

Trabajo Fin de Grado Ingeniería Aeronáutica

Análisis y Desarrollo de Algoritmos Heurísticos para la Adquisición de Múltiples Imágenes por Satélites Ágiles

Autor: José María Meléndez López

Tutor: Rafael Vázquez Valenzuela

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015



Trabajo Fin de Grado
Ingeniería Aeronáutica

Análisis y Desarrollo de Algoritmos Heurísticos para la Adquisición de Múltiples Imágenes por Satélites Ágiles

Autor:

José María Meléndez López

Tutor:

Rafael Vázquez Valenzuela

Profesor Titular

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015

Índice

1. Introducción	7
1.1. Satélites de observación terrestre	7
1.1.1. Tipos de satélites	7
1.2. Planificación de satélites ágiles para la observación terrestre	9
1.3. Objetivos y alcance del proyecto	10
1.4. Estructura del documento	10
2. Modelado del problema	11
2.1. Variables	11
2.1.1. Variables intrínsecas del vehículo de observación	11
2.1.2. Problema plano	11
2.1.3. Problema orbital	12
2.2. Apuntamiento a un punto	15
2.2.1. Caso estático	15
2.2.2. Caso dinámico	16
2.2.3. Tiempo óptimo de giro en movimiento	19
2.3. Cinemática del modelo	21
2.3.1. Apuntamiento a un punto	21
2.3.2. Apuntamiento fijo	22
2.3.3. Ejemplos	23
2.4. Apuntamiento a varios puntos	24
2.5. Representación gráfica	25
2.5.1. Problema plano	26
2.5.2. Problema orbital	27
2.6. Restricciones de observación	29
2.6.1. Desviación respecto a nadir	29
2.6.2. Curvas límite de observación	31
2.6.3. Extremos de la curva límite de observación	46
2.7. Tiempo de espera	48
3. Algoritmo de búsqueda de puntos (ABP)	51
3.1. Estructura general del algoritmo	51
3.2. Adquisición de puntos candidatos (APC)	54
3.2.1. Elección de puntos candidatos	54
3.2.2. Comprobación de puntos candidatos	55
3.3. Algoritmo de elección de puntos (AEP)	56
3.4. Algoritmo de prioridad (AP)	58
3.4.1. Distancia mínima	58
3.4.2. Tiempo óptimo mínimo	58
3.4.3. Desviación respecto a nadir mínima	58
3.5. Algoritmo de mejor camino (AMC)	61
3.5.1. Mayor profundidad alcanzada y menor tiempo de apuntamiento	61
3.5.2. Mayor suma de pesos y menor tiempo de apuntamiento	61
4. Nube de puntos objetivos	63
4.1. Método Montecarlo	63
4.2. Configuración de puntos	63
4.2.1. Saturación y límite teórico de observación	65

5. Simulaciones	69
5.1. Maximización de puntos observados	70
5.1.1. Problema plano	70
5.1.2. Problema orbital	72
5.2. Maximización de suma de pesos	74
5.2.1. Problema plano	74
5.2.2. Problema orbital	77
6. Análisis de resultados	79
6.1. Maximización de puntos observados	79
6.1.1. Efecto de N_{pa}	79
6.1.2. Efecto de N_{prof}	88
6.2. Maximización de pesos	95
6.2.1. Efecto de N_{prof}	95
7. Conclusiones y trabajo futuro	99
7.1. Conclusiones	99
7.2. Trabajo futuro - Cambios y mejoras	100
8. Anexo	101
8.1. Circunferencia esférica	101
8.2. Elementos orbitales	101
8.2.1. Definición	101
8.2.2. Vector posición del cuerpo	102
8.3. Convergencia del método 2 para la obtención del tiempo óptimo de giro en movimiento	102
8.4. Desarrollo de algunas derivadas del modelo de giro óptimo	105
8.5. Desarrollo de curvas límite de observación	106
8.5.1. Problema plano	107
8.5.2. Problema orbital	110

Índice de figuras

1.1.1. Ejes cuerpo del satélite: Balance (roll), cabeceo (pitch) y guiñada (yaw) [3]	8
1.1.2. Satélite ágil Deimos-2 [2]	9
2.1.1. Coordenadas esféricas	13
2.1.2. Órbita del satélite en el sistema geográfico	14
2.2.1. Apuntamiento en reposo entre dos puntos arbitrarios	16
2.2.2. Apuntamiento dinámico entre dos puntos arbitrarios	17
2.2.3. Evolución de $\theta(t)$ y $\Omega(t)$ para un caso particular (1)	18
2.2.4. Evolución de $\theta(t)$ y $\Omega(t)$ para un caso particular (2)	18
2.2.5. Comparación de tiempos de cálculo e iteraciones para los métodos de cálculo de t^*	20
2.2.6. Cociente entre tiempos de cálculo de los métodos de cálculo de t^*	20
2.3.1. Evolución de \vec{C} para un apuntamiento dado (Problema plano)	23
2.3.2. Evolución de \vec{C} para un apuntamiento dado (Problema orbital)	23
2.4.1. Tiempo de procesamiento según número de combinaciones posibles de puntos	24
2.5.1. Representación genérica de vehículo y cámara	25
2.5.2. Representación gráfica de la traza del vehículo y cámara (Problema plano)	26
2.5.3. Comprobación de curvatura de la traza de cámara (Problema plano)	27
2.5.4. Representación gráfica de la traza del satélite y cámara (Problema orbital)	28
2.6.1. Desviación del vector apuntamiento respecto al nadir	29
2.6.2. Ejemplo de punto observable p_{obs}	31
2.6.3. Punto k de la curva límite (problema plano)	33
2.6.4. Ejemplo de curva límite de observación	34
2.6.5. Evolución de ϕ_k^* y ϕ_k^f (problema plano)	36
2.6.6. Evolución de ϕ_k^* y ϕ_k^f con corrección (problema plano)	37
2.6.7. Familia de curvas límite (problema plano)	38
2.6.8. Evolución de las áreas de las curvas límite según c y β	39
2.6.9. Evolución del límite derecho x_d de las curvas límite según c y β	40
2.6.10. Evolución del límite izquierdo x_i de las curvas límite según c y β	40
2.6.11. Punto k de la curva límite (Problema orbital)	42
2.6.12. Evolución de ϕ_k^* y ϕ_k^f con corrección (problema orbital)	44
2.6.13. Familia de curvas límite (problema orbital)	45
2.6.14. Extremos de curva límite de observación (problema plano)	47
2.6.15. Extremos de curva límite de observación (problema orbital)	47
2.7.1. Ejemplo de punto exterior a curva límite de observación y recta divisoria (problema plano)	48
2.7.2. Ejemplo de punto exterior a curva límite de observación y recta divisoria (problema orbital)	48
2.7.3. Evolución de $\phi(t)$ para un punto exterior a curva límite (problema plano)	49
3.1.1. Diagrama de flujos del Algoritmo de Búsqueda de Puntos (ABP)	53
3.2.1. Ejemplo de elección de puntos candidatos (EPC)	54
3.2.2. Ejemplo de comprobación de puntos candidatos (CPC)	55
3.3.1. Diagrama de flujos del Algoritmo de Elección de Puntos (AEP)	57
3.4.1. Ejemplo de aplicación del criterio de distancia mínima (problema plano)	59
3.4.2. Ejemplo de aplicación del criterio de distancia mínima (problema orbital)	59
3.4.3. Ejemplo de aplicación del criterio de tiempo óptimo mínimo (problema plano)	60
3.4.4. Ejemplo de aplicación del criterio de desviación mínima (problema plano)	60
4.2.1. Ejemplo de nube de puntos (problema plano)	64
4.2.2. Ejemplo de nube de puntos (problema orbital)	64
4.2.3. Límite de observación y efecto del número de puntos n de la nube (problema plano)	66
4.2.4. Límite de observación y efecto del número de puntos n de la nube (problema orbital)	67
6.1.1. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 30$ (1)	80
6.1.2. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 30$ (2)	80
6.1.3. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 60$ (1)	81
6.1.4. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 60$ (2)	81
6.1.5. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 90$ (1)	82
6.1.6. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 90$ (2)	82

6.1.7. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 120$ (1)	83
6.1.8. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 120$ (2)	83
6.1.9. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 30$ (1)	84
6.1.10. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 30$ (2)	84
6.1.11. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 60$ (1)	85
6.1.12. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 60$ (2)	85
6.1.13. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 90$ (1)	86
6.1.14. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 90$ (2)	86
6.1.15. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 120$ (1)	87
6.1.16. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 120$ (2)	87
6.1.17. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (1)	89
6.1.18. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (2)	89
6.1.19. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Tiempo ópt. mínimo (1)	90
6.1.20. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Tiempo ópt. mínimo (2)	90
6.1.21. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (1)	91
6.1.22. Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (2)	91
6.1.23. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (1)	92
6.1.24. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (2)	92
6.1.25. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Tiempo ópt. mínimo (1)	93
6.1.26. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Tiempo ópt. mínimo (2)	93
6.1.27. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (1)	94
6.1.28. Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (2)	94
6.2.1. Prob. plano - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (1)	96
6.2.2. Prob. plano - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (2)	96
6.2.3. Prob. plano - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (1)	97
6.2.4. Prob. plano - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (2)	97
6.2.5. Prob. orbital - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (1)	98
6.2.6. Prob. orbital - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (2)	98
8.2.1. Elementos orbitales [4]	102

Índice de cuadros

5.1.1. Maximizar puntos observados - Distancia euclídea mínima (problema plano)	70
5.1.2. Maximizar puntos observados - Tiempo óptimo mínimo (problema plano)	71
5.1.3. Maximizar puntos observados - Desviación respecto a nadir mínima (problema plano)	71
5.1.4. Maximizar puntos observados - Distancia ortodrómica mínima (problema orbital)	72
5.1.5. Maximizar puntos observados - Tiempo óptimo mínimo (problema orbital)	72
5.1.6. Maximizar puntos observados - Desviación respecto a nadir mínima (problema orbital)	73
5.2.1. Maximizar suma de pesos - Distancia euclídea mínima (problema plano)	74
5.2.2. Maximizar suma de pesos - Tiempo óptimo mínimo (problema plano)	75
5.2.3. Maximizar suma de pesos - Desviación respecto a nadir mínima (problema plano)	76
5.2.4. Maximizar suma de pesos - Distancia ortodrómica mínima (problema orbital)	77

1. Introducción

1.1. Satélites de observación terrestre

Los satélites de observación de la Tierra se pueden dividir en dos grandes grupos: los que están situados en órbita geoestacionaria (altitud de 36000 km aprox.), encargados principalmente de estudiar fenómenos meteorológicos o para telecomunicaciones (televisión), y los que orbitan a baja altitud (400 km aprox.), que se encargan de estudiar más detalladamente la superficie terrestre. En este último grupo se encuentran los satélites ágiles que serán el tema central del presente trabajo.

Los satélites de observación pueden ir equipados con distintos tipos de cámaras para la toma de fotografías: cámara convencional CCD (espectro de luz visible) y/o cámara infrarroja (espectro infrarrojo). Con el primer tipo se toman imágenes convencionales en alta resolución de la superficie terrestre, mientras que con la cámara infrarroja se capta la temperatura de las áreas apuntadas, lo cual tiene utilidades muy interesantes en distintos estudios.

Entre las aplicaciones más importantes que ofrecen estos satélites están:

- *Agricultura y observación de recursos naturales*: Estudio de cultivos, previsión de meteorología para plantaciones, situación de yacimientos minerales, etc.
- *Medioambiente*: Estudio de deforestaciones, estado de capa de ozono, cambio climático, avance de deshielo en los polos, detección de incendios forestales, etc.
- *Cartografía*: Elaboración de mapas de distintos territorios, estudio de crecimiento de ciudades, soporte a ingeniería civil, etc.
- *Desastres naturales*: Ayuda a los equipos de emergencia, prevención y estimación de daños en caso de erupciones volcánicas, inundaciones, tsunamis, huracanes, etc.

En los más de cincuenta años de historia transcurridos desde la puesta en órbita del primer satélite de observación en 1960 por la NASA, estos han ido mejorando sus características tanto de captación y procesamiento de imágenes, como en la propia capacidad de movimiento de los mismos.

1.1.1. Tipos de satélites

Las capacidades de movimiento entre los distintos tipos de satélites de observación permiten hacer la siguiente clasificación:

- *Satélites con ángulo de visión fijo*: Mantienen constante su ángulo de visión durante su movimiento orbital, por lo que las imágenes son captadas mientras se sobrevuela un área determinada. Este tipo de satélites fueron los primeros en orbitar la Tierra.
- *Satélites orientables*: Pueden girar en un plano perpendicular a su trayectoria, por lo que son capaces de modificar su actitud, permitiendo definir un ángulo de balance (figura 1.1.1) en el satélite para tomar imágenes de áreas que ya no tienen por qué estar sobre la traza del satélite, sino que pueden estar desplazadas a izquierda o derecha de la misma. Se mejora la flexibilidad en la adquisición de imágenes y se reduce la frecuencia de repetitividad en la adquisición.
- *Satélites ágiles*: Para mejorar las limitaciones cinemáticas que presentan los dos tipos anteriores, en este caso se permite el movimiento en balance y cabeceo (figura 1.1.1), y en algunos casos se puede controlar la guiñada. Esto permite tomar imágenes de una amplia variedad de zonas. Al igual que los dos tipos anteriores, las imágenes de la superficie se toman durante el sobrevuelo del área en cuestión, con la diferencia de que ahora, al controlar el cabeceo, se puede adelantar el apuntamiento de la cámara respecto al nadir actual (dirección perpendicular a la superficie terrestre vista desde el satélite). Esto tendrá especial relevancia, ya que existirá cierta libertad en el tiempo de apuntamiento a un objetivo concreto. En la figura 1.1.2 se muestra un ejemplo de satélite ágil.

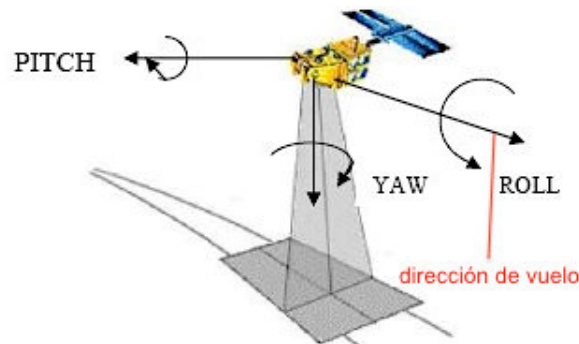


Figura 1.1.1: Ejes cuerpo del satélite: Balance (roll), cabeceo (pitch) y guiñada (yaw) [3]

Hay que tener en cuenta que, a pesar de las distintas mejoras en las capacidades de movimiento de los satélites ágiles respecto a sus predecesores, siguen teniendo restricciones de movimiento [2]. Los siguientes parámetros definen algunas:

- *Velocidad de giro ($^{\circ}/s$):* Velocidad angular para apuntar a un objetivo/punto en la superficie terrestre. Normalmente es muy lenta, de $0.5^{\circ}/s$ a $3^{\circ}/s$.
- *Tiempo de estabilización / Tiempo de apuntamiento fijo (s):* Tiempo requerido por la cámara tras efectuar una maniobra de giro para captar la imagen con la calidad necesaria. Este tiempo suele estar comprendido entre 10 y 20 segundos.
- *Máximo ángulo en balance ($^{\circ}$):* Máximo ángulo de apertura en balance entre la dirección de apuntamiento de la cámara y el nadir actual. Los valores típicos suelen estar comprendidos entre $[-30^{\circ}, 30^{\circ}]$.
- *Máximo ángulo en cabeceo ($^{\circ}$):* Máximo ángulo de apertura en cabeceo entre la dirección de apuntamiento de la cámara y el nadir actual. Los valores típicos suelen estar comprendidos entre $[-30^{\circ}, 30^{\circ}]$.

Mediante las distintas capacidades que brindan los satélites ágiles es posible definir diferentes modos de observación de los objetivos en la superficie terrestre:

- *Snapshot:* Consiste en cubrir objetivos cercanos entre sí de una sola pasada de la cámara (ciudades cercanas, accidentes geográficos, etc.). La secuencia de movimiento consistirá en una sucesión de apuntamientos y tomas de imágenes, con sus respectivos tiempos de estabilización (apuntamiento fijo).
- *Stereo:* Consiste en la toma de dos imágenes del mismo objetivo desde diferentes ángulos de cabeceo, permitiendo formar imágenes 3D del mismo.
- *Spotlight:* Consiste en mantener el satélite en una orientación fija, manteniendo el apuntamiento a cierto objetivo/punto, permitiendo captar videos de varios fotogramas por segundo.



Figura 1.1.2: Satélite ágil Deimos-2 [2]

1.2. Planificación de satélites ágiles para la observación terrestre

Las libertades cinemáticas de los satélites ágiles conllevan cierta complejidad respecto a sus predecesores en cuanto a cómo planificar la secuencia/toma de imágenes. Anteriormente, la programación y planificación de la tarea del satélite no era compleja, dado que las restricciones cinemáticas daban poca flexibilidad a los movimientos. Además, el tiempo de apuntamiento hacia un punto de observación era fijo, ya que la imagen era tomada durante el sobrevuelo del satélite. En los satélites ágiles el tiempo de apuntamiento hacia un punto objetivo no es dado, ya que el movimiento de cabeceo y balance permiten adelantar o atrasar respecto al nadir la posición de la cámara, por lo que la planificación de la secuencia de apuntamientos se complica.

Dada una nube de puntos objetivos sobre la superficie terrestre, el satélite podría apuntar a cada uno de ellos suponiendo que éstos se encuentren próximos entre sí y fueran un número moderado. De forma general, los puntos no estarán cercanos entre sí, ni serán necesariamente un número reducido, por lo que, en un principio parece que no se van a poder tomar imágenes de todos y cada uno de ellos (nube completa). Ante la imposibilidad de observar la nube en su totalidad en un sobrevuelo del satélite, cabe plantearse estudiar qué secuencias de apuntamientos/movimientos debe de realizar el satélite para maximizar el número de puntos objetivo, la calidad, y/o la suma de pesos o «valores» de los puntos (puntos que tienen prioridad a ser observados respecto a otros por razones económicas o estratégicas).

Dada una nube de observación que contiene n puntos, el número de combinaciones de maniobras que el satélite puede realizar es de $n!$. Una posible solución sería plantearse explorar las $n!$ combinaciones, y elegir la óptima según el criterio elegido. El problema es que si n crece, se obtienen un número de maniobras extremadamente grande. Por ejemplo, si se tiene un número de puntos $n = 10$, existirán 3628800 maniobras posibles, siendo éste un número bastante alto computacionalmente hablando. Pero si por ejemplo $n = 100$, número de puntos no demasiado alto, el número de maniobras se dispara hasta $9,3326 \cdot 10^{157}$, número completamente *inabarcable* por ninguna computadora actual.

Debido a esto, este problema tendrá especial relevancia para las empresas que operan con estos satélites, ya que su negocio reside en la venta de las imágenes que capturan sus satélites, por lo que a mayor número de puntos observados, o mayor suma de pesos obtenidos, mayores beneficios.

1.3. Objetivos y alcance del proyecto

Quedando ilustrada la complejidad de planificación de los satélites ágiles, se va a estudiar en el presente trabajo cómo obtener secuencias de movimiento de los mismos que maximicen una serie de parámetros según el criterio elegido.

Este trabajo trata de mejorar el estudio de este problema realizado por Francisco Montoro Sánchez en su Proyecto Fin de Carrera titulado *Análisis y Desarrollo de Algoritmos para la Planificación Optimizada de Adquisición de Imágenes por Satélites Ágiles* (Escuela Técnica Superior de Ingeniería, Universidad de Sevilla, 2014) [3].

Se han reestudiado los dos modelos de realidad elegidos. El primero será un móvil/vehículo con cámara abordo, que sobrevuela un plano en el que se encuentran los puntos objetivo, a una altura dada. El segundo será un satélite ágil orbitando la Tierra. El motivo de estudiar un modelo plano del problema se debe a que, gracias a las distintas simplificaciones que involucra este modelo frente al modelo orbital, se conseguirá entender mejor los conceptos involucrados en las distintas ecuaciones y restricciones involucradas en el problema de planificación.

Se ha vuelto a estudiar las ecuaciones involucradas en el movimiento de apuntamiento del vehículo/satélite, así como una revisión *importante* en el estudio de las restricciones cinemáticas de los satélites.

Con todo ello, se ha desarrollado un *nuevo* algoritmo heurístico de mayor complejidad para la resolución del problema de planificación.

El modo de observación de la cámara que se considerará será *snapshot* (sección 1.1.1). El algoritmo heurístico desarrollado obtendrá una solución para la planificación de observación atendiendo a distintos objetivos:

- Maximizar el *número de puntos* a observar por la cámara.
- Maximizar la *calidad* de las imágenes, minimizando el ángulo formado por la dirección de apuntamiento de la cámara y el nadir actual. De esta forma, se consigue que las fotografías sean tomadas lo más perpendicularmente posible respecto al punto/área a observar
- En el caso de que cada punto objetivo tenga asociado un peso, es decir, una prioridad respecto a otros superior/inferior a ser observados (por razones económicas, estratégicas, etc.), maximizar la *suma de los pesos* asociados a los puntos observados en la planificación obtenida.

Una vez obtenido el algoritmo heurístico, se simularán distintos escenarios/experimentos mediante el método Montecarlo, explicado en la sección 4.1.

1.4. Estructura del documento

Tras esta primera sección donde se ha explicado el punto de partida para la planificación optimizada en la observación terrestre por satélites ágiles, se presentará la estructura de contenidos que va a seguir el trabajo.

En la sección 2 se abordarán los dos modelos desarrollados para el problema de planificación, así como el estudio de ecuaciones involucradas en el apuntamiento de la cámara. Asimismo, se analizarán las distintas restricciones de movimiento del satélite y su efecto en la planificación.

En la sección 3 se desarrollará el algoritmo heurístico elegido para la resolución de la planificación de puntos según distintos criterios de observación.

En la sección 4 se analizará la generación de nubes de puntos objetivo y su efecto en los resultados.

Por su parte, en la sección 5 se presentarán los resultados obtenidos de distintos experimentos y simulaciones realizados del algoritmo heurístico y se analizarán para evaluar el funcionamiento del mismo.

A continuación, en la sección 6 se analizarán los resultados obtenidos y se compararán los distintos criterios desarrollados.

Finalmente, en la sección 7 se examinarán los resultados obtenidos por el algoritmo desarrollado, así como las limitaciones de los modelos elegidos. Se presentarán también algunas ideas para futuras ampliaciones del trabajo.

En el anexo (sección 8) se presentan diversos cálculos y deducciones necesarias para el desarrollo del trabajo.

2. Modelado del problema

En este apartado se va a detallar el modelo que se ha tomado para abordar el problema planteado. Para ello se definirán las distintas variables implicadas en los dos casos contemplados, plano y orbital.

Se estudiará tanto el movimiento de apuntamiento de un punto a otro, como el apuntamiento fijo a un punto para realizar las fotografías. Así mismo, se estudiará la cinemática asociada al modelo elegido, y su representación gráfica para su posterior análisis.

Por último, se realizará un estudio de las restricciones de observación que presenta el problema, cuestión importante a la hora de elegir los puntos observables.

2.1. Variables

En este subapartado se presentarán las principales variables utilizadas en el modelo, haciendo distinción, debido a sus características propias, entre el problema plano y el problema orbital. También se detallarán las variables propias del vehículo utilizado.

2.1.1. Variables intrínsecas del vehículo de observación

El vehículo utilizado para la observación de puntos presenta una serie de características propias, presentadas en la sección 1.1. Éstas son:

- $\Omega_{m\acute{a}x}$: Velocidad máxima angular de giro (apuntamiento). Se supondrá constante e igual en todas las direcciones espaciales, por lo que no se tendrán en cuenta las distintas inercias del vehículo/satélite. Esto será analizado en profundidad en la sección 7.2.
- t_{AF} : Tiempo de estabilización de la cámara.
- Ψ : Ángulo máximo de balance y cabeceo. Se supondrá el mismo valor para la restricción de ambos ángulos.

2.1.2. Problema plano

En el problema plano se define un sistema de referencia fijo (R), estando los ejes x e y en el plano, y el eje z perpendicular a los mismos (sistema dextrógiro). El origen O^R del sistema se encontrará justo debajo de la posición inicial del vehículo, consiguiendo así que el vector posición del mismo no necesite de término inicial. Respecto a dicho sistema de referencia se definirán todas las variables del problema.

Se emplearán coordenadas cartesianas y las unidades elegidas para las variables serán consideradas adimensionales, siendo UD la unidad de distancia, UT la unidad de tiempo y rad para los ángulos.

- Posición del vehículo respecto al tiempo

En el problema plano se considerará, para simplificar, que el vehículo realiza una trayectoria a velocidad uniforme y contenida en un plano vertical contenido en el eje x . Por lo tanto existirán dos variables de control:

- V : Velocidad del vehículo.
- h : Altitud del vehículo.

El vector posición del vehículo referido al sistema de referencia utilizado se queda entonces como:

$$\vec{r}_v^R(t) = \begin{bmatrix} V \cdot t \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad (2.1.1)$$

y su derivada (utilizada posteriormente) será:

$$\frac{d\vec{r}_v^R(t)}{dt} = \vec{r}_v^R(t)' = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

- Posición de los puntos en el plano

La posición de un punto genérico p respecto al sistema de referencia quedará expresada como:

$$\vec{r}_p^R = \begin{bmatrix} r_{p1} \\ r_{p2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

ya que se encuentran situados en el plano $z = 0$.

2.1.3. Problema orbital

En el problema orbital se considerará un satélite ágil, situado en órbita baja, de características descritas posteriormente. las unidades elegidas serán km para la unidad de distancia, s para la unidad de tiempo y rad para los ángulos. A continuación se especificarán las distintas simplificaciones utilizadas en el modelo.

- Hipótesis de simplificación

Se van a considerar las siguientes hipótesis de simplificación para el problema:

- *Tierra esférica*: Aunque la geometría terrestre se ajuste mejor a un modelo elipsoidal, el modelo esférico es lo suficientemente aproximado para nuestro problema.
- *Perturbaciones*: Efectos aerodinámicos y efectos de J2 se supondrán que tienen un efecto muy lento, por lo que no afectarán a la optimización que se pretende conseguir en el proyecto.
- *Órbita circular*: Permitirá obtener una expresión analítica de la posición del satélite en función del tiempo. Así mismo, ya que la altitud en este caso será aproximadamente constante (no totalmente ya que la Tierra tendrá forma elipsoidal en el caso real), se podrá diseñar la óptica del satélite para dicha altura.
- *Órbita heliosíncrona*: Común en los satélites de observación terrestre, ya que permite que las condiciones de iluminación permanezcan constantes en una latitud elegida.

- Sistemas de referencia

A la hora de definir el movimiento del satélite, utilizaremos dos sistemas de referencia. El primero será el sistema geográfico (G), que rota con la Tierra, y tiene sus ejes x^G e y^G en el plano ecuatorial, siendo el eje z^G perpendicular a ambos (sistema dextrógiro). El origen O^G se sitúa en el centro de la Tierra, de manera que el plano $O^G x^G y^G$ coincide con el meridiano de Greenwich en todo momento. El segundo sistema de referencia es un sistema que permanece fijo respecto al tiempo, sistema geocéntrico inercial (I), de manera que tiene sus ejes x^I e y^I en el plano ecuatorial, con el eje z^I perpendicular a ambos (sistema dextrógiro), y el origen O^I en el centro terrestre. El eje x^I apunta en todo momento al primer punto de Aries (Υ).

Entre los dos sistemas de referencia aparece una rotación en torno al eje z , del sistema geográfico respecto al geocéntrico inercial. De esta manera, se efectuará un cambio de sistema de referencia entre las variables de los respectivos sistemas mediante la siguiente matriz de giro:

$$T_I^G = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.1.4)$$

donde $\beta = \beta(t) = \omega_{\oplus} \cdot t + GST_0$, $\omega_{\oplus} = 7,2921159 \cdot 10^{-5} rad/s$ y GST_0 es el tiempo sidéreo de Greenwich al inicio del día (00:00 UT) y dependerá del día y del año [4]. Ya que no es relevante este parámetro en el estudio de optimización que se va a realizar, se considerará que su valor es nulo.

Para la representación de variables en el sistema de referencia geográfico se utilizarán coordenadas esféricas $(R_{\oplus}, \phi, \lambda)$ siendo ϕ latitud y λ longitud clásicas, y R_{\oplus} el radio terrestre, siendo una constante en este caso particular.

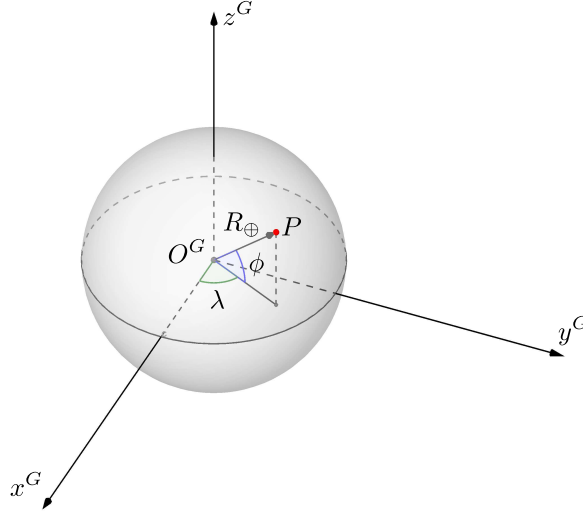


Figura 2.1.1: Coordenadas esféricas

Estas coordenadas tienen con respecto a las coordenadas cartesianas las siguientes relaciones:

$$\begin{cases} x^G = R_{\oplus} \cos(\phi) \cos(\lambda) \\ y^G = R_{\oplus} \cos(\phi) \sin(\lambda) \\ z^G = R_{\oplus} \sin(\phi) \end{cases} \quad (2.1.5)$$

$$\begin{cases} \phi = \text{atan}\left(\frac{z^G}{\sqrt{x^G + y^G}}\right) & -90^\circ < \phi < 90^\circ \\ \lambda = \text{atan}(y^G/x^G) & -180^\circ < \lambda < 180^\circ \end{cases} \quad (2.1.6)$$

- Posición del satélite respecto al tiempo

Para situar el satélite se utilizará el sistema geocéntrico inercial, así como un conjunto de 6 parámetros denominados *elementos orbitales*, detallados en el anexo (sección 8.2). La expresión del vector posición del satélite se encuentra detallada a su vez en la sección 8.2.2 del anexo, quedando:

$$\vec{r}_v^I(t) = r \begin{bmatrix} \cos(\Omega) \cos(u) - \sin(\Omega) \cos(i) \sin(u) \\ \sin(\Omega) \cos(u) + \cos(\Omega) \cos(i) \sin(u) \\ \sin(i) \sin(u) \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

siendo $r = p = a = R_{\oplus} + h$, siendo R_{\oplus} el radio terrestre (6378.14 km), h la altitud del satélite, y el parámetro u :

$$u = u_0 + n \cdot t \quad (2.1.8)$$

De acuerdo con las hipótesis, la órbita es circular y heliosíncrona, por lo que los parámetros que determinan la órbita serán:

- i : La expresión de este parámetro se encuentra desarrollada en [4]:

$$i = \text{acos} \left(\frac{-0,0989}{\left(\frac{R_{\oplus}}{R_{\oplus}+h} \right)^{7/2}} \right) \quad (2.1.9)$$

- Ω : Se tomará $\Omega = 0$, ya que no influirá en el estudio.
- u : El argumento de la latitud viene determinado por $u = u_0 + n \cdot t$ como ya hemos dicho, tomaremos $u_0 = 0$, y n :

$$n = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{(R_{\oplus} + h)^3}} \quad (2.1.10)$$

siendo $\mu_{\oplus} = 398600,442 \text{ km}^3/\text{s}$ el parámetro gravitacional terrestre.

Ya que el estudio de optimización se realizará en el sistema geográfico, se expresará el vector posición en dicho sistema mediante:

$$\vec{r}_v^G(t) = T_I^G \cdot \vec{r}_v^I(t) \quad (2.1.11)$$

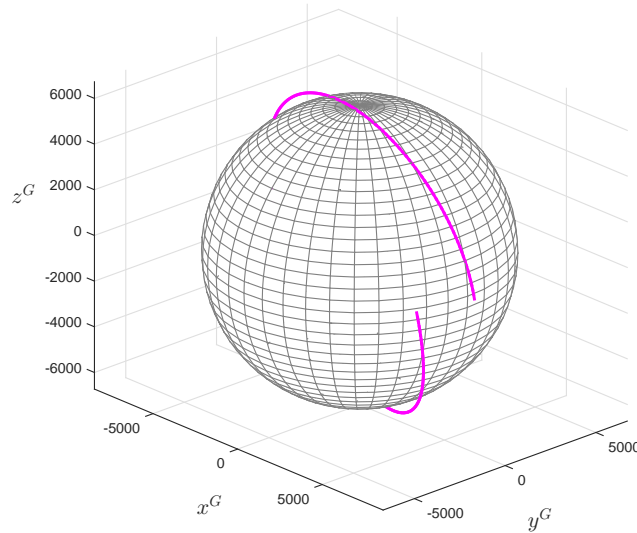


Figura 2.1.2: Órbita del satélite en el sistema geográfico

- Posición de los puntos en el plano

La posición de los puntos se realizará en el sistema de referencia geográfico, mediante coordenadas esféricas:

$$\vec{r}_p^R = \begin{bmatrix} R_{\oplus} \cos(\phi_p) \cos(\lambda_p) \\ R_{\oplus} \cos(\phi_p) \sin(\lambda_p) \\ R_{\oplus} \sin(\phi_p) \end{bmatrix} \quad (2.1.12)$$

por lo que se tiene de nuevo una pareja de parámetros, en este caso (ϕ_p, λ_p) .

2.2. Apuntamiento a un punto

El objetivo a conseguir es apuntar la cámara del vehículo/satélite a un punto, partiendo de una posición dada, en tiempo mínimo. Para ello, primero se definirán las variables involucradas en el giro.

Se utilizará el sistema de referencia fijo que interese según el caso como ya hemos visto (sistema de referencia fijo $(^R)$ en el modelo plano, y sistema de referencia geográfico $(^G)$ en el modelo orbital, que es el que se considerará «fijo»). La trayectoria del vehículo podrá ser arbitraria, no dependiendo de ello los resultados que se van a deducir. Por último, se harán uso de las características propias del vehículo de observación: Ω_{max} , t_{AF} y Ψ .

En lo que sigue, se obviarán los superíndices $(^R)$ o $(^G)$, ya que dependerán del caso, y no son determinantes para las deducciones que se van a realizar.

2.2.1. Caso estático

Como paso previo a la obtención del caso general, se deducirá la expresión del tiempo mínimo de giro para el caso estático, es decir, en el apuntamiento de un punto a a otro b manteniéndose el vehículo en reposo en todo momento.

Definiremos el vector unitario de apuntamiento de la cámara a un punto genérico p como:

$$\vec{C}_p(t) = \frac{\vec{r}_p - \vec{r}_v(t)}{|\vec{r}_p - \vec{r}_v(t)|} \quad (2.2.1)$$

donde \vec{r}_p es la posición del punto respecto al sistema de referencia, y $\vec{r}_v(t)$ la posición del vehículo en un tiempo dado t .

Conocidas las posiciones de los dos puntos involucrados en el giro (puntos a y b) y la posición del vehículo en un tiempo dado t_0 , el movimiento que minimiza el tiempo es un giro en torno a un eje perpendicular a ambas direcciones de apuntamiento, conocido como eje de Euler [4], y se calcula como:

$$\vec{e}_0 = \frac{\vec{C}_a^0 \wedge \vec{C}_b^0}{|\vec{C}_a^0 \wedge \vec{C}_b^0|} \quad (2.2.2)$$

siendo:

$$\vec{C}_a^0 = \vec{C}_a(t_0) \quad \vec{C}_b^0 = \vec{C}_b(t_0) \quad (2.2.3)$$

direcciones de apuntamiento a cada punto en el tiempo t_0 . Dicho vector es unitario, y permite la obtención de la velocidad angular de giro en el apuntamiento del punto a al b mediante:

$$\vec{\omega}_0 = \Omega \cdot \vec{e}_0 \quad (2.2.4)$$

donde Ω es la velocidad de giro del vehículo.

El ángulo de giro realizado por la cámara/vehículo en el proceso de apuntamiento entre los dos puntos en el caso estático se obtiene de:

$$\theta(t_0) = \theta_0 = \text{acos} \left[\vec{C}_a^0 \cdot \vec{C}_b^0 \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_a(t_0) \cdot \vec{C}_b(t_0) \right] \quad (2.2.5)$$

Una vez conocido el ángulo de giro, y conociendo la velocidad máxima de giro del vehículo Ω_{max} , para *minimizar* el tiempo empleado no queda mas que:

$$t_0^* = \frac{\theta_0}{\Omega_{max}} \quad (2.2.6)$$

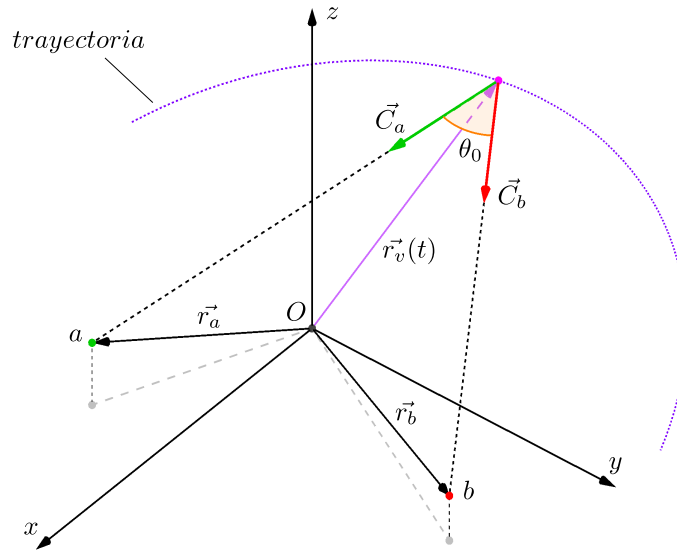


Figura 2.2.1: Apuntamiento en reposo entre dos puntos arbitrarios

2.2.2. Caso dinámico

Para el caso general en el que el vehículo no se mantiene en reposo, el apuntamiento consiste en un movimiento de la cámara partiendo del punto inicial a en t_0 , al punto b en un tiempo desconocido t . En este caso se definirán los vectores apuntamiento de forma distinta al caso en reposo. La dirección de apuntamiento inicial al punto a será:

$$\vec{C}_a = \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_v(t_0)}{|\vec{r}_a - \vec{r}_v(t_0)|} = \vec{C}_a^0 \quad (2.2.7)$$

y la dirección de apuntamiento al punto b transcurrido un tiempo t desde t_0 es:

$$\vec{C}_b = \vec{C}_b(t) = \frac{\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + t)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + t)|} \quad (2.2.8)$$

quedando definido de esta forma dicho vector en función exclusivamente del tiempo de apuntamiento t .

De forma general, el ángulo girado por la cámara/vehículo será:

$$\theta(t) = \text{acos} [\vec{C}_a \cdot \vec{C}_b(t)] \quad (2.2.9)$$

Este ángulo viene determinado exclusivamente por el tiempo de apuntamiento t , al igual que \vec{C}_b , ya que las posiciones de los puntos son conocidas a priori, y el apuntamiento inicial al punto a es conocido dado el tiempo de partida t_0 .

El eje de giro para cada valor del tiempo de apuntamiento vendrá dado por:

$$\vec{e}(t) = \frac{\vec{C}_a \wedge \vec{C}_b(t)}{|\vec{C}_a \wedge \vec{C}_b(t)|} \quad (2.2.10)$$

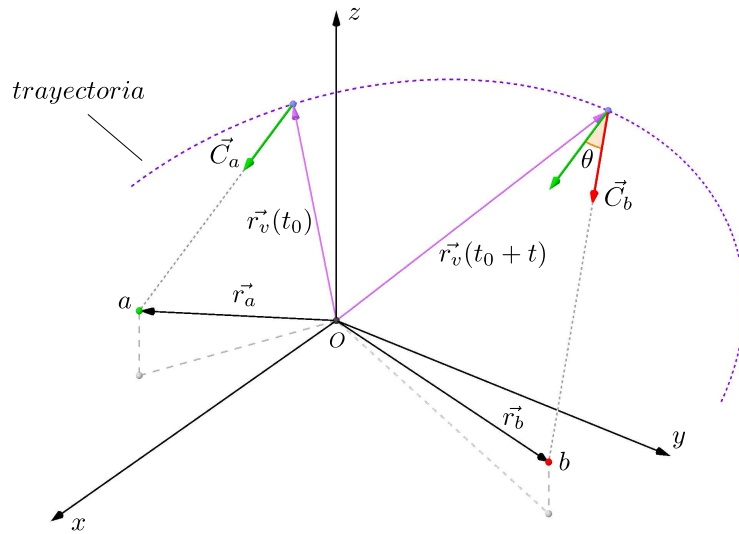


Figura 2.2.2: Apuntamiento dinámico entre dos puntos arbitrarios

Existirán múltiples valores posibles para el tiempo de apuntamiento t , que implicarán distintos valores del ángulo girado θ . Para ilustrar este hecho tomaremos el problema plano (sección 2.1.2) con los siguientes datos de partida (se obviarán las unidades de las variables por comodidad, ya que se encuentran detalladas en las secciones 2.1.2 y 2.1.3):

$$\vec{r}_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{r}_b = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y los datos del vehículo:

$$V = 1,2 UD/UT; \quad h = 100 UD; \quad \Omega_{max} = 1,5 \cdot \pi/180 \text{ rad}/UT$$

Se tomará $t_0 = 0$ para este caso particular. En el caso en el que el tiempo de apuntamiento fuese nulo ($t = 0$), el valor del giro sería $\theta(t = 0) = \theta_0$, ya que $\vec{C}_b(t = 0) = \vec{C}_b^0$. Para un valor cualquiera de t , se tendrá un valor específico para $\vec{C}_b(t)$ y por lo tanto un valor de $\theta(t)$. Con dicho valor del giro se puede obtener la velocidad angular asociada al mismo mediante:

$$\Omega(t) = \frac{\theta(t)}{(t + t_0) - t_0} = \frac{\theta(t)}{t} \tag{2.2.11}$$

quedando ilustrado en la figura 2.2.3.

Sin embargo, la velocidad angular de giro del vehículo solo puede tener ciertos valores:

$$\Omega \in [0, \Omega_{max}] \tag{2.2.12}$$

por lo que no serán posibles todos los valores del tiempo t .

