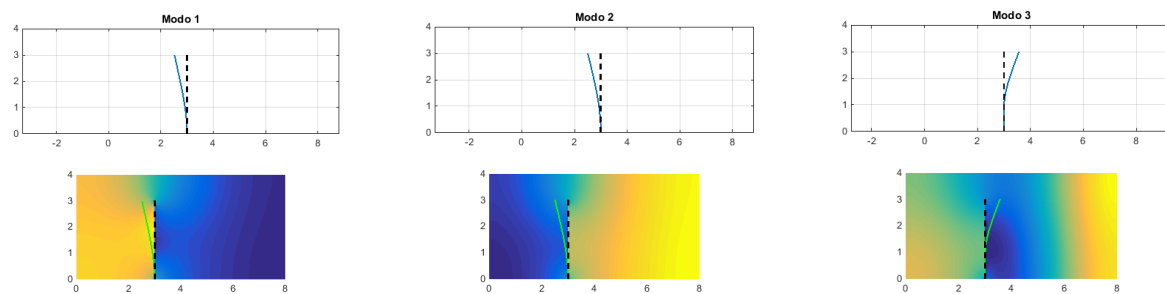


Figura 8-9. Modos de vibración de la barrera flexible

Se puede apreciar cómo se deforma la barrera de forma independiente sin interactuar con el fluido. Por su parte empleando las mallas representadas en la figura 8-8, los nueve primeros modos de vibración del fluido se pueden representar nuevamente y se observará que son los mismos que para la barrera rígida; los cuales fueron mostrados en la figura 8-7.

Por tanto no es necesaria su representación, ya que la discontinuidad en el fluido es la misma para ambos casos de la barrera, sin embargo para el problema de interacción no ocurre lo mismo.

Respecto al problema de interacción fluido-estructura se tienen los siguientes modos de vibración:



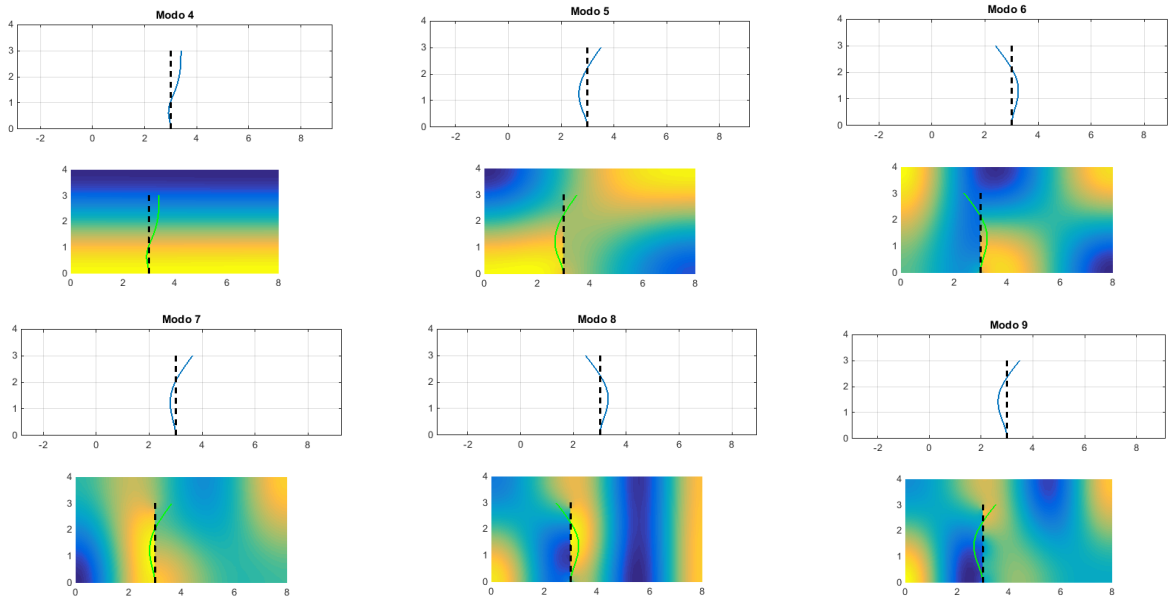


Figura 8-10. Modos de vibración del problema fluido-estructura de la barrera rígida

