

Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Análisis de trayectorias de crucero de aviones
comerciales sujetas a incertidumbre en los datos

Autor: Manuel Ángel Zapata Habas

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015



Trabajo Fin de Grado
Grado en Ingeniería Aeroespacial

Análisis de trayectorias de crucero de aviones comerciales sujetas a incertidumbre en los datos

Autor:

Manuel Ángel Zapata Habas

Tutor:

Alfonso Valenzuela Romero

Dep. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015

Trabajo Fin de Grado: Análisis de trayectorias de crucero de aviones comerciales sujetas a incertidumbre en los datos

Autor: Manuel Ángel Zapata Habas

Tutor: Alfonso Valenzuela Romero

El tribunal nombrado para juzgar el Trabajo Fin de Grado arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2015

El Secretario del Tribunal

Índice	vii
Índice de Tablas	ix
Índice de Figuras	xi
1 Introducción	1
1.1 <i>Motivación</i>	1
1.2 <i>Objetivo y metodología</i>	1
1.3 <i>Estructura del documento</i>	2
2 Método de Montecarlo	3
2.1 <i>Descripción</i>	3
2.1.1. Generación de muestras	4
2.1.2. Modelo del sistema	5
2.1.3. Criterio de parada	6
2.1.4. Aumento del tamaño de la muestra	8
2.1.5. Ventaja e inconvenientes	9
2.2 <i>Ejemplo: Estimación del número π</i>	9
3 Incertidumbre en m_0	13
3.1 <i>Distribución de la masa inicial.</i>	13
3.1.1 Distribución uniforme.	13
3.1.2 Distribución gamma.	14
3.2 <i>Resultados</i>	15
3.2.1 Distribución uniforme.	15
3.2.1.1 Esperanza	15
3.2.1.2 Desviación típica	20
3.2.1.3 Funciones de densidad	22
3.2.2 Distribución gamma.	23
3.2.2.1 Esperanza	23
3.2.2.2 Desviación típica	27
3.2.2.3 Funciones de densidad	29
4 Incertidumbre en C_{D_0}	31
4.1 <i>Esperanza</i>	32
4.2 <i>Desviación típica.</i>	35
4.3 <i>Funciones de densidad.</i>	37
5 Incertidumbre en m_0 y C_{D_0}	41
5.1 <i>Esperanza.</i>	41
5.2 <i>Desviación típica.</i>	46
5.3 <i>Funciones de densidad.</i>	50
6 Incertidumbre en m_0, C_{D_0}, C_{D_2} y c	53
6.1 <i>Esperanza</i>	53
6.2 <i>Desviación típica.</i>	59

6.3	<i>Funciones de densidad.</i>	61
7	Conclusiones	63
	Referencias	65

Índice de Tablas

Tabla 3.1: Valores de la esperanza para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0	17
Tabla 3.2: Valores de la desviación típica para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0	21
Tabla 3.3: Valores de la esperanza para diferentes instantes de tiempo. Distribución gamma m_0	25
Tabla 3.4: Valores de la desviación típica para diferentes instantes de tiempo. Distribución gamma m_0	28
Tabla 4.1: Valores de la esperanza para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}	33
Tabla 4.2: Valores de la desviación típica para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}	37
Tabla 5.1: Valores de la esperanza para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	42
Tabla 5.2: Valores de la desviación típica para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	47
Tabla 6.1: Valores de la esperanza para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c .	55
Tabla 6.2: Valores de la desviación típica para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c	60

Índice de Figuras

Figura 2.1: Diagrama de la simulación	4
Figura 2.2: Estimación del área para el cálculo del número π	9
Figura 2.3: Reducción de la envolvente de error con el número de simulaciones	11
Figura 2.4: Reducción de la envolvente de error con el tamaño de la muestra	12
Figura 2.5: Convergencia oscilatoria	12
Figura 3.1: Función de densidad distribución uniforme m_0	14
Figura 3.2: Función de densidad distribución gamma m_0	15
Figura 3.3: Envolvente de errores para la esperanza. Distribución uniforme m_0	16
Figura 3.4: Valor esperado de la masa con el tiempo. Distribución uniforme m_0	18
Figura 3.5: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0	18
Figura 3.6: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo (ampliada). Distribución uniforme m_0	19
Figura 3.7: Evolución de la probabilidad del error con el tiempo. Distribución uniforme m_0	19
Figura 3.8: Envolvente de errores para la desviación. Distribución uniforme m_0	20
Figura 3.9: Desviación típica de la masa con el tiempo. Distribución uniforme m_0	21
Figura 3.10: Cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido. Distribución uniforme m_0	22
Figura 3.11: Función de densidad de probabilidad con el tiempo. Distribución uniforme m_0	23
Figura 3.12: Envolvente de errores para la esperanza. Distribución gamma m_0	24
Figura 3.13: Valor esperado de la masa con el tiempo. Distribución gamma m_0	25
Figura 3.14: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo. Distribución gamma m_0	26
Figura 3.15: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo (ampliada). Distribución gamma m_0	26
Figura 3.16: Evolución de la probabilidad del error con el tiempo. Distribución gamma m_0	27
Figura 3.17: Envolvente de errores para la desviación. Distribución gamma m_0	28
Figura 3.18: Desviación típica de la masa con el tiempo. Distribución gamma m_0	29
Figura 3.19: Cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido. Distribución gamma m_0	29
Figura 3.20: Funciones de densidad de probabilidad con el tiempo. Distribución gamma m_0	30

Figura 4.1: Función de densidad distribución uniforme C_{D_0}	31
Figura 4.2: Envolvente de errores en la esperanza para un tiempo de 2×10^3 s. Distribución uniforme C_{D_0}	32
Figura 4.3: Envolvente de errores en la esperanza para un tiempo de 1.2×10^4 s. Distribución uniforme C_{D_0}	33
Figura 4.4: Valor esperado de la masa con el tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}	34
Figura 4.5: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}	35
Figura 4.6: Envolvente de errores en la desviación típica para un tiempo de 2×10^3 s. Distribución uniforme C_{D_0}	36
Figura 4.7: Envolvente de errores en la desviación típica para un tiempo de 1.2×10^4 s. Distribución uniforme C_{D_0}	36
Figura 4.8: Desviación típica de la masa con el tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}	38
Figura 4.9: Cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido. Distribución uniforme C_{D_0}	38
Figura 4.10: Evolución de la función de densidad con el tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}	39
Figura 5.1: Envolvente de errores en la esperanza para un tiempo de 2×10^3 segundos. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	42
Figura 5.2: Comparación del valor esperado de la masa con el tiempo. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	43
Figura 5.3: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	43
Figura 5.4: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo (ampliada). Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	44
Figura 5.5: Comparación de la evolución de la probabilidad con el tiempo. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	45
Figura 5.6: Comparación de la evolución de la probabilidad con el número de iteraciones. Para $t=6000$ s. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	45
Figura 5.7: Comparación de la evolución de la probabilidad con el número de iteraciones. Para $t=12000$ s. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	46
Figura 5.8: Envolvente de errores en la desviación típica para un tiempo de 2×10^3 segundos. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	47
Figura 5.9: Comparación evolución de la desviación típica con el tiempo. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	48
Figura 5.10: Comparación del cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}	49
Figura 5.11: Curvas de nivel de la desviación típica para un tiempo $t=12000$ s.	49
Figura 5.12: Curvas de nivel que permiten comparar la desviación típica inicial y final. Para un tiempo $t=12000$ s.	50

Figura 5.13: Comparación de la evolución de las funciones de densidad para los tres casos. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0} .	51
Figura 5.14: Comparación de la evolución de las funciones de densidad para el caso de m_0 y el multivariable	52
Figura 6.1: Función de densidad distribución uniforme C_{D_2}	53
Figura 6.2: Función de densidad distribución uniforme c	54
Figura 6.3: Envoltente de errores en la esperanza. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c .	54
Figura 6.4: Comparación valor esperado de la masa con el tiempo. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c	55
Figura 6.5: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c .	56
Figura 6.6 : Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo(ampliada). Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c	57
Figura 6.7: Comparación evolución de la probabilidad. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c	57
Figura 6.8: Comparación de la evolución de la probabilidad con el número de iteraciones. Para $t=6000s$. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c	58
Figura 6.9: Comparación de la evolución de la probabilidad con el número de iteraciones. Para $t=12000s$. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c	58
Figura 6.10. Envoltente de errores en la desviación típica. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c	59
Figura 6.11: Comparación evolución de la desviación típica. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c	60
Figura 6.12: Comparación del cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c	61
Figura 6.13: Comparación de la evolución de las funciones de densidad.	62

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación

La incertidumbre puede ser definida como la falta de un conocimiento seguro y claro de algo. En el cálculo de trayectorias de aeronaves, la incertidumbre puede presentarse en:

- Los datos empleados.

Esta incertidumbre se tiene cuando se emplean datos que son obtenidos a través de medidas o de estimaciones que pueden presentar un determinado nivel de error. Los datos aquí considerados están relacionados con las condiciones iniciales de la aeronave y con los modelos empleados en el cálculo de trayectorias. Ejemplos de datos con incertidumbre son no conocer exactamente cuál es la posición inicial de la aeronave debido a los errores asociados al sistema GPS, o no conocer exactamente los valores de los coeficientes aerodinámicos debido a desconocer el desgaste del acabado superficial de la aeronave.

- La operación de la aeronave.

Hablar de la operación de la aeronave en el cálculo de trayectorias es equivalente a hablar de la definición de los segmentos de vuelo. En este caso la incertidumbre puede aparecer en los valores que definen las ligaduras de vuelo o en las condiciones de parada. Por ejemplo, puede existir desconocimiento en los valores de altitud y velocidad a los que se va a realizar un segmento de crucero si éstos dependen de la decisión de un controlador aéreo, o el instante en el que comenzará un viraje si éste depende de la pericia del piloto.

- La meteorología.

Las condiciones meteorológicas se obtienen normalmente a través de predicciones, las cuales llevan asociadas de manera inherente una incertidumbre. De manera general, cuanto mayor es el horizonte temporal para el cual se proporciona la predicción, mayor es la incertidumbre asociada. Ejemplos de datos meteorológicos que pueden presentar incertidumbre son la velocidad y la dirección del viento.

El presente Trabajo Fin de Grado pretende analizar trayectorias de crucero de aviones comerciales sujetas a incertidumbre en los datos. Para ello, se tiene como punto de partida el artículo titulado “Propagation of Initial Mass Uncertainty in Aircraft Cruise Flight” [1] realizado por Rafael Vázquez Valenzuela y Damián Rivas Rivas en el año 2013. En el artículo se analiza la propagación de la incertidumbre en las trayectorias de las aeronaves, siendo el tema principal el estudio de la incertidumbre en la masa inicial y su propagación a lo largo de la etapa de crucero.

En el artículo se desarrollan dos métodos aproximados para el estudio de la evolución de la función de distribución de la masa. Estos métodos son aplicables a problemas en los cuales existe una única variable aleatoria, y para el análisis de funciones de distribución de variables aleatorias que son invertibles. En este Trabajo de Fin de Grado se pretende usar el Método de Montecarlo para reproducir los resultados obtenidos en el artículo y estudiar nuevos casos, en los que exista más de una variable aleatoria, para los que no se puede utilizar los métodos desarrollados en el artículo.

1.2 Objetivo y metodología

El objetivo principal de este trabajo es el análisis de trayectorias de crucero de aviones comerciales sujetas a incertidumbre en los datos. Para ello se seguirán los siguientes pasos:

-Se desarrollarán algoritmos basados en el Método de Montecarlo que permite simular el modelo que se pretende estudiar.

-Se resolverán ejemplos sencillos para comprobar su correcto funcionamiento.

-Se implementará el mismo modelo de movimiento de la aeronave usado en el artículo mencionado en el apartado anterior y se procederá a reproducir los resultados obtenidos para la propagación de la incertidumbre en la masa inicial, garantizándose precisiones del orden de un kilogramo, calculándose las probabilidades de cometer errores y los tiempos y costes de computación.

-Se aplicará el método para comprobar cómo la incertidumbre en determinados parámetros se traslada a la masa, y cómo se propaga esta incertidumbre con el tiempo a lo largo de la etapa de crucero.

1.3 Estructura del documento

El presente documento cuenta con siete capítulos principales. En el capítulo 2 se introduce el Método de Montecarlo, desde sus orígenes y aplicaciones hasta sus ventajas e inconvenientes, pasando por la descripción de su funcionamiento y de los principales bloques que lo componen.

En el capítulo 3 se reproducen los resultados mostrados en el artículo [1]. Para ello se describen las distribuciones iniciales elegidas. Además, en este capítulo se calcula la probabilidad de cometer errores mayores de un kilogramo y se analiza la evolución de esta con el tiempo.

En el capítulo 4 se utiliza el método para analizar cómo una incertidumbre en el coeficiente de resistencia parásita C_{D_0} se propaga a la masa de la aeronave a lo largo de la etapa de crucero. Se calcula la esperanza, la desviación típica y la probabilidad del error y se analizan las tendencias observadas en cada caso.

Posteriormente en el capítulo 5, se introduce una incertidumbre tanto en m_0 como en C_{D_0} y se observa como estas incertidumbres se propagan a la masa de la aeronave a lo largo del crucero. Se comparan los efectos de m_0 y C_{D_0} del caso conjunto, con los resultados obtenidos para cada parámetro de forma individual. Se analiza y razona el comportamiento observado asociándose las tendencias observadas a la influencia de los diferentes parámetros. Por último, se representan unas curvas de nivel que permiten conocer cómo la amplitud elegida para las distribuciones modifica la influencia de las diferentes variables.

En el capítulo 6 se analiza un caso multivariable en el cual la incertidumbre se introduce en cuatro variables. La masa inicial m_0 , el coeficiente de resistencia parásita C_{D_0} , el coeficiente de resistencia inducida C_{D_2} y el consumo específico c . Se razonan y discuten los resultados obtenidos para la esperanza, desviación típica y probabilidad, y se comparan con los de los casos anteriores.

Por último, en el capítulo 7 se presentan las conclusiones del trabajo y se proponen posibles trabajos futuros en los cuales se puede profundizar con el uso del método.

2 MÉTODO DE MONTECARLO

El Método de Montecarlo es un método numérico que permite resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias. El nombre de “Montecarlo” se debe al casino de Montecarlo (Principado de Mónaco) ya que uno de los aparatos mecánicos más sencillos que permite obtener variables aleatorias es la ruleta.

Se considera como fecha de nacimiento del Método de Montecarlo el año 1949 en el que apareció un artículo titulado “The Monte Carlo method” [2]. La creación de este método suele ligarse a los nombres de los matemáticos J. von Neumann y S.Ulam. El uso del Método de Montecarlo para la investigación, proviene del trabajo realizado para el desarrollo de la bomba atómica durante la Segunda Guerra Mundial en el Laboratorio Nacional de los Álamos en EE.UU. Este trabajo conllevó la simulación de problemas probabilísticos de hidrodinámica concernientes a la difusión de neutrones en el material de fisión. Esta difusión posee un comportamiento eminentemente aleatorio, lo que hace que el Método de Montecarlo sea una herramienta muy adecuada para su estudio.

Con el desarrollo de los ordenadores la simulación de Montecarlo se ha venido aplicando a una infinidad de hábitos, como alternativa a los modelos matemáticos exactos o como único medio de estimar soluciones para problemas complejos. Así, en la actualidad, es posible encontrar modelos que hacen uso de simulación Montecarlo en diferentes áreas como pueden ser la empresarial, industrial, informática, ecológica, etc.

En las siguientes secciones, se describe el funcionamiento del método, comentándose sus ventajas e inconvenientes, y detallándose los bloques principales que lo componen. Por último, se muestra un ejemplo sencillo en el que se utiliza el Método de Montecarlo para aproximar el valor del número π .

2.1 Descripción

El Método de Montecarlo es un método estadístico que permite resolver problemas o estudiar el comportamiento de un sistema realizando un gran número de simulaciones. La solución obtenida con el método es aproximada, aumentando la precisión al aumentar el número de simulaciones. Además, este método es aplicado tanto a problemas estocásticos como determinísticos.

En general, en estadística los modelos aleatorios se usan para simular fenómenos que tienen un comportamiento aleatorio, pero el Método de Montecarlo además permite estudiar el comportamiento de un modelo mediante el uso de número aleatorios. El Método de Montecarlo también puede aplicarse para la aproximación de integrales que no tienen solución analítica, aunque en la actualidad ya existen otros métodos numéricos que resuelven este tipo de problemas con una velocidad de convergencia mayor.

El Método de Montecarlo se puede dividir en tres grandes bloques, la generación de las muestras, el modelo de estudio y el criterio de parada. A continuación se muestra un diagrama del proceso seguido, se explican de forma más detallada cada uno de los bloques principales que componen el método, se presentan diferentes procedimientos para aumentar el tamaño de la muestra y se comentan algunas ventajas e inconvenientes del método.

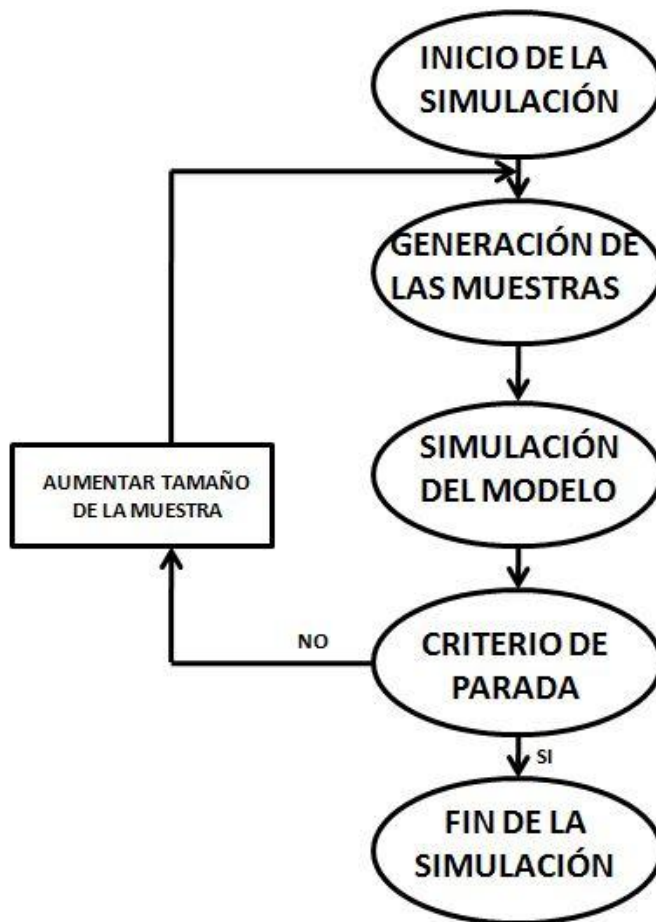


Figura 2.1: Diagrama de la simulación

2.1.1. Generación de muestras

Una de las características esenciales del Método de Montecarlo es el uso de números aleatorios, por lo tanto, la forma en la que éstos se generan constituye un punto importante a la hora de usar el método. A continuación se describen las principales formas de obtener números aleatorios:

- Tablas de números aleatorios

Las tablas de números aleatorios tienen las propiedades de aleatoriedad deseadas. Los números de estas tablas se generan mediante algún dispositivo mecánico. A mediados de 1940 la compañía RAND comenzó a desarrollar una amplia tabla de números aleatorios para el uso en las simulaciones Montecarlo. La tabla RAND utiliza una ruleta electrónica conectada a un ordenador, y supuso una revolución en aquella época ya que nunca había existido una tabla tan grande de números aleatorios. Las tablas presentan inconvenientes tales como que la sucesión es finita y que la tabla necesita ser cargada en el ordenador, estos inconvenientes han hecho que las tablas hayan caído en desuso y hayan sido sustituidas por generadores de números aleatorios.

- Métodos de computación digital o analógica

Los métodos de computación analógica generan números aleatorios a partir de procesos físicos aleatorios, como puede ser el ruido térmico de un circuito con semiconductores, que traducido a binario proporciona un número aleatorio. Por otra parte, los métodos de computación digital generan números aleatorios en base a algún mecanismo o circuito del ordenador, como puede ser el propio reloj. En definitiva, el procedimiento seguido por ambos métodos es interrumpir un proceso uniforme aleatoriamente. Los números generados con este método son puramente aleatorios, pero el método tiene el inconveniente de no ser lo suficiente rápido y además, es necesario guardar los números si se desea repetir el experimento con la misma muestra ya que la generación de los números es puramente aleatoria.

- Números pseudoaleatorios

Los números pseudoaleatorios son números generados mediante algoritmos totalmente deterministas, sin embargo, estos números no muestran ningún patrón o regularidad aparente desde el punto de vista estadístico. Los generadores de números aleatorios contienen un valor inicial denominado semilla, siempre que se parta de la misma semilla se obtendrá la misma sucesión de números. Los generadores de números pseudoaleatorios son los más utilizados en la actualidad, ya que imitan los valores de una variable aleatoria uniforme y cumplen los tests de ajuste tal y como lo haría la variable aleatoria imitada. Las principales características que debe cumplir un generador de números pseudoaleatorios son las siguientes:

- La distribución de números generados debe ser uniforme en todo el intervalo [0 1].
- Debe existir independencia de los números dentro de la serie generada.
- El ciclo de la serie debe ser lo suficientemente grande.
- Partiendo de la misma semilla, la serie obtenida debe ser la misma.
- Debe ser capaz de obtener grandes cantidades de números aleatorios a altas velocidades.
- Debe requerir la mínima memoria posible del ordenador.

En la actualidad existen diferentes métodos para la generación de números aleatorios, algunos de ellos son el Método del Cuadrado Medio, el Método de Congruencia Lineal y el Método de Mersenne Twister. Este último es el más reputado por su calidad y está implementado en muchos de los lenguajes de programación.

Cabe destacar que los números obtenidos con los métodos anteriores son números aleatorios uniformemente distribuidos. En caso de requerir que los números sigan cualquier otro tipo de distribución, existen algoritmos sencillos que convierten los números de la distribución uniforme a cualquier otra, estos algoritmos pueden encontrarse en [3].

2.1.2. Modelo del sistema

La finalidad del uso del Método de Montecarlo es estudiar el comportamiento de un determinado sistema al producirse cambios en algunas de las magnitudes físicas que gobiernan su comportamiento. Por lo tanto, es necesario un modelo que emule de la manera más exacta posible el comportamiento del sistema real. El modelado del sistema es un aspecto clave del proceso, ya que la precisión de los resultados obtenidos en las simulaciones dependerá de la precisión del método y de la exactitud con la que el modelo representa el sistema físico que se pretende estudiar.

A continuación se describe el modelo que proporciona la evolución de la masa en vuelo de crucero, y que se usará en los capítulos posteriores. Se ha decidido usar el mismo modelo de aeronave mostrado en [1] a fin de reproducir los resultados mostrados en [1].

Las ecuaciones que gobiernan el vuelo simétrico en el plano vertical para velocidad y altitud constantes, usando el modelo de tierra plana, son las siguientes:

$$\frac{dx}{dt} = V \quad \frac{dm}{dt} = -cT \quad T = D \quad L = mg \quad (2.1)$$

Donde x es la distancia horizontal, t es el tiempo, V es la velocidad, T es el empuje, D es la resistencia aerodinámica, L es la sustentación, m es la masa del avión, g es la aceleración de la gravedad, y c es el consumo específico, que puede ser función de la altitud y la velocidad pero en este caso es constante debido a las condiciones de vuelo.

La resistencia se puede expresar como:

$$D = \frac{1}{2} \rho V^2 S C_D \quad (2.2)$$

Donde ρ es la densidad, S es la superficie alar, y para el cálculo del coeficiente de resistencia se usa una polar parabólica de coeficientes constantes $C_D = C_{D_0} + C_{D_2} C_L^2$, donde C_L es el coeficiente de sustentación cuya expresión es la siguiente.

$$C_L = \frac{2L}{\rho V^2 S} \quad (2.3)$$

Además, C_{D_0} y C_{D_2} son constantes dadas para la condición de crucero. Usando las ecuaciones anteriores se puede obtener la siguiente expresión:

$$\frac{dm}{dt} = -c \left(\frac{1}{2} \rho V^2 S C_{D_0} + m^2 \frac{2C_{D_2} g^2}{\rho V^2 S} \right) \quad (2.4)$$

Que puede escribirse como:

$$\frac{dm}{dt} = -(A + Bm^2) \quad (2.5)$$

Donde las constantes A y B se definen de la siguiente forma:

$$A = \frac{1}{2} c \rho V^2 S C_{D_0} \quad (2.6)$$

$$B = \frac{2c C_{D_2} g^2}{\rho V^2 S} \quad (2.7)$$

De las expresiones anteriores se puede comprobar que las constantes A y B son mayores que cero. La ecuación que describe la evolución de la masa a lo largo del crucero es una ecuación no lineal que puede resolverse una vez conocida la condición inicial.

$$m(0) = m_0 \quad (2.8)$$

Resolviendo la ecuación anterior se obtiene:

$$m(t) = \frac{\sqrt{\frac{A}{B}} m_0 - \sqrt{\frac{A}{B}} \tan(\sqrt{AB}t)}{\sqrt{\frac{A}{B}} \sqrt{\frac{A}{B}} + m_0 \tan(\sqrt{AB}t)} \quad (2.9)$$

En la expresión anterior puede comprobarse que m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c afectan a la evolución de la masa durante el crucero, estas variables serán las que se modelen de forma estadística en los siguientes capítulos.

Por último, los valores nominales elegidos para las variables en los siguientes capítulos son: $C_{D_0} = 0.015$, $C_{D_2} = 0.042$, $\rho = 0.5\rho_0$, $\rho_0 = 1.225 \text{ kg/m}^3$, $V = 200 \text{ m/s}$, $c = 5 \cdot 10^{-5} \text{ s/m}$, $S = 150 \text{ m}^2$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

2.1.3. Criterio de parada

Una vez obtenidos los resultados de las simulaciones anteriores es necesario proceder al análisis de los mismos, con el objetivo de decidir si éstos son lo suficientemente precisos o si es necesario aumentar el tamaño de la muestra. Una alternativa en este aspecto es comparar los resultados obtenidos en la iteración i con los obtenidos en iteraciones anteriores. Esta comparación puede realizarse mediante el cálculo de errores

absolutos, comprobando que éstos sean inferiores a una precisión fijada o mediante el cociente de los resultados de las diferentes iteraciones, comprobando que éste sea tan próximo a la unidad como se requiera. Otra alternativa es usar como criterio de parada que la probabilidad de cometer un error mayor que la tolerancia, en el cálculo de la esperanza, sea menor que un determinado valor δ . Este criterio se muestra en la ecuación siguiente que se puede encontrar en [4].

$$P[|\bar{X}_M - \mu| > TOL] < \delta \quad (2.10)$$

Donde \bar{X}_M es el valor de la esperanza obtenido con el Método de Montecarlo, μ es el valor exacto de la esperanza y δ y TOL son valores que se eligen dependiendo de la precisión que se desee.

Ambos procedimientos presentan el inconveniente de que a priori el tamaño de la muestras necesario para obtener la precisión buscada no es conocido. Este hecho puede causar que para valores de la tolerancia muy exigentes el tamaño de la muestra sea demasiado grande, pasando a crear problemas de memoria en el ordenador. Este hecho puede verse acentuado teniendo en cuenta que la precisión del método sigue la siguiente relación [5]:

$$Error \sim \frac{D}{\sqrt{N}} \quad (2.11)$$

Donde D es una constante y N es el tamaño de la muestra, lo que implica que es necesario aumentar cien veces el tamaño de la muestra para aumentar la precisión una cifra significativa.

A continuación se discute en criterio de parada que se utilizará en nuestro caso para determinar el fin de las simulaciones y por lo tanto el tamaño de la muestra. Se han considerado dos posibles criterios de parada, comparándose las ventajas e inconvenientes de cada uno de ellos y decidiendo cual era el más indicado en nuestro caso.

El primero de ellos consiste en comparar los valores obtenidos en la iteración con los obtenidos en varias iteraciones anteriores. Esta comparación consiste en restar los valores obtenidos en las diferentes iteraciones, calculando así los errores absolutos y comprobando que en varias iteraciones sucesivas estos errores estén por debajo de la tolerancia fijada. El motivo por el cual es necesario comparar con varios valores anteriores es que al comparar con un único valor anterior puede suceder que el error sea pequeño por “casualidad” y sin haber llegado a la convergencia del método.

El segundo procedimiento consiste en realizar varias simulaciones para un tamaño de la muestra elevado. Representando posteriormente el error cometido con respecto al tamaño de la muestra para cada una de las simulaciones, se obtiene una envolvente de errores que nos permite determinar el tamaño de la muestra que nos garantiza la precisión fijada.

Los dos procedimientos anteriores tienen diferentes ventajas e inconveniente que hacen su uso más o menos aconsejable dependiendo del problema concreto que se esté abordando. El primero de los procedimientos tiene como ventaja que realiza únicamente las simulaciones necesarias para alcanzar la tolerancia, pero a la vez tiene como inconveniente que ese número de simulaciones no es conocido a priori, lo que implica que un valor de tolerancia muy exigente puede desembocar en un número de simulaciones inabordable para el ordenador. El segundo procedimiento tiene como inconveniente el hecho de que es necesario realizar un número elevado de simulaciones, para obtener la envolvente de errores, pero a su vez tiene la ventaja de que el control se realiza directamente sobre el número de iteraciones, lo que permite aprovechar al máximo la memoria del ordenador sin correr el riesgo de sobrepasarla. Además, este procedimiento garantiza que el resultado obtenido es fiable ya que el experimento se ha repetido varias veces.

En nuestro caso se ha decidido usar el segundo de los procedimientos ya que existían limitaciones en la memoria del ordenador, que podría verse colapsada en el caso de utilizar el primero de los procedimientos. Además al ser el modelo estudiado sencillo representar las envolventes de errores no supone un gran coste en lo que a tiempo de computación se refiere.

Cabe comentar que la eficacia del procedimiento utilizado para determinar el tamaño de la muestra reside en que en este caso, al ser el modelo a estudiar bastante simple, los tiempos de cálculo requeridos son pequeños. Esto implica que las limitaciones en este aspecto no son comparables a las de la memoria necesaria al aumentar el número de iteraciones. En modelos más complejos el tiempo de simulación puede aumentar haciendo la limitación en el tiempo de cálculo sea mayor que las limitaciones de memoria y en ese caso, este procedimiento sería menos eficiente que el que se comentó en primer lugar.

Con el objetivo de tener otra medida de la fiabilidad de los resultados obtenidos, también se calcula la probabilidad de que el error sea mayor que la tolerancia fijada, que es de un kilogramo en este caso. A continuación se realiza un breve desarrollo para obtener la expresión que se ha utilizado. Este desarrollo se apoya en el libro “Probabilidad y estadística aplicadas a la ingeniería”, y el resultado final que se muestra en la ecuación 2.16 se puede encontrar en [4].

Usando las propiedades de la probabilidad y suponiendo simetría en la distribución podemos obtener:

$$P[|\bar{X}_N - \mu| > TOL] = P[\bar{X}_N - \mu > TOL] + P[\bar{X}_N - \mu < -TOL] \quad (2.12)$$

$$P[|\bar{X}_N - \mu| > TOL] = 2P[\bar{X}_N - \mu > TOL] \quad (2.13)$$

$$P[|\bar{X}_N - \mu| > TOL] = 2[1 - P[\bar{X}_N - \mu \leq TOL]] \quad (2.14)$$

Teniendo en cuenta que $\bar{X}_N = S_n/N$ se obtiene.

$$P[|\bar{X}_N - \mu| > TOL] = 2 \left[1 - P \left[\frac{S_n - N\mu}{\sigma\sqrt{N}} \leq \frac{TOL\sqrt{N}}{\sigma} \right] \right] \quad (2.15)$$

Por último aplicando el teorema central del límite se obtiene.

$$P[|\bar{X}_N - \mu| > TOL] = 2 \left[1 - \phi \left(\frac{TOL\sqrt{N}}{\sigma} \right) \right] \quad (2.16)$$

Donde ϕ denota la distribución normal, TOL es el valor de tolerancia elegido, en este caso un kilogramo y σ es la desviación típica, que en nuestro caso se ha aproximado por la desviación típica obtenida en las simulaciones. La ecuación 2.16 será utilizada en los capítulos posteriores para el cálculo de la probabilidad en los distintos casos que se estudian. Esta ecuación ya permite intuir que la probabilidad de cometer un error mayor de la tolerancia y la desviación típica seguirán tendencias similares. Este hecho era de esperar, ya que un aumento de la desviación típica conlleva un aumento en la incertidumbre que se traduce en una mayor probabilidad de cometer errores.

Por último, cabe comentar que los valores de probabilidad que se calculan están asociados a la esperanza. En el caso de la desviación típica no se han calculado las probabilidades ya que no se puede realizar el mismo razonamiento.

2.1.4. Aumento del tamaño de la muestra

En las sucesivas iteraciones del método será necesario aumentar el tamaño de la muestra en caso de buscar unos resultados más precisos. A la hora de cuantificar el aumento del tamaño de la muestra en cada iteración, existen diferentes opciones. A continuación se detallan las dos alternativas más usadas:

- Procedimiento aditivo: En este método se parte de un tamaño inicial de la muestra “n” y en cada nueva iteración se añade un número de nuevas muestras del mismo tamaño que el bloque inicial “n”. El principal inconveniente de este método es que al aumentar el número de iteraciones las simulaciones antiguas tienen más peso que las nuevas.

-Procedimiento multiplicativo: Se parte de un tamaño inicial de la muestra “n” y en cada nueva iteración se añade un número de nuevas muestras del mismo tamaño que las muestras acumuladas hasta ese momento. De esta forma se soluciona el principal problema que presentaba el método anterior, ya que ahora los nuevos bloques de muestras que se van agregando tienen el mismo peso que los anteriores, por lo que la variabilidad del nuevo bloque tiene el mismo peso sobre el total que la del bloque anterior.

2.1.5. Ventaja e inconvenientes

A continuación se enumeran algunas de las ventajas e inconvenientes más importantes del Método de Montecarlo.

Ventajas

- Es un método directo y flexible.
- Puede programarse en muchos tipos de lenguajes y programas.
- Permite estudiar la interacción de diferentes variables en un problema.
- Permite obtener soluciones aproximadas a problemas complejos que no tienen solución analítica.

Inconvenientes

- Obtener una buena simulación puede resultar complicado si el problema depende de un gran número de variables.
- La simulación no genera una solución óptima, ni proporciona qué decisión tomar, sino que resuelve el problema para unas condiciones iniciales.
- Cada simulación es única, interviene el azar.