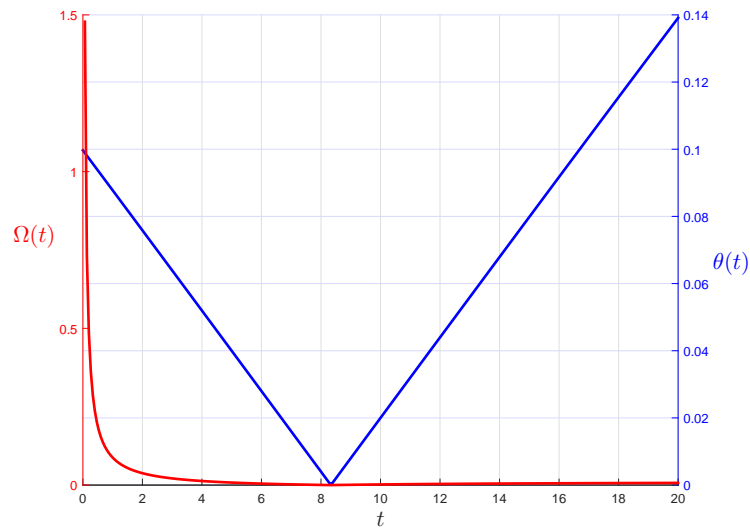


Figura 2.2.3: Evolución de $\theta(t)$ y $\Omega(t)$ para un caso particular (1)

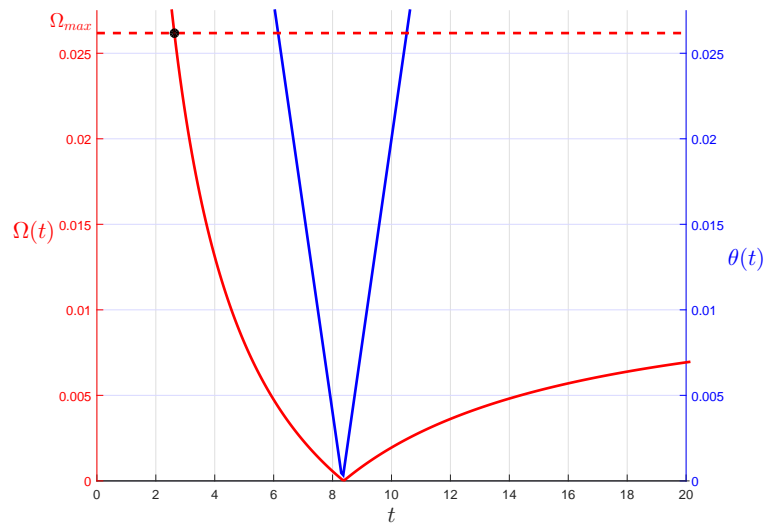


Figura 2.2.4: Evolución de $\theta(t)$ y $\Omega(t)$ para un caso particular (2)

En la figura 2.2.4 se ha realizado un zoom a la figura 2.2.3 respecto al eje y . De esta manera podemos observar mejor la forma de $\Omega(t)$ en el entorno del valor mínimo de $\theta(t)$. También podemos comprobar el acotamiento de valores $\Omega(t) \in [0, \Omega_{max}]$. Debido a esto, existirá un valor de t que optimizará el giro en el caso en el que el vehículo no esté en reposo, que denotaremos como t^* .

2.2.3. Tiempo óptimo de giro en movimiento

Como hemos visto en la sección anterior, se ha comprobado que existe un valor para el tiempo de apuntamiento t que es mínimo, y optimizará el giro. Para la obtención de este valor, se van a exponer dos métodos distintos de cálculo, que posteriormente se comentarán y compararán en tiempos de cálculo y precisión, ya que este proceso de cálculo será uno de los más utilizados en los algoritmos de optimización que se desarrollarán más adelante, por lo que se intentará minimizar el tiempo empleado en el cálculo lo máximo posible.

- Método 1

Sin más que observar las ecuaciones de la sección anterior, y la figura 2.2.4, para hallar el tiempo óptimo de giro t^* necesitamos que se cumpla:

$$\frac{\theta(t)}{t} = \Omega_{max} \quad (2.2.13)$$

ya que Ω_{max} minimizará el tiempo empleado, como era de esperar. Para la resolución, crearemos la siguiente función:

$$F(t) = \frac{\theta(t)}{t} - \Omega_{max} = 0 \Rightarrow t^* \quad (2.2.14)$$

Para resolver dicha función, al no poderse despejar de manera explícita la incógnita t , necesitaremos utilizar algún método de cálculo numérico, como por ejemplo, el método de Newton-Raphson. El valor de estimación inicial que se utilizará será t_0^* , tiempo de apuntamiento óptimo en reposo.

- Método 2

Otra forma de obtener el tiempo óptimo de giro en movimiento t^* consiste en realizar el siguiente método iterativo:

- Para todo $n \geq 0$ se calcula iterativamente:

$$t_{n+1}^* = \frac{\theta(t_n^*)}{\Omega_{max}} = \frac{\text{acos} \left[\frac{\vec{C}_a \cdot \vec{C}_b(t_n^*)}{\Omega_{mas}} \right]}{\Omega_{max}} \quad (2.2.15)$$

tomando como valor inicial para $n = 0$ el tiempo óptimo de giro en reposo t_0^* . La condición de parada vendrá dada por:

$$p_{n+1} \leq \text{tol} \quad (2.2.16)$$

siendo tol la tolerancia deseada, y p_{n+1} :

$$p_{n+1} = |t_{n+1}^* - t_n^*| \quad (2.2.17)$$

La convergencia de este método se encuentra demostrada en el anexo (sección 8.3).

- Comparación de los métodos

Para ilustrar las diferencias de tiempo de cálculo entre ambos métodos, se han realizado una serie de simulaciones para un caso particular del *problema plano* (como en la sección anterior), con los siguientes datos del vehículo:

$$V = 1,2 \text{ UD/UT}; \quad h = 100 \text{ UD}; \quad \Omega_{max} = 1,5 \cdot \pi / 180 \text{ rad/UT}$$

Se ha tomado $t_0 = 0$ y $\vec{r}_a = [0 \ 0 \ 0]^T$. Para el punto b se tomará un punto que pertenezca aleatoriamente a la zona:

$$x_b \in [5, 10] \quad y_b \in [5, 10] \quad (2.2.18)$$

Se ha elegido como parámetro de análisis la tolerancia numérica de cálculo. Para cada valor de tolerancia, se han realizado 200 simulaciones aleatorias (variando el punto b en cada una de ellas), tomando posteriormente la media de los resultados.

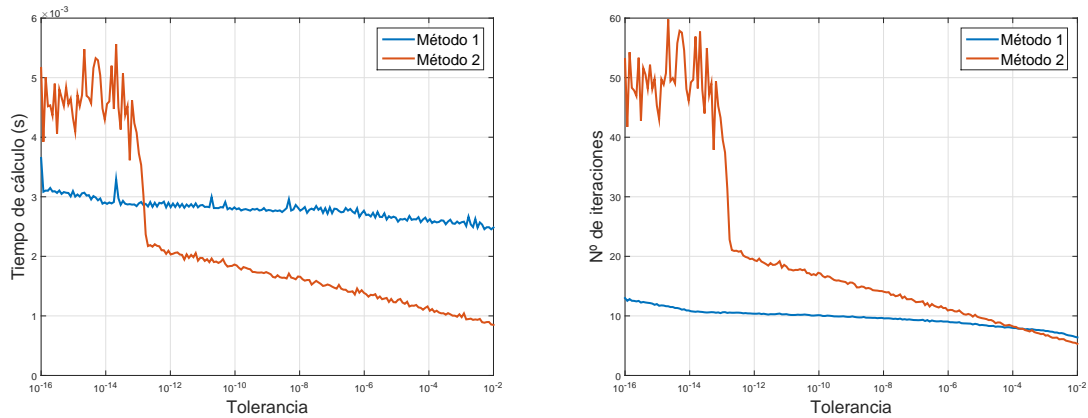


Figura 2.2.5: Comparación de tiempos de cálculo e iteraciones para los métodos de cálculo de t^*

Podemos comprobar en la figura 2.2.5 que el método 2, aun necesitando de un mayor número de iteraciones para obtener la misma tolerancia que el método 1, el tiempo de cálculo es menor para tolerancias comprendidas entre 10^{-3} y 10^{-12} .

También podemos observar un crecimiento inusual del tiempo de cálculo y del nº de iteraciones necesarias en el método 2 a partir de tolerancias superiores a 10^{-12} . Este fenómeno puede ser causado por la precisión interna de Matlab en sus funciones trigonométricas.

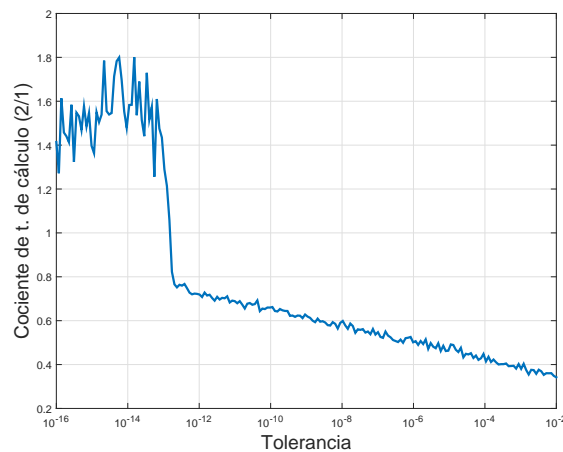


Figura 2.2.6: Cociente entre tiempos de cálculo de los métodos de cálculo de t^*

En la figura 2.2.6 se ve este hecho de manera más clara, comparando el tiempo de cálculo de ambos métodos, vemos que incluso para valores de tolerancia en torno a 10^{-6} (valor lo suficientemente preciso para los resultados que necesitamos), el tiempo de cálculo del método 2 llega a ser la mitad del tiempo de cálculo del método 1. Por este motivo, se empleará el método 2 para la obtención del tiempo óptimo de giro en movimiento t^* .

2.3. Cinemática del modelo

Una vez conocido el tiempo óptimo de giro para el vehículo en movimiento, queda definido el giro de la cámara en el apuntamiento entre dos puntos conocidos, ya que se conocen:

- \vec{C}_a : Vector apuntamiento al punto inicial a :

$$\vec{C}_a = \vec{C}_a^0 = \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_v(t_0)}{|\vec{r}_a - \vec{r}_v(t_0)|} \quad (2.3.1)$$

- \vec{C}_b : Vector apuntamiento al punto objetivo b transcurrido el tiempo óptimo de giro t^* :

$$\vec{C}_b = \vec{C}_b(t^*) = \frac{\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + t^*)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + t^*)|} \quad (2.3.2)$$

- θ : Ángulo de giro:

$$\theta = \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_b \right] \quad (2.3.3)$$

- \vec{e} : Eje de giro:

$$\vec{e} = \frac{\vec{C}_a \wedge \vec{C}_b}{|\vec{C}_a \wedge \vec{C}_b|} \quad (2.3.4)$$

Con estos datos, podemos conocer la cinemática del modelo. Existirán dos movimientos diferentes de la cámara: el primero consistirá en el giro para dirigir la cámara desde el punto inicial a al punto objetivo b ; y el segundo consistirá en mantener la cámara dirigida al punto b durante el tiempo de apuntamiento fijo t_{AF} , tiempo que necesita la cámara para estabilizarse y realizar la fotografía, definido en 2.1.1.

A continuación se detallarán ambos movimientos, y las expresiones matemáticas involucradas.

2.3.1. Apuntamiento a un punto

En el movimiento de apuntamiento desde el punto inicial a al punto objetivo b , el vector velocidad angular es conocido (como vimos en 2.2.1), y se define como:

$$\vec{\omega} = \Omega_{max} \cdot \vec{e} \quad (2.3.5)$$

La ecuación diferencial que rige el movimiento del vector apuntamiento es:

$$\frac{d\vec{C}(t)}{dt} = \frac{d\vec{C}^M(t)}{dt} + \vec{\omega} \wedge \vec{C}(t) \quad (2.3.6)$$

donde \vec{C} es el vector apuntamiento de la cámara del vehículo en el sistema de referencia utilizado según el modelo (plano u orbital), \vec{C}^M es el vector apuntamiento respecto a un sistema de referencia solidario con el vehículo, y que rota con el mismo, y la velocidad angular es la definida en (2.3.5).

Ya que \vec{C}^M se mantiene constante en el tiempo respecto a dicho sistema, ya que la cámara es solidaria al vehículo, y ambos rotan conjuntamente, se tendrá que $d\vec{C}^M(t)/dt = 0$, por lo que:

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{C} \quad (2.3.7)$$

Conocido el valor inicial del vector apuntamiento:

$$\vec{C}(t = t_0) = \vec{C}_a \quad (2.3.8)$$

podemos integrar (2.3.7) respecto al tiempo y de esta manera obtener la evolución del vector cámara en cada instante $\vec{C} = \vec{C}(t)$ desde el punto a al punto b , siendo finalmente:

$$\vec{C}(t = t_0 + t^*) = \vec{C}_b \quad (2.3.9)$$

2.3.2. Apuntamiento fijo

En el proceso de mantener fijo el apuntamiento al punto b durante el tiempo t_{AF} , la ecuación diferencial seguirá siendo:

$$\frac{d\vec{C}_b(t)}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{C}_b(t) \quad (2.3.10)$$

Pero en este caso, la velocidad angular no vendrá dada por el giro óptimo como en la expresión (2.3.5). Para poder deducir la expresión de $\vec{\omega}$, es necesario primero deducir una serie de expresiones necesarias para el desarrollo.

Conocido \vec{r}_b , posición del punto b , el vector apuntamiento en un instante de tiempo arbitrario t hacia dicho punto queda definido en la expresión (2.2.1):

$$\vec{C}_b(t) = \frac{\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)|}$$

Aun siendo conocido en todo momento el vector $\vec{C}_b(t)$, se realizará una integración de la ecuación diferencial (2.3.10), de manera que si en el futuro se añadiesen *perturbaciones* externas al modelo, se puedan tener en cuenta.

Ya que todas las variables involucradas son conocidas a priori, podemos obtener la expresión de la derivada respecto al tiempo de dicho vector como:

$$\left. \frac{d\vec{C}_b(t)}{dt} \right|_{deseada} = \vec{C}_b(t)' = \frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)|} \cdot \frac{d}{dt} [\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)] + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)|} \right] \cdot [\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)] \quad (2.3.11)$$

El desarrollo de la expresión (2.3.11) se encuentra detallado en el anexo (sección 8.4).

De esta manera, podemos definir la velocidad angular, sabiendo que $\vec{C}_b(t)$ es unitario por definición, como:

$$\vec{\omega}(t) = \vec{C}_b(t) \wedge \vec{C}_b(t)' \quad (2.3.12)$$

Para demostrar que (2.3.12) garantiza el apuntamiento fijo al punto b , podemos sustituir dicha expresión en la ecuación diferencial (2.3.10):

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{C}_b(t)}{dt} &= \vec{\omega} \wedge \vec{C}_b(t) = [\vec{C}_b(t) \wedge \vec{C}_b(t)'] \wedge \vec{C}_b(t) = \\ &= -\vec{C}_b(t) \wedge [\vec{C}_b(t) \wedge \vec{C}_b(t)'] = - \left| \begin{array}{cc} \vec{C}_b(t) & \vec{C}_b(t)' \\ \vec{C}_b(t) \cdot \vec{C}_b(t) & \vec{C}_b(t) \cdot \vec{C}_b(t)' \end{array} \right| = \\ &= \vec{C}_b(t)' [\vec{C}_b(t) \cdot \vec{C}_b(t)] - \vec{C}_b(t) [\vec{C}_b(t) \cdot \vec{C}_b(t)'] \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

y sabiendo que $\vec{C}_b(t) \cdot \vec{C}_b(t) = |\vec{C}_b(t)|^2 = 1$, y que $\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} |\vec{C}_b(t)|^2 = \vec{C}_b(t) \cdot \vec{C}_b(t)' = 0$, ya que $|\vec{C}_b(t)| = cte$, se llega a que:

$$\frac{d\vec{C}_b(t)}{dt} = \vec{C}_b(t)' = \left. \frac{d\vec{C}_b(t)}{dt} \right|_{deseada} \quad (2.3.14)$$

como queríamos demostrar.

Con la velocidad angular definida en (2.3.12), la ecuación diferencial (2.3.10), y la condición inicial $\vec{C}_b = \vec{C}_b(t_0 + t^*)$, podemos integrar y obtener la evolución del vector apuntamiento en el proceso de apuntamiento fijo, obteniendo para el tiempo final de integración $t = t_0 + t^* + t_{AF}$:

$$\vec{C}_b = \vec{C}_b(t_0 + t^* + t_{AF}) \quad (2.3.15)$$

2.3.3. Ejemplos

Para ilustrar los resultados obtenidos en las secciones anteriores, se mostrarán dos soluciones particulares, una para el problema plano y otra para el problema orbital.

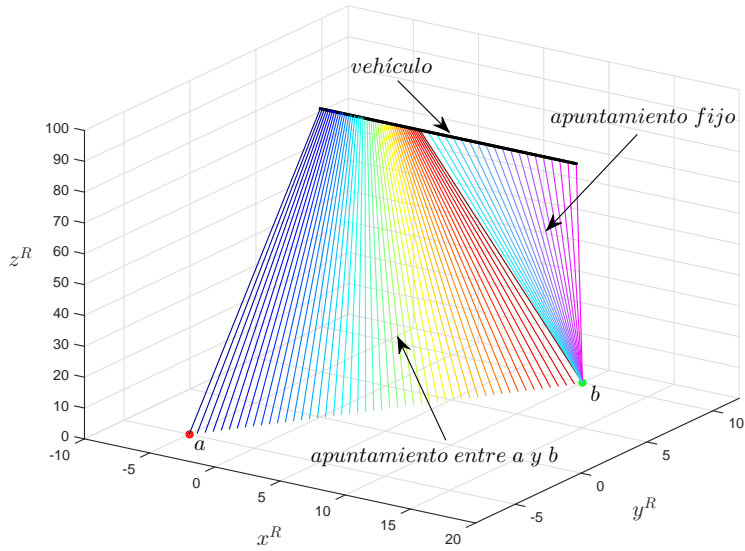


Figura 2.3.1: Evolución de \vec{C} para un apuntamiento dado (Problema plano)

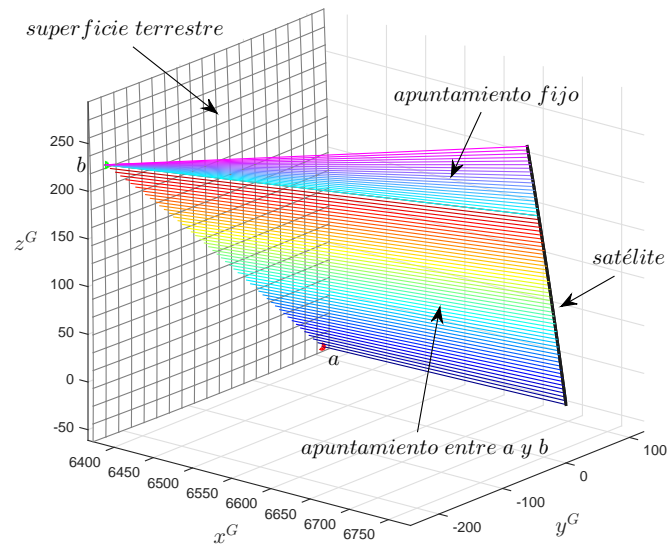


Figura 2.3.2: Evolución de \vec{C} para un apuntamiento dado (Problema orbital)

2.4. Apuntamiento a varios puntos

Una vez modelado el problema del apuntamiento entre 2 puntos, se plantea la situación en la que existen n puntos a observar. Se podría plantear analizar todas las combinaciones posibles ($n!$) de apuntamientos, y comprobar cual de ellas minimiza el tiempo total. El problema es que si el número de puntos n es muy elevado, el número de combinaciones sería extremadamente grande, lo que conllevaría un tiempo de cálculo muy excesivo, incluso imposible de tratar.

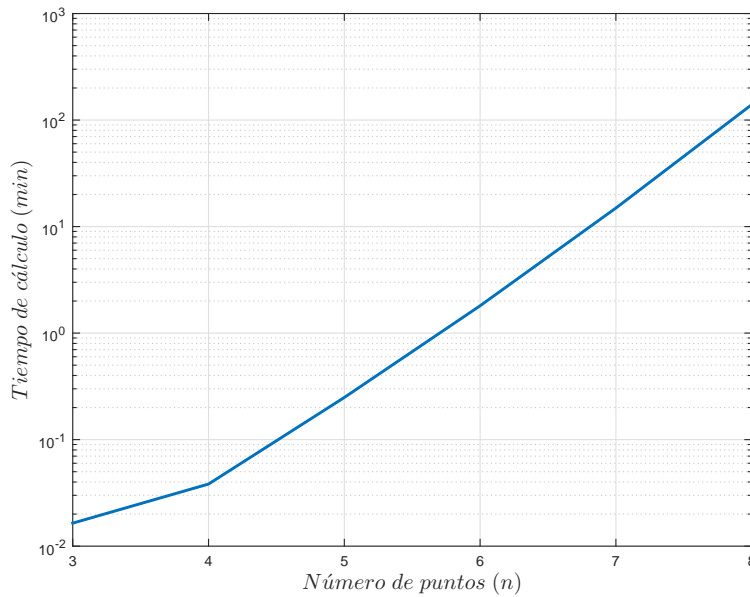


Figura 2.4.1: Tiempo de procesamiento según número de combinaciones posibles de puntos

Como podemos observar en la figura 2.4.1, el tiempo de cálculo respecto al número de puntos observables crece localmente de manera exponencial, aunque si se aumentasen el n^o de puntos, se podría comprobar el crecimiento factorial. Por este motivo, queda justificado el objeto del proyecto, que consiste en encontrar algoritmos de elección de puntos a observar, de manera que sea computacionalmente posible la obtención de la combinación óptima.

Además, como se verá en la sección 2.6, no todos los puntos existentes para fotografiar serán posibles de observar debido a las restricciones que tiene el vehículo. Por lo tanto, habrá que hallar, de entre todos los puntos dados para observar, los que realmente son posibles de alcanzar, maximizando el número de «capturas» u observaciones.

2.5. Representación gráfica

Resulta conveniente realizar una representación gráfica de la evolución de la cámara del vehículo/satélite de observación respecto del tiempo, así como del movimiento del vehículo/satélite de observación. Para ello se va a detallar en esta sección como obtener la traza del vector apuntamiento sobre la superficie en la que se encuentran los puntos a observar (el plano $z = 0$ en el problema plano, y la esfera terrestre en el problema orbital), así como la traza del vehículo.

Para calcular el vector posición $\vec{r}_t(t)$ de los puntos pertenecientes a la traza del vector apuntamiento sobre una superficie arbitraria, se supone que la dirección en la que apunta la cámara en cada instante de tiempo forma una recta $\vec{r}_r(t)$ definida mediante un punto y un vector:

$$\vec{r}_r(t) = \vec{r}_v(t) + \nu(t) \cdot \vec{C}(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} x_r(t) \\ y_r(t) \\ z_r(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_v(t) + \nu(t) \cdot C_1(t) \\ y_v(t) + \nu(t) \cdot C_2(t) \\ z_v(t) + \nu(t) \cdot C_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

siendo $\vec{r}_r(t)$ el vector posición de los puntos de dicha recta, $\vec{r}_v(t)$ el vector posición del vehículo, $\vec{C}(t)$ el vector unitario de apuntamiento y $\nu(t)$ el parámetro de la recta en cada instante de tiempo.

Para obtener la traza sobre una superficie de dicha recta, solo hay que calcular la intersección de la recta con dicha superficie, obteniendo para instante de tiempo, el valor de $\nu(t)$. Siendo $s(x, y, z) = 0$ la ecuación que define la superficie, se tiene que:

$$s(\vec{r}_r(t)) = 0 \Rightarrow s(x_r(t), y_r(t), z_r(t)) = 0 \Rightarrow \nu_s(t) \quad (2.5.2)$$

pudiendo obtener de la expresión obtenida en (2.5.2) el valor del parámetro $\nu_s(t)$ para la intersección con la superficie $s(x, y, z)$, teniendo de esta manera la traza $\vec{r}_t(t)$:

$$\vec{r}_t(t) = \vec{r}_v(t) + \nu_s(t) \cdot \vec{C}(t) \quad (2.5.3)$$

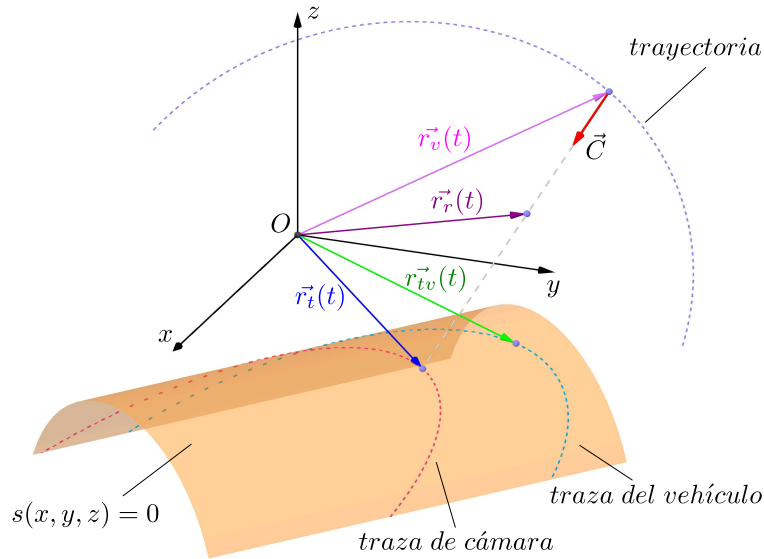


Figura 2.5.1: Representación genérica de vehículo y cámara

A continuación particularizaremos estas expresiones para los dos problemas estudiados en este trabajo.

2.5.1. Problema plano

En el problema plano, la superficie $s(x, y, z) = 0$ donde se encuentran los puntos, es el plano $z = 0$, por lo que para obtener el parámetro $\nu_s(t)$ no queda más que:

$$s(\vec{r}_r(t)) = 0 \Rightarrow z_r(t) = 0 \Rightarrow z_v(t) + \nu_s(t) \cdot C_3(t) = 0 \Rightarrow \nu_s(t) = \lambda(t) = -\frac{z_v(t)}{C_3(t)} \quad (2.5.4)$$

De esta manera, el vector posición de la traza del vector apuntamiento sobre el plano sería:

$$\vec{r}_t(t) = \vec{r}_v(t) + \lambda(t) \cdot \vec{C}(t) = \begin{bmatrix} x_v(t) - z_v(t) \cdot C_1(t) / C_3(t) \\ y_v(t) - z_v(t) \cdot C_2(t) / C_3(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.5)$$

Para la traza del vehículo en el plano, ya que el movimiento del mismo es una recta paralela al plano $z = 0$, el vector posición de los puntos de la traza será:

$$r_{tv}(t) = \begin{bmatrix} x_v(t) \\ y_v(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.5.6)$$

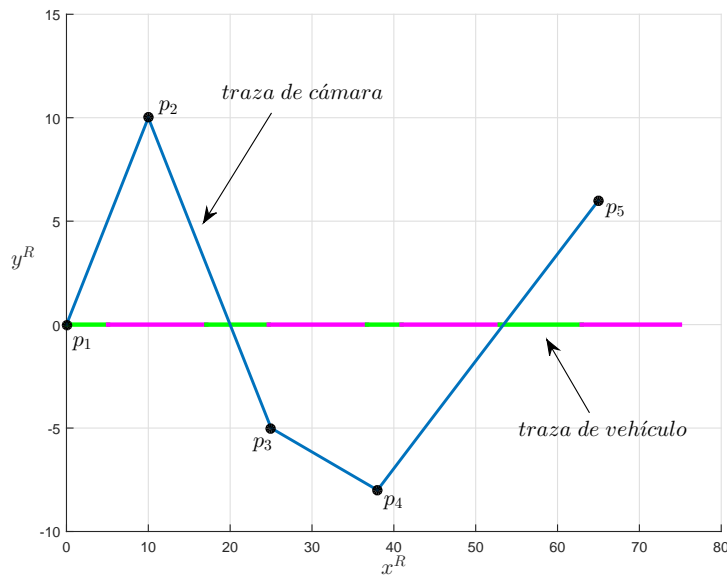


Figura 2.5.2: Representación gráfica de la traza del vehículo y cámara (Problema plano)

En la figura 2.5.2 podemos ver un ejemplo de observación de 5 puntos para el problema plano. El color verde en la traza del vehículo indica cuando el vehículo está realizando el apuntamiento de un punto al siguiente, y el color morado indica el apuntamiento fijo para la estabilización de la cámara (esto se puede observar con mayor claridad en la figura 2.3.1).

Nótese que, aunque la traza de la cámara en el plano puedan parecer rectas que unen los puntos en la figura 2.5.2, se comprueba en la figura 2.5.3 que en realidad son curvas, por lo que no es posible aproximar mediante uniones rectilíneas dichas trazas en el plano.

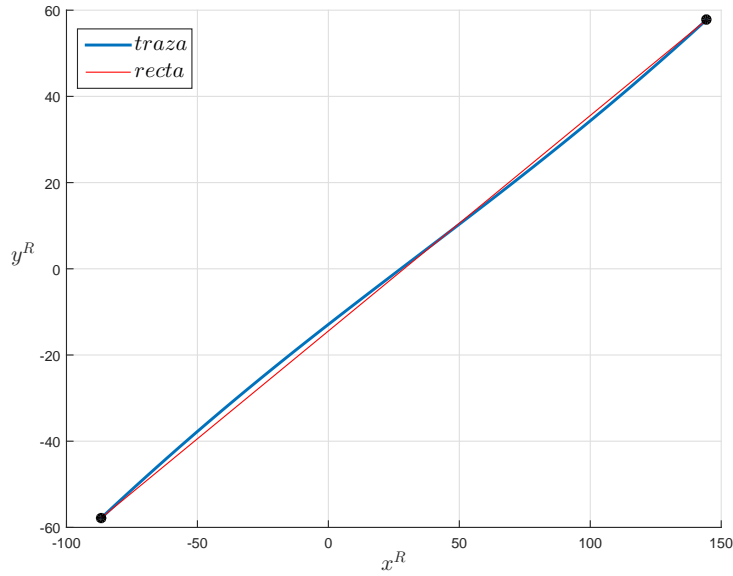


Figura 2.5.3: Comprobación de curvatura de la traza de cámara (Problema plano)

2.5.2. Problema orbital

En el problema orbital, la superficie $s(x, y, z) = 0$ donde se encuentran situados los puntos a observar, según las hipótesis tomadas en 2.1.3, es la esfera de ecuación:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R_{\oplus} \quad (2.5.7)$$

por lo que para obtener el parámetro $\nu_s(t)$ en este caso, tenemos que:

$$x_r(t)^2 + y_r(t)^2 + z_r(t)^2 = |\vec{r}_t(t)|^2 = R_{\oplus} \quad (2.5.8)$$

Operando podemos obtener:

$$|\vec{r}_t(t)|^2 = \left| \vec{r}_v(t) + \nu_s(t) \cdot \vec{C}(t) \right|^2 = |\vec{r}_v(t)|^2 + \nu_s(t)^2 \cdot \left| \vec{C}(t) \right|^2 + 2 \cdot \nu_s(t) \left[\vec{r}_v(t) \cdot \vec{C}(t) \right] \quad (2.5.9)$$

por lo que, combinando (2.5.8) y (2.5.9) se tiene que

$$|\vec{r}_v(t)|^2 + \nu_s(t)^2 \cdot \left| \vec{C}(t) \right|^2 + 2 \cdot \nu_s(t) \left[\vec{r}_v(t) \cdot \vec{C}(t) \right] - R_{\oplus} = 0 \quad (2.5.10)$$

que tiene la forma de una ecuación de segundo grado con variable $\nu_s(t)$, que a partir de ahora denominaremos $\tau(t)$:

$$a(t) \tau(t)^2 + b(t) \tau(t) + c(t) = 0 \quad (2.5.11)$$

siendo:

$$a(t) = \left| \vec{C}(t) \right|^2; \quad b(t) = 2 \vec{r}_v(t) \cdot \vec{C}(t); \quad c(t) = |\vec{r}_v(t)|^2 - R_{\oplus} \quad (2.5.12)$$

pudiendo obtener de esta forma el parámetro $\tau(t)$ mediante:

$$\frac{-b(t) \pm \sqrt{b(t)^2 - 4 \cdot a(t) c(t)}}{2 \cdot a(t)} = \begin{cases} \tau_1(t) \\ \tau_2(t) \end{cases} \quad (2.5.13)$$

De las dos soluciones resultantes, en el caso en el que ambas seas positivas, se tomará la de menor valor absoluto de las dos, dado que la otra corresponderá a la intersección de la recta con el lado opuesto de la Tierra al que nos interesa. En el caso en el que una solución fuera positiva y la otra negativa, tomaremos la positiva, ya que el sentido del vector apuntamiento apunta hacia la Tierra.

Con el valor obtenido de $\tau(t)$, no quedará mas que sustituir en (2.5.3):

$$\vec{r}_t(t) = \vec{r}_v(t) + \tau(t) \cdot \vec{C}(t) = \begin{bmatrix} x_v(t) + \tau(t) \cdot C_1(t) \\ y_v(t) + \tau(t) \cdot C_2(t) \\ z_v(t) + \tau(t) \cdot C_3(t) \end{bmatrix} \quad (2.5.14)$$

Para la traza en la superficie de la Tierra, al tratarse de una esfera de radio R_\oplus , normalizando el vector posición del satélite y escalandolo a dicha distancia, queda:

$$r_{tv}(t) = R_\oplus \frac{\vec{r}_v(t)}{|\vec{r}_v(t)|} = \frac{R_\oplus}{\sqrt{x_v(t)^2 + y_v(t)^2 + z_v(t)^2}} \begin{bmatrix} x_v(t) \\ y_v(t) \\ z_v(t) \end{bmatrix} \quad (2.5.15)$$

En la figura 2.5.4 podemos ver un ejemplo de observación de 5 puntos para el problema orbital, en coordenadas esféricas (latitud/longitud). Al igual que en la figura 2.5.2, la traza del satélite viene coloreada según si esta en proceso de apuntamiento entre puntos (verde), o apuntamiento fijo (morado).

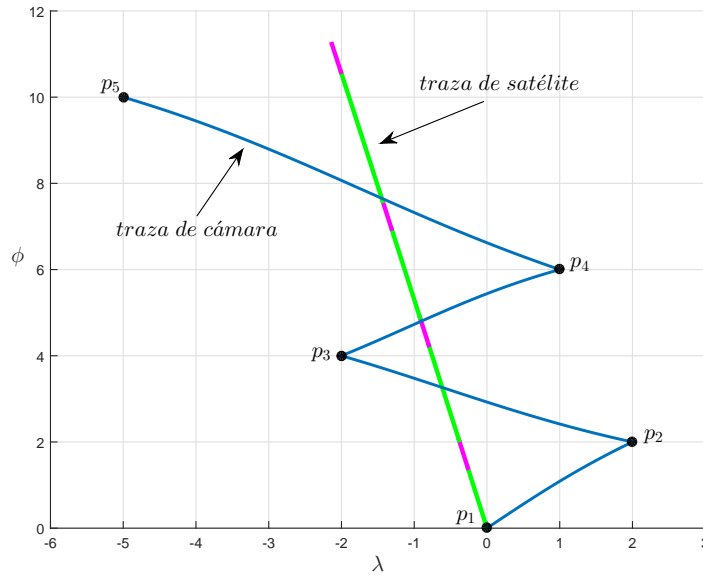


Figura 2.5.4: Representación gráfica de la traza del satélite y cámara (Problema orbital)

2.6. Restricciones de observación

Existen condicionantes intrínsecos al vehículo/satélite de observación que no se han tenido en cuenta aún en el modelado del apuntamiento entre puntos. El giro del vehículo para apuntar la cámara se encuentra limitado operacionalmente, tal y como fue detallado en la sección 1.1. Esta limitación no es debida a una restricción mecánica o cinemática, sino una cuestión de calidad fotográfica, ya que cuanto más perpendicular se encuentre la cámara a la superficie donde se encuentran los puntos, mayor calidad tendrán las fotografías que se realicen.

Por este motivo, en esta sección se va a analizar esta restricción operativa. En el primer apartado definiremos una nueva variable que indicará la desviación del vector apuntamiento con respecto al nadir, y en el segundo apartado veremos como afecta esta limitación a la observación de puntos.

2.6.1. Desviación respecto a nadir

Como ya hemos dicho, la calidad de las fotografías depende directamente de la desviación respecto al nadir, en un instante t , siendo el nadir la dirección perpendicular a la superficie donde se encuentran los puntos a observar. Para definir esta restricción, definiremos $\phi(t)$ desviación respecto al nadir en el instante de tiempo t como:

$$\phi(t) = \text{acos} \left[\vec{C}(t) \cdot \vec{n}(t) \right] \quad (2.6.1)$$

siendo $\vec{C}(t)$ el vector apuntamiento para ese tiempo t , y $\vec{n}(t)$ es el vector unitario, con origen en el satélite, que apunta en dirección perpendicular a la superficie de observación en ese instante t (nadir).

De esta forma la restricción vendrá dada de la siguiente forma:

$$\phi(t) \leq \Psi \quad (2.6.2)$$

siendo Ψ el ángulo máximo puede formar la cámara con el nadir, definido en 2.1.1. En la figura 2.6.1 podemos ver como el lugar geométrico de los puntos que la cámara ve, con suficiente calidad, en un cierto instante de tiempo t es un cono, cuya recta generatriz, con origen en el vehículo, forma un ángulo Ψ con el nadir. Así mismo, su eje de revolución coincide en dirección con el vector $\vec{n}(t)$.

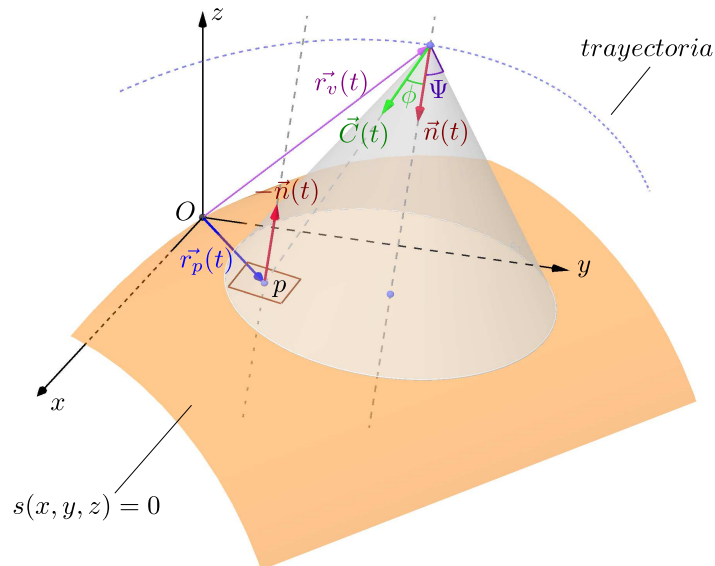


Figura 2.6.1: Desviación del vector apuntamiento respecto al nadir

El vector $\vec{n}(t)$ dependerá de la superficie en cuestión, siendo:

- *Problema plano*: La superficie en la que se encuentran los puntos se trata del plano $z = 0$, el nadir será:

$$\vec{n}(t) = \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.6.3)$$

constante para todo tiempo t .

- *Problema orbital*: La superficie en la que se encuentran los puntos es la superficie terrestre, es decir, una esfera de radio R_{\oplus} , por lo que en este caso particular, el vector $\vec{r}_v(t)$ apunta en todo momento de forma perpendicular a la superficie esférica (con sentido hacia afuera de la esfera). Por lo tanto:

$$\vec{n}(t) = -\frac{\vec{r}_v(t)}{|\vec{r}_v(t)|} \quad (2.6.4)$$

de esta forma se consigue el vector nadir $\vec{n}(t)$ de manera que apunte siempre en dirección interior a la esfera terrestre (hacia el origen O^G).

La intersección del cono generado por la restricción con la superficie de observación será denominada como curva de cobertura instrumental, ya que determinará para un instante de tiempo t la zona que contiene los puntos a los que el vehículo podría estar observando en dicho instante. Dicha *cobertura instrumental* será:

- *Problema plano*: En este caso la intersección del cono con el plano $z = 0$ dará como resultado una *circunferencia* de radio de cobertura instrumental conocido:

$$R_{ci}(t) = z_v(t) \cdot \tan(\Psi) = h \cdot \tan(\Psi) \quad (2.6.5)$$

- *Problema orbital*: En este caso la intersección del cono con la superficie terrestre resultará en una *circunferencia esférica*. Estando situado el satélite en el instante de partida t_0 en $\vec{r}_v(t_0)$, teniendo unas coordenadas esféricas asociadas que llamaremos (ϕ_0, λ_0) . Un punto de coordenadas esféricas (ϕ_p, λ_p) pertenecerá a la circunferencia esférica si y solo si:

$$\alpha(t) \leq \gamma(t) \quad (2.6.6)$$

donde $\alpha(t)$ es la distancia ortodrómica y su expresión viene dada por:

$$\cos[\alpha(t)] = \sin(\phi_p) \cdot \sin(\phi_0) + \cos(\phi_p) \cdot \cos(\phi_0) \cdot \cos(\lambda_p - \lambda_0) \quad (2.6.7)$$

y $\gamma(t)$ es el radio angular de la circunferencia, dado por:

$$\gamma(t) = \text{asin} \left[\frac{|\vec{r}_v(t)|}{R_{\oplus}} \cdot \sin(\Psi) \right] - \Psi \quad (2.6.8)$$

Para entender las implicaciones que tiene la restricción dada por la ecuación (2.6.2) hay que definir lo que vamos a llamar como *punto observable*.

Estando el vehículo situado en la posición $\vec{r}_v(t_0)$ para el instante t_0 , y estando apuntando la cámara actualmente en la dirección $\vec{C}_a(t_0)$, es decir, encontrándose el vehículo apuntando actualmente a un punto genérico a , un *punto observable* p_{obs} será un punto tal que una vez realizado el apuntamiento de a a p_{obs} en el tiempo óptimo t^* , y transcurrido el tiempo t_{AF} durante el cual debe mantenerse apuntando a dicho punto, se cumplirá que:

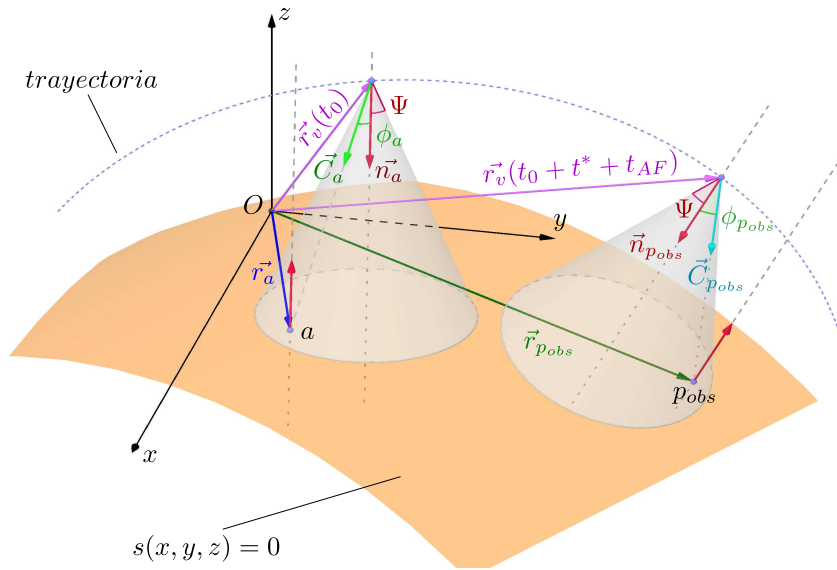
$$\phi_{p_{obs}} = \phi(t_o + t^* + t_{AF}) = \text{acos} \left[\vec{C}_{p_{obs}} \cdot \vec{n}_{p_{obs}} \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_{p_{obs}}(t_o + t^* + t_{AF}) \cdot \vec{n}(t_o + t^* + t_{AF}) \right] \leq \Psi \quad (2.6.9)$$

es decir, que al final del apuntamiento, la restricción de nadir se cumplirá. Esto conlleva que, aunque se cumpla la restricción inicialmente:

$$\phi_a = \phi(t_0) = \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{n}_a \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_a(t_0) \cdot \vec{n}(t_0) \right] \leq \Psi \quad (2.6.10)$$

existirán puntos que podrán ser observados o no. Es decir, habrá puntos que debido al tiempo que transcurre en el apuntamiento ($t^* + t_{AF}$), no cumplirán la restricción cuando se haya terminado dicho apuntamiento.

