Algebras de Abel cerradas

por

Juan Arias de Reyna Martínez

Presentado por el académico D. Darío Maravall Casesnoves

1. Ceros de las funciones analíticas

Sea G una región de $\mathbb{C}$ y $\Omega = \varphi^{-1}(G)$. Si $f : \Omega \to A$ es analítica existe $g : G \to \mathbb{C}$ tal que es analítica y el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ G \arrow[r, "g"] & \mathbf{C} \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Diremos que f es semiconstante si g es constante. Diremos que f es seminnla si g es nula.

Si existe $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$, pueden ocurrir dos cosas: o f es seminula o no es semiconstante. En este último caso, y sólo en éste, diremos que a es un cero de f.

Proposición 1.—*Sea* $f : \Omega \to A$ *analítica. Sea* $a \in \Omega$ *un cero de* f. *Existe y es único el número entero* n *tal que pueda escribirse*

$$f(z) = (z - a)^n f_1(z)$$

con

$$f_1(a) \neq 0 \quad y \quad f_1 : \Omega \to A$$

analítica. Llamaremos a n *el orden del cero.*

Como $f(a) = 0$ se tiene en un entorno de a el desarrollo

$$f(z) = a_1 (z - a) + a_2 (z - a)^2 + \dots$$

Sea n el menor entero tal que $a_n \neq 0$ que existe, pues f no es idénticamente nula. Se tiene

$$f(z) = (z - a)^n f_1(z)$$

en un entorno de a. Fuera de este entorno podemos poner

$$f_1(z) = f(z)(z - a)^{-n},$$

pues se tendrá $\varphi(z) \neq \varphi(a)$. Esta f_1 cumple evidentemente todas las condiciones del enunciado. El n es único, pues si existieran dos se tendrían dos desarrollos diferentes de f en el entorno de a.

De hecho, incluso la f_1 es única, pues dos f_1 diferentes proporcionarían también dos desarrollos distintos de la f.

PROPOSICIÓN 2.—*Sea G una región de $\mathbb{C}$. $\Omega = \varphi^{-1}(G)$. $\mathrm{f} : \Omega \to A$ analítica. Sea $\mathrm{g} : G \to \mathbb{C}$ la función analítica tal que $\varphi \circ \mathrm{f} = \mathrm{g} \circ \varphi$. Supongamos que* f *no es semiconstante. Entonces, si* a *es cero de* f, φ (a) *es cero de* g. *Además, si* α *es un cero de* g *de orden* n, *la suma de los órdenes de los ceros* a *de* f *tales que* $\varphi(\mathrm{a}) = \alpha$ *es a lo más* n.

El primer enunciado es trivial. Como f no es semiconstante, g no es constante. Sea, por tanto, α cero de g, y $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ los ceros de f tales que $\varphi(a_i) = \alpha$ contados con su multiplicidad.

Aplicando la proposición 1, repetidamente se tiene para cada k

$$f(z) = (z - a_1)(z - a_2) \dots (z - a_k) f_k(z)$$

donde f_k es analítica en Ω. Sea g_k la función asociada a f_k; entonces aplicando φ a la igualda danterior se obtiene

$$g(z) = (z - \alpha)^k g_k(z).$$

Como g_k es analítica, debe ser $k \leqslant n$.

Si el ideal maximal de A es principal, esto es, si A es anillo de valuación discreta, el estudio de las funciones analíticas puede reducirse a las no seminulas. Pues si f es seminula, los coeficientes de su desarrollo pertenecen todos a un ideal del tipo (x^n), siendo x el generador del ideal maximal de A. La función f puede entonces escribirse en la forma

$$f(z) = x^h f_1(z),$$

donde la función f_1 no es seminula. Sin embargo, en el caso general esto no es posible.

Sea f analítica y no seminula en $\Omega = \varphi^{-1}(G)$. Donde G es una región de $\mathbb{C}$. Llamaremos grado de f en $\alpha \in G$ al orden del cero en α de la función g asociada a f. (Naturalmente, el grado puede ser cero.)

Si $a \in \Omega$ es tal que $\varphi(a) = \alpha$, y

$$f(z) = \Sigma\, a_n (z - a)^n$$

el grado de f en α es precisamente el entero n tal que $\varphi(a_n) \neq 0$, siendo $\varphi(a_k) = 0$ para $k < n$.

Sea f no seminula y analítica de Ω en A, siendo $\Omega = \varphi^{-1}(G)$ y G una región de $\mathbb{C}$. La proposición 2 nos dice que para cada $\alpha \in G$ se tiene:

$$\operatorname{Card}\{\, a \mid \varphi(a) = \alpha \quad \text{y} \quad f(a) = 0 \,\} \leqslant \text{grado de } f \text{ en } \alpha.$$

Sabemos que para $\mathbb{C}$ esta desigualdad es siempre una igualdad. Induce esto a definir el concepto de álgebra de Abel cerrada.

