SISTEMAS DE LOGICA EN LA INVESTIGACION DE FUNDAMENTOS

ANGEL NEPOMUCENO FERNÁNDEZ.
UNIVERSIDAD DE SEVILLA.

1. INTRODUCCIÓN

Un sistema pleno de lógica deductiva viene dado por un lenguaje con un mecanismo deductivo y una semántica. Los sistemas más conocidos son los de primer orden, cuyos lenguajes contienen cuantificación que se aplica a variables de individuo únicamente, mientras que los signos predicativos, designen éstos conjuntos o propiedades, relaciones, etc., se consideran constantes en una interpretación dada. Actualmente los lenguajes de estos sistemas son *lenguajes formales*, integrados por un conjunto de términos carentes de referencia, si exceptuamos un reducido grupo de signos con un significado fijo para cualquier semántica que se establezca: se trata de las denominadas *constantes lógicas*. Un lenguaje no interpretado y el mecanismo deductivo constituyen un sistema de lógica no *plena* o, aún mejor, un *sistema formal de lógica*.

El objetivo que se persigue con los sistemas formales puede ser variado; en [9] se fijan los más importantes, desde el de describir las inferencias correctas en determinada esfera del conocimiento, hasta el neopositivista de establecer un lenguaje canónico para la ciencia. Entre ellos destaca el de codificar, de alguna manera, el razonamiento humano, presentando un modelo que capte las características más generales de la relación de inferencia deductiva entre proposiciones. La supremacía de los sistemas de primer orden se explica por las limitaciones inherentes a los de segundo orden, pero, a la vista de los objetivos, resulta también legítimo estudiar estos últimos.

El interés filosófico que despierta la investigación en este campo es indudable. Dada una teoría, podemos preguntarnos ¿Cual es la lógica de ésta?, incluso ¿Es tal o cual lógica la mejor lógica posible para la teoría de que se trate? El concepto mismo de lógica, el objetivo marcado al establecer un sistema formal, la semántica adoptada, etc., no son independientes de cada perspectiva filosófica; no obstante, es posible definir sistemas que pueden ser adoptados desde diferentes perspectivas. Aquí, brevemente por razones obvias, presentamos un estudio de las características que tendrán sistemas asumibles tanto desde un punto de vista logicista como formalista. En los distintos apartados haremos el menor uso posible de simbolismos.

2. PERSPECTIVAS FILOSÓFICAS

En la filosofía de la lógica y la matemática destacan dos corrientes importantes conocidas como *logicismo* y *formalismo*, iniciadas por Frege y Hilbert, respectivamente; a ellas hay que unir el *intuicionismo*, profesado por Brower y su escuela, de la que no nos ocupamos en este bosquejo, pues más que proporcionar una fundamentación de la matemática clásica, ha creado una alternativa a ésta.

A grandes rasgos, para el logicismo la lógica y la matemática tienen la misma naturaleza, de tal manera que la matemática no es más que lógica desarrollada. Las nociones de la matemática son nociones lógicas, o se reducen a nociones lógicas. Si una teoría matemática se presenta axiomáticamente, los axiomas tendrán carácter lógico, y la tarea de fundamentarla se reducirá a mostrar este carácter. A partir de las reglas de la lógica se propone un ambicioso programa de fundamentación de la aritmética, el cual, de acuerdo con esta concepción, obtendría una reconstrucción de los principios de ésta –postulados de Peano, por ejemplo–, para pasar después al análisis, etc.; tal reconstrucción exige el uso de un nuevo lenguaje, como el elaborado por Frege, a cuyas fórmulas se aplica el mecanismo deductivo correspondiente.

Por su parte el formalismo se plantea como objetivo obtener una fundamentación de la matemática clásica mediante su formalización. Para alejar definitivamente el fantasma de las paradojas, según este planteamiento, es necesario que cada teoría matemática sea axiomática formal. La reconstrucción aquí tiene el sentido de elaborar un formalismo estricto o sistema formal, haciendo total abstracción del significado, aplicando unos métodos que vengan a garantizar la consistencia, cuya demostración se alcanzaría por medio del propio sistema. La lógica se considera también desde un punto de vista formal y puede ser codificada en un cálculo axiomático (en [5] se exponen las principales características de las tres escuelas mencionadas).

