# ESPACIOS DE MODELOS DE TEORIA DE CONJUNTOS

ANGEL VAHÍ SERRANO
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

*Resumen*

La proliferación de modelos de teoría axiomática de conjuntos (**ZF** ó **ZFE**), que la técnica de forcing y los nuevos axiomas han hecho posible, nos pone en situación de estudiar sistemáticamente las interrelaciones entre modelos y familias de modelos, con objeto de desentrañar aspectos teóricos y sentar las bases de nuevos desarrollos de la semántica y la teoría de modelos de los lenguajes y teorías formales. La teoría de toposes aporta instrumentos útiles a tal fin. En el artículo se presentan algunas propuestas en este sentido.

*Abstract*

The proliferation of models of axiomatic set theory (**ZF** or **ZFC**), possible by forcing techniques and new axioms, leaves a situation in which we can sistematically research interrelations of models and models families, in order to work out theoretical aspects and to put the basis for new developments of semantic and model theory of formal languages and theories. Toposes theory settles useful tools toward this aim. This paper shows some proposals in this line.

## 1. INTRODUCCION.

La axiomatización de la teoría de conjuntos se produce como reacción a la aparición de las paradojas, con el objetivo de regular el uso de sus conceptos y evitar la inferencia de contradicciones. El desarrollo de la lógica y la hegemonía del formalismo como pauta de investigación guió durante los años siguientes el estudio de las propiedades, posibilidades y limitaciones de las teorías axiomáticas de conjuntos. Al mismo tiempo, dicho desarrollo se basó, en gran medida, en instrumentos de naturaleza puramente conjuntista, particularmente por mediación de la teoría de modelos: de hecho, desde sus orígenes, la teoría de conjuntos ha ostentado las funciones de fundamento de las disciplinas formales, al menos entendiendo por tales las de ser base conceptual y fondo de coherencia sobre el que, con planteamientos clásicos, llevar a cabo las investigaciones en esas disciplinas. Este influjo recíproco ha promovido gran parte del moderno progreso de la lógica matemática y originado, así mismo, situaciones problemáticas complejas.

Así, un resultado tan fundamental como temprano de la teoría de modelos de primer orden, cual es el teorema de Löwenheim-Skolem, es un desencadenante de las investigaciones que, durante este siglo, han descrito con rotundidad la esencial relatividad conceptual y la indeterminación formal de las teorías axiomáticas de conjuntos, que ya asomaban las orejas tras la paradoja de Skolem.

La prueba por Gödel de la incompletud de la aritmética formal tiene, igualmente, inmediatas consecuencias para la teoría de conjuntos, en la medida en que la fuerza lógica de ésta, en la axiomatización de Zermelo-Fraenkel (**ZF**), por ejemplo, excede con mucho la necesaria para probar los postulados de Peano como teoremas propios.

Uno y otro resultado dieron entrada a la posibilidad de concebir modelos de teorías formales en los que sus términos cobraran interpretaciones en mutuo conflicto. El curso de las investigaciones confirmó dicha posibilidad y centró el interés en la construcción de modelos de la teoría de conjuntos destinados a satisfacer ciertas condiciones teóricas.

## 2. FORCING, NUEVOS AXIOMAS Y EL SENTIDO ACTUAL DE LA TEORIA DE CONJUNTOS.

La proliferación de modelos de las teorías axiomáticas de conjuntos explotó con la invención y el perfeccionamiento del método de *forcing* y las pruebas de independencia que hizo posibles con relación a los axiomas tenidos por clásicos[1]. Además, el método entronca con procedimientos de aplicación más general que posibilitan planteamientos semánticos de gran flexibilidad y, al mismo tiempo, uniformidad conceptual[2]. Por su importancia para la actual problemática de la teoría de conjuntos y el papel que juega en relación a los temas tocados en este trabajo, esbozamos a continuación su

1. El método de forcing fue formulado y usado en COHEN, P.J., «The independence of the continuum hypothesis», *Proceedings of the National Academy of Sciences USA*, **50** (1.963), pp. 1143-1148, **51** (1.964), pp. 105-110. Mediante él pueden construirse modelos de una teoría dada, como **ZF**, a partir de modelos dados de la misma. Pero, además, los modelos obtenidos satisfacen ciertas otras sentencias del lenguaje, lo que permitió a Cohen probar la independencia del axioma de constructibilidad, el axioma de elección (**AE**) y la hipótesis del continuo con relación a **ZF** (a **ZF+AE** en el primer y tercer caso). La técnica hace un uso esencial de cierto tipo de modelos de la teoría (en general, son modelos cuya relación de pertenencia es *transitiva* - todo elemento suyo está incluido en el dominio - y *bien fundada* - toda subclase del dominio tiene un elemento del que es disjunto - sobre un dominio enumerable), que manejaremos también aquí (excepto, quizás, por lo que se refiere a la enumerabilidad del dominio). Cuando queramos expresar la relativización de una expresión del lenguaje de teoría de conjuntos a un modelo determinado, M, es decir, dar la versión de dicha expresión para ese modelo, lo haremos utilizando un superíndice del nombre del modelo: así, $\phi^M$ será la relativización de la fórmula $\phi$ al modelo M.

2. Tales son los que suelen denominarse con el apelativo *Semántica de Beth-Kripke-Joyal*, **BKJ**, cuya formulación en términos categoriales la ha hecho suficientemente general como para hallar múltiples aplicaciones. *Vid.* LAMBEK,J. y SCOTT,P.J., *Introduction to higher order categorical logic*. Cambridge University Press, Cambridge, 1.988; BELL,J.L., *Toposes and local set theories. An introduction*. Oxford University Press, Oxford, 1.988; TROELSTRA, A.S. y DALEN,D.v., *Constructivism in Mathematics. An Introduction*. North-Holland, Amsterdam, 1.988.

proceso general, ilustrándolo con el ejemplo, fácil de seguir, de su uso para la prueba de la independencia de la hipótesis del continuo[3].

Sea M = <**M**,∈> un modelo enumerable de **ZF** (en nuestro ejemplo puede asumirse, además, que lo es de **ZFE** + **HC**, lo que es posible por la prueba de consistencia de Gödel - *vid.* nota anterior). Llamamos *noción de forcing* a cualquier elemento de **M** que sea una relación de orden parcial (es decir, reflexiva, antisimétrica y transitiva) con elemento máximo[4]. Los elementos de una noción de forcing serán denominados *condiciones* y serán considerados como unidades de información, cuyos contenidos crecen en el sentido descendente de la relación de orden (de manera que el máximo elemento proporciona la menor información). El tipo de información por la que estamos interesados trata sobre la composición de ciertos subconjuntos de la noción de forcing, a los que llamaremos *conjuntos genéricos*: esta denominación obedece a que la propiedad de pertenecer a ellos, con los elementos a nuestra disposición en el modelo M, es compartida previsiblemente por cualquier condición, ya que cada una de éstas así lo ratifica de sí misma. Pero hay nociones de forcing con cierta propiedad, cuyos conjuntos genéricos son subconjuntos propios que no son conjuntos de M, aunque sí de determinadas extensiones que son modelos de **ZF**.