2.2 Ejemplo: Estimación del número π

A continuación se muestra un ejemplo sencillo del funcionamiento del Método de Montecarlo, en este caso se usa el método para aproximar el valor del número π . Los pasos a seguir para realizar esta simulación son los siguientes:

- 1) Inscrimos un sector de círculo de radio r en un cuadrado de lado r , por comodidad lo más usual es elegir $r=1$.
- 2) Generamos un conjunto de números aleatorios que se encuentren en el interior del cuadrado.
- 3) Comprobamos cuantos de los puntos anteriores se encuentran en el interior del sector circular.

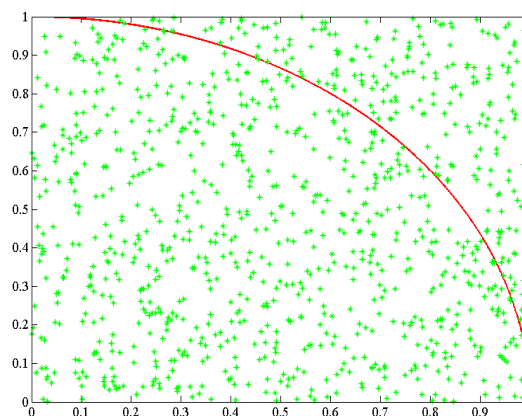


Figura 2.2: Estimación del área para el cálculo del número π

Con los datos anteriores ya podemos estimar un valor del número π . El procedimiento a seguir es el siguiente:

El área del cuadrado será:

$$A_{\text{cuadrado}} = r^2 \quad (2.17)$$

El área del sector circular será:

$$A_{\text{sector}} = \frac{\pi r^2}{4} \quad (2.18)$$

Dividendo el área del sector y del cuadrado se obtiene:

$$\frac{A_{\text{sector}}}{A_{\text{cuadrado}}} = \frac{\pi}{4} \quad (2.19)$$

Por lo tanto, si realizamos la división del número total de puntos que se encuentran dentro del sector circular entre el número total de puntos que se encuentran en todo el cuadrado, tendremos una aproximación del valor de π .

$$\frac{\text{Puntos dentro del sector circular}}{\text{Puntos totales}} \approx \frac{\pi}{4} \quad (2.20)$$

Puede comprobarse que la exactitud de la aproximación aumenta al crecer el tamaño de la muestra. Este hecho permite establecer como criterio de parada de la simulación un determinado valor del error que puede establecerse en este ejemplo comparando el valor de π real con el obtenido mediante la simulación. En caso de que el valor que se desea obtener no fuese conocido el error puede definirse comparando el valor de la simulación para diferentes tamaños de la muestra. Cabe comentar que el procedimiento a seguir implica aumentar el tamaño de la muestra partiendo de tamaños iniciales pequeños, en este caso se ha comenzado con un tamaño de la muestra unidad y se ha duplicado el tamaño en cada iteración. El comportamiento inicial dependerá de los números aleatorios seleccionados al comienzo de la simulación, existiendo un tamaño de la muestra para el cual los resultados se irán haciendo independientes de las condiciones iniciales. En la figura 2.3 puede observarse como para un número de 15 iteraciones aproximadamente los resultados comienza a hacerse independientes de los valores iniciales. En esa figura y todas las de este capítulo se representan varias simulaciones con números aleatorios diferentes. Los errores relativos mostrados en las siguientes figuras de este apartado se definen de la siguiente forma:

$$\text{error relativo(azul)} = \left| \frac{\pi - \bar{\pi}_i}{\pi} \right| \quad (2.21)$$

$$\text{error relativo(rojo)} = \left| \frac{\bar{\pi}_i - \bar{\pi}_{i-1}}{\bar{\pi}_{i-1}} \right| \quad (2.22)$$

Donde π es el valor teórico del número π , $\bar{\pi}_{i-1}$ es el valor del número π obtenido con el Método de Montecarlo en la iteración $i - 1$ y $\bar{\pi}_i$ es el valor obtenido con el Método de Montecarlo para la iteración i . Ambos errores son interesantes, el primero de ellos nos permite conocer la desviación con respecto a los resultados del artículo y el segundo nos será de especial utilidad en capítulos posteriores en los cuáles los resultados a obtener no son conocidos.

Es interesante representar en una misma gráfica los errores relativos del mismo experimento repetido varias veces ya que de esta forma podemos observar que aunque el error no es siempre exactamente el mismo, al tratarse de un método estadístico basado en números aleatorios, siempre nos movemos en una envolvente de errores que depende del número de simulaciones, ver figura 2.3. Esta figura también es interesante ya que nos indica el número de iteraciones necesarias para obtener una determinada precisión.

En la figura 2.4 se muestra de nuevo el error pero en este caso con respecto al tamaño de la muestra, lo que permite comprobar que el error se reduce como $\frac{D}{\sqrt{N}}$ donde N es el tamaño de la muestra.

Por último, cabe destacar que aunque aumentar el tamaño de la muestra garantiza la convergencia, esta puede ser oscilatoria, como podemos observar en la figura 2.5.

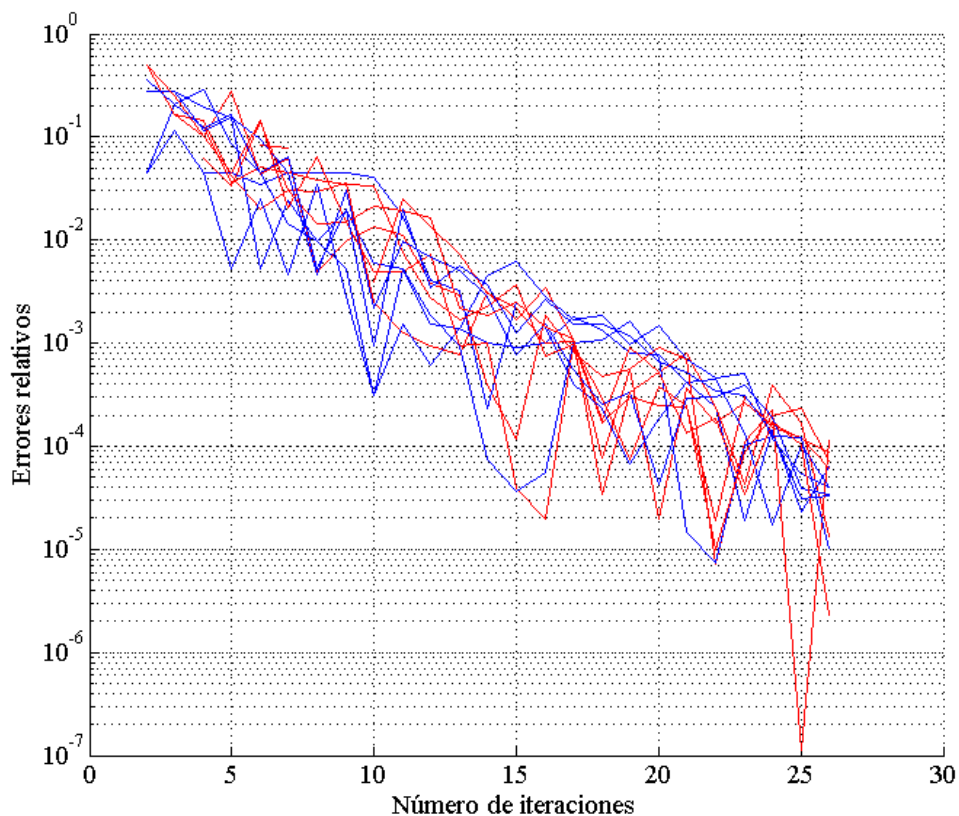


Figura 2.3: Reducción de la envolvente de error con el número de simulaciones

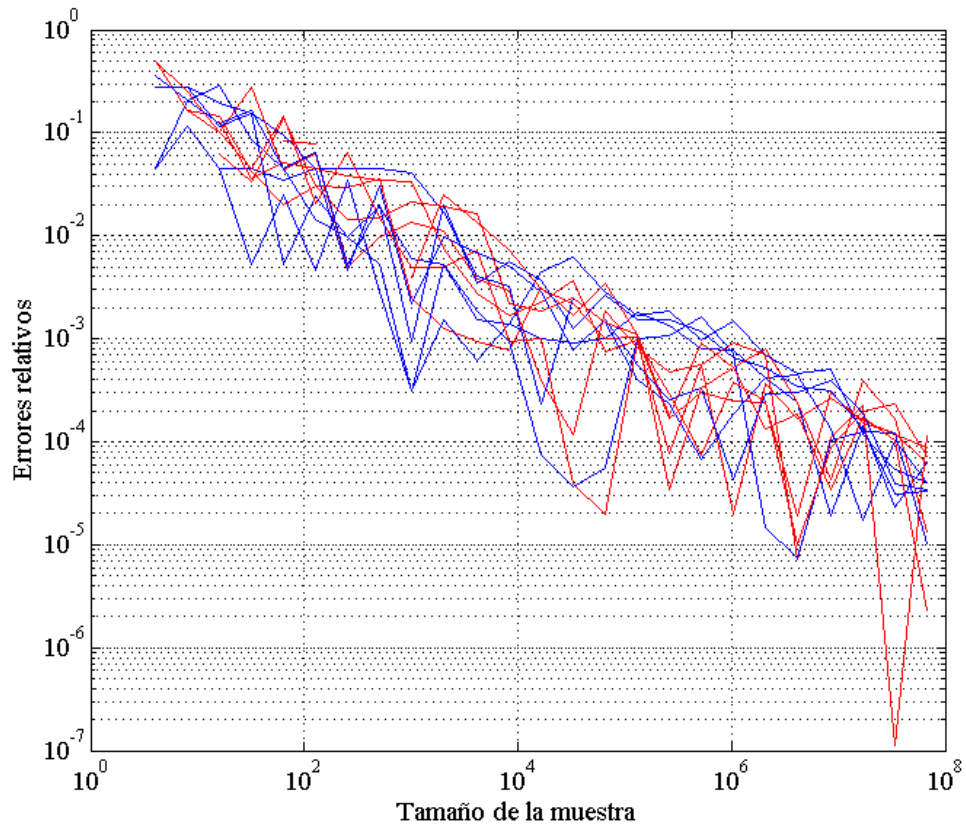


Figura 2.4: Reducción de la envolvente de error con el tamaño de la muestra

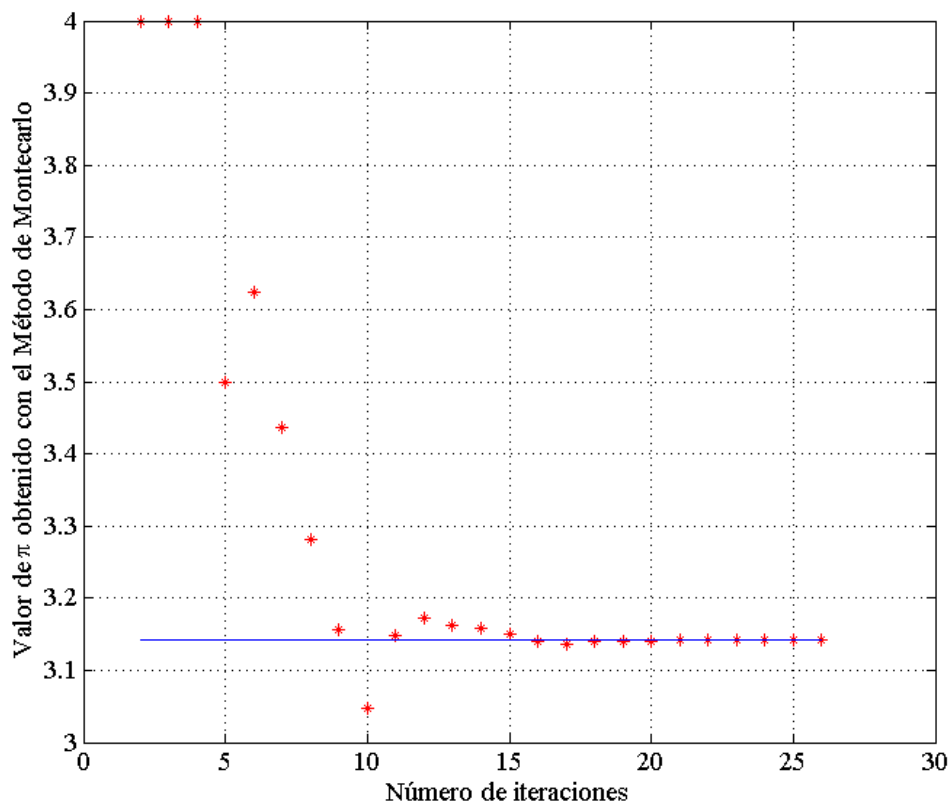


Figura 2.5: Convergencia oscilatoria

3 INCERTIDUMBRE EN m_0

En este capítulo se usa el Método de Montecarlo, descrito en el capítulo anterior, para reproducir los resultados publicados en el artículo “Propagation of Initial Mass Uncertainty in Aircraft Flight” [1]. En el artículo anterior se analiza la propagación de las incertidumbres en las trayectorias de las aeronaves y sus efectos en los sistemas ATM. El tema principal del artículo es el estudio de la incertidumbre en la masa inicial y su propagación a lo largo de la etapa de crucero. La relevancia de este problema reside en dos hechos: primero, la masa inicial es una fuente de incertidumbre importante en la predicción de la trayectoria, ya que determina la evolución de la masa y por lo tanto el consumo de combustible y el coste del vuelo; y, segundo, las incertidumbres en crucero tienen una gran importancia global en el vuelo por ser esta, en general, la fase más larga del mismo. En el artículo se utilizan los GPC (generalized polynomial chaos) para el estudio de la media y la desviación típica de la masa de la aeronave con el tiempo, además, se introducen dos métodos aproximados para analizar la función de distribución de la masa de la aeronave. En este capítulo se pretenden reproducir los resultados obtenidos en el artículo, para la evolución de la masa de la aeronave a lo largo del vuelo, mediante el uso del Método de Montecarlo.

3.1 Distribución de la masa inicial.

Con el objetivo de reproducir los resultados que se muestran en el artículo, se usarán las mismas distribuciones para la masa inicial que se usan en él. Las distribuciones empleadas en el artículo son de tipo uniforme y gamma. Estas distribuciones se describen a continuación.

3.1.1 Distribución uniforme.

En este caso se considera que m_0 es una variable continua uniformemente distribuida cuya función de densidad es

$$f_{m_0}(m_0) = \frac{1}{2\delta_m} \quad (3.1)$$

en el intervalo $[\bar{m}_0 - \delta_m, \bar{m}_0 + \delta_m]$, y cero en cualquier otro punto, donde \bar{m}_0 es la media y δ_m es el semiancho de la distribución uniforme. Las expresiones de la esperanza y la varianza son, $E[m_0] = \bar{m}_0$ y $Var[m_0] = \frac{\delta_m^2}{3}$. En el artículo se elige $m_0 = 81,633 \text{ kg}$ y $\delta_m = 5000 \text{ kg}$, por lo que la función de densidad tiene la siguiente forma que se muestra en la figura 3.1.

Cabe destacar que los números aleatorios han sido generados en el programa MATLAB, para ello se ha usado la función *rand* cuyo algoritmo de generación está basado en el método de Mersenne Twister.

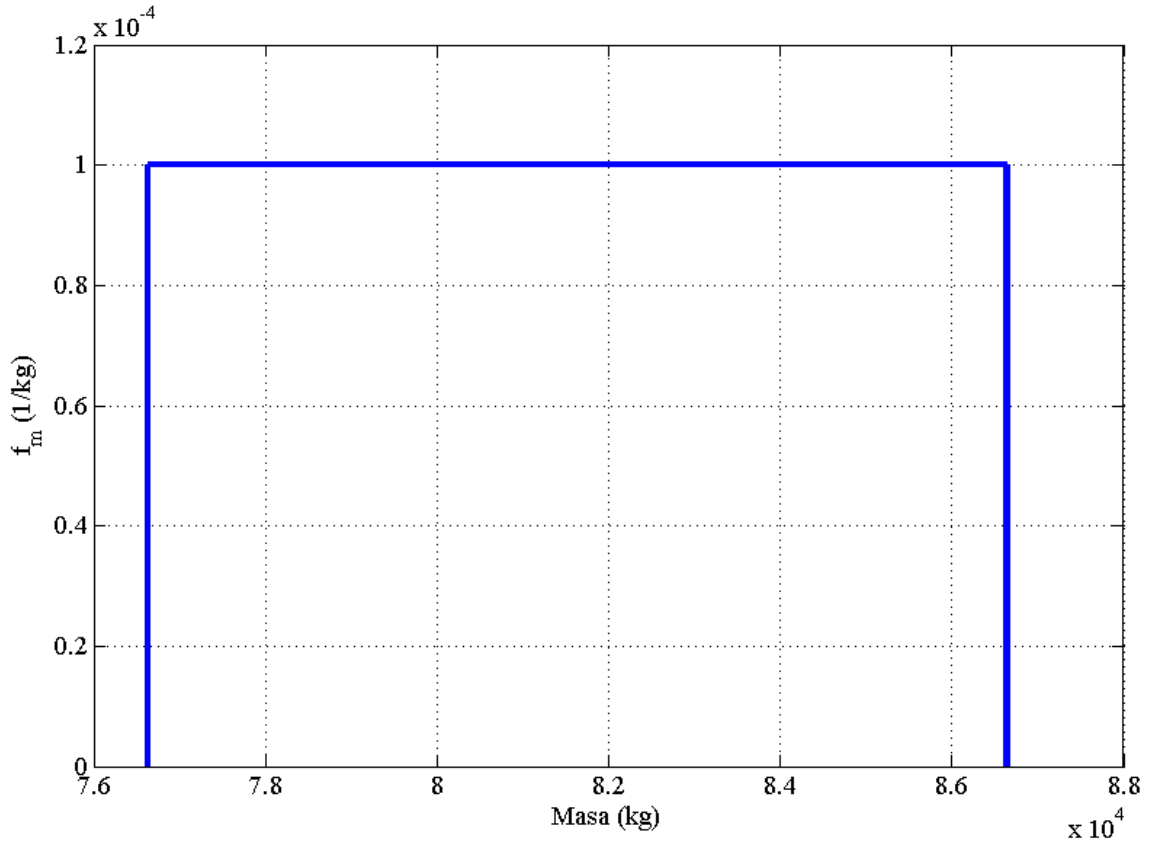


Figura 3.1: Función de densidad distribución uniforme m_0

3.1.2 Distribución gamma.

La distribución gamma representa una variable aleatoria continua no negativa y se nombra como $G(k, \theta)$, donde $k > 0$ es el parámetro de forma y $\theta > 0$ es el parámetro de escala. Se conoce que $E[G(k, \theta)] = k\theta$ y $Var[G(k, \theta)] = k\theta^2$ y que la función de densidad de $G(k, \theta)$ es

$$f(x; k, \theta) = x^{k-1} \frac{e^{-x/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)} \quad (3.2)$$

para $x \geq 0$, donde Γ es la función gamma de Euler. Usando la propiedad de que para $\theta > 0$, $G(k, \theta) = \theta G(k, 1)$, se considera el valor $\theta = 1$ sin que eso conlleve una pérdida de generalidad.

La masa inicial se puede expresar de la siguiente forma

$$m_0 = \bar{m}_0 + \frac{\delta_m}{\sqrt{3k}} (G(k, 1) - k) \quad (3.3)$$

donde los valores de m_0 y δ_m son los mismos que en el apartado anterior y el valor de k elegido en el artículo es $k = 8.5$. La forma de la función de densidad se representa en la figura 3.2. Al igual que en el caso anterior los números aleatorios se han generado en el programa MATLAB, en este caso mediante el uso de la función *gamrnd*.

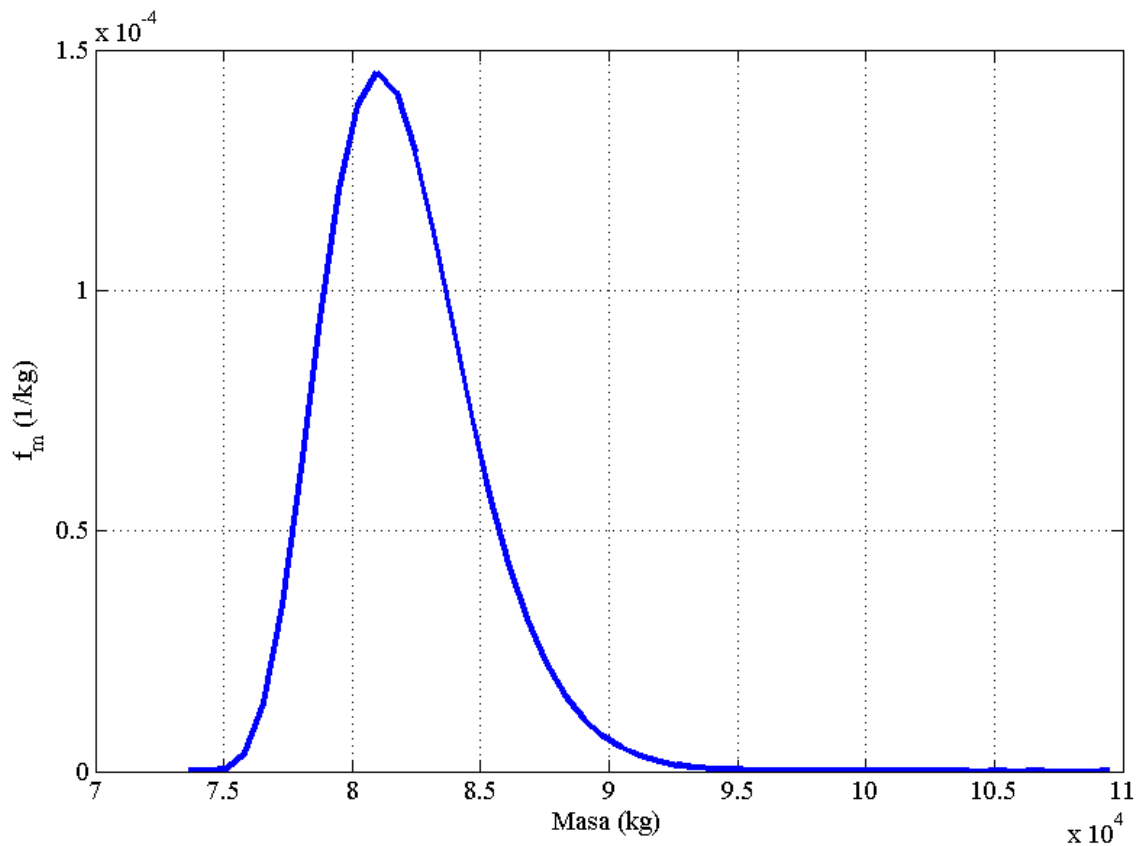


Figura 3.2: Función de densidad distribución gamma m_0

3.2 Resultados

En este apartado se reproducen los resultados obtenidos en el artículo, tanto los resultados numéricos, valores de la esperanza y la desviación, como las representaciones gráficas de las funciones de densidad para diferentes instantes de tiempo. En todas las simulaciones se comienza con una muestra de tamaño unidad y en cada iteración se duplica el tamaño de la muestra. El número de iteraciones necesarias se obtiene observando la envolvente de errores para cada caso, y teniendo en cuenta que nuestro objetivo es obtener un error de menos de un kilogramo con respecto a los valores del artículo. Las envolventes se representan en un instante de tiempo ya que se ha comprobado que el número de iteraciones necesarias no varía con el tiempo.

3.2.1 Distribución uniforme.

En este apartado se muestran los resultados obtenidos en el caso de la distribución uniforme, tanto para la esperanza como para la desviación típica, se incluyen además las representaciones de la función de distribución para diferentes instantes de tiempo y las probabilidades de cometer un error mayor de un kilogramo.

3.2.1.1 Esperanza

En la figura 3.3 se puede observar la envolvente de errores, para un instante de tiempo $t=2000s$, en el caso de la esperanza. En azul se miden los errores respecto al artículo y en rojo respecto a la iteración anterior. En el caso de la esperanza, se puede comprobar que para obtener con seguridad un error menor a un kilogramo el número mínimo de iteraciones es 25. Cabe destacar que este número de iteraciones corresponde a un tamaño final de 33554432 muestras. La variable del programa que opera con estas muestras y almacena los resultados ocupa una memoria de 134217728 bytes. Para el cálculo de la esperanza en la iteración i no es necesario guardar las muestras de la iteración $i - 1$, únicamente es necesario guardar el valor de la esperanza en la

iteración $i - 1$. Posteriormente se calcula la esperanza de las nuevas muestras y realizando la media (ya que ambas tienen el mismo tamaño al duplicarse el tamaño de la muestra en cada iteración) se obtiene el valor de la esperanza en la iteración i . Usar el procedimiento anterior ha permitido reducir la memoria necesaria a la mitad. Por último, el tiempo de ejecución del programa es de unos dos segundos, por lo que puede comprobarse que las limitaciones en memoria son más importantes que las limitaciones en cuanto a tiempo.

Estos cálculos se han realizado con un ordenador con una memoria RAM instalada de 3GB, un procesador Intel Celeron a 2 GHz y con el sistema operativo Windows 7 Professional de 64 bits.

En la tabla 3.1 se muestran los resultados obtenidos y se comparan con los del artículo. La primera columna de la tabla indica el instante de tiempo para el que se han calculado los resultados, la segunda el valor que se obtiene en el artículo, la tercera el valor obtenido mediante la simulación Montecarlo y la cuarta el error del método, obtenido comparando el valor de la última iteración con el de la iteración anterior. Por último, en la quinta columna se muestra la probabilidad de cometer un error superior a un kilogramo. Cabe destacar que para cada instante de tiempo considerado se han realizado simulaciones independientes. Usar las mismas muestras no presenta grandes ventajas y tiene el inconveniente de que es necesario guardar las muestras de una simulación a otra.

Puede observarse que los resultados obtenidos son muy precisos, cometiéndose en todos los casos errores inferiores a un kilogramo respecto a los resultados del artículo y también respecto a los valores de la iteración anterior. En esta tabla también puede observarse que para todos los instantes de tiempo la probabilidad de cometer un error superior a un kilogramo es inferior a un 4% y además esta probabilidad disminuye al aumentar el tiempo.

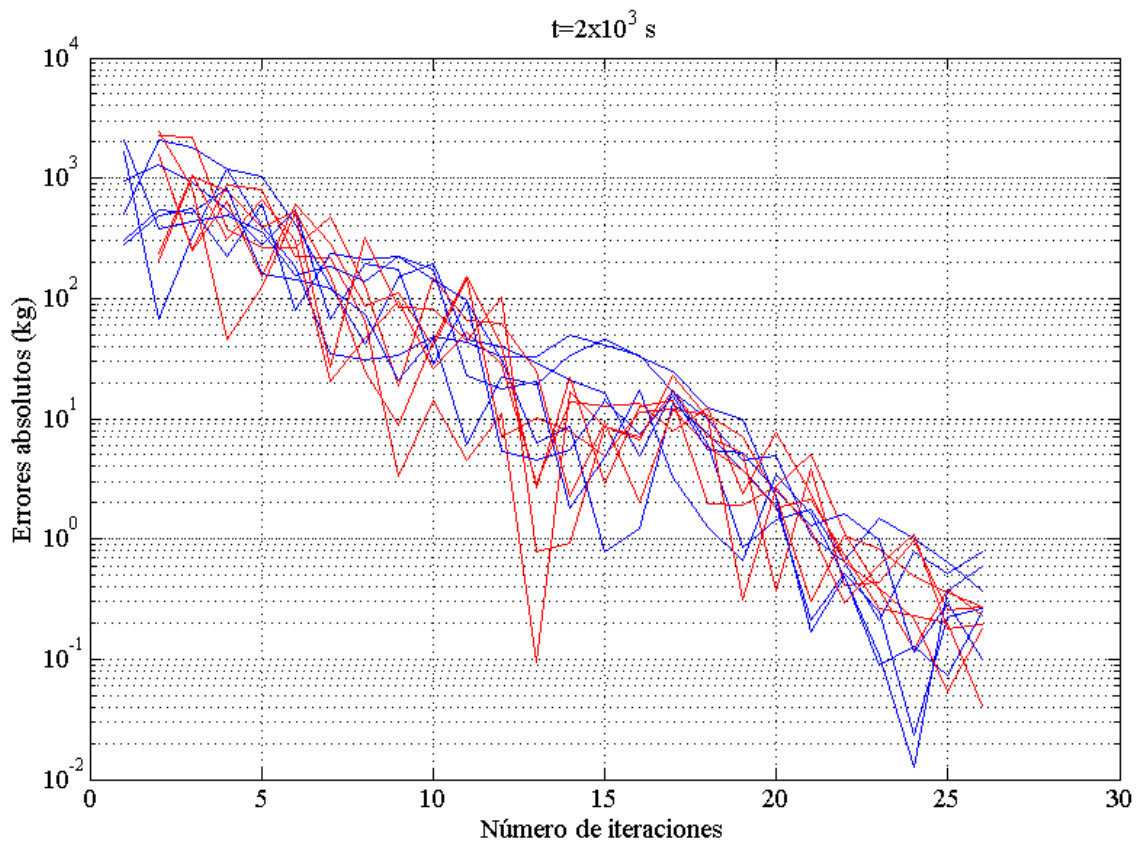


Figura 3.3: Envoltorio de errores para la esperanza. Distribución uniforme m_0

En la figura 3.4 se puede observar la evolución del valor esperado de la masa de la aeronave con el tiempo, como era de esperar este valor es decreciente debido al consumo de combustible.

Por último, es interesante representar la variación de la probabilidad con el número de iteraciones para los diferentes instantes de tiempo. En las figuras 3.5 y 3.6 se pueden observar estas representaciones. En la figura 3.5 observamos que las representaciones están muy juntas para todos los instantes de tiempo lo que indica que no existe una gran variación de la probabilidad con el tiempo. También es interesante notar como para el número de iteraciones pequeños, que corresponde a tamaños de la muestra pequeños la probabilidad tiende al 100%, lo que era de esperar, ya que para tamaños tan pequeños de la muestra es altamente probable que el error cometido sea mayor de un kilogramo. En la figura 3.6 se muestra gráficamente lo que se ha observado en la tabla. Se puede comprobar que aunque la probabilidad no varía mucho con el tiempo, la tendencia es ligeramente decreciente, es decir, para un número de iteraciones fijado, cuanto mayor sea el tiempo menor es la probabilidad de cometer un error mayor de un kilogramo. El principal motivo de esto es que al aumentar el tiempo se produce una disminución de la desviación típica, lo que disminuye la incertidumbre y por lo tanto la probabilidad de cometer errores. Con el objetivo de clarificar lo anterior en la figura 3.7 se representa la evolución de la probabilidad con el tiempo, para un número de 25 iteraciones.