Ambas perspectivas comparten la necesidad de un lenguaje lógico diferente del ordinario, pero entre ellas hay diferencias importantes. El logicismo adopta desde el primer momento una lógica plena; el lenguaje de fórmulas no es exactamente un lenguaje formal, aunque una reconstrucción de sus planteamientos es posible en términos de lenguajes formales (en [8] aparecen diversos sistemas de cálculo definidos a partir de un lenguaje formal de segundo orden), sino simbólico –obtenido por análisis del lenguaje ordinario– y significativo, mientras que la *teoría de la demostración* en el formalismo no precisa más que de un sistema formal. Por otra parte, la prioridad de la lógica defendida por el logicismo es rechazable desde el formalismo; un sistema formal es un modelo de la teoría que se formaliza, una reducción –si ello fuera posible– proporcionaría otro modelo, pero no justificaría el carácter lógico de los axiomas; más bien, a tenor del método adoptado, la lógica es una extensión de la matemática.

Tanto una como otra doctrina encontraron un serio obstáculo para sus pretensiones tras la aparición de la memoria de Gödel en la que se establecen dos resultados limitativos importantes: 1) Ningún sistema que comprenda la aritmética es completo; es decir, existe al menos una expresión que siendo aritméticamente verdadera no es demostrable en el sistema; 2) Una expresión que afirma la consistencia de un sistema axiomático no es demostrable en tal sistema; es decir, la consistencia de un sistema no es demostrable en el propio sistema.

Por el primer resultado, dado un sistema axiomático K tal que contiene como axiomas los postulados de Peano –y los propios de la lógica o las reglas correspondientes–, una expresión verdadera en el sentido de la aritmética es una fórmula (o una oración) del lenguaje de K en la que ocurren predicados aritméticos; si este lenguaje es de segundo orden, el número de axiomas es finito –cinco de los postulados de Peano y los propios de la lógica; con un lenguaje de primer orden es distinto, pues el *principio de inducción* sería presentado como un esquema cuyas ejemplificaciones o instancias constituyen un conjunto infinito enumerable y, en consecuencia, no procede la argumentación que sigue–. Por ello existe una fórmula –la conjunción de todos los axiomas– de la que es consecuencia lógica otra que, sin embargo, no es demostrable axiomáticamente; es decir, dadas unas premisas, aritméticamente verdaderas, que entrañan semánticamente una fórmula, no es posible hallar una deducción de ésta en el sistema. De aquí que la lógica de segundo orden, y orden superior, sea incompleta.

No obstante, los puntos de vista logicista y formalista, al menos en parte, pueden mantenerse, y aproximarse si la lógica plena precisa en el primero se caracteriza de manera que pueda ser asumida en el segundo. A este respecto conviene una mayor sistematización, a la que procedemos en los siguientes apartados.

3. LENGUAJES FORMALES

L es la clase de los lenguajes formales de segundo orden. Cada miembro de *L* consta de un vocabulario y un conjunto de fórmulas; el conjunto de las constantes lógicas $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists, \lambda\}$ forma parte del vocabulario de todos ellos, mientras que el conjunto de las fórmulas varía de unos a otros en función de los términos no lógicos. Un lenguaje de segundo orden con nominalización de predicados es un miembro de *L* en el cual se autorizan fórmulas como R(x)– donde R ocupa posición de predicado y x de argumento-, siendo x un signo predicativo; es decir el conjunto de sus fórmulas tiene como miembros $R(a_1...a_n)$, para todo signo predicativo n-adico R y n-pla de ocurrencias de términos –individuales o predicativos– en posición de argumento, así como las fórmulas resultantes de aplicar las conectivas lógicas a éstas: si A es una fórmula, ¬A es una fórmula, etc... Por otra parte, además de los signos predicativos –variables o relatores–, son términos los definidos según la regla siguiente: Si $x_1,...,x_n$ son n variables distintas entre si y A es una fórmula cuyas únicas variables libres son a lo sumo las mencionadas, entonces $[\lambda x_1...x_n.A]$ representa un relator n-ádico.