Sea $\mathbb{P}=<\mathbb{P},\leq,\mathbf{1}>$ una noción de forcing, $\mathbb{P}\in\mathbf{M}$. La propiedad que define a los conjuntos genéricos viene dada por lo siguiente:

Decimos que $\mathbf{D}\subseteq\mathbb{P}$ es *denso* si para todo $p\in\mathbb{P}$, hay un $q\in\mathbf{D}$ tal que $q\leq p$. Decimos que $\mathbf{G}\subseteq\mathbb{P}$ es M-*genérico* si **G** verifica:

a) $\forall pq\in\mathbf{G}\exists r\in\mathbf{G}\ (r\leq p\ \&\ r\leq q)$,
b) $\forall p\in\mathbf{G}\forall q\in\mathbb{P}\ (p\leq q \Rightarrow q\in\mathbf{G})$,
c) Si $\mathbf{D}\subseteq\mathbb{P}$, $\mathbf{D}\in\mathbf{M}$, es denso, entonces $\mathbf{D}\cap\mathbf{G}\neq\emptyset$.

3. La *hipótesis del continuo de Cantor* (**HC**) afirma que el cardinal del conjunto de los números reales, $|\mathbb{R}|$, es el primero no enumerable. Dado que $\mathbb{R}$ es equinumérico con $P(\mathbb{N})=\{\mathbf{x}:\mathbf{x}\subseteq\mathbb{N}\}$, $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales, cuyo cardinal es $\aleph_0$, **HC** afirma $|P(\mathbb{N})| = \aleph_1$. GÖDEL,K., *The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory.* Princeton University Press, Princeton, 1.940 (versión castellana en GÖDEL,K.,*Obras completas*, Alianza Editorial, Madrid, 1.981 (edición y traducción de Jesús Mosterín), pp. 205-293) probó la consistencia con **ZF**, no sólo de **HC**, sino de la *hipótesis generalizada del continuo* (**HGC**): para todo ordinal α, $|P(\aleph_\alpha)| = \aleph_{\alpha+1}$. La prueba está mediada por la de la consistencia de **ZF** con el *axioma de constructibilidad* (**V=L**, que afirma que todo conjunto puede ser definido en el curso de una iteración transfinita sobre los ordinales de las operaciones axiomatizadas por la teoría, aplicadas predicativamente, es decir, siempre sobre objetos obtenidos en estadios previos), ya que **HGC** es un teorema de **ZF+V=L**. Por otra parte, $|P(\aleph_0)|$ tiene restricciones derivadas de su propio concepto: por el teorema de Cantor, es mayor que $\aleph_0$; por el lema de König, para toda función *f* de $\aleph_0$ en $|P(\aleph_0)|$, todo valor de *f* está acotado en éste. Cohen probó en el artículo citado en la nota 1 la consistencia de **ZF** con $|P(\aleph_0)| = \aleph_{\alpha+1}$, $\alpha\geq 1$. Para información detallada sobre el método de forcing y las pruebas de independencia obtenidas con su ayuda, véase KUNEN,K.,*Set theory. An introduction to independence proofs.* North-Holland, Amsterdam, 1.980, cap. VII y VIII.

4. Llamaremos indistintamente noción de forcing al concepto acabado de introducir y al conjunto que es su campo, es decir, formado por los elementos de **M** que están en la relación con algún otro elemento de **M**.

Intuitivamente, un conjunto genérico está formado por condiciones compatibles (las informaciones transmitidas por cada dos elementos suyos pueden extenderse a la de una condición que comprende a ambas) y es completo, es decir, la información sobre la pertenencia a él de cualquier condición está determinada. Para nuestro ejemplo, sea

$$\mathbb{P} = \{p{:}p \text{ es una función } \& \text{ (dominio de } p) \subseteq (\omega \mathrm{x} \aleph_2)^{\mathrm{M}} \ \& \ \text{(rango de } p) \subseteq \{0,1\} \ \& \ |p| < \aleph_0\},$$

si $p,q \in \mathbb{P}$, estipulamos $p \leq q$ si $q \subseteq p$ (de modo que el máximo es $\mathbf{1} = \emptyset$).

La propiedad a la que aludíamos cuatro párrafos antes es

$$(*) \ \forall p \in \mathbb{P} \exists q r \in \mathbb{P} \ (q \leq p \ \& \ r \leq p \ \& \ \neg \exists s \ (s \leq q \ \& \ s \leq r)),$$

o sea, toda información tiene extensiones incompatibles entre sí. Claramente, dado que los elementos de nuestra $\mathbb{P}$ son finitos, dicha noción de forcing verifica (*). Por otra parte, toda noción de forcing que verifique (*) y sea un conjunto de M tiene subconjuntos genéricos que no lo son.

Dado $\mathbb{P} \in \mathbf{M}$ como en (*) y $\mathbf{G} \subseteq \mathbb{P}$ M-genérico, la clausura de $\mathbf{M} \cup \{\mathbf{G}\}$ con respecto a las operaciones representadas axiomáticamente por **ZF** constituye el dominio de un modelo M[**G**] de la misma teoría (si además M es un modelo de **AE**, también M[**G**] lo es). La prueba detallada de esto es compleja y requiere una definición minuciosa de la técnica de forcing, pero lo que interesa destacar es que, puesto que $\mathbf{G} \in \mathbf{M}[\mathbf{G}]$ (y es, además, el menor modelo de **ZF** con esa propiedad que incluye a **M**), el concepto «subconjunto de $\mathbb{P}$» ve alterado su significado en el nuevo modelo y puede forzar (en los casos interesantes lo hará) la validez en él de sentencias falsas en el modelo original.