Tabla 3.1: Valores de la esperanza para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0

Tiempo, s	$E[m(t;m_0)]$, kg	$E[m(t;m_0)]^*$, kg	Error, kg	Probabilidad, %
2×10^3	77485	77485.1	0.09	3.77
4×10^3	73477	73477.2	0.23	3.17
6×10^3	69596	69595.1	0.23	2.66
8×10^3	65831	65831.9	0.53	2.24
1×10^4	62175	62174.8	0.23	1.89
1.2×10^4	58616	58616.6	0.31	1.59

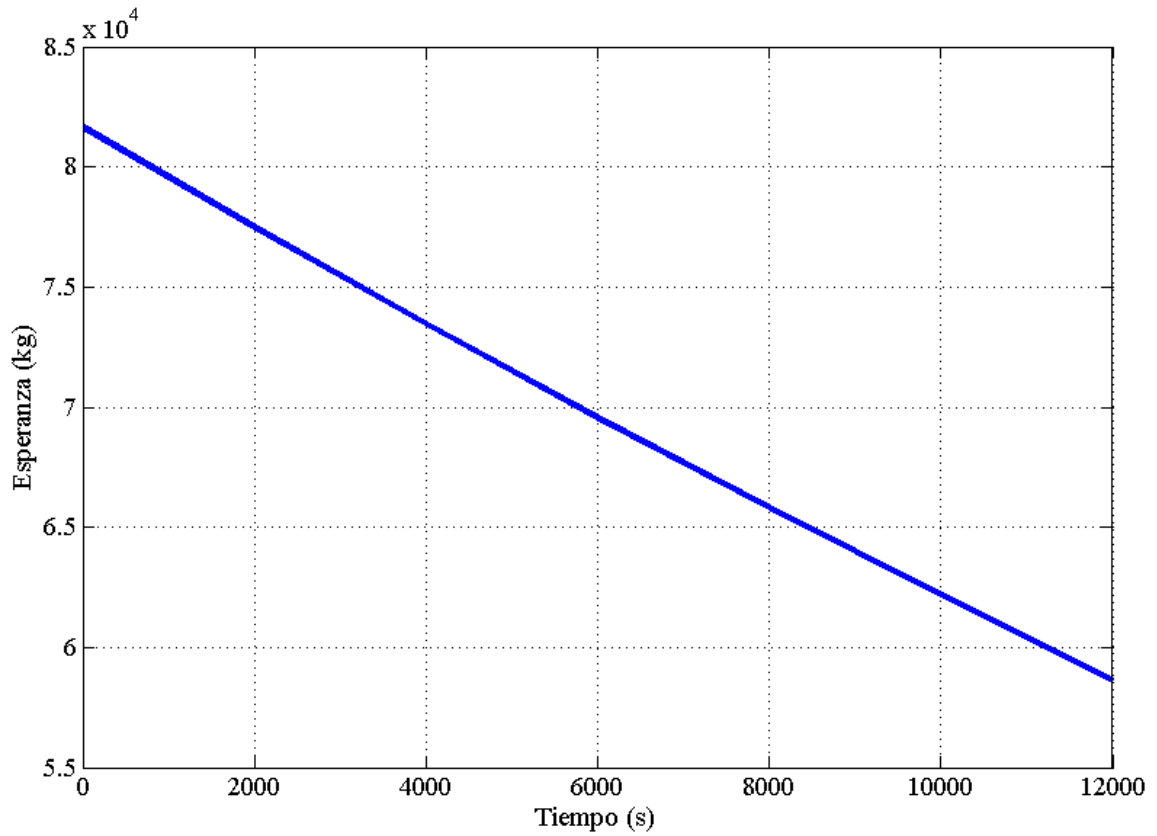


Figura 3.4: Valor esperado de la masa con el tiempo. Distribución uniforme m_0

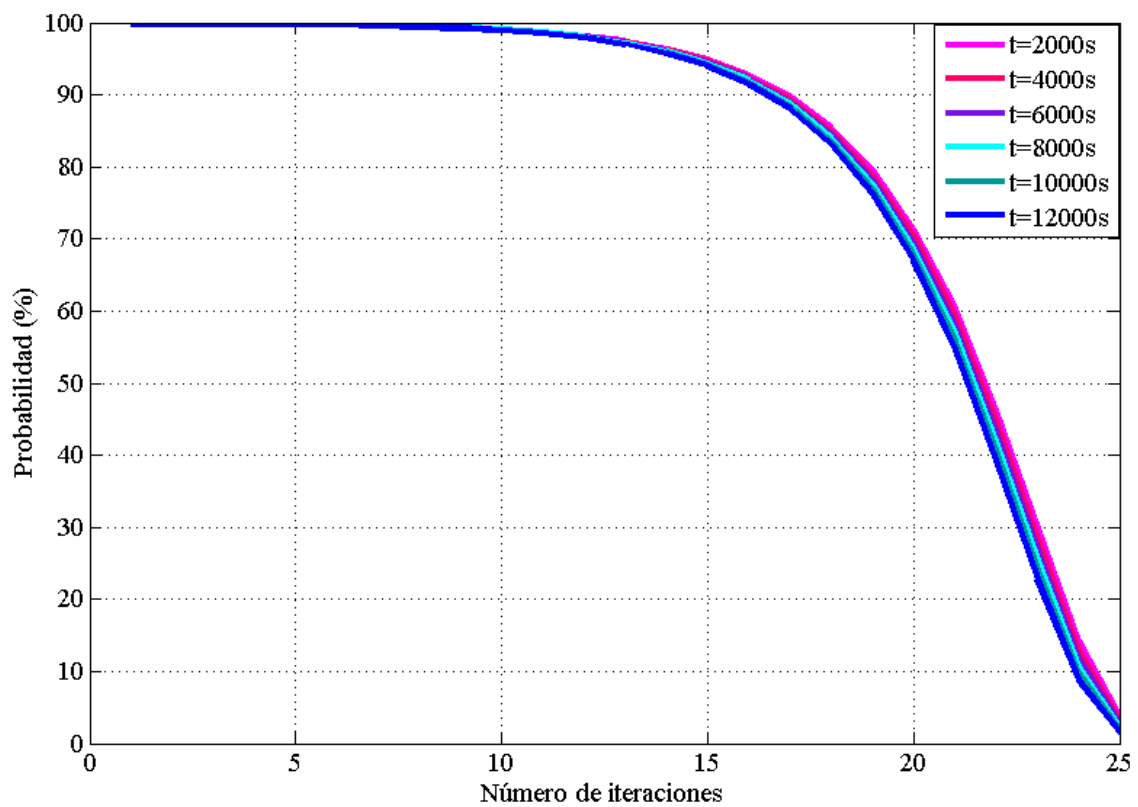


Figura 3.5: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0

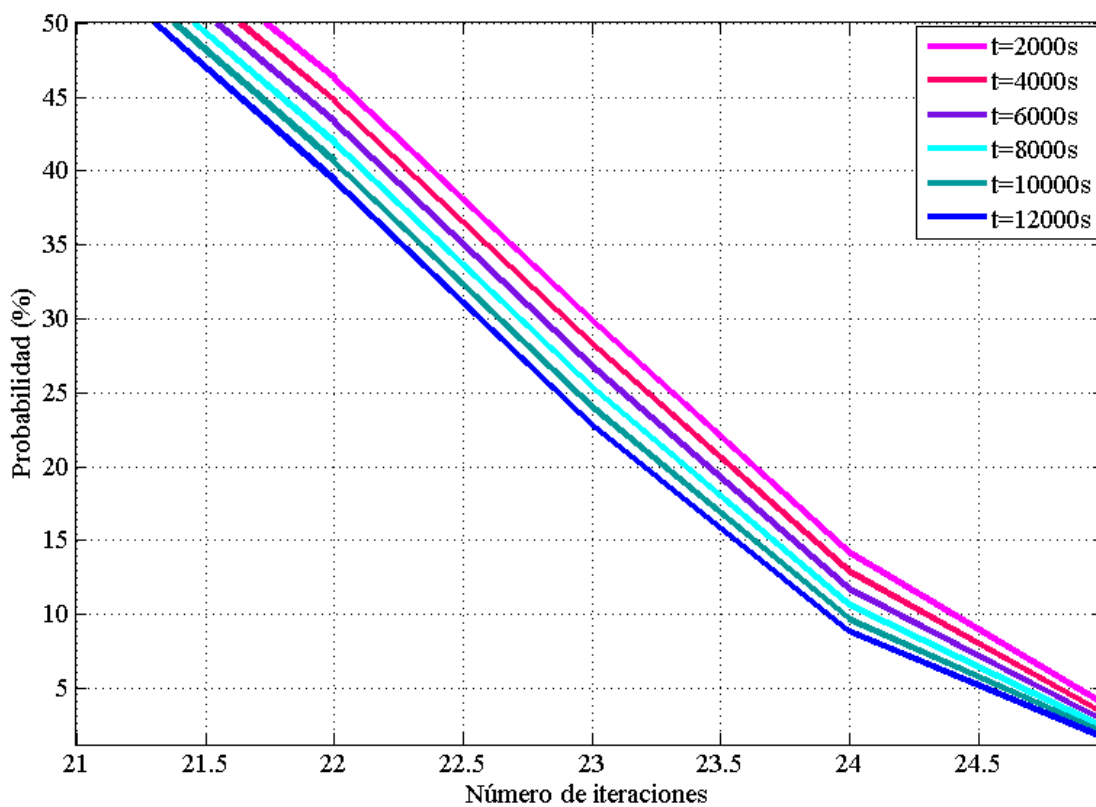


Figura 3.6: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo (ampliada). Distribución uniforme m_0

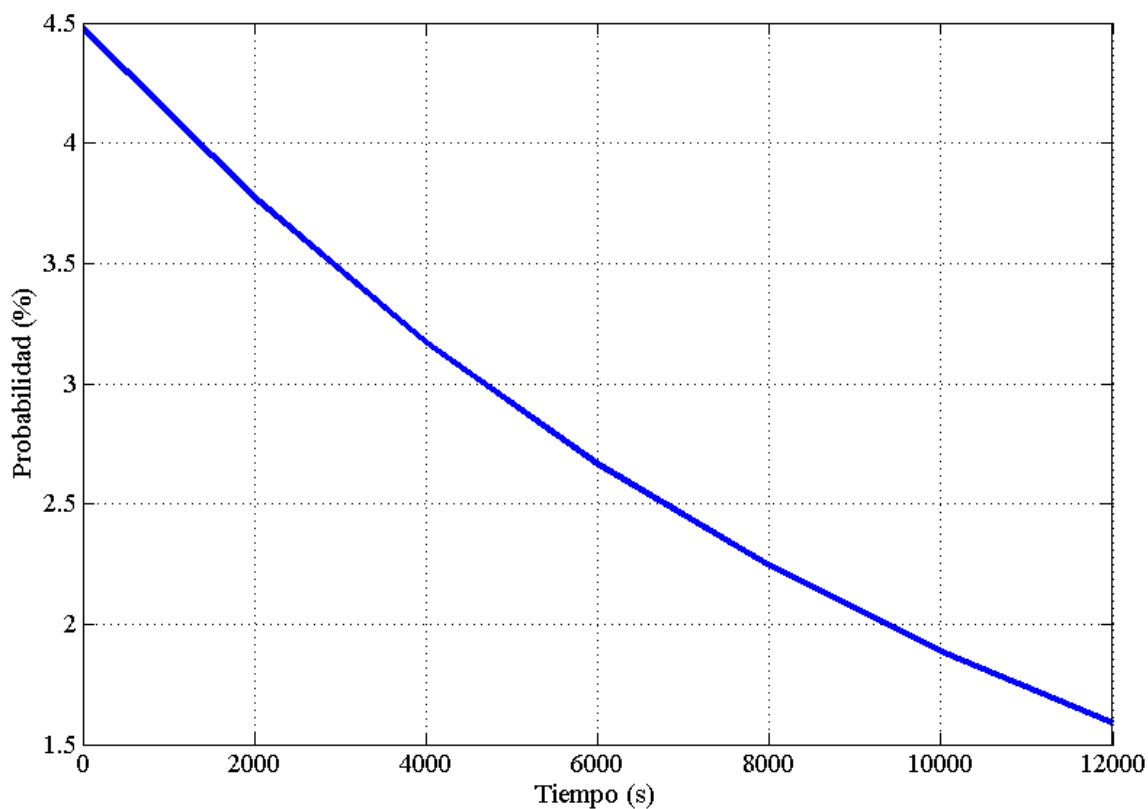


Figura 3.7: Evolución de la probabilidad del error con el tiempo. Distribución uniforme m_0

3.2.1.2 Desviación típica

En primer lugar se representa la envolvente de errores en el caso de la desviación típica, para un instante de tiempo $t=2000s$, observar figura 3.8. Al igual que en el caso anterior, en azul se miden los errores respecto al artículo y en rojo respecto a la iteración anterior. En este caso al igual que en el anterior observando la envolvente se ha decidido elegir un número de iteraciones igual a 25. Cabe destacar que para este número de iteraciones se tienen 33554432 muestras. Para calcular la desviación típica en la iteración i es necesario guardar las muestras de todas las iteraciones anteriores, esto hace que la variable que almacene las muestras ocupe 268435440 bytes, el doble que para el caso de la esperanza, siendo el número de iteraciones y por lo tanto el tamaño de la muestra el mismo. Este hecho hace que en el caso de la desviación típica la memoria sea una limitación aún más determinante que en el caso de la esperanza. Por último, el tiempo de ejecución de la simulación es de unos tres segundos y medio.

En la tabla 3.2 se muestran los resultados obtenidos y se comparan con los del artículo. La primera columna indica el instante de tiempo para el que se han calculado, la segunda el valor que se obtiene en el artículo, la tercera el valor obtenido mediante la simulación Montecarlo y la cuarta el error del método, obtenido comparando el valor de la última iteración con el de la iteración anterior. Puede comprobarse que los resultados obtenidos son muy precisos siendo los errores obtenidos en todos los casos inferiores a un kilogramo. Cabe destacar que los valores de la desviación que se obtienen en estas simulaciones son los que se usan para calcular las probabilidades del apartado anterior, usando el teorema central del límite tal y como se comentó en el capítulo anterior.

En la figura 3.9 se representa la evolución de la desviación típica con el tiempo, como puede observarse la desviación típica de la masa disminuye con el tiempo, por lo tanto, la dispersión de la función y la incertidumbre disminuyen con el tiempo.

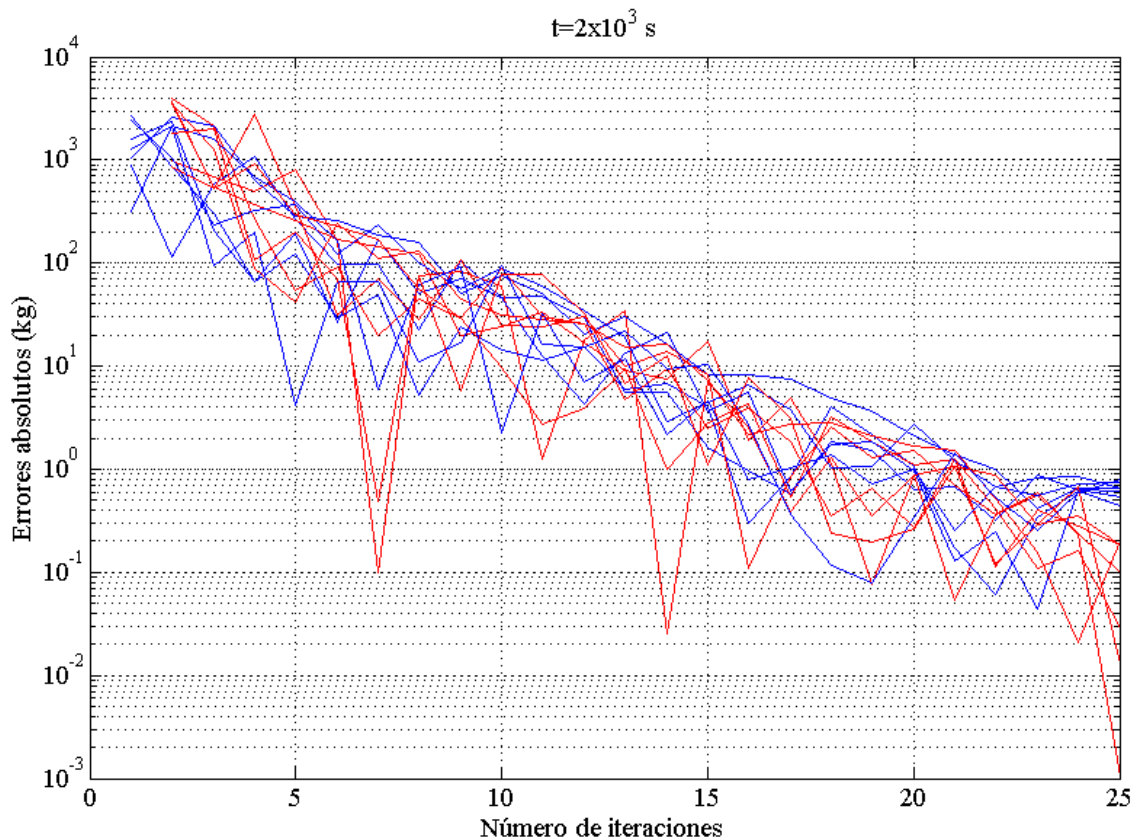
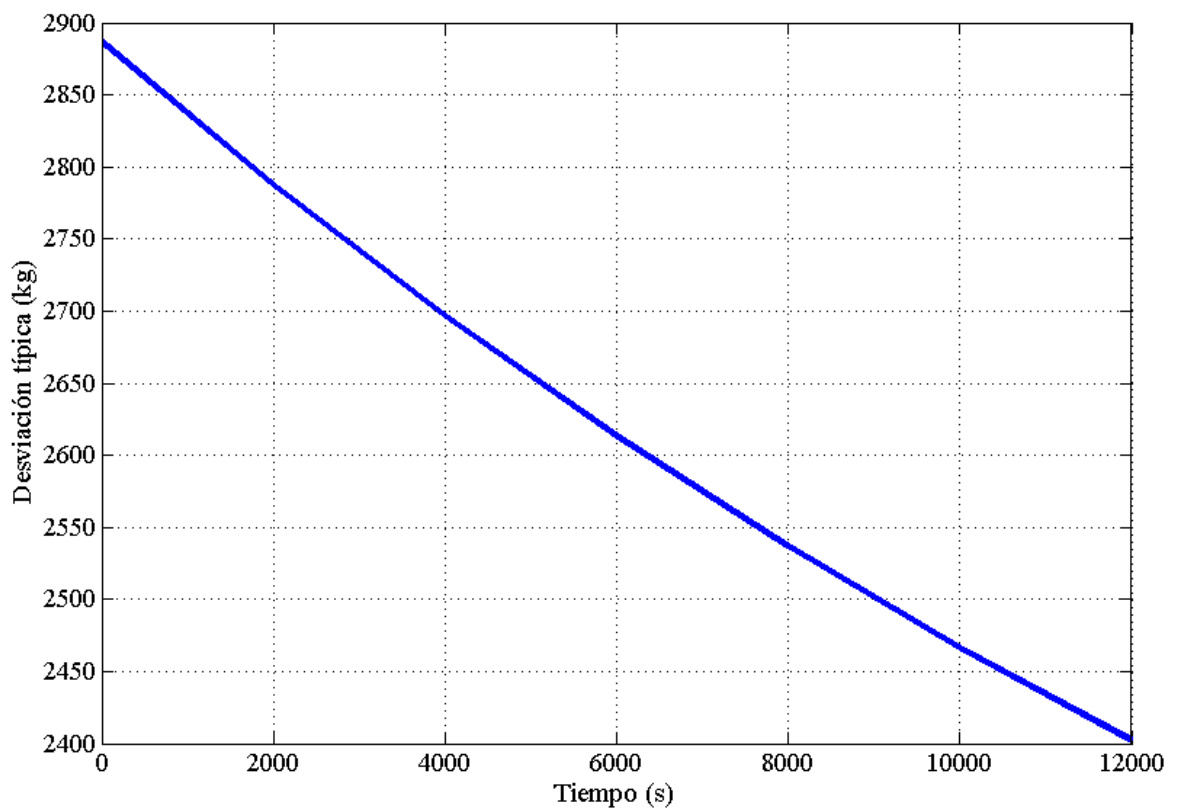


Figura 3.8: Envolvente de errores para la desviación. Distribución uniforme m_0

Tabla 3.2: Valores de la desviación típica para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0

Tiempo, s	$\sigma[m(t;m_0)]$, kg	$\sigma [m(t;m_0)]^*$, kg	Error, kg
2×10^3	2787	2787.6	0.39
4×10^3	2696	2696.6	0.29
6×10^3	2613	2613.3	0.01
8×10^3	2536	2536.8	0.07
1×10^4	2467	2466.5	0.22
1.2×10^4	2402	2402.2	0.06

Figura 3.9: Desviación típica de la masa con el tiempo. Distribución uniforme m_0

Por último, es interesante representar cómo evoluciona el cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido, pues da una medida de la incertidumbre de la masa en la masa de combustible consumida a lo largo del tiempo. Esta representación se muestra en la figura 3.10 en la cual puede comprobarse que el cociente disminuye con el tiempo, lo que era de esperar, ya que la desviación típica disminuye con el tiempo y el combustible consumido aumenta.

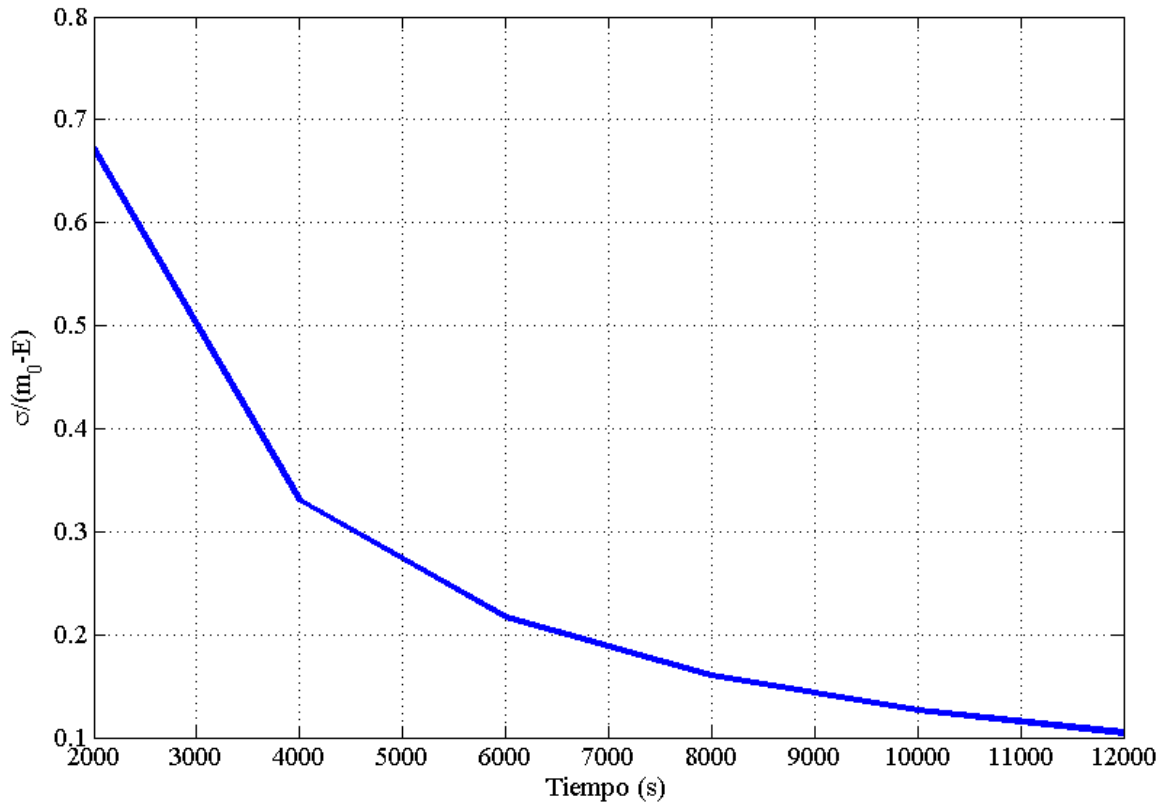


Figura 3.10: Cociente de la desviación típica entre la esperanza del combustible consumido. Distribución uniforme m_0

3.2.1.3 Funciones de densidad

En este apartado se representa la evolución de la función de densidad de probabilidad con el tiempo, en la figura 3.11 se representa las funciones de densidad obtenidas con el Método de Montecarlo en azul y las mostradas en el artículo en rojo. Puede comprobarse que la solución obtenida con el Método de Montecarlo es muy precisa, debiéndose las pequeñas diferencias observadas en los extremos izquierdos al número de intervalos usados para la representación.

En la figura 3.11 también puede observarse que al aumentar el tiempo, y disminuir la masa, el ancho de la función decrece mientras que la densidad de probabilidad aumenta, lo cual es acorde con la disminución de la desviación típica comentada anteriormente. Cabe destacar que la forma de la función se mantiene de forma aproximadamente uniforme.

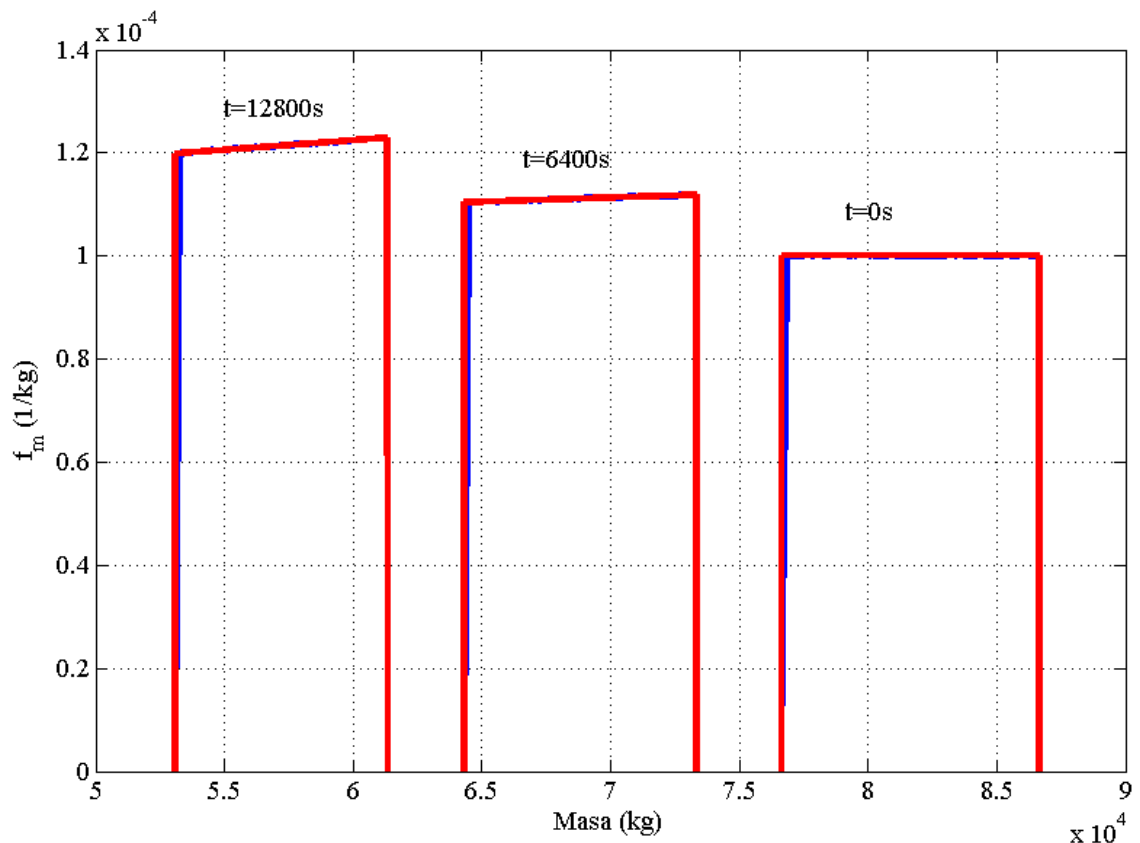


Figura 3.11: Función de densidad de probabilidad con el tiempo. Distribución uniforme m_0

3.2.2 Distribución gamma.

Al igual que en el apartado anterior, en este apartado se muestran los resultados obtenidos en el caso de la distribución gamma, tanto para la esperanza como para la desviación típica. Además se incluye el cálculo de la probabilidad y las representaciones de la función de distribución para diferentes instantes de tiempo.

3.2.2.1 Esperanza

A continuación se muestra la gráfica de la envolvente de errores en el caso de la esperanza para un instante de tiempo $t=2000s$. Al igual que en el caso de la distribución uniforme en azul se miden los errores respecto al artículo y en rojo respecto a la iteración anterior. Observando la figura 3.12 obtenemos que 25 es el número de iteraciones a partir del cual los errores son menores de un kilogramo. Cabe destacar que con este número de iteraciones se tienen 33554432 muestras. La variable del programa que opera con estas muestras y almacena los resultados ocupa una memoria de 134217728 bytes. El tiempo de ejecución del programa es de unos dos segundos, por lo que de nuevo puede comprobarse las limitaciones en memoria son más importantes que las limitaciones en cuanto a tiempo. Puesto que los valores obtenidos tanto en memoria necesaria como tiempo de computación son iguales que en el caso de la uniforme, podemos concluir que la forma de la función elegida no afecta significativamente a estos parámetros del método.

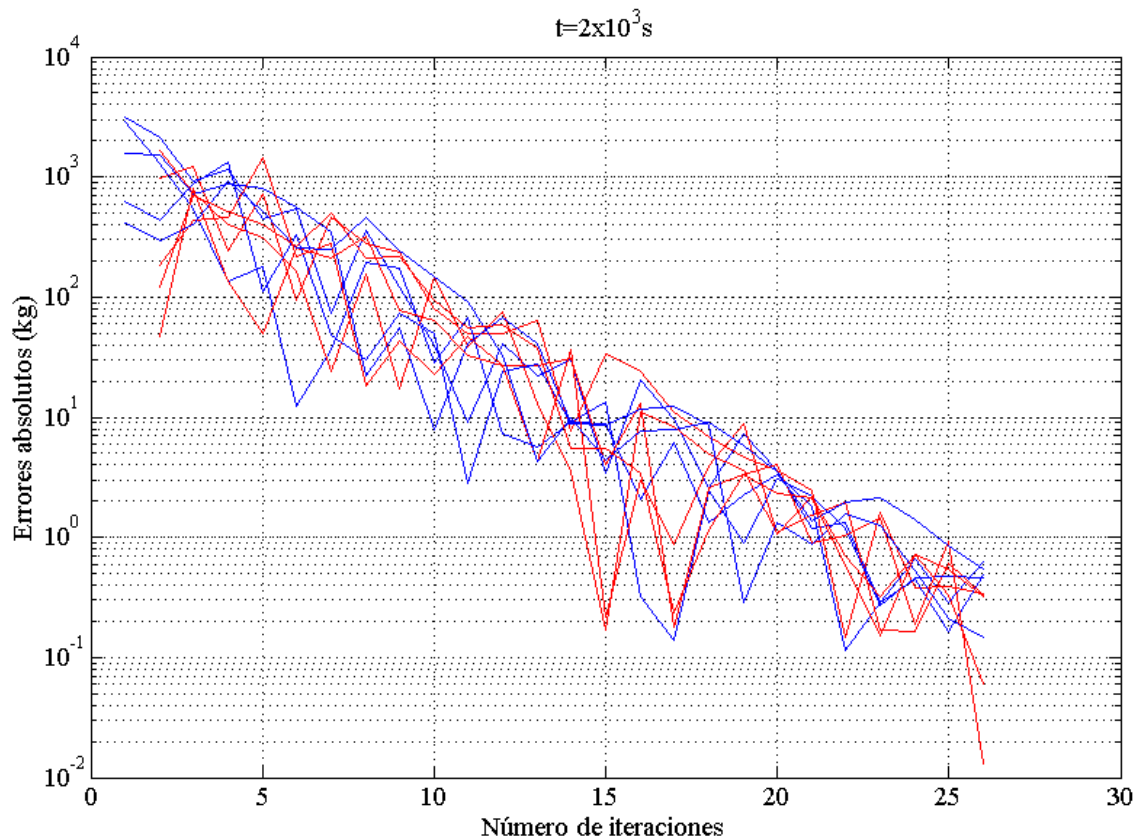


Figura 3.12: Envoltorio de errores para la esperanza. Distribución gamma m_0

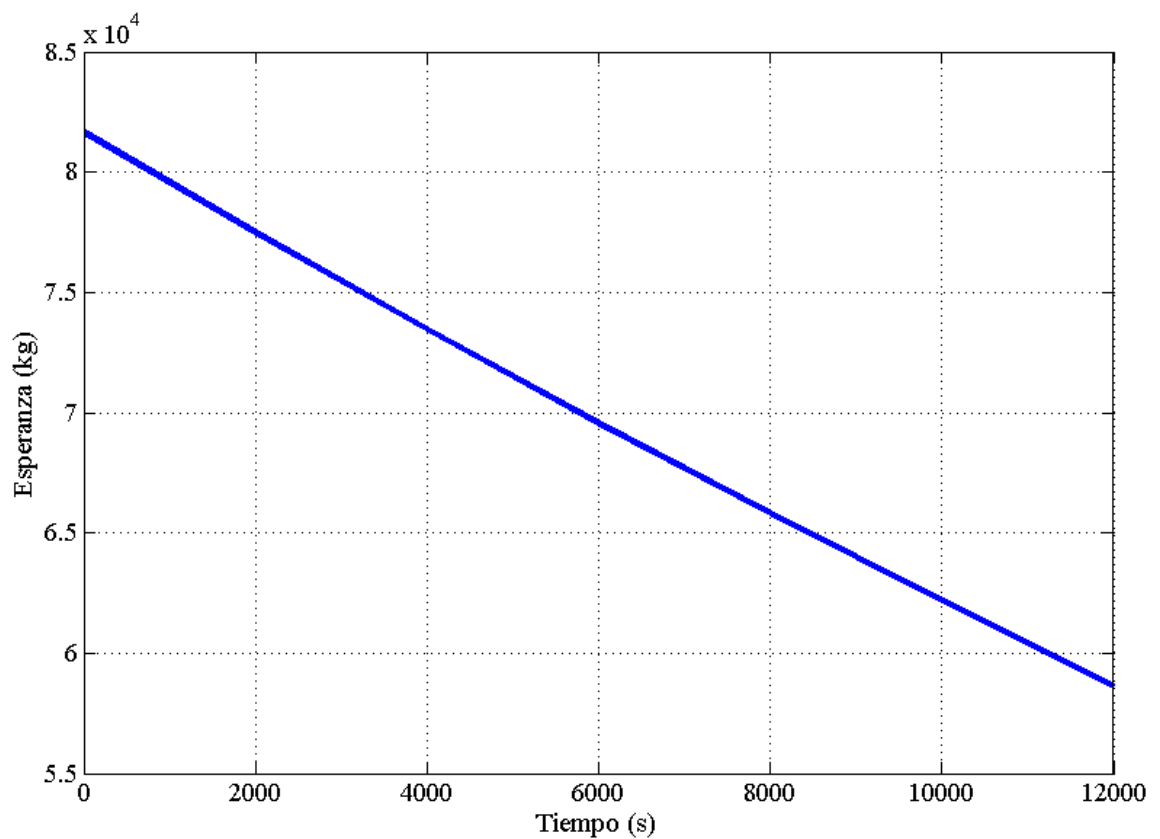
En la tabla 3.3 se muestran los resultados obtenidos y se comparan con los del artículo. Como puede comprobarse los resultados obtenidos son muy precisos alcanzándose el nivel de tolerancia deseado con valores pequeños de la probabilidad. Es interesante notar que los valores obtenidos son muy similares a los obtenidos en el caso de la distribución uniforme, lo que indica que el valor esperado de la masa y la probabilidad no están fuertemente influenciados por la distribución elegida para la masa inicial.

En la figura 3.13 se muestra una representación de la variación del valor esperado de la masa con respecto al tiempo. Al igual que en el caso de la distribución uniforme puede comprobarse que la masa de la aeronave decrece con el tiempo debido a que el combustible se va consumiendo a la largo de vuelo.

Por último en las figuras 3.14 y 3.15 se representa la evolución de la probabilidad con el número de iteraciones para diferentes instantes de tiempo y en la figura 3.16 se representa la evolución de la probabilidad con el tiempo para un número de iteraciones igual a 25. Puede comprobarse que las representaciones son muy similares a las del caso de la distribución uniforme, lo que indica que el cambio en el tipo de función inicial para la masa no provoca grandes cambios en la probabilidad.