Si L es un miembro de *L* con nominalización de predicados, es posible hallar L' tal que no contiene nominalización y es un subconjunto de L; en efecto, desde L' basta redefinir el conjunto de fórmulas incluyendo las cláusulas de nominalización, no restringiendo a términos individuales la posición de argumento, para obtener L, del cual L' no es más que un sublenguaje. Dado un lenguaje L con nominalización, un conjunto F de fórmulas de L está estratificado cuando existe una función t, con dominio en F y rango en un conjunto de números naturales, que verifica lo siguiente: 1) si $R(b_1...b_n)$ es una subfórmula de alguna fórmula de F, $t(b_1)=t(b_2)=...=t(b_n)$ y $t(R)=t(b_1)+1$; 2) si $B \in F$ y $[\lambda x_1...x_n.A]$ es un λ-abstracto que ocurre en B, entonces $t(x_1)=t(x_2)=...=t(x_n)$, $t([\lambda x_1...x_n.A])=t(x_1)+1$ y las subfórmulas atómicas de A verifican 1).

En la semántica de los lenguajes de primer orden se define la noción de interpretación como el par <D, S>, donde D es un dominio cualquiera no vacío denominado *universo de discurso* y S es un conjunto de asignaciones de miembros de D a los parámetros, y predicados definidos en D a los signos predicativos, según su aridad. Aquí se entiende por predicado monádico definido en D, un miembro de *P*(D), predicado diádico definido en D, un miembro de *P*(D*x*D), y así sucesivamente. Como las únicas variables son las individuales, dada una interpretación, se dice que el ámbito de variabilidad de éstas es el universo de discurso; no cabe hablar de tal ámbito de los signos predicativos pues éstos tienen un valor determinado en la interpretación (la asignación de los correspondientes predicados definidos en D).

En los lenguajes de segundo orden nos encontramos con variables individuales, predicativas monádicas, diádicas, etc.. Una semántica para estos lenguajes necesita contar, pues, con un ámbito de variabilidad para todas las variables. A partir de un dominio D de cardinalidad infinita enumerable, el número posible de predicados definidos en D es un cardinal transfinito, no enumerable, el cual habría de ser el ámbito de variabilidad de las variables predicativas monádicas. No obstante, a partir de [4], es posible establecer interpretaciones con un dominio infinito y tal que los ámbitos de variabilidad predicativa sean conjuntos enumerables de predicados definidos en el dominio. Por otra parte, la nominalización de predicados requiere un tratamiento particular desde un punto de vista semántico.

Una *interpretación logicista* I de un lenguaje L se define como $<\{D, D_1, D_2,...\}, f, S>$, donde D es un dominio no vacío, D_i es un conjunto de predicados i-ádicos definidos en D $-D_i \subseteq P(D^i)$, para todo i–, f es una función de $\{D, D_1, D_2, ...\}$ a D, que verifica 1) si c es un elemento de D, f (c)=c, 2) si R es un elemento de D_i, cualquiera que sea i, f (R), llamado el correlato individual de R, es un miembro de D; por último, S es un conjunto de asignaciones de $\{D, D_1, D_2, ...\}$ a términos del lenguaje. $\{D, D_1, D_2, ...\}$ es denominada familia de dominios, D el dominio inicial, y D_i dominio predicativo o relacional i-ádico.

Las interpretaciones logicistas se califican tambien como interpretaciones generales. Una interpretación logicista I se dice estándar cuando $D_i=P(D^i)$ para todo i. Las nociones correspondientes de Henkin (se pueden consultar [4] y [2], donde Church hace una aplicación de las nociones de Henkin relativas a segundo orden) no contemplan la nominalización, por lo que no precisan de la función f; en realidad, si se trata de interpretar un lenguaje L' sin nominalización, una interpretación logicista I consta de la familia de dominios, o marco de la interpretación, del conjunto de asignaciones S y también de la función f, aunque son innecesarios los correlatos individuales de los predicados definidos en el dominio inicial; por ello podemos decir que f es una función identidad –a cada miembro del dominio inicial le corresponde él mismo–.

Las demás nociones semánticas, *valor de una fórmula bajo una interpretación, satisfactibilidad, consecuencia lógica*, etc., se establecen teniendo en cuenta la distinción anterior y que, aunque toda interpretación logicista estándar es general, no toda general es estándar, según las características de los marcos correspondientes. En [6] se comentan estas relaciones entre interpretaciones aunque no se contempla la noción de interpretación logicista. No entramos en la cuestión –ciertamente de importancia– de si, a partir de determinadas cardinalidades, existen marcos que permitan definir interpretaciones logicistas de uno u otro tipo.