Cada $p \in \mathbb{P}$, en nuestro ejemplo, suministra información sobre los conjuntos genéricos a los que pertenece; por su forma, $p$ nos informa, además, de la composición de ciertos conjuntos de números naturales (es decir, elementos del continuo) que no están en M: si $\mathbf{G} \subseteq \mathbb{P}$ es M-genérico y $p \in \mathbf{G}$, $p$ nos ofrece datos sobre conjuntos $\mathbf{G}_\alpha \subseteq \omega$, para $\alpha \in (\aleph_2)^{\mathrm{M}}$, dados por:

para todo $n \in \omega$

$$p \text{ informa que } n \in \mathbf{G}_\alpha \text{ si } \langle n,\alpha,1\rangle \in p,$$
$$p \text{ informa que } n \notin \mathbf{G}_\alpha \text{ si } \langle n,\alpha,0\rangle \in p.$$

Si no se da ninguno de ambos casos, $p$ es irrelevante para esta información; pero en ese caso $p(\langle n,\alpha\rangle)$ no está definido y podemos dar extensiones suyas, $p_1 = p \cup \{\langle n,\alpha,1\rangle\}$, $p_2 = p \cup \{\langle n,\alpha,0\rangle\}$, mutuamente incompatibles. Además, puesto que para cada $n \in \omega$ y $\alpha \in (\aleph_2)^{\mathrm{M}}$, los conjuntos

$$\mathbf{D}_n=\{p\in\mathbb{P} : \exists\alpha\in(\aleph_2)^M\exists i\in 2(<n,\alpha,i>\in p)\}$$
$$\mathbf{D}_\alpha=\{p\in\mathbb{P} : \exists n\in\omega\exists i\in 2(<n,\alpha,i>\in p)\}$$

son densos, como fácilmente se puede comprobar, hay siempre un $p\in \mathbf{G}$ que nos informa sobre $n\in \mathbf{G}_\alpha$. Por otro lado, si $\alpha$, $\beta\in(\aleph_2)^M$ y $\alpha\neq\beta$, entonces $\mathbf{G}_\alpha\neq\mathbf{G}_\beta$, ya que siempre habrá un $p\in \mathbf{G}$ y un $n\in\omega$ tales que, por ejemplo, $<n,\alpha,1>,<n,\beta,0>\in p$. Así pues, el cardinal del continuo en M[G] es al menos $|(\aleph_2)^M|^{M[G]}$; pero puede probarse que los cardinales de M[G] y M coinciden[5], de manera que M[G] valida $\neg$**HC**.

Como consecuencia de la aplicación del método de forcing, el número de resultados de independencia con respecto a teorías de la órbita de **ZF** y la constatación de un amplio abanico de conceptualizaciones de los términos de la teoría de conjuntos se han hecho notorios. Un ejemplo es la aleatoriedad que, en contextos clásicos, ha adquirido el concepto de *continuo*. No sólo las respuestas al problema de su cardinalidad son, con las debidas limitaciones, casi arbitrarias; además, las variedades estructurales para las que hay modelos que satisfacen **ZF** se han enriquecido con diversos tipos de propiedades y gran número de combinaciones, la población de entes y atributos que consistentemente pueden aceptarse se ha multiplicado y, engarzados en una red de interconexiones muchas veces difusa a nuestros ojos, han nacido nuevos problemas. Por mencionar alguno, tómese el esclarecimiento de la relación entre *medibilidad* y *propiedad de Baire* (y otras propiedades de conjuntos de reales), cuestión que ha tenido gran eco entre los estudiosos de la teoría de conjuntos, que han desvelado vínculos con numerosos aspectos teóricos, especialmente relativos a nuevos axiomas[6]; en este contexto hay que citar la investigación en teoría descriptiva de conjuntos, con destacadas implicaciones y conexiones metateóricas, además de considerables dilucidaciones acerca de la estructura del continuo[7]; la dirección de implicaciones e influencias se invierte del plano de la teoría al de las investigaciones en análisis y topología a través del estudio de la gama de los diferentes axiomas de Martin[8] y, en general, de los nuevos axiomas propuestos a lo largo de los últimos años.

---

5. La prueba de esto excede los propósitos de este trabajo: brevemente diremos que depende de cierta propiedad de la noción de forcing utilizada, consistente en que todo subconjunto de $\mathbb{P}$ en M cuyos elementos sean condiciones mutuamente incompatibles tiene cardinal enumerable; *vid.* KUNEN,K., *Op.cit.*,pp. 211 ss.

6. Pionero en este terreno es el artículo SOLOVAY,R.M., «A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable», *Annals of Mathematics* **92** (1.970), pp.1-56. En él se revela ya la sensibilidad de este problema hacia las asunciones de fuertes infinitos. Con el curso de los años, se han desvelado conexiones con nuevos axiomas de otra índole que mencionaremos más adelante.

7. Una buena referencia sobre teoría descriptiva es MOSCHOVAKIS,Y.N., *Descriptive Set Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1.980. Su objetivo es el estudio de clases de conjuntos de números reales definibles con diferentes grados de complejidad, y las propiedades estructurales del continuo derivadas de ese estudio. Un elemento de gran interés para esta disciplina es el *axioma de determinación* (**AD**) y distintas restricciones suyas, que añadido a **ZF** permite concluir importantes resultados de regularidad para clases de reales.

8. El *axioma de Martin* (**AM**) fue formulado en MARTIN,D.A. y SOLOVAY,R.M., «Internal Cohen extensions», *Annals of Mathematical Logic*, **2** (1.970), pp. 143-178, como medio de clausurar la teoría con relación a los argumentos de forcing del tipo usado por Cohen (concretamente, aquéllos cuya noción satisface

La motivación para la formulación de estos nuevos axiomas es bastante variada: en muchos casos se ha buscado suplementar **ZFE** con sentencias de gran fuerza lógica, intentando decidir cuestiones independientes, muy particularmente **HC**; tal es el caso de la jerarquía de axiomas de grandes cardinales[9]. Al postular su existencia se pretende que una parte del universo esté clausurada con respecto a propiedades y relaciones, evitando construcciones que añadan alguna novedad para los objetos de la porción aislada por debajo del rango del gran cardinal. Sin embargo, ni siquiera estas nuevas y potentes axiomatizaciones han quedado inmunes a la acción de los argumentos de forcing. Por otra parte, esta línea de investigación se ha afianzado como una tendencia con vida propia, en la que el interés principal es el estudio de los modelos construidos bajo la égida de los grandes cardinales y la generalización de las propiedades que los caracterizan.

Un rasgo notable es el hallazgo de interconexiones teóricas o metateóricas entre la investigación sobre grandes cardinales y la de otros tipos de nuevos axiomas. Quizás el más impresionante vínculo en este sentido se localiza en los modelos para distintos grados de determinación de clases de reales, obtenidos por restricciones diversas al axioma de determinación.