Tabla 3.3: Valores de la esperanza para diferentes instantes de tiempo. Distribución gamma m_0

Tiempo, s	$E[m(t;m_0)]$, kg	$E[m(t;m_0)]^*$, kg	Error, kg	Probabilidad, %
2×10^3	77485	77485.8	0.13	3.77
4×10^3	73477	73476.8	0.20	3.16
6×10^3	69596	69596.1	0.41	2.64
8×10^3	65831	65831.6	0.20	2.22
1×10^4	62175	62174.3	0.38	1.86
1.2×10^4	58616	58616.2	0.12	1.56

Figura 3.13: Valor esperado de la masa con el tiempo. Distribución gamma m_0

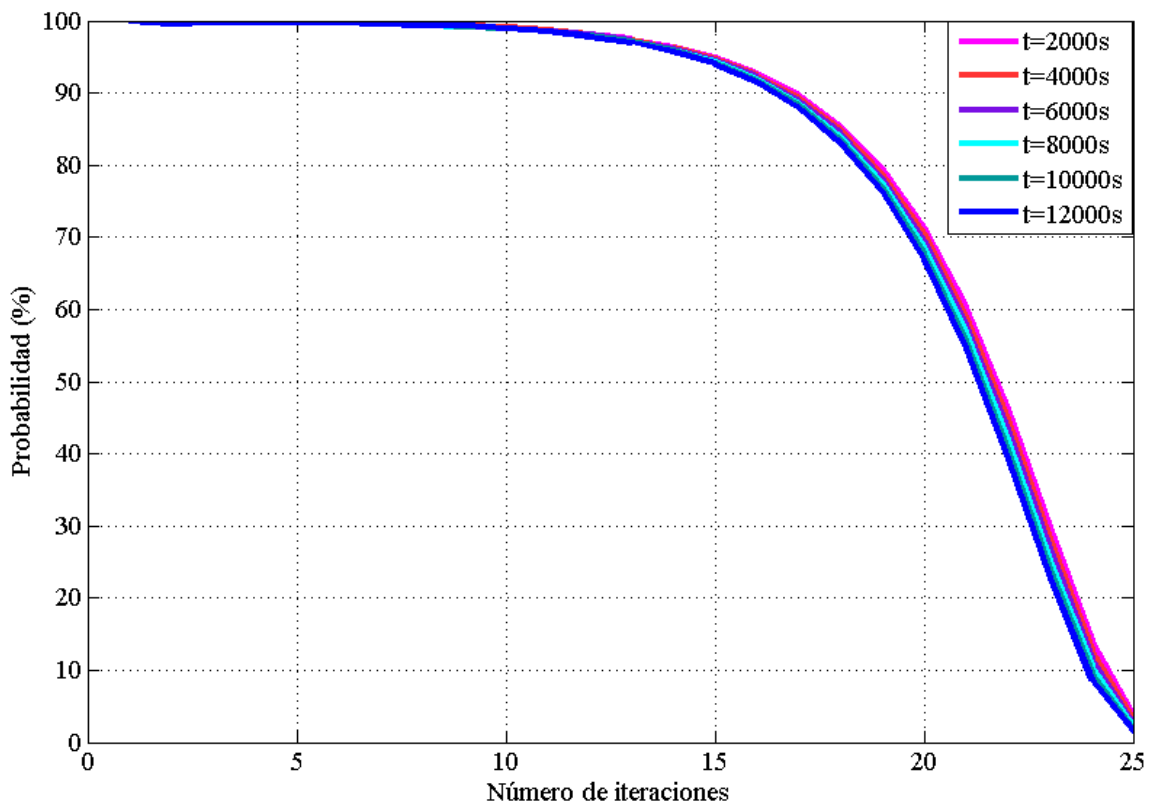


Figura 3.14: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo. Distribución gamma m_0

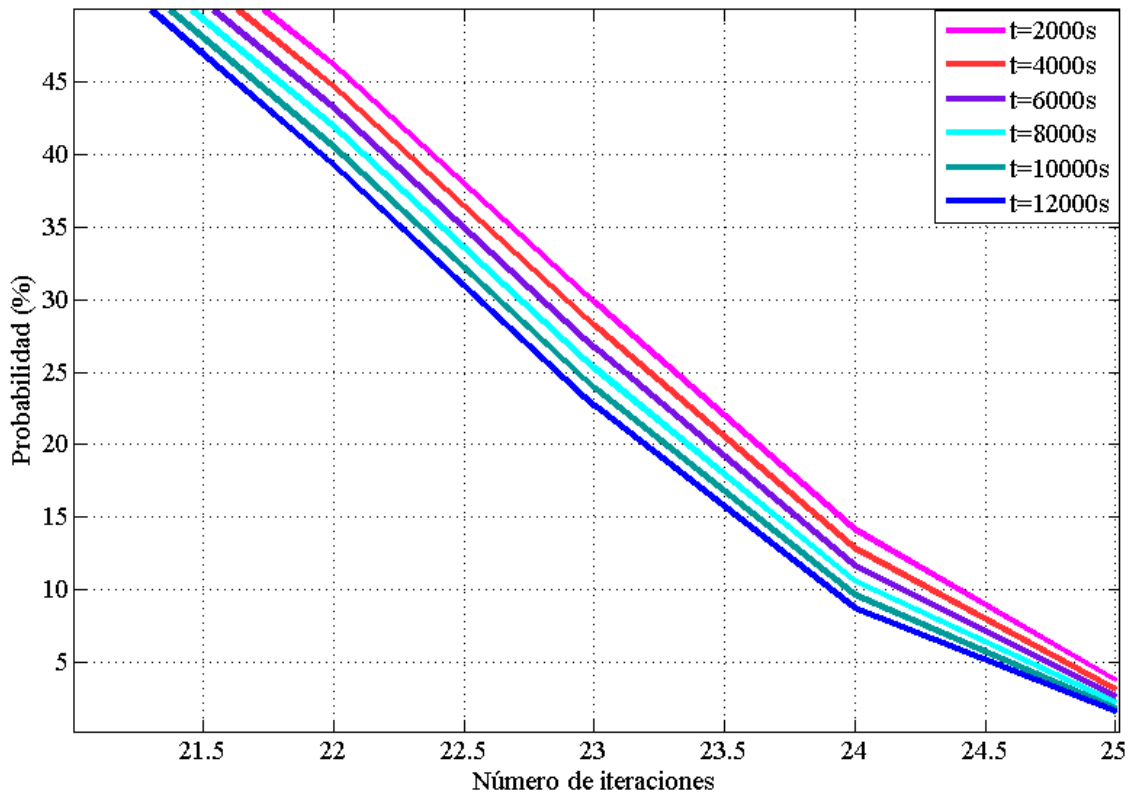


Figura 3.15: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo (ampliada). Distribución gamma m_0

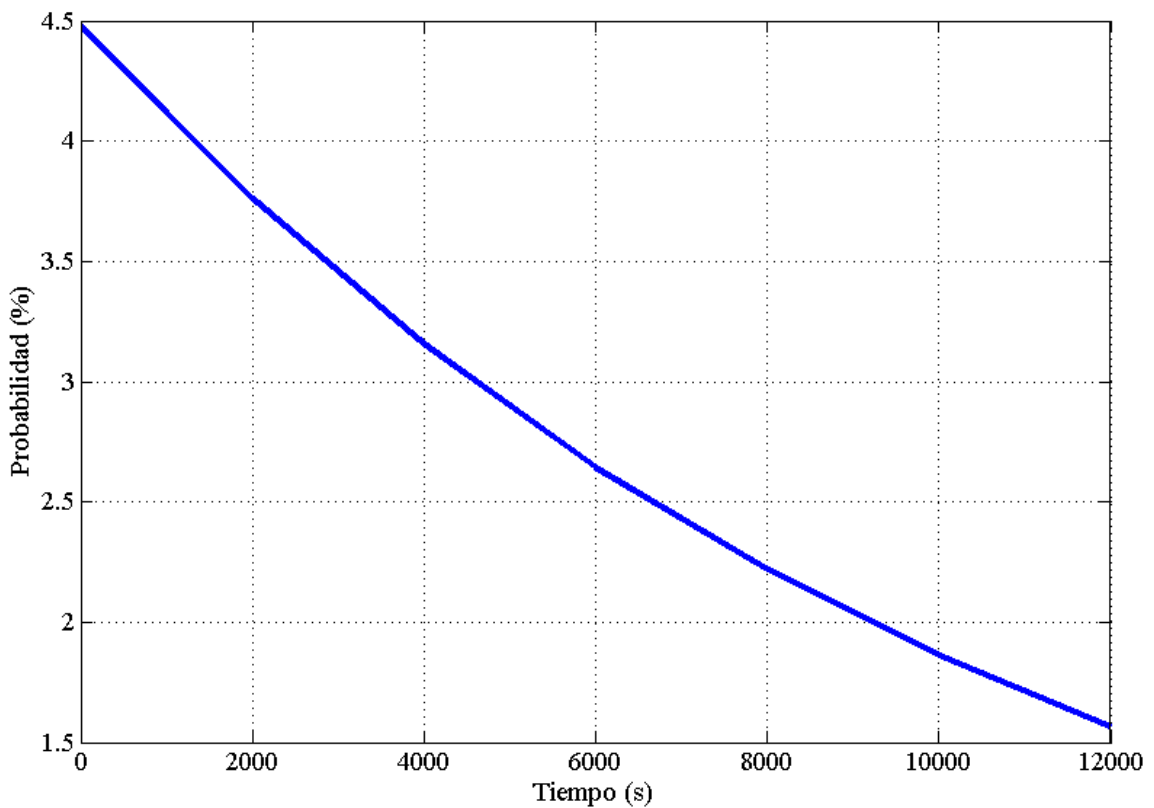


Figura 3.16: Evolución de la probabilidad del error con el tiempo. Distribución gamma m_0

3.2.2.2 Desviación típica

Al igual que en el caso de la distribución uniforme se representa la envolvente de errores en el caso de la desviación típica para un instante de tiempo $t=2000s$, observar figura 3.17. En azul se miden los errores respecto al artículo y en rojo respecto a la iteración anterior. En la figura, podemos observar que para un número de iteraciones igual a 25 se obtienen resultados con errores inferiores a un kilogramo. Cabe destacar que para este número de iteraciones se tienen 33554432 muestras, el tamaño que ocupa cada variable que opere con las muestras y almacene los resultados es 268435440 bytes y el tiempo de ejecución de la simulación es de unos tres segundos y medio. Puesto que los valores obtenidos tanto en memoria necesaria como tiempo de computación son iguales que en el caso de la uniforme podemos concluir que la forma de la función elegida no afecta a estos parámetros del método, tal y como sucedía en el caso de la esperanza.

En la tabla 3.4 se muestran los resultados obtenidos y se comparan con los del artículo. Para el número de iteraciones elegido se puede comprobar que los resultados son muy precisos. Es interesante notar que los valores obtenidos son muy similares a los obtenidos en el caso de la distribución uniforme, lo indica que la desviación típica obtenida para la masa no está muy influenciada por la distribución elegida para la masa inicial, aunque existen variaciones mayores que en el caso de la esperanza.

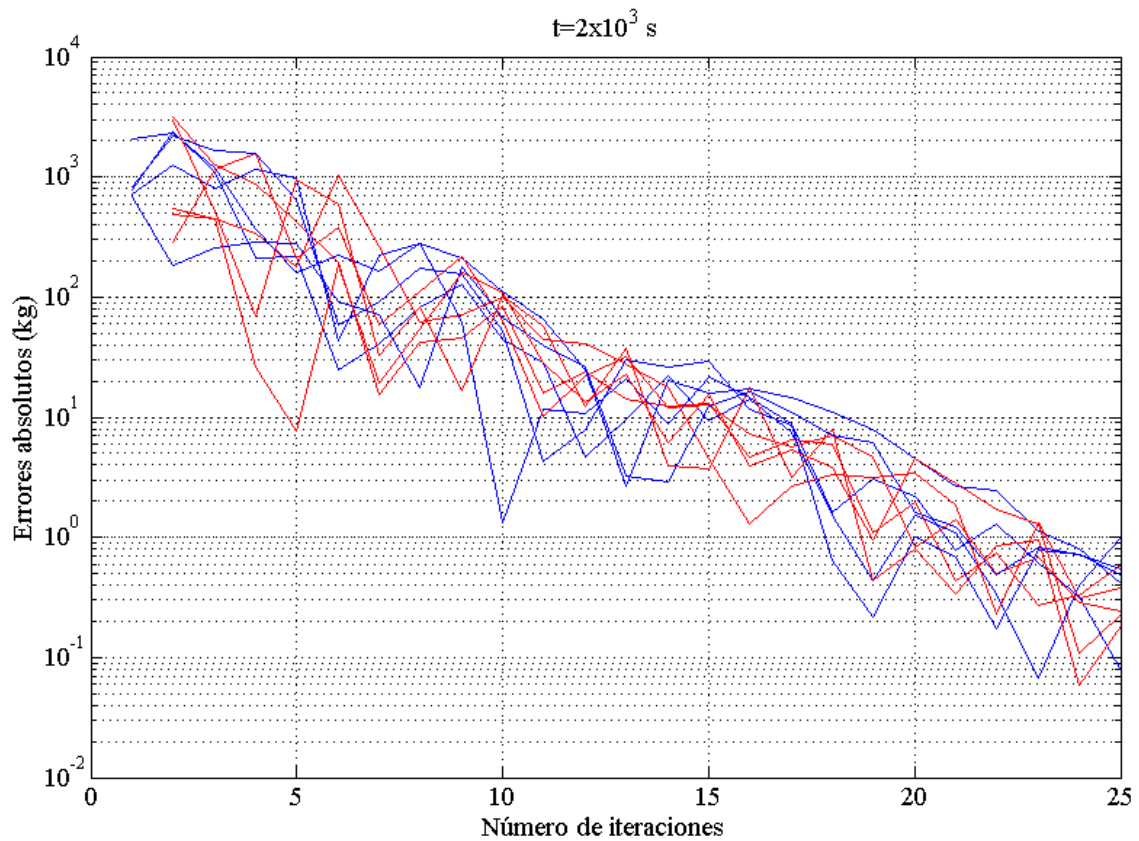


Figura 3.17: Envolvente de errores para la desviación. Distribución gamma m_0

Tabla 3.4: Valores de la desviación típica para diferentes instantes de tiempo. Distribución gamma m_0

Tiempo, s	$\sigma[m(t;m_0)]$, kg	$\sigma [m(t;m_0)]^*$, kg	Error, kg
2×10^3	2786	2786.2	0.19
4×10^3	2695	2694.8	0.18
6×10^3	2610	2610.2	0.50
8×10^3	2533	2532.5	0.38
1×10^4	2462	2461.9	0.37
1.2×10^4	2397	2396.5	0.53

En la figura 3.18 se representa la evolución de la desviación típica con el tiempo, como puede observarse la desviación típica de la masa disminuye con el tiempo por lo tanto la dispersión de la función y la incertidumbre disminuyen con el tiempo, el motivo de esta tendencia en el mismo que se comentó en el apartado anterior en el caso de la distribución uniforme.

Por último, en la figura 3.19 se representa el cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido con respecto al tiempo. Puede comprobarse que la tendencia es decreciente y muy similar a la obtenida en el caso de la distribución uniforme.

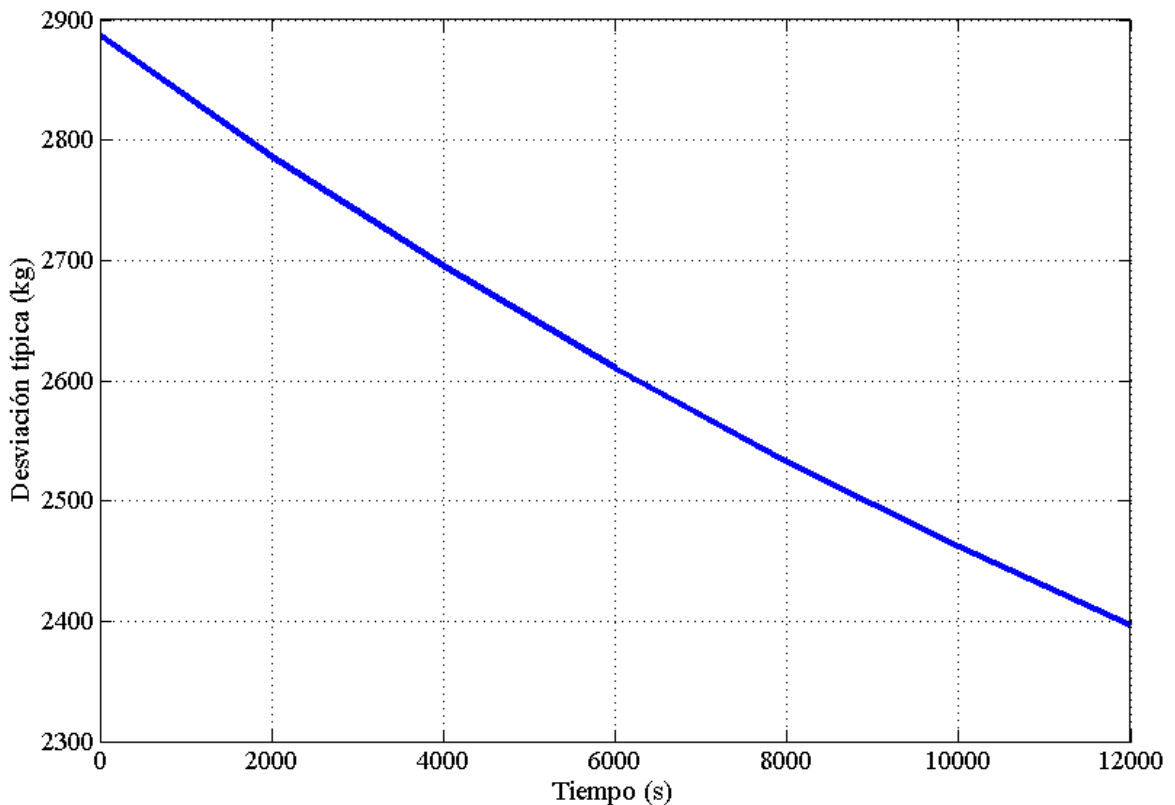


Figura 3.18: Desviación típica de la masa con el tiempo. Distribución gamma m_0

3.2.2.3 Funciones de densidad

En este apartado se representa la evolución de la función de densidad de probabilidad con el tiempo, en la figura 3.20 se representa las funciones de densidad obtenidas con el Método de Montecarlo en azul y las mostradas en el artículo en rojo, comprobándose que los resultados son muy similares. En la figura se observa que al aumentar el tiempo, y disminuir la masa, el ancho de la distribución decrece mientras que la densidad de probabilidad aumenta. Cabe comentar que la forma de la distribución es similar a una de tipo gamma durante todo el tiempo.

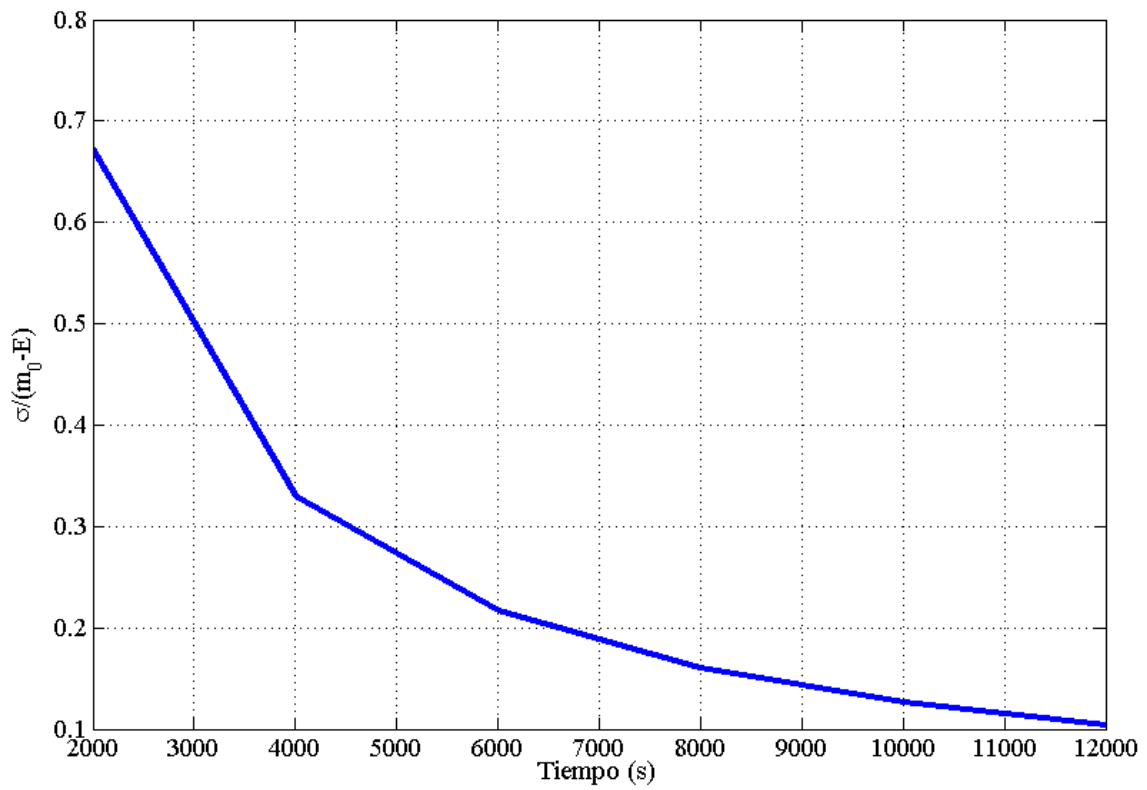


Figura 3.19: Cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido. Distribución gamma m_0

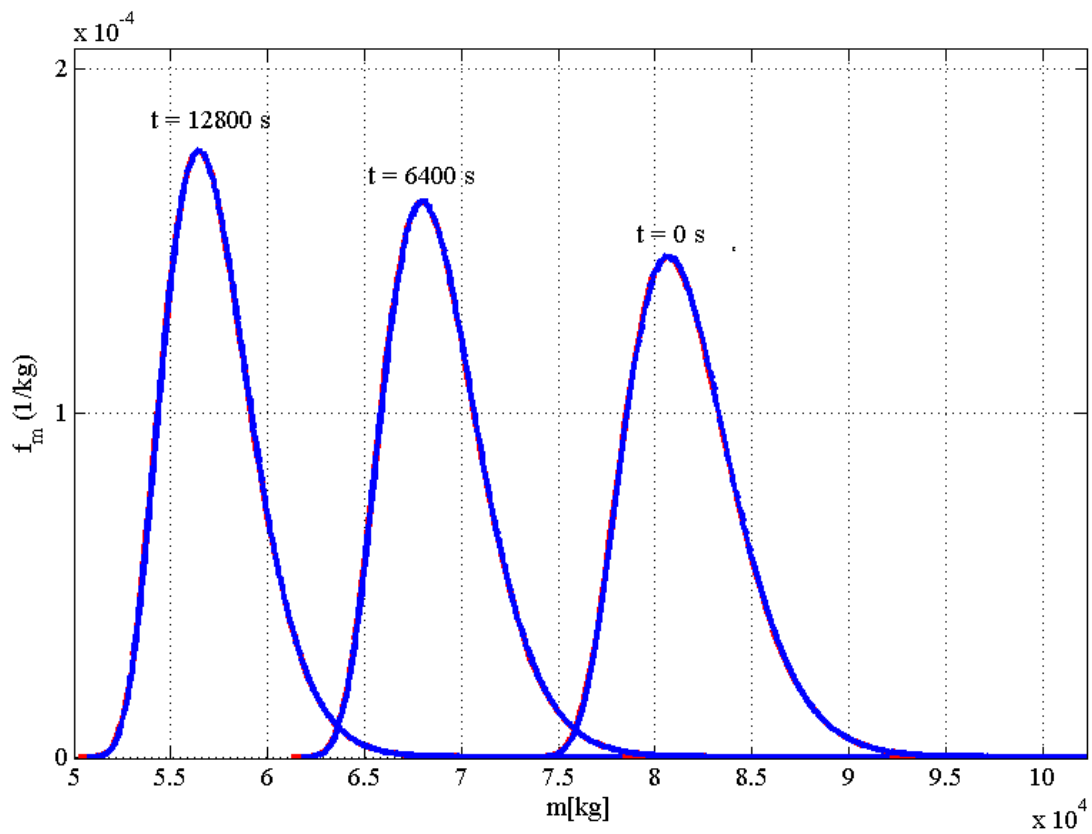


Figura 3.20: Funciones de densidad de probabilidad con el tiempo. Distribución gamma m_0

4 INCERTIDUMBRE EN C_{D0}

El objetivo de esta sección es estudiar el comportamiento de la función de densidad de la masa, en el caso de que la incertidumbre se tenga en C_{D0} . Algunos de los motivos por los que puede existir incertidumbre en este parámetro puede ser el acabado superficial de la aeronave o al desgaste de la pintura de esta debido a su uso. En este capítulo todos los parámetros conservan los valores anteriores, siendo la única diferencia que en este caso el valor de la masa inicial es fija e igual al valor central del apartado anterior, $m_0=81633$ kg. En este caso el parámetro que se modela de forma estadística es C_{D0} . Para este estudio se ha elegido para C_{D0} una distribución uniforme cuyo ancho es de $\pm 10\%$ con respecto al valor nominal, la representación de esta función puede observarse en la figura 4.1.

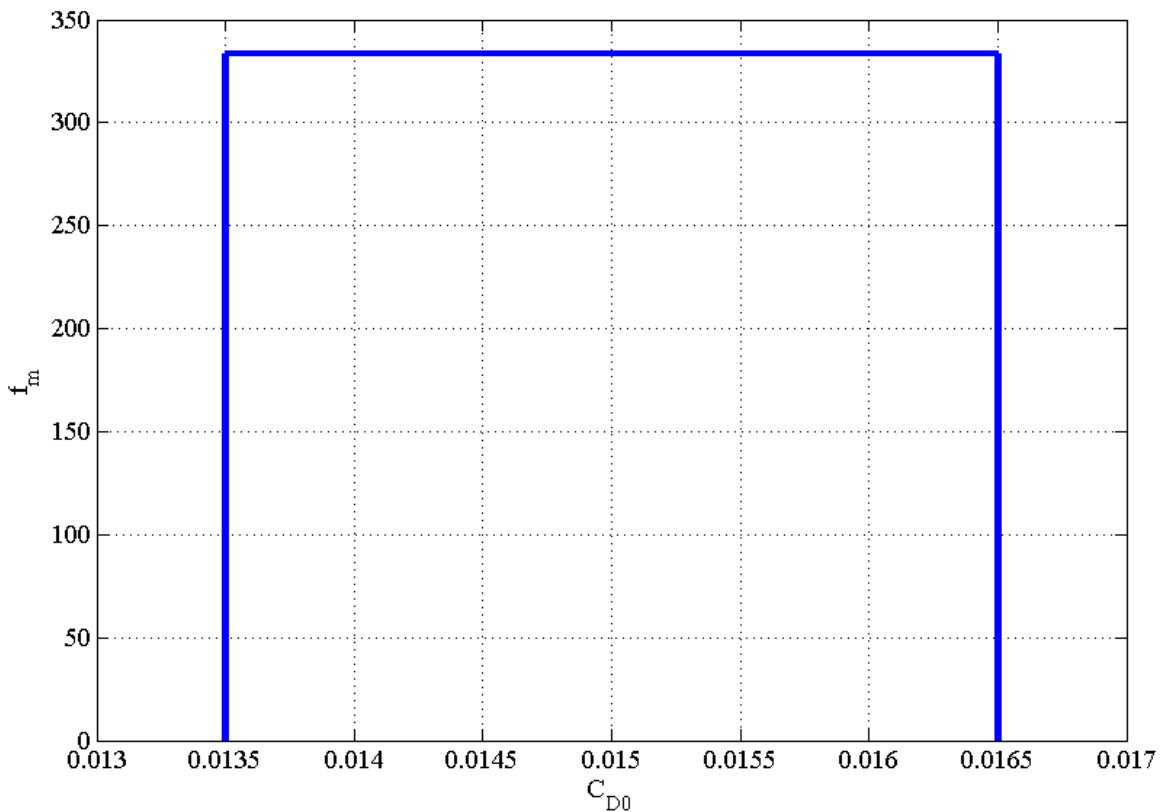


Figura 4.1: Función de densidad distribución uniforme C_{D0}

Una vez generadas las muestras el procedimiento seguido es el mismo que en el capítulo anterior. En primer lugar se representan las envolventes de errores que permiten determinar el número de iteraciones necesarias para obtener un error inferior a un kilogramo. Una vez obtenido el número de iteraciones necesarias se realiza la simulación para ese número de iteraciones y se calcula el valor esperado y la desviación típica de la masa de la aeronave.

Existe una diferencia importante entre el efecto de m_0 y C_{D0} en la evolución de la masa de la aeronave a lo largo del crucero. El efecto de m_0 actúa únicamente en los instantes iniciales propagándose posteriormente los efectos de esta perturbación en el tiempo. En el caso de C_{D0} el efecto es diferente, ya que C_{D0} afecta a la resistencia por lo que las incertidumbres en C_{D0} provocan incertidumbres en la resistencia, cuyo efecto afecta al consumo de combustible durante todo el crucero y por lo tanto hace que su importancia, sobre la masa de la

aeronave, aumente con el tiempo. Este efecto provocará comportamientos y tendencias diferentes a las analizadas en el capítulo anterior que se irán analizando al obtener los resultados. El primer efecto a tener en cuenta es, que en este caso el número de iteraciones necesarias para garantizar una precisión determinada depende del instante de tiempo. Al aumentar el tiempo aumenta la incertidumbre creada por C_{D0} , esto creará errores mayores y hará necesario un número mayor de iteraciones para garantizar la precisión buscada. Este hecho hace necesario representar las envolventes de errores para cada instante de tiempo y así determinar en cada instante el número de iteraciones necesarias. Cabe destacar que este efecto no se notó en el caso de m_0 ya que el efecto solo afectaba en los instantes iniciales y hacia que el orden de magnitud de los errores no variase con el tiempo.

A continuación se muestran los resultados obtenidos tanto en el caso de la esperanza como en el de la desviación. En este documento se muestran las envolventes de errores para los instantes de tiempo iniciales y finales, el resto se obtienen de la misma forma y el número de iteraciones se obtiene observándolas al igual que en el capítulo anterior.

4.1 Esperanza

En primer lugar se representan las envolventes de errores con el objetivo de decidir el número de iteraciones necesaria para obtener la precisión requerida. Como se comentó anteriormente solo se representan las envolventes para los instantes inicial, figura 4.2, y final, figura 4.3, el procedimiento seguido para el resto de instantes es el mismo. En estas dos figuras puede comprobarse que los errores son mayores cuando el instante de tiempo considerado es mayor.

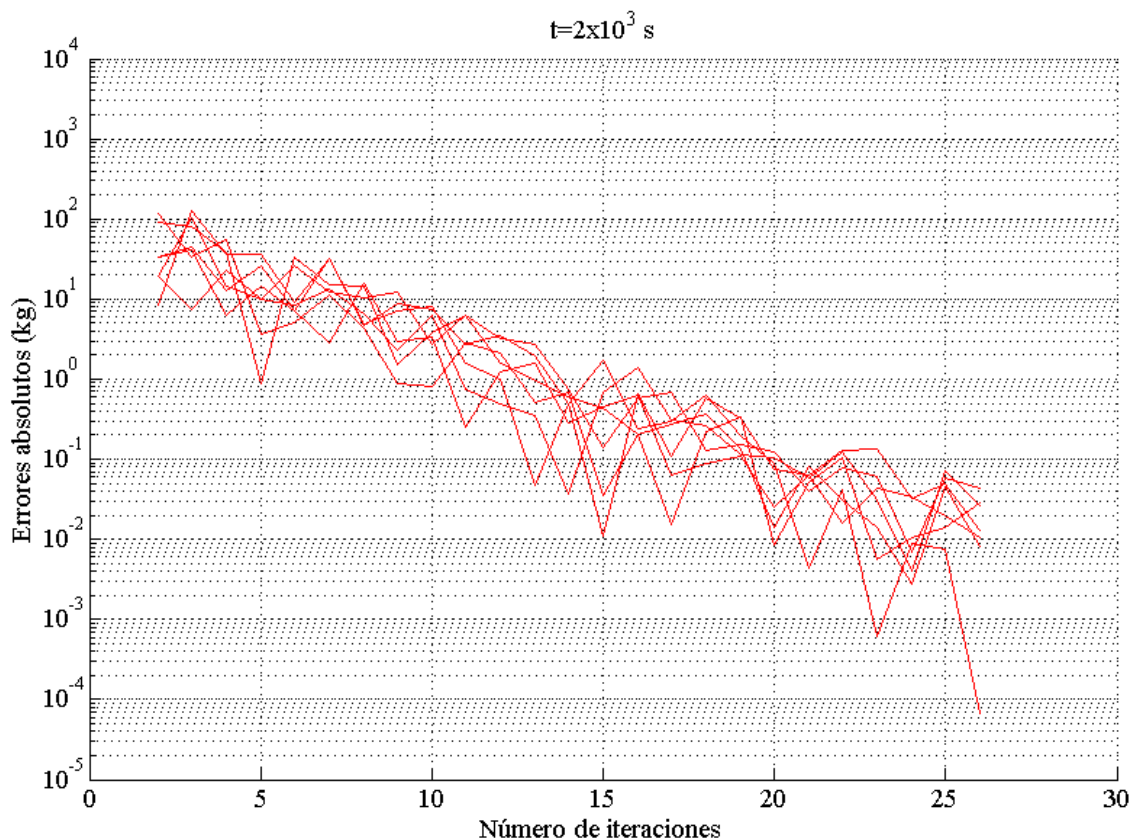


Figura 4.2. Envolvente de errores en la esperanza para un tiempo de $2 \times 10^3 \text{ s}$. Distribución uniforme C_{D0}

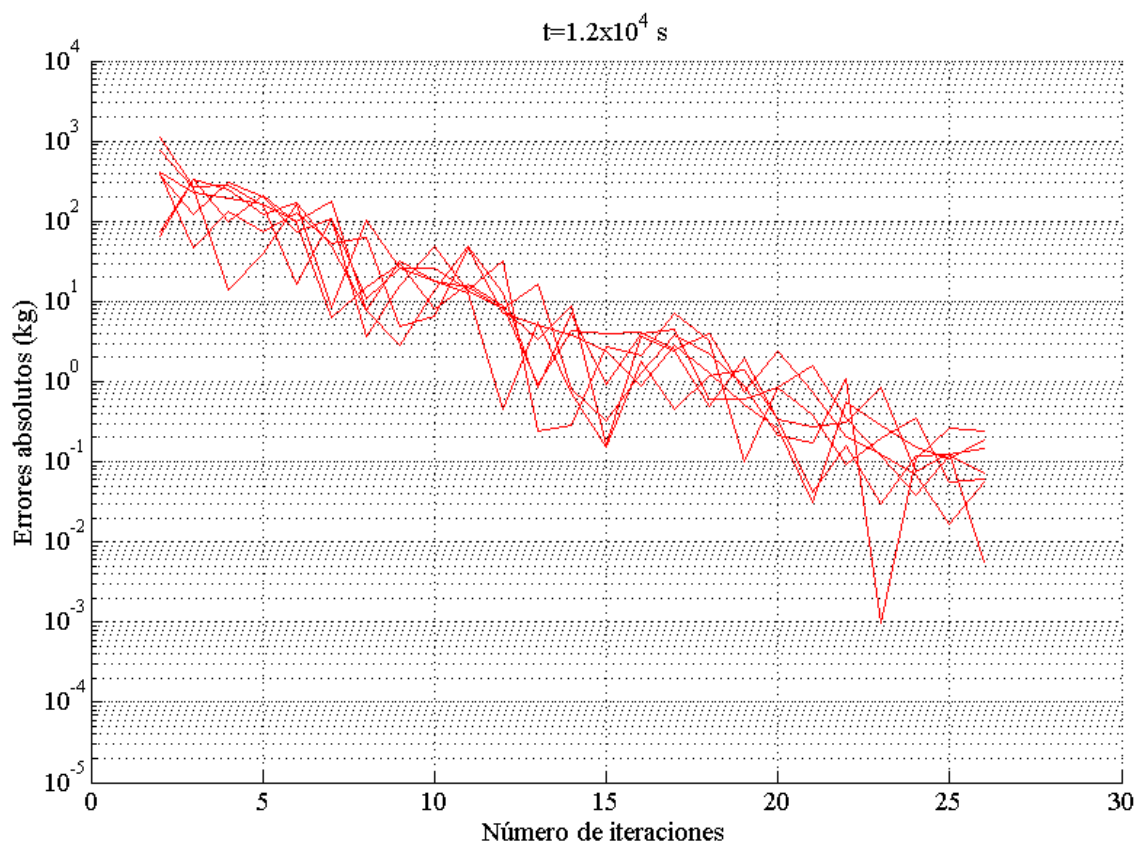


Figura 4.3. Envolvente de errores en la esperanza para un tiempo de 1.2×10^4 s. Distribución uniforme C_{D_0}

En la Tabla 4.1 se muestran los resultados obtenidos. La primera columna indica el instante de tiempo para el que se han calculado, la segunda el valor de la esperanza que se obtiene, la tercera el número de iteraciones que se han escogido, observando para cada instante de tiempo el número de iteraciones que garantiza un error inferior a un kilogramo, y la cuarta el error del método, obtenido comparando el valor de la última iteración con el de la iteración anterior. Por último, en la quinta columna se representa el valor de la probabilidad del error para el número de iteraciones elegido en cada caso.