En la figura 2.6.2 se puede ver un ejemplo de *punto observable*, ya que una vez realizado el apuntamiento, se sigue cumpliendo la restricción del nadir.

Figura 2.6.2: Ejemplo de punto observable p_{obs}

Como se puede ver en la figura anterior, la intersección del cono de cobertura instrumental generado en el instante t_0 desde $\vec{r}_v(t_0)$, es decir, la curva de cobertura instrumental al inicio del apuntamiento, no englobará la totalidad de puntos denominados *observables*, o incluso englobará puntos que no serán observables según el criterio propuesto.

2.6.2. Curvas límite de observación

Una vez establecido lo que hemos denominado como *punto observable*, cabe preguntarse, dado un estado inicial de apuntamiento, es decir, estando el vehículo apuntando inicialmente en el instante t_0 a un punto a de coordenadas \vec{r}_a , si existirá una curva perteneciente a la superficie de observación $s(x, y, z) = 0$ que encierre la zona en la que todos los puntos interiores a la misma son observables. De esta forma, las denominaremos *curvas límite de observación*, ya que delimitarán los puntos que pueden ser observados y los que no (en términos de restricción de nadir).

En esta sección se deducirán dichas curvas para los dos problemas que se han modelado en el trabajo, empezando por el problema plano, ya que este, debido a sus particularidades, permitirá la obtención de expresiones analíticas de las curvas, así como mayor facilidad de comprensión del método utilizado para la obtención de las mismas. Una vez deducidas las curvas límite para este problema, se deducirá el método más general, aplicado para el problema orbital.

- Problema plano

Para la obtención de las curvas límite en el problema plano, haremos uso de la expresión (2.5.5) de la sección 2.5, que nos da el vector posición de la traza de la cámara en el plano $z = 0$ en función de la posición del vehículo $\vec{r}_v(t)$ y del vector apuntamiento $\vec{C}(t)$. Como hemos visto en la sección anterior, el vector \vec{n} que marcará la dirección del nadir será:

$$\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.6.11)$$

constante para todo tiempo t .

Como parámetro de partida tenemos la posición inicial del vehículo $\vec{r}_v(t_0)$, así como la dirección inicial de apuntamiento, que denotaremos como $\vec{C}_a = \vec{C}_a(t_0)$. Dicho de otra forma, el vehículo inicialmente se encontrará apuntando a un punto a de coordenadas \vec{r}_a (que deberá de estar dentro de la circunferencia de cobertura instrumental en el instante t_0 para que se cumpla la restricción inicialmente).

Los puntos pertenecientes la *curva límite de observación* los denotaremos como puntos k de coordenadas:

$$\vec{r}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.6.12)$$

El vector apuntamiento a uno de dichos puntos de la curva límite vendrá dado por:

$$\vec{C}_k(t) = \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t)|} \quad (2.6.13)$$

Como ya hemos visto, el proceso de apuntamiento se encuentra dividido en dos etapas: apuntamiento desde el punto inicial a hasta el punto k en el tiempo óptimo t^* , y apuntamiento fijo hacia k durante t_{AF} . Los vector apuntamientos al final de cada etapa vendrán dados por:

$$\vec{C}_k^* = \vec{C}_k(t^*) = \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t^*)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t^*)|} = \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ C_3^* \end{bmatrix} \quad (2.6.14)$$

$$\vec{C}_k^f = \vec{C}_k(t^* + t_{AF}) = \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF})}{|\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF})|} = \begin{bmatrix} C_1^f \\ C_2^f \\ C_3^f \end{bmatrix} \quad (2.6.15)$$

Por definición de la curva límite de observación, los puntos pertenecientes a la misma cumplen que el vector apuntamiento \vec{C}_k^f a dichos puntos (al final del apuntamiento) formará un ángulo ϕ_k^f con respecto al nadir:

$$\phi_k^f = \phi(t_o + t^* + t_{AF}) = \text{acos} \left[\vec{C}_k^f \cdot \vec{n} \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_k(t^* + t_{AF}) \cdot \vec{n} \right] \in [0, \Psi] \quad (2.6.16)$$

El ángulo ϕ_k^f será conocido, siendo un parámetro de decisión de la curva límite, y será igual al ángulo máximo Ψ en principio, pero, como veremos más adelante, se definirá de esta forma más general.

Así mismo, el vector apuntamiento \vec{C}_k^* formará un ángulo ϕ_k^* con respecto al nadir:

$$\phi_k^* = \phi(t_o + t^*) = \text{acos} \left[\vec{C}_k^* \cdot \vec{n} \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_k(t^*) \cdot \vec{n} \right] \quad (2.6.17)$$

A diferencia de ϕ_k^f , el ángulo ϕ_k^* será desconocido de antemano, ya que dependerá del punto de la curva en cuestión.

Debido a que \vec{n} es constante en el tiempo, podemos deducir que, para todos los puntos k pertenecientes a la curva límite se cumplirá que:

$$\vec{C}_k^f \cdot \vec{n} = -C_3^f = \cos(\phi_k^f) \Rightarrow C_3^f = -\cos(\phi_k^f) < 0 \quad (2.6.18)$$

Es decir, todos los vectores \vec{C}_k^f correspondientes a cada punto de la curva límite de observación estarán contenidos, cada uno de ellos, en un cono cuya generatriz tiene como origen el vehículo y forma un ángulo ϕ_k^f con el nadir, y su eje de revolución coincide con \vec{n} .

A partir de la ecuación (2.6.18), y sabiendo que todos los vectores apuntamiento son *unitarios* por definición, podemos parametrizar todos los vectores \vec{C}_k^f de la siguiente forma:

$$\vec{C}_k^f = \begin{bmatrix} C_1^f \\ C_2^f \\ C_3^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi_k^f) \cos(\alpha) \\ \sin(\phi_k^f) \sin(\alpha) \\ -\cos(\phi_k^f) \end{bmatrix} = \vec{C}_k^f(\alpha, \phi_k^f) \quad (2.6.19)$$

Con esta parametrización se consigue recorrer todos y cada uno de los vectores \vec{C}_k^f posibles, por lo que no hay que pensar en ella como una parametrización «geométrica» de la curva, ya que el punto interno a partir del cual se mide dicho ángulo α no corresponde a ningún punto fijo.

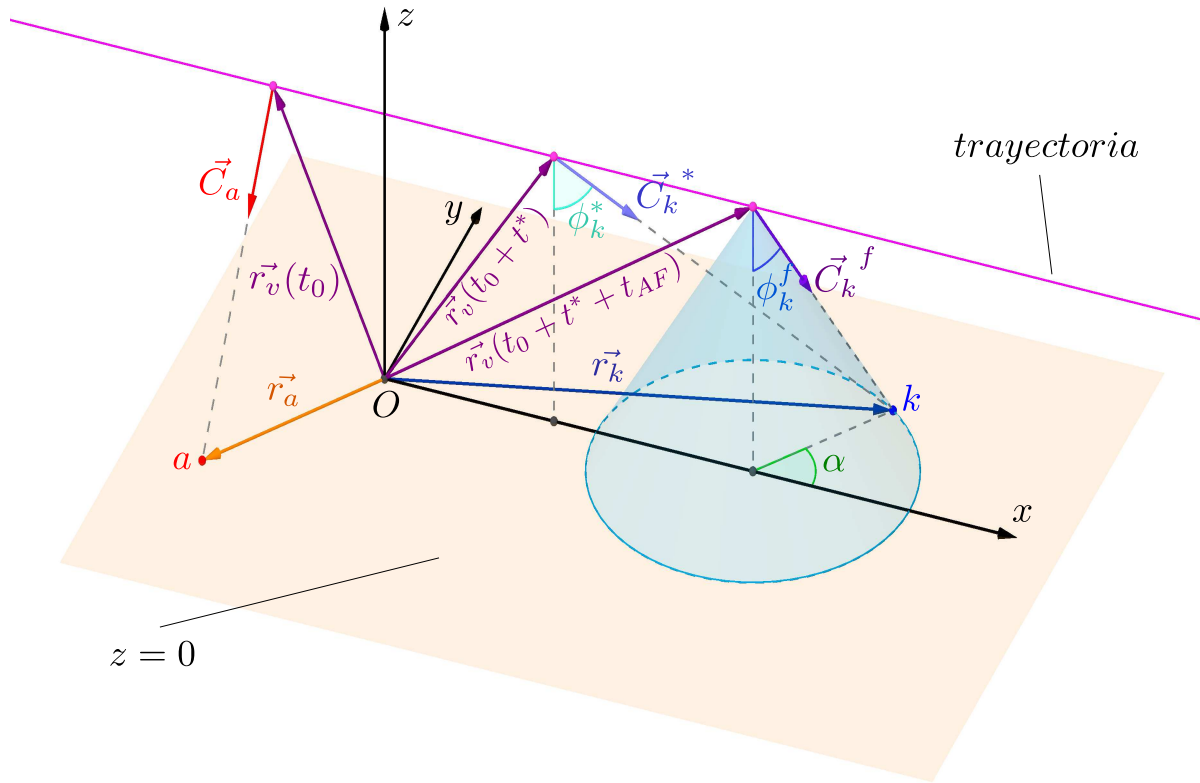


Figura 2.6.3: Punto k de la curva límite (problema plano)

En la figura 2.6.3 podemos ver un ejemplo de todo lo mencionado anteriormente, así como de la parametrización de los vectores \vec{C}_k^f . Nótese que para cada valor de α , se tendrá un vector \vec{C}_k^f . Cada uno de dichos vectores estará contenido en un cono distinto, ya que el origen de las generatrices de los respectivos conos depende de la posición del vehículo, la cual dependerá del tiempo empleado en apuntamiento a cada punto específico de la curva (t^*).

El vector apuntamiento \vec{C}_k^* , a diferencia de \vec{C}_k^f , no es conocido a priori, ya que dependerá de $\vec{r}_v(t_0 + t^*)$, y este a su vez del tiempo óptimo t^* . Dicho tiempo óptimo dependerá del punto a determinar de la curva límite de observación, como ya se ha comentado anteriormente.

El desarrollo de los cálculos necesarios para la obtención del vector \vec{C}_k^* se encuentra en el anexo (sección 8.5.1), así como la deducción de las expresiones para obtener las coordenadas de los puntos pertenecientes a la curva límite, debido a la extensión de los mismos.

Una vez obtenido el vector \vec{C}_k^* , podremos obtener el giro realizado por el apuntamiento:

$$\theta = \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_k^* \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_k(t^*) \right] \quad (2.6.20)$$

y el tiempo de apuntamiento:

$$t^* = \frac{\theta}{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \cdot \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_k^* \right] \quad (2.6.21)$$

Las coordenadas de los puntos k pertenecientes a la curva límite serán:

$$\begin{cases} x_k = x_v(t_0 + t^* + t_{AF}) + \lambda^f \cdot C_1^f \\ y_k = y_v(t_0 + t^* + t_{AF}) + \lambda^f \cdot C_2^f \\ z_k = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_k = x_k(\alpha, \vec{r}_a) = V \cdot (t_0 + t^* + t_{AF}) + h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) \\ y_k = y_k(\alpha, \vec{r}_a) = h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \sin(\alpha) \\ z_k = z_k(\alpha, \vec{r}_a) = 0 \end{cases} \quad (2.6.22)$$

Expresiones en las que todos los parámetros involucrados ($V, t_0, t_{AF}, h, \alpha, \phi_k^f$) son conocidos, y el tiempo t^* es calculado por el método proporcionado anteriormente.

Se ha conseguido un conjunto de ecuaciones analíticas para obtener cada punto de la curva límite de observación. El proceso de cálculo sería el siguiente:

- Se elige un valor de ϕ_k^f que definirá la restricción del nadir. En principio $\phi_k^f = \Psi$.
- Se parametrizará α con valores comprendidos entre 0 y 2π . Para cada uno de los valores, se obtendrá un punto particular de la curva límite de observación.
- Para cada valor de α y ϕ_k^f se obtiene el vector \vec{C}_k^f mediante (2.6.19).
- A través de (8.5.34) y (8.5.33) se obtiene el vector \vec{C}_k^* .
- Una vez obtenido el vector \vec{C}_k^* , se calcula t^* mediante la expresión (2.6.21).
- Finalmente se sustituyen los valores obtenidos en las expresiones (2.6.22) para obtener las coordenadas del punto \vec{r}_k .

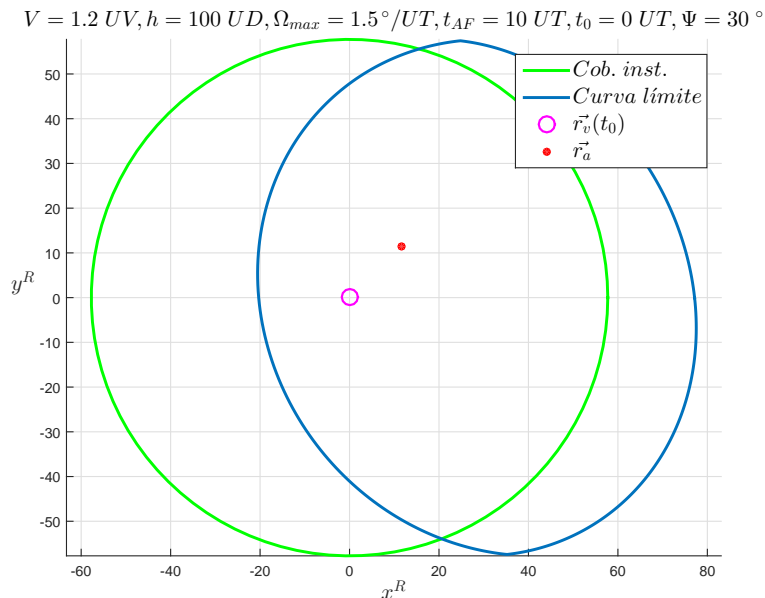


Figura 2.6.4: Ejemplo de curva límite de observación

En la figura 2.6.4 podemos ver un ejemplo para un caso particular de parámetros. En ella se ha representado la traza del vehículo en el instante inicial $\vec{r}_v(t_0)$, la circunferencia de cobertura instrumental en el instante inicial de radio R_{ci} (ecuación (2.6.5)) y el punto inicial a al que el vehículo se encuentra apuntando de partida con dirección \vec{C}_a , que tiene que estar contenido en la circunferencia de cobertura instrumental, ya que si no,

el ángulo ϕ_a que formaría la cámara con respecto al nadir al comienzo (expresión (2.6.10)) sería superior a la restricción Ψ .

Se comprueba, como se dijo anteriormente, que la circunferencia de cobertura instrumental engloba parte de la curva límite de observación, pero son claramente diferentes.

La forma de la curva límite obtenida dependerá fuertemente del punto inicial de apuntamiento a , de coordenadas \vec{r}_a y vector apuntamiento \vec{C}_a . Posteriormente se analizará el efecto del punto inicial en la forma de las curvas, ya que antes de continuar, se analizará un efecto que aún no se ha tenido en cuenta.

La definición generalizada del ángulo ϕ_k^f no ha sido arbitraria, ya que hay que hacer notar cierta particularidad de las curvas límite de observación. Para ello se va a obtener una expresión analítica en función de los parámetros de decisión del ángulo ϕ_k^* . Por definición se tiene que:

$$\phi_k^* = \phi(t_o + t^*) = \text{acos} \left[\vec{C}_k^* \cdot \vec{n} \right] = \text{acos}(-C_3^*) \Rightarrow C_3^* = -\cos(\phi_k^*) \quad (2.6.23)$$

y se tiene por la expresión (8.5.33) que:

$$C_3^* = - \left(\frac{F}{h^2} + 1 \right)^{-1/2} \quad (2.6.24)$$

siendo F :

$$F = \left[(f_x)^2 + (f_y)^2 \right] \quad (2.6.25)$$

Mediante las definiciones de f_x y f_y ((8.5.27) y (8.5.28)), podemos sustituir en la expresión anterior y obtener:

$$\frac{1}{h^2} \cdot F = \frac{1}{h^2} \cdot \left[\left(V \cdot t_{AF} + h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) \right)^2 + \left(h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \sin(\alpha) \right)^2 \right] \quad (2.6.26)$$

Desarrollando términos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \cdot F &= \frac{1}{h^2} \cdot \left[(V \cdot t_{AF})^2 + \left(h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 2 \cdot (V \cdot t_{AF}) \cdot \left(h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) \right) + \left(h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \sin(\alpha) \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.6.27)$$

Agrupando términos podemos llegar a:

$$\frac{1}{h^2} \cdot F = \tan^2(\phi_k^f) + \left(\frac{V \cdot t_{AF}}{h} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{V \cdot t_{AF}}{h} \right) \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) \quad (2.6.28)$$

Mediante la definición de ϕ_k^* :

$$C_3^* = -\cos(\phi_k^*) = - \left(\frac{F}{h^2} + 1 \right)^{-1/2} \Rightarrow \frac{F}{h^2} + 1 = \frac{1}{\cos^2(\phi_k^*)} \quad (2.6.29)$$

Desarrollando gracias a (2.6.28) se obtiene finalmente:

$$\frac{1}{\cos^2(\phi_k^*)} = 1 + \tan^2(\phi_k^f) + \left(\frac{V \cdot t_{AF}}{h} \right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{V \cdot t_{AF}}{h} \right) \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) \quad (2.6.30)$$

Expresión que nos permitirá obtener ϕ_k^* a través de los parámetros $(V, t_{AF}, h, \alpha, \phi_k^f)$, así como de manera inversa ϕ_k^f a través de $(V, t_{AF}, h, \alpha, \phi_k^*)$.

Nótese que el ángulo ϕ_k^* (o de manera inversa el ángulo ϕ_k^f) *no depende* del estado inicial del vehículo $\vec{r}_v(t_0)$ ni del punto inicial de apuntamiento a (con dirección de apuntamiento \vec{C}_a).

Una vez deducida la dependencia funcional de ϕ_k^* , por la definición de *punto observable* realizada anteriormente, elegiremos $\phi_k^f = \Psi$ como restricción al final del apuntamiento, y calcularemos los valores que se obtienen de ϕ_k^* en un caso particular para analizar su comportamiento.

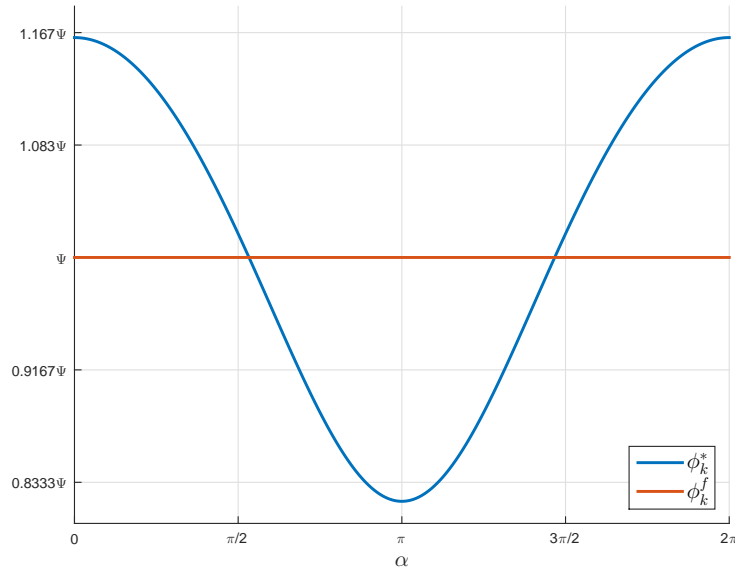


Figura 2.6.5: Evolución de ϕ_k^* y ϕ_k^f (problema plano)

Se han representado en la figura 2.6.5 la evolución de ϕ_k^* y ϕ_k^f según el parámetro α , que barrerá todos los puntos de la curva de 0 a 2π . Se observa que el ángulo ϕ_k^* no cumple la restricción para todos los valores de α . Esto es debido a que, aunque al final del apuntamiento se cumpla la restricción ($\phi_k^f = \Psi$), habrá puntos en los que, debido al tiempo que se emplea en el apuntamiento (t^*) será mas o menos grande según la lejanía del punto objetivo k respecto al inicial a , el vehículo irá hacia el punto, o se alejará de él. Por este motivo, hay puntos (α) que harán que el ángulo que forma la cámara al final de la primera etapa de apuntamiento (ϕ_k^*) sea menor que Ψ , y habrá puntos en los que se superará la restricción.

Esta desviación de ϕ_k^* no es decisiva a la hora de realizar fotografías, ya que la cámara realizara las mismas una vez transcurrido el tiempo t_{AF} , es decir, cuando el ángulo formado con respecto al nadir es ϕ_k^* , que sí cumple la restricción. Sin embargo, si se quisiera realizar un vídeo, o si se decide que la restricción se debe cumplir en todo el tiempo t_{AF} , es necesario arreglar este problema.

Para ello, gracias a la ecuación (2.6.30), podemos realizar una corrección del valor de ϕ_k^f . Se tomará por defecto que $\phi_k^f = \Psi$, y para cada valor de α , se calculará el valor de ϕ_k^* , y se realizará:

$$\phi_k^f = \begin{cases} \Psi & \phi_k^* \leq \Psi \\ \phi_k^f|_c & \phi_k^* \geq \Psi \end{cases} \quad (2.6.31)$$

Es decir, si se obtiene que ϕ_k^* es inferior o igual a Ψ , no es necesario corregir. Si se supera la restricción, se sustituirá el valor de ϕ_k^f por el de $\phi_k^f|_c$. Este valor se obtendrá al resolver la ecuación (2.6.5), sustituyendo el valor de ϕ_k^* por la restricción Ψ :

$$1 + \tan(\phi_k^f)^2 + \left(\frac{V \cdot t_{AF}}{h}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{V \cdot t_{AF}}{h}\right) \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) - \frac{1}{\cos(\Psi)^2} = 0 \quad (2.6.32)$$

Siendo una ecuación de segundo grado del tipo:

$$A \cdot \tan(\phi_k^f)^2 + B \cdot \tan(\phi_k^f) + C = 0 \rightarrow \phi_k^f|_c \quad (2.6.33)$$

tomando de las dos soluciones, la positiva.

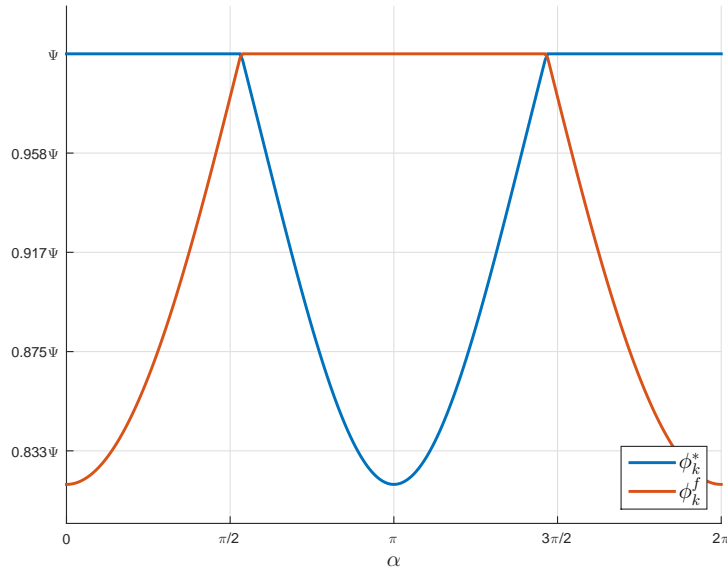


Figura 2.6.6: Evolución de ϕ_k^* y ϕ_k^f con corrección (problema plano)

Una vez realizada la corrección, podemos ver en la figura 2.6.6 la evolución de los ángulos ϕ_k^* y ϕ_k^f . Se comprueba que ahora se cumple la restricción para todos los valores de α , como se quería conseguir.

Con todo esto, queda definida la forma de obtener las curvas límite de observación para el caso de problema plano. En la figura 2.6.7 se muestran distintas familias de curvas según la posición del punto inicial a de apuntamiento. Se ha realizado una variación de \vec{r}_a de manera que este contenido siempre dentro de la circunferencia de cobertura instrumental inicial, para que la restricción se cumpla también en el punto de partida:

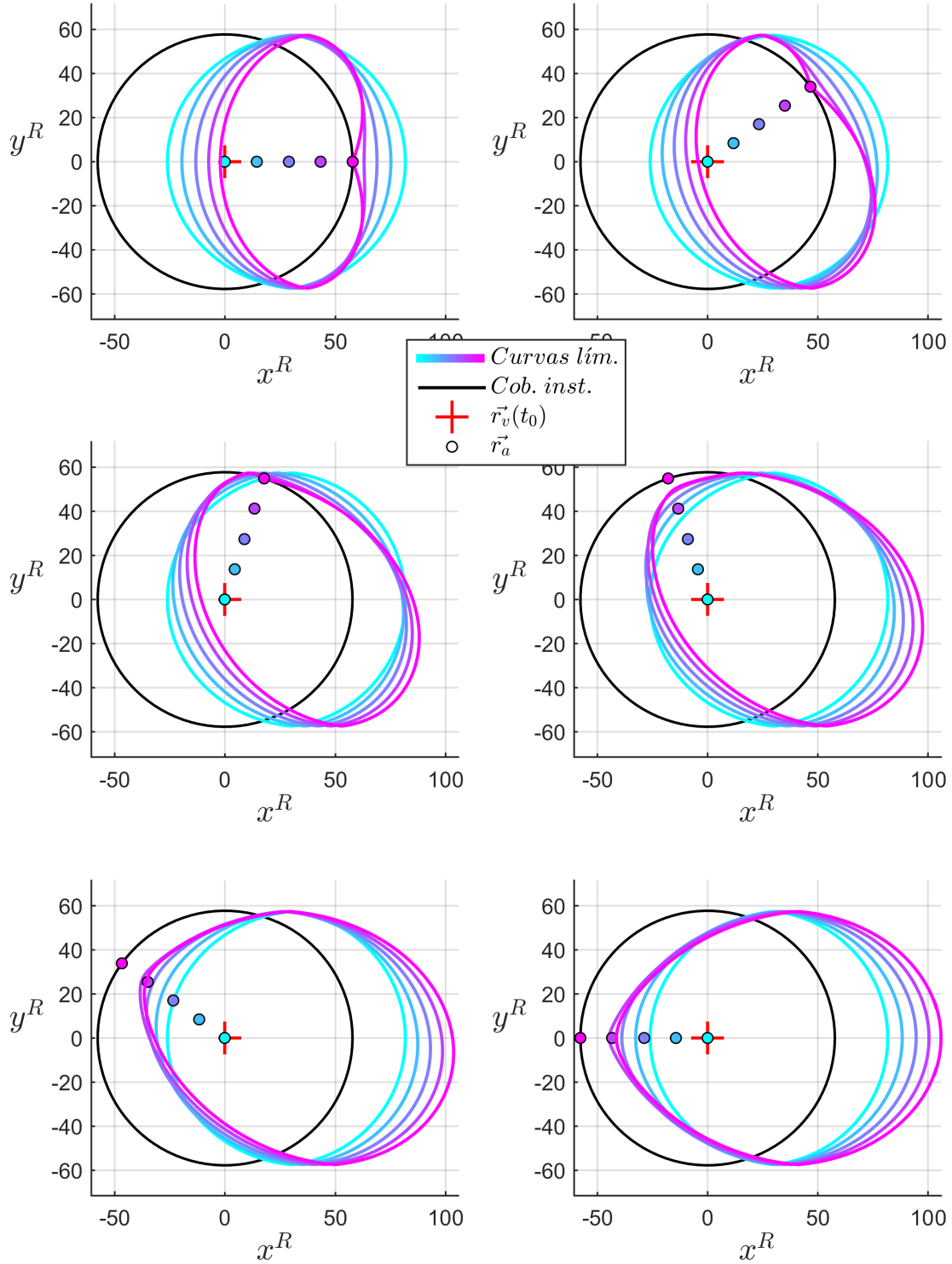
$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(c, \beta) = \begin{bmatrix} c \cdot R_0 \cdot \cos(\beta) \\ c \cdot R_0 \cdot \sin(\beta) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c \in [0, 1], \quad \beta \in [0, \pi]$$

siendo R_0 el radio de la circunferencia de cobertura instrumental al inicio (t_0), obtenido en (2.6.5). Los parámetros c y β se varían para hacer notar las variaciones de forma que sufren las curvas. β solo varía hasta π ya que el problema es simétrico con respecto al eje x .

Se observa que la forma de la curva límite es fuertemente dependiente del punto inicial de apuntamiento. También se observa que dicho punto inicial puede estar en el interior de la curva límite, o estar en su exterior (para valores altos de β). Como era de esperar, los límites superior e inferior de las curvas coinciden con $\pm R_0$.

Figura 2.6.7: Familia de curvas límite (problema plano)

$$V = 1.2 UV, h = 100 UD, \Omega_{max} = 1.5^\circ/UT, t_{AF} = 10 UT, t_0 = 0 UT, \Psi = 30^\circ$$



Para obtener el área encerrada por la curva límite:

$$A(c, \beta) = \int y_k dx_k = \int_0^{2\pi} y_k(\alpha, \vec{r}_a) \frac{dx_k(\alpha, \vec{r}_a)}{d\alpha} d\alpha \quad (2.6.34)$$

$$V = 1.2 UV, h = 100 UD, \Omega_{max} = 1.5^\circ/UT, t_{AF} = 10 UT, t_0 = 0 UT, \Psi = 30^\circ$$

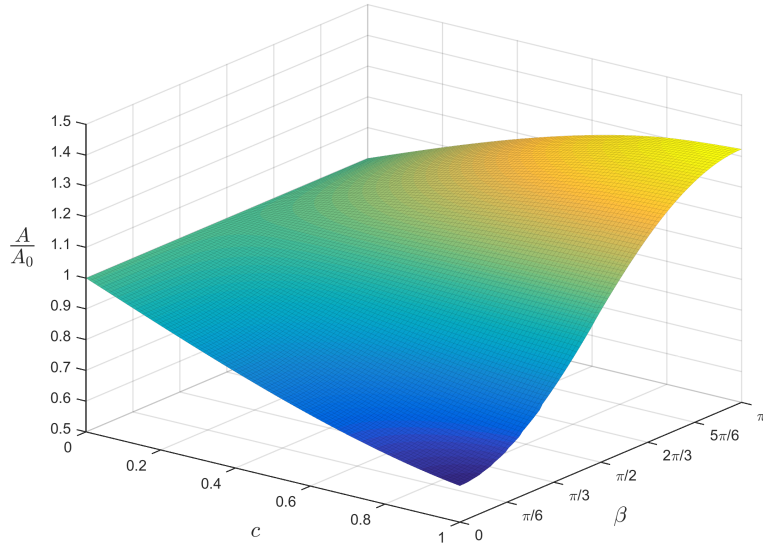


Figura 2.6.8: Evolución de las áreas de las curvas límite según c y β

En la figura (2.6.8) se muestra la variación que sufren las áreas encerradas por las curvas según los parámetros c y β . Se ha representado:

$$\frac{A}{A_0} = \frac{A(\vec{r}_a(c, \beta))}{A(\vec{r}_a(0, 0))}$$

De esta forma podemos observar como dentro de todas las familias de curvas límite existe una variación de área bastante importante, llegando a variar $\pm 30\%$ de $A_0 = A(c = 0, \beta = 0)$.

Para obtener los límites derecho (x_d) e izquierdo (x_i) de las curvas, solo tenemos que derivar la componente x_k de la curva límite:

$$\left. \frac{\partial x_k(\alpha, \vec{r}_a)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} = 0 \rightarrow x_d \quad (2.6.35)$$

$$\left. \frac{\partial x_k(\alpha, \vec{r}_a)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]} = 0 \rightarrow x_i \quad (2.6.36)$$

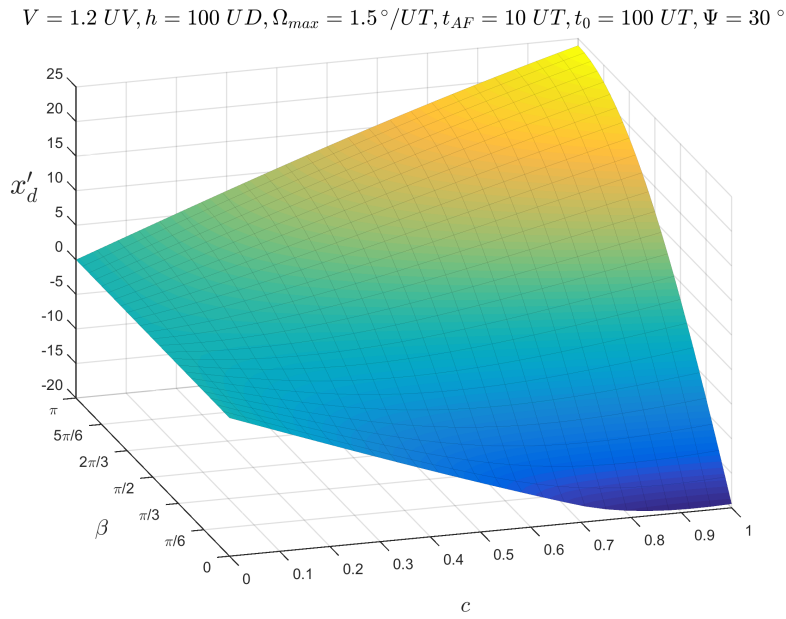


Figura 2.6.9: Evolución del límite derecho x_d de las curvas límite según c y β

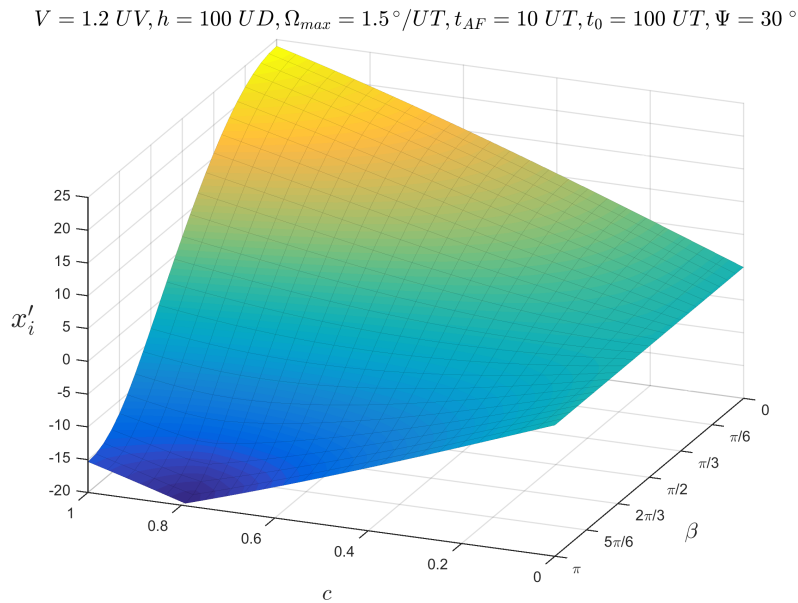


Figura 2.6.10: Evolución del límite izquierdo x_i de las curvas límite según c y β

En las figuras 2.6.9 y 2.6.10 podemos ver la evolución de x_d y x_i , habiéndose representado en ambos casos $x'_d = x_d(c, \beta) - x_d(0, 0)$ y $x'_i = x_i(c, \beta) - x_i(0, 0)$. Se puede observar, como ya se vio en la figura 2.6.7 e indirectamente en el estudio de áreas, que los límites también sufren una variación importante según el punto a de apuntamiento inicial.

Por todo esto, podemos comprobar la importancia del estudio de las curvas límite a la hora de la observación de puntos, ya que dado un punto inicial de apuntamiento, según su situación, la curva límite abarcará más área, y posiblemente, mayor de puntos potencialmente observables.

- Problema orbital

Para la obtención de las curvas límite de observación en el problema orbital, haremos uso, al igual que en el problema plano, de las expresiones (2.5.14) de la sección 2.5, que nos da el vector posición de la traza de la cámara en la superficie terrestre en función de la posición del vehículo $\vec{r}_v(t)$ y del vector apuntamiento $\vec{C}(t)$. En este caso, el vector \vec{n} que marca la dirección del nadir, como vimos en la sección anterior, será:

$$\vec{n}(t) = -\frac{\vec{r}_v(t)}{|\vec{r}_v(t)|} \quad (2.6.37)$$

El vector \vec{n} no es constante como en el caso de problema plano, por lo que el problema se verá complicado.

Los puntos pertenecientes la *curva límite de observación* los denotaremos como puntos k de coordenadas, y en este caso serán:

$$\vec{r}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \quad (2.6.38)$$

El vector apuntamiento a uno de dichos puntos de la curva límite vendrá dado, como en el problema plano, por:

$$\vec{C}_k(t) = \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t)|} \quad (2.6.39)$$

Las definiciones de los vectores \vec{C}_k^f y \vec{C}_k^* serán las mismas que en el problema plano, dadas en las expresiones (2.6.15) y (2.6.14). Las definiciones de ϕ_k^f y de ϕ_k^* habrá que actualizarlas ya que ahora el vector \vec{n} ahora es función del tiempo:

$$\phi_k^* = \phi(t_0 + t^*) = \text{acos} \left[\vec{C}_k^* \cdot \vec{n}(t_0 + t^*) \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_k(t^*) \cdot \vec{n}^* \right] \quad (2.6.40)$$

$$\phi_k^f = \phi(t_0 + t^* + t_{AF}) = \text{acos} \left[\vec{C}_k^f \cdot \vec{n}(t_0 + t^* + t_{AF}) \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_k(t^* + t_{AF}) \cdot \vec{n}^f \right] \quad (2.6.41)$$

Debido a que \vec{n} no es constante, la parametrización del vector \vec{C}_k^f no será tan sencilla. Definiremos en este caso:

$$\vec{C}_k^p = \begin{bmatrix} C_1^p \\ C_2^p \\ C_3^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi_k^f) \cos(\alpha) \\ \sin(\phi_k^f) \sin(\alpha) \\ -\cos(\phi_k^f) \end{bmatrix} \quad (2.6.42)$$

Dicho vector \vec{C}_k^p formará un ángulo ϕ_k^f con el vector \vec{n}^p , que será:

$$\vec{n}^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (2.6.43)$$

Este vector será el equivalente al vector \vec{C}_k^f en el problema plano. Ahora definiremos:

$$\vec{s} = \vec{s}(t) = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \frac{\vec{n}^p \wedge \vec{n}(t)}{|\vec{n}^p \wedge \vec{n}(t)|} \quad (2.6.44)$$

$$\kappa = \kappa(t) = \text{acos} \left[\vec{n}^p \cdot \vec{n}(t) \right] \quad (2.6.45)$$

Siendo κ el ángulo formado entre los vectores \vec{n}^p y $\vec{n}(t)$, y \vec{e} el vector con misma dirección que el eje de giro para llevar el vector \vec{n}^p al vector $\vec{n}(t)$. De esta manera, mediante la matriz de rotación en torno a un eje arbitrario:

$$R(\vec{u}, \chi) = \begin{bmatrix} \cos\chi + u_x^2(1 - \cos\chi) & u_x u_y(1 - \cos\chi) - u_z \sin\chi & u_x u_z(1 - \cos\chi) + u_y \sin\chi \\ u_x u_y(1 - \cos\chi) + u_z \sin\chi & \cos\chi + u_y^2(1 - \cos\chi) & u_y u_z(1 - \cos\chi) - u_x \sin\chi \\ u_x u_z(1 - \cos\chi) - u_y \sin\chi & u_y u_z(1 - \cos\chi) + u_x \sin\chi & \cos\chi + u_z^2(1 - \cos\chi) \end{bmatrix} \quad (2.6.46)$$

Por lo tanto, podremos obtener \vec{C}_k^f a través de una transformación espacial:

$$\vec{C}_k^f(t^*) = R[\vec{e}(t_0 + t^* + t_{AF}), \kappa(t_0 + t^* + t_{AF})] \cdot \vec{C}_k^p(\alpha, \phi_k^f) \quad (2.6.47)$$

Con todo esto hemos conseguido tener el vector \vec{C}_k^f parametrizado según α , al igual que en el problema plano, ya que si el vector \vec{C}_k^p forma un ángulo ϕ_k^f con \vec{n}^p , a través de la transformación mediante la matriz R , el vector \vec{C}_k^f formará el mismo ángulo con $\vec{n}(t)$. De esta forma, para un tiempo dado t y para cada valor de α , existirá un vector \vec{C}_k^f que estará contenido en un cono cuya generatriz tiene como origen el satélite, y forma un ángulo ϕ_k^f con el nadir actual, y su eje de revolución coincidirá con $\vec{n}(t)$.

La diferencia principal con el problema plano es que este vector ahora no es independiente de t^* , por lo que el método que se va a desarrollar deberá ser *iterativo*, como veremos mas adelante.