4. LÓGICA SUBYACENTE A UNA TEORÍA

Como se indicó más arriba, un sistema de lógica consta de un lenguaje y un mecanismo deductivo. El lenguaje puede ser un lenguaje formal y el mecanismo de deducción venir dado axiomáticamente o no; si el lenguaje está interpretado, entonces contamos con una *lógica plena*. Como es obvio, si el sistema se establece en lenguaje ordinario, se trata de una lógica plena cuyo mecanismo deductivo contendrá los principios y reglas de la deducción natural, modelos del cual son los cálculos deductivos del tipo Gentzen, por ejemplo. Para abreviar, hablaremos de lógica y lógica plena en lugar de sistemas de lógica y sistemas de lógica plena, respectivamente.

Una teoría –en sentido amplio, axiomatizada o no, con mayor o menor grado de formalización, etc.– viene dada por un conjunto de postulados específicos y una lógica de la cual decimos es su lógica subyacente. Dos teorías se diferencian por sus postulados específicos o por su *lógica subyacente*, o por ambas cosas a un tiempo. A título de ejemplo, sean dos teorías aritméticas T1 y T2 cuya lógica subyacente sea la misma, T2 tiene como postulados los conocidos *axiomas de Peano*, mientras que en T1 falta el principio de inducción; como es obvio se trata de dos teorías distintas. Las teorías hacen uso de una porción de lenguaje ordinario; si la teoría no está formalizada, sus postulados se enunciarán en el lenguaje ordinario propio de la disciplina en cuestión –términos como *número, punto, determinante,* etc., pertenecen al lenguaje ordinario de la matemática–; en general, podemos calificar como intuitivas aquellas teorías que no han sido formalizadas

Por lo que respecta a los puntos de vista filosóficos antes referidos, para el logicista, en cualquier teoría matemática, la lógica subyacente ha de ser plena; el lenguaje ha de ser el lenguaje ordinario de la matemática o una simbolización de éste. Desde la óptica formalista, la teoría ha de presentarse como teoría axiomática formal: constará de una serie de axiomas, algunos de los cuales corresponden a los postulados específicos de que se trate, y el resto serán axiomas de carácter lógico, a los que se unen las reglas de inferencia. La teoría axiomática formalizada viene a ser un modelo de la correspondiente teoría intuitiva. Aquí se está haciendo uso del término modelo con una cierta ambigüedad. En *teoría de modelos*, un *modelo* viene dado por un dominio o un marco –en función del orden del lenguaje– y una asignación de elementos del dominio (o el marco) a las constantes (no lógicas) del lenguaje –semejante a la noción de interpretación antes señalada–. En cualquier caso, una teoría axiomática formal se puede considerar un modelo en el sentido de que capta lo más importante de la correspondiente teoría intuitiva; en este sentido se puede afirmar también que determinadas lógicas *captan* las características fundamentales de determinados tipos de razonamiento. Por otra parte, la teoría intuitiva vendría a ser una interpretación de la axiomática formal.

Ante una teoría matemática establecida se puede adoptar una actitud logicista o formalista, entendiendo que la fundamentación de la teoría será en una u otra perspectiva; es decir, la reconstrucción de sus principios, enunciados o verdades, en que esencialmente consiste una fundamentación, se considerará más apropiada en un punto de vista que en otro, sin que por ello cuestione la formulación misma de la teoría. De aquí que en lo sucesivo hablemos más de actitud que de perspectiva global.

A pesar de las diferencias de las dos actitudes, es posible una aproximación entre ambas. En efecto, técnicamente, se pueden presentar sistemas formales que constituirán la lógica subyacente para reconstrucciones logicistas de determinadas teorías, como puede comprobarse en [1] y [8], donde se presentan sistemas lógicos logicistas siguiendo lo que podemos denominar una metodología formalista. Para una reconstrucción tal habría que añadir la teoría en cuestión como semántica. Para que una lógica sea considerada de carácter logicista, ha de contener un tratamiento de la nominalización de predicados en un doble sentido: tanto para la caracterización lingüística de las extensiones de conceptos, como para aplicar la noción de función en toda su generalidad, de manera que una función (predicado) sea argumento (sujeto) de otra función. Recíprocamente, una teoría formal de grupos, por ejemplo, se puede definir a partir de un lenguaje formal con una constante predicativa diádica, «=», un signo funcional diádico «f» y una constante individual «a», mediante axiomas que expresan asociatividad de «f», reflexividad de «=», etc.; pero desde una actitud logicista, se aceptará esta teoría inrterpretando, en el mismo acto de su formulación, el signo «=» como expresión de la identidad, la función «f» como la operación de suma, la constante «a» como «0», etc..