Tabla 4.1: Valores de la esperanza para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}

Tiempo, s	$E[m(t; m_0)]$, kg	Nº iteraciones	Error, kg	Probabilidad, %
2×10^3	77487.8	17	0.3097	2.06
4×10^3	73480.9	20	0.0462	0.08
6×10^3	69600.0	20	0.2371	2.44
8×10^3	65837.5	21	0.1352	1.55
1×10^4	62180.8	22	0.0569	0.55
1.2×10^4	58624.8	23	0.1476	0.10

Observando los resultados de la tabla anterior podemos concluir que como era de esperar el número de iteraciones necesarias aumenta con el tiempo, debido al aumento de la influencia de C_{D_0} comentada anteriormente. También es interesante notar que el número de iteraciones necesarias es menor que las obtenidas en el caso de m_0 , estudiado en el capítulo anterior. Este hecho está condicionado por el ancho elegido para la distribución de C_{D_0} y es interesante notar que en caso de aumentar este ancho aumentarían tanto el número de iteraciones como la influencia de C_{D_0} . En cuanto a la probabilidad se puede comprobar que en todos los casos los valores obtenidos son inferiores a un 3%, la oscilación de estos valores se debe al número de iteraciones elegido en cada caso. Posteriormente se podrá comprobar que, para un número de iteraciones fijo la probabilidad del error aumenta con el tiempo.

En la figura 4.4 se muestra una representación de la variación del valor esperado de la masa con respecto al tiempo. Como era de esperar el valor esperado de la masa disminuye con el tiempo debido al consumo de combustible.

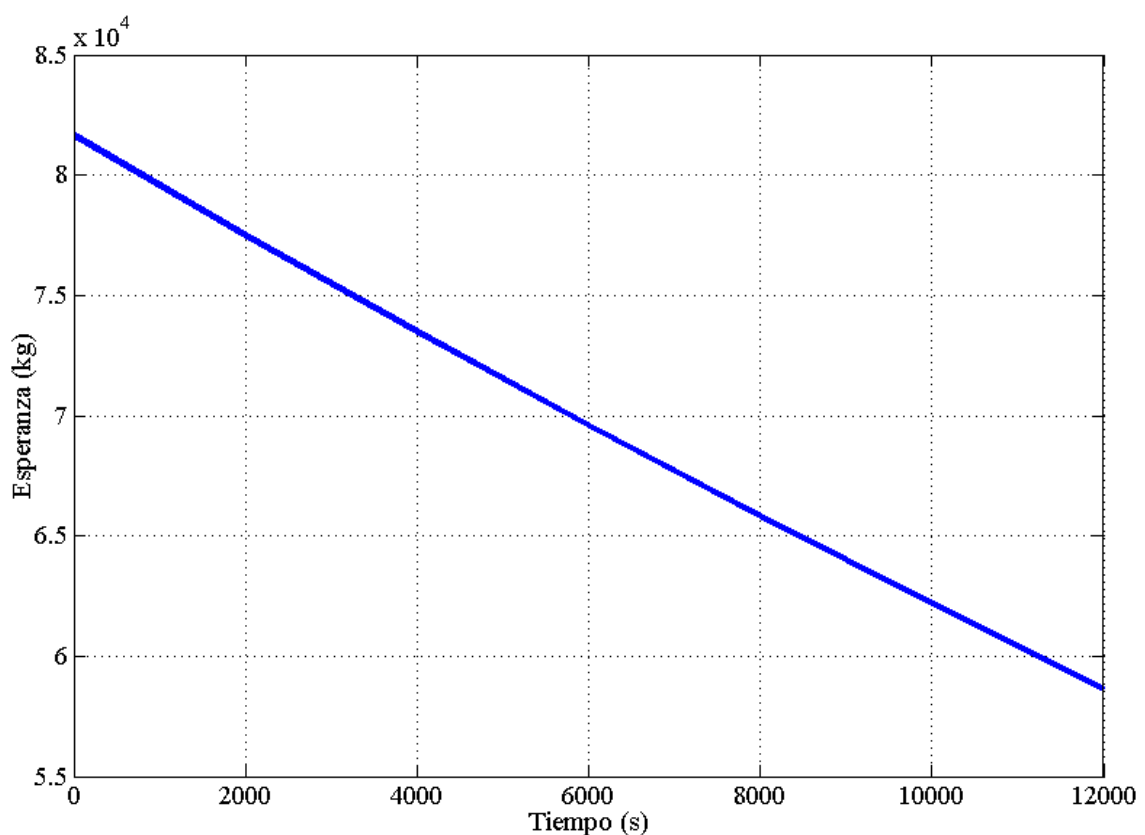


Figura 4.4: Valor esperado de la masa con el tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}

Por último, en la figura 4.5 se representa la probabilidad de cometer un error mayor de un kilogramo con respecto al número de iteraciones para diferentes instantes de tiempo. Puede observarse que para un número de iteraciones fijo, la probabilidad aumenta con el tiempo debido al aumento de la incertidumbre causada por C_{D_0} . Para el caso extremo $t=0$ s se debe tener una probabilidad de error nula, ya que como se comentó anteriormente una incertidumbre en C_{D_0} no crea incertidumbre en la masa en el instante inicial. Para finalizar, se puede comprobar que la probabilidad disminuye al aumentar el número de iteraciones, ya que aumenta el tamaño de la muestra y por lo tanto aumenta la precisión del método.

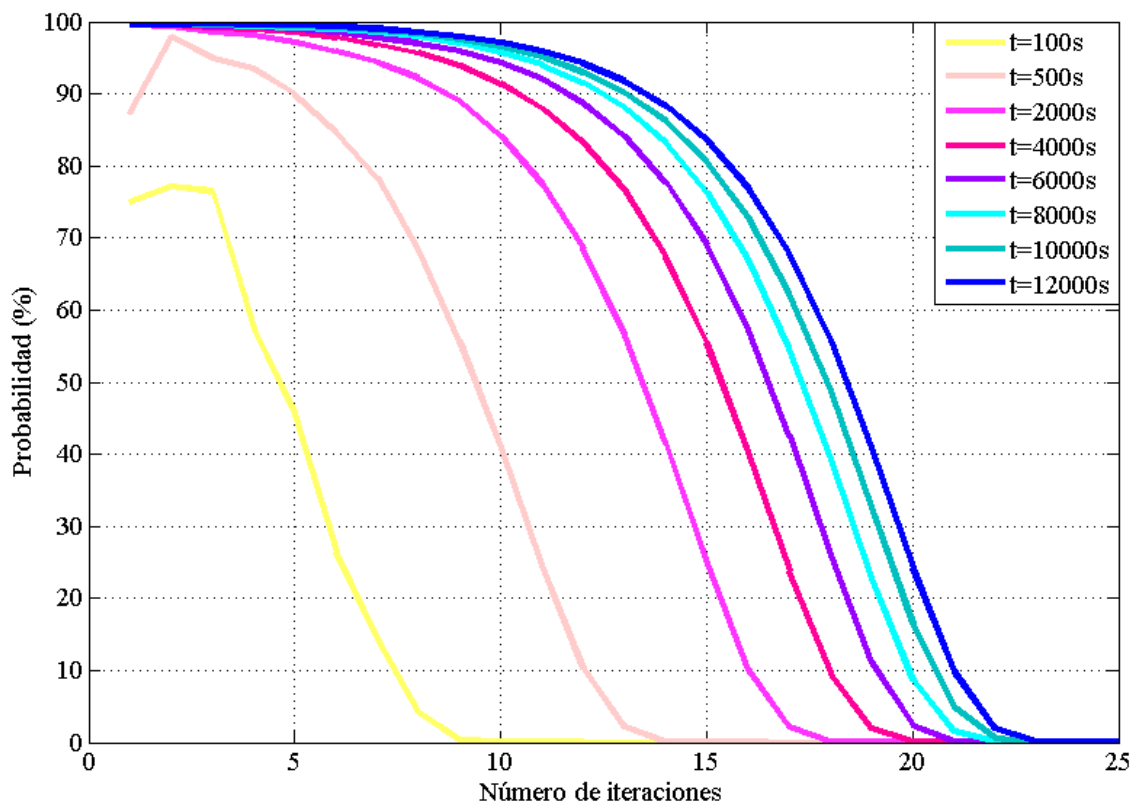


Figura 4.5: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}

4.2 Desviación típica.

En primer lugar se representan las envolventes de errores con el objetivo de decidir el número de iteraciones necesaria para obtener la precisión requerida. Al igual que en el caso de la esperanza solo se representan las envolventes para los instantes inicial, figura 4.6, y final, figura 4.7, ya que el procedimiento seguido para el resto de instantes es el mismo.

En la Tabla 4.2 se muestran los resultados obtenidos. La primera columna indica el instante de tiempo para el que se han calculado, la segunda el valor que se obtiene, la tercera número de iteraciones que se han realizado y la cuarta el error del método, obtenido comparando el valor de la última iteración con el de la iteración anterior. Observando los resultados de la tabla, al igual que en el caso de la esperanza podemos concluir que como era de esperar el número de iteraciones necesarias aumenta con el tiempo, debido al aumento de la influencia de C_{D_0} comentada anteriormente. También es interesante notar que el número de iteraciones necesarias es menor que las obtenidas en el caso de m_0 , estudiado en el capítulo anterior.

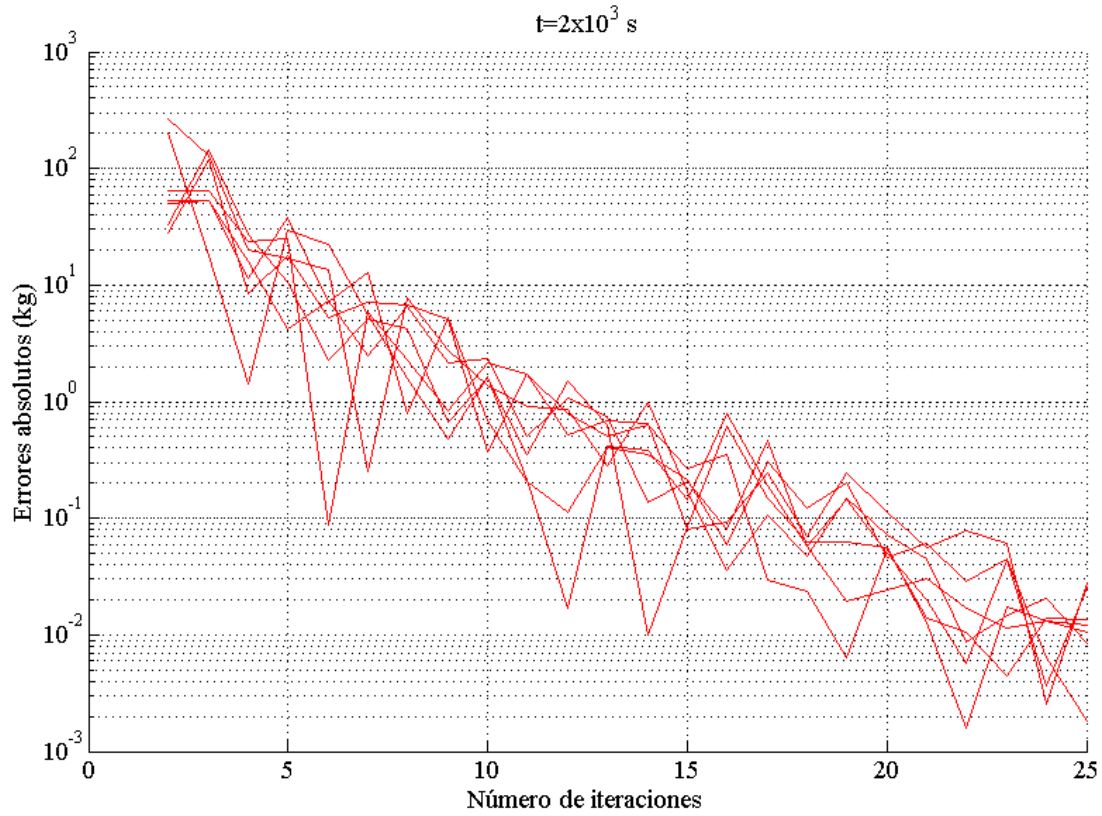


Figura 4.6. Envoltente de errores en la desviación típica para un tiempo de $2 \times 10^3 \text{ s}$. Distribución uniforme C_{D_0}

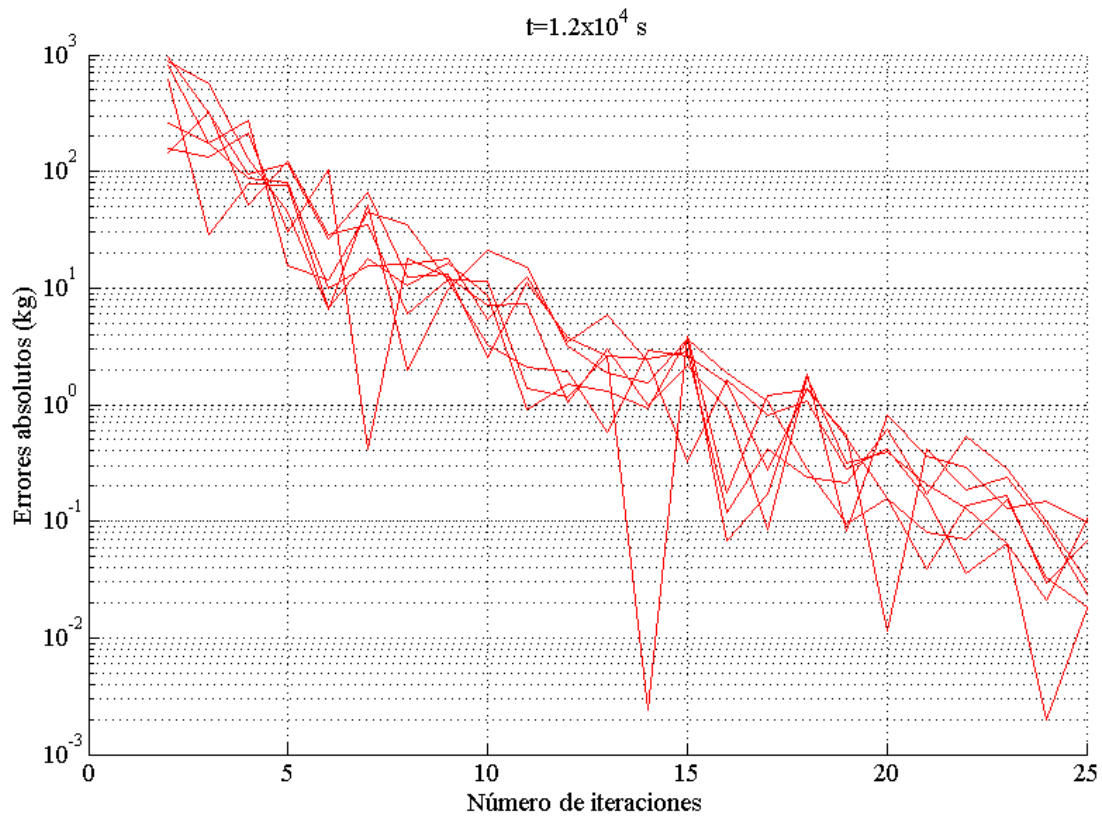


Figura 4.7. Envoltente de errores en la desviación típica para un tiempo de $1.2 \times 10^4 \text{ s}$.
Distribución uniforme C_{D_0}

Tabla 4.2: Valores de la desviación típica para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}

Tiempo, s	$\sigma[m(t;m_0)]$, kg	Nº iteraciones	Error, kg
2×10^3	156.8	16	0.282
4×10^3	307.7	16	0.063
6×10^3	455.0	18	0.299
8×10^3	597.2	18	0.469
1×10^4	739.4	19	0.013
1.2×10^4	876.2	20	0.031

En la figura 4.8 se representa la evolución de la desviación típica con respecto al tiempo. En esta gráfica puede observarse que la desviación típica y por lo tanto la incertidumbre aumentan con el tiempo, esto es debido a que la variación en el consumo de combustible depende de las variaciones en la resistencia, que depende de C_{D_0} . Por lo tanto la incertidumbre que C_{D_0} genera en el combustible es la causante de que la desviación típica de la masa aumente con el tiempo.

Por último, en la figura 4.9 se representa el cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido con respecto al tiempo. En este caso tanto la desviación típica como el combustible consumido son crecientes con el tiempo lo que hace que no sea inmediato intuir la tendencia que seguirá el cociente. Observando la figura se puede que la tendencia es ligeramente creciente.

4.3 Funciones de densidad.

En este apartado se representan las funciones de densidad de la masa para varios instantes de tiempo, la figura 4.10 permite estudiar la evolución de las funciones de densidad de la masa a lo largo del crucero. Puede comprobarse que como se comentó anteriormente en los instantes iniciales la incertidumbre de la masa es pequeña y por tanto el ancho de la función de densidad es pequeño. Al avanzar en el tiempo además de producirse la anteriormente citada reducción en la masa debido al consumo de combustible, también se produce un aumento en la incertidumbre de esta debida al efecto de C_{D_0} . Esto se traduce en un aumento del ancho de las funciones de densidad y una disminución en la densidad de probabilidad. Por último, cabe destacar que la forma de la función es aproximadamente uniforme para todos los instantes de tiempo. Esto nos indica que con una función de entrada uniforme en C_{D_0} obtenemos una función uniforme de salida para la masa.

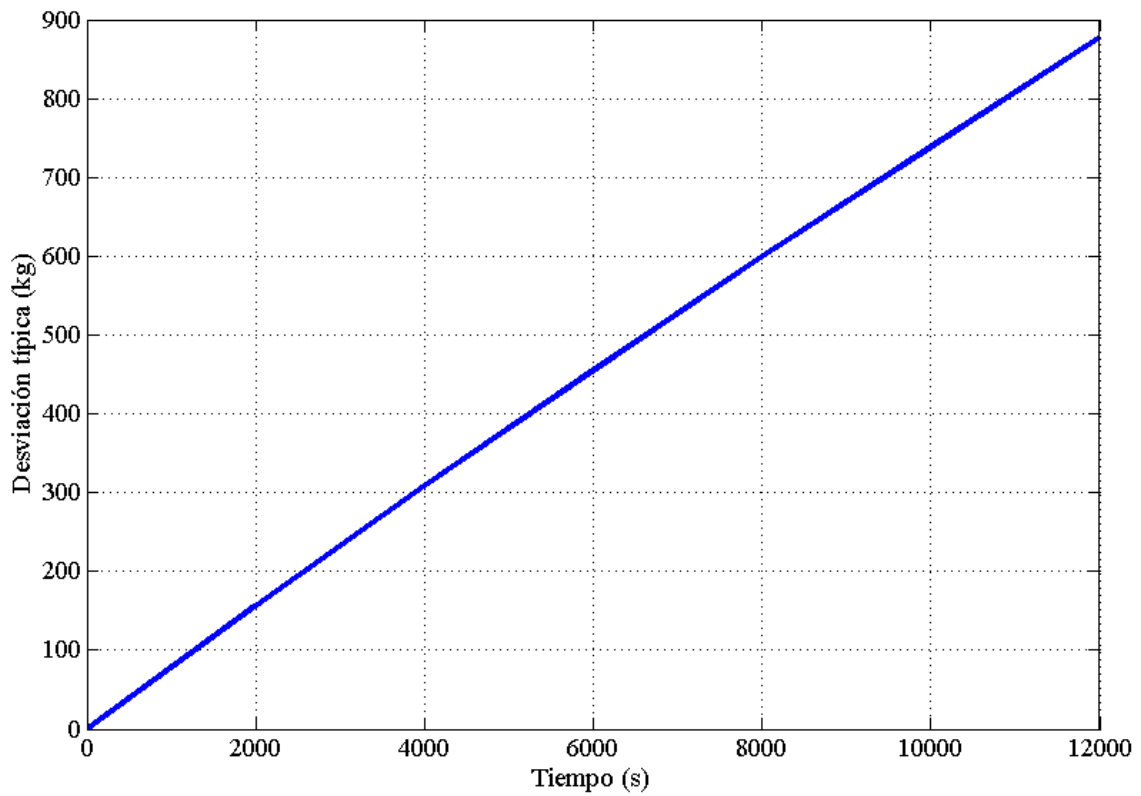


Figura 4.8: Desviación típica de la masa con el tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}

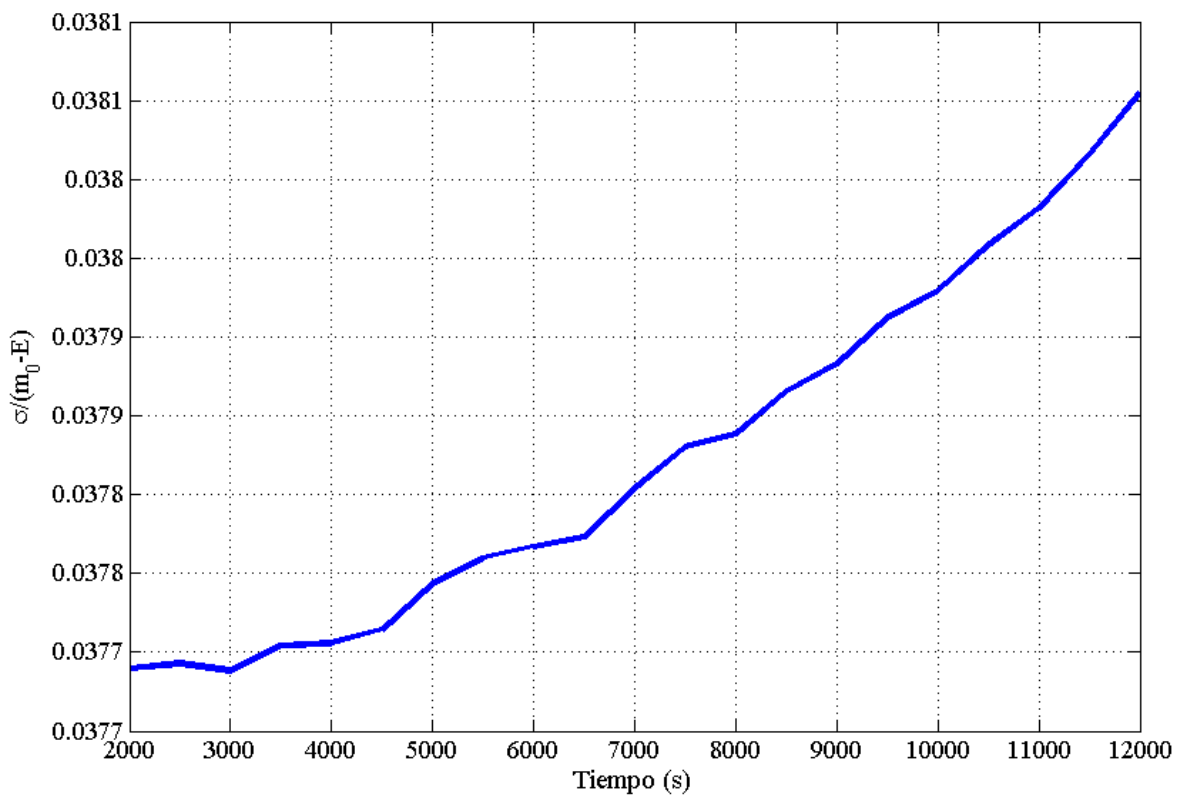


Figura 4.9: Cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido. Distribución uniforme C_{D_0}

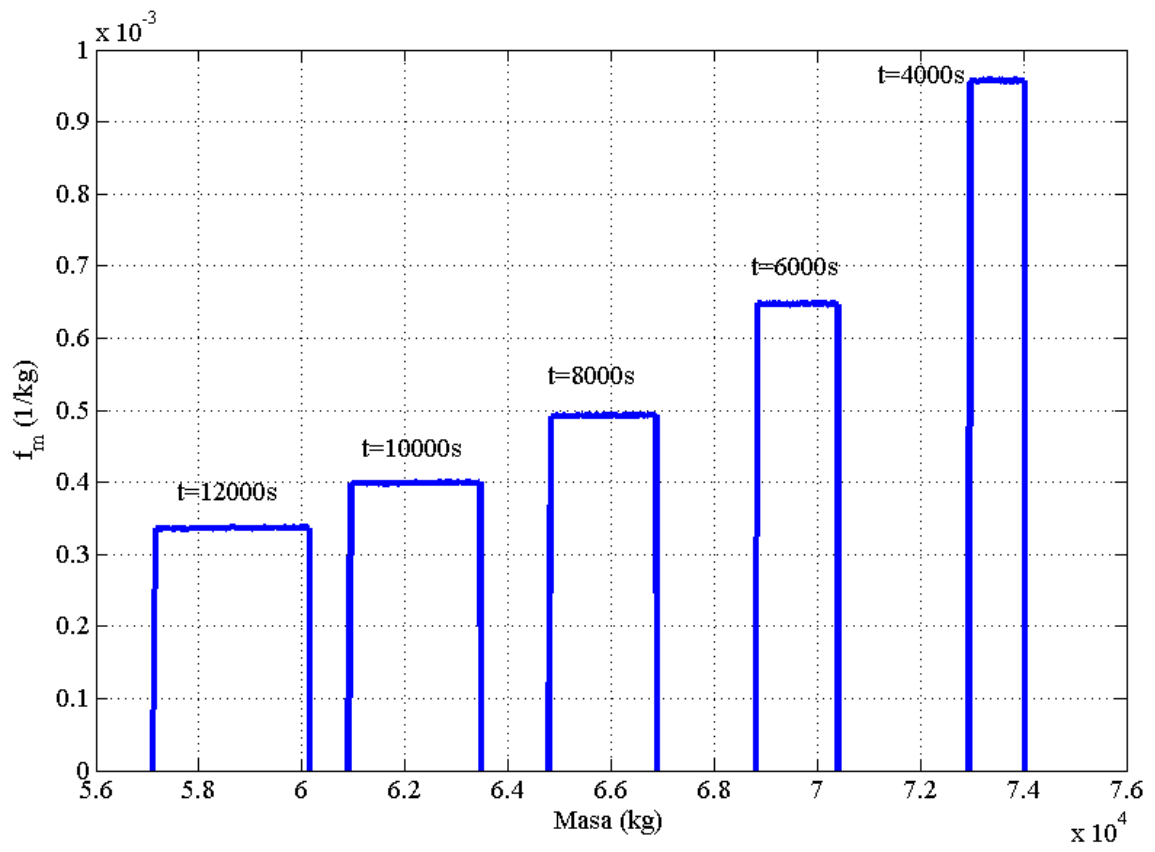


Figura 4.10: Evolución de la función de densidad con el tiempo. Distribución uniforme C_{D_0}

5 INCERTIDUMBRE EN m_0 Y C_{D_0}

En este capítulo se analiza el caso en el que tanto m_0 como C_{D_0} presentan incertidumbre. Para poder ver el comportamiento que ambas variables provocan al actuar de manera conjunta y poder asociar los diferentes comportamientos observados a una u otra variable. Se calcularán la desviación típica, la esperanza y la probabilidad para los mismos instantes de tiempo que en los casos monovariantes y se representarán las funciones de densidad y su evolución con el tiempo. Se compararán los resultados obtenidos con los de los casos monovariantes.

Todas las variables conservan los valores de los apartados anteriores, además, se han elegido distribuciones de tipo uniforme tanto para m_0 como para C_{D_0} . En el caso de m_0 se ha usado la distribución usada en el capítulo 4, tomada del artículo y en el caso de C_{D_0} se ha usado la misma que en la sección anterior. Las representaciones de estas funciones pueden observarse en las figuras 3.1 y 4.1, respectivamente.

5.1 Esperanza.

En este apartado se calcula el valor esperado de la masa de la aeronave para diferentes instantes de tiempo y se compara con los obtenidos en los casos monovariantes. En primer lugar se muestra la envolvente de errores para un instante de tiempo $t=2000s$, observar figura 5.1. La envolvente de errores para el resto de instantes es similar y no existe variación con el tiempo del número de iteraciones para conseguir la precisión de un kilogramo. Este aspecto era de intuir ya que observando los casos monovariantes se puede ver cómo el número de iteraciones necesarias en el caso de m_0 era bastante mayor que en el caso de C_{D_0} . Por lo tanto, los errores asociados a m_0 son los que afectan principalmente al número de iteraciones necesarias. En caso de que aumente el ancho elegido para C_{D_0} esta tendencia podría cambiar.

En la tabla 5.1 se muestran los resultados obtenidos para los diferentes instantes de tiempo. El número de iteraciones elegido ha sido de 25. La primera columna indica el instante de tiempo para el que se han calculado, la segunda el valor que se obtiene, la tercera el error del método, obtenido comparando el valor de la última iteración con el de la iteración anterior y la cuarta la probabilidad de obtener un error mayor de un kilogramo para ese número de iteraciones. Puede comprobarse que en todos los casos el error cometido es menor de un kilogramo y la probabilidad inferior a un 4% y decreciente con el tiempo.

En la figura 5.2, se representa en azul la evolución de la esperanza con el tiempo para el caso multivariante, como era de esperar el valor esperado de la masa decrece con el tiempo debido al consumo de combustible. En esta misma figura se representa la evolución de la esperanza para los casos monovariantes, como se puede observar los resultados en los tres casos son muy similares siendo las diferencias en todo instante de tiempo inferiores a 10 kg. Con esto podemos concluir que la esperanza no varía muy significativamente debido al efecto de m_0 y C_{D_0} .

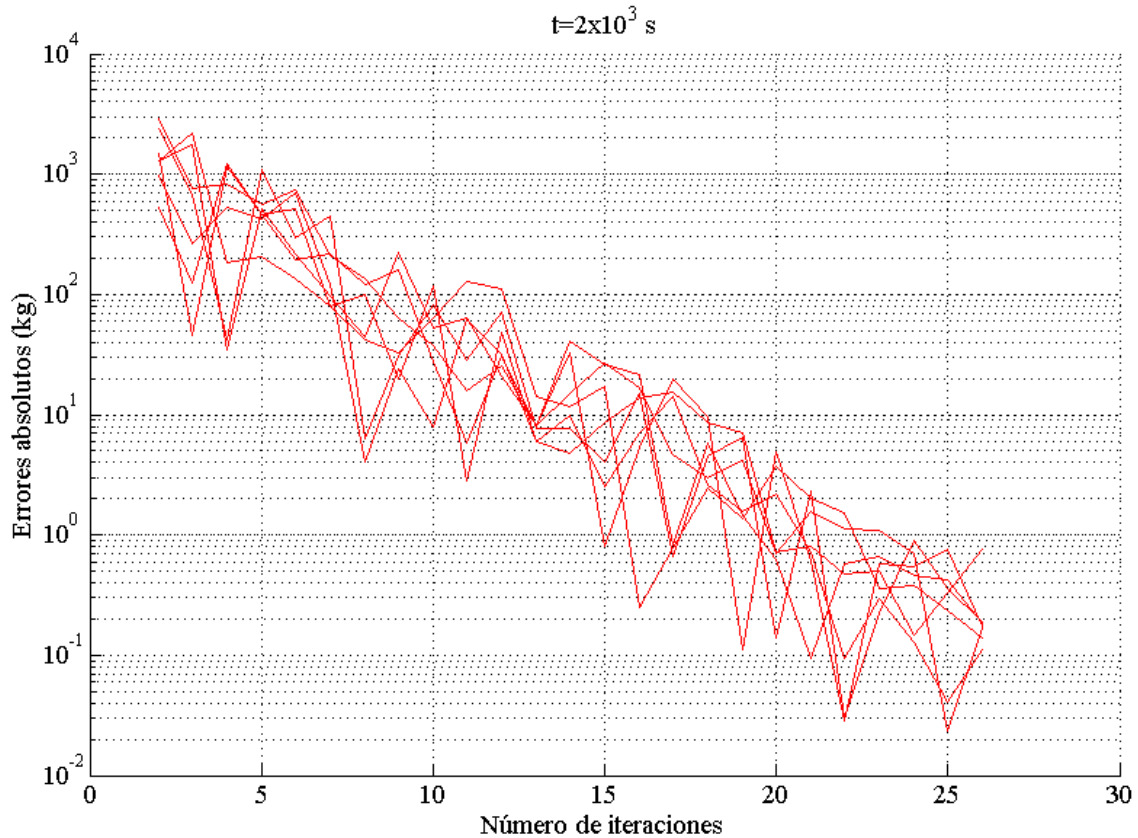


Figura 5.1. Envolvente de errores en la esperanza para un tiempo de 2×10^3 segundos.
Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}

Tabla 5.1: Valores de la esperanza para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}

Tiempo, s	$E[m(t; m_0)]$, kg	Error, kg	Probabilidad, %
2×10^3	77486.0	0.19	3.80
4×10^3	73476.6	0.46	3.28
6×10^3	69595.4	0.24	2.90
8×10^3	65831.6	0.62	2.62
1×10^4	62174.2	0.19	2.44
1.2×10^4	58616.6	0.45	2.35

En la figura 5.3 se representa la probabilidad de cometer un error mayor de un kilogramo con respecto al número de iteraciones, puede observarse que la probabilidad tiende al 100% para un número pequeño de iteraciones, que corresponde a tamaños pequeños de la muestra, y disminuye al aumentar el tamaño de la muestra. Además se puede comprobar, observar figura 5.4, que para un número de iteraciones fijo la probabilidad disminuye con el tiempo, aunque esta disminución no es muy acusada.