Además de la riqueza de problemas que la propuesta de nuevos axiomas ha generado, hay una cuestión mucho más general y ambigua, aunque necesaria, si no hemos de considerar estas investigaciones como una actividad frívola y desconectada de los intereses del conocimiento humano. Se trata de estimar el grado de evidencia que dichos axiomas poseen. Subiendo otro escalón de generalidad, puede considerarse la

---

la propiedad a la que aludimos en la nota 5). Desde entonces se han propuesto distintas generalizaciones, por extensión de dicha clausura a familias cada vez más amplias de nociones. Así mismo, se han estudiado versiones más débiles de la original, restringiendo la familia de nociones respecto a las que se aplica la clausura. La utilidad de todas estas formulaciones es que permite obtener mediante prueba teórica resultados que, en Topología y Análisis, por ejemplo, requerirían un argumento de forcing específico. Además, sin ser equivalente a **HC**, **AM** comparte varias de sus consecuencias (los cardinales entre $\aleph_0$ y $|P(\aleph_0)|$ tienen una serie de propiedades en común) que hacen de su teoría lo bastante rica y determinada para ser objeto de estudio. Recientemente se han observado conexiones entre una versión, en cierto sentido máxima, de **AM** y ciertos axiomas de infinito.

9. Alfred Tarski fue uno de los primeros en interesarse en estos asuntos, que han llegado a constituir un subcampo con identidad propia de gran importancia en las investigaciones en teoría de conjuntos. Su artículo en colaboración con H.J. Keisler, «From accessible to inaccessible cardinals», *Fundamenta Mathematicae* **53** (1.964), pp. 225-308, abrió nuevos horizontes, al centrar el interés en la indagación de propiedades que suponen postular un cardinal grande: los criterios sentados para ello son los siguientes: generalización de propiedades de infinitos menores (por ejemplo, $\aleph_0$) a cardinales mayores; reflexión (atribución de propiedades del universo al estadio del mismo dado por el cardinal en cuestión); resemblanza (existencia de inmersiones elementales de diferentes porciones del universo). En muchos casos, los nuevos axiomas se relacionan con la existencia de autoinmersiones elementales no triviales del universo, lo que permite tratar la cuestión estudiando los ultrafiltros que hacen posible la definición de la inmersión. Para más información, pueden consultarse SOLOVAY,R.M., REINHARDT,W.M. y KANAMORI,A., «Strong axioms of infinity and elementary embeddings», *Annals of Mathematical Logic* **13** (1.978), pp. 73-116 y KANAMORI,A. y MAGIDOR,M., «The evolution of large cardinal axioms in set theory», MÜLLER,G.H. y SCOTT,D,S.(eds.), *Higher Set Theory*, Springer Verlag, Berlin, 1.978, pp. 99-275.

manera de emprender el análisis lógico de los conceptos sobre los que presuntamente trata la teoría de conjuntos, con el fin de ponderar el papel de los nuevos axiomas en su caracterización y proponer alternativas que contribuyan a dicho cometido.

Como se ha dicho, son éstas cuestiones ambiguas; su complejidad crece, incluso, con el cuerpo de problemas y resultados. La razón es que estimamos la evidencia de enunciados del lenguaje de la teoría y analizamos sus conceptos principalmente a la luz del entramado en el que se localizan o al que dan lugar, incluyendo la implicaciones sobre ámbitos extraconjuntistas en los que el aparato conjuntista halla aplicación. Tanto más es esto así cuanto la evolución de la teoría de conjuntos la ha llevado por caminos en los que la intuición condicionada empíricamente tiene muy poco que decir; y dado que nuestro conocimiento de las estructuras matemáticas se produce por obra de su elaboración teórica, lo que en este sentido se pueda aportar al juicio de nuevos axiomas e hipótesis está inmerso en la misma red de conexiones abstractas en la que están sumidas las investigaciones en teoría de conjuntos. Los instrumentos y criterios para juzgar la evidencia de los enunciados o analizar los conceptos de este nivel pertenecen, por tanto, mayoritariamente a su propia esfera. Pese a ello, la canalización de los esfuerzos por valorar las hipótesis abstractas debe contar, como ingrediente imprescindible, con el estudio de sus aplicaciones y, en la medida en que ello pueda acarrear un contacto con usos teóricos y lingüísticos más próximos a nuestra percepción del mundo, puede verse aquí un vestigio de empirismo de indiscutible valor.

Precisamente la búsqueda de aplicaciones es el momento en el que el polimorfismo de la teoría de conjuntos puede traer consecuencias importantes para la investigación de otras ramas de la lógica matemática: así como la teoría clásica de conjuntos subyace a la teoría clásica de modelos, es previsible un desarrollo coherente de teorías multiformes de modelos que entronquen con la pluralidad de planteamientos axiomáticos en teoría de conjuntos y, sobre todo, con la sistematización de sus distintas interrelaciones. Nuestro enfoque en las siguientes secciones procurará hacer hincapié en esta idea que, pensamos, puede ser de interés para diversas tendencias no clásicas y para el análisis lógico de los lenguajes humanos.

## 3. PLURALIDAD DE UNIVERSOS.

Pese a la indeterminación conceptual y formal de la teoría de conjuntos, las investigaciones suelen adoptar el supuesto de que hay un universo único y estable que funciona como marco de los argumentos y de la modelizaciones de las axiomatizaciones consideradas. Así, el universo bien fundado, designado por **V**, definido recursivamente por iteración transfinita de las operaciones de conjunto potencia y gran unión, es considerado el modelo natural de **ZF**, por referencia al cual es costumbre ofrecer los contenidos, incluso aquéllos relativizados a modelos restringidos, de la teoría de conjuntos. Lo cierto es que los resultados metateóricos adoptan a menudo el supuesto de la consistencia de **ZF**, lo que permite operar en el marco de su modelo más comprehensivo, **V**. Análogamente, aunque la referencia última es **V**, algunos resultados se concluyen de hipótesis adicionales, como **V=L**, axiomas de infinito, axiomas de determinación, etc., modificándose oportunamente para ello el modelo marco en el que se razona.

A despecho de la naturalidad de este planteamiento, esbozaremos aquí un punto de vista diferente que, lejos de acentuar la fijeza (presunta) de los conceptos conjuntistas, resalta el carácter dinámico y plural que el panorama actual de sus modelos tiende a poner de relieve.

Ante todo, debe notarse que las mismas técnicas habituales de construcción de nuevos modelos, especialmente la de forcing y la de ultrapotencia, aportan datos para un programa de articulación orgánica de distintos universos, e incluso clases de universos, en estructuras que podrían, en principio, ser caracterizadas con cualquier grado de precisión.

En el caso del método de forcing, nuestras consideraciones quedarán probablemente mejor aclaradas utilizando su sistematización por medio del concepto de *modelo booleano*[10].