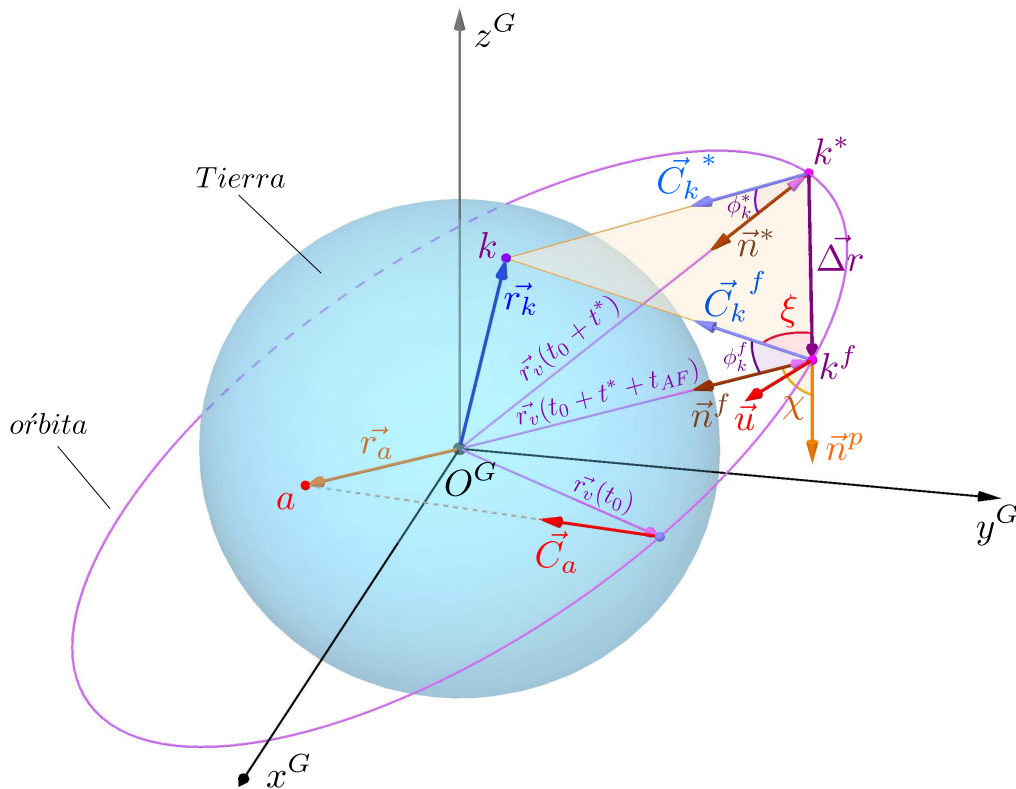


Figura 2.6.11: Punto k de la curva límite (Problema orbital)

En la figura 2.6.11 se ha representado un caso particular de punto k de la curva límite, así como las variables involucradas en los cálculos.

El vector apuntamiento \vec{C}_k^* , al igual que en el problema plano, será desconocido a priori, ya que dependerá del tiempo óptimo de apuntamiento t^* , que dependerá a su vez de cada punto específico de la curva límite.

El desarrollo de los cálculos necesarios para la obtención del vector \vec{C}_k^* se encuentra en el anexo (sección 8.5.2), así como la deducción de las expresiones para obtener las coordenadas de los puntos pertenecientes a la curva límite, debido a la extensión de los mismos.

Una vez obtenido \vec{C}_k^* , podremos obtener el ángulo de giro óptimo a través de:

$$\theta = \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_k^* \right] \quad (2.6.48)$$

y el tiempo de apuntamiento:

$$t^* = \frac{\theta}{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \cdot \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_k^* \right] \quad (2.6.49)$$

Con dicho t^* se podrá obtener el punto k de la curva:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF}) + \tau^f \cdot \vec{C}_k^f \quad (2.6.50)$$

Las variables \vec{s} , κ , R , \vec{C}_k^f , $\vec{\Delta r}$, y en definitiva, los cálculos necesarios para la obtención de \vec{C}_k^* , necesitarán conocer el tiempo óptimo t^* . Por este motivo, se necesitará usar un *método iterativo* para la obtención de cada punto de la curva límite de observación. Dicho método consistirá en:

■ Para cada valor de α y para todo $n \geq 0$:

- Se calcula $\vec{C}_k^f(t_n^*) = R[\vec{e}(t_0 + t_n^* + t_{AF}), \kappa(t_0 + t_n^* + t_{AF})] \cdot \vec{C}_k^p(\alpha, \phi_k^f)$.
- Se obtiene $\vec{C}_k^*(t_n^*)$ a través de las expresiones (8.5.58) (anexo).
- Se calcula θ y se obtiene $t_{n+1}^* = \frac{1}{\Omega} \cdot \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_k^*(t_n^*) \right]$.
- El punto de la curva será $\vec{r}_k = \vec{r}_v(t_0 + t_{n+1}^* + t_{AF}) + \tau^f \cdot \vec{C}_k^f$
- Calculamos la condición de parada $p_{n+1} = |t_{n+1}^* - t_n^*|$

Tomaremos como valor inicial $t_0^* = 0$ para $n = 0$. La condición de parada vendrá dada por:

$$p_{n+1} \leq \text{tol} \quad (2.6.51)$$

Al igual que ocurría en el problema plano, queda por corregir ϕ_k^f para que no se cumpla en todo el proceso de apuntamiento de cada uno de los puntos de la curva límite. Para ello, habrá que añadir al método iterativo lo siguiente:

■ Para $n \geq 0$:

- Una vez obtenido t_{n+1}^* se calculará $\phi_k^* = \text{acos} \left[\vec{C}_k^* \cdot \vec{n}(t_0 + t_{n+1}^*) \right]$.
- Si $\phi_k^* \geq \Psi$, habrá que corregir \vec{C}_k^f y obtener un nuevo valor de ϕ_k^f para la siguiente iteración:
 - Giraremos el vector \vec{C}_k^* para que no supere Ψ de la siguiente forma:

$$\diamond \text{ Calculamos } \vec{w} = \frac{\vec{C}_k^* \wedge \vec{n}(t_0 + t_{n+1}^*)}{|\vec{C}_k^* \wedge \vec{n}(t_0 + t_{n+1}^*)|} \text{ y aplicaremos } \vec{C}_k^* \Big|_{\text{corregido}} = R[\vec{w}, (\phi_k^* - \Psi)] \cdot \vec{C}_k^*.$$

$$\diamond \text{ Recalcularemos } \theta \text{ y } t_{n+1}^* \text{ con el nuevo vector } \vec{C}_k^* \Big|_{\text{corregido}}.$$

$$\diamond \text{ Obtendremos } \vec{C}_k^f \Big|_{\text{corregido}} \text{ de manera inversa a como se calcula } \vec{C}_k^* \text{ con las expresiones (8.5.58).}$$

$$\diamond \text{ Con este nuevo vector, calculamos } \phi_k^f = \text{acos} \left[\vec{C}_k^f \Big|_{\text{corregido}} \cdot \vec{n}(t_0 + t_{n+1}^* + t_{AF}) \right].$$

- Si $\phi_k^* \leq \Psi$, se avanzará con el método iterativo.

De esta forma conseguiremos, como podemos ver en la figura 2.6.12, que la restricción se cumpla para todos los puntos de la curva límite de observación.

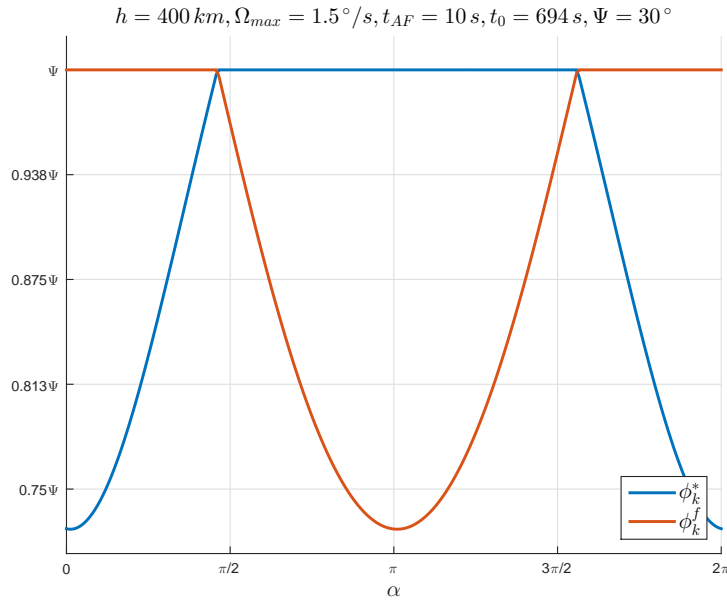


Figura 2.6.12: Evolución de ϕ_k^* y ϕ_k^f con corrección (problema orbital)

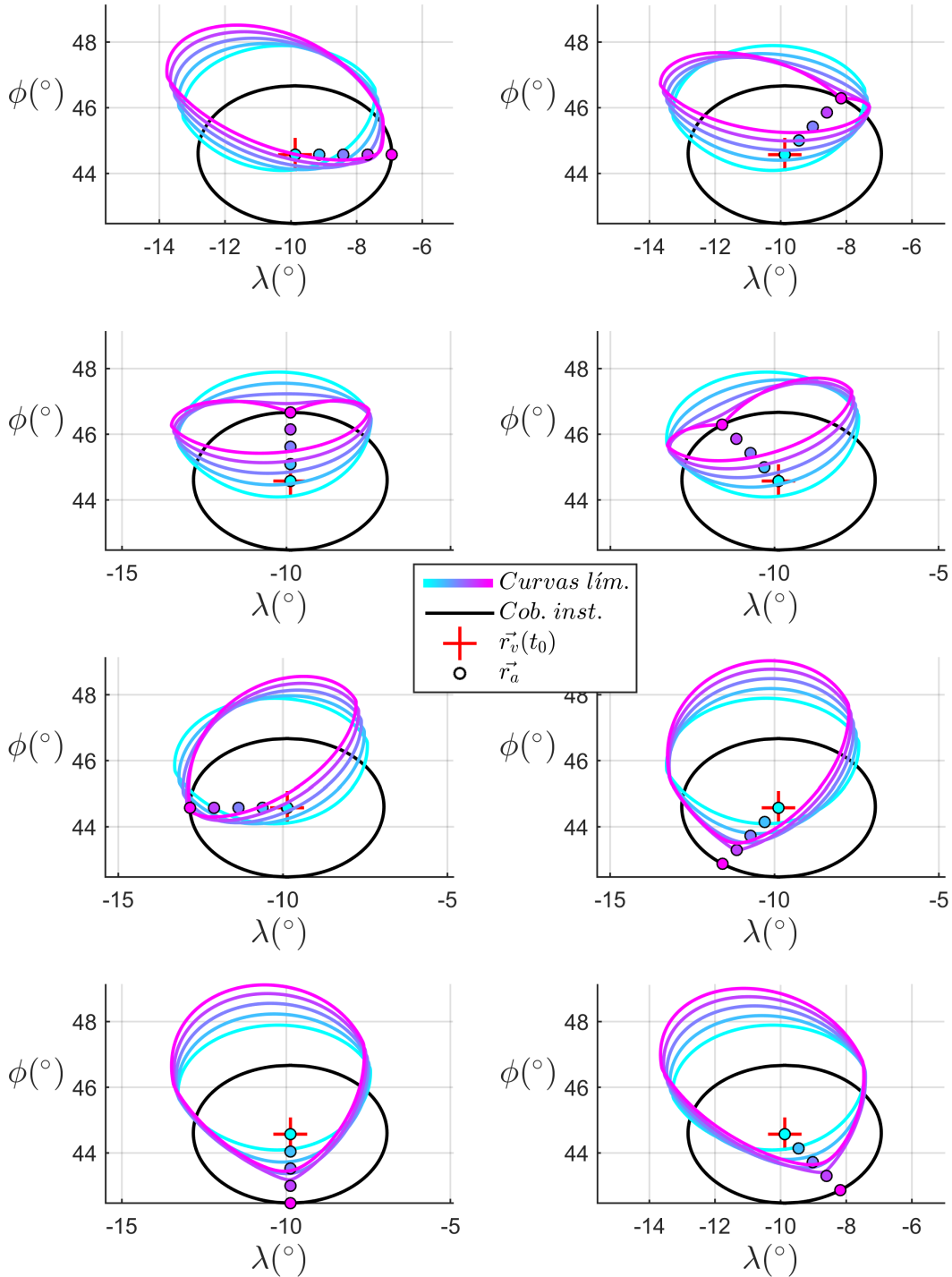
Con todo esto, queda definida la forma de obtener las curvas límite de observación para el caso de problema orbital. En la figura 2.6.13 se muestran distintas familias de curvas según la posición del punto inicial a de apuntamiento. Se ha realizado una variación de \vec{r}_a de manera que este contenido siempre dentro de la circunferencia esférica de cobertura instrumental inicial, para que la restricción se cumpla también en el punto de partida:

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(c, \beta) = \begin{cases} \lambda_a = c \cdot \Gamma(\beta) \cdot \cos(\beta) \\ \phi_a = c \cdot \Gamma(\beta) \cdot \cos(\beta) \end{cases}$$

siendo $\Gamma(\beta)$ la longitud ortodrómica máxima para cada β , obtenido en (2.6.7). Los parámetros c y β se varían para hacer notar las variaciones de forma que sufren las curvas.

Figura 2.6.13: Familia de curvas límite (problema orbital)

$$h = 400 \text{ km}, \Omega_{max} = 1.5^\circ/s, t_{AF} = 10 \text{ s}, t_0 = 694 \text{ s}, \Psi = 30^\circ$$



2.6.3. Extremos de la curva límite de observación

Una vez desarrollados los cálculos necesarios para obtener las curvas límite de observación en los dos modelos contemplados, plano y orbital, en esta sección se van a definir distintos extremos de dichas curvas.

- Problema plano

Dada una configuración de partida $(t_0, \vec{r}_v(t_0), \vec{r}_a)$, se tendrá una cierta curva límite de observación, cuyos puntos tendrán coordenadas $[x_k(\alpha, \vec{r}_a), y_k(\alpha, \vec{r}_a)]$. Existirán 4 extremos, y se obtendrán derivando e igualando a cero las coordenadas de los puntos, teniendo en cuenta que cada uno de ellos estará contenido en un rango distinto de α :

- x_d : Extremo derecho, definido ya en 2.6.2, calculándose:

$$\left. \frac{\partial x_k(\alpha, \vec{r}_a)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} = 0 \rightarrow x_d \quad (2.6.52)$$

- x_i : Extremo izquierdo, definido anteriormente al igual que x_d . Se calculará como:

$$\left. \frac{\partial x_k(\alpha, \vec{r}_a)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]} = 0 \rightarrow x_i \quad (2.6.53)$$

- (x_{ls}, y_s) : Coordenadas del extremo superior:

$$\left. \frac{\partial y_k(\alpha, \vec{r}_a)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha \in [0, \pi]} = 0 \rightarrow \alpha_s \rightarrow (x_{ls}, y_s) \quad (2.6.54)$$

- (x_{li}, y_i) : Coordenadas del extremo inferior:

$$\left. \frac{\partial y_k(\alpha, \vec{r}_a)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha \in [\pi, 2\pi]} = 0 \rightarrow \alpha_i \rightarrow (x_{li}, y_i) \quad (2.6.55)$$

Problema orbital

Los extremos en el problema orbital se obtendrán de manera similar al problema plano, solo que ahora antes de proceder, se calcularán las coordenadas esféricas de los puntos de las curvas límite:

$$\begin{cases} \phi_k = \text{atan} \left(\frac{z_k}{\sqrt{x_k^2 + y_k^2}} \right) & -90^\circ < \phi < 90^\circ \\ \lambda_k = \text{atan} (y_k/x_k) & -180^\circ < \lambda < 180^\circ \end{cases} \quad (2.6.56)$$

Una vez obtenidas las coordenadas esféricas, los extremos se calcularán igual que en el problema plano.

En la figura 2.6.14 podemos observar los extremos de la curva límite, habiéndose dibujado una «caja» que envuelve a la curva.

Estos extremos de la curva se utilizarán en secciones posteriores, por lo que su utilidad estará justificada posteriormente.

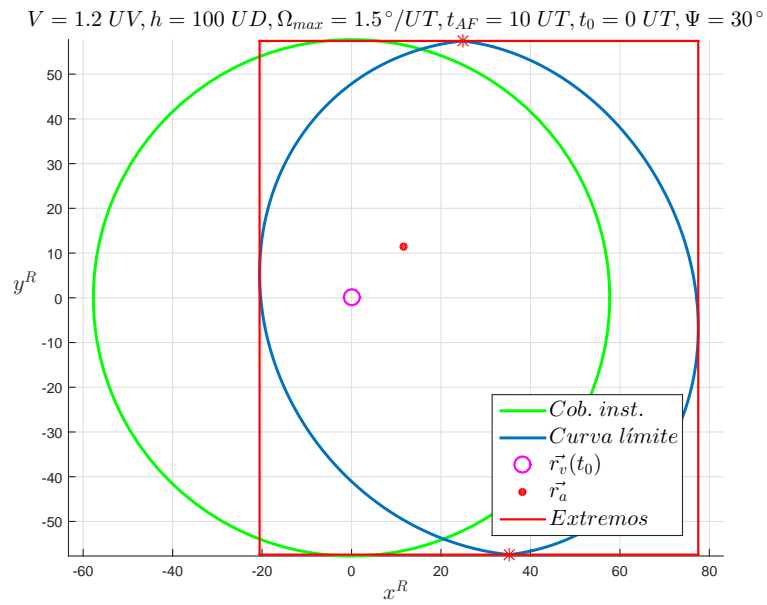


Figura 2.6.14: Extremos de curva límite de observación (problema plano)

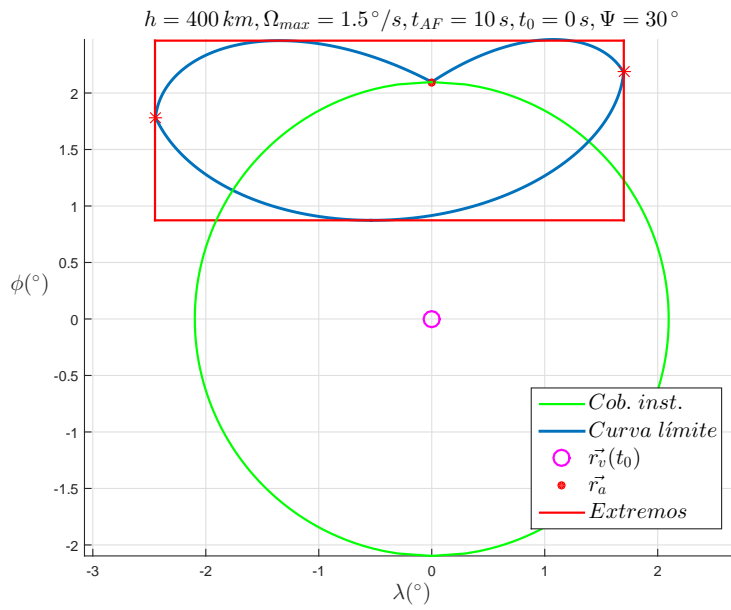


Figura 2.6.15: Extremos de curva límite de observación (problema orbital)

2.7. Tiempo de espera

Una vez definido el concepto de punto observable, y las curvas límite de observación, cabe preguntarse que directrices hay que seguir si se decide observar un punto exterior (\vec{r}_b) a la curva límite. Para ello, se definirá una *recta divisoria* que separará la curva límite en dos zonas bien diferenciadas. Esta recta tendrá como extremos (x_{ls}, y_s) y (x_{ls}, y_s) , coordenadas de los extremos superior e inferior de la curva.

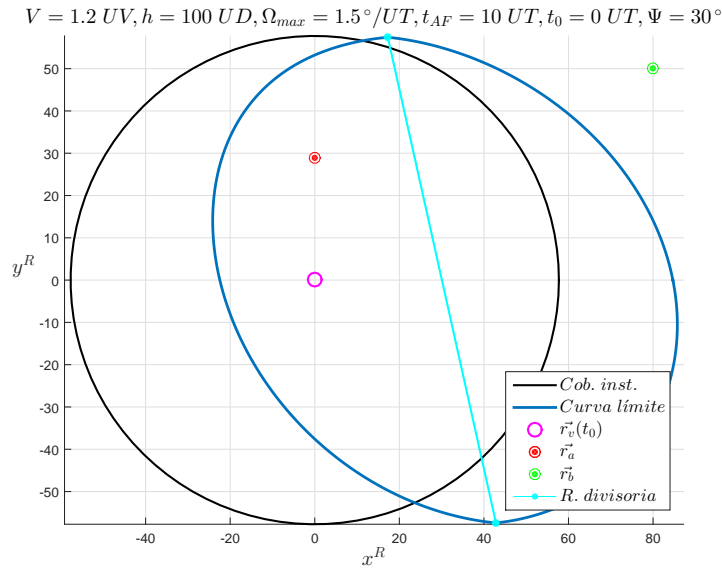


Figura 2.7.1: Ejemplo de punto exterior a curva límite de observación y recta divisoria (problema plano)

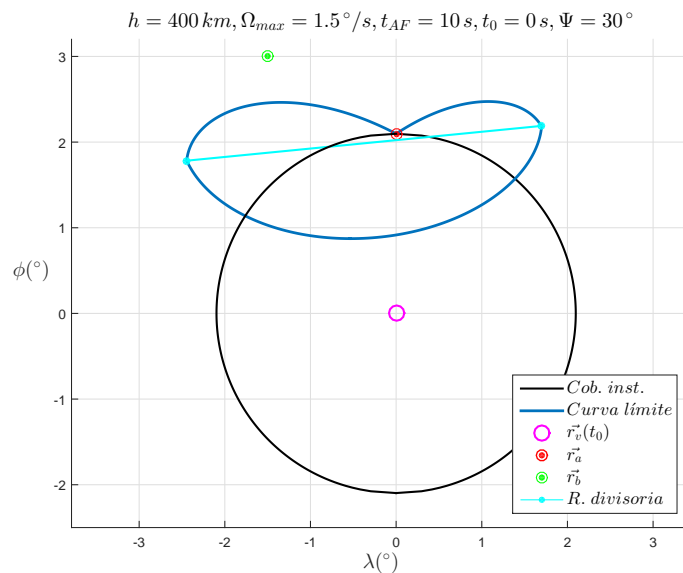


Figura 2.7.2: Ejemplo de punto exterior a curva límite de observación y recta divisoria (problema orbital)

En las figuras 2.7.1 y 2.7.2 podemos ver un ejemplo para cada problema de punto exterior a la curva límite $r_b^{\vec{}}$ y de línea divisoria de la misma.

Los extremos de esta línea divisoria, es decir, las coordenadas de los extremos superior e inferior de la curva, coinciden con el cambio de actitud visto en la figura 2.6.5. Esto es, en el problema plano, un punto situado a la *derecha* de la línea divisoria será un punto tal que, el vehículo, una vez transcurrido el tiempo t^* de apuntamiento entre el punto inicial a y dicho punto, el vehículo aun se encuentra «por detrás» del punto objetivo, por lo que al mantenerse apuntando la cámara hacia el mismo durante el tiempo t_{AF} , el ángulo con respecto al nadir formado por la cámara *disminuirá*. Por el contrario, un punto situado a la *izquierda* de la línea divisoria será un punto tal que el vehículo, una vez realizado el apuntamiento de a a dicho punto, el vehículo se encontrará «por delante» del mismo, por lo que al mantener la cámara apuntando, el ángulo respecto a nadir *aumentará*, y no dará tiempo a mantener el vehículo apuntando durante t_{AF} .

En el problema orbital tendremos el mismo comportamiento, solo que ya que el vehículo avanzará en el tiempo hacia latitudes ϕ crecientes, los puntos estarán por encima o por debajo de la línea divisoria.

Atendiendo a estos hechos, se puede deducir que para poder observar a un punto exterior a la curva límite de observación, este punto debe estar situado en la zona en la que dará lugar, una vez realizado el apuntamiento óptimo de a a dicho punto, a mantener el vehículo apuntando durante el tiempo t_{AF} sin que se supere la restricción de nadir. En otras palabras, en el problema plano, los puntos deberán estar situado a la derecha de la línea divisoria, y en el problema orbital, deberán estar situados por encima de la misma.

Para ilustrar la evolución del ángulo formado por la cámara respecto a nadir $\phi(t)$, se calculará el mismo para cada uno de los tramos del apuntamiento:

- Apuntamiento de $a \rightarrow b$: Para obtener $\phi(t)$ en este tramo, utilizaremos la expresión (2.3.7) para obtener la evolución del vector apuntamiento de la cámara, y se calculará:

$$\phi(t) = \text{acos} \left[\vec{C}(t) \cdot \vec{n} \right], \quad t \in [t_0, t_0 + t^*] \quad (2.7.1)$$

- Apuntamiento fijo a b : Una vez realizado el apuntamiento óptimo, se mantendrá la cámara fija hacia el punto b , siendo el vector $\vec{C}_b(t)$ conocido. Por lo tanto se podrá calcular:

$$\phi(t) = \text{acos} \left[\vec{C}_b(t) \cdot \vec{n} \right], \quad t \in [t_0 + t^*, t_0 + t^* + t_{AF}] \quad (2.7.2)$$

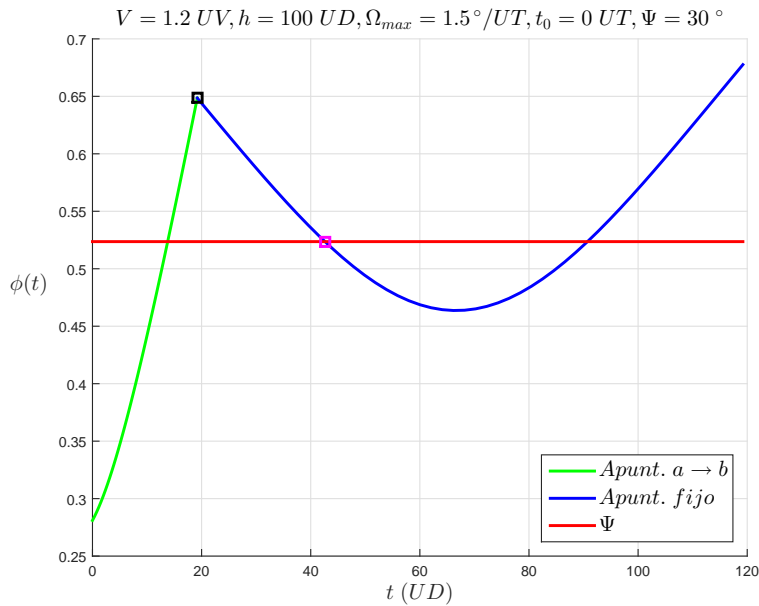


Figura 2.7.3: Evolución de $\phi(t)$ para un punto exterior a curva límite (problema plano)

En la figura 2.7.3 podemos ver la evolución de $\phi(t)$ para el punto r_b dado en la figura 2.7.1. Como era de esperar, el comportamiento de $\phi(t)$ es el esperado, ya que el punto b se encuentra a la derecha de la línea divisoria. En el proceso de apuntamiento de $a \rightarrow b$, el ángulo respecto a nadir crece, superando la restricción Ψ , y luego en el apuntamiento fijo decrece hasta cierto tiempo, en el que vuelve a crecer (el vehículo pasa de estar «por detrás» del punto, a estar «por delante»).

Si el tiempo que transcurre desde que se vuelve a cumplir la restricción, hasta que vuelve a no cumplirse, es igual o superior a t_{AF} , el punto será observable tras la espera. Esta condición se cumple para todos los puntos a la derecha de la línea divisoria (p. plano) o arriba de la misma (p. orbital).

Podemos obtener el tiempo t_{esp} que hay que esperar, manteniendo el apuntamiento fijo hacia el punto b , hasta que la restricción vuelve a cumplirse, de la siguiente forma. Definiremos:

$$f(t) = \phi(t) - \Psi = \text{acos} \left[\vec{C}_b(t) \cdot \vec{n} \right] - \Psi = 0 \quad (2.7.3)$$

Resolviendo mediante un método iterativo, como puede ser el método de Newton-Raphson, tomando como valor inicial $t_i = t_0 + t^*$, podremos obtener dicho t_{esp} , a partir del cual, solo habría que mantener el apuntamiento durante t_{AF} para realizar la fotografía del punto elegido. En la figura anterior, este tiempo t_{esp} se encuentra representado mediante un cuadrado morado.

3. Algoritmo de búsqueda de puntos (ABP)

El vehículo/satélite de observación sobrevolará una superficie donde existirán decenas o cientos de puntos potencialmente observables. En la sección anterior se demostró que no era factible analizar todas las combinaciones posibles de direccionamientos de la cámara a dichos puntos, y obtener la combinación óptima.

En esta sección se desarrollará un algoritmo heurístico que permitirá encontrar una solución óptima al problema de observación planteado, y se analizarán los distintos módulos y sub-algoritmos incluidos en el mismo.

3.1. Estructura general del algoritmo

El algoritmo desarrollado, denominado algoritmo de búsqueda de puntos (ABP), estará compuesto de distintos módulos que lograrán, en su conjunto, encontrar, dada una distribución de puntos observables, un recorrido de observación que optimice el objetivo elegido. El algoritmo realizará un bucle repetitivo, en el cual analizará paso a paso la situación del vehículo/satélite de observación, así como los distintos puntos observables actuales. De entre los puntos observables, elegirá uno de ellos según el criterio seleccionado. En la figura 3.1.1 se muestra el diagrama de flujos esquemático del algoritmo principal. A continuación se detallarán los distintos módulos:

Inicio/Entrada de datos

El algoritmo recibirá como entrada de datos:

- *Datos del vehículo:* Velocidad, altitud, tiempo de apuntamiento fijo t_{AF} , velocidad máxima de giro Ω_{max} , etc.
- *Puntos:* Matriz r_p de dimensiones $n \times 2$, que contendrá cada uno de los puntos a observar. En el problema plano las coordenadas de los puntos serán la posición en el plano $z = 0$ de los mismos (r_{x_i}, r_{y_i}) , y en el problema orbital serán coordenadas esféricas, longitud y latitud, sobre la esfera terrestre $(r_{\lambda_i}, r_{\phi_i})$. Tendrá la estructura siguiente:

$$r_p|_{plano} = \begin{bmatrix} r_{x_1} & r_{y_1} \\ r_{x_2} & r_{y_2} \\ \dots & \dots \\ r_{x_n} & r_{y_n} \end{bmatrix} \quad r_p|_{orbital} = \begin{bmatrix} r_{\lambda_1} & r_{\phi_1} \\ r_{\lambda_2} & r_{\phi_2} \\ \dots & \dots \\ r_{\lambda_n} & r_{\phi_n} \end{bmatrix}$$

- *Datos internos del algoritmo:* Distintas configuraciones propias del algoritmo, tales como profundidad a analizar, tipo de elección de puntos, etc. Estos conceptos se explicarán mas adelante.

Inicio de variables

Una vez recibido los datos de entrada, el algoritmo inicializará distintas variables internas necesarias para su funcionamiento.

Condición I: ¿Existen puntos observables?

El algoritmo realizará un bucle mediante el cual irá analizando, según la posición actual del vehículo, si existen puntos observables. Si existen, entrará en juego el segundo algoritmo, denominado Algoritmo de Elección de Puntos (AEP), mediante el cual se elegirá uno de los puntos observables, y se avanzará en el bucle principal.

La Condición I consistirá en comprobar si existen puntos observables en el paso actual del algoritmo. Si no existe ninguno, el bucle terminará.

Inicio del bucle principal

Si existen puntos observables en el paso actual del algoritmo, continuará el bucle principal, comenzando con una inicialización de variables internas.

Adquisición de puntos candidatos (APC)

Este módulo interno del ABP se encargará de, según la posición actual del vehículo/satélite de observación, analizar si existen puntos observables. Constará de dos bloques de análisis, que serán analizados en la sección 3.2.

Condición II: ¿Existen puntos candidatos?

Una vez ejecutado el algoritmo APC, se comprobará si se han encontrado puntos observables válidos. En caso afirmativo, se pasará al siguiente módulo del algoritmo, y en caso negativo, acabará este paso del bucle principal, y se volverá a la condición I.

Algoritmo de elección de puntos (AEP)

Si la Condición II ha sido afirmativa, se entrará en este módulo del algoritmo ABP. Este módulo se encargará de la elección, de entre todos los posibles puntos observables, del más óptimo, según el criterio elegido, para continuar con la observación. Este módulo será analizado en profundidad en la sección 3.3.

Actualización de variables

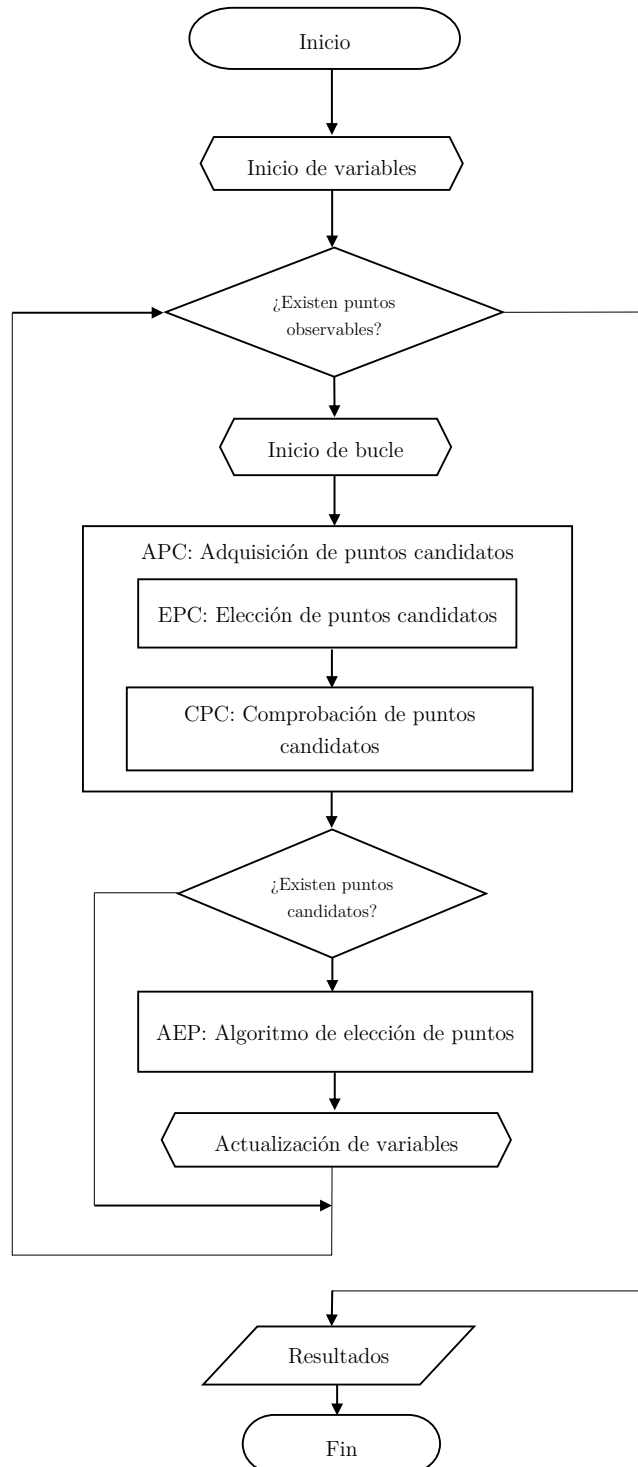
Una vez ejecutado el módulo AEP, se actualizarán las distintas variables internas del algoritmo.

Resultados/Fin

Cuando el algoritmo no encuentre ningún punto observable más, terminará el bucle principal, y se procederá a preparar los resultados obtenidos para la salida del programa. Entre los resultados se encontrarán, los distintos puntos elegidos de entre todos los puntos de la matriz r_p , el tiempo total empleado en los apuntamientos, etc.

En las secciones posteriores se analizarán en detalle los distintos módulos internos del algoritmo ABP, así como los distintos criterios utilizados para la elección en cada paso del punto a observar.

Figura 3.1.1: Diagrama de flujos del Algoritmo de Búsqueda de Puntos (ABP)



3.2. Adquisición de puntos candidatos (APC)

Este módulo interno del algoritmo ABP se encarga de detectar la existencia de puntos observables dada una posición concreta del vehículo de observación, así como de un apuntamiento actual. Este análisis de puntos observables realizado en el algoritmo justifica todo el análisis realizado sobre las curvas límites de observación, ya que en un paso concreto del algoritmo, los puntos seleccionables para continuar con el recorrido serán los que pertenezcan a las curvas límite. Este módulo constará de dos bloques de análisis, detallados a continuación.

3.2.1. Elección de puntos candidatos

El primer bloque del algoritmo de adquisición de puntos candidatos analizará, en base a los extremos de la curva límite de observación actual (detallados en la sección 2.6.3), la existencia de puntos observables en el paso actual del bucle principal del algoritmo.

Dada la imposibilidad de obtener una expresión implícita de los puntos de la curva límite (se tienen ecuaciones parametrizadas de las coordenadas de los mismos), no es posible evaluar directamente los distintos puntos de la matriz r_p para conocer si están en el interior de la misma o no, es decir, si son observables o no. Por este motivo el análisis de observabilidad se divide en dos etapas. La primera, de la que se encarga este bloque, consiste en identificar los puntos interiores a los extremos de la curva límite, obtenidos en la sección 2.6.3. Se detectarán mediante este proceso un número N_{EPC} de puntos candidatos.

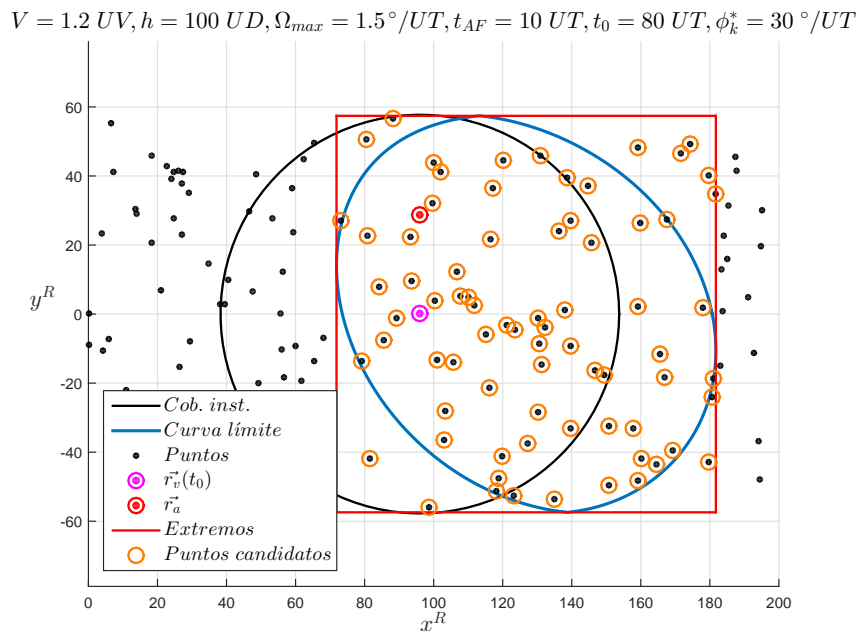


Figura 3.2.1: Ejemplo de elección de puntos candidatos (EPC)

En la figura 3.2.1 podemos ver un ejemplo de análisis realizado por el bloque de elección de puntos candidatos (EPC). Como es natural, hay puntos comprendidos entre la curva límite y los extremos de la misma, que han sido seleccionados como candidatos. Esto se solucionará en el segundo bloque del módulo APC.

3.2.2. Comprobación de puntos candidatos

Una vez ejecutado el primer bloque del módulo APC, hay que descartar los puntos candidatos comprendidos entre la curva límite y los extremos de la misma. Para ello, se tomarán todos los puntos seleccionados por el bloque EPC, y se comprobará uno a uno sí al final del apuntamiento cumplen o no la restricción respecto al nadir, mediante las expresiones:

$$\phi_p^* = \phi(t_o + t_p^*) = \text{acos} \left[\vec{C}_p^* \cdot \vec{n}^* \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_p(t_o + t_p^*) \cdot \vec{n}(t_o + t_p^*) \right]$$

$$\phi_p^f = \phi(t_o + t_p^* + t_{AF}) = \text{acos} \left[\vec{C}_p^f \cdot \vec{n}^f \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_p(t_o + t_p^* + t_{AF}) \cdot \vec{n}(t_o + t_p^* + t_{AF}) \right] \quad (3.2.1)$$

$$\phi_p^* \leq \Psi \quad \text{y} \quad \phi_p^f \leq \Psi \quad p \in [1, N_{EPC}] \quad (3.2.2)$$

En el proceso, se calcularán todos los tiempos óptimos de apuntamiento t_p desde el punto inicial actual a de coordenadas \vec{r}_a hasta los mismos. Dichos tiempos serán guardados en una matriz, para no tener que volver a obtenerlos en pasos futuros, y ahorrar tiempo de cálculo. El número de puntos candidatos comprobados que cumplirán la restricción de nadir será $N_C \leq N_{EPC}$.

$V = 1.2 \text{ UV}, h = 100 \text{ UD}, \Omega_{max} = 1.5^\circ/\text{UT}, t_{AF} = 10 \text{ UT}, t_0 = 80 \text{ UT}, \phi_k^* = 30^\circ/\text{UT}$

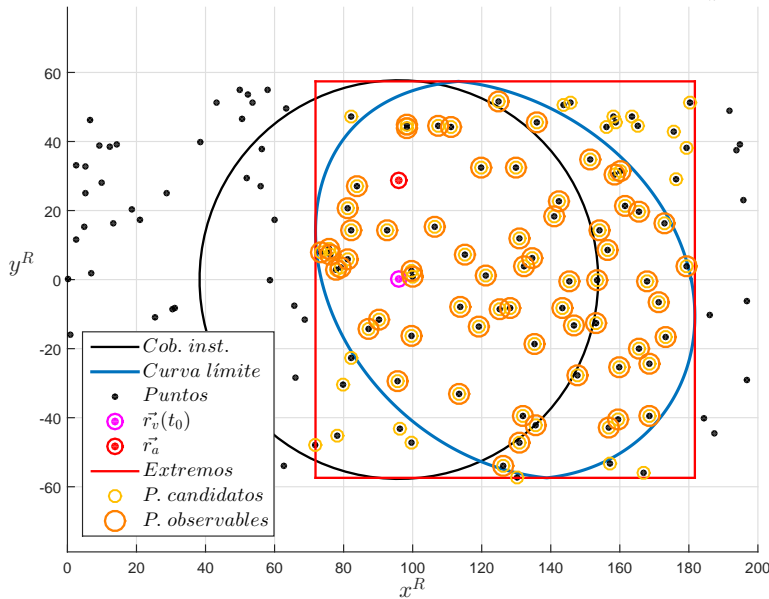


Figura 3.2.2: Ejemplo de comprobación de puntos candidatos (CPC)

En la figura 3.2.2 podemos ver un ejemplo de análisis completo del módulo de adquisición de puntos candidatos (APC). Los puntos seleccionados por el bloque CPC de entre todos los obtenidos por el bloque EPC serán los puntos observables válidos, con los que el algoritmo, posteriormente, operará y elegirá según el criterio elegido.

3.3. Algoritmo de elección de puntos (AEP)

Si el módulo de adquisición de puntos candidatos (APC) encuentra puntos válidos, se cumplirá la Condición II, y por lo tanto el algoritmo ejecutará el siguiente módulo, encargado de elegir de entre todos los puntos posibles, el mas adecuado según el criterio elegido para continuar con la observación. En la figura 3.3.1 podemos ver un diagrama de flujos esquemático del módulo estudiado en esta sección.

Este módulo engloba distintos algoritmos, explicados a continuación:

Algoritmo de Prioridad (AP)

En este módulo se tomarán los puntos seleccionados por el algoritmo de adquisición de puntos candidatos (APC), y se reordenarán en una nueva matriz según el criterio elegido. Los distintos criterios serán comentados en la sección 3.4.

Número de puntos a analizar y profundidad.