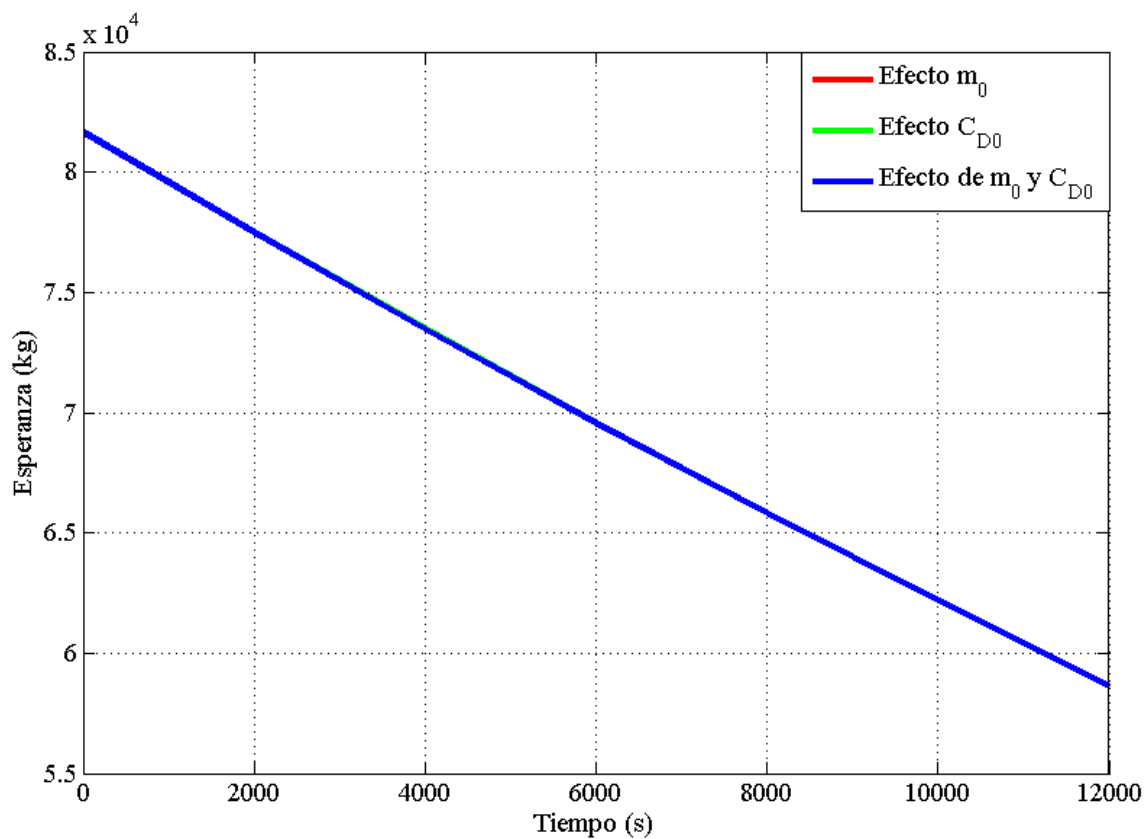


Figura 5.2: Comparación del valor esperado de la masa con el tiempo. Distribución uniforme m_0 y C_{D0}

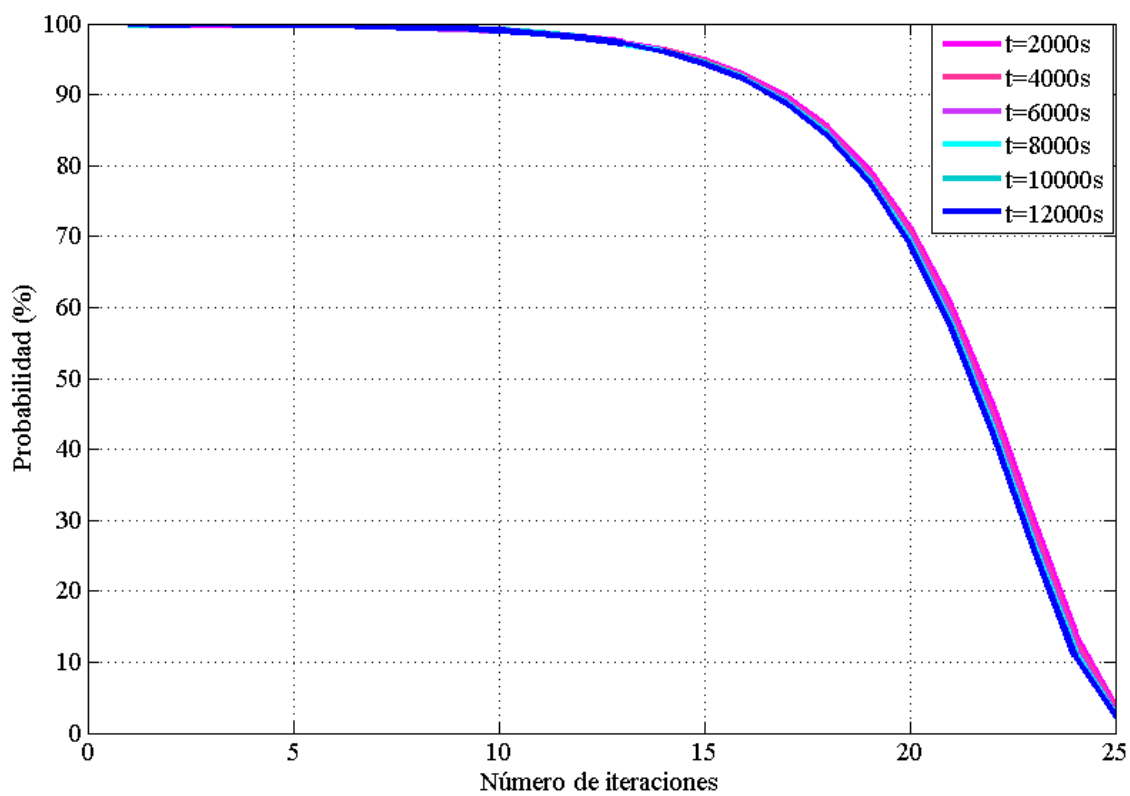


Figura 5.3: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0 y C_{D0}

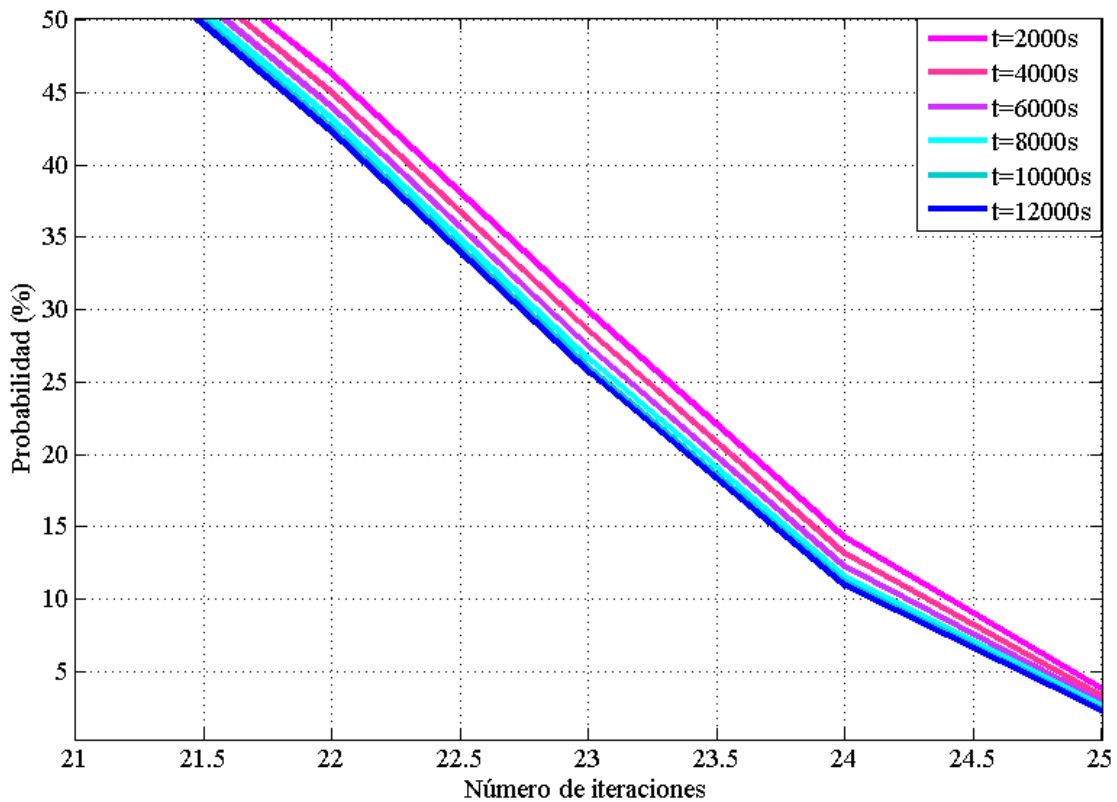


Figura 5.4: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo (ampliada).
Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}

Comparando con los casos monovariantes la evolución de la probabilidad con el tiempo, en la figura 5.5 se puede observar que la tendencia en el caso de m_0 es decreciente con el tiempo, en el caso de C_{D_0} es creciente con el tiempo y en el caso multivariable es decreciente, debido a que el efecto de m_0 es dominante, pero con un pendiente menor debido al efecto de C_{D_0} . La figura anterior se ha representado para un número de iteraciones igual a 25, este es el motivo por el cual las probabilidades asociadas a C_{D_0} son tan pequeñas. En las figuras 5.6 y 5.7 se compara la evolución de la probabilidad con respecto al número de iteraciones para las simulaciones monovariantes y la multivariable. En la figura 5.6 se realiza la comparación para un tiempo de 6000s y en la figura 5.7 para un tiempo de 12000s. Puede observarse que en todos los casos se comienza con una probabilidad cercana al 100% para un número de iteraciones pequeñas, esta probabilidad se reduce al aumentar el número de iteraciones ya que aumenta el tamaño de la muestra. Es interesante notar que para todos los tiempos la probabilidad de cometer un error es mayor en el caso multivariable que en los monovariantes. Cabe destacar, que en los casos considerados la probabilidad del caso multivariable está muy cercana a la del caso monovariante de m_0 , esto es debido a que m_0 es dominante ya que el ancho elegido para C_{D_0} es pequeño. En caso de aumentar este ancho la probabilidad del caso multivariable aumentaría para todo instante de tiempo y además sufriría variaciones más significativas con el tiempo, debido al efecto que C_{D_0} causa en la incertidumbre de la masa al aumentar el tiempo. En las figuras 5.6 y 5.7 ya puede comenzar a observarse este efecto, al ver como al aumentar el tiempo de 6000s a 12000s la línea azul que representa la probabilidad en el caso multivariable se separa más de la roja que representa la probabilidad del caso monovariante de m_0 .

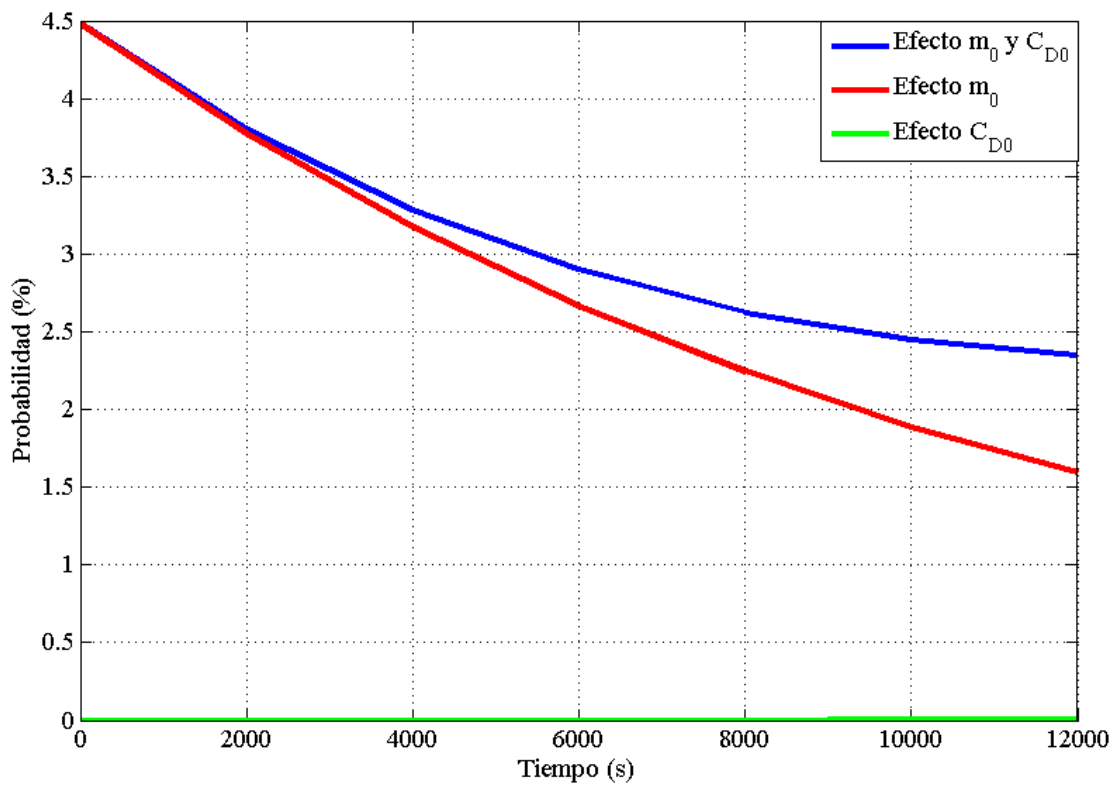


Figura 5.5: Comparación de la evolución de la probabilidad con el tiempo.
Distribución uniforme m_0 y C_{D0}

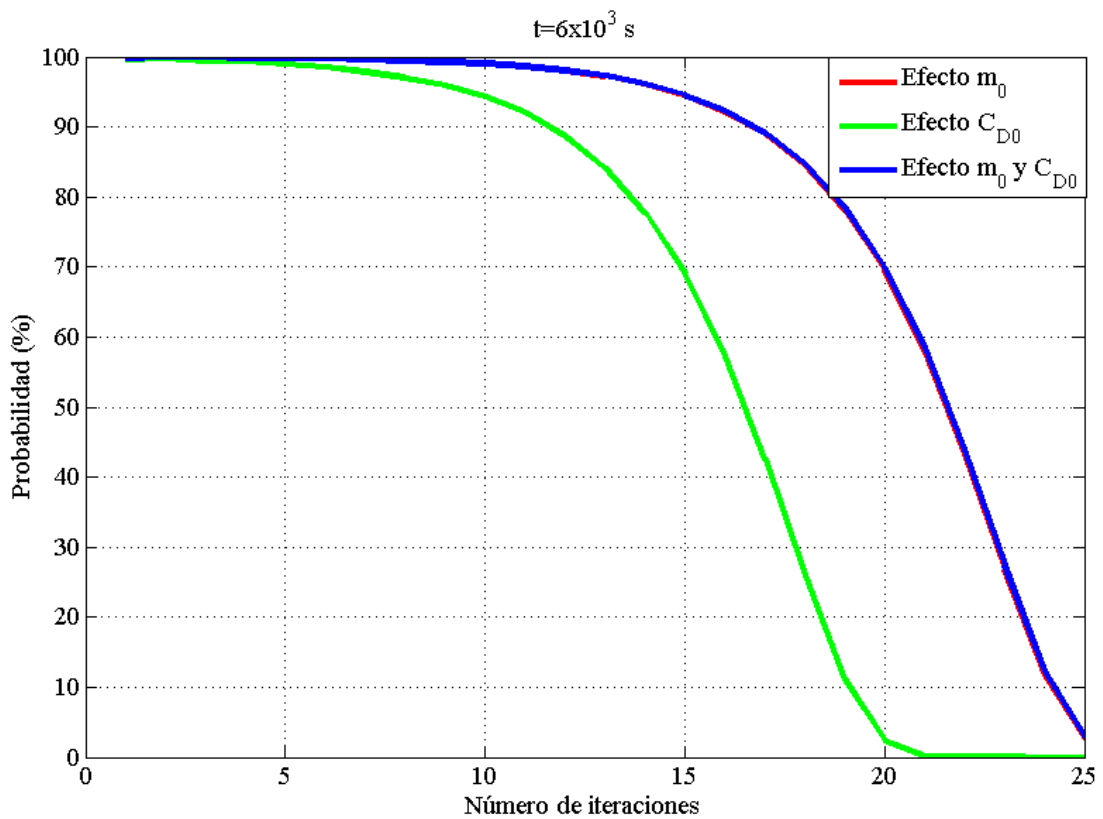


Figura 5.6: Comparación de la evolución de la probabilidad con el número de iteraciones. Para $t=6000$ s.
Distribución uniforme m_0 y C_{D0}

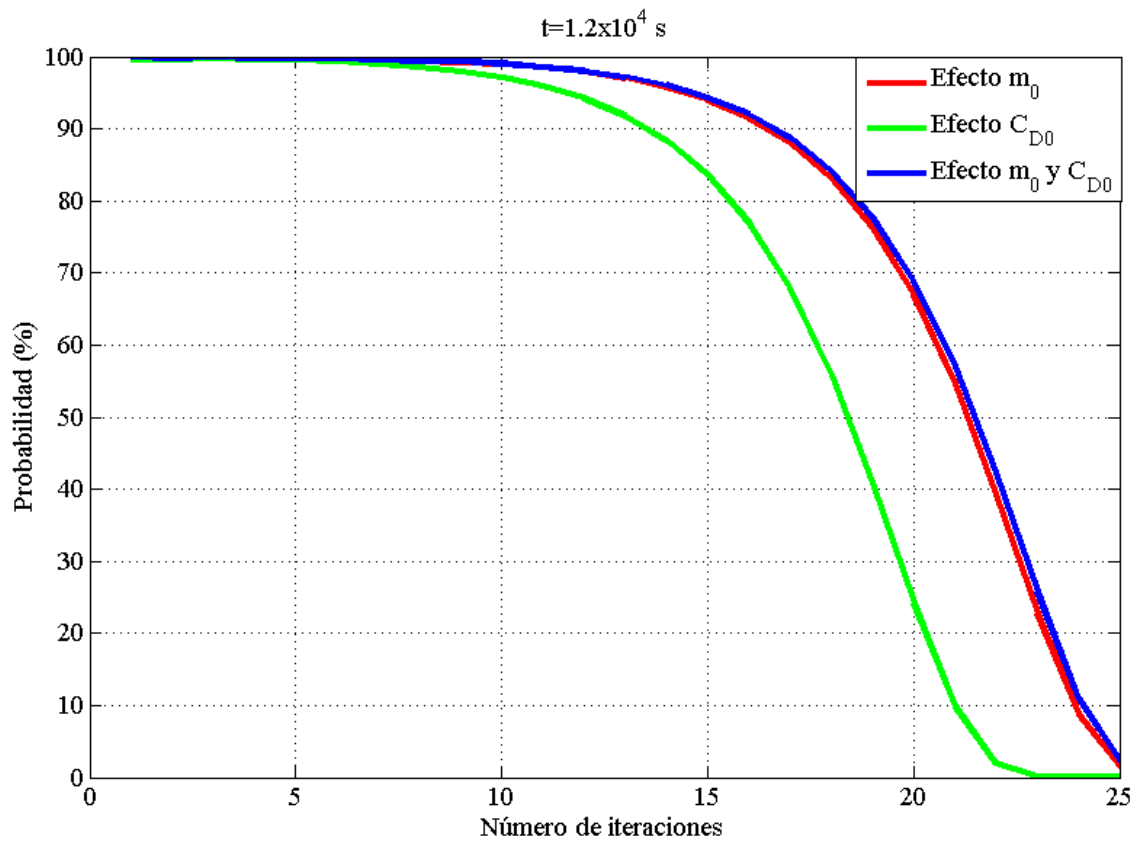


Figura 5.7: Comparación de la evolución de la probabilidad con el número de iteraciones. Para $t=12000$ s.
Distribución uniforme m_0 y C_{D0}

5.2 Desviación típica.

En este apartado se calcula la desviación típica de la masa de la aeronave para diferentes instantes de tiempo. En primer lugar se muestra la envolvente de errores para un instante de tiempo $t=2000$ s, observar figura 5.8. La envolvente de errores para el resto de instantes es similar y no existe variación con el tiempo del número de iteraciones para conseguir la precisión de un kilogramo. Al igual que en el caso de la esperanza esto se podía intuir ya que observando los casos monovariantes se puede ver como el número de iteraciones necesarias en el caso de m_0 era bastante mayor que en el caso de C_{D0} , por lo tanto los errores producidos por m_0 son los que afectan principalmente al número de iteraciones necesarias, tal y como sucedía en el caso de la esperanza.

En la tabla 5.2 se muestran los resultados obtenidos para los diferentes instantes de tiempo. De nuevo el número de iteraciones elegido ha sido de 25. La primera columna indica el instante de tiempo para el que se han calculado, la segunda el valor que se obtiene y la tercera el error del método, obtenido comparando el valor de la última iteración con el de la iteración anterior. Puede comprobarse que en todos los casos el error cometido es menor de un kilogramo, lo que indica una precisión alta en los resultados para ese número de iteraciones.

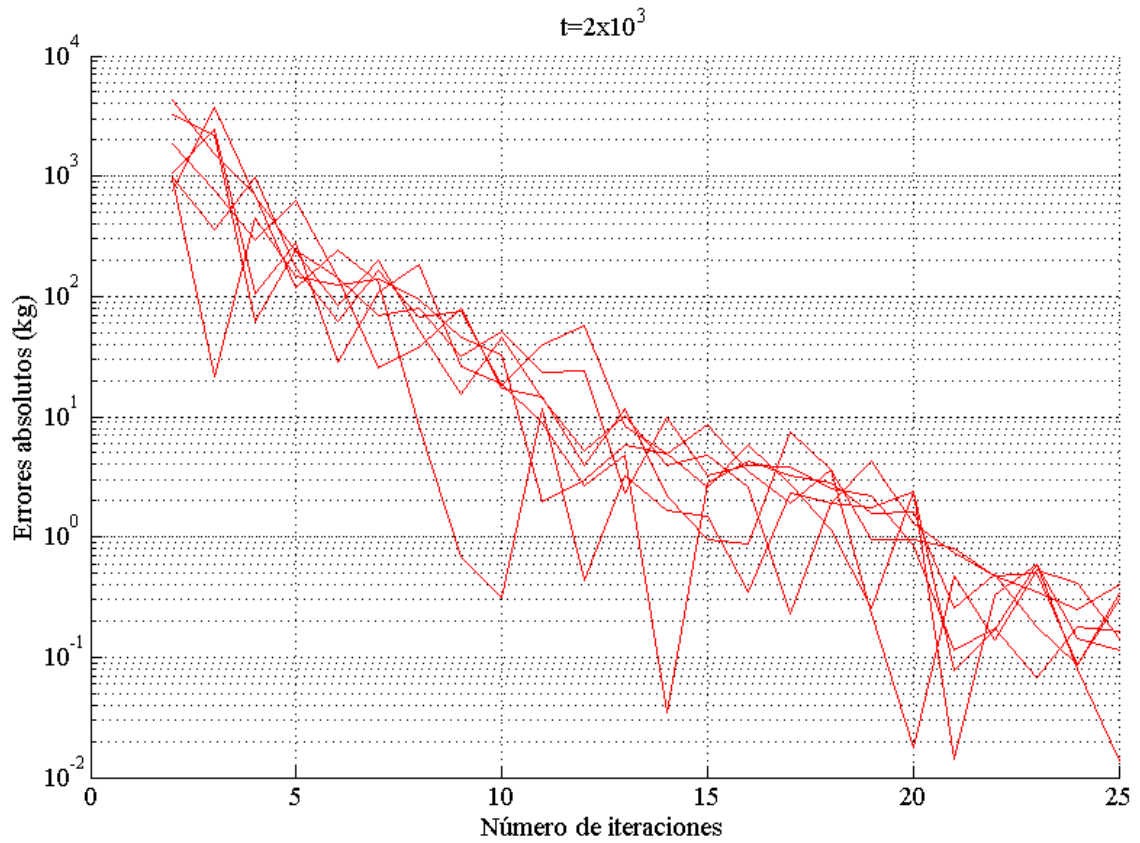


Figura 5.8. Envoltorio de errores en la desviación típica para un tiempo de 2×10^3 segundos.
Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}

Tabla 5.2: Valores de la desviación típica para diferentes instantes de tiempo.
Distribución uniforme m_0 y C_{D_0}

Tiempo, s	$\sigma[m(t; m_0)], \text{kg}$	Error, kg
2×10^3	2792.3	0.02
4×10^3	2714.1	0.13
6×10^3	2652.9	0.25
8×10^3	2606.6	0.08
1×10^4	2574.8	0.22
1.2×10^4	2556.8	0.02

En la figura 5.9 se representa la desviación típica para los tres casos. El caso monovariante de m_0 se representa en rojo, el caso monovariante de C_{D0} en verde y el caso multivariante de m_0 y C_{D0} en azul. Puede observarse que la tendencia es decreciente en el caso monovariante de m_0 y creciente el caso monovariante de C_{D0} . En el caso multivariante, debido al efecto dominante de m_0 , se obtiene una tendencia decreciente pero puede observarse como al aumentar el tiempo esta pendiente disminuye debido a que el efecto de C_{D0} . En apartados anteriores se razonó como el efecto de C_{D0} aumenta con el tiempo debido a su influencia en la resistencia y a la de esta en el consumo de combustible. Cabe comentar que en caso de aumentar el ancho de la distribución de C_{D0} o aumentar el tiempo de vuelo, los efectos causados por la distribución elegida para C_{D0} pueden dominar a los causados por la distribución de m_0 . Pudiéndose llegar a obtener una desviación típica, en el caso multivariante, creciente con el tiempo.

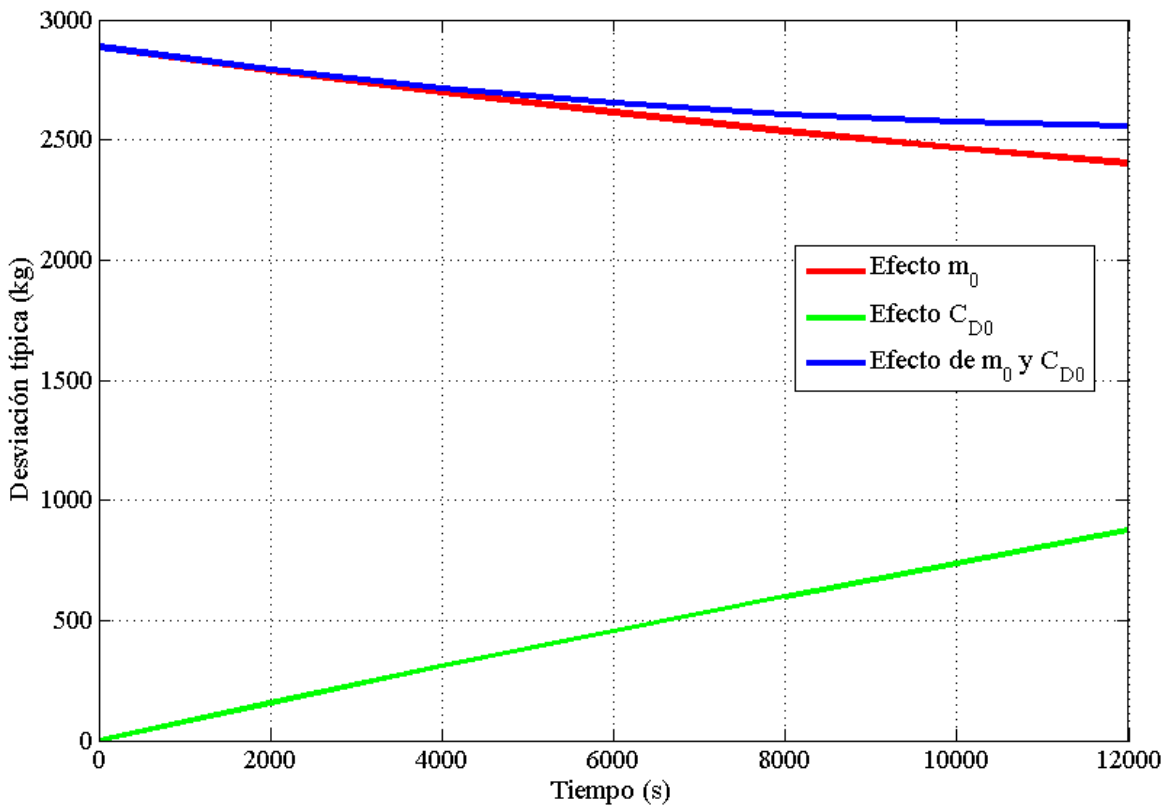


Figura 5.9: Comparación evolución de la desviación típica con el tiempo.

Distribución uniforme m_0 y C_{D0}

A continuación en la figura 5.10 se representa el cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido con respecto al tiempo. Puede observarse que la tendencia dominante es la asociada a m_0 , obteniéndose una tendencia decreciente para todos los instantes de tiempo. Además puede comprobarse que el valor del cociente es ligeramente superior al asociado al caso monovariante de m_0 .

Hasta el momento se han analizado los resultados obtenidos para unos anchos de las funciones de entrada fijos, $\delta_m = 5000 \text{ kg}$ y $\delta_{C_{D0}} = 1.5 \times 10^{-3}$. A continuación nos centramos en estudiar como varía la desviación típica al variar los anchos elegidos para las distribuciones. En la figura 5.11 se representan las curvas de nivel de la desviación típica para un tiempo de $1.2 \times 10^4 \text{ s}$. Como era de esperar en estas curvas podemos observar que la desviación típica aumenta al aumentar δ_m y $\delta_{C_{D0}}$, también se puede observar que el efecto de $\delta_{C_{D0}}$ es mayor para valores de δ_m pequeños, ya que como se comentó anteriormente para valores de δ_m elevados, el efecto de δ_m se hace dominante debido a que su ancho es mucho mayor que el de $\delta_{C_{D0}}$.

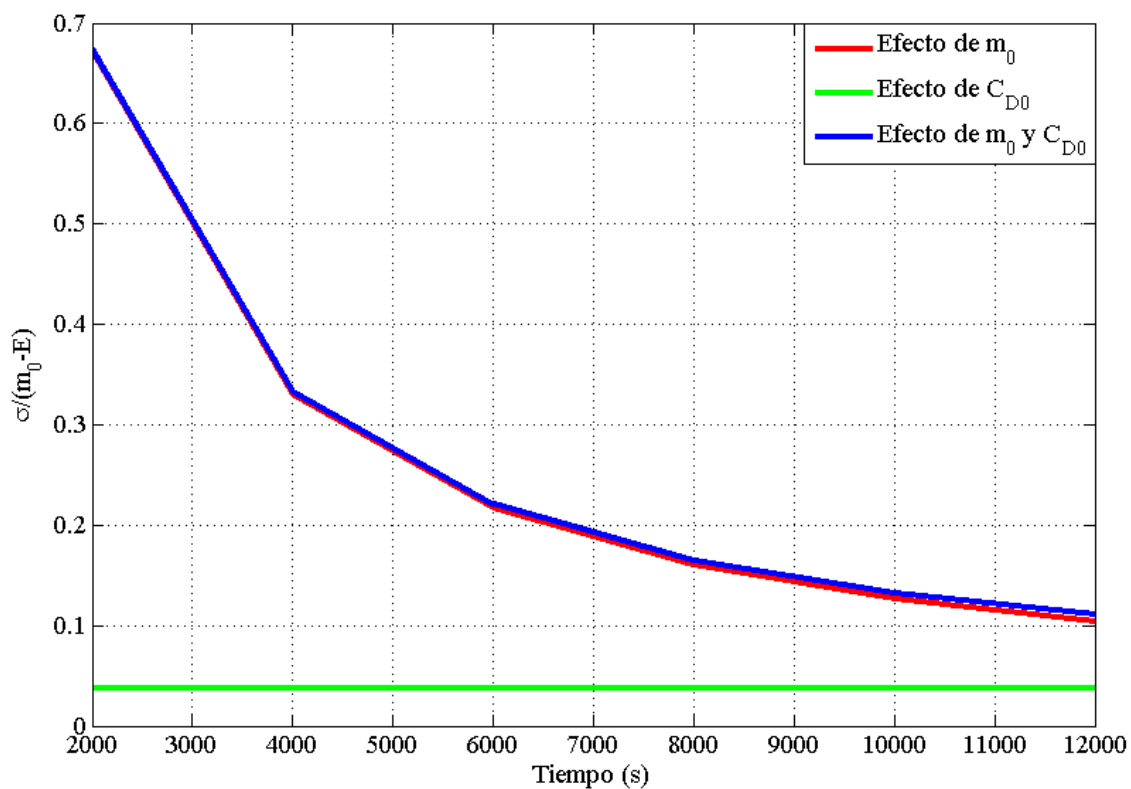


Figura 5.10: Comparación Comparación del cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido. Distribución uniforme m_0 y C_{D0}

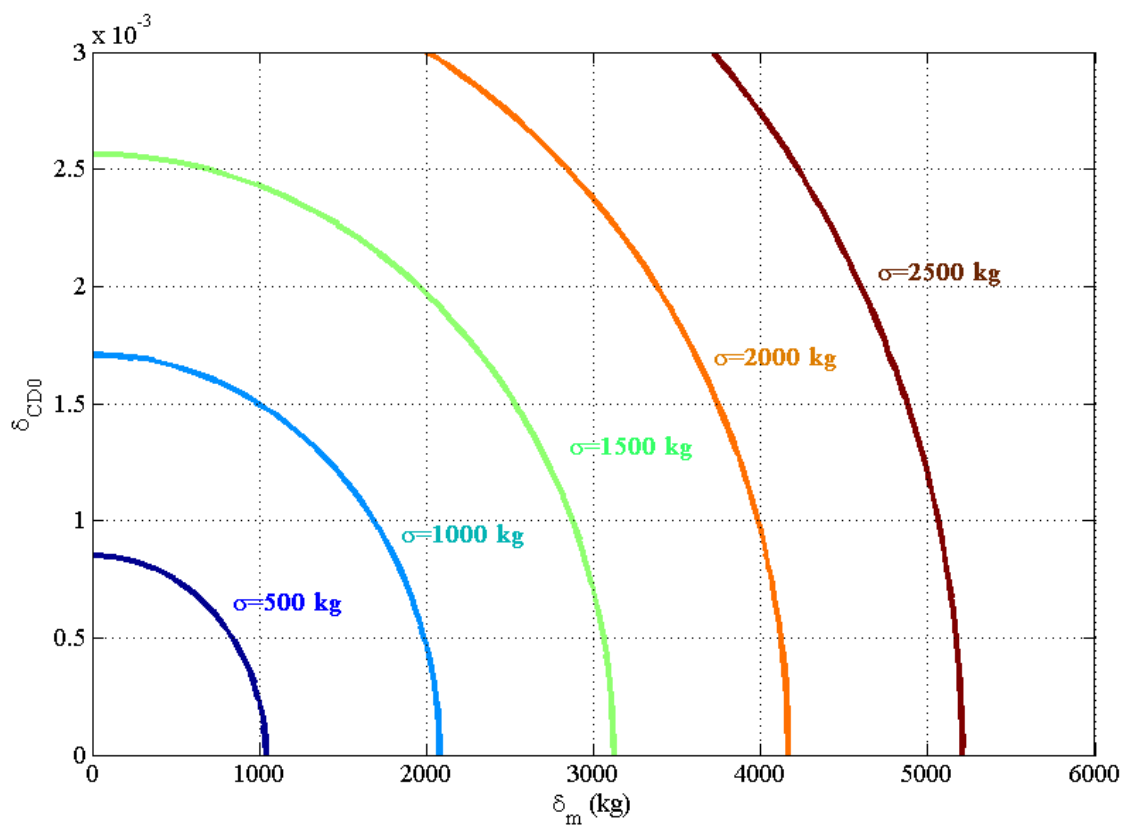


Figura 5.11: Curvas de nivel de la desviación típica para un tiempo $t=12000$ s.