Al esbozar el concepto de forcing y la construcción de modelos genéricos, dijimos que la información que una condición transmite se refiere a la composición del conjunto genérico: en tanto el nuevo modelo se construye tomando dicho conjunto como parámetro en la definición de sus elementos, podemos concluir que la información es relevante para cualquiera de éstos y para la evaluación de las expresiones del lenguaje formal en su dominio y estructura, es decir, para la delimitación exacta de la teoría del modelo genérico. Hay mecanismos elaborados para entender esto del siguiente modo: por una parte, la estructura de una noción de forcing, $<\mathbb{P},\leq_{\mathbb{P}},\mathbf{1}_{\mathbb{P}}>$, puede ser inmersa en un álgebra booleana completa[11], $<\mathbf{B},\leq_{\mathbf{B}},\mathbf{1}_{\mathbf{B}}>$, de manera que la imagen de dicha inmersión $i{:}\mathbb{P}\rightarrow\mathbf{B}$ es un subconjunto denso de **B**. La información sobre el modelo genérico, recabada ahora por los elementos de **B**, adopta la particularidad de que cada sentencia del lenguaje puede asociarse, dada la completud del álgebra, con el supremo de las imágenes por $i$ de las condiciones que la fuerzan; es posible ahora insertar las configuraciones teóricas en el lenguaje dentro del marco proporcionado por la estructura de **B**. Como consecuencia, además, podemos tratar (en el modelo base dado) cada candidato a

10. Este modo de representar los argumentos de forcing fue elaborado por vez primera, de un modo completo y como hoy se utiliza, por Dana Scott y Robert Solovay en una intervanción durante el *Symposium on Pure Mathematics* dedicado a Teoría de Conjuntos, celebrado en la UCLA el verano de 1.967. Una exposición detallada puede hallarse en BELL,J.L., *Boolean-valued Models and Independence Proofs in Set Theory*, Oxford University Press, Oxford, 1.985 (2ª edición). Debe mencionarse, no obstante, que el origen del método se remonta a 1.965, en que Solovay llegó a su planteamiento de modo simultáneo a Petr Vopenka en «The limits of Sheaves and applications on constructions of models», *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Math. Astron. Phys.* **13**, pp. 189-192.

11. Un álgebra booleana completa es aquélla que posee supremos e ínfimos para subconjuntos arbitrarios de su dominio (recuérdese que la relación $b\leq_{\mathbf{B}}c$ se define por $b+c=c$, para $b,c\in\mathbf{B}$).

elemento del modelo genérico como un conjunto (o casi-conjunto) cuya función característica, en vez de recibir valores en $\{0,1\}$, lo hace en **B**: ello hace posible, con instrumentos puramente algebraicos, el cómputo del valor de probabilidad de sentencias del lenguaje en el marco ofrecido por **B**, y definir así una estructura (que es, así mismo, un modelo de **ZF**) cuya teoría corresponde a la clase de sentencias con valor booleano **1**.

Como se ha dicho, estas construcciones se definen sobre un marco previo que valida las asunciones de las argumentaciones y que, con frecuencia, es **V**. Incluso pueden definirse universos booleanos $\mathbf{V}^{\mathbf{B}}$ dados con relación a la estructura base de **V** y con relación a un álgebra **B** que es un elemento de **V**. Lo que queremos ahora destacar es que puede establecerse un discurso coherente sobre conceptos conjuntistas no fijos, ni siquiera internamente a estructuras dadas, como en el caso de los universos y modelos booleanos: sus elementos son *conjuntos difusos* cuyos contenidos son dados en evolución, de acuerdo con la información proporcionada por los elementos del álgebra: $\mathbf{1}_{\mathbf{B}}$ equivale a la mínima información disponible para la especificación de los modelos en los que valen sentencias con dicho valor (y, por tanto, de los contenidos de sus elementos) y, de hecho, no añade novedades a la estructura del modelo booleano mismo. Si $b,c\in \mathbf{B}$ y $b\leq_{\mathbf{B}}c$, entonces $b$ da más información que $c$, ya que las sentencias válidas en modelos que admiten $c$ como verdad son válidas en los que admiten $b$ (por tanto la clase de los primeros está incluida en la de los segundos).

Este punto de vista ha resultado poco relevante para los problemas típicos de teoría de conjuntos, ya que generalmente cualquier conjunto genérico resulta adecuado para los argumentos llevados a cabo en pruebas de independencia. Sin embargo, tenerlo en cuenta puede ayudar a acentuar aspectos de una representación distinta, sobre todo en relación con contextos más generales, de este campo de investigación.

Un primer contexto más general viene dado por el concepto de *iteración*[12]. Además de sistematizar procesos de extensión genérica iterada y las pruebas de independencia basadas en ellos, el estudio de las propiedades de nociones iteradas de forcing aporta datos de gran interés concernientes a los modos de preservación y alteración de conceptos en la transición de unos modelos a sus sucesivas extensiones: la investigación de este ámbito revela lo sensibles que son a la presencia de dichas propiedades y de las del orden que actúa como índice de la iteración, tanto el proceso en sí como las transformaciones experimentadas en él por los conceptos conjuntistas. La representación de este proceso como iteración de la obtención de modelos booleanos, relativos a álgebras que guardan entre sí diversas relaciones especificables con claridad, induce

12. El método de forcing iterado fue introducido en SOLOVAY,R.M. y TENNENBAUM,S., «Iterated Cohen extensions and Souslin's problem», *Annals of Mathematics* **94** (1.971), pp.201-245. Detalles sobre su definición y uso pueden encontrarse en KUNEN,K., *Op.cit.*, cap. VIII. Una interesante y reciente generalización del concepto puede hallarse en GROSZEK,M. y JECH,T., «Generalized iteration of forcing», *Transactions of the American Mathematical Society* **324** (1.991), pp.1-26.

a pensar en factores de uniformidad y concomitancia de la estructura de la familia (indexicada de alguna manera) de álgebras y las relaciones entre los diversos modelos obtenidos, sus elementos y las relaciones entre éstos, etc. De esta manera, el proceso puede concebirse coherentemente como un cuadro dinámico en el que los conceptos de la teoría de conjuntos asumen un significado variable, si bien el estudio en profundidad de su variación puede ser sometido a control.

Algo similar puede decirse de la técnica de *ultrapotencias*[13]. En este caso, también, la posibilidad de definir iteraciones (sobre un conjunto índice dado) y el carácter fuertemente algebraico de la operación de ultrapotencia, benefician la idea de una representación paralela de la familia de ultrafiltros y de las transformaciones producidas en los conceptos de la teoría a lo largo del proceso de iteración.

Ambos casos nos llevan a considerar ciertas familias de modelos de la teoría, conformadas de acuerdo a estructuras que, por así decir, despliegan (de una forma también estructurada) las posibilidades de los conceptos teóricos. La *teoría de las categorías*[14] constituye un marco que, como intentaremos mostrar, es lo bastante general como para permitir un apropiado estudio de la cuestión.