5. UN SISTEMA FORMAL

Se nos presentan dos alternativas de sistema formal para adoptarlos como lógicas unificadoras de las actitudes logicista y formalista. A continuación presentamos una adaptación de Church [2], haciendo uso de un lenguaje que contempla la nominalización de predicados y añadiendo un axioma de l-conversión (correspondiente al principio de extensionalidad o ley V de *Grundgesetze* de Frege). Las letras griegas representan fórmulas estratificadas; las letras a, b y r representan términos cualesquiera (si son l-abstractos, han de estar estratificados) y las letras s, x, x_1, ..., x_n representan variables de cualquier tipo; el signo «=» representa el predicado diádico de identidad, cuyos argumentos pueden ser términos individuales o predicativos. Son axiomas todas las instancias de los siguientes esquemas de fórmulas:

1) $\alpha \to (\beta \to \alpha)$;
2) $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$;
3) $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$;
4) $\forall x\ (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\ \beta)$, si x no ocurre libre en α;
5) $\forall\ \alpha \to \alpha\ (r/s)$, donde α (r/s) representa la fórmula resultante de sustituir en a cada ocurrencia libre de s por un término r, con las restricciones usuales y t(r)=t(s);

6) $a=b \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha')$, donde α' se obtiene desde a reemplazando alguna ocurrencia de b por a;
7) $\forall x_1 ... x_n(\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow [\lambda x_1 ... x_n.\alpha] = [\lambda x_1 ... x_n.\beta]$;

Las reglas de inferencia son dos, *modus ponens* y *generalización*. La otra alternativa consiste en el sistema que incorpora al anterior los dos axiomas de Hilbert-Ackermann (en [3] aparecen estos axiomas y comentarios sobre su significado e independencia de los de Church):

a) $\forall x\ \exists y R(xy) \rightarrow \exists P(\forall x\ \exists y(R(xy) \wedge P(xy)) \wedge \forall xyz(P(xy) \wedge P(xz) \rightarrow y=z))$;
b) $\forall x \exists P\beta \rightarrow \exists Q \forall x \beta'$, donde β' se obtiene desde β sustituyendo cada ocurrencia de P(y) por Q(xy); –en ambos casos cuantificamos una única x para simplificar, podría ser una n-pla de variables $x_1,...,x_n$–.

El primero se corresponde con el axioma de elección de la teoría de conjuntos y el segundo es una aplicación de dicho axioma. Esta incorporación puede plantear ciertos problemas. Desde una actitud formalista, nos hallaríamos ante un sistema más potente, deductivamente hablando, pero debe dejarse bien claro el carácter de los axiomas, ¿Se trata de axiomas lógicos, o, por el contrario, son específicos de una determinada teoría? La tarea misma de buscar una fundamentación de teorías matemáticas se puede llevar a cabo (hasta donde ello sea posible) adoptando la teoría de conjuntos como instrumento fundamental, no por el mero uso de sus conceptos, propios de la teoría intuitiva, sino como teoría axiomatica formal (como lógica subyacente, en último término). Por otra parte, el axioma de elección es independiente; desde una actitud formalista la semántica se describe en términos de la teoría de conjuntos, si ésta es, a su vez, un sistema formal ¿Se incluye este axioma?

Por lo que respecta a la actitud logicista, se mantiene una noción de conjunto en sentido lógico, es decir de *clase* –frente al sentido iterativo (en [9] se expresa la distinción entre ambos sentidos, cuál es el afectado por la paradoja de Russell, etc.)–, y la única exigencia para una lógica plena –en el marco del programa logicista– es que el lenguaje se refiera a estructuras booleanas, cerradas para determinadas operaciones, de la misma manera que el propio lenguaje, sintácticamente considerado, es una estructura booleana. Desde este punto de vista, el sistema (modificado) de Church permite replantear la reducción logicista, al menos en sus comienzos, eludiendo ciertos problemas.