Por último, en la figura 5.12 se representan de nuevo las curvas de nivel de la desviación típica, usando en este caso como eje de abscisas la desviación típica inicial que está asociada al valor de δ_m elegido. Esta representación es útil ya que nos permite ver cuando la incertidumbre en $t=12000s$ es mayor o menor que la inicial, dependiendo del valor de $\delta_{C_{D0}}$ elegido, la línea negra de la figura es la que delimita estas dos zonas.

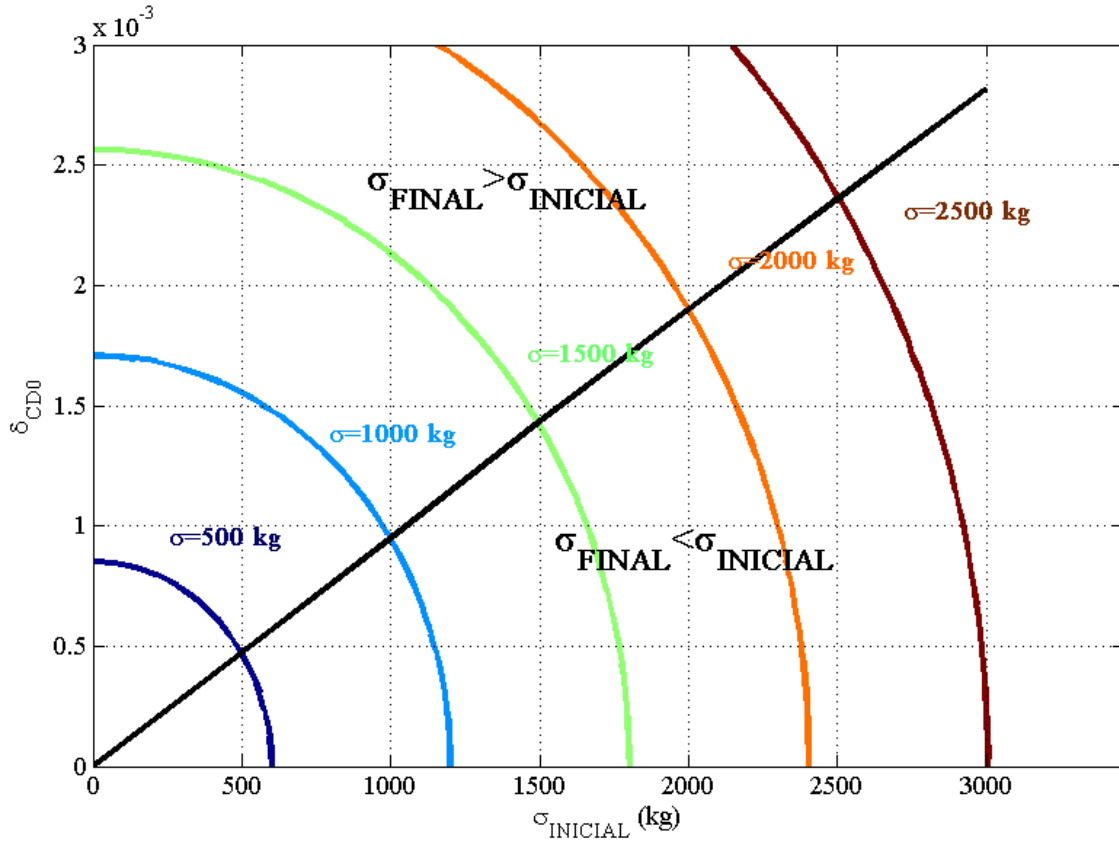


Figura 5.12: Curvas de nivel que permite comparar la desviación típica inicial y final. Para un tiempo $t=12000$ s.

5.3 Funciones de densidad.

En este apartado se representan las funciones de densidad de la masa para varios instantes de tiempo y se comparan con los casos monovariantes. En la figura 5.13 se representan las funciones de densidad para los tres casos en varios instantes de tiempo. En rojo se representa la función obtenida en el caso de que la variable modelada estadísticamente sea m_0 , en verde el caso de C_{D0} y en azul el caso multivariable. Es interesante destacar que la función de densidad asociada a C_{D0} para el instante inicial $t=0s$ no se respresenta ya que en este instante el efecto de C_{D0} en la masa es nulo y la función de densidad asociada es un delta de Dirac, lo que implica que en caso de ser representada la escala de la representación perdería sentido. En esta imagen se puede observar con bastante claridad el efecto de C_{D0} sobre la función de densidad. En primer lugar en el instante inicial el efecto de C_{D0} sobre la masa es nula, lo que hace que ambas funciones coincidan. Al aumentar el tiempo aumenta el efecto de C_{D0} ya que su efecto sobre la resistencia modifica el consumo de combustible al aumentar el tiempo, además como se comentó anteriormente el efecto de C_{D0} aumenta la incertidumbre de la masa. Este efecto se ve reflejado en la funciones de densidad ya que puede observarse como en los extremos la función decae con una pendiente menor, al aumentar el tiempo. Se puede observar como la forma en la que las funciones decaen en los extremos es prácticamente lineal. Esto puede entenderse teniendo en cuenta que, cuando existía incertidumbre únicamente en m_0 la función de densidad tenía una forma aproximadamente uniforme, ahora en el caso multivariable cada punto está sujeto además a una incertidumbre en C_{D0} . Siguiendo este razonamiento puede verse la función de densidad resultante como una convolución de las funciones de

densidad individuales. Además puede observarse como la zona de los extremos en la cual la densidad de probabilidad decae tiene la misma amplitud que la función de densidad asociada a C_{D_0} en ese instante de tiempo. Este hecho era de intuir ya que la incertidumbre en C_{D_0} es la responsable de que se produzca este comportamiento en los extremos.

En la figura 5.14 se representan las funciones de densidad asociadas al caso de m_0 , en rojo, y al caso multivariable, en azul. En esta gráfica se puede ver con mayor claridad en efecto asociado a C_{D_0} . Además se puede observar que se pierde la forma uniforme de las funciones al aumentar el tiempo y que en los puntos centrales se mantiene la densidad de probabilidad. Por último, cabe comentar que en el caso considerado el efecto de C_{D_0} es relativamente pequeño debido a que como ya se comentó anteriormente el ancho elegido es pequeño. En caso de aumentar este ancho estos efectos se verían aumentados.

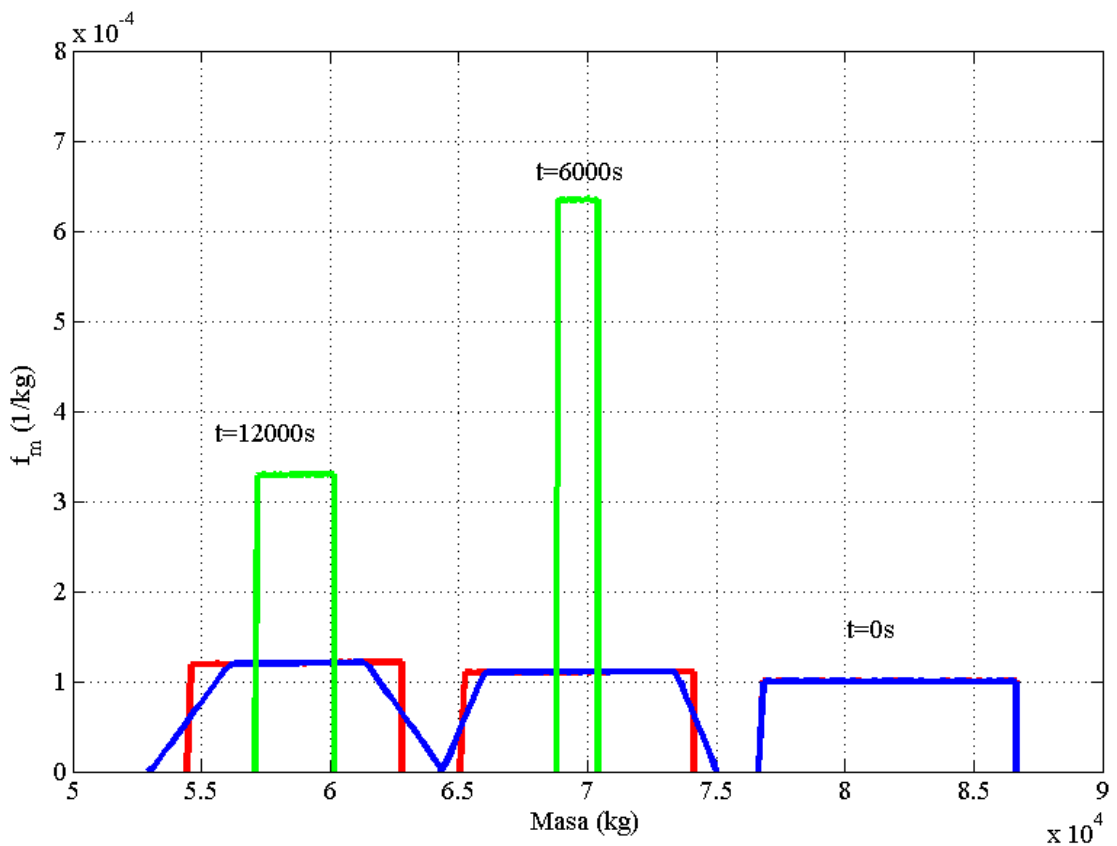


Figura 5.13: Comparación de la evolución de las funciones de densidad para los tres casos. Distribución uniforme m_0 y C_{D_0} .

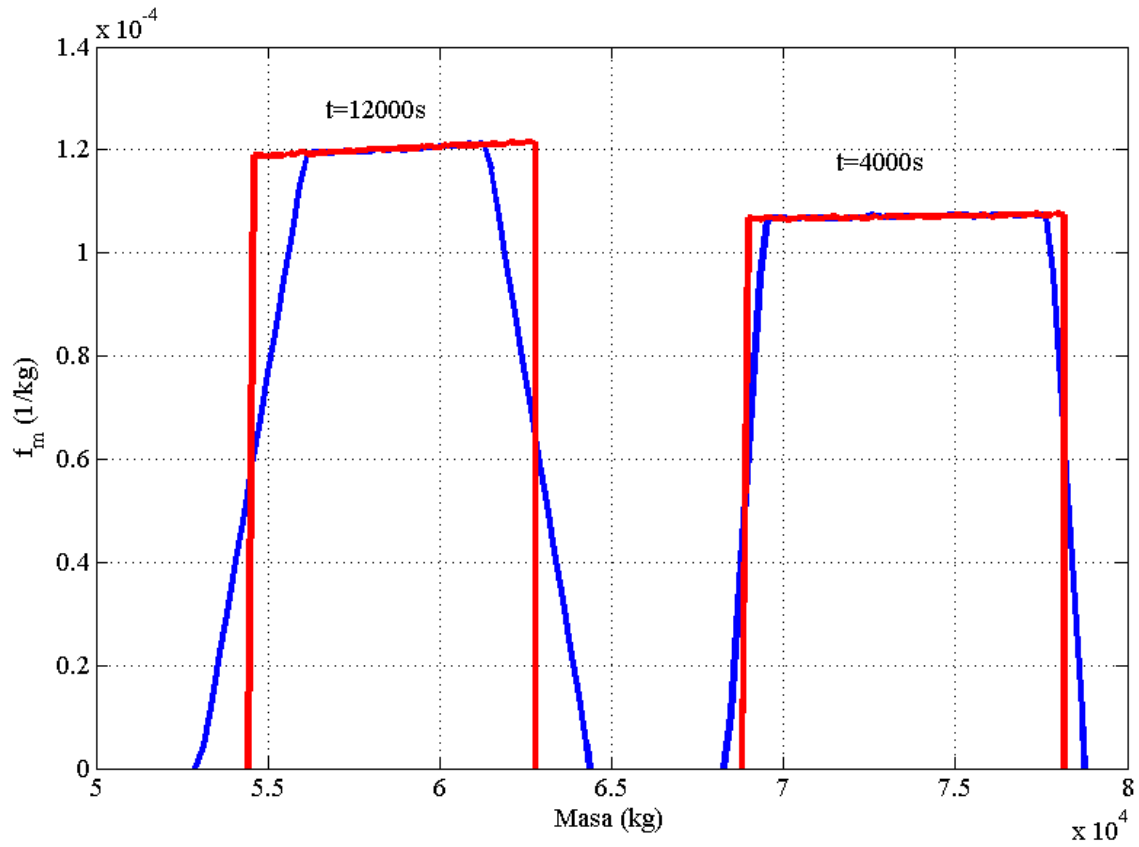


Figura 5.14: Comparación de la evolución de las funciones de densidad para el caso de m_0 y el multivariable

6 INCERTIDUMBRE EN m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c

En este apartado se realiza un análisis multivariable siendo en este caso las variables modeladas estadísticamente m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c . Se calcularán la esperanza, la probabilidad del error y la desviación típica para los mismos instantes de tiempo que en los apartados anteriores. Además, se representará la evolución de la función de densidad con el tiempo y se compararán los resultados obtenidos con los que se obtuvieron en los casos anteriores.

En este caso todas las variables mantienen sus valores nominales salvo m_0 , que sigue una distribución uniforme con un semiancho de valor $\delta_m=5000$ kg (ver figura 3.1), y C_{D_0} , C_{D_2} y c que también siguen distribuciones uniformes centradas en sus valores nominales y con un ancho del $\pm 10\%$ (ver figuras 4.1, 6.1 y 6.2).

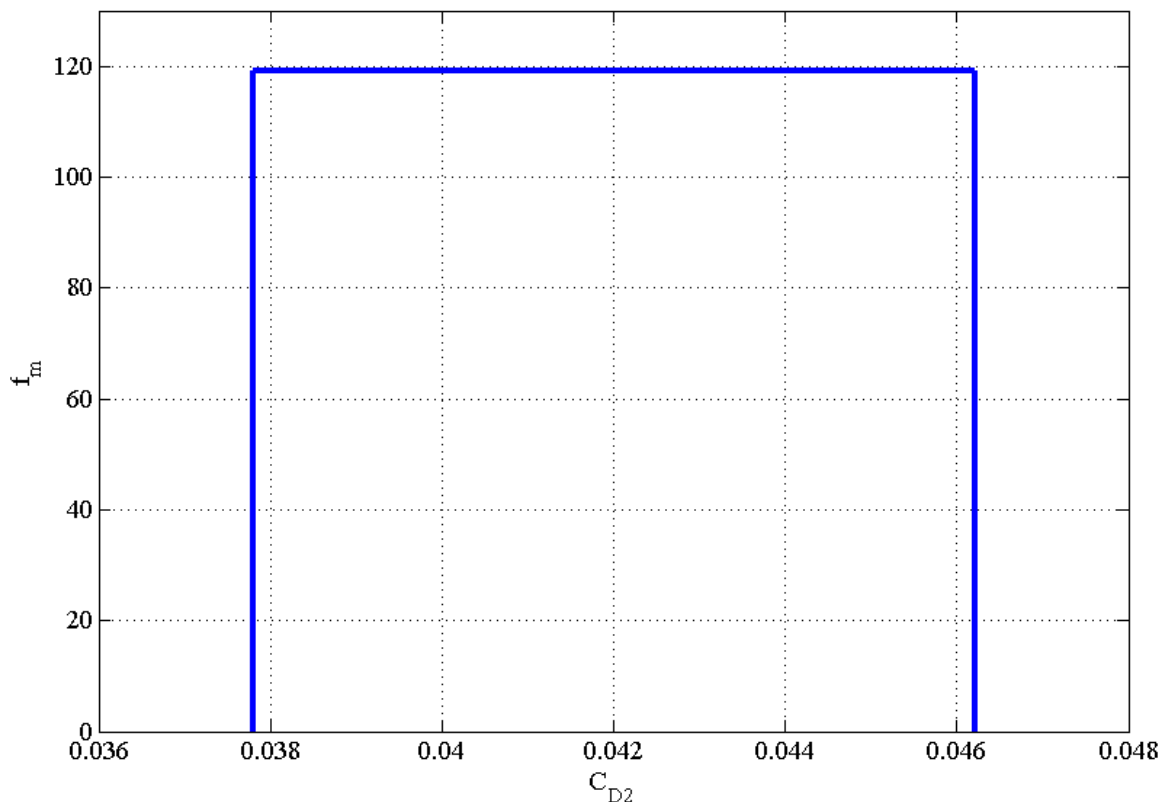
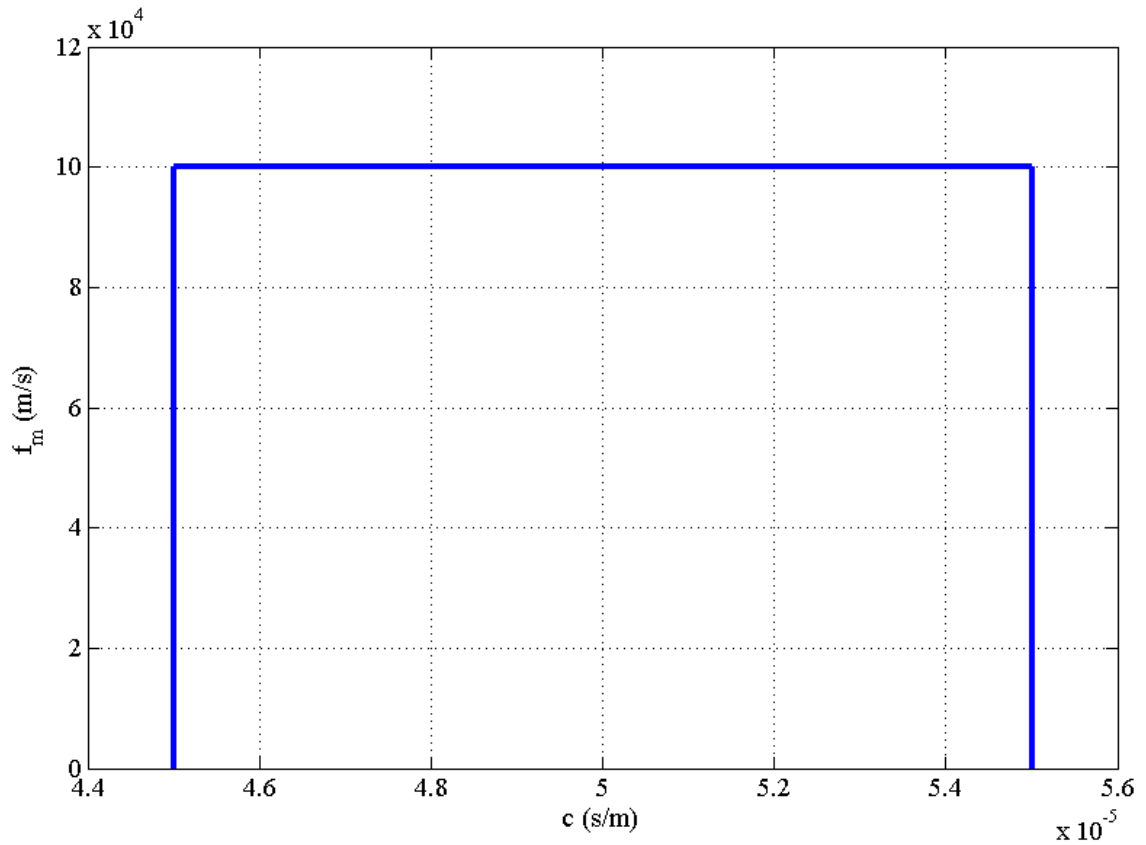
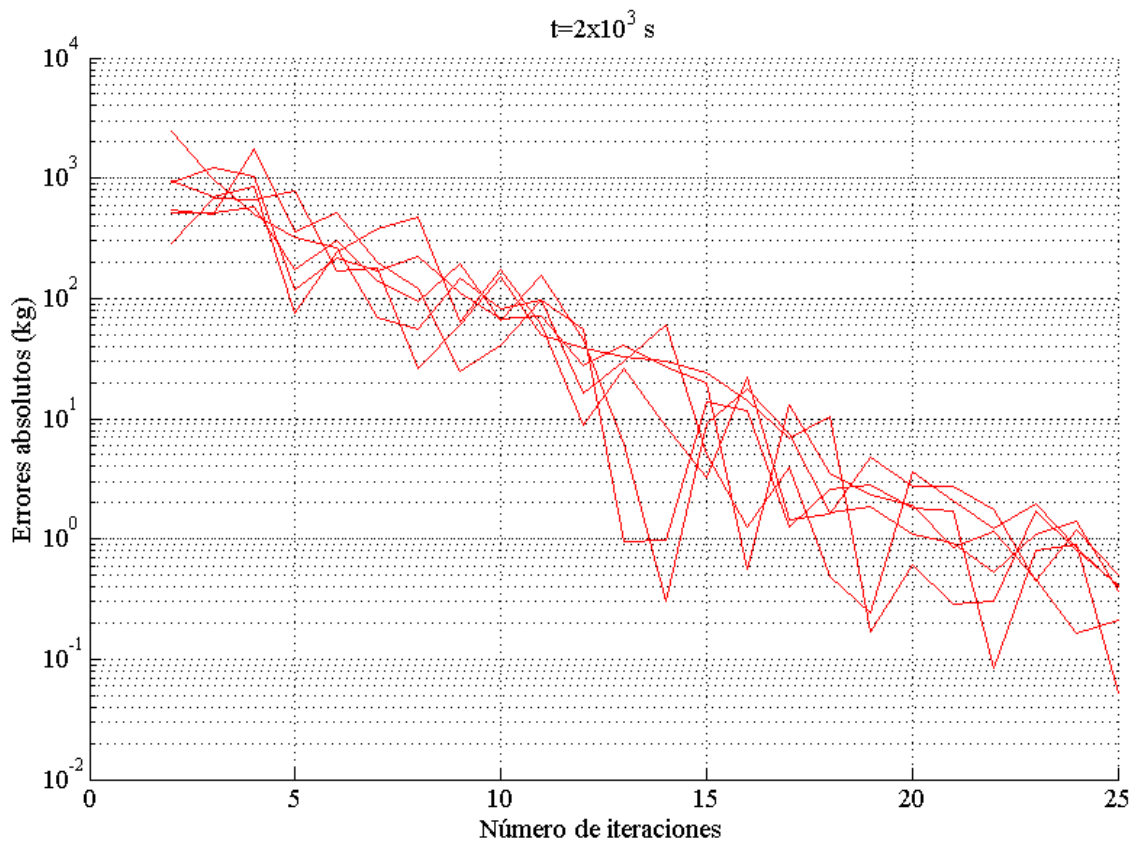


Figura 6.1: Función de densidad distribución uniforme C_{D_2}

6.1 Esperanza

En este apartado se calcula el valor esperado de la masa de la aeronave para diferentes instantes de tiempo. En primer lugar se muestra la envolvente de errores para un instante de tiempo, $t=2000$ s, observar figura 6.3. Las envolventes de errores para el resto de instantes de tiempo son similares y no existen variaciones en el número de iteraciones necesarias para alcanzar una cierta tolerancia. Esta tendencia nos ayuda a intuir que de nuevo la variable dominante será m_0 , ya que los anchos elegidos para las otras tres variables son menores lo que hace que sus efectos en el error sean menores.

Figura 6.2: Función de densidad distribución uniforme c Figura 6.3: Envoltura de errores en la esperanza. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c .

En la tabla 6.1 se muestran los resultados obtenidos para los diferentes instantes de tiempo. El número de iteraciones elegido ha sido de 25. La primera columna indica el instante de tiempo para el que se han calculado, la segunda el valor que se obtiene y la tercera el error del método obtenido comparando el valor de la última iteración con el de la iteración anterior. La cuarta y última columna muestra la probabilidad de obtener un error mayor de un kilogramo. Puede comprobarse que los errores son menores de un kilogramo y que la probabilidad es en todos los casos inferior a un 5%, siendo inicialmente decreciente con t , posteriormente creciente y en todos los instantes de tiempo mayor que en los casos estudiados anteriormente.

Tabla 6.1: Valores de la esperanza para diferentes instantes de tiempo. Distribución uniforme m_0 , C_{D0} , C_{D2} y c

Tiempo, s	$E[m(t;m_0)]$, kg	Error, kg	Probabilidad, %
2×10^3	77486.2	0.11	3.87
4×10^3	73478.0	0.38	3.56
6×10^3	69598.8	0.89	3.47
8×10^3	65835.5	0.10	3.56
1×10^4	62180.0	0.29	3.81
1.2×10^4	58622.7	0.76	4.23

En la figura 6.4 se muestra la evolución del valor esperado de la masa con el tiempo para el caso considerado y se compara con los casos anteriores. Puede observarse que la tendencia es decreciente y los valores muy similares a los obtenidos en los casos anteriores, siendo la diferencia inferior a 10 kg en todos los instantes de tiempo.

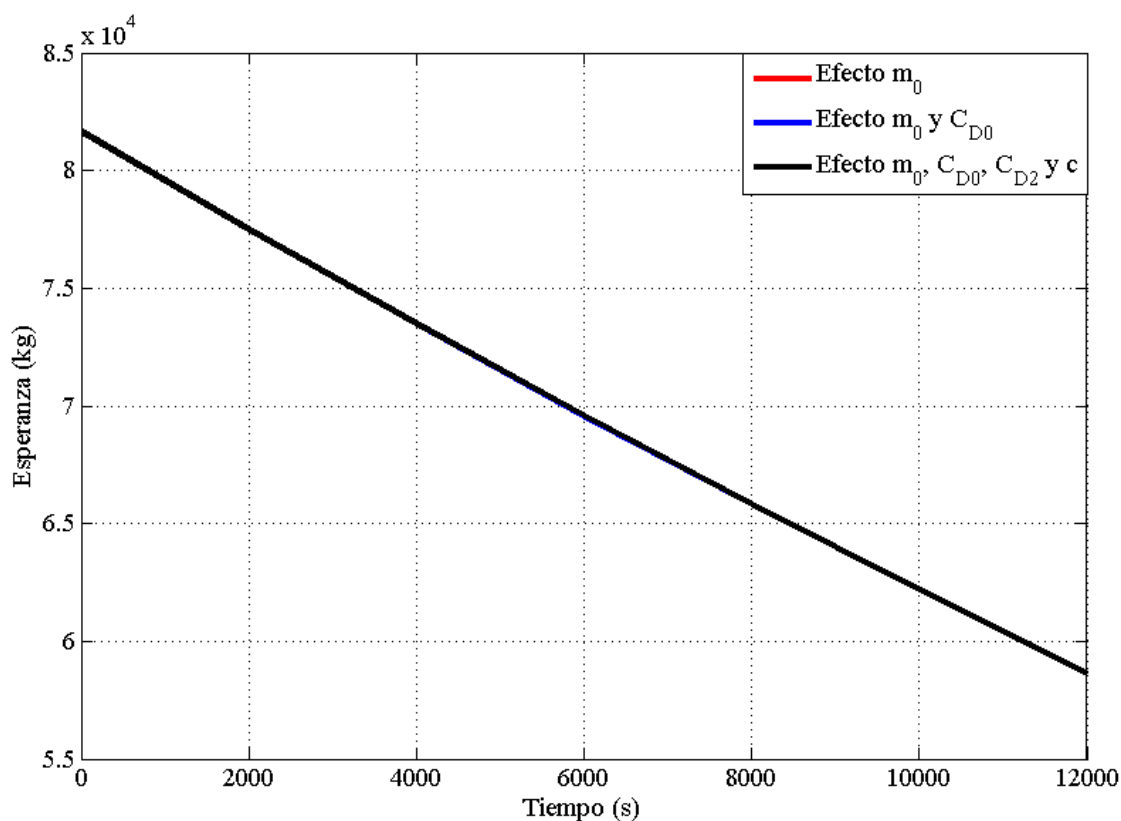


Figura 6.4: Comparación valor esperado de la masa con el tiempo. Distribución uniforme m_0 , C_{D0} , C_{D2} y c

En la figura 6.5 se puede observar como varía la probabilidad de cometer un error mayor de un kilogramo con el número de iteraciones para diferentes instantes de tiempo. Para un número de iteraciones pequeñas, que corresponde a tamaños de la muestra muy pequeñas, la probabilidad es cercana al 100%. Al aumentar el número de iteraciones aumenta el tamaño de la muestra, que se duplica en cada iteración, disminuyendo la probabilidad de cometer errores mayores a un kilogramo. En la figura 6.6 se puede observar como para instantes de tiempo pequeños la probabilidad del error disminuye con el tiempo, mientras que para instantes de tiempo mayores la probabilidad del error aumenta con el tiempo. Con el objetivo de clarificar esto en la figura 6.7 se representa la probabilidad de cometer un error mayor de un kilogramo con respecto al tiempo para un número de 25 iteraciones y se compara con los casos anteriores, comprobándose que la probabilidad del error aumenta al aumentar el número de variables. En esa figura podemos observar como la probabilidad, en el caso considerado que se representa en color negro, disminuye hasta un tiempo de 6000 segundos y posteriormente aumenta. El comportamiento anterior puede explicarse teniendo en cuenta que C_{D_0} , C_{D_2} y c no afectan en el instante inicial a la masa, siendo m_0 la que determina la incertidumbre en la masa inicial de la aeronave. Al aumentar el tiempo los efectos de C_{D_0} , C_{D_2} y c aumentan, C_{D_0} y C_{D_2} afectan a la resistencia de la aeronave lo que afecta al consumo de combustible. La influencia de c también va ligada al consumo pero en este caso afecta de forma más directa a este. Por lo tanto inicialmente, hasta un tiempo de 6000 segundos, la incertidumbre creada por la masa inicial de la aeronave es la dominante. Por un lado esta incertidumbre disminuye con el tiempo debido a la disminución de la masa pero por otro lado, al aumentar el tiempo aumenta la incertidumbre asociada al consumo de combustible, creada por C_{D_0} , C_{D_2} y c . A partir de los 6000 segundos el aumento de incertidumbre creado por C_{D_0} , C_{D_2} y c , es mayor que la disminución de la incertidumbre asociada a la disminución de la masa y por lo tanto a partir de ese instante la incertidumbre aumenta con el tiempo, aumentando con ello la probabilidad de cometer un error.

Por último, en las figuras 6.8 y 6.9 se compara la probabilidad del error con respecto al número de iteraciones para los tres casos, para los instantes de tiempo $t=6000s$ y $t=12000s$. Se puede comprobar como la probabilidad disminuye con el número de iteraciones y como aumenta al aumentar el número de variables. Además se puede comprobar como las gráficas casos multivariantes se alejan de la del caso monovariantes de m_0 al aumentar el tiempo.

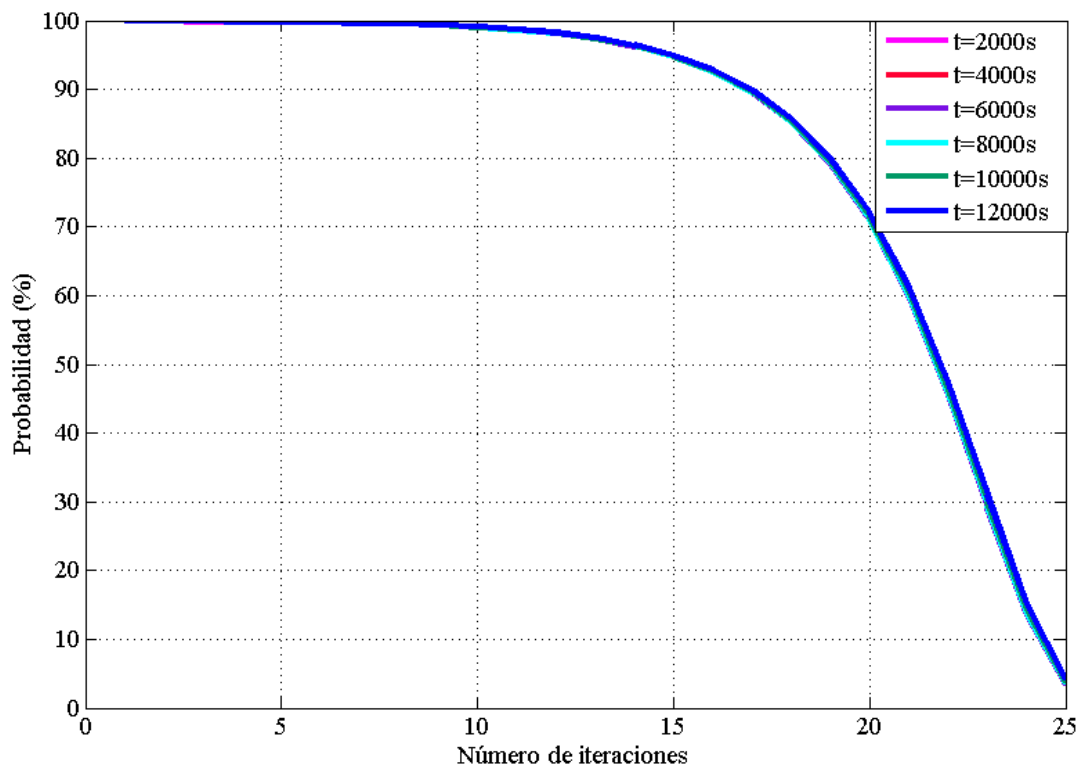


Figura 6.5: Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo.
Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c .