Todo modelo de teoría de conjuntos (al menos de **ZF**) puede considerarse como una categoría cuyos objetos son sus conjuntos y flechas sus funciones (que, incidentalmente, son también objetos) y con propiedades que caracterizan un tipo particularmente interesante, el de los *toposes*[15]. Los modelos y universos booleanos se adaptan a esta conceptualización, si bien, además, son categorialmente equivalentes a toposes de un cierto tipo: los toposes de haces sobre un álgebra booleana completa con valores en el universo conjuntista al uso en la definición del modelo booleano, Por ser más claros, dichos toposes tienen por objetos la clase de functores (o sea, flechas

13. El uso de ultrapotencias en teoría de conjuntos está asociado a ciertas hipótesis de grandes cardinales (*vid.* nota 9); en particular, se ha investigado la existencia de ultrapotencias módulo ultrafiltros completos no principales sobre un cardinal no enumerable (llamado *cardinal medible*), que, en presencia de **AE**, resulta ser muy grande. Al definir iteraciones «largas» del método puede generalizarse este concepto, obteniendo así propieades aún más fuertes. Para los conceptos de ultrafiltro y ultrapotencia, puede consultarse CHANG,C. y KEISLER,H.J., *Model Theory*. North-Holland, Amsterdam, 1.977 (2ª edición), cap.4 y 6.

14. La teoría de las categorías comienza su andadura hacia los años 40, de la mano de Saunders MacLane y S. Eilenberg; su base conceptual es extraordinariamente simple y, sin embargo, adecuada para la consideración de cualquier estructura matemática. Una categoría es una colección de objetos y flechas entre los mismos, sin más especificaciones. Las propiedades de unos y otras caracterizan los tipos de categorías de las distintas estructuras. Además, es posible acceder a un plano superior en el que consideramos categorías cuyos objetos son otras categorías. Para más detalle, consúltense LAMBEK,J. y SCOTT,P.J., *Op.cit.*,I y BELL,J.L., *Toposes and Local Set Theory. An Introduction*, cap.1.

15. Los toposes son categorías clausuradas respecto a propiedades que son una generalización algebraica de propiedades de conjuntos, como productos cartesianos y conjuntos potencia. Su creador fue F.W.Lawvere en los primeros años 70. Para más información sobre este concepto y algunas especificaciones suyas puede consultarse LAMBEK,J. y SCOTT,P.J., *Op.cit.*, III, y BELL,J.L., *Toposes* ..., especialmente cap. 2 y 5 (para toposes de haces).

entre categorías) entre el álgebra en cuestión, **B**, considerada como categoría (cuyos objetos son los elementos de **B** y flechas las desigualdades $b \leq c$ válidas en **B**) y el dominio del modelo base, que invierten la dirección de las flechas (si $b \leq c$ y $F$ es un functor del tipo descrito, llamado *contravariante*, entonces la flecha correspondiente en el modelo es una función del conjunto $F(c)$ en el conjunto $F(b)$) y con la propiedad de que la imagen del supremo de cualquier subconjunto **X** de **B** es el dominio de la imagen por el mismo functor de cualquier desigualdad entre los elementos de **X** y dicho supremo. Las flechas de un topos de haces son las transformaciones naturales entre haces, aplicaciones $\eta$ que, si se dan entre haces $F$ y $G$, mandan cada elemento $b$ de **B** a una función del modelo $\eta(b){:}F(b)\rightarrow G(b)$, de manera que si $c \leq b$, entonces $G(c \leq b) \circ \eta(b) = \eta(c) \circ F(c \leq b)$. Esta representación de los modelos booleanos ayuda a percibir con más claridad el carácter dinámico de sus elementos, ya que cada uno de ellos puede verse como un haz que va adquiriendo valores a lo largo de **B**. De este modo, las construcciones para los argumentos con forcing pueden efectuarse con instrumentos categoriales.

El modo de representación de los modelos de teoría de conjuntos como toposes de haces tiene proyección en el tratamiento sistemático de familias de modelos, ya que podemos introducir categorías de orden superior cuyos objetos son categorías y cuyas flechas son functores entre ellas (y, así mismo, categorías de functores y transformaciones naturales entre ellos). La forma general en que esta idea puede articularse es la siguiente: consideramos un marco presupuesto para un argumento metateórico (tal como **V**) como un *espacio* cuyos puntos son sus elementos, en el que las construcciones efectuadas para el desarrollo del argumento, es decir, los modelos ideados para la prueba, son contemplados como abiertos suyos con relación a operaciones sobre modelos que signifiquen la introducción de modelos más comprehensivos. Estrechando el foco de atención, las familias de modelos introducidas por los procedimientos conocidos de prueba (clausuradas respecto a manipulaciones que permitan obtener nuevos modelos) son categorías dotadas de una estructura que, bajo ciertos criterios, pueden asemejarse a la de un espacio topológico.

Dado un modelo M de **ZF**, llamaremos *subespacio de marco* M a cualquier familia de modelos de **ZF**, $\Delta$, que tiene a M como elemento y para la que hay un álgebra de Heyting completa, **H** y una aplicación $f$ de **H** en $\Delta$ con las siguientes propiedades:

$$f(\mathbf{1})=\mathrm{M};$$

si $a,b \in \mathbf{H}$, entonces $f(a \cdot b)=f(a) \cap f(b)$ y $f(a+b)=f(a) \cup^{\#} f(b)$;

donde **1** es el máximo de **H**, $\cdot$ y $+$ son las operaciones de ínfimo y supremo, y $\cup^{\#}$ expresa la clausura de Skolem de una unión entre clases[16].

16. Un álgebra de Heyting completa es una estructura de orden parcial con ínfimos y supremos de cada dos elementos suyos, máximo y mínimo elementos y supremos de todo subconjunto de su dominio. La noción $\cup^{\#}$ puede definirse por recursión, para cualquier enumeración de las expresiones del lenguaje que definen operaciones finitarias entre conjuntos, como la clausura de la aplicación de dichas operaciones a elementos de la unión señalada.

El requisito que define un subespacio de marco M puede ser ampliado a propiedades, en atención a las cuales su riqueza estructural puede verse incrementada: por ejemplo, podemos describir un subespacio de marco un modelo booleano $M^B$ que comprende todos los submodelos definidos como modelos booleanos relativos al mismo modelo base, M, y subálgebras completas de **B**. Pueden luego estudiarse las transferencias estructurales de la categoría de subálgebras de **B** al subespacio y explotar algunos aspectos de la teoría de álgebras booleanas (como el *dualismo de Stone* o la representación de un álgebra por los haces sobre una subálgebra[17]) para obtener representaciones del marco $M^B$ mediante distintas topologías de haces sobre subálgebras: la utilidad de este punto de vista consiste en que podemos así trazar las transformaciones de unos modelos del subespacio a otros como aplicaciones continuas, estudiar dentro de tal aparato teórico las variaciones conceptuales privilegiadas por el argumento de forcing y clausurar formalmente la teoría con relación a las novedades introducidas en una escala gradual. Este modo de representación puede ser específicamente aplicado con detalle al tratar argumentos que utilicen nociones de forcing iterado.