Antes de la ejecución del algoritmo general, se elegirá el *número de puntos a analizar* y la *profundidad* que se desea alcanzar en cada paso del mismo. El *número de puntos a analizar* (N_{pa}) será la cantidad de puntos, seleccionados de entre todos los candidatos, ordenados mediante el algoritmo de prioridad (AP), que el algoritmo estudiará para determinar cual de ellos será el elegido para observar. La *profundidad* (N_{prof}) será el número de pasos que avanzará hacia el futuro, para cada uno de los puntos a analizar. Si la profundidad es igual a $N_{prof} > 0$, para cada punto a analizar, se avanzará tanto la posición del vehículo como el punto inicial de apuntamiento un paso hacia el futuro, y se volverá a ejecutar el módulo de adquisición de puntos candidatos (APC), y el propio algoritmo de elección de puntos (AEP), pero esta vez con un valor de profundidad $N'_{prof} = N_{prof} - 1$, y así sucesivamente. Si la profundidad es igual a $N_{prof} = 0$, querrá decir que no se quiere mirar hacia el futuro, y únicamente se elegirá el punto según el criterio seleccionado, y terminará la ejecución del algoritmo AEP.

Mediante estos dos parámetros (N_{pa} , N_{prof}) se conseguirá analizar de manera mas eficiente, mientras mayores sean estos parámetros, el punto que se seleccionará para continuar con la ejecución del algoritmo. De esta forma, el algoritmo de elección de puntos (AEP) será un algoritmo *recursivo*, ya que se ejecutará a si mismo si la profundidad elegida es mayor que 0, por lo que el tiempo de cálculo empleado en este módulo puede crecer mucho si se eligen valores grandes de los parámetros.

Cálculo de puntos a estudiar

Debido a que el número de puntos candidatos obtenidos por el algoritmo de elección de puntos (N_C) puede ser inferior al número de puntos a analizar elegido (N_{pa}), habrá que calcular:

$$N_P = \min(N_C, N_{pa}) \quad (3.3.1)$$

N_P será el número de puntos que se seleccionarán de entre todos los puntos reordenados por el algoritmo de prioridad (AP). Se tomarán los N_P -primeros puntos, y se analizará cada uno de ellos. De esta manera, si $N_P = 1$, solo se analizará el primer punto, que será el primero según el criterio elegido. Si $N_P > 1$, no solo se analizará el «mejor» del criterio, sino los $(1 - N_p)$ siguientes.

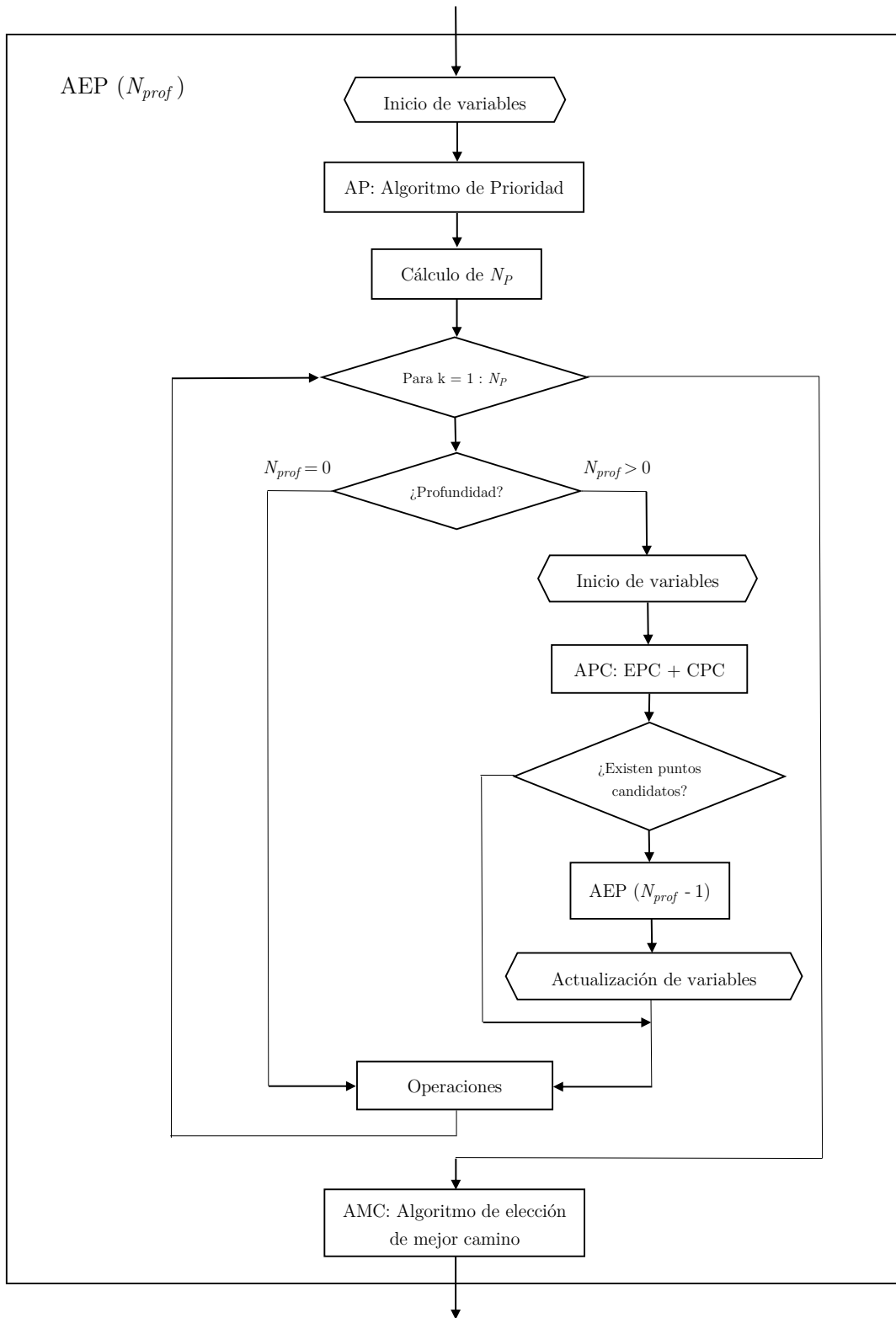
De esta manera se podrá detectar si el «mejor» punto según el criterio es verdaderamente el más apropiado para continuar con la observación, o si por el contrario, puede que sea otro punto el más adecuado, como se explicará en secciones posteriores.

El criterio para detectar cual punto es más apropiado será comentado a continuación.

Algoritmo de elección de mejor camino (AMC)

Una vez analizados todos y cada uno de los N_P puntos, cada uno de ellos tendrá asociado, según el valor de N_{prof} , un número de pasos hacia el futuro, con sus respectivos análisis. Todos estos datos serán las variables de entrada para el algoritmo de elección de mejor camino, el cual se encargará de analizar y decidir cual de los N_p puntos es mas apropiado para continuar con la observación. Los criterios asociados a este algoritmo, así como su funcionamiento, serán comentados en la sección 3.5.

Figura 3.3.1: Diagrama de flujos del Algoritmo de Elección de Puntos (AEP)



3.4. Algoritmo de prioridad (AP)

Una vez detectados los puntos observables actuales por el algoritmo de adquisición de puntos candidatos (APC), se tendrá una matriz de puntos de dimensiones $N_C \times 2$ tal que:

$$r_{po}|_{plano} = \begin{bmatrix} r_{x_1} & r_{y_1} \\ \cdots & \cdots \\ r_{x_{N_C}} & r_{y_{N_C}} \end{bmatrix}, \quad r_{po}|_{orbital} = \begin{bmatrix} r_{\lambda_1} & r_{\phi_1} \\ \cdots & \cdots \\ r_{\lambda_{N_C}} & r_{\phi_{N_C}} \end{bmatrix} \quad (3.4.1)$$

Dicha matriz contendrá las coordenadas de los N_C resultantes del algoritmo APC. El algoritmo de prioridad (AP) se encargará de reordenar esta matriz r_{po} , atendiendo al criterio elegido. Esta operación se realizará para que posteriormente, en el algoritmo de elección de puntos (AEP), cuando se analice el número de puntos elegido N_P , expresión (3.3.1), se tomen los distintos puntos, ordenados por el criterio. De esta manera, el algoritmo seleccionará el punto a observar priorizando una propiedad u otra. Los distintos criterios contemplados serán explicados en las siguientes subsecciones.

3.4.1. Distancia mínima

Este criterio consistirá en reordenar los puntos candidatos, de menor a mayor, según la distancia que los separa al punto inicial de apuntamiento a actual. De esta forma, según el problema elegido, se calculará:

Problema plano

La distancia entre dos puntos será la distancia euclídea, calculada como:

$$d_i = \sqrt{(r_{x_i} - r_{a_1})^2 + (r_{y_i} - r_{a_2})^2} \quad (3.4.2)$$

siendo (r_{a_1}, r_{a_2}) las coordenadas del punto a . Se calculará la distancia d_i para cada punto de la matriz r_{po} , y se reordenará la misma según estas distancias, en orden creciente.

Problema orbital

La distancia entre dos puntos en este caso será la distancia ortodrómica, que será el camino mas corto entre dos puntos de la Tierra, la cual corresponderá a un arco entre los puntos. El ángulo de este arco se calcula como:

$$\cos \alpha_i = \sin \phi_a \sin \phi_i + \cos \phi_a \cos \phi_i \cos (\lambda_i - \lambda_a) \quad (3.4.3)$$

siendo (ϕ_a, λ_a) las coordenadas esféricas del punto inicial a , y (ϕ_i, λ_i) las coordenadas esféricas del punto elegido de la matriz r_{po} . La longitud de arco que corresponde con la distancia ortodrómica será $d_i = \alpha_i \cdot R_{\oplus}$. Se calculará la distancia ortodrómica para cada uno de los puntos candidatos, y se reordenarán de manera creciente.

3.4.2. Tiempo óptimo mínimo

Este criterio reordenará la matriz r_{po} según el tiempo óptimo de apuntamiento hacia los mismos partiendo del punto a , calculado también por el algoritmo de adquisición de puntos candidatos (sección 3.2.2), de manera creciente.

3.4.3. Desviación respecto a nadir mínima

En este criterio se reordenará la matriz r_{po} según el ángulo ϕ_i^f respecto al nadir al final del apuntamiento hacia los distintos puntos. Se calculará, para cada punto de la matriz r_{po} :

$$\phi_i^f = \phi(t_o + t_i^* + t_{AF}) = \text{acos} \left[\vec{C}_i^f \cdot \vec{n}^f \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_i(t_o + t_i^* + t_{AF}) \cdot \vec{n}(t_o + t_i^* + t_{AF}) \right] \quad (3.4.4)$$

y se reordenarán de manera creciente. Con este criterio se conseguirá elegir puntos de mejor calidad, ya que a menor ϕ_i^f , menor inclinación de las fotografías realizadas.

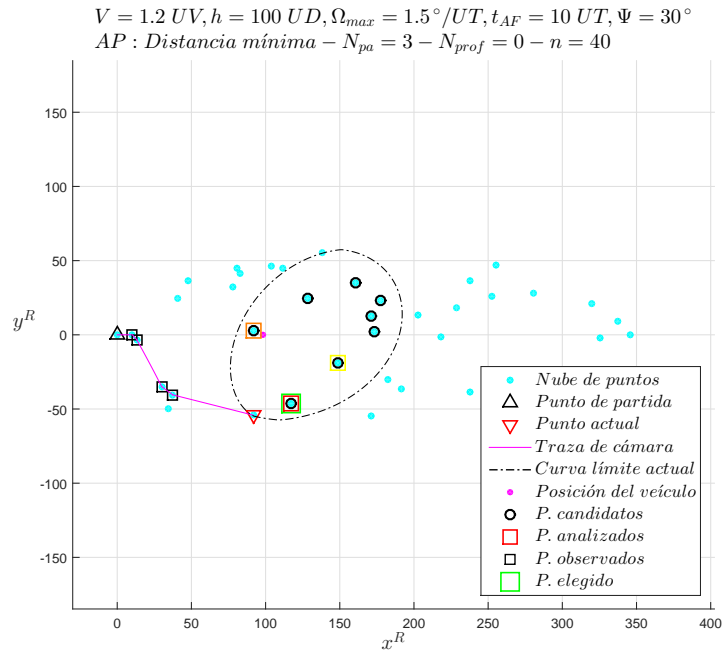


Figura 3.4.1: Ejemplo de aplicación del criterio de distancia mínima (problema plano)

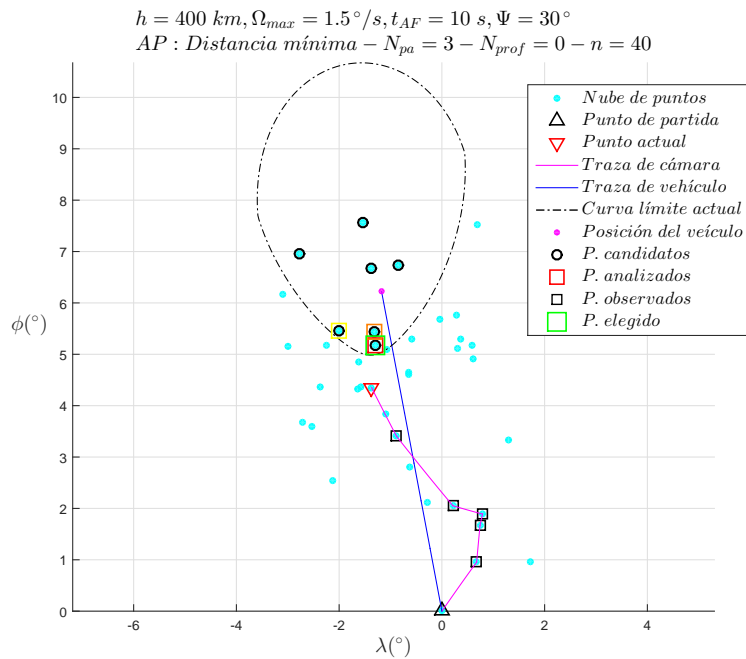


Figura 3.4.2: Ejemplo de aplicación del criterio de distancia mínima (problema orbital)

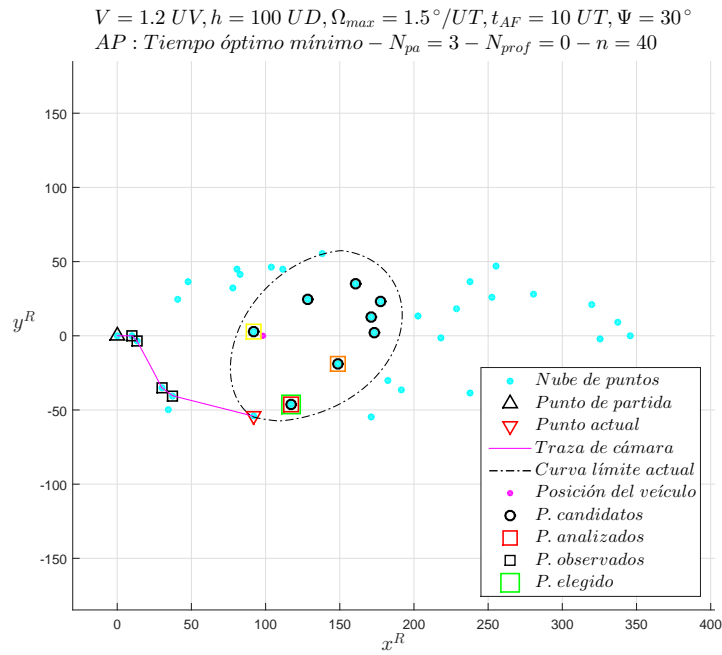


Figura 3.4.3: Ejemplo de aplicación del criterio de tiempo óptimo mínimo (problema plano)

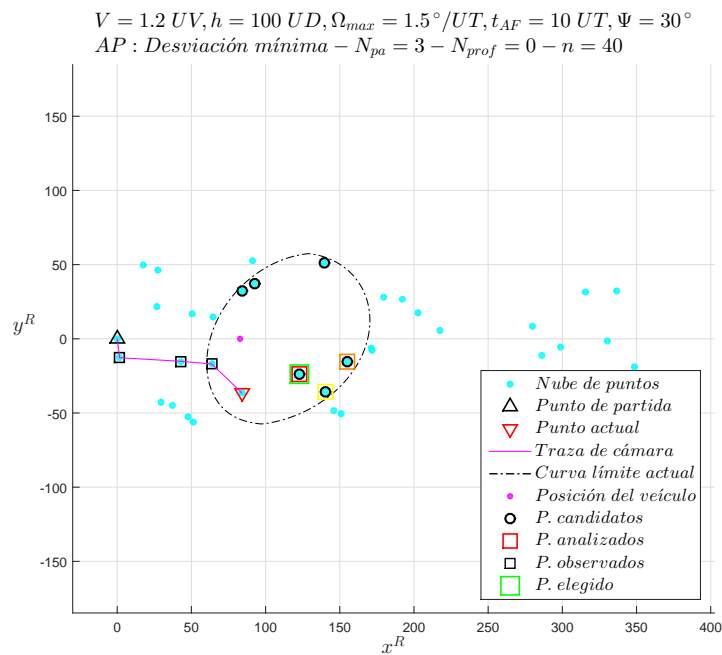


Figura 3.4.4: Ejemplo de aplicación del criterio de desviación mínima (problema plano)

En las figuras 3.4.1, 3.4.2, 3.4.3 y 3.4.4 se muestran algunos ejemplos de ejecución del algoritmo para los distintos criterios del algoritmo de prioridad explicados anteriormente.

3.5. Algoritmo de mejor camino (AMC)

En la sección 3.3 se desarrollaron las distintas operaciones que realiza el algoritmo de elección de puntos (AEP) para seleccionar el siguiente punto a observar. Se analizarán N_P puntos, ordenados por el algoritmo de prioridad (AP) seleccionado, teniendo en cuenta la profundidad (N_{prof}) que se quiere alcanzar para cada uno de ellos. Una vez analizados los distintos puntos, el algoritmo tomará una decisión, basándose en distintos criterios, explicados a continuación.

3.5.1. Mayor profundidad alcanzada y menor tiempo de apuntamiento

Para cada uno de los N_p puntos analizados, se habrá avanzado hacia el futuro N_{prof} pasos. A su vez, en cada uno de los pasos hacia el futuro, se analizarán también N_P puntos, y así sucesivamente.

Tomemos el caso particular en el que $N_{prof} = 0$. Cada uno de los N_p puntos analizados tendrá asociado un tiempo óptimo de apuntamiento desde el punto inicial a actual, de valor:

$$t_i^* \quad i \in [1, N_P] \quad (3.5.1)$$

No se tiene en cuenta t_{AF} ya que este valor es constante en la simulación. En este caso, el algoritmo AMC tomaría el punto con menor tiempo de apuntamiento t_i^* .

Si $N_{prof} > 0$, cada punto N_p tendrá asociado otro conjunto de N_p de puntos, por cada paso hacia el futuro analizado. Es decir, para cada punto inicial, se analizarán $N_P^{N_{prof}}$ combinaciones posibles de «caminos» de observación. Cada uno de esos caminos tendrá un *tiempo de apuntamiento total* asociado:

$$t_{i_{\{1, \dots, N_{prof}\}}}^* = t_{i_1}^* + \dots + t_{i_{N_{prof}}}^* \quad ; \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_P \quad (3.5.2)$$

Paralelamente, no siempre se podrá alcanzar la profundidad máxima especificada (N_{prof}) en todos los caminos, ya que podrá darse que llegado a cierto punto, no existan mas puntos candidatos para continuar la observación. De esta forma, cada camino tendrá asociado una *profundidad máxima* alcanzada, calculada de forma *recursiva*:

$$prof_{i_{\{1, 2, \dots, N_{prof}\}}} = 1 + prof_{i_{\{2, \dots, N_{prof}\}}} \quad ; \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_P \quad (3.5.3)$$

De manera que por cada «nivel» alcanzado, se sumará 1 al valor total de profundidad alcanzada, siendo la cota superior de la misma el propio valor de N_{prof} , si se alcanzase la profundidad total en el camino i . Si $N_{prof} = 0$, la profundidad alcanzada siempre será igual a 0, por lo que solo se tendrá en cuenta el tiempo empleado en los apuntamientos.

Este criterio de elección se encargará de elegir, de entre todos los caminos analizados, y de entre todos los que hayan alcanzado mayor profundidad, el que tenga asociado un tiempo de apuntamiento total de menor valor.

De esta manera, se intentará maximizar el número de puntos observados, ya que si se maximiza la profundidad alcanzada, la probabilidad de observar mas cantidad de puntos crecerá, y al minimizar el tiempo de apuntamiento total, se minimizará la distancia recorrida por el vehículo/satélite de observación, dando lugar probablemente a un mayor número de observaciones.

3.5.2. Mayor suma de pesos y menor tiempo de apuntamiento

Cada uno de los puntos de la matriz r_p inicial de puntos, podrá tener asociado un peso/valor, por lo que se tendrá un vector \vec{p} de pesos p_i asociados a cada punto.

Este criterio priorizará la elección de puntos de mayor peso frente a los de menor peso. Al igual que el criterio explicado anteriormente, cada camino de observación tendrá asociado una *suma de pesos* de cada punto analizado:

$$p_{\{1, 2, \dots, N_{prof}\}} = p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_{N_{prof}}} \quad ; \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_P \quad (3.5.4)$$

Así mismo, cada camino tendrá asociado un tiempo de apuntamiento total, como en el caso anterior:

$$t_{i_{\{1, \dots, N_{prof}\}}}^* = t_{i_1}^* + \dots + t_{i_{N_{prof}}}^* ; \quad \forall i = 1, 2, \dots, N_P$$

Este criterio se encargará de elegir, de entre todos los caminos analizados, y de entre todos los que tengan una suma de pesos máxima alcanzada, el que tenga asociado un tiempo de apuntamiento total de menor valor.

De esta manera, se intentará maximizar la suma de pesos, priorizando sobre la profundidad alcanzada por los distintos caminos analizados.

4. Nube de puntos objetivos

Antes de pasar a las simulaciones, en esta sección se estudiará la generación de puntos objetivos, así como su efecto en el número de puntos observados, es decir, en la planificación resultante del algoritmo heurístico desarrollado.

4.1. Método Montecarlo

El método Montecarlo es un método estadístico numérico que permite obtener soluciones de problemas matemáticos o físicos mediante pruebas aleatorias. En la práctica, las pruebas aleatorias se sustituyen por resultados de ciertas simulaciones con números aleatorios. Su nombre procede del casino de Montecarlo, por ser la ruleta un generador simple de números aleatorios y, se usó por primera vez, en el desarrollo de la bomba atómica. El error absoluto de la estimación de una solución proporcionada por este método decrece como $1/\sqrt{N}$, siendo N el número de experimentos realizados. De los resultados obtenidos se realizarán sus respectivas medias y desviaciones típicas.

En lo que sigue, se hará uso de este método para evaluar los distintos experimentos estudiados. La variable aleatoria en las distintas simulaciones será la distribución de puntos (nube) sobre la superficie de observación, tomándose para cada experimento un valor de $N = 50$. De esta forma se pretende eliminar la influencia de la distribución de puntos en los resultados producidos por el algoritmo heurístico desarrollado. La forma de esta nube de puntos aleatoria será descrita en las siguientes secciones.

4.2. Configuración de puntos

Antes de comenzar con las distintas simulaciones del algoritmo de búsqueda de puntos, en esta sección se analizará el efecto de la configuración de puntos a observar.

Dada una configuración de parámetros del vehículo/satélite de observación $(h, V, \Omega_{max}, t_{AF}, \Psi)$, la nube de puntos se encontrará situada en la superficie de observación (plano $z = 0$ en el problema plano, y superficie terrestre en el problema orbital). Dicha nube de puntos será generada mediante una distribución aleatoria uniforme.

Como se vio en la sección 2.6.2, las curvas límite de observación estarán comprendidas siempre en la *huella* dejada por la cobertura instrumental. Dicha huella será la superficie barrida por la circunferencia de cobertura instrumental a lo largo del movimiento del vehículo/satélite de observación. Habrá que distinguir entre:

Problema plano

En el caso del problema plano, la circunferencia de cobertura instrumental tendrá un radio de valor R_{ci} , visto en la expresión (2.6.5). El ancho de huella en este caso será $w_{plano} = 2 \cdot R_{ci}$. Por consiguiente, el vehículo de observación solo será capaz de observar puntos, de coordenadas (x_p, y_p) , que cumplan:

$$y_p \in [-R_{ci}, R_{ci}] \quad (4.2.1)$$

Teniendo en cuenta esto, los extremos en el eje y de la nube de puntos estarán comprendidos entre sendos valores de ordenadas.

Dado que el vehículo avanza de manera paralela al eje x , no existirán límites en el mismo, solamente teniendo que fijar el valor x_0 en el comienzo la nube. De esta manera, la nube de puntos vendrá determinada exclusivamente por el número de puntos n , el valor inicial x_0 , y la longitud L , que determinará el ancho en el eje x de la nube.

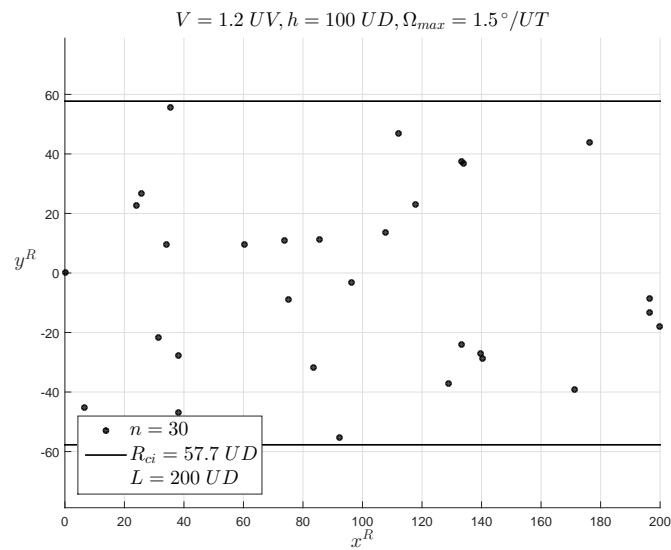


Figura 4.2.1: Ejemplo de nube de puntos (problema plano)

Problema orbital

En el caso del problema orbital, la circunferencia esférica de cobertura instrumental vendrá definida por las expresiones (2.6.7) y (2.6.8). Al igual que en el caso anterior, el satélite en su movimiento barrerá un área en la superficie terrestre denominada huella satelital. El ancho de la huella vendrá dado por $w_{orbital} = 2 \cdot \gamma \cdot R_{\oplus}$.

Teniendo en cuenta las expresiones mostradas en la sección 8.1 del anexo, se generará la nube teniendo en cuenta que para cada valor de ϕ_p , el valor de λ_p deberá estar comprendido entre ciertos valores, para que todos los puntos se encuentren en el interior de la huella de cobertura instrumental.

De esta manera, la nube de puntos vendrá determinada por $\Delta\phi$, análogo al parámetro L en el problema plano, n número de puntos, y ϕ_0 punto de partida.

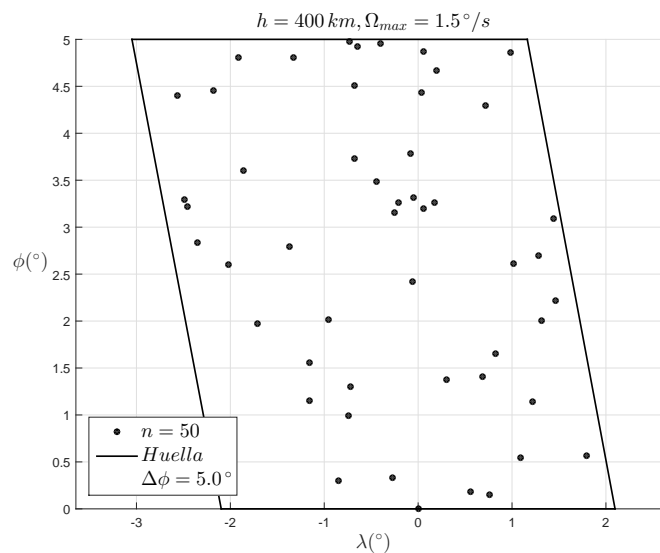


Figura 4.2.2: Ejemplo de nube de puntos (problema orbital)

4.2.1. Saturación y límite teórico de observación

Antes de continuar, se va a analizar el efecto del número de puntos total que contiene la nube de observación en el número de puntos observados por el algoritmo.

Problema plano

Se han tomado unos valores para los parámetros de la nube de puntos de $L = 300UD$ y $x_0 = 0UD$. El vehículo partirá de $[0 \ 0 \ h]'$, y se encontrará inicialmente observando al origen $x^R = 0$, $y^R = 0$.

Se tomarán los 3 criterios desarrollados para el algoritmo de prioridad (sección 3.4) y para este caso particular se tomará $N_{prof} = 0$ y $N_{pa} = 1$ para el algoritmo de elección de puntos (AEP).

El criterio utilizado en el algoritmo de mejor camino (AMC) será el de mayor profundidad / menor tiempo de apuntamiento, pero al existir solo un punto a analizar, se antepondrá el criterio elegido en el algoritmo de prioridad.

Por último, no se tendrán en cuenta pesos asociados a los puntos de la nube.

Una vez definidas las nubes de puntos de observación, así como los parámetros del vehículo y criterios del algoritmo heurístico, antes de analizar el efecto del número de puntos de la nube, se va a obtener un límite teórico al número de puntos a los que el vehículo podrá observar en su movimiento.

Tomando el problema plano como base para las siguientes deducciones, tendremos una nube de puntos de parámetros (n, L, x_0) , detallada en la sección anterior. El vehículo tendrá una velocidad V , y partirá de la abscisa x_0 , por lo que el tiempo que tardará en recorrer la distancia L será:

$$T = \frac{L}{V} \quad (4.2.2)$$

Para estimar una cota superior para el tiempo empleado en el apuntamiento entre dos puntos, se supondrá un tiempo de apuntamiento medio, calculado como:

$$t_{ap_{max}} = t_{giro} + t_{AF} = \frac{2 \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{d/2}{h}\right)}{\Omega_{max}} + t_{AF} \quad (4.2.3)$$

El tiempo de giro t_{giro} se puede estimar mediante trigonometría, asumiendo que el ángulo girado para el apuntamiento se puede aproximar por el arco que forma el vehículo a altitud h y la distancia media que separa dos puntos, calculada mediante:

$$d = \sqrt{\frac{A}{n}} = \sqrt{\frac{w_{plano} \cdot L}{n}} = \sqrt{\frac{2R_{ci} \cdot L}{n}} \quad (4.2.4)$$

Siendo A el área de la nube de puntos, calculada a través del ancho de huella y la longitud de la misma.

Para una cota inferior al tiempo de apuntamiento, podemos despreciar t_{giro} , ya que será inferior a t_{AF} en todos los casos:

$$t_{ap_{min}} = t_{AF} \quad (4.2.5)$$

Esta cota superior es independiente del número de puntos de la nube, por lo que será el valor máximo al que puede aspirar el algoritmo heurístico. De esta forma, podemos obtener un «límite» teórico de puntos a los que el vehículo podrá observar, comprendido entre:

$$n_{obs} \in \left[\frac{T}{t_{ap_{max}}}, \frac{T}{t_{ap_{min}}} \right] \quad (4.2.6)$$

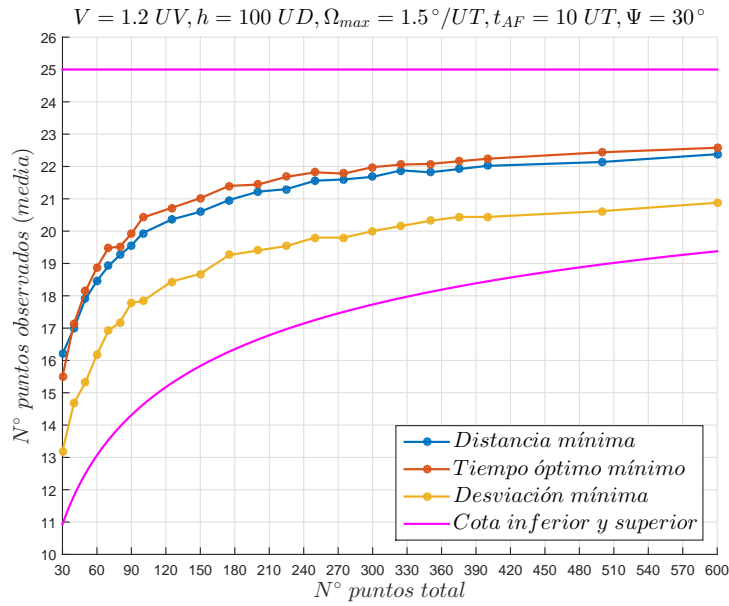


Figura 4.2.3: Límite de observación y efecto del número de puntos n de la nube (problema plano)

En la figura 4.2.3 se muestran los resultados de los experimentos realizados. Se han presentado también las cotas teóricas para el número de puntos observados. Se comprueba que efectivamente el número de puntos observados por el algoritmo se encuentra entre las cotas anteriormente deducidas. También se observa lo que denominaremos *saturación*. Si el número de puntos que contiene la nube de observación es alto (en este caso particular, a partir de aproximadamente $n = 200$), el número de puntos observados no crece indefinidamente, sino que tiende a un valor límite. Esto es debido a que el vehículo recorrerá el ancho L de la nube de puntos en el tiempo T (4.2.2), y empleará en cada apuntamiento un tiempo comprendido entre $[t_{apmin}, t_{apmax}]$, por lo que aunque el número de puntos n de la nube sea muy grande, el número de puntos observados estará limitado por los parámetros del vehículo ($V, h, \Omega_{max}, t_{AF}$).

Observando las expresiones (4.2.2), (4.2.3), (4.2.5) y (4.2.6), se puede deducir el efecto de dichos parámetros en el número de puntos observados. Si la velocidad V aumenta, se tardará menos tiempo en recorrer la nube, por lo que n_{obs} disminuirá, así como si aumenta t_{AF} , disminuye h o disminuye Ω_{max} .

Por todo esto, en los experimentos realizados en las siguientes secciones, se evitará la *saturación* de observación, por lo que el número de puntos de la nube estará comprendido, para los parámetros elegidos del vehículo y de nube, entre $n \in [30, 150]$.

Problema orbital

Se han tomado unos valores para los parámetros de la nube de puntos de $\Delta\phi = 10^\circ$ y $\phi_0 = 0^\circ$. El satélite partirá de $[R_\oplus + h \ 0 \ 0]'$, y se encontrará inicialmente observando al origen $\lambda = 0^\circ, \phi = 0^\circ$.

Se tomarán los 3 criterios desarrollados para el algoritmo de prioridad (sección 3.4) y para este caso particular se tomará $N_{prof} = 0$ y $N_{pa} = 1$ para el algoritmo de elección de puntos (AEP).

El criterio utilizado en el algoritmo de mejor camino (AMC) será el de mayor profundidad / menor tiempo de apuntamiento, pero al existir solo un punto a analizar, se antepondrá el criterio elegido en el algoritmo de prioridad.

Por último, no se tendrán en cuenta pesos asociados a los puntos de la nube.

Para obtener las cotas teóricas del número de puntos observados, al igual que en el problema plano, se tomará la velocidad del satélite como:

$$V \leq \sqrt{V_{orbital}^2 + V_\oplus^2} = \sqrt{\frac{\mu_\oplus}{R_\oplus + h} + (R_\oplus + h)^2 \cdot \omega_\oplus^2} \quad (4.2.7)$$

y para la distancia L calcularemos:

$$L = R_{\oplus} \cdot \Delta\phi \quad (4.2.8)$$

por lo que:

$$T = \frac{L}{V} \quad (4.2.9)$$

Para los tiempos de apuntamiento tendremos, al igual que en el problema plano:

$$t_{ap_{max}} = t_{giro} + t_{AF} = \frac{2 \cdot \text{atan}\left(\frac{d/2}{h}\right)}{\Omega_{max}} + t_{AF}$$

$$t_{ap_{min}} = t_{AF}$$

Siendo en este caso la distancia media d :

$$d = \sqrt{\frac{A}{n}} = \sqrt{\frac{w_{orbital} \cdot L}{n}} = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot R_{\oplus} \cdot L}{n}} \quad (4.2.10)$$

Finalmente, el límite teórico se obtendrá:

$$n_{obs} \in \left[\frac{T}{t_{ap_{max}}}, \frac{T}{t_{ap_{min}}} \right] \quad (4.2.11)$$

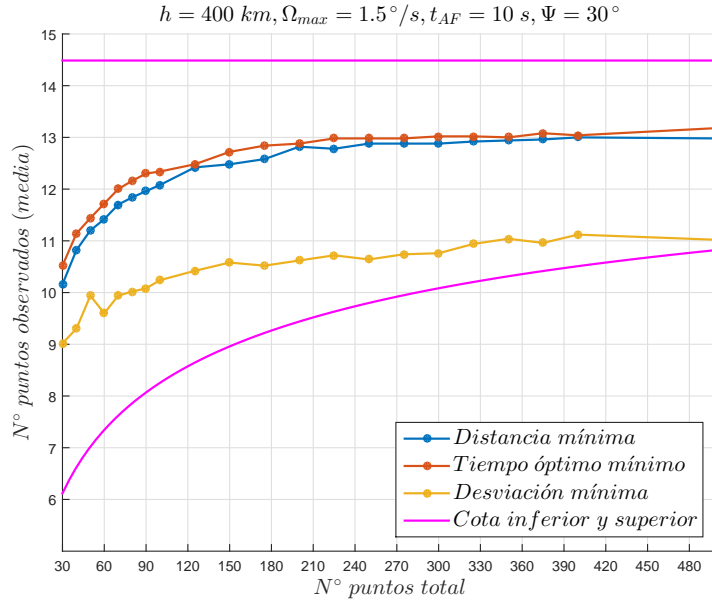


Figura 4.2.4: Límite de observación y efecto del número de puntos n de la nube (problema orbital)

Se observa en la figura 4.2.4 el mismo efecto obtenido para el problema plano, como era de esperar. En este caso para evitar saturación, se tomarán, para los valores elegidos de parámetros de satélite y nube, $n \in [30, 150]$.

5. Simulaciones

El propósito de esta sección es evaluar los distintos criterios del algoritmo de prioridad (AP) y los criterios del algoritmo de mejor camino (AMC), así como el efecto del valor elegido de profundidad N_{prof} y de puntos a analizar N_{pa} . Para ello se han realizado diferentes *experimentos* tanto para el problema plano como para el problema orbital.

El escenario elegido en el que se van a desarrollar los distintos experimentos será:

Problema plano

- *Vehículo*: $V = 1,2UD/UT$, $h = 100UD$, $\Omega_{max} = 1,5^\circ/UT$, $t_{AF} = 10UT$, $\Psi = 30^\circ$, $\vec{r}_v(t=0) = [0 \ 0 \ h]'$.
- *Nube de puntos*: $L = 300UD$, $x_0 = 0UD$.

Problema orbital

- *Satélite*: $h = 400\text{ km}$, $\Omega_{max} = 1,5^\circ/s$, $t_{AF} = 10\text{ s}$, $\Psi = 30^\circ$, $\vec{r}_v(t=0) = [R_\oplus + h \ 0 \ 0]'$.
- *Nube de puntos*: $\Delta\phi = 10^\circ$, $\phi_0 = 0^\circ$.

Los casos considerados en los experimentos corresponden a diferentes cantidades de puntos n de la nube de observación. Concretamente, se van a considerar 4 nubes de puntos diferentes correspondientes a $n = [30, 60, 90, 120]$, para ambos problemas, acorde con los resultados obtenidos en la sección 4.2.1.

Para cada uno de los valores elegidos de n , se considerarán dos juegos de experimentos distintos. El primero tendrá como objetivo *maximizar* el número de puntos observados, utilizando para el algoritmo de mejor camino (AMC) el criterio de *mayor profundidad alcanzada / menor tiempo de apuntamiento*. El segundo, tendrá como objetivo *maximizar* la suma de pesos de los puntos observados, por lo que se utilizará el criterio de *mayor suma de pesos / menor tiempo de apuntamiento*. Los pesos estarán distribuidos mediante una distribución uniforme de valor posibles $[1, 2, 3]$.

En cada uno de los dos juegos de experimentos contemplados, para cada valor de n se ejecutará la simulación variando el criterio del algoritmo de prioridad (AP) entre:

- Distancia mínima (euclídea/ortodrómica).
- Tiempo óptimo mínimo.
- Desviación respecto a nadir mínima.

Así mismo, para cada valor de n y criterio del algoritmo de prioridad, se variarán los valores de profundidad entre $N_{prof} = [0, 1, 2]$ y de puntos analizados $N_{pa} = [2, 4, 6]$.

Finalmente, para todos y cada uno de los experimentos propuestos, se realizarán 50 simulaciones según el método *Montecarlo*, obteniéndose para cada experimento:

- *Media aritmética*. Se calculará la media del número de puntos observados como:

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N_{MC}} x_i}{N_{MC}} \quad (5.0.1)$$

donde x_i es la variable analizada, y N_{MC} el número total de simulaciones

- *Desviación típica*. Con ella se medirá la dispersión de los resultados respecto al valor promedio:

$$\sigma = \left[\frac{1}{N_{MC}} \sum_{i=1}^{N_{MC}} (x_i - \mu)^2 \right]^{1/2} \quad (5.0.2)$$

5.1. Maximización de puntos observados

A continuación se presentan los resultados y análisis realizados para el objetivo de maximizar el número de puntos observados en las planificaciones obtenidas por el algoritmo ABP.

Para el criterio de *mayor profundidad alcanzada / menor tiempo de apuntamiento* del algoritmo de mejor camino (AMC), se ha obtenido la media de los puntos observados (μ_{obs}) y la desviación típica (σ_{obs}) de los resultados obtenidos.

5.1.1. Problema plano

En las siguientes tablas se muestran los resultados obtenidos para los 3 criterios elegidos del algoritmo de prioridad (AP).