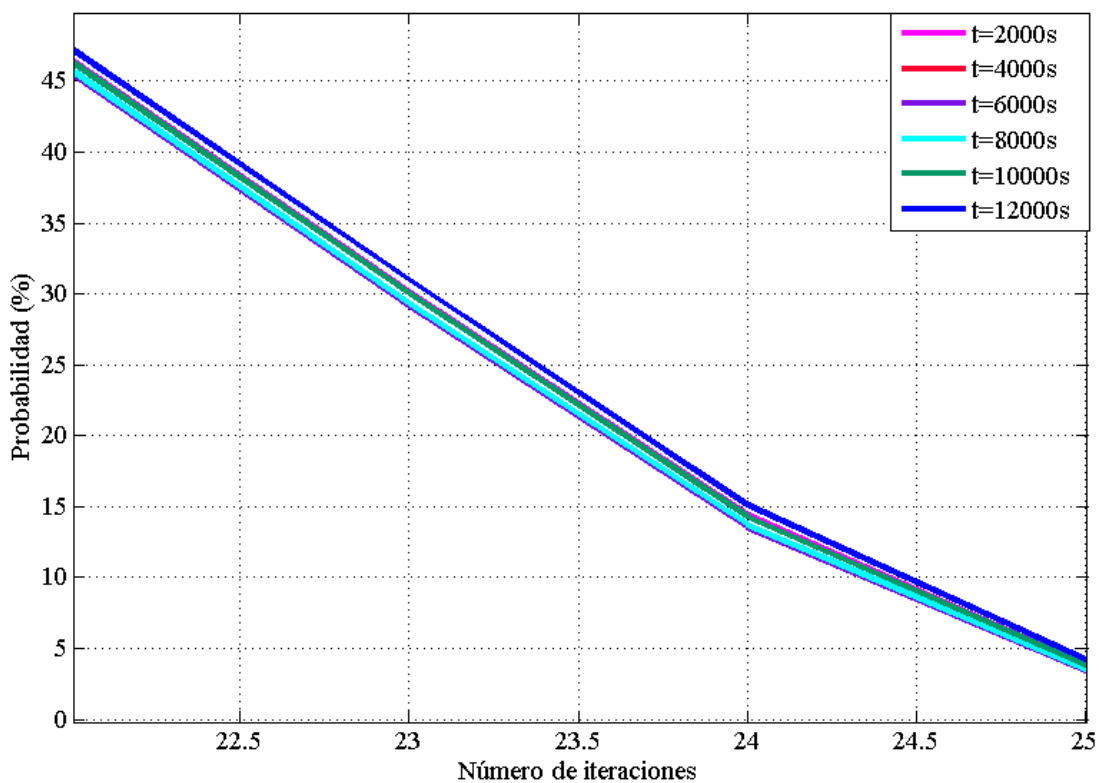


Figura 6.6 : Probabilidad del error para diferentes instantes de tiempo(ampliada).
Distribución uniforme m_0 , C_{D0} , C_{D2} y c

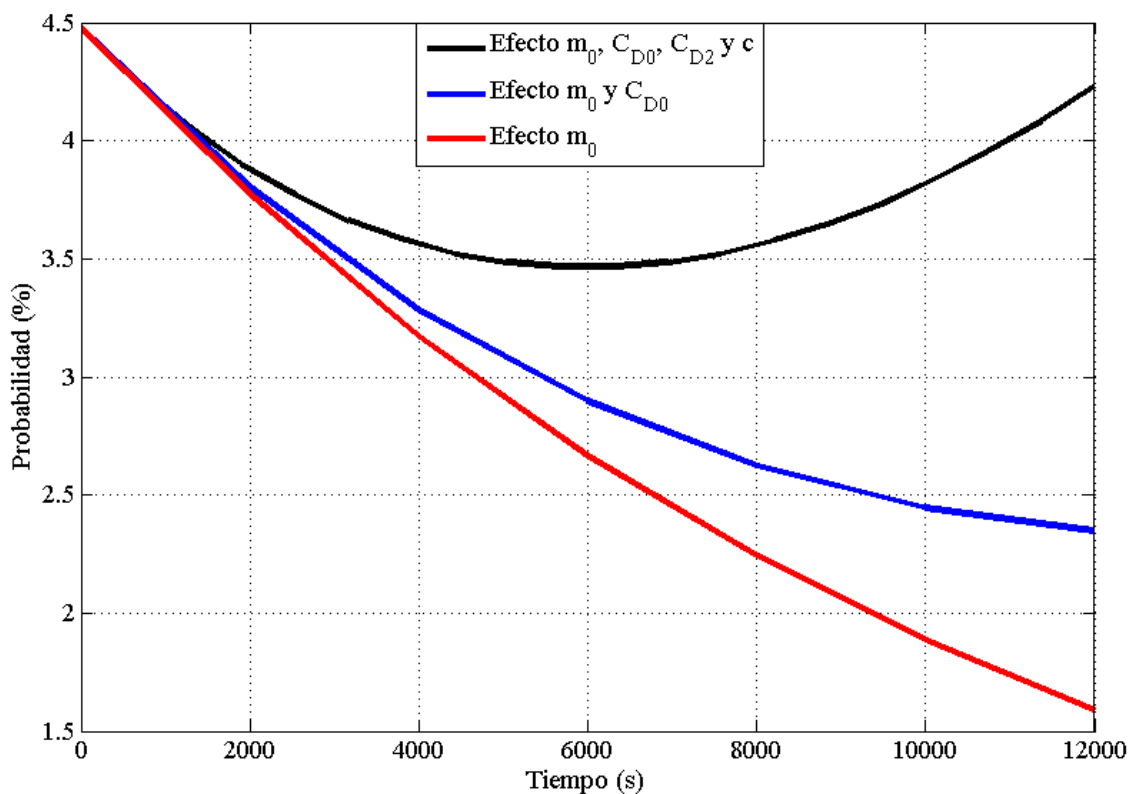


Figura 6.7: Comparación evolución de la probabilidad. Distribución uniforme m_0 , C_{D0} , C_{D2} y c

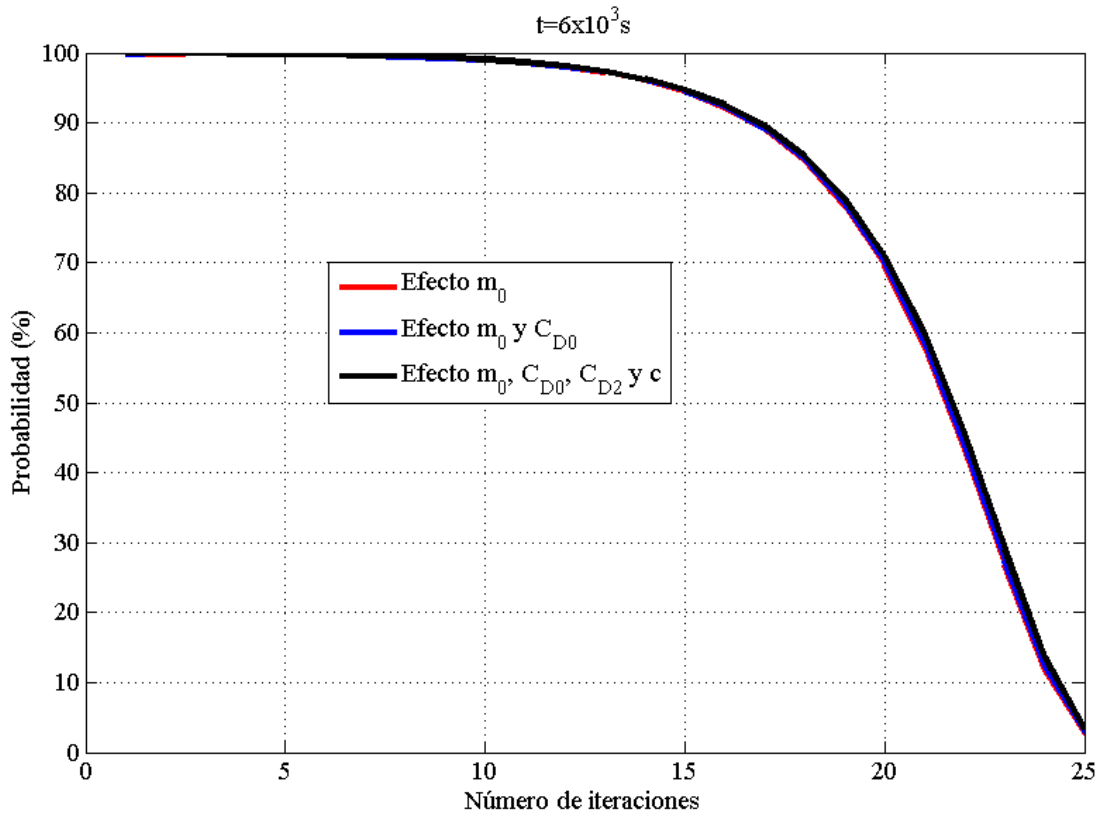


Figura 6.8: Comparación de la evolución de la probabilidad con el número de iteraciones. Para $t=6000$ s. Distribución uniforme m_0 , C_{D0} , C_{D2} y c

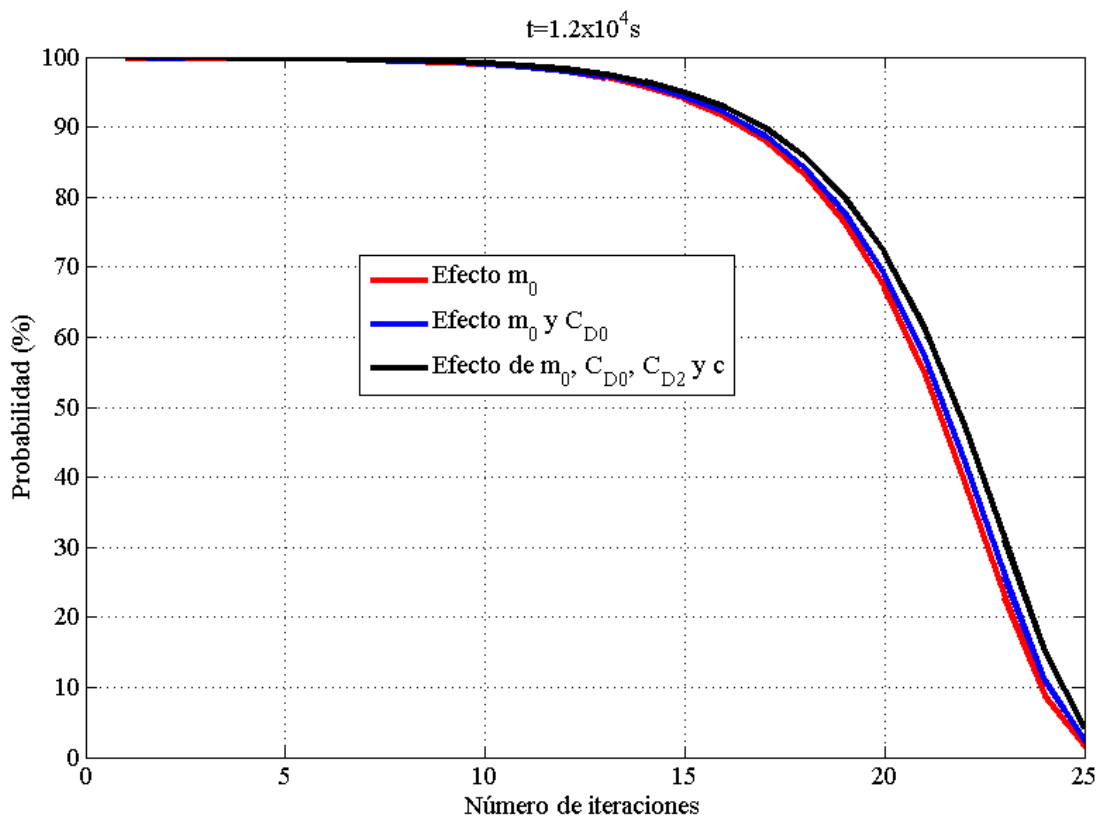


Figura 6.9: Comparación de la evolución de la probabilidad con el número de iteraciones. Para $t=12000$ s. Distribución uniforme m_0 , C_{D0} , C_{D2} y c

6.2 Desviación típica.

En este apartado se analiza la evolución de la desviación típica de la masa de la aeronave con el tiempo y se compara con los casos anteriores. En primer lugar se representa la envolvente de error para un instante de tiempo $t=2000$ s, ya que como se comentó en el apartado anterior al ser m_0 el efecto dominante la envolvente de errores no varía apreciablemente con el tiempo. Observando la figura 6.10 en la que se muestra la envolvente de errores se decide fijar el número de iteraciones en 25.

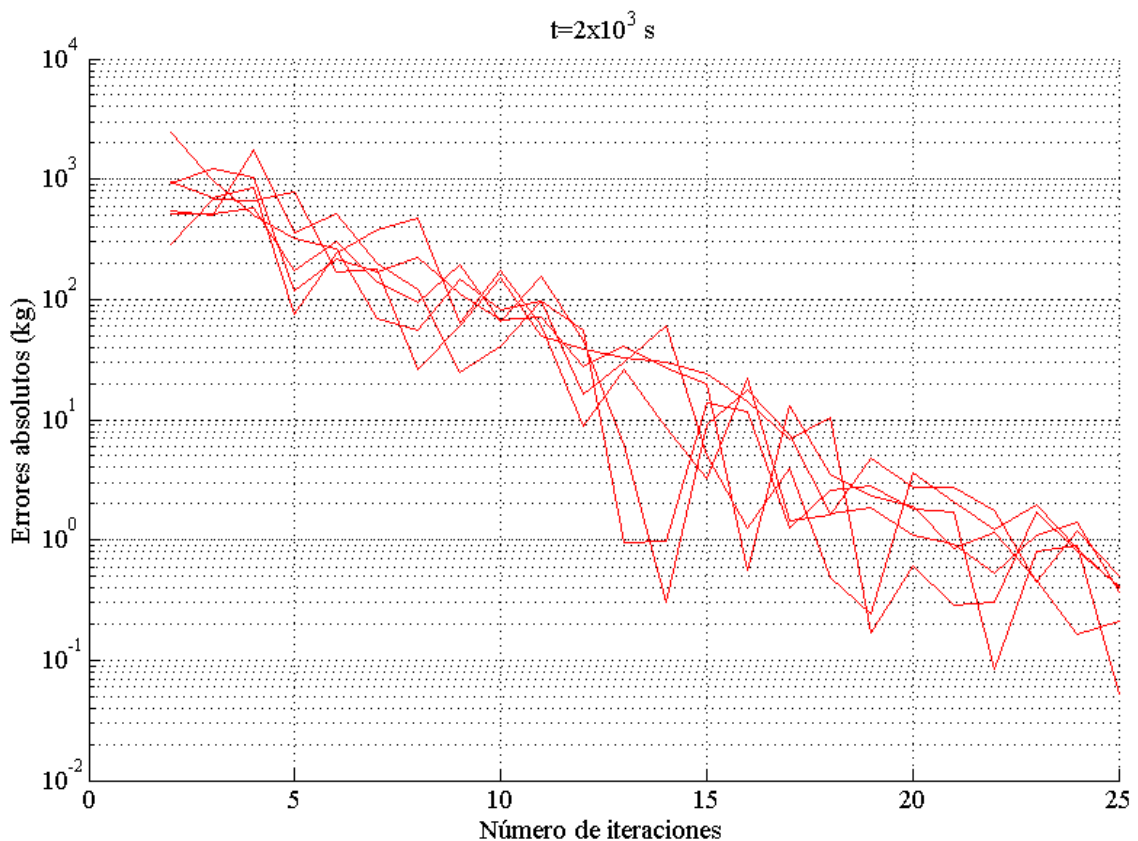


Figura 6.10. Envolvente de errores en la desviación típica. Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c

En la tabla 6.2 se muestran los resultados obtenidos para los diferentes instantes de tiempo. La primera columna indica el instante de tiempo para el que se han calculado, la segunda el valor que se obtiene y la tercera el error del método, obtenido comparando el valor de la última iteración con el de la iteración anterior.

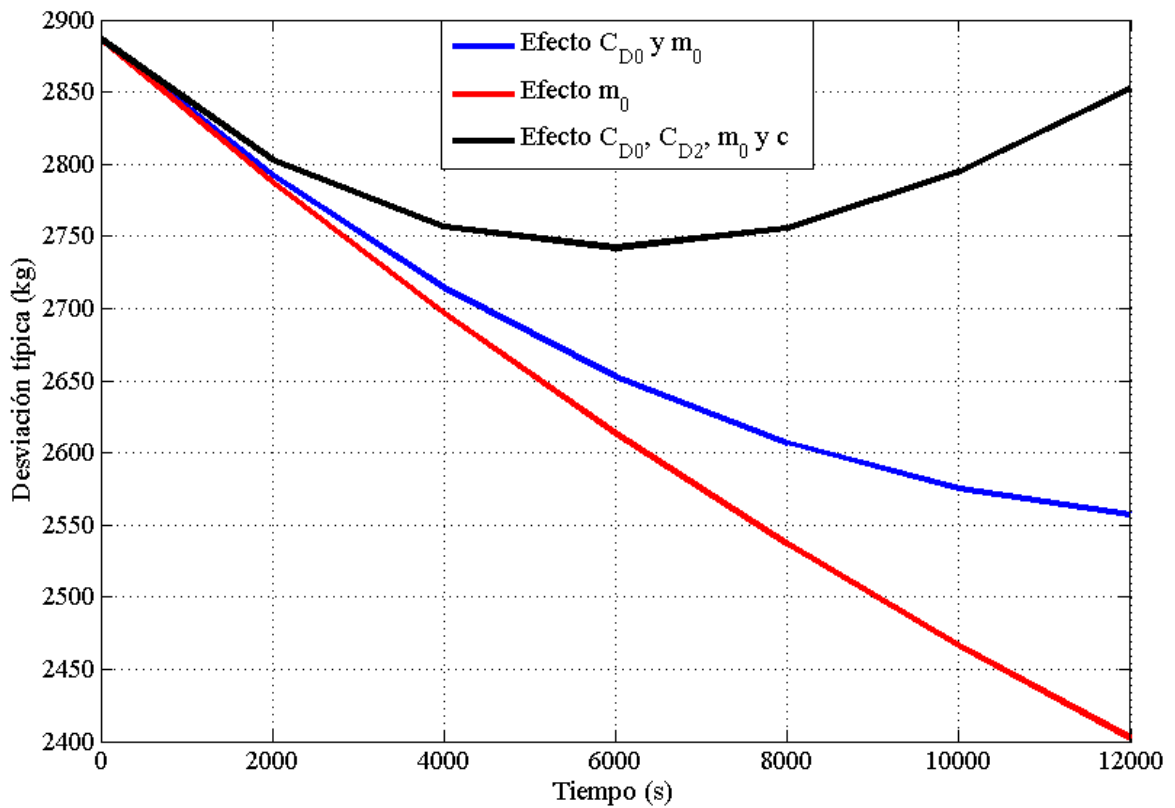
En la figura 6.11 se representa la evolución de la desviación típica con el tiempo y se compara con los casos anteriores. Se puede observar que su comportamiento es similar al representado anteriormente en el caso de la probabilidad. El motivo de que el comportamiento inicial sea decreciente y que posteriormente sea creciente es que, tal y como se comentó en el apartado anterior el efecto de m_0 es dominante hasta un tiempo de aproximadamente 6000 segundos y posteriormente el efecto conjunto de C_{D_0} , C_{D_2} y c pasa a ser dominante lo que hace que la incertidumbre sea creciente y por lo tanto es creciente la desviación típica.

Cabe destacar que los resultados mostrados son para los anchos de distribuciones elegidos. En un caso general se puede decir que, los valores iniciales de la desviación típica estarán condicionados únicamente por el ancho elegido para la función de m_0 , mientras que la evolución posterior de la desviación típica dependerá de la relación de los anchos y los valores elegidos para m_0 y para C_{D_0} , C_{D_2} y c . Cuanto mayores sean los anchos elegidos para las distribuciones, mayores serán los valores de la desviación típica. Además, cuanto mayor se el ancho de C_{D_0} , C_{D_2} y c más creciente será la desviación.

Tabla 6.2: Valores de la desviación típica para diferentes instantes de tiempo.

Distribución uniforme m_0 , C_{D0} , C_{D2} y c

Tiempo, s	$\sigma[m(t;m_0)]$, kg	Error, kg
2×10^3	2803.1	0.32
4×10^3	2756.4	0.46
6×10^3	2741.9	0.04
8×10^3	2756.1	0.08
1×10^4	2794.2	0.33
1.2×10^4	2853.1	0.42

Figura 6.11: Comparación evolución de la desviación típica. Distribución uniforme m_0 , C_{D0} , C_{D2} y c

Por último, en la figura 6.12 se representa el cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido con respecto al tiempo. Puede observarse que la tendencia dominante es la asociada a m_0 , obteniéndose una tendencia decreciente para todos los instantes de tiempo. Además puede comprobarse que el valor del cociente aumenta ligeramente al aumentar el número de variables que presentan incertidumbre.

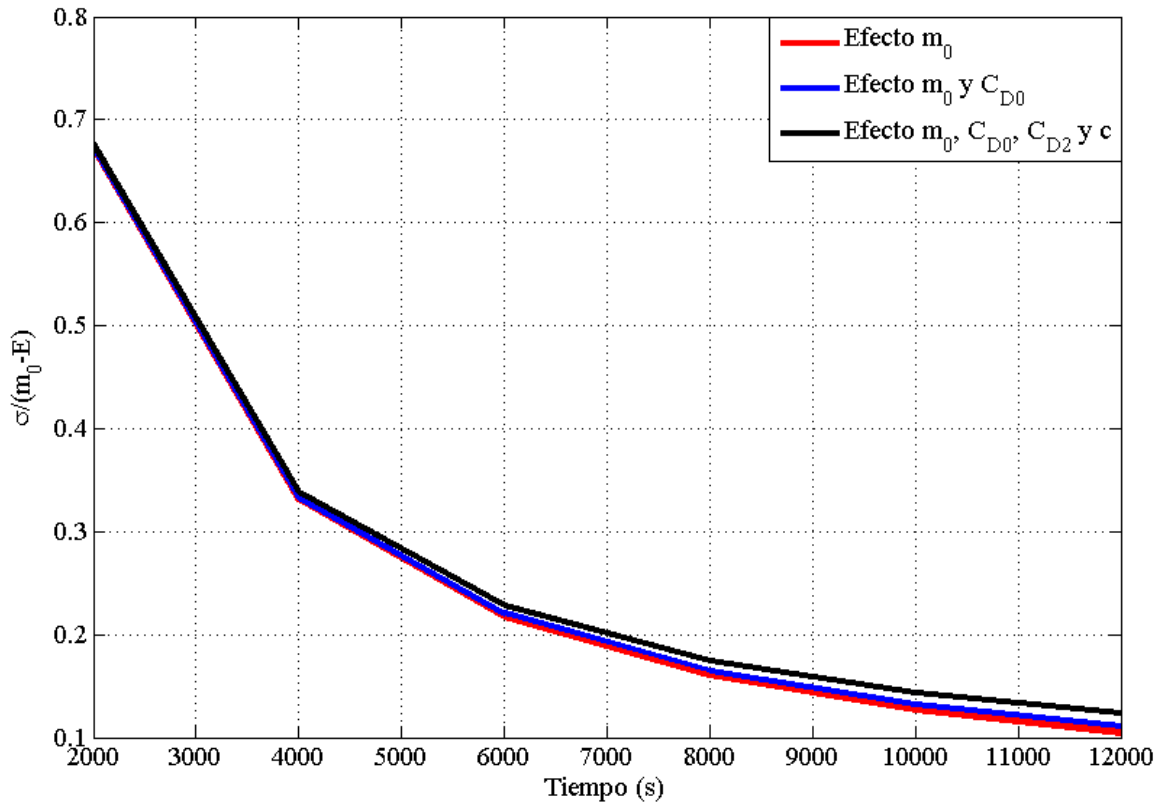


Figura 6.12: Comparación Comparación del cociente entre la desviación típica y la esperanza del combustible consumido. Distribución uniforme m_0 , C_{D0} , C_{D2} y c

6.3 Funciones de densidad.

En este apartado se representa la evolución de las funciones de densidad de la masa de la aeronave con el tiempo para los diferentes casos. En rojo se muestran las funciones de densidad para el caso de m_0 , en azul para el caso de m_0 y C_{D0} y en negro para el caso de m_0 , C_{D0} , C_{D2} y c . Podemos observar como inicialmente la distribución es uniforme, al aumentar el tiempo aumenta el efecto de C_{D0} , C_{D2} y c . Como se comentó anteriormente este efecto aumenta la incertidumbre en la masa de la aeronave, lo que se traduce en que las rectas de los extremos de la distribución pierden su verticalidad, inclinándose y aumentando el ancho de la función de densidad, ver figura 6.13. Como puede comprobarse en la figura al aumentar más el tiempo la función de densidad cambia aún más, ya que el efecto combinado de C_{D0} , C_{D2} y c aumenta. Perdiéndose la forma uniforme de la distribución y obteniendo, para el instante final, una forma similar al tipo normal. A diferencia del caso multivariable de m_0 y C_{D0} en este caso el comportamiento en los extremos no es tan lineal, esto era de intuir ya que en este caso la función resultante será la convolución de las cuatro funciones individuales de las cuales dos de ellas, las asociadas a C_{D2} y c , ni siquiera sabemos si son uniformes. Cabe destacar que al igual que sucedía en el caso anterior la densidad de probabilidad máxima se mantiene constante en igual al caso monovariable de m_0 .

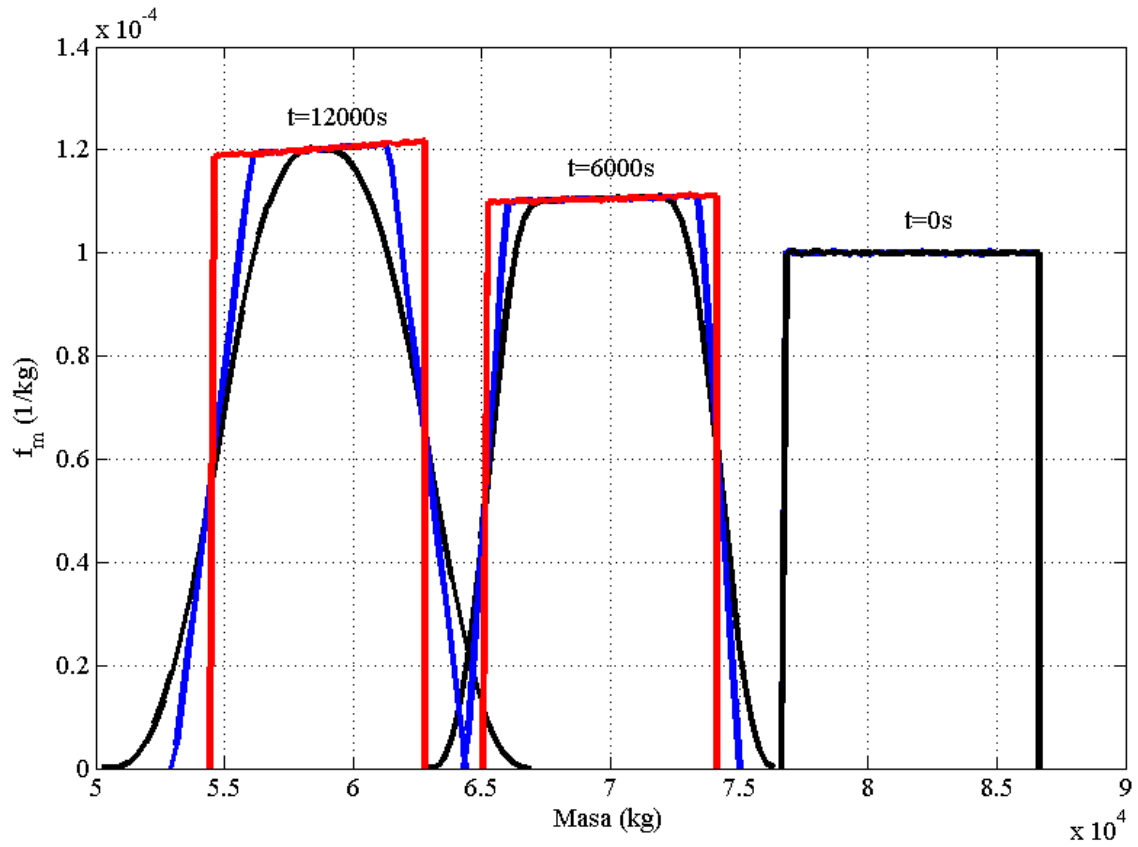


Figura 6.13: Comparación de la evolución de las funciones de densidad.

Distribución uniforme m_0 , C_{D_0} , C_{D_2} y c

7 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha aplicado el Método de Montecarlo para el análisis de trayectorias de crucero de aviones comerciales sujetas a incertidumbre en los datos. Se han descrito y propuesto diferentes alternativas, tanto para la generación de números aleatorios, como para el criterio de parada de la simulación.

En cuanto a aspectos de tipo numérico, se ha comprobado que para los niveles de precisión buscados, del orden de 1 kg, se necesitan entorno a 30 millones de simulaciones. El tamaño de cada variable que almacene u opere con las muestras es, en el caso correspondiente a la desviación típica que es el más desfavorable, ligeramente superior a 250 Megabytes. Se ha comprobado que en todos los casos la duración de las simulaciones es inferior a 5 segundos, para un ordenador con las prestaciones indicadas en el capítulo 3. Con esto se puede concluir que para el modelo considerado las limitaciones asociadas a la memoria son más importantes que las asociadas a tiempo de computación. Además en todos los casos se han conseguido resultados con errores inferiores a un kilogramo y probabilidad del error menor del 5%.

A continuación se comentan las conclusiones más importantes de cada uno de los análisis realizados.

En primer lugar se han reproducido los resultados del artículo “Propagation of Initial Mass Uncertainty in Aircraft Cruise Flight” con los niveles de precisión buscados. Se ha podido comprobar que tal y como sucedía en el artículo la incertidumbre inicial introducida en la masa disminuye con el tiempo. Además, las funciones de densidad conservan aproximadamente la forma inicial para todos los instantes de tiempo.

En segundo lugar se ha utilizado el método para analizar cómo afecta una incertidumbre en C_{D_0} a la masa de la aeronave durante el crucero. Se ha comprobado que la incertidumbre en C_{D_0} afecta levemente a la masa de la aeronave en los instantes iniciales, y que al aumentar el tiempo la incertidumbre en la masa de la aeronave crece. Debido a que el efecto de C_{D_0} afecta a la resistencia y por lo tanto al consumo de combustible, que crea una incertidumbre en la masa de la aeronave. Se ha podido observar que si la distribución de entrada para C_{D_0} es de tipo uniforme, la forma de la distribución de salida para la masa de la aeronave también tiene una forma aproximadamente uniforme, en todos los instantes de tiempo salvo el inicial en el cual es una delta de Dirac.

Por último, se han realizado simulaciones multivariantes en las cuales las incertidumbres se introducían en varias variables, usándose siempre distribuciones uniformes. Se han usado como variables de entrada en el primer de los casos m_0 y C_{D_0} , en el segundo de los casos a las variables anteriores se les han añadido C_{D_2} y c . En ambos casos se han extraído las mismas conclusiones, en los instantes iniciales el efecto de m_0 es dominante haciendo que la incertidumbre de la masa de la aeronave disminuya con el tiempo debido a la reducción de la masa. Al transcurrir el tiempo los efectos de C_{D_0} , C_{D_2} y c comienzan a aumentar su influencia, hasta que pasan a convertirse en dominantes y hacen que la incertidumbre de la masa de la aeronave aumente con el tiempo, debido a que el efecto de estos parámetros es crear una incertidumbre en el consumo de combustible que se traslada a la masa de la aeronave. El instante para el cual la incertidumbre presenta el mínimo depende de los anchos elegidos para las diferentes distribuciones. Con respecto a las funciones de densidad se ha podido observar como el efecto de C_{D_0} , C_{D_2} y c comienza en los extremos de la función, haciendo que las rectas verticales se inclinen y aumente así la incertidumbre. Al aumentar el efecto de estas variables la función de densidad va perdiendo la forma uniforme pudiendo incluso a llegar a formas similares a las de una función normal, para instantes de tiempo elevados. Sin embargo, cabe destacar que el centro de la función y la máxima densidad de probabilidad se mantienen aproximadamente constantes e iguales a las del caso monovariante de m_0 .

En cuanto a posibles ampliaciones o trabajos futuros existen varias líneas en las cuales se puede profundizar:

- En primer lugar, se puede usar el mismo método y modelo para estudiar la influencia de otras variables en la masa de la aeronave durante la fase de crucero, pudiéndose analizar nuevos efectos y relaciones entre variables.
- En segundo lugar, se puede mejorar el modelo empleado. Utilizando un modelo más complejo, que elimine las hipótesis empleadas, se obtendrán unos resultados más precisos y se podrá comprobar el rango de validez de los resultados obtenidos en este trabajo.
- En tercer lugar, puede utilizarse el método para estudiar el efecto del viento durante el crucero. Este efecto afecta durante toda la fase de crucero y puede ser muy importante si la intensidad del viento es alta, ya que el crucero es la fase de vuelo de mayor longitud. Además, el viento puede presentar diferentes funciones de distribución dependiendo de la localización.
- En cuarto lugar, el uso del método puede extenderse a otras fases del vuelo como pueden ser la subida o el descenso. En estas fases sería necesario el uso de un modelo más complejo, que tengan en cuenta aspectos como los cambios de altitud o la extensión y retracción de los dispositivos hipersustentadores.
- Por último, podría utilizarse el Método de Montecarlo como base para la optimización de trayectorias cuando estas están sujetas a incertidumbre. Con el objetivo de seleccionar valores de las variables que optimicen una propiedad de la trayectoria. El método puede usarse para este tipo de problemas pero llevará asociado el inconveniente de que es necesario un coste computacional muy alto.

REFERENCIAS

- [1] Rafael Vázquez and Damián Rivas. *Propagation of Initial Mass Uncertainty in Aircraft Cruise Flight*. Journal of Guidance, Control, and Dynamics., March-April 2013, Vol. 36, No.2, pp. 415-429
- [2] Nicholas Metropolis and S.Ulam. *The Monte Carlo Method*. Journal of the American Statistical Association, Sept 1949, Vol 44, No. 247, pp. 335-341
- [3] Nick T. Thomopoulos. *Essentials of Monte Carlo Simulation*. Springer. 2013
- [4] Christian Bayer, Hakon Hoel, Erik Von Schwerin and Raúl Tempone. *ON NON-ASYMPTOTIC OPTIMAL STOPPING CRITERIA IN MONTE CARLO SIMULATIONS*.SIAM J. Sci. Comput., 2014, Vol. 36. Issue. 2, pp. A869-A885
- [5] Traducido del ruso por Carlos Vela. Método de Montecarlo. I.M Sóbol. 1976