La iteración de la operación de ultrapotencia puede concebirse con arreglo a un plan similar: asumido que el conjunto índice de la iteración posee una estructura arbórea con mínimo elemento, el correspondiente al modelo inicial, la construcción, debidamente clausurada con relación a propiedades topológicas del conjunto índice, puede engarzarse en un subespacio de marco nuestro universo de partida: el cuadro obtenido nos permitirá, nuevamente, estudiar los procesos de variación de conceptos, especialmente la generación de nuevos ultrafiltros a partir de sus antecesores, de manera sistemática, continua y exhaustiva, proporcionándonos información de detalle sobre la estructura del universo bajo la asunción de la existencia de un gran cardinal.

Un tercer contexto en el que puede ser útil el modo de representación esbozado es el de los modelos de distintas restricciones del axioma de determinación. Sabido es que podemos someter las familias de modelos para distintos grados de determinación proyectiva a una ordenación jerárquica según sus grados de complejidad, riqueza y regularidad de clases de reales. Nuevamente la clausura de dicha ordenación con relación a ciertos rasgos topológicos puede permitir su transferencia a las familias de modelos y ofrecernos un seguimiento continuo y sistemático de las variaciones detectadas en la construcción de los modelos.

La uniformización categorial en el tratamiento, por diversas razones, de familias de modelos de teoría de conjuntos que se evidencia en el concepto de subespacio tiene las ventajas de asegurar la homogeneidad de instrumentos en el control, manejo e investigación de variaciones, aunando así métodos y resultados al amparo de un solo esquema. Además, el enfoque puede verse considerablemente generalizado tomando,

17. Para estos conceptos, remitimos al primer volumen de MONK,J.D. y BONNET,R.(eds.), *Handbook of Boolean Algebras*, North-Holland, Amsterdam, 1.989.

como objetos de nuestras categorías, estructuras valoradas, no ya en álgebras booleanas, sino en álgebras de Heyting completas: por ese camino pueden ofrecerse vínculos interesantes de las teorías clásicas de conjuntos con las tendencias constructivistas de la lógica matemática, ya que cabe entender que la adopción de tal enfoque generalizado abraza indistintamente unos y otros planteamientos.

Otro aspecto que no debe escapar a nuestra atención es que el planteamiento esbozado desemboca, inevitablemente, en la búsqueda de relaciones de orden superior, es decir, en la investigación de categorías de subespacios y operaciones que nos permitan el tránsito de uno a otro, o de las transformaciones naturales entre functores que transfieren argumentos de un subespacio a otro.

La sistematización lógica de estos estudios puede conducir a la formulación de nuevas hipótesis de teoría de conjuntos, a desvelar aspectos valiosos para el análisis de los conceptos teóricos y, en definitiva, a una mejor comprensión de la situación de la teoría de conjuntos.

## 4. UNIVERSOS DINAMICOS INTERACTIVOS.

Precisamente una línea de trabajo interesante consiste en tratar las interrelaciones entre subespacios de diferente índole. Dentro de ella cabe el estudio, como ya se ha mencionado, de los resultados de las diferentes combinaciones de métodos utilizados en el diseño de subespacios, obteniendo subespacios mixtos.

También hay que pensar en las transformaciones inducidas por flechas en las categorías de los objetos que funcionan como índices en la definición de subespacios: por ejemplo, las producidas por operaciones sobre álgebras booleanas, más allá de los homomorfismos completos que configuran un subespacio de marco un modelo booleano $M^B$; las diferentes disposiciones reticulares de secuencias de ultrafiltros existentes en un punto determinado de un subespacio; las relaciones definibles entre reales y entre conjuntos definibles de reales que pueden tener efecto sobre series de modelos para grados de determinación creciente; etc.

El estudio de estas cuestiones debe esclarecer relaciones de convergencia y divergencia entre subespacios diferentes, así como la delimitación de intersecciones y áreas disjuntas (contradictorias entre sí): es decir, debe arrojar luz sobre las diversas formas de evolucionar los conceptos de la teoría en el seno de un subespacio, con la consiguiente disparidad de determinación formal en las extensiones de **ZF**.

Nuestra propuesta para el acometimiento de esta tarea se basa en la generalización del concepto de forcing al contexto de los subespacios: con ello existirá la posibilidad de expresar (y, en lo posible, computar) la relación de un modelo con la posición de una determinada sentencia en un subespacio concreto, y, extendiendo aún más la cuestión, podremos tomar un subespacio como noción de forcing.

A continuación ofrecemos los detalles del planteamiento, así como una lista de cuestiones suscitadas a raíz del mismo.

Sean M=<**M**,∈> N=<**N**,∈> dos modelos internos de **ZF**, $S$ un subespacio de marco N, $f$ una aplicación con dominio incluido en (posiblemente idéntico a) **M** y rango incluido en **N**, $\mathbf{x}_0, ..., \mathbf{x}_n \in \mathbf{M}$, $\phi$ y $\chi$ dos fórmulas del lenguaje de teoría de conjuntos cuyas variables libres ocurren entre las $v_0$, ..., $v_n$. Definimos la relación de forcing entre (M,$f$) y las fórmulas del lenguaje, sobre el marco $S$, por inducción sobre la complejidad de las fórmulas:

*1)* $(\mathrm{M},f) \Vdash_S v_0 \in v_1[\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1]$ sii $f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1)$ están definidos y $\forall \mathrm{A} \in S\ (f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1) \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathrm{A} \models v_0 \in v_1[f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1)])$;

*2)* $(\mathrm{M},f) \Vdash_S v_0 = v_1[\mathbf{x}_0,\mathbf{x}_1]$ sii $f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1)$ están definidos y $\forall \mathrm{A} \in S\ (f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1) \in \mathbf{A} \Rightarrow \mathrm{A} \models v_0 = v_1[f(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}_1)]$;

*3)* $(\mathrm{M},f) \Vdash_S \phi \wedge \chi[\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$ sii $(\mathrm{M},f) \Vdash_S \phi\ [\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$ y $(\mathrm{M},f) \Vdash_S \chi\ [\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$;