N_{prof}	N_{pa}	Variable	n			
			30	60	90	120
0	2	μ_{obs}	15.88	18.78	19.84	20.46
		σ_{obs}	1.2558	0.9750	0.7103	0.6131
	4	μ_{obs}	15.60	18.74	19.92	20.70
		σ_{obs}	1.0102	0.9858	0.7516	0.5440
	6	μ_{obs}	15.32	18.78	20.00	20.50
		σ_{obs}	1.2526	0.8401	0.6999	0.6776
1	2	μ_{obs}	15.94	19.04	20.24	20.92
		σ_{obs}	0.9348	0.9026	0.7969	0.4882
	4	μ_{obs}	15.78	19.20	20.44	20.92
		σ_{obs}	0.9957	0.7284	0.5406	0.6952
	6	μ_{obs}	15.82	19.24	20.34	21.10
		σ_{obs}	1.0039	0.7709	0.7722	0.5440
2	2	μ_{obs}	16.22	19.30	20.18	20.84
		σ_{obs}	0.9538	0.6468	0.7475	0.5481
	4	μ_{obs}	16.08	19.50	20.56	21.18
		σ_{obs}	1.0270	0.7890	0.6749	0.5226
	6	μ_{obs}	16.06	19.28	20.50	21.18
		σ_{obs}	0.8668	0.8091	0.6468	0.6289

Cuadro 5.1.1: Maximizar puntos observados - Distancia euclídea mínima (problema plano)

N_{prof}	N_{pa}	Variable	n			
			30	60	90	120
0	2	μ_{obs}	15.74	18.82	19.98	20.60
		σ_{obs}	2.1553	0.8497	0.6543	0.6701
	4	μ_{obs}	15.12	18.80	20.10	20.62
		σ_{obs}	1.2061	0.8330	0.7071	0.6354
	6	μ_{obs}	15.66	18.60	19.94	20.56
		σ_{obs}	1.0022	0.9897	0.8901	0.6440
1	2	μ_{obs}	15.84	19.22	20.40	20.96
		σ_{obs}	1.3756	0.7365	0.6999	0.6047
	4	μ_{obs}	15.70	19.16	20.48	21.02
		σ_{obs}	1.0152	0.8657	0.6141	0.5529
	6	μ_{obs}	16.04	19.24	20.38	21.04
		σ_{obs}	1.2115	0.7440	0.6024	0.6688
2	2	μ_{obs}	15.96	19.28	20.32	21.10
		σ_{obs}	1.0093	0.9485	0.6528	0.6145
	4	μ_{obs}	16.20	19.28	20.60	21.08
		σ_{obs}	1.0498	0.7296	0.6999	0.4882
	6	μ_{obs}	16.00	19.48	20.70	21.20
		σ_{obs}	1.0880	0.7068	0.5803	0.5345

Cuadro 5.1.2: Maximizar puntos observados - Tiempo óptimo mínimo (problema plano)

N_{prof}	N_{pa}	Variable	n			
			30	60	90	120
0	2	μ_{obs}	14.44	16.78	18.28	18.84
		σ_{obs}	0.9930	1.1119	0.7570	0.7103
	4	μ_{obs}	14.98	17.68	18.52	19.26
		σ_{obs}	0.9145	0.8192	0.8142	0.6943
	6	μ_{obs}	15.26	17.82	18.72	19.58
		σ_{obs}	1.1920	0.8965	0.7296	0.7848
1	2	μ_{obs}	14.48	17.50	18.56	19.26
		σ_{obs}	0.9089	0.9091	0.7329	0.6328
	4	μ_{obs}	14.88	17.94	19.08	19.64
		σ_{obs}	1.4658	0.8668	0.8041	0.5253
	6	μ_{obs}	15.50	18.44	19.38	19.92
		σ_{obs}	0.8631	0.7866	0.6966	0.6007
2	2	μ_{obs}	14.58	17.18	18.64	19.30
		σ_{obs}	0.9916	0.9833	0.9848	0.7071
	4	μ_{obs}	15.48	17.98	19.34	19.88
		σ_{obs}	0.9947	0.7690	0.7453	0.6273
	6	μ_{obs}	15.74	18.60	19.60	20.34
		σ_{obs}	0.8526	0.8330	0.6999	0.6263

Cuadro 5.1.3: Maximizar puntos observados - Desviación respecto a nadir mínima (problema plano)

5.1.2. Problema orbital

En las siguientes tablas se muestran los resultados obtenidos para los 3 criterios elegidos del algoritmo de prioridad (AP).

N_{prof}	N_{pa}	Variable	n			
			30	60	90	120
0	2	μ_{obs}	10.60	11.74	12.28	12.54
		σ_{obs}	0.7284	0.5997	0.5729	0.5035
	4	μ_{obs}	10.64	11.86	12.26	12.58
		σ_{obs}	0.6928	0.4522	0.5272	0.4986
	6	μ_{obs}	10.84	11.76	12.24	12.60
		σ_{obs}	0.7384	0.5555	0.4764	0.4949
1	2	μ_{obs}	10.74	11.92	12.42	12.64
		σ_{obs}	0.6943	0.4445	0.4986	0.4849
	4	μ_{obs}	11.08	11.98	12.40	12.78
		σ_{obs}	0.5657	0.5887	0.5345	0.4185
	6	μ_{obs}	10.88	12.02	12.56	12.72
		σ_{obs}	0.6893	0.4734	0.5014	0.4536
2	2	μ_{obs}	11.06	12.08	12.48	12.82
		σ_{obs}	0.6824	0.5657	0.5436	0.3881
	4	μ_{obs}	11.16	12.16	12.76	12.84
		σ_{obs}	0.5841	0.4677	0.4314	0.3703
	6	μ_{obs}	11.16	12.12	12.76	12.88
		σ_{obs}	0.7918	0.4352	0.4314	0.3283

Cuadro 5.1.4: Maximizar puntos observados - Distancia ortodrómica mínima (problema orbital)

N_{prof}	N_{pa}	Variable	n			
			30	60	90	120
0	2	μ_{obs}	10.66	11.86	12.24	12.56
		σ_{obs}	0.5928	0.6064	0.5175	0.5014
	4	μ_{obs}	10.72	11.72	12.20	12.56
		σ_{obs}	0.7010	0.4965	0.4518	0.5406
	6	μ_{obs}	10.68	11.78	12.28	12.72
		σ_{obs}	0.8192	0.5067	0.6074	0.4536
1	2	μ_{obs}	11.00	12.04	12.44	12.84
		σ_{obs}	0.7284	0.4499	0.5014	0.3703
	4	μ_{obs}	10.88	12.12	12.50	12.90
		σ_{obs}	0.7183	0.4798	0.5051	0.3030
	6	μ_{obs}	10.82	12.06	12.50	12.86
		σ_{obs}	0.6606	0.5500	0.5440	0.3505
2	2	μ_{obs}	10.96	12.10	12.62	12.82
		σ_{obs}	0.5700	0.5051	0.5303	0.3881
	4	μ_{obs}	11.04	12.12	12.70	12.86
		σ_{obs}	0.6047	0.3854	0.4629	0.3505
	6	μ_{obs}	10.84	12.14	12.64	12.96
		σ_{obs}	0.6503	0.5718	0.4849	0.1979

Cuadro 5.1.5: Maximizar puntos observados - Tiempo óptimo mínimo (problema orbital)

N_{prof}	N_{pa}	Variable	n			
			30	60	90	120
0	2	μ_{obs}	9.82	10.94	11.08	11.18
		σ_{obs}	1.1008	0.7669	0.8769	0.6289
	4	μ_{obs}	10.44	11.52	11.68	11.98
		σ_{obs}	0.8369	0.6773	0.6207	0.4281
	6	μ_{obs}	10.48	11.76	12.12	12.18
		σ_{obs}	0.7887	0.4764	0.6273	0.5956
1	2	μ_{obs}	10.20	10.94	11.16	11.26
		σ_{obs}	0.7559	0.7398	0.5095	0.4431
	4	μ_{obs}	10.90	11.60	12.04	12.00
		σ_{obs}	0.7071	0.6389	0.5700	0.5345
	6	μ_{obs}	10.86	11.90	12.20	12.46
		σ_{obs}	0.7001	0.5440	0.5345	0.5425
2	2	μ_{obs}	10.40	10.98	11.50	11.42
		σ_{obs}	0.6701	0.6543	0.5440	0.5746
	4	μ_{obs}	10.94	11.86	12.10	11.98
		σ_{obs}	0.7669	0.5718	0.5803	0.4734
	6	μ_{obs}	11.12	12.02	12.36	12.46
		σ_{obs}	0.5206	0.5529	0.5253	0.5425

Cuadro 5.1.6: Maximizar puntos observados - Desviación respecto a nadir mínima (problema orbital)

5.2. Maximización de suma de pesos

A continuación se presentan los resultados y análisis realizados para el objetivo de la suma de pesos asociados a los puntos observados en las planificaciones obtenidas por el algoritmo ABP.

Para el criterio de *mayor suma de pesos / menor tiempo de apuntamiento* del algoritmo de mejor camino (AMC) se han obtenido la media (μ_{obs}) y desviación (σ_{obs}) del número de puntos observados, así como la media (μ_{pesos}) y la desviación (σ_{pesos}) de la suma de pesos obtenida para cada experimento.

5.2.1. Problema plano

N_{prof}	N_{pa}	Variable	n			
			30	60	90	120
0	2	μ_{obs}	14.68	17.62	19.04	19.94
		σ_{obs}	1.0388	0.8303	0.8071	0.6824
		μ_{pesos}	32.18	40.34	43.96	46.40
		σ_{pesos}	3.1860	3.6790	2.9483	3.4759
0	4	μ_{obs}	12.76	16.36	18.00	18.92
		σ_{obs}	1.2216	1.0451	0.6701	0.7239
		μ_{pesos}	30.86	41.48	46.82	49.80
		σ_{pesos}	3.7033	3.8078	2.6318	3.1493
0	6	μ_{obs}	12.40	15.48	17.16	18.54
		σ_{obs}	0.9035	0.9528	0.7656	0.8134
		μ_{pesos}	31.18	40.52	46.10	50.24
		σ_{pesos}	2.6702	3.4478	3.1249	2.8754
1	2	μ_{obs}	15.10	18.06	19.24	20.10
		σ_{obs}	1.1294	0.7931	0.9806	0.5051
		μ_{pesos}	32.70	40.94	44.56	46.66
		σ_{pesos}	4.0520	3.0533	3.6931	2.1910
1	4	μ_{obs}	13.14	17.06	18.52	19.30
		σ_{obs}	2.2679	0.9982	0.7887	0.5803
		μ_{pesos}	31.44	42.76	48.06	50.56
		σ_{pesos}	5.7788	3.3476	2.6910	2.7417
1	6	μ_{obs}	12.74	16.34	17.80	18.58
		σ_{obs}	1.6264	0.9392	0.9258	0.7584
		μ_{pesos}	31.52	42.98	47.74	50.32
		σ_{pesos}	4.5411	3.0338	3.0493	2.7660
2	2	μ_{obs}	14.98	17.88	19.24	20.02
		σ_{obs}	1.2204	0.9398	0.7440	0.5887
		μ_{pesos}	33.56	40.60	44.88	47.40
		σ_{pesos}	3.9236	3.8545	3.5836	2.9898
2	4	μ_{obs}	13.36	16.68	18.18	19.26
		σ_{obs}	1.1205	0.8437	0.6606	0.5997
		μ_{pesos}	32.24	42.56	47.66	51.42
		σ_{pesos}	3.5258	2.9772	2.6696	2.6580
2	6	μ_{obs}	12.94	16.08	17.58	18.52
		σ_{obs}	1.0956	0.9223	0.7584	0.7887
		μ_{pesos}	32.30	42.36	47.26	50.72
		σ_{pesos}	3.2151	3.3427	2.9541	2.8503

Cuadro 5.2.1: Maximizar suma de pesos - Distancia euclídea mínima (problema plano)

N_{prof}	N_{pa}	Variable	n			
			30	60	90	120
0	2	μ_{obs}	15.38	17.62	19.18	
		σ_{obs}	2.4486	0.8545	0.8003	
		μ_{pesos}	15.38	39.10	43.48	
		σ_{pesos}	2.4486	3.4241	3.1052	
0	4	μ_{obs}	15.42	16.24	18.08	
		σ_{obs}	1.2304	1.0797	0.9442	
		μ_{pesos}	15.42	41.04	46.22	
		σ_{pesos}	1.2304	3.7794	3.3642	
0	6	μ_{obs}	15.30	15.72	17.26	
		σ_{obs}	1.0546	0.9044	1.1395	
		μ_{pesos}	15.30	41.50	46.02	
		σ_{pesos}	1.0546	3.2966	3.3042	
1	2	μ_{obs}	15.70	18.10	19.34	
		σ_{obs}	1.9086	0.9742	0.8715	
		μ_{pesos}	15.70	41.20	43.60	
		σ_{pesos}	1.9086	3.7088	3.1816	
1	4	μ_{obs}	15.84	16.80	18.68	
		σ_{obs}	1.1843	0.9035	0.7407	
		μ_{pesos}	15.84	42.24	48.00	
		σ_{pesos}	1.1843	2.8966	2.3905	
1	6	μ_{obs}	15.88	15.94	17.84	
		σ_{obs}	0.9179	1.0956	0.8889	
		μ_{pesos}	15.88	41.46	47.70	
		σ_{pesos}	0.9179	4.2195	3.0321	
2	2	μ_{obs}	15.30	18.06	19.48	
		σ_{obs}	2.3409	0.9564	0.7351	
		μ_{pesos}	15.30	41.54	44.84	
		σ_{pesos}	2.3409	3.7209	2.9302	
2	4	μ_{obs}	15.10	16.76	18.36	
		σ_{obs}	0.9742	1.0012	0.7217	
		μ_{pesos}	15.10	42.34	46.94	
		σ_{pesos}	0.9742	3.0278	3.2727	
2	6	μ_{obs}	14.92	15.74	17.86	
		σ_{obs}	1.1220	0.8526	0.8084	
		μ_{pesos}	14.92	41.44	48.22	
		σ_{pesos}	1.1220	3.0583	2.8377	

Cuadro 5.2.2: Maximizar suma de pesos - Tiempo óptimo mínimo (problema plano)

N_{prof}	N_{pa}	Variable	n			
			30	60	90	120
0	2	μ_{obs}	12.64	15.52	17.22	17.98
		σ_{obs}	2.5536	1.2162	0.8873	0.7690
		μ_{pesos}	27.40	33.88	38.18	40.76
		σ_{pesos}	6.4111	3.7777	4.4616	3.3659
0	4	μ_{obs}	12.48	14.98	16.32	17.40
		σ_{obs}	1.8978	1.1337	0.9781	1.0498
		μ_{pesos}	30.00	37.46	41.22	43.92
		σ_{pesos}	4.8781	3.6601	3.0525	3.6914
0	6	μ_{obs}	11.76	14.90	16.06	17.20
		σ_{obs}	1.9119	1.1294	0.9775	0.9258
		μ_{pesos}	29.02	38.62	42.48	45.80
		σ_{pesos}	4.9754	3.7411	3.3941	3.7526
1	2	μ_{obs}	13.18	16.36	17.62	18.18
		σ_{obs}	1.0437	1.0451	0.8303	0.8003
		μ_{pesos}	27.72	35.74	39.54	41.02
		σ_{pesos}	4.4126	3.6857	3.2338	3.3594
1	4	μ_{obs}	13.16	15.42	17.02	17.70
		σ_{obs}	1.4337	1.1082	1.0398	0.8631
		μ_{pesos}	31.32	37.50	42.36	44.84
		σ_{pesos}	3.8884	3.7321	3.4627	2.9302
1	6	μ_{obs}	12.46	15.24	16.56	17.58
		σ_{obs}	1.1643	1.0606	1.0134	0.9708
		μ_{pesos}	29.96	38.54	42.92	46.58
		σ_{pesos}	2.7402	3.3087	3.2940	3.4469
2	2	μ_{obs}	13.20	15.80	17.44	18.06
		σ_{obs}	1.2289	0.7825	0.9293	0.8668
		μ_{pesos}	28.18	34.32	38.94	40.56
		σ_{pesos}	3.7672	3.7658	3.7493	3.2836
2	4	μ_{obs}	12.48	15.54	16.88	17.68
		σ_{obs}	1.2656	1.0730	1.0812	0.8192
		μ_{pesos}	29.34	38.14	42.72	44.88
		σ_{pesos}	3.1208	2.8856	3.4937	3.0815
2	6	μ_{obs}	12.22	15.04	16.28	17.48
		σ_{obs}	0.9957	1.1058	1.0506	0.8389
		μ_{pesos}	30.18	38.20	42.72	46.80
		σ_{pesos}	3.1343	3.4226	3.5916	3.0102

Cuadro 5.2.3: Maximizar suma de pesos - Desviación respecto a nadir mínima (problema plano)

5.2.2. Problema orbital

N_{prof}	N_{pa}	Variable	n			
			30	60	90	120
0	2	μ_{obs}	10.06	11.04	11.74	12.22
		σ_{obs}	0.8430	0.6047	0.4870	0.5067
		μ_{pesos}	22.22	25.10	27.26	28.12
		σ_{pesos}	2.8161	3.1574	2.7166	2.3874
0	4	μ_{obs}	9.24	10.78	11.42	11.86
		σ_{obs}	0.8466	0.5817	0.6091	0.6064
		μ_{pesos}	23.02	27.28	29.58	30.60
		σ_{pesos}	2.4031	2.0508	2.1768	2.3647
0	6	μ_{obs}	8.76	10.54	11.30	11.58
		σ_{obs}	0.8704	0.7343	0.5803	0.6091
		μ_{pesos}	22.36	27.86	30.34	31.34
		σ_{pesos}	2.8195	2.6031	2.0265	2.0663
1	2	μ_{obs}	10.22	11.40	11.94	12.12
		σ_{obs}	0.8154	0.6061	0.6197	0.4352
		μ_{pesos}	22.44	26.12	27.10	28.70
		σ_{pesos}	2.5327	2.5204	2.5655	2.3146
1	4	μ_{obs}	9.48	11.06	11.68	11.86
		σ_{obs}	0.7887	0.5859	0.5127	0.6064
		μ_{pesos}	23.00	28.00	30.06	30.38
		σ_{pesos}	2.9555	2.0996	1.9526	2.4150
1	6	μ_{obs}	9.12	10.68	11.58	11.80
		σ_{obs}	0.8953	0.6833	0.6728	0.6061
		μ_{pesos}	23.02	28.06	30.82	31.58
		σ_{pesos}	2.8392	2.0938	2.3096	2.0513
2	2	μ_{obs}	9.96	11.42	11.88	12.08
		σ_{obs}	0.6376	0.7309	0.5206	0.4445
		μ_{pesos}	22.42	26.00	27.38	28.02
		σ_{pesos}	2.4419	2.1853	2.3810	2.0553
2	4	μ_{obs}	9.40	10.86	11.64	11.88
		σ_{obs}	0.7559	0.7287	0.5628	0.5584
		μ_{pesos}	23.34	27.34	30.26	31.08
		σ_{pesos}	2.4794	2.1910	2.1835	1.9361
2	6	μ_{obs}	8.92	10.64	11.32	11.74
		σ_{obs}	0.8769	0.7217	0.6207	0.7508
		μ_{pesos}	22.72	27.82	30.66	31.52
		σ_{pesos}	2.8359	2.5450	2.3000	2.5414

Cuadro 5.2.4: Maximizar suma de pesos - Distancia ortodrómica mínima (problema orbital)

6. Análisis de resultados

A continuación se van a representar los distintos resultados obtenidos en una serie de gráficas de barras para una visualización más visual de los mismos. Se compararán distintas variables para obtener distintas conclusiones sobre los criterios del algoritmo.

6.1. Maximización de puntos observados

En esta sección se analizarán los resultados obtenidos para el objetivo de maximizar el número de puntos observados. Se han efectuado dos análisis, para ver los efectos del valor de profundidad elegido (N_{prof}) y del valor del número de puntos a analizar (N_{pa}) en el número de puntos observados, para cada criterio elegido.

6.1.1. Efecto de N_{pa}

Se han comparado, para cada criterio del algoritmo de prioridad (AP), para cada valor de n y de N_{prof} , el efecto del número de puntos analizados N_{pa} en la media obtenida de número de puntos observados (μ_{obs}), para cada uno de los problemas analizados.

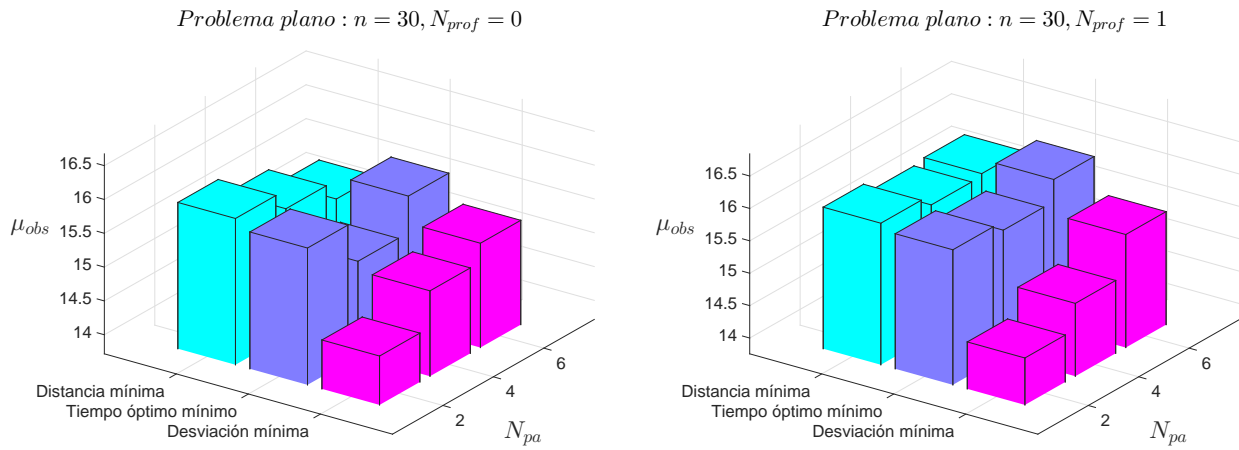
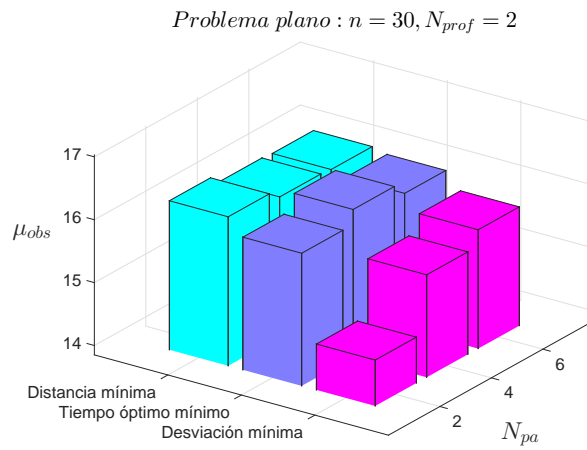
En las figuras 6.1.1-6.1.8 se comparan los resultados obtenidos para el problema plano, y en las figuras 6.1.9-6.1.16 se comparan los resultados obtenidos para el problema orbital.

El primer resultado que se puede discernir fácilmente es que el criterio de desviación respecto a nadir mínima consigue observar un menor número de puntos que los criterios de distancia mínima y tiempo óptimo mínimo. Esto es debido a que el elegir puntos de menor desviación respecto a nadir es una restricción bastante fuerte, por lo que el número de puntos observados se resiente bastante respecto a los otros criterios.

El segundo resultado apreciable es que al aumentar el valor de N_{pa} , el número de puntos observados solo aumenta de manera apreciable para el criterio de desviación mínima, siendo los otros dos criterios relativamente indiferentes a N_{pa} . Esto quiere decir que éstos dos criterios son bastante buenos a la hora de maximizar el número de puntos observados, y no necesitan un valor alto de N_{pa} , a diferencia del criterio de desviación mínima.

También se observa, comparando los resultados de ambos problemas (plano y orbital), que en el problema plano se observa un mayor número de puntos. Esto es debido a que la velocidad del satélite en el problema orbital es superior a la velocidad del vehículo en el problema plano, por lo que el número de puntos observados decrecerá, como se pudo prever en la sección 4.2.1.

Problema plano

Figura 6.1.1: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 30$ (1)Figura 6.1.2: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 30$ (2)

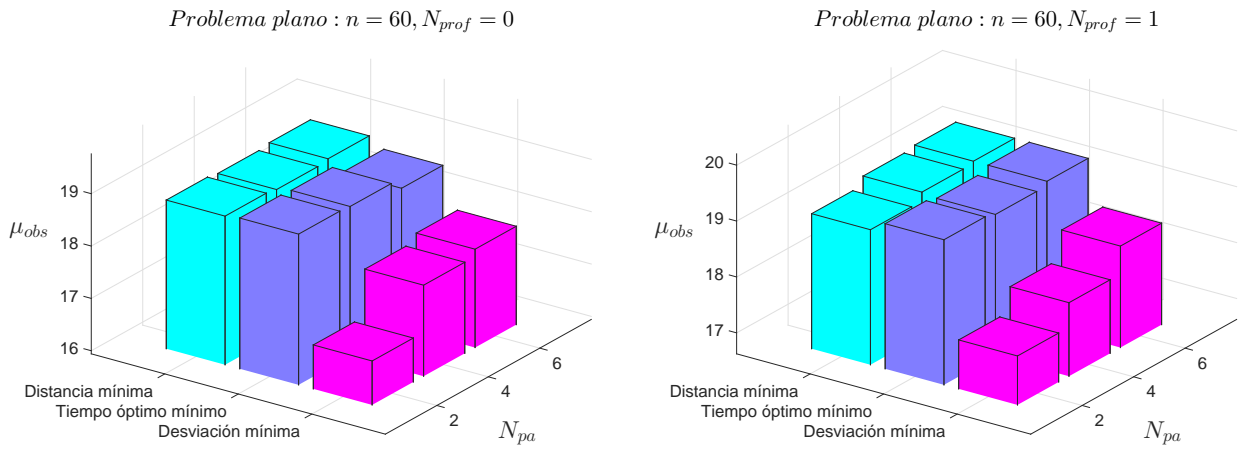


Figura 6.1.3: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 60$ (1)

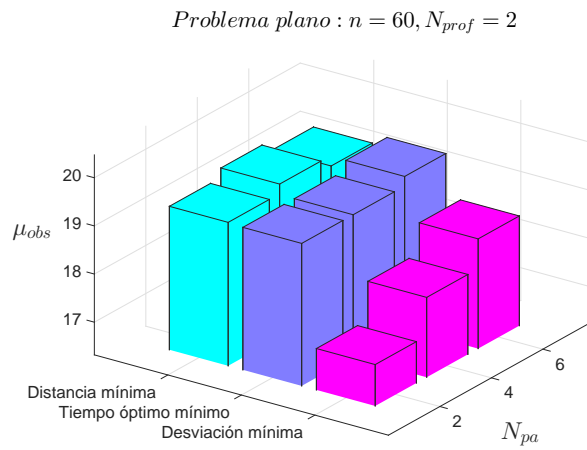


Figura 6.1.4: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 60$ (2)

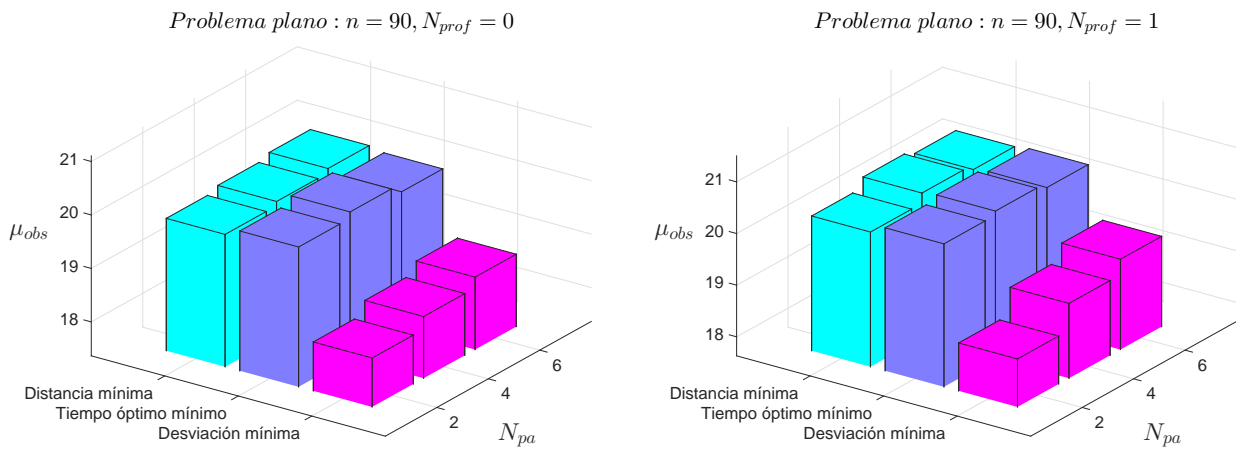


Figura 6.1.5: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 90$ (1)

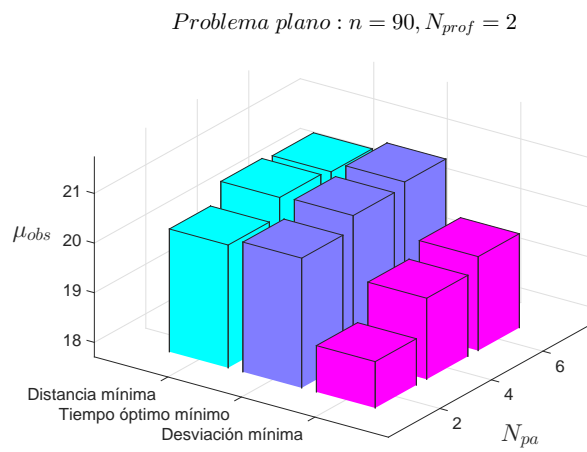


Figura 6.1.6: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 90$ (2)

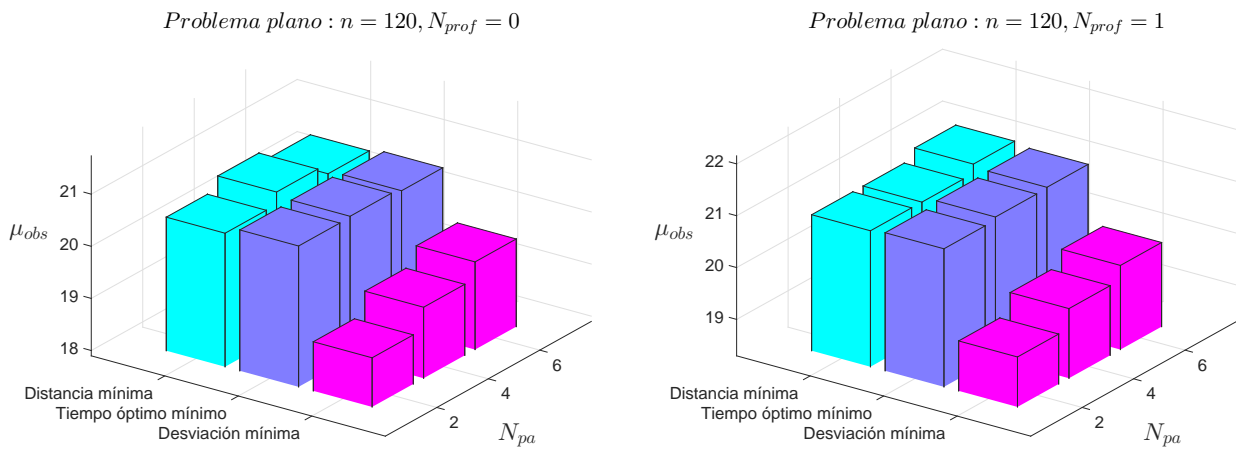


Figura 6.1.7: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 120$ (1)

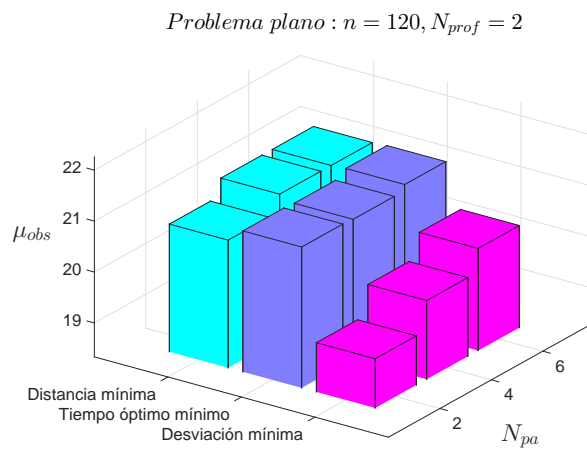
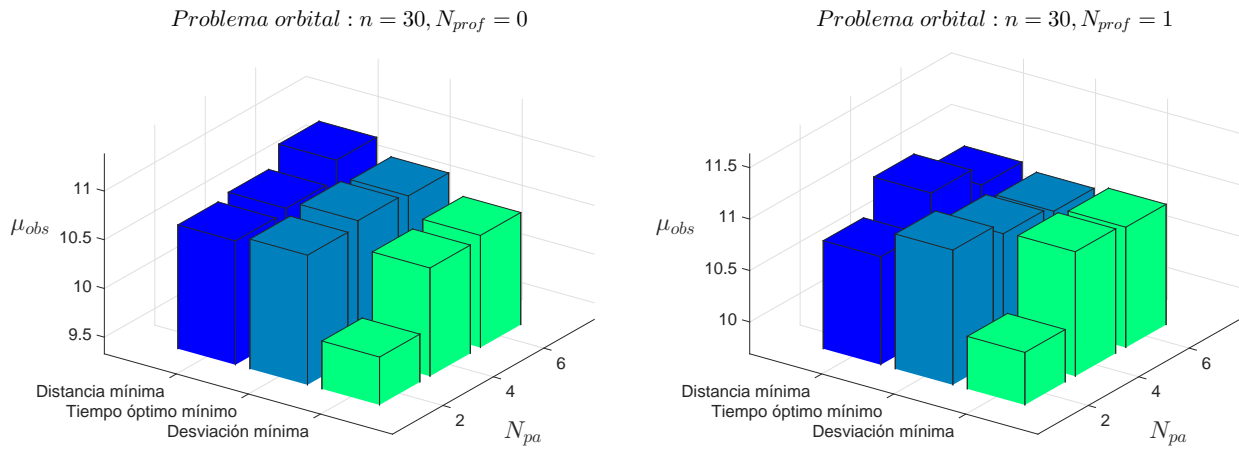
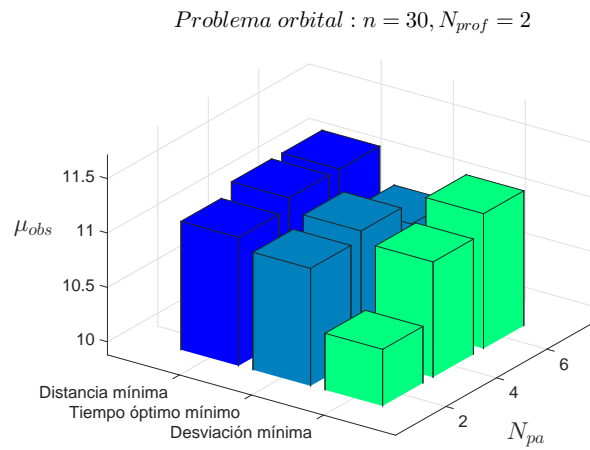


Figura 6.1.8: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 120$ (2)

Problema orbital

Figura 6.1.9: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 30$ (1)Figura 6.1.10: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 30$ (2)

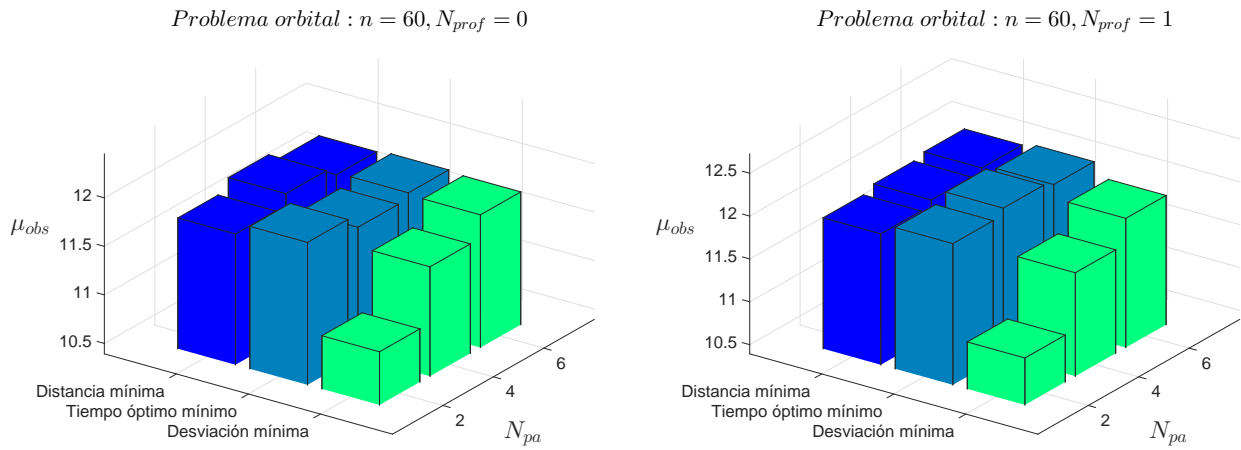


Figura 6.1.11: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 60$ (1)

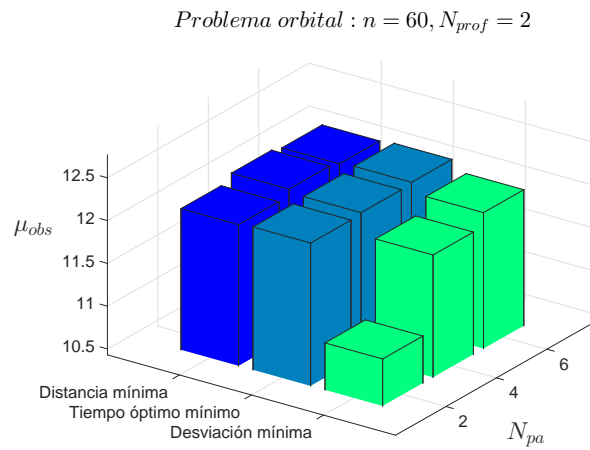


Figura 6.1.12: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 60$ (2)

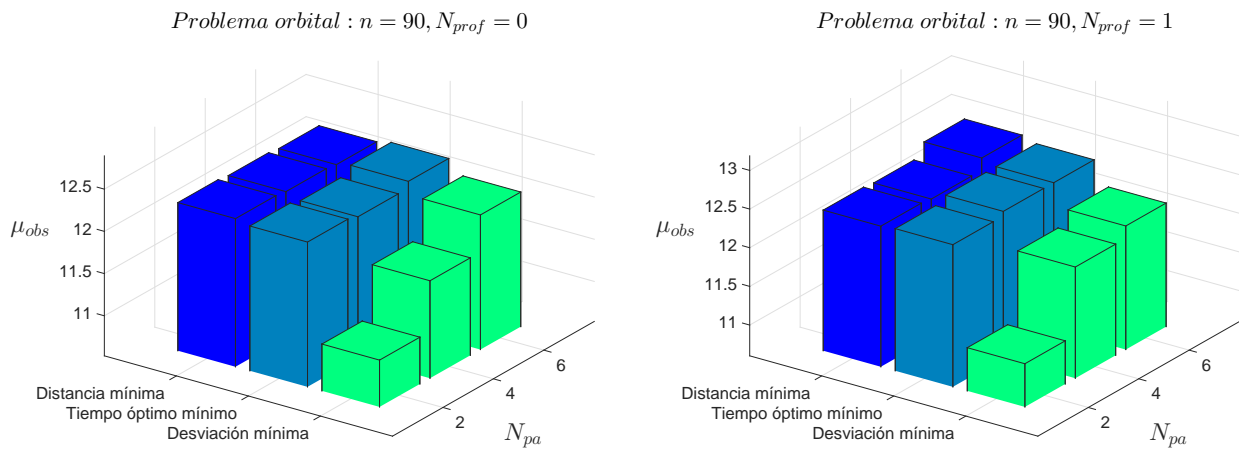


Figura 6.1.13: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 90$ (1)

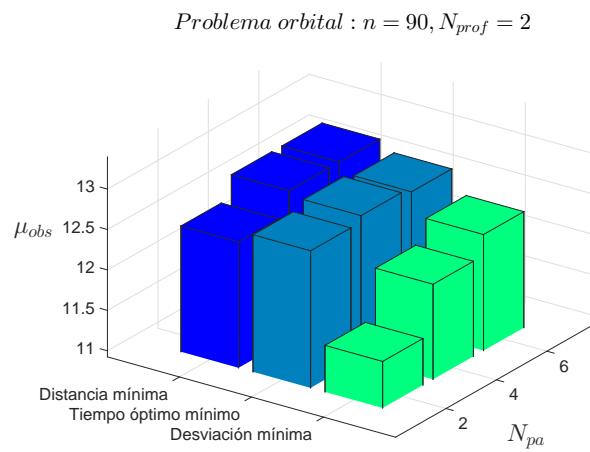


Figura 6.1.14: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 90$ (2)

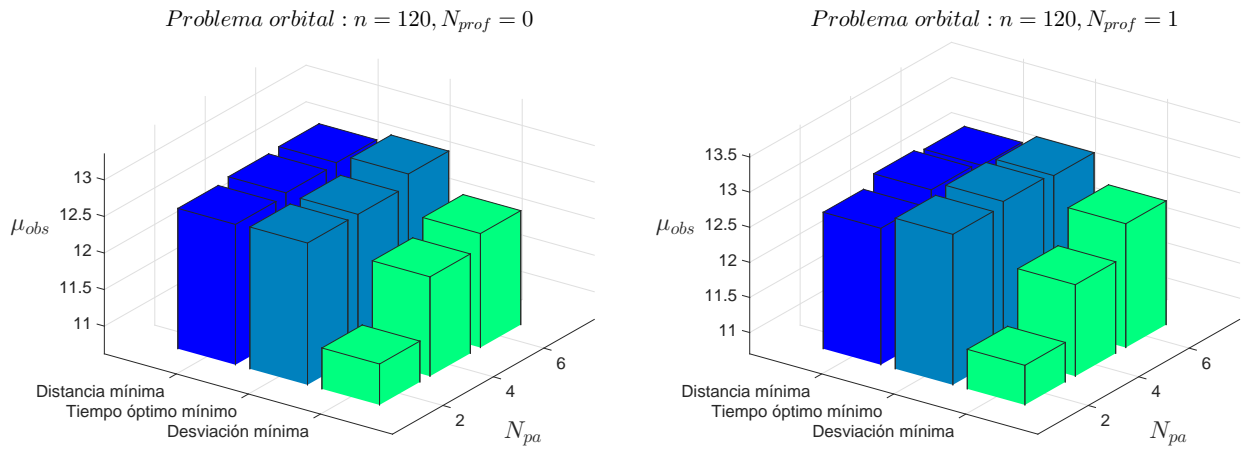


Figura 6.1.15: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 120$ (1)

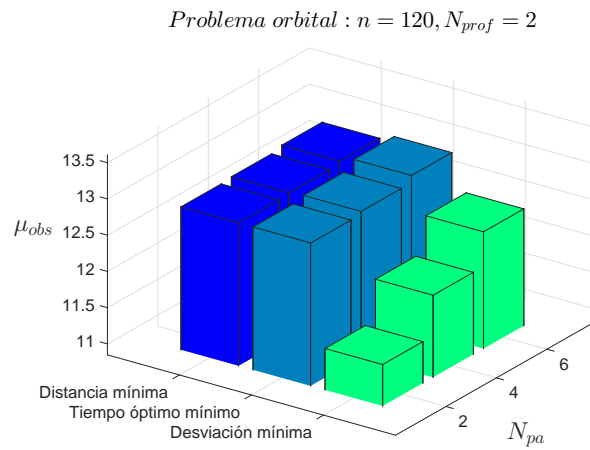


Figura 6.1.16: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{pa} - $n = 120$ (2)

6.1.2. Efecto de N_{prof}

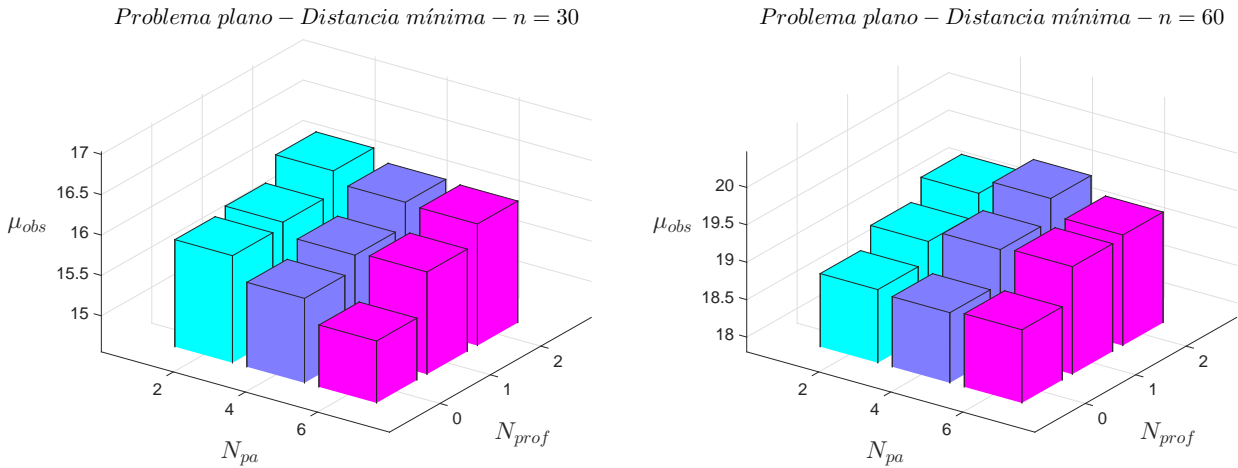
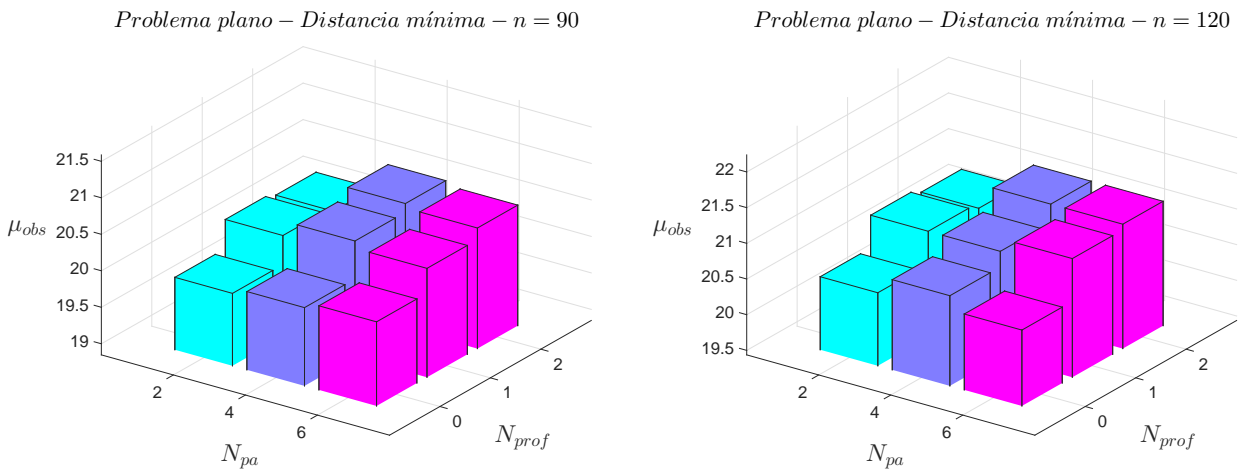
Se han comparado, para cada criterio del algoritmo de prioridad (AP), y para cada valor de n , el efecto del valor de profundidad escogido N_{prof} para cada N_{pa} en la media de puntos observados (μ_{obs}).