Si nos planteamos el problema de la corrección –un sistema es correcto si y sólo si todos sus teoremas son universalmente válidos (en este caso, verdaderos bajo toda interpretación logicista)–, hemos de tener en cuenta que el axioma 7) viene a ser la ley fregeana, desde la cual se obtiene la paradoja de Russell. No obstante, la exigencia de estratificación, en el sentido de la definición dada más arriba, impide la obtención de fórmulas paradójicas. En [7] se presenta una deducción, si no se impone la estratificación, de la fórmula que formaliza "hay un predicado que si se predica de sí mismo, entonces (y sólo entonces) no se predica de sí mismo (tal deducción es en un cálculo deductivo natural tipo Gentzen, pero se puede obtener también en este sistema).

La representación del número natural sería semejante a la que parte del conjunto vacío, conjunto potencia de éste y las sucesivas uniones de conjuntos que dan lugar a otro nuevo. Esta representación (logicista), en cambio, no presupone noción alguna de conjunto iterativo, sino de clase, y la pertenencia a la misma está determinada por la circunstancia de que el objeto en cuestión caiga o no bajo el concepto del que es extensión; así 0 es el número de miembros que posee la extensión del concepto «desigual consigo mismo», 1 el del concepto «igual a 0», y así sucesivamente. Dicho brevemente, la serie numérica se puede representar con λ-abstractos: $[\lambda x.\neg x{=}x]$ para el 0, $[\lambda y.y{=}[\lambda x.\neg x{=}x]]$ para el 1, $[\lambda z.\neg z{=}z \vee z{=}[\lambda y.y{=}[\lambda x.\neg x{=}x]]]$ para el 2, etc.; la existencia de la serie se garantiza por el esquema $\exists R([\lambda x.Cn]{=}R)$, donde $[\lambda x.Cn]$ es la abreviatura del λ-abstracto correspondiente al número n, que se demuestra en el sistema lógico que nos ocupa. Por otra parte, no aparece ningún axioma de infinitud.

Dicho en terminología fregeana, una proposición aritmética se obtendrá como resultado de saturar cierto predicado; entonces, los predicados numéricos quedan saturados por números como argumentos, lo que muestra la necesidad de adoptar un lenguaje con nominalización de predicados. En esta misma dirección están el esquema precedente, en cuya demostración como teorema hay que apelar (entre otros) al axioma 6), donde «=» representa una relación diádica entre términos cualesquiera, y el propio axioma 7), donde claramente «=» tiene relatores como argumentos.

En resumen, se trata de una lógica que puede ser adoptada desde actitudes logicistas, por cuanto es un instrumento, en primer término, parcialmente adecuado, para plantear una reducción de la aritmética (como forma de fundamentación). También puede ser adoptada desde una actitud formalista, teniendo en cuenta que se trata de un sistema formal, por el cual el razonamiento usual en la artimética se ha codificado. Ello no significa que los problemas surgidos tras los resultados limitativos aludidos hayan desaparecido.

REFERENCIAS

[1] COCCHIARELLA, N.B.: "Frege, Russell and Logicism", *Frege* Synthesized. Essay on the Philosophical and Foundational Work of G. Frege. L. Haaparanta, J. Hintikka (Ed.), Dordrecht, Reidel, 1.986, pp. 197-251.

[2] CHURCH, A.: *Introduction to Mathematical Logic*. Princeton University Press, Princeton (6th.Printing) 1.970.

[3] DIAZ, E.: "Lógica de segundo orden: Los dos axiomas de Hilbert-Ackermann", *Philosophica Malacitana*, Vol. III, 1.990, pp. 63-80.

[4] HENKIN, L.: "Completness in Theory of Types", *The Philosophy of Mathematics* (Ed. J. Hintikka), pp. 47-63.

[5] KLEENE, S.: *Introducción a la metamatemática*. Trad.M. Garrido, Tecnos, Madrid, 1.974.

[6] MOSTERIN, J.: *Un cálculo deductivo para la lógica de segundo orden*. Cuadernos Teorema, Valencia, 1.979.

[7] NEPOMUCENO, A.: "Teoría de la predicación y cálculos lógicos", *Actas del VII Congreso de Lenguajes Naturales y Lenguajes Formales*, Vich, 1.991 (Ed. Universidad de Barcelona), pp. 469-476

[8] NEPOMUCENO, A.: "Sistemas de cálculo como formas de logicismo". *Crítica*, vol 25, n. 73, 1.993.

[9] SHAPIRO, S.: *Foundations without Foundationalism. A Case for Second-order*

[10] *Logic*. Clarendon Press, Oxford, 1.991.