*4)* $(\mathrm{M},f) \Vdash_S \neg \phi[\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$ sii $\forall \mathrm{M}' \supseteq \mathrm{M} \forall g$($g$ es una función & $f \subseteq g$ & (rango de $g$) $\subseteq \mathbf{N}$ & (dominio de $g$)$\subseteq \mathbf{M}' \Rightarrow$ no $(\mathrm{M}',g) \Vdash_S \phi[\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$;

*5)* $(\mathrm{M},f) \Vdash_S \phi \rightarrow \chi\ [\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$ sii $(\mathrm{M},f) \Vdash_S \phi\ [\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n] \Rightarrow (\mathrm{M},f) \Vdash_S \chi\ [\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$;

*6)* $(\mathrm{M},f) \Vdash_S \phi \vee \chi\ [\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$ sii $\forall \mathrm{M}' \supseteq \mathrm{M} \exists \mathrm{M}'' \supseteq \mathrm{M}' \exists g$[$g$ es una función & (dominio de $g$)$\subseteq \mathbf{M}''$ & (rango de $g$)$\subseteq \mathbf{N}$ & $f \subseteq g$ & $(\mathrm{M}'',g) \Vdash_S \phi\ [\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$ ó $(\mathrm{M}'',g) \Vdash_S \chi\ [\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n)$];

*7)* $(\mathrm{M},f) \Vdash_S \bigvee v \phi\ [\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$ sii $\forall \mathrm{M}' \supseteq \mathrm{M} \exists \mathrm{M}'' \supseteq \mathrm{M}' \exists \mathbf{x} \in \mathbf{M}''\ \exists g$($g$ es una función & (dominio de $g$)$\subseteq \mathbf{M}''$ & (rango de $g$)$\subseteq \mathbf{N}$ & $f \subseteq g$ & $((\mathrm{M}'',g) \Vdash_S \phi\ [\mathbf{x}\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n])$;

*8)* $(\mathrm{M},f) \Vdash_S \bigwedge v \phi[\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$ sii $\forall \mathrm{M}' \supseteq \mathrm{M} \forall \mathbf{x} \in \mathbf{M}' \forall g$($g$ es una función & (dominio de $g$)$\subseteq \mathbf{M}'$ & (rango de $g$)$\subseteq \mathbf{N}$ & $f \subseteq g \Rightarrow (\mathrm{M}',g) \Vdash_S \phi[\mathbf{x}\mathbf{x}_0,...,\mathbf{x}_n]$).

En este caso, el rango de los cuantificadores $\forall$M'y $\exists$M'es la clase de los modelos de **ZF**. Relativizando las definiciones de $(\mathrm{M},f) \Vdash_S \phi[\mathbf{x}_0...\mathbf{x}_n]$ a un subespacio $S'$ dado, es decir, restringiendo el dominio de valores de M y los cuantificadores $\forall$M'y $\exists$M'a $S'$, podemos estudiar las conexiones entre las estructuras de $S$ y $S'$. En particular, podemos definir una noción de forcing del siguiente modo:

*i)* (M,*f*) *es una condición si* M∈*S*' y *f* es una función con dominio incluido en **M** y rango incluido en **N**.

*ii)* Si (M,*f*), (M',*g*) son dos condiciones,
$(M,f) \leq (M',g)$ sii $\mathbf{M'} \subseteq \mathbf{M}$ y $g \subseteq f$.

Restringir *i)* a funciones con ciertas propiedades permite dar a $\Vdash_S$ distintos grados de efectividad: por ejemplo, si se estipula que sean finitas, enumerables, computables por algún procedimiento determinado, etc. Por otro lado, dicha relación satisface algunas de las propiedades típicas de la relación de forcing, en particular:

$(M,f) \leq (M',g)$ & $(M',g) \Vdash_S \phi\, [\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_n] \Rightarrow (M,f) \Vdash_S \phi\, [\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_n]$;
no $(M,f) \Vdash_S \phi \wedge \neg\phi[\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_n]$;
Para toda fórmula $\phi$ y toda condición (M,*f*), hay otra condición $(M',g) \leq (M,f)$, $(M',g) \Vdash_S \phi[\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_n]$ ó $(M',g) \Vdash_S \neg\phi[\mathbf{x}_0,\ldots,\mathbf{x}_n]$.

Dos aspectos del anterior concepto que pueden tener interés son los siguientes:

*a)* La definición de condiciones (especialmente de sus segundos miembros) a partir de la estructura del subespacio S' y su relación con la estructura del subespacio *S*. En particular, si dichas estructuras poseen rasgos reticulares, puede indagarse vías de definición de funciones parciales de los elementos del primer subespacio en los elementos del segundo atendiendo a las relaciones algebraicas entre ellas.

*b)* La estructura del subespacio que define la noción ¿permite introducir una colección genérica de condiciones? No se trata tanto de describir nuevas construcciones, cuanto de establecer una relación (operación) entre (marcos de) dos subespacios, que permita señalar la transferencia de cierta estructura del uno al otro.

La investigación en el ámbito de estos modos de representación y manipulación de familias de modelos de teoría de conjuntos puede generalizarse a contextos más amplios que el de la teoría **ZF**: por un lado, pueden buscarse aplicaciones al estudio de nuevos axiomas e hipótesis de la axiomática de tendencia clásica. Por otro, pueden insertarse los conceptos introducidos en estudios de carácter constructivista, por ejemplo, en los relativos a teorías intuicionistas de orden superior y de conjuntos.

## 5. CONCLUSION.

La relatividad e indefinición de las axiomatizaciones de la teoría de conjuntos, así como la dificultad de ofrecer alguna base sustancialmente distinta a sus contenidos y al tratamiento de sus problemas, ponen en tela de juicio las posturas realistas sobre sus aspectos ontológicos. En su lugar, nos parece que una visión que acentúe las funciones de la teoría para articular y representar nuestro conocimiento de estructuras y las posibles manipulaciones sobre ellas, desde un plano de abstracción superior, cuenta con rasgos menos problemáticos y más significativos para el desarrollo de las investigaciones en curso.

En particular, dicho punto de vista, apoyado en las ideas que hemos expuesto en las anteriores páginas, puede auspiciar su uso como instrumentos heurísticos destinados a la propuesta y justificación de procedimientos lógico-matemáticos de razonamiento vinculados al concepto *conjunto*, de enunciados y problemas teóricos concretos y de programas completos de investigación en teoría de conjuntos, tanto mediante la exploración de subespacios concretos especificados de alguna manera (por ejemplo, mediante una propiedad teórica expresada por alguno de los nuevos axiomas), como de una multiplicidad de ellos relacionados de modos que puedan ser sistematizados con las herramientas consideradas. En estos posibles desarrollos, además, existirá siempre la aspiración de ofrecer planteamientos orgánicamente dispuestos, en una red de resultados y problemas en continua interacción.