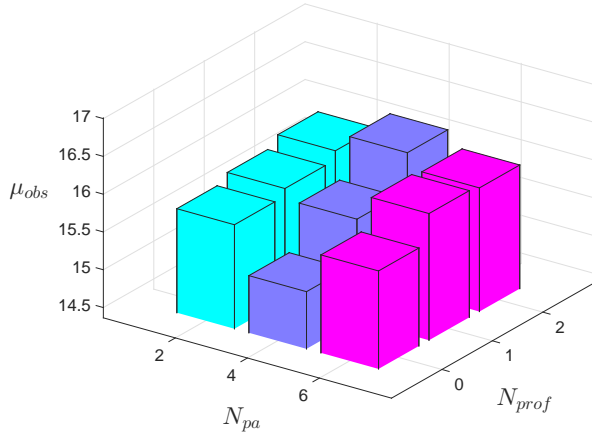
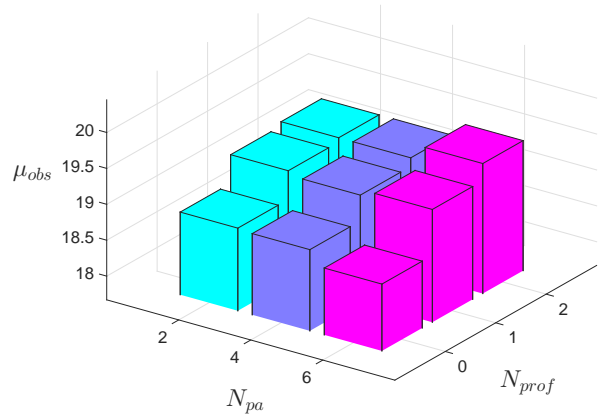
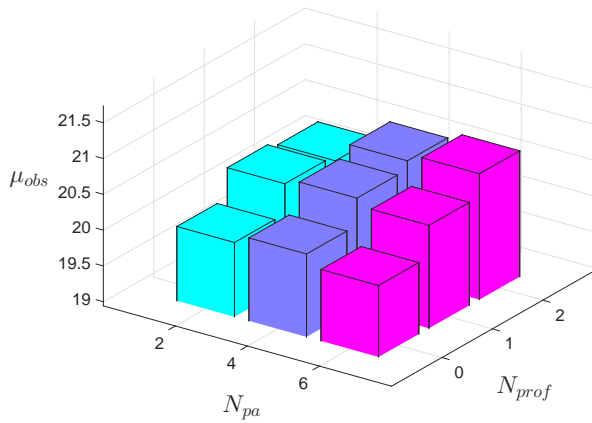
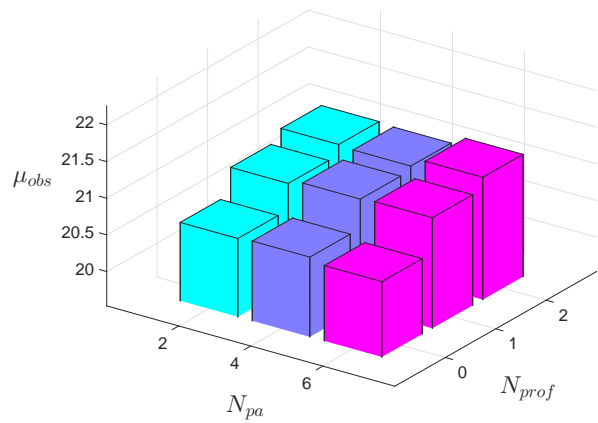
En las figuras 6.1.17-6.1.22 se comparan los resultados obtenidos en el problema plano, y en las figuras 6.1.23-6.1.28 los resultados para el problema orbital.

En estas comparaciones se puede apreciar mejor el efecto de N_{prof} en el número de puntos observados. De manera general, al aumentar el valor de N_{prof} , aumenta la media de puntos observados ligeramente, para los dos problemas analizados, independientemente del criterio elegido del algoritmo de prioridad.

Se vuelve a denotar el hecho de que, a mayor N_{pa} y mayor N_{prof} , el criterio de desviación respecto a nadir mínima mejora notablemente, mientras que los otros dos criterios no se ven tan afectados, aunque también mejoren su comportamiento.

Problema plano

Figura 6.1.17: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (1)Figura 6.1.18: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (2)

Problema plano – Tiempo óptimo mínimo – $n = 30$ Problema plano – Tiempo óptimo mínimo – $n = 60$ Figura 6.1.19: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Tiempo ópt. mínimo (1)Problema plano – Tiempo óptimo mínimo – $n = 90$ Problema plano – Tiempo óptimo mínimo – $n = 120$ Figura 6.1.20: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Tiempo ópt. mínimo (2)

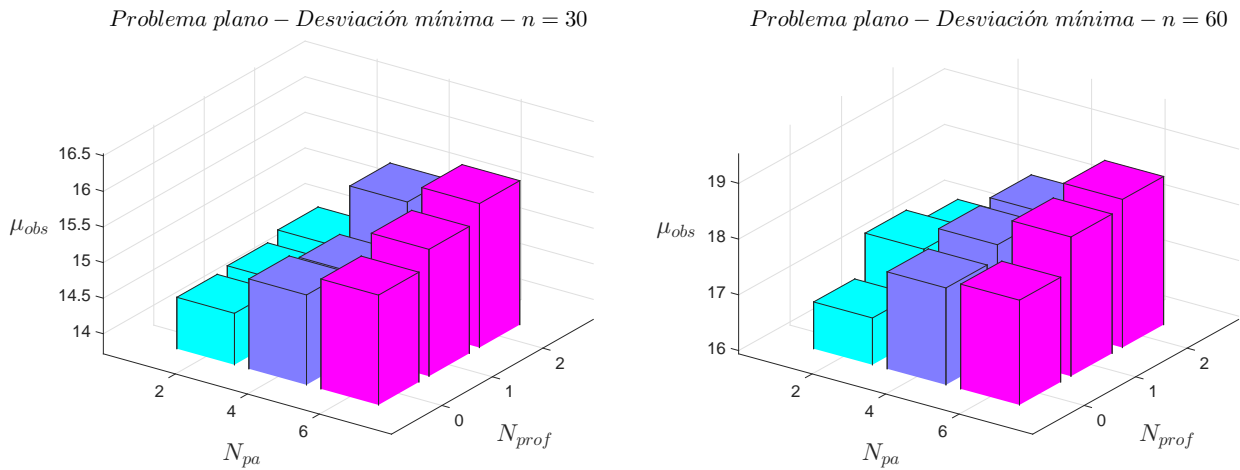


Figura 6.1.21: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (1)

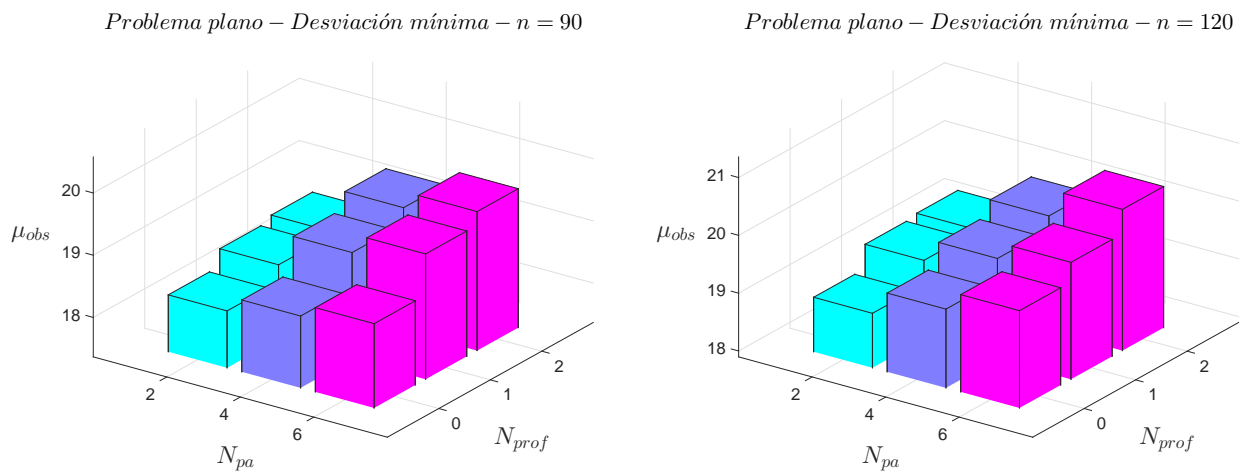
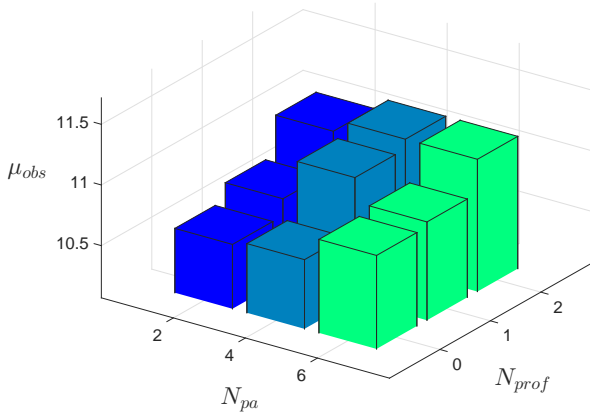
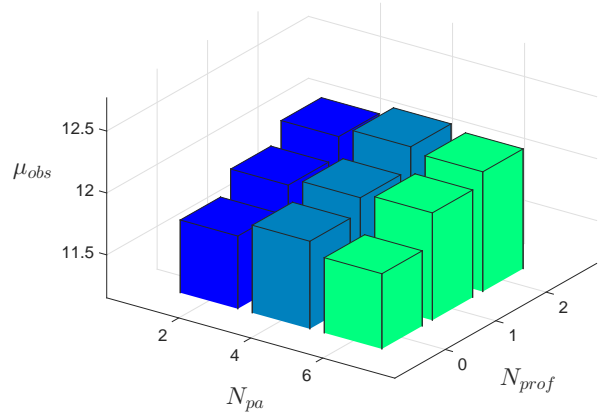
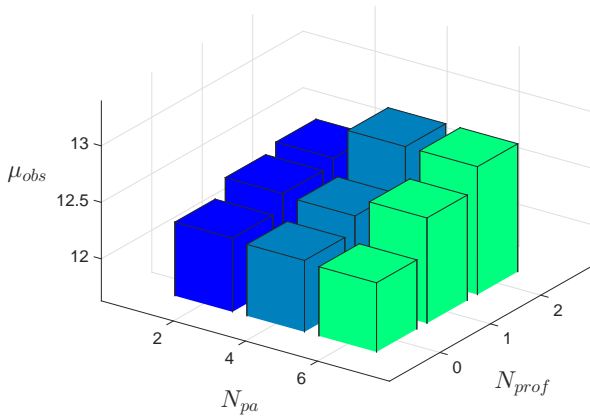
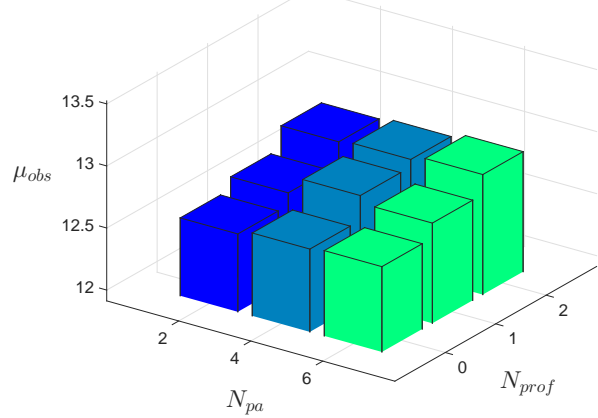
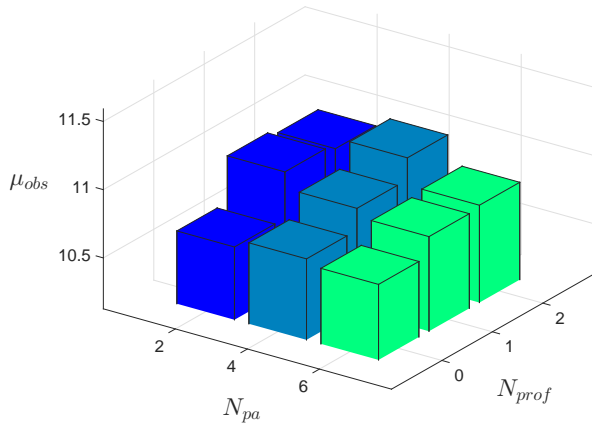
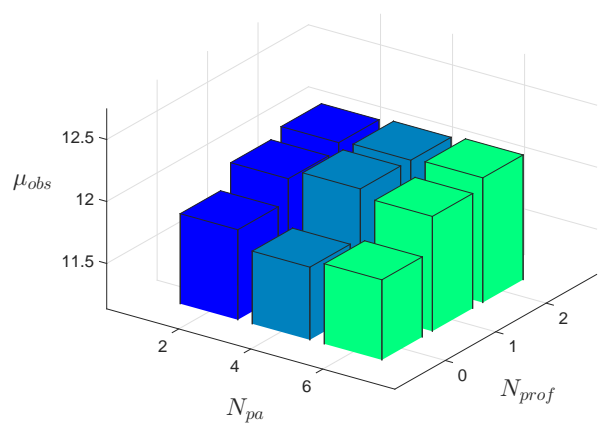
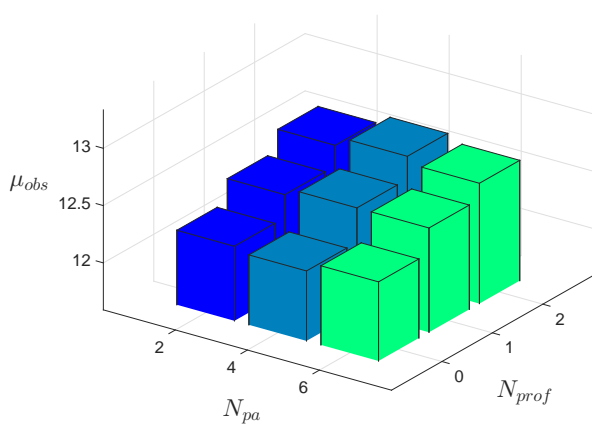
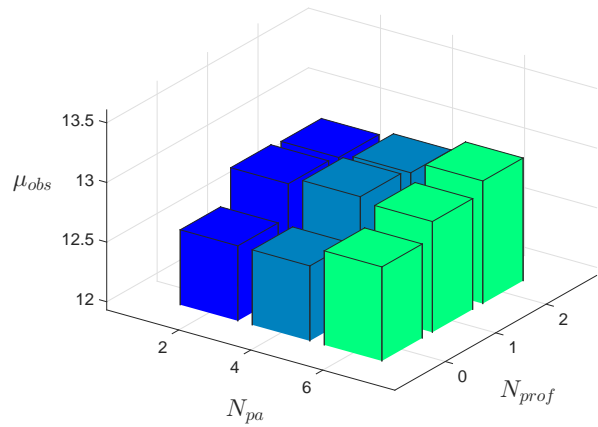
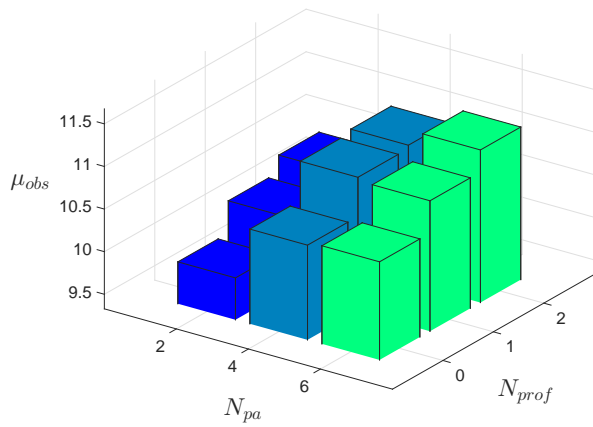
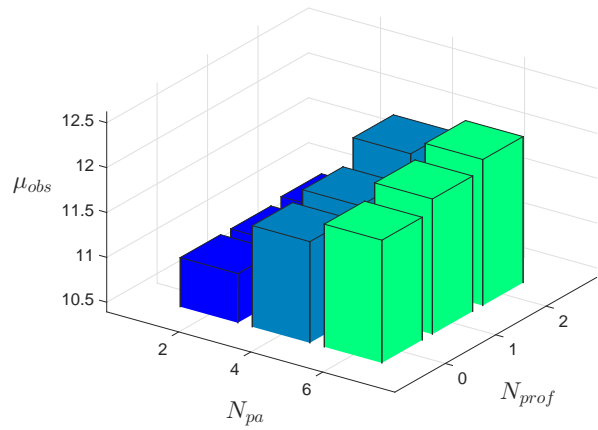
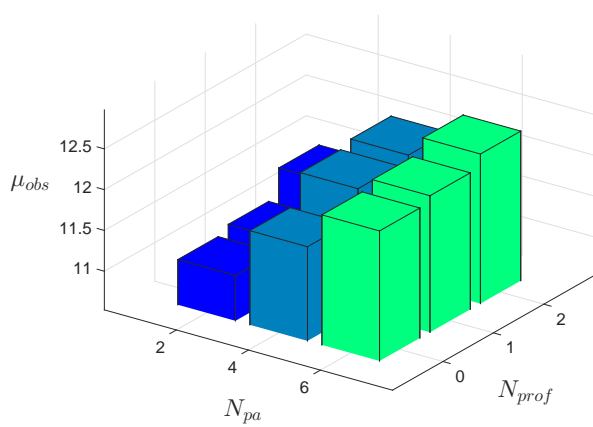
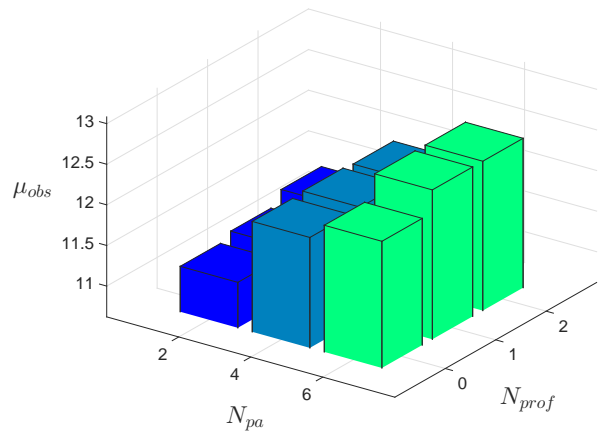


Figura 6.1.22: Prob. plano - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (2)

Problema orbital

Problema orbital – Distancia mínima – $n = 30$ Problema orbital – Distancia mínima – $n = 60$ Figura 6.1.23: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (1)Problema orbital – Distancia mínima – $n = 90$ Problema orbital – Distancia mínima – $n = 120$ Figura 6.1.24: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (2)

Problema orbital – Tiempo óptimo mínimo – $n = 30$ Problema orbital – Tiempo óptimo mínimo – $n = 60$ Figura 6.1.25: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Tiempo ópt. mínimo (1)Problema orbital – Tiempo óptimo mínimo – $n = 90$ Problema orbital – Tiempo óptimo mínimo – $n = 120$ Figura 6.1.26: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Tiempo ópt. mínimo (2)

Problema orbital – Desviación mínima – $n = 30$ Problema orbital – Desviación mínima – $n = 60$ Figura 6.1.27: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (1)Problema orbital – Desviación mínima – $n = 90$ Problema orbital – Desviación mínima – $n = 120$ Figura 6.1.28: Prob. orbital - Maximización de puntos - μ_{obs} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (2)

6.2. Maximización de pesos

En esta sección se analizarán los resultados obtenidos para el objetivo de maximizar la suma de pesos asociados al número de puntos observados. Se han efectuado dos análisis, para ver los efectos del valor de profundidad elegido (N_{prof}) y del valor del número de puntos a analizar (N_{pa}) en la suma de pesos obtenida.

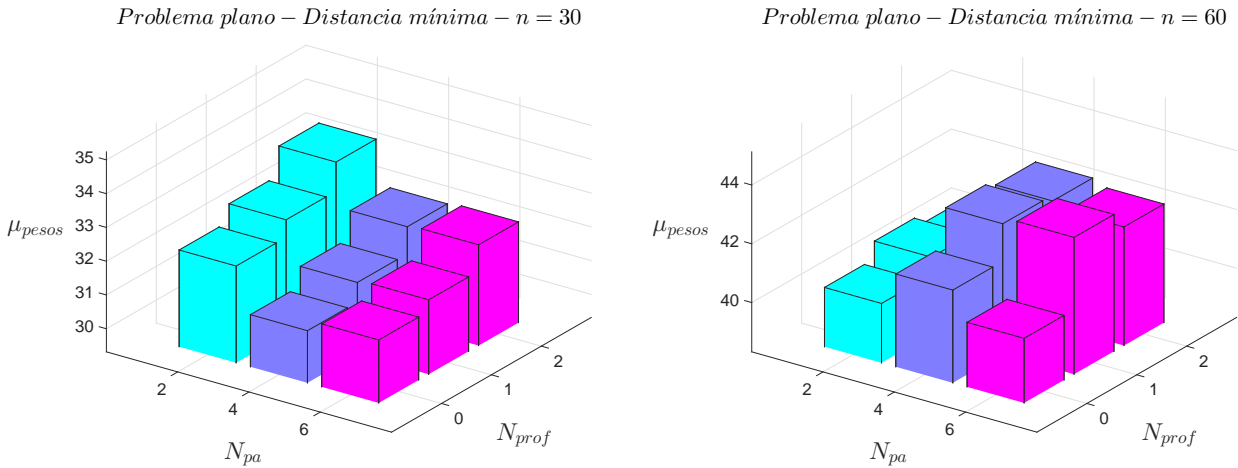
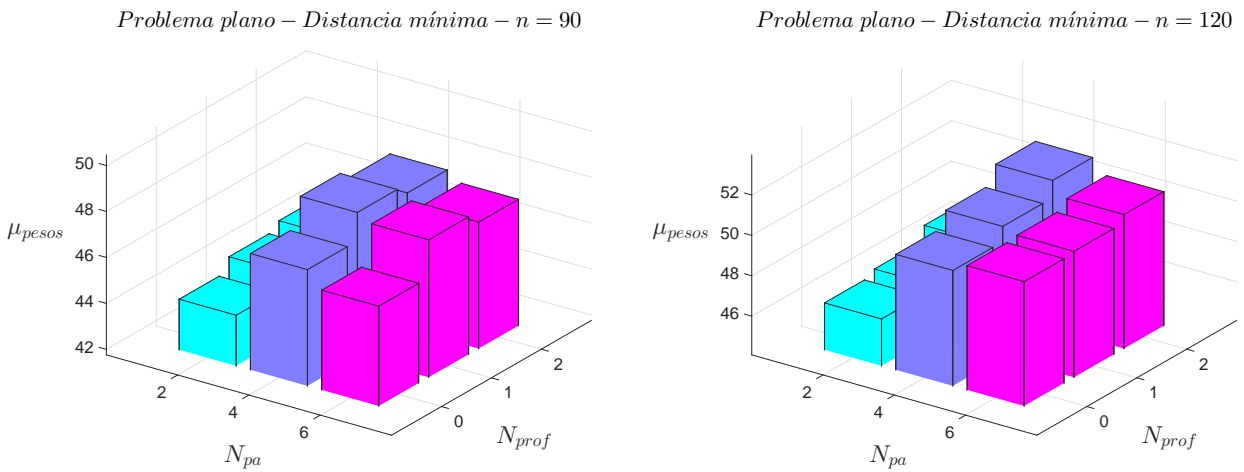
6.2.1. Efecto de N_{prof}

Se han comparado, para cada criterio del algoritmo de prioridad (AP), y para cada valor de n , el efecto del valor de profundidad escogido N_{prof} para cada N_{pa} en la media de suma de pesos (μ_{pesos}).

El primer efecto llamativo que se observa es que, para el problema plano, para $n = 30$, el hecho de aumentar el valor de N_{pa} provoca que la suma de pesos conseguida decrezca. Sin embargo, para $n = 60, 90, 120$, este efecto desaparece.

Se observa que de manera general, al aumentar el valor de la profundidad (N_{prof}), la media de la suma de pesos aumenta para valores bajos de N_{pa} . Sin embargo, para valores altos de N_{pa} , el hecho de aumentar la profundidad no implica un aumento notable en la suma de pesos.

Problema plano

Figura 6.2.1: Prob. plano - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (1)Figura 6.2.2: Prob. plano - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (2)

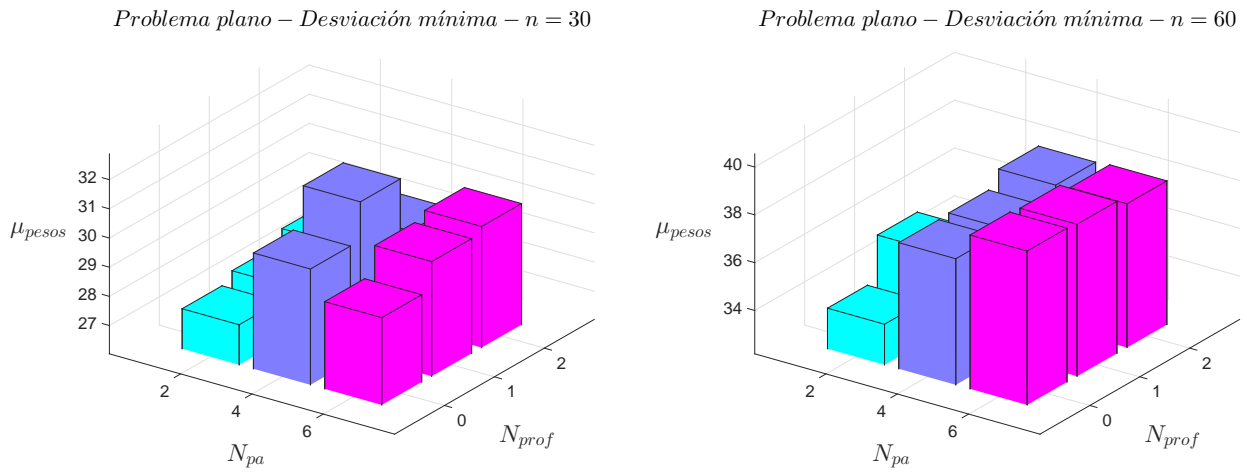


Figura 6.2.3: Prob. plano - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (1)

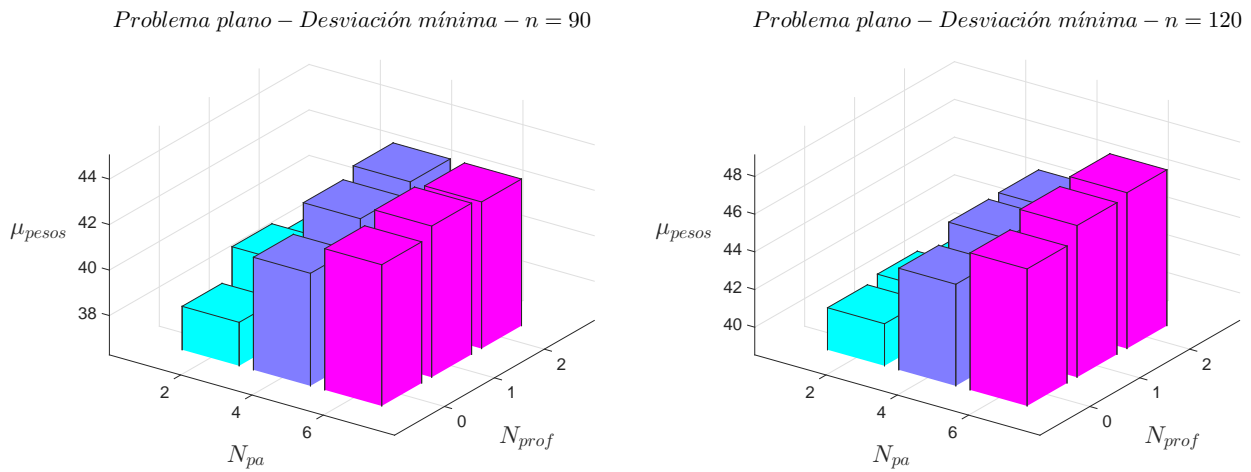
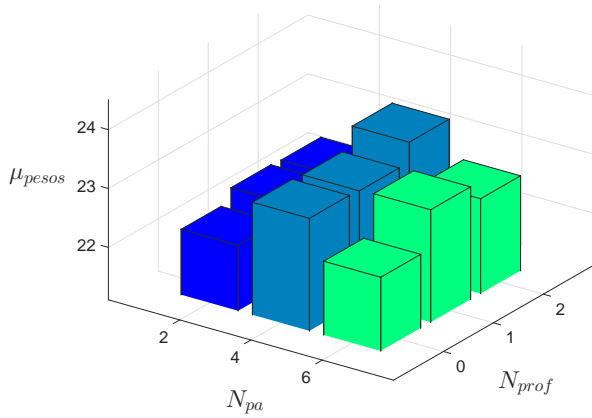
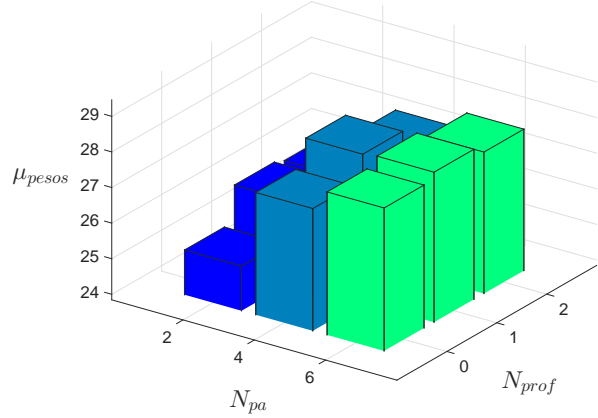
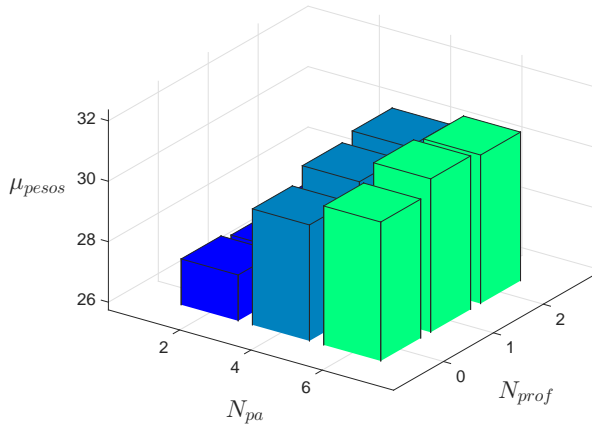
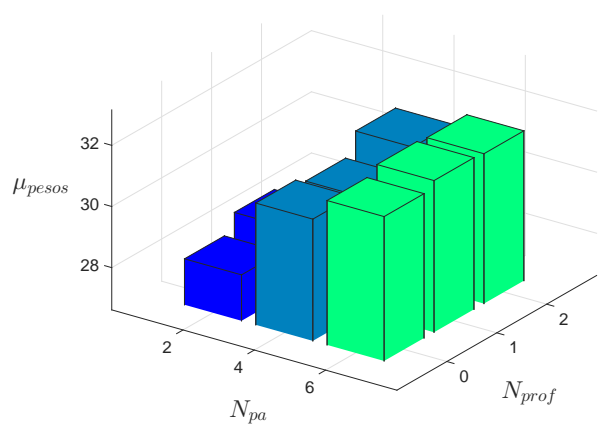


Figura 6.2.4: Prob. plano - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Desviación mínima (2)

Problema orbital

Problema orbital – Distancia mínima – $n = 30$ Problema orbital – Distancia mínima – $n = 60$ Figura 6.2.5: Prob. orbital - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (1)Problema orbital – Distancia mínima – $n = 90$ Problema orbital – Distancia mínima – $n = 120$ Figura 6.2.6: Prob. orbital - Maximización de pesos - μ_{pesos} - Efecto de N_{prof} - Distancia mínima (2)

7. Conclusiones y trabajo futuro

7.1. Conclusiones

En la introducción del presente trabajo se expusieron algunas de las actividades más importantes y habituales que realizan los distintos satélites de observación terrestre. El problema que se planteó al inicio del trabajo fue la elaboración de una planificación optimizada para la toma de imágenes por lo llamados satélites ágiles, los cuales, a diferencia de sus predecesores, tienen una mayor libertad para modificar su actitud en órbita.

Las pretensiones que se fijaron fueron principalmente: maximizar el número de puntos observados, dado una nube de puntos objetivos en una determinada área, y priorizar, cuando sea necesario, la observación de ciertos puntos de mayor interés sobre otros, así como maximizar la calidad de las imágenes tomadas en la observación.

Para ello, se crearon dos modelos de realidad. El primero de ellos consistía en un vehículo sobrevolando un plano, y el segundo el modelo de satélite en órbita respecto a la Tierra. Se estudió el movimiento óptimo que se debía realizar con la cámara para el apuntamiento entre dos puntos dados. Se concluyó que este movimiento era un giro de Euler, y se analizó cómo resolver este movimiento numéricamente, minimizando el tiempo de cálculo. Mediante el uso del modelo plano, se realizó el estudio de las implicaciones sobre el modelo de las restricciones cinemáticas que tiene el vehículo de observación (desviación respecto a nadir máxima), y posteriormente se generalizó al modelo orbital.

Dada la imposibilidad de obtener, dado un escenario de observación, la secuencia de apuntamientos óptima de manera exacta, se desarrolló un algoritmo heurístico con el que se pretendía alcanzar ciertos objetivos según el criterio elegido (maximizar puntos, pesos, calidad).

Para obtener los resultados de los algoritmos en cada uno de los modelos, se hizo uso del método Montecarlo para eliminar la contribución de la distribución aleatoria de puntos de la nube de observación.

Las conclusiones que se pueden extraer del funcionamiento de cada uno de los criterios elegidos para la ejecución del algoritmo heurístico desarrollado (ABP) son las siguientes:

- Maximización del número de puntos observados:
 - Se obtiene una mayor cantidad de puntos observados para el problema plano que para el problema orbital. Esto se debe a que la velocidad relativa del problema orbital (satélite) es superior a la elegida para el vehículo del problema plano, por lo que, como se comentó en la sección 4.2.1, conllevará un menor número de puntos observados.
 - El criterio de distancia mínima y tiempo óptimo mínimo presentan unos mejores resultados que el criterio de desviación mínima. Esto es debido a que el hecho de priorizar los puntos de menor desviación respecto al nadir conlleva una restricción mas fuerte en las observaciones que los otros dos criterios.
 - Los resultados obtenidos para los criterios de distancia mínima y tiempo óptimo mínimo son muy parecidos, ya que generalmente, el/los punto/s que se encuentren a menor distancia del punto actual, serán los que tengan asociados un tiempo de apuntamiento menores.
 - De manera general, aumentar el valor elegido de profundidad (N_{prof}), así como un aumento del número de puntos a analizar (N_{pa}) conlleva una mejora en el número de puntos observados. Tango es así, que para el problema orbital, para valores altos de N_{prof} y de N_{pa} , se consigue mejorar el criterio de desviación mínima hasta ser comparable con los otros dos criterios.
 - Para valores altos del número total de puntos objetivo (n), se mejoran los resultados al aumentar el valor elegido de profundidad y de puntos a analizar.
- Maximización de la suma de pesos asociados a los puntos observados:
 - De manera general, al igual que para el criterio de maximización del número de puntos observados, aumentar el valor elegido de profundidad y del número de puntos a analizar conlleva una mejora notable en la suma de pesos obtenida. Este efecto es más notable en el problema orbital que en el problema plano. Se observa que, para valores pequeños de n , en el caso de problema plano, un aumento del número de puntos a analizar no conlleva una mejora en la suma de pesos.
 - Debido a que como ya comprobado, el criterio de desviación mínima conlleva un empeoramiento en el número de puntos observados, también implicará unos resultados peores, comparado con los otros dos criterios, en el caso de maximización de la suma de pesos.

En definitiva, cada algoritmo es adecuado frente a unas determinadas circunstancias. Por ejemplo, si el objetivo es maximizar el número de puntos, sin importar los pesos asociados, se elegiría el criterio de distancia mínima o de tiempo óptimo mínimo. Si se pretende asegurar una adquisición de imágenes de alta calidad, se priorizaría el criterio de desviación mínima. Si el objetivo es maximizar la suma de pesos asociado, interesaría valores «altos» de profundidad y de número de puntos analizados.

En la práctica, el modelo plano se podría asemejar a un UAV que pretende fotografiar una cierta área de la superficie terrestre, a altitudes relativamente bajas, para buscar por ejemplo, prospecciones petrolíferas o detectar actividad terroristas. También se podría plantear un vehículo/UAV equipado con un arma, con el objetivo de destruir cierta cantidad de objetivos.

7.2. Trabajo futuro - Cambios y mejoras

Durante el desarrollo del trabajo se han realizado ciertas hipótesis simplificadoras, por lo que se pueden realizar ciertas mejoras, tales como:

- En el desarrollo del modelo plano, se ha supuesto un vuelo rectilíneo y uniforme a una altura fija h . Se podría continuar el estudio de este modelo considerando un vuelo no rectilíneo, y/o de velocidad no uniforme, pudiendo analizar de esta manera, diferentes maniobras de apuntamiento con cambios de altura y/o velocidad de vuelo.
- Podría ser interesante el estudio del problema de optimización mediante varios vehículos/satélites de observación. De este modo se podría plantear una planificación conjunta entre todos los vehículos/satélites, de manera que los puntos que no observe uno, puedan ser observados por otro, aumentando la eficiencia.
- En el modelo orbital, se han realizado distintas hipótesis, tales como tierra esférica, sin perturbaciones, y órbita circular. Aunque el objetivo del proyecto era desarrollar un algoritmo heurístico para resolver el problema de planificación, y la estructura sería la misma, sería interesante para futuras ampliaciones, considerar el modelo de Tierra según el elipsoide internacional de referencia WGS84, así como órbitas no circulares, y perturbaciones de órbita tales como la perturbación del J2 [4].
- En futuros estudios se podría considerar el efecto de las restricciones cinemáticas y en los tiempos de apuntamiento en los otros modos de observación del satélite ágil, tales como el modo stereo, o el modo spotlight, en el que se grabarían vídeos de ciertas áreas.
- En el desarrollo de las curvas límites de observación de forma general (problema orbital), se dedujo un conjunto de ecuaciones que debían ser resueltas de manera iterativa, lo que conlleva un aumento en el tiempo de cálculo importante. Se podría intentar mejorar el modelo, de manera que se consiguiese, al igual que en el problema plano, un método analítico para su resolución.
- Se ha considerado que, al comienzo de los apuntamientos, el vehículo/satélite se encuentra observando inicialmente al punto inmediatamente situado en el nadir. Se debería de considerar el efecto de situar el punto inicial de apuntamiento (y por consiguiente, el vector apuntamiento de la cámara inicial \vec{C}_a) arbitrariamente, ya que las curvas límite dependen fuertemente de este parámetro, pudiendo afectar en los resultados obtenidos por el algoritmo.

8. Anexo

En esta sección se incluirán distintos conceptos utilizados en el desarrollo de los modelos utilizados, así como diferentes cálculos omitidos por su extensión.