Una vez mostrados los modos de vibración del problema de interacción, a continuación se va a detallar en una tabla las nueve primeras frecuencias naturales para cada tipo de problema:

Tabla 8-3 Frecuencias naturales del caso de la barrera flexible. [Hz]

| Modos | Malla lineal | | | Malla cuártica | | |
|-------|--------------|-----------|----------------|----------------|-----------|----------------|
| | P. fluido | P. sólido | P. interacción | P. fluido | P. sólido | P. interacción |
| 1 | 16.39 | 12.06 | 12.03 | 16.08 | 12.16 | 12.88 |
| 2 | 37.60 | 75.80 | 16.28 | 37.34 | 79.25 | 18.18 |
| 3 | 42.54 | 213.78 | 37.66 | 42.50 | 243.12 | 40.11 |
| 4 | 46.74 | 423.98 | 42.54 | 46.63 | 440.05 | 45.09 |
| 5 | 57.38 | 712.35 | 46.74 | 57.08 | 789.37 | 16.81 |
| 6 | 61.49 | 801.01 | 57.37 | 61.32 | 800.64 | 59.90 |
| 7 | 70.36 | 1085.53 | 61.50 | 69.98 | 1199.93 | 63.05 |
| 8 | 76.46 | 1551.08 | 70.31 | 76.24 | 1669.33 | 73.29 |
| 9 | 85.35 | 2116.07 | 75.80 | 85.00 | 2203.79 | 78.04 |

Se puede comprobar que efectivamente la malla de pocos elementos cumple su función ya que obtiene unos resultados prácticamente iguales que los de la malla fina. Únicamente hay mayor diferencia en el problema sólido cuya razón es la poca cantidad de elementos que se ha empleado para la barrera, ya que aunque se aumente mucho el orden de estos siempre se necesitará una malla un poco más fina.

De cualquiera de las maneras la diferencia entre las frecuencias en este problema estructural no es demasiado significativa, por lo que puede decirse que también cumple las expectativas propuestas.

Además se pueden comparar estos resultados con los expuestos en [9] para el caso de la barrera flexible y se puede ver que prácticamente coinciden, por lo que los resultados son correctos.

9 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

Una vez expuestos los casos prácticos anteriores y verificando que las observaciones realizadas anteriormente con los estudios paramétricos y el cálculo del problema inicial, se puede decir que es viable cambiar el método de trabajo del MEF tradicional por otro más moderno. Con esto se quiere decir que ya no es necesario emplear mallas excesivamente finas con numerosos elementos, conllevando pues un incremento del tiempo de cálculo y un mayor número de cálculos. El método tradicional implicaba utilizar elementos lineales para mallar que aunque son más sencillos que el resto también son menos precisos de ahí que se necesite una malla bastante más fina.

Por otra parte, aquí se ha detallado como una malla gruesa o no tan fina puede ser igual de efectiva que la anterior con el aumento del grado de los polinomios de interpolación, es decir empleando elementos de un mayor orden. En este documento se han comparado mallas muy finas de elementos lineales con mallas gruesas de elementos cuárticos, dando resultados satisfactorios en lo que se refiere a las soluciones de los problemas.

Además se han realizado diversos estudios paramétricos con dos objetivos conseguir el número de puntos de integración mínimo necesario y elegir el número de elementos por longitud de onda adecuado. El primer estudio es muy importante ya que normalmente suele elegirse un número de puntos de Gauss mucho mayor que el necesario para que los resultados sean lo más exactos posibles, pero la verdad es que esto conlleva un mayor tiempo de cálculo por lo que es necesario reducir dicho número. En el otro caso, lo que se intenta disminuir es el número de elementos y por tanto la discretización del problema; todo ello a costa del aumento del orden de los elementos. Ambos estudios permiten reducir en gran medida el tiempo de resolución del problema a partir del MEF.

Estas observaciones más tarde fueron aplicadas a los casos prácticos propuestos donde puede comprobarse que se verifican para esos tipos de problemas también, es decir se llega a la convergencia de la solución a partir de una malla de pocos elementos pero que tienen un orden superior al lineal.