8.1. Circunferencia esférica

Dado el radio angular de la circunferencia esférica γ , y siendo su centro en coordenadas esféricas (ϕ_0, λ_0) , las coordenadas de los puntos de la circunferencia esférica vendrán dados por las siguientes expresiones [4]:

$$\cos(\Delta\lambda) = \frac{\cos\gamma - \sin\phi_p \sin\phi_0}{\cos\phi_p \cos\phi_0} \quad (8.1.1)$$

$$\lambda_p \in [\lambda_0 - \Delta\lambda, \lambda_0 + \Delta\lambda] \quad (8.1.2)$$

$$\phi_p \in [\phi_0 - \gamma, \phi_0 + \gamma] \quad (8.1.3)$$

8.2. Elementos orbitales

8.2.1. Definición

Para definir la posición temporal de un cuerpo en órbita terrestre (determinación de la órbita) se utilizan los llamados elementos orbitales [4]. Es el conjunto mínimo de datos que, junto a la época (tiempo inicial t_0) permite determinar la posición de un cuerpo en una órbita en cualquier instante de tiempo.

Dado el plano de la órbita y un sistema de referencia $Ox^Oy^Oz^O$ centrado en el foco tal que el plano Ox^Oy^O coincide con el plano de la órbita, son necesarios tres valores para determinar la órbita:

- Los parámetros a (o p) y e determinan el tipo de órbita y su forma y tamaño.
- El parámetro ω , llamado el argumento del perigeo (o de periapsis) orienta la línea de apsidés (en la dirección del vector excentricidad \vec{e} , que apunta al perigeo).
- Además, un cuarto parámetro (θ_1 , E , M o Δt) determina la posición del cuerpo.

Para una órbita arbitraria en el espacio, además de los 4 parámetros anteriores, es necesario ubicar el plano orbital respecto a un plano de referencia; para ello son necesarios dos parámetros más. Los 6 parámetros resultantes serán los denominados elementos orbitales. El plano de referencia será el plano ecuatorial (para órbitas planetocéntricas). La intersección entre el plano orbital y el de referencia determina la llamada línea de nodos. La órbita cortará la línea de nodos en dos puntos, los nodos. Aquel donde la trayectoria «asciende» (de abajo a arriba) es el nodo ascendente Ω ; el otro es el nodo descendente Υ . El vector nodo \vec{n} es un vector unitario de sentido la línea de nodos, y en dirección del nodo ascendente Ω .

Por lo tanto, el conjunto de parámetros final:

- Ω : Ascensión recta del nodo ascendente (RAAN). Es el ángulo, medido en el sentido contrario de las agujas del reloj, entre Υ y \vec{n} .
- ω : Argumento de periapsis (o del perigeo/perihelio). Es el ángulo, medido en el plano orbital y en la dirección del movimiento, entre \vec{n} y \vec{e} .
- i : Inclínación de la órbita entre 0 y π , mide el ángulo entre el plano de referencia y el plano orbital, con el sentido indicado por \vec{n} .
- a, e : Determinan la forma y tamaño de la órbita. A veces a se sustituye por p , T o n .
- θ_1 : Determina la posición del cuerpo en la órbita (para la época). Se puede sustituir por Δt , M o E (H).

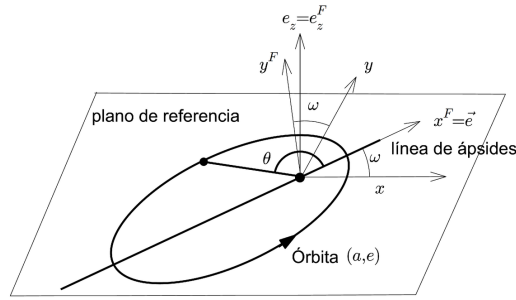


Figura 8.2.1: Elementos orbitales [4]

Además, se pueden producir casos especiales que reducen el número de elementos orbitales:

- Órbita circular no ecuatorial: ω y θ_1 no están bien definidos (no existe línea de ápsides). Se sustituyen por el ángulo $u = \omega + \theta_1$ (el argumento de la latitud) para medir la posición del cuerpo desde el nodo ascendente en el sentido del movimiento.

De esta manera, para nuestro problema de órbita circular tendremos el conjunto de parámetros $[\Omega, u, i, a, e]$.

8.2.2. Vector posición del cuerpo

Definidos los elementos orbitales, se obtiene el vector posición del cuerpo/vehículo en órbita [4], para una órbita genérica:

$$\vec{r}_v^I = r \begin{bmatrix} [\cos(\Omega) \cos(\omega) - \sin(\Omega) \sin(\omega) \cos(i)] \cos(\theta_1) - [\cos(\Omega) \sin(\omega) + \sin(\Omega) \cos(\omega) \cos(i)] \sin(\theta_1) \\ [\sin(\Omega) \cos(\omega) + \cos(\Omega) \sin(\omega) \cos(i)] \cos(\theta_1) + [-\sin(\Omega) \sin(\omega) + \cos(\Omega) \cos(\omega) \cos(i)] \sin(\theta_1) \\ \sin(\omega) \sin(i) \cos(\theta_1) + \cos(\omega) \sin(i) \sin(\theta_1) \end{bmatrix} \quad (8.2.1)$$

siendo $r = \frac{p}{1+e \cdot \cos(\theta_1)}$ y $p = a \cdot (1 - e^2)$.

En el modelo utilizado en la sección 2.1.3, se define una órbita circular, de manera que utilizando la expresión $u = \omega + \theta_1$, la ecuación 8.2.1, mediante operaciones trigonométricas, queda como:

$$\vec{r}_v^I = r \begin{bmatrix} \cos(\Omega) \cos(u) - \sin(\Omega) \cos(i) \sin(u) \\ \sin(\Omega) \cos(u) + \cos(\Omega) \cos(i) \sin(u) \\ \sin(i) \sin(u) \end{bmatrix} \quad (8.2.2)$$

siendo para este caso $r = p = a = R_{\oplus} + h$, ya que $e = 0$. R_{\oplus} es el radio terrestre y tiene un valor de 6378.14 km, y h es la altitud del satélite/vehículo.

8.3. Convergencia del método 2 para la obtención del tiempo óptimo de giro en movimiento

En la sección 2.2.3 se plantean dos métodos para obtener el tiempo óptimo de giro en movimiento. El segundo de los métodos que se plantean necesita de una demostración de convergencia, la cual se expondrá en este apartado.

Para demostrar la convergencia del método 2, se tiene que:

$$\vec{C}_a = \frac{\vec{r}_a - \vec{r}_v(t_0)}{|\vec{r}_a - \vec{r}_v(t_0)|} \quad (8.3.1)$$

y

$$\vec{C}_b(t) = \frac{\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + t)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + t)|} \quad (8.3.2)$$

los vectores de apuntamiento a los puntos a y b de coordenadas \vec{r}_a y \vec{r}_b respectivamente. El tiempo t será el tiempo empleado en el apuntamiento entre ambos puntos. Definamos entonces:

$$\theta(t) = \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_b(t) \right] \quad (8.3.3)$$

ángulo del giro entre ambos puntos para tiempo t .

Necesitamos resolver la ecuación:

$$t = \frac{\theta(t)}{\Omega_{mas}} \quad (8.3.4)$$

para un cierto Ω_{max} , \vec{r}_a , \vec{r}_b , así como la posición en función del tiempo del vehículo $\vec{r}_v(t)$ dados. Para ello se ha planteado el siguiente algoritmo:

- Para todo $n \geq 0$, se calculará iterativamente:

$$t_{n+1}^* = \frac{\theta(t_n^*)}{\Omega_{max}} = \frac{\text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_b(t_n^*) \right]}{\Omega_{mas}} \quad (8.3.5)$$

utilizando las fórmulas antes planteadas, siendo para $n = 0$:

$$t_0^* = \frac{\theta(0)}{\Omega_{mas}} = \frac{\text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_b(0) \right]}{\Omega_{mas}} \quad (8.3.6)$$

tiempo óptimo de giro en reposo.

De esta manera se tendrá que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^* = t^* \quad (8.3.7)$$

con t^* verificando $t^* = \frac{\theta(t^*)}{\Omega_{mas}}$.

Demostración

En primer lugar, si el límite $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n^* = t^*$ existe, entonces tomando límite en la ecuación (8.3.5) y puesto que todas las funciones involucradas son continuas, se verificará el resultado. Por tanto la demostración se reduce a demostrar que la secuencia t_n^* converge a cierto valor.

Definamos $\theta_n = \theta(t_n^*)$, entonces tenemos:

$$\cos(\theta_n) - \cos(\theta_{n-1}) = \vec{C}_a \cdot \vec{C}_b(t_n^*) - \vec{C}_a \cdot \vec{C}_b(t_{n-1}^*) = \vec{C}_a \cdot \left[\vec{C}_b(t_n^*) - \vec{C}_b(t_{n-1}^*) \right] \quad (8.3.8)$$

Supongamos ahora que $\vec{C}_b(t)$ es una función diferenciable de t (esta derivada se encuentra desarrollada en la sección 8.4), y llamemos a su derivada $\vec{v}_b(t)$. Entonces por el Teorema del valor medio, y suponiendo que $t_n^* > t_{n-1}^*$, existe $\tau \in [t_{n-1}^*, t_n^*]$ tal que:

$$\vec{C}_b(t_n^*) = \vec{C}_b(t_{n-1}^*) + (t_n^* - t_{n-1}^*) \cdot \vec{v}_b(\tau) \quad (8.3.9)$$

Sustituyendo en la ecuación (8.3.8) se tiene:

$$\cos(\theta_n) - \cos(\theta_{n-1}) = \vec{C}_a \cdot \left[(t_n^* - t_{n-1}^*) \cdot \vec{v}_b(\tau) \right] \quad (8.3.10)$$

entonces se tiene:

$$|\cos(\theta_n) - \cos(\theta_{n-1})| \leq \left| \vec{C}_a \vec{\nu}_b(\tau) \right| \cdot |t_n^* - t_{n-1}^*| \quad (8.3.11)$$

Nótese que si $t_n^* < t_{n-1}^*$ se llega al mismo resultado. Por otro lado, por la expresión (8.3.5), se tiene que:

$$\theta_n = \theta(t_n^*) = \Omega_{mas} \cdot t_{n+1}^* \quad (8.3.12)$$

se obtiene que:

$$|\cos(\Omega_{mas} \cdot t_{n+1}^*) - \cos(\Omega_{mas} \cdot t_n^*)| \leq \left| \vec{C}_a \vec{\nu}_b(\tau) \right| \cdot |t_n^* - t_{n-1}^*| \quad (8.3.13)$$

Con el mismo argumento anterior (Teorema del valor medio), existirá un τ_1 tal que:

$$\cos(\Omega_{mas} \cdot t_{n+1}^*) = \cos(\Omega_{mas} \cdot t_n^*) - \Omega_{max} \cdot (t_{n+1}^* - t_n^*) \cdot \sin(\Omega_{max} \cdot \tau_1) \quad (8.3.14)$$

Usando que el valor máximo del seno es 1, usando las expresiones (8.3.13) y (8.3.14) obtenemos:

$$|t_{n+1}^* - t_n^*| \leq \frac{\left| \vec{C}_a \vec{\nu}_b(\tau) \right| \cdot |t_n^* - t_{n-1}^*|}{\Omega_{max}} \quad (8.3.15)$$

Llamemos $C = \frac{|\vec{C}_a \vec{\nu}_b(\tau)|}{\Omega_{max}}$. Si podemos probar que $C < 1$, entonces se habrá terminado, ya que entonces los puntos se van aproximando entre sí y necesariamente hay convergencia, ya que se tendría:

$$|t_{n+1}^* - t_n^*| \leq C \cdot |t_n^* - t_{n-1}^*| \leq C^2 \cdot |t_{n-1}^* - t_{n-2}^*| \leq \dots \leq C^n |t_1^* - t_0^*| \quad (8.3.16)$$

dado t_0^* inicial, por lo que la sucesión de t_n^* es lo que se llama «de Cauchy», y por tanto convergente.

Estudieemos C :

$$C \leq \frac{|\vec{\nu}_b(\tau)|}{\Omega_{max}} \quad (8.3.17)$$

ya que $|\vec{C}_a| = 1$, ya que es unitario por definición. Estudieemos $\vec{\nu}_b(\tau)$:

$$\vec{\nu}_b(\tau) = \frac{d}{d\tau} \frac{\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + \tau)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + \tau)|} = \frac{-\vec{\nu}_b(t_0 + \tau)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + \tau)|} + [\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + \tau)] \cdot \frac{[\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + \tau)] \cdot \vec{\nu}_b(t_0 + \tau)}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + \tau)|^3} \quad (8.3.18)$$

Calculando ahora el módulo:

$$|\vec{\nu}_b(\tau)|^2 = \frac{|\vec{\nu}_b(t_0 + \tau)|^2}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + \tau)|^2} - \frac{|[\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + \tau)] \cdot \vec{\nu}_b(t_0 + \tau)|^2}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + \tau)|^4} \leq \frac{|\vec{\nu}_b(t_0 + \tau)|^2}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + \tau)|^2} \quad (8.3.19)$$

Si ahora conocemos cotas para la velocidad del vehículo y su distancia a los puntos, de forma que:

$$|\vec{\nu}_b(t_0 + \tau)| \leq V \quad (8.3.20)$$

y

$$|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t_0 + \tau)| > h \quad (8.3.21)$$

obtenemos fácilmente que:

$$C \leq \frac{V}{h \cdot \Omega_{max}} \quad (8.3.22)$$

Por tanto la convergencia estará garantizada si $\frac{V}{h \cdot \Omega_{max}} < 1$. Esta es una condición conservadora, es decir, si no se cumple esta condición, no implica que no haya convergencia, pero si se cumple, se tendrá seguro.

Para el problema plano con los siguientes datos de vehículo:

$$V = 1,2 \text{ UD/UT}; h = 100 \text{ UD}; \Omega_{max} = 1,5 \cdot \pi / 180 \text{ rad/UT}$$

se tiene que:

$$\frac{V}{h \cdot \Omega_{max}} = \frac{1,2 \cdot 180}{1,5 \cdot \pi \cdot 100} = 0,4584 < 1$$

Para el problema orbital, tomando por ejemplo el mismo valor de Ω_{max} , una órbita circular con $h = 500$ kilómetros, y teniendo en cuenta que la velocidad está expresada respecto al sistema geográfico, y por tanto, hay que incluir el movimiento de la Tierra:

$$V \leq \sqrt{V_{orbital}^2 + V_{\oplus}^2} = \sqrt{\frac{\mu_{\oplus}}{R_{\oplus} + h} + (R_{\oplus} + h)^2 \cdot \omega_{\oplus}^2} = 7,66 \text{ km/s} \quad (8.3.23)$$

Obtenemos entonces que:

$$\frac{V}{h \cdot \Omega_{max}} \leq \frac{7,66 \cdot 180}{1,5 \cdot \pi \cdot 500} = 0,585 < 1$$

Aunque en ambos casos la constante C se aproxima a la unidad, hay que recordar que se ha aproximado la constante en el peor caso posible. En realidad la constante dependerá de la situación y será típicamente muy inferior a la unidad.

De esta manera, queda demostrada la convergencia del método propuesto para el cálculo del tiempo óptimo de giro en movimiento t^* .

8.4. Desarrollo de algunas derivadas del modelo de giro óptimo

En este apartado se van a deducir las expresiones de una serie de derivadas que aparecen en el desarrollo del modelo de giro óptimo de la sección 2.

La expresión de la derivada respecto al tiempo del vector apuntamiento a un punto b fue mostrada en la ecuación 2.3.11:

$$\frac{d\vec{C}_b(t)}{dt} = \frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)|} \cdot \frac{d}{dt} [\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)] + \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)|} \right] \cdot [\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)]$$

Para el desarrollo de dicha expresión, será de utilidad definir:

$$m(t) = |\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)|^2 = (x_b - x_v(t))^2 + (y_b - y_v(t))^2 + (z_b - z_v(t))^2 \quad (8.4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm(t)}{dt} &= \quad (8.4.2) \\ &= 2 \cdot [x_b - x_v(t)] \cdot \left(-\frac{dx_v(t)}{dt} \right) + 2 \cdot [y_b - y_v(t)] \cdot \left(-\frac{dy_v(t)}{dt} \right) + 2 \cdot [z_b - z_v(t)] \cdot \left(-\frac{dz_v(t)}{dt} \right) = \\ &= -2 [\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)] \cdot \frac{d\vec{r}_v(t)}{dt} \end{aligned}$$

siendo:

$$\vec{r}_b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad \vec{r}_v(t) = \begin{bmatrix} x_v(t) \\ y_v(t) \\ z_v(t) \end{bmatrix} \quad (8.4.3)$$

vectores posición del punto y del vehículo.

Por lo tanto:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)|} \right] = \frac{d}{dt} [|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)|^{-1}] = \frac{d}{dt} [m(t)^{-1/2}] = -\frac{1}{2} \cdot m(t)^{-3/2} \cdot \frac{dm(t)}{dt} \quad (8.4.4)$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)|} \right] = \left[[\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)] \cdot \frac{d\vec{r}_v(t)}{dt} \right] \cdot m(t)^{-3/2} \quad (8.4.5)$$

De esta forma, podemos expresar 2.3.11 más fácilmente como:

$$\frac{d\vec{C}_b(t)}{dt} = -m(t)^{-1/2} \cdot \frac{d\vec{r}_v(t)}{dt} + \left[[\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)] \cdot \frac{d\vec{r}_v(t)}{dt} \right] \cdot m(t)^{-3/2} \cdot [\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)] \quad (8.4.6)$$

que tiene la forma:

$$\frac{d\vec{C}_b(t)}{dt} = A(t) \frac{d\vec{r}_v(t)}{dt} + B(t) [\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)] \quad (8.4.7)$$

con:

$$A(t) = -m(t)^{-1/2}; \quad B(t) = \left[[\vec{r}_b - \vec{r}_v(t)] \cdot \frac{d\vec{r}_v(t)}{dt} \right] \cdot m(t)^{-3/2} \quad (8.4.8)$$

siendo $d\vec{r}_v(t)/dt$ para el caso plano:

$$\frac{d\vec{r}_v(t)}{dt} = \begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.4.9)$$

y para el caso orbital:

$$\frac{d\vec{r}_v(t)}{dt} = \begin{bmatrix} dx_v(t)/dt \\ dy_v(t)/dt \\ dz_v(t)/dt \end{bmatrix} \quad (8.4.10)$$

$$dx_v(t)/dt = -\mu_x \sin(\beta) \omega_{\oplus} + \mu_y \cos(\beta) \omega_{\oplus} + \frac{d\mu_x}{dt} \cos(\beta) + \frac{d\mu_y}{dt} \sin(\beta) \quad (8.4.11)$$

$$dy_v(t)/dt = -\mu_x \cos(\beta) \omega_{\oplus} - \mu_y \sin(\beta) \omega_{\oplus} - \frac{d\mu_x}{dt} \sin(\beta) + \frac{d\mu_y}{dt} \cos(\beta) \quad (8.4.12)$$

$$dz_v(t)/dt = \frac{d\mu_z}{dt} \quad (8.4.13)$$

siendo:

$$\mu_x = r [\cos(\Omega) \cos(u) - \sin(\Omega) \cos(i) \sin(u)] \quad (8.4.14)$$

$$\mu_y = r [\sin(\Omega) \cos(u) + \cos(\Omega) \cos(i) \sin(u)] \quad (8.4.15)$$

$$\mu_z = r [\sin(i) \sin(u)] \quad (8.4.16)$$

y:

$$\frac{d\mu_x}{dt} = r [-\cos(\Omega) \sin(u) n - \sin(\Omega) \cos(i) \cos(u) n] \quad (8.4.17)$$

$$\frac{d\mu_y}{dt} = r [-\sin(\Omega) \sin(u) n - \cos(\Omega) \cos(i) \cos(u) n] \quad (8.4.18)$$

$$\frac{d\mu_z}{dt} = r [\sin(i) \cos(u) n] \quad (8.4.19)$$

ya que $u = u_0 + n \cdot t$ y $\beta = \omega_{\oplus} \cdot t + GST_0$.

8.5. Desarrollo de curvas límite de observación

En esta sección se van a realizar los desarrollos necesarios para obtener las expresiones de las curvas límite de observación expuestas en la sección 2.6.2, omitidos en la misma por la envergadura de los mismos.

8.5.1. Problema plano

Para el modelo de problema plano, en la sección 2.6.2 se definen las expresiones necesarias para el desarrollo de la curva límite, que se repetirán aquí para mayor claridad en la deducción.

Los puntos pertenecientes a la *curva límite de observación* los denotaremos como puntos k de coordenadas:

$$\vec{r}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8.5.1)$$

El vector apuntamiento a uno de dichos puntos de la curva límite vendrá dado por:

$$\vec{C}_k(t) = \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t)|} \quad (8.5.2)$$

Como ya hemos visto, el proceso de apuntamiento se encuentra dividido en dos etapas: apuntamiento desde el punto inicial a hasta el punto k en el tiempo óptimo t^* , y apuntamiento fijo hacia k durante t_{AF} . Los vector apuntamientos al final de cada etapa vendrán dados por:

$$\vec{C}_k^* = \vec{C}_k(t^*) = \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t^*)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t^*)|} = \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ C_3^* \end{bmatrix} \quad (8.5.3)$$

$$\vec{C}_k^f = \vec{C}_k(t^* + t_{AF}) = \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF})}{|\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF})|} = \begin{bmatrix} C_1^f \\ C_2^f \\ C_3^f \end{bmatrix} \quad (8.5.4)$$

Por definición de la curva límite de observación, los puntos pertenecientes a la misma cumplen que el vector apuntamiento \vec{C}_k^f a dichos puntos (al final del apuntamiento) formará un ángulo ϕ_k^f con respecto al nadir:

$$\phi_k^f = \phi(t_0 + t^* + t_{AF}) = \text{acos} \left[\vec{C}_k^f \cdot \vec{n} \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_k(t^* + t_{AF}) \cdot \vec{n} \right] \in [0, \Psi] \quad (8.5.5)$$

El ángulo ϕ_k^f será conocido, siendo un parámetro de decisión de la curva límite, y será igual al ángulo máximo Ψ en principio, pero, como veremos más adelante, se definirá de esta forma más general.

Así mismo, el vector apuntamiento \vec{C}_k^* formará un ángulo ϕ_k^* con respecto al nadir:

$$\phi_k^* = \phi(t_0 + t^*) = \text{acos} \left[\vec{C}_k^* \cdot \vec{n} \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_k(t^*) \cdot \vec{n} \right] \quad (8.5.6)$$

A diferencia de ϕ_k^f , el ángulo ϕ_k^* será desconocido de antemano, ya que dependerá del punto de la curva en cuestión.

Debido a que $\vec{n} = [0 \ 0 \ -1]^T$ es constante en el tiempo, podemos deducir que, para todos los puntos k pertenecientes a la curva límite se cumplirá que:

$$\vec{C}_k^f \cdot \vec{n} = -C_3^f = \cos(\phi_k^f) \Rightarrow C_3^f = -\cos(\phi_k^f) < 0 \quad (8.5.7)$$

Es decir, todos los vectores \vec{C}_k^f correspondientes a cada punto de la curva límite de observación estarán contenidos, cada uno de ellos, en un cono cuya generatriz tiene como origen el vehículo y forma un ángulo ϕ_k^f con el nadir, y su eje de revolución coincide con \vec{n} .

A partir de la ecuación (8.5.7), y sabiendo que todos los vectores apuntamiento son *unitarios* por definición, podemos parametrizar todos los vectores \vec{C}_k^f de la siguiente forma:

$$\vec{C}_k^f = \begin{bmatrix} C_1^f \\ C_2^f \\ C_3^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi_k^f) \cos(\alpha) \\ \sin(\phi_k^f) \sin(\alpha) \\ -\cos(\phi_k^f) \end{bmatrix} = \vec{C}_k^f(\alpha, \phi_k^f) \quad (8.5.8)$$

Con esta parametrización se consigue recorrer todos y cada uno de los vectores \vec{C}_k^f posibles, por lo que no hay que pensar en ella como una parametrización «geométrica» de la curva, ya que el punto interno a partir del cual se mide dicho ángulo α no corresponde a ningún punto fijo.

El vector apuntamiento \vec{C}_k^* , a diferencia de \vec{C}_k^f , no es conocido a priori, ya que dependerá de $\vec{r}_v(t_0 + t^*)$, y este a su vez del tiempo óptimo t^* . Dicho tiempo óptimo dependerá del punto a determinar de la curva límite de observación, como ya se ha comentado anteriormente.

Sin embargo, mediante (2.5.5) podemos relacionar ambos vectores, ya que por un lado sabemos que eligiendo un valor de α y de ϕ_f^* , determinaremos un vector \vec{C}_k^f , y a su vez, un cierto punto k de la curva con coordenadas \vec{r}_k , de tal forma que:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF}) + \lambda^f \cdot \vec{C}_k^f = \begin{cases} x_k = x_v(t_0 + t^* + t_{AF}) + \lambda^f \cdot C_1^f \\ y_k = y_v(t_0 + t^* + t_{AF}) + \lambda^f \cdot C_2^f \\ z_k = 0 \end{cases} \quad (8.5.9)$$

siendo:

$$\lambda^f = \lambda(t_0 + t^* + t_{AF}) = -\frac{z_v(t_0 + t^* + t_{AF})}{C_3^f} \quad (8.5.10)$$

Por otro lado, al final de la primera etapa, el vehículo se encontrará apuntando al punto k , con vector apuntamiento \vec{C}_k^* , de tal forma que se tendrá también que:

$$\vec{r}_k = \vec{r}_v(t_0 + t^*) + \lambda^* \cdot \vec{C}_k^* = \begin{cases} x_k = x_v(t_0 + t^*) + \lambda^* \cdot C_1^* \\ y_k = y_v(t_0 + t^*) + \lambda^* \cdot C_2^* \\ z_k = 0 \end{cases} \quad (8.5.11)$$

siendo:

$$\lambda^* = \lambda(t_0 + t^*) = -\frac{z_v(t_0 + t^*)}{C_3^*} \quad (8.5.12)$$

Pero, ya que el punto k de la curva es el mismo en ambos casos, podemos igualar (8.5.9) y (8.5.11) y obtener:

$$\begin{aligned} x_k &= x_v(t_0 + t^* + t_{AF}) + \lambda^f \cdot C_1^f = x_v(t_0 + t^*) + \lambda^* \cdot C_1^* \\ y_k &= y_v(t_0 + t^* + t_{AF}) + \lambda^f \cdot C_2^f = y_v(t_0 + t^*) + \lambda^* \cdot C_2^* \end{aligned} \quad (8.5.13)$$

Despejando términos:

$$\begin{aligned} x_v(t_0 + t^* + t_{AF}) - x_v(t_0 + t^*) + \lambda^f \cdot C_1^f &= \lambda^* \cdot C_1^* \\ y_v(t_0 + t^* + t_{AF}) - y_v(t_0 + t^*) + \lambda^f \cdot C_2^f &= \lambda^* \cdot C_2^* \end{aligned} \quad (8.5.14)$$

Sabiendo que el vector posición del vehículo es:

$$\vec{r}_v(t) = \begin{bmatrix} x_v(t) \\ y_v(t) \\ z_v(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V \cdot t \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad (8.5.15)$$

con evolución lineal en t , se llega a:

$$\begin{aligned} x_v(t_0 + t^* + t_{AF}) - x_v(t_0 + t^*) &= \Delta x_v = V \cdot t_{AF} \\ y_v(t_0 + t^* + t_{AF}) - y_v(t_0 + t^*) &= \Delta y_v = 0 \end{aligned} \quad (8.5.16)$$

ambos valores constantes y conocidos. De esta forma, podemos simplificar las expresiones (8.5.14) como:

$$\Delta x_v + \lambda^f \cdot C_1^f = \lambda^* \cdot C_1^* \quad (8.5.17)$$

$$\Delta y_v + \lambda^f \cdot C_2^f = \lambda^* \cdot C_2^* \quad (8.5.18)$$

También sabemos que el vector \vec{C}_k^* a determinar, es unitario, por lo que:

$$(C_1^*)^2 + (C_2^*)^2 + (C_3^*)^2 = 1 \quad (8.5.19)$$

Las ecuaciones (8.5.17), (8.5.18) y (8.5.19) forman un sistema de 3 ecuaciones que determinarán las 3 componentes del vector \vec{C}_k^* .

Sabemos que $z_v(t) = h$ constante, y $C_3^f = -\cos(\phi_k^f)$, ambos valores conocidos, por lo que:

$$\lambda^f = -\frac{z_v(t_0 + t^* + t_{AF})}{C_3^f} = -\frac{h}{C_3^f} = \frac{h}{\cos(\phi_k^f)} \quad (8.5.20)$$

Introduciendo esta expresión en (8.5.17) y (8.5.18), y habiéndose definido las componentes de \vec{C}_k^f en (2.6.19), se obtiene:

$$\Delta x_v + \lambda^f \cdot C_1^f = \Delta x_v - h \cdot \frac{C_1^f}{C_3^f} = \Delta x_v + h \cdot \frac{\sin(\phi_k^f) \cos(\alpha)}{\cos(\phi_k^f)} = \Delta x_v + h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) \quad (8.5.21)$$

$$\Delta y_v + \lambda^f \cdot C_2^f = \Delta y_v - h \cdot \frac{C_2^f}{C_3^f} = \Delta y_v + h \cdot \frac{\sin(\phi_k^f) \sin(\alpha)}{\cos(\phi_k^f)} = \Delta y_v + h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \sin(\alpha) \quad (8.5.22)$$

También conocemos:

$$\lambda^* = -\frac{z_v(t_0 + t^*)}{C_3^*} = -\frac{h}{C_3^*} \quad (8.5.23)$$

Combinando estas expresiones obtenemos:

$$\lambda^* \cdot C_1^* = -h \cdot \frac{C_1^*}{C_3^*} = \Delta x_v + h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) \quad (8.5.24)$$

$$\lambda^* \cdot C_2^* = -h \cdot \frac{C_2^*}{C_3^*} = \Delta y_v + h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \sin(\alpha) \quad (8.5.25)$$

$$(C_1^*)^2 + (C_2^*)^2 + (C_3^*)^2 = 1 \quad (8.5.26)$$

De las expresiones (8.5.24) y (8.5.25) definiremos las siguientes expresiones para mayor facilidad:

$$f_x = \Delta x_v + h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) = V \cdot t_{AF} + h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) \quad (8.5.27)$$

$$f_y = \Delta y_v + h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \sin(\alpha) = h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \sin(\alpha) \quad (8.5.28)$$

De esta forma tendremos:

$$-h \cdot \frac{C_1^*}{C_3^*} = f_x \Rightarrow C_1^* = -\frac{f_x}{h} \cdot C_3^* \quad (8.5.29)$$

$$-h \cdot \frac{C_2^*}{C_3^*} = f_y \Rightarrow C_2^* = -\frac{f_y}{h} \cdot C_3^* \quad (8.5.30)$$

Introduciendo estas expresiones en (8.5.26) obtenemos:

$$(C_1^*)^2 + (C_2^*)^2 + (C_3^*)^2 = 1 \Rightarrow \left(-\frac{f_x}{h} \cdot C_3^*\right)^2 + \left(-\frac{f_y}{h} \cdot C_3^*\right)^2 + (C_3^*)^2 = 1$$

Agrupando términos:

$$\left[\left(\frac{f_x}{h} \right)^2 + \left(\frac{f_y}{h} \right)^2 + 1 \right] \cdot (C_3^*)^2 = \left(\frac{F}{h^2} + 1 \right) \cdot (C_3^*)^2 = 1 \quad (8.5.31)$$

siendo F :

$$F = \left[(f_x)^2 + (f_y)^2 \right] \quad (8.5.32)$$

que posteriormente desarrollaremos. De la ecuación (8.5.31) podemos obtener una expresión analítica para C_3^* :

$$C_3^* = - \left(\frac{F}{h^2} + 1 \right)^{-1/2} = - \left[\frac{1}{h^2} \cdot \left((f_x)^2 + (f_y)^2 \right) + 1 \right]^{-1/2} \quad (8.5.33)$$

que junto con las expresiones (8.5.29) y (8.5.30) definen el vector \vec{C}_k^* :

$$\vec{C}_k^* = \begin{bmatrix} C_1^* \\ C_2^* \\ C_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x/h \cdot C_3^* \\ -f_y/h \cdot C_3^* \\ C_3^* \end{bmatrix} \quad (8.5.34)$$

Nótese que se ha elegido el valor negativo de la raíz cuadrada en el despeje, ya que los vectores apuntamiento siempre tendrán su tercera componente negativa, ya que apuntarán hacia el plano $z = 0$ desde una posición $z_v = h > 0$.

Una vez obtenido el vector \vec{C}_k^* , podremos obtener el giro realizado por el apuntamiento:

$$\theta = \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_k^* \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_k(t^*) \right] \quad (8.5.35)$$

y el tiempo de apuntamiento:

$$t^* = \frac{\theta}{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \cdot \text{acos} \left[\vec{C}_a \cdot \vec{C}_k^* \right] \quad (8.5.36)$$

Con dicho tiempo de apuntamiento t^* , finalmente podemos obtener las coordenadas del punto de la curva límite mediante cualquier conjunto de expresiones (8.5.9) o (8.5.11). Se utilizará la primera ya que la expresión del vector \vec{C}_k^f es mas sencilla:

$$\begin{cases} x_k = x_v(t_0 + t^* + t_{AF}) + \lambda^f \cdot C_1^f \\ y_k = y_v(t_0 + t^* + t_{AF}) + \lambda^f \cdot C_2^f \\ z_k = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_k = V \cdot (t_0 + t^* + t_{AF}) + h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \cos(\alpha) \\ y_k = h \cdot \tan(\phi_k^f) \cdot \sin(\alpha) \\ z_k = 0 \end{cases} \quad (8.5.37)$$

8.5.2. Problema orbital

Para el modelo de problema plano, en la sección 2.6.2 se definen las expresiones necesarias para el desarrollo de la curva límite, que se repetirán aquí para mayor claridad en la deducción, al igual que en el caso del problema plano.

En este caso, el vector \vec{n} que marca la dirección del nadir, como vimos en la sección anterior, será:

$$\vec{n}(t) = - \frac{\vec{r}_v(t)}{|\vec{r}_v(t)|} \quad (8.5.38)$$

El vector \vec{n} no es constante como en el caso de problema plano, por lo que el problema se verá complicado.

Los puntos pertenecientes la *curva límite de observación* los denotaremos como puntos k de coordenadas, y en este caso serán:

$$\vec{r}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{bmatrix} \quad (8.5.39)$$

El vector apuntamiento a uno de dichos puntos de la curva límite vendrá dado, como en el problema plano, por:

$$\vec{C}_k(t) = \frac{\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t)}{|\vec{r}_k - \vec{r}_v(t_0 + t)|} \quad (8.5.40)$$

Las definiciones de los vectores \vec{C}_k^f y \vec{C}_k^* serán las mismas que en el problema plano, dadas en las expresiones (2.6.15) y (2.6.14). Las definiciones de ϕ_k^f y de ϕ_k^* habrá que actualizarlas ya que ahora el vector \vec{n} ahora es función del tiempo:

$$\phi_k^* = \phi(t_0 + t^*) = \text{acos} \left[\vec{C}_k^* \cdot \vec{n}(t_0 + t^*) \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_k(t^*) \cdot \vec{n}^* \right] \quad (8.5.41)$$

$$\phi_k^f = \phi(t_0 + t^* + t_{AF}) = \text{acos} \left[\vec{C}_k^f \cdot \vec{n}(t_0 + t^* + t_{AF}) \right] = \text{acos} \left[\vec{C}_k(t^* + t_{AF}) \cdot \vec{n}^f \right] \quad (8.5.42)$$

Debido a que \vec{n} no es constante, la parametrización del vector \vec{C}_k^f no será tan sencilla. Definiremos en este caso:

$$\vec{C}_k^p = \begin{bmatrix} C_1^p \\ C_2^p \\ C_3^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\phi_k^f) \cos(\alpha) \\ \sin(\phi_k^f) \sin(\alpha) \\ -\cos(\phi_k^f) \end{bmatrix} \quad (8.5.43)$$

Dicho vector \vec{C}_k^p formará un ángulo ϕ_k^f con el vector \vec{n}^p , que será:

$$\vec{n}^p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (8.5.44)$$

Este vector será el equivalente al vector \vec{C}_k^f en el problema plano. Ahora definiremos:

$$\vec{s} = \vec{s}(t) = \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{bmatrix} = \frac{\vec{n}^p \wedge \vec{n}(t)}{|\vec{n}^p \wedge \vec{n}(t)|} \quad (8.5.45)$$

$$\kappa = \kappa(t) = \text{acos} [\vec{n}^p \cdot \vec{n}(t)] \quad (8.5.46)$$

Siendo κ el ángulo formado entre los vectores \vec{n}^p y $\vec{n}(t)$, y \vec{e} el vector con misma dirección que el eje de giro para llevar el vector \vec{n}^p al vector $\vec{n}(t)$. De esta manera, mediante la matriz de rotación en torno a un eje arbitrario:

$$R(\vec{u}, \chi) = \begin{bmatrix} \cos\chi + u_x^2(1 - \cos\chi) & u_x u_y(1 - \cos\chi) - u_z \sin\chi & u_x u_z(1 - \cos\chi) + u_y \sin\chi \\ u_x u_y(1 - \cos\chi) + u_z \sin\chi & \cos\chi + u_y^2(1 - \cos\chi) & u_y u_z(1 - \cos\chi) - u_x \sin\chi \\ u_x u_z(1 - \cos\chi) - u_y \sin\chi & u_y u_z(1 - \cos\chi) + u_x \sin\chi & \cos\chi + u_z^2(1 - \cos\chi) \end{bmatrix} \quad (8.5.47)$$

Por lo tanto, podremos obtener \vec{C}_k^f a través de una transformación espacial:

$$\vec{C}_k^f(t^*) = R[\vec{e}(t_0 + t^* + t_{AF}), \kappa(t_0 + t^* + t_{AF})] \cdot \vec{C}_k^p(\alpha, \phi_k^f) \quad (8.5.48)$$

Con todo esto hemos conseguido tener el vector \vec{C}_k^f parametrizado según α , al igual que en el problema plano, ya que si el vector \vec{C}_k^p forma un ángulo ϕ_k^f con \vec{n}^p , a través de la transformación mediante la matriz R , el vector \vec{C}_k^f formará el mismo ángulo con $\vec{n}(t)$. De esta forma, para un tiempo dado t y para cada valor de α , existirá un vector \vec{C}_k^f que estará contenido en un cono cuya generatriz tiene como origen el satélite, y forma un ángulo ϕ_k^f con el nadir actual, y su eje de revolución coincidirá con $\vec{n}(t)$.

La diferencia principal con el problema plano es que este vector ahora no es independiente de t^* , por lo que el método que se va a desarrollar deberá ser *iterativo*, como veremos mas adelante.

En la figura 2.6.11 se ha representado un caso particular de punto k de la curva límite, así como las variables involucradas.

Una vez definido el vector \vec{C}_k^f , hay que obtener el vector \vec{C}_k^* , ya que éste nos permitirá calcular el tiempo óptimo de apuntamiento t^* . Para ello, como se puede observar en la figura anterior, los puntos k , k^* y k^f forman un triángulo. Las longitudes de los lados de dicho triángulo serán, mediante las expresiones 2.5.14:

$$\overline{k, k^*} = \left| \tau(t_0 + t^*) \cdot \vec{C}_k^* \right| = \tau(t_0 + t^*) = \tau^* \quad (8.5.49)$$

$$\overline{k, k^f} = \left| \tau(t_0 + t^* + t_{AF}) \cdot \vec{C}_k^f \right| = \tau(t_0 + t^* + t_{AF}) = \tau^f \quad (8.5.50)$$

$$\overline{k^*, k^f} = \left| \vec{\Delta r} \right| = \left| \vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF}) - \vec{r}_v(t_0 + t^*) \right| \quad (8.5.51)$$

Para obtener los parámetros τ se hará uso de las expresiones (2.5.11) y (2.5.12). Para τ^f tendremos:

$$a^f (\tau^f)^2 + b^f \tau^f + c^f = 0 \quad (8.5.52)$$

siendo:

$$a^f = \left| \vec{C}_k^f \right|^2; \quad b^f = 2 \vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF}) \cdot \vec{C}_k^f; \quad c^f = \left| \vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF}) \right|^2 - R_{\oplus} \quad (8.5.53)$$

Sabemos que \vec{C}_k^f es unitario, y que por definición, forma un ángulo ϕ_k^f con \vec{n}^f , siendo éste:

$$\vec{n}^f = \vec{n}(t_0 + t^* + t_{AF}) = - \frac{\vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF})}{\left| \vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF}) \right|} = - \frac{\vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF})}{(R_{\oplus} + h)} \quad (8.5.54)$$

Vector que es *colineal* con $\vec{r}_v(t_0 + t^* + t_{AF})$, pero de dirección contraria. De esta forma, podemos obtener los parámetros a^f , b^f y c^f :

$$a^f = 1; \quad b^f = -2 \cdot (R_{\oplus} + h) \cdot \cos(\phi_k^f); \quad c^f = (R_{\oplus} + h)^2 - R_{\oplus} \quad (8.5.55)$$

Por lo que τ^f se podrá obtener directamente, ya que no depende de t^* .

Para obtener τ^* utilizaremos el teorema del coseno:

$$(\tau^*)^2 = (\tau^f)^2 + \left| \vec{\Delta r} \right|^2 - 2 \cdot \left| \vec{\Delta r} \right| \cdot \tau^f \cdot \cos(\xi) \quad (8.5.56)$$

siendo el ángulo ξ el formado entre los lados del triángulo $\overline{k, k^f}$ y $\overline{k^*, k^f}$, representado en la figura 2.6.11. Mediante geometría vectorial podemos obtener:

$$\cos \xi = - \frac{\vec{C}_k^f \cdot \vec{\Delta r}}{\left| \vec{\Delta r} \right|} \quad (8.5.57)$$

De esta forma, podemos obtener τ^* a través de τ^f , $\vec{\Delta r}$ y ξ , calculables mediante t^* . Con τ^* , se puede obtener \vec{C}_k^* gracias al triángulo (k, k^*, k^f) :

$$\tau^* \cdot \vec{C}_k^* = \vec{\Delta r} + \tau^f \cdot \vec{C}_k^f \rightarrow \vec{C}_k^* = \frac{\vec{\Delta r} + \tau^f \cdot \vec{C}_k^f}{\tau^*} \quad (8.5.58)$$

Referencias

- [1] Manuel Ruiz Arahal. *Fundamentos de Informática para Ingeniería Aeronáutica*. Apuntes de clase (ETSI Sevilla), 2007.
- [2] Earth Observation Portal. Datos y especificaciones de la misión del minisatelite deimos-2, extraídos de <https://directory.eoportal.org/web/eoportal/satellite-missions/d/deimos-2>.
- [3] Francisco Montoro Sánchez. *Análisis y Desarrollo de Algoritmos para la Planificación Optimizada de Adquisición de Imágenes por Satélites Ágiles*. Proyecto Fin de Carrera (Ingeniería Aeronáutica). Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos. E.T.S.I. Sevilla., 2014.
- [4] Rafael Vázquez Valenzuela. *Astronáutica y vehículos espaciales*. Apuntes de clase (ETSI Sevilla), extraídos de <http://www.aero.us.es/astro/desc.html>.
- [5] Rafael Vázquez Valenzuela. *Vehículos espaciales y misiles*. Apuntes de clase (ETSI Sevilla), extraídos de <http://www.aero.us.es/vem/desc.html>.