En conclusión, la manera tradicional de mallar un problema con el MEF puede cambiar ya que aunque es más sencillo y cómodo emplear elementos lineales, se necesitan muchos elementos y por tanto ecuaciones cuya resolución conllevan un tiempo importante. Con la introducción de las mallas con elementos de orden superior, además del número idóneo de puntos de integración y el número adecuado de elementos por longitud de onda; se obtendrían resultados muy satisfactorios y aproximados a la solución exacta.

En este documento solo se han estudiado algunos de los elementos de orden superior llegando a un máximo de orden cuártico. Sin embargo cuánto mayor sea el orden del elemento menor será el número que conforme la malla, es decir más basta podrá ser la discretización. Por lo que como estudios futuros se podría seguir analizando mallas con pocos elementos y con funciones de interpolación de órdenes muy elevados; y compararlas con los resultados exactos que se obtienen con mallas excesivamente finas de elementos lineales.

También habría que tener en cuenta como estudios futuros el empleo de otro tipo de elementos a parte de los cuadriláteros, como los triangulares o los hexagonales; además se podrían emplear elementos Serendípticos en lugar de Lagrangianos para analizar si es más beneficioso su uso respecto a los primeros. Cabe añadir que aquí se han realizado problemas en 3D pero sin analizarlos como tal, por lo que no se han empleado elementos tridimensionales y éste podría ser otro ámbito de estudio en los proyectos futuros relacionados con los elementos finitos.

Por otra parte, los estudios paramétricos del número de puntos de Gauss han sido solo el principio ya que se pueden analizar más aspectos de la integración. Por ejemplo, sólo se ha realizado el estudio para la primera frecuencia natural es decir el primer modo; realmente cada modo tiene sus propias características y por tanto el

estudio puede variar. Por tanto como desarrollo futuro se podría realizar un estudio para cada uno de los nueve modos y luego aplicar esos resultados a la obtención de cada modo, así no se generalizaría y las soluciones serían más aproximadas y rápidas de obtener.

El otro estudio sí se ha realizado para dos tipos de modos, el modo 1 y el modo 9, al igual que en el caso anterior también podría realizarse para los demás modos y así obtener el número de elementos por longitud de onda adecuado para cada uno de ellos.

Por otro lado, respecto a los casos prácticos expuestos podrían realizarse otro tipo de problemas como problemas de amortiguamiento del sonido. Se trata de problemas donde la estructura tiene un coeficiente de restitución y por tanto parte de las ondas son absorbidas por la estructura y la otra reflejada. Otro aspecto importante sería modificar las condiciones de contorno de cada problema y comprobar que efectivamente sigue generando resultados satisfactorios, como por ejemplo en el problema del fuselaje.

Además se pueden introducir un mayor número de cargas externas ya que en el problema de la cavidad con tapa únicamente se tenía un momento. Por ejemplo en el fuselaje se podría tener en cuenta las cargas aerodinámicas o las cargas de presión exterior, para así obtener después un FRF correspondiente.

En este documento se ha estudiado la interacción entre el fluido y la estructura, sin embargo ésta sería la misma base para otro tipo de problemas de interacción como por ejemplo problemas transmisión de calor o problemas electromagnéticos. Se analizaría una interacción del mismo tipo pero entre estructura y otro tipo de magnitud.

REFERENCIAS

- [1] L. Rodríguez-Tembleque, J.A. González y A. Cerrato. Partitioned solution strategies for coupled BEM-FEM acoustic fluid-structure interaction problems, 2015
- [2] G. Sandberg, P.A. Wernberg y P. Davidson. Fundamentals of fluid-structure interaction.
- [3] A. Romero, A. Tadeu, P. Galvín y J. António. 2.5D coupled BEM-FEM used to model fluid and solid scattering wave, 2014.
- [4] J. Borgions y B. Thysen. Numerieke en experimentele studie van de efficiëntie van trilling isolerende schermen in de grond ku lenven MSC Thesis, 2008.
- [5] E. Oñate. Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos finitos. Análisis estático lineal. CIMNE, 1995.
- [6] W. Kropp, *Chalmers University of Technology*. Vibration of structures.
- [7] M. Möser y J.L Barros. Ingeniería acústica. Springer, 2009.
- [8] G. Sandberg y P. Göransson. A symmetric finite element formulation for acoustic fluid-structure interaction analysis, 1998.
- [9] G.Sandberg, P. Hansson y M. Gustavsson. Domain decomposition in acoustic and structure-acoustic analysis, 2001.