DEFINICIÓN 1.—*Sea A un álgebra de Abel. Diremo sque A es cerrada. Si para cada* f : $\Omega \to A$ *analítica y no seminula. Siendo* $\Omega = \varphi^{-1}(G)$ *y cada* $\alpha \in G$, *se tiene:*

$$\mathit{Card}\{\, \mathrm{a} \mid \varphi(\mathrm{a}) = \alpha \quad y \quad \mathrm{f}(\mathrm{a}) = 0 \,\} = \mathit{grado\ de\ } \mathrm{f} \mathit{\ en\ } \alpha.$$

El objetivo de lo que sigue es estudiar con más detalle las relaciones entre una función analítica y sus ceros.

2. Teorema de preparación

Vamos a extender el conocido resultado a nuestras álgebras, para lo que será necesario modificar las demostraciones conocidas. Sobre todo para probar la convergencia de las series que aparecen.

Llamaremos S (A, X) el anillo de las series convergentes (esto es, con radio no nulo) de potencias con coeficientes en A.

Proposición 3.—*Sea*

$$B = \Sigma\, b_n X^n \in S(A, X)$$

tal que existe $b_k \notin \mathcal{M}$, *y llamemos* p *al menor* k *tal que* $b_k \notin \mathcal{M}$. *Dada*

$$A = \Sigma\, a_n X^n \in S(A, X)$$

existen $Q \in S(A, X)$ *y un polinomio*

$$R = \sum_{n=0}^{p-1} r_n X^n,$$

tales que $A = B\,Q + R$ *y tanto* Q *como* R *están determinados de manera única.*

Probaremos primero la existencia y después la unicidad.

Existencia

a) Reducimos primero el problema general al caso en que dividimos por un B de un tipo particular.

B puede escribirse en la forma

$$B = B_1 + X^p B_2,$$

donde

$$B_1 = b_0 + b_1 X + \dots + b_{p-1} X^{p-1} \quad \text{y} \quad B_2$$

es un elemento de S (A, X) que es invertible en S (A, X), pues $\varphi(b_p) \neq 0$. Estamos usando el hecho de que la composición de funciones analíticas es analítica y que $1/X$ es analítica en b_p.

Entonces $B = B_2 (X^p - C)$, donde $C = -(1/B_2) B_1$ es un elemento de $S(A, X)$. Debemos encontrar Q y R tales que

$$A = (X^p - C) S + R,$$

donde $S = B_2 Q$. Basta de hecho encontrar S y R, donde $S \in S(A, X)$ y R es un polinomio de grado $p-1$ o inferior, pues entonces se tendrá $Q = B_2^{-1} S$.

b) Plan de la demostración.

Determinaremos por recurrencia elementos de $S(A, X)$,

$$S^0, S^1, S^2, \ldots, S^k, \ldots,$$

tales que se verifique:

$$\left\{ \begin{array}{l} A - X^p S^0 \text{ sea un polinomio de grado menor o igual que } p-1. \\ C S^k - X^p S^{k+1} \text{ sea un polinomio de grado menor o igual que } p-1. \end{array} \right. \quad (1)$$

No cabe duda de que existen y están determinados de manera única estos elementos de $S(A, X)$.

Pongamos

$$S^k = s_0^k + s_1^k X + s_2^k X^2 + \ldots$$

Probaremos que las series

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_n^k$$

son absolutamente sumables en A. También veremos que la serie

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} s_n^k \right) X^n$$

pertenece a $S(A, X)$.

Una vez probado esto, la existencia de S que verifique

$$A = (X^p - C) S + R$$

es trivial, pues sumando las $k + 1$ igualdades de (1) se obtiene que

$$A - X^p (S^0 + S^1 + \dots + S^{k+1}) + C (S^0 + S^1 + \dots + S^k)$$

es un polinomio de grado menor o igual que $p - 1$.

Como los coeficientes de

$$S^0 + S^1 + \dots + S^k$$

tienden en la topología de A hacia los de S, se deduce fácilmente que los coeficientes de

$$A - X^p (S^0 + S^1 + \dots + S^{k+1}) + \dots + S^k)$$

tienden todos a un valor que es el correspondiente coeficiente de $A - X^p S + C S$, y por ser éstos a partir del de X^p nulos, su límite no puede ser más que cero. Así, pues,

$$A = (X^p - C) S + R,$$

donde R es un polinomio de grado menor o igual que $p - 1$.

c) Cálculo de los s_n^k.

Las ecuaciones (1) proporcionan las igualdades

$$s_n^0 = a_{p+n}$$

$$s_n^{k+1} = s_0^k c_{p+n} + s_1^k c_{p+n-1} + \dots + s^k_{p+n} c_0,$$

de las que pueden obtenerse los s_n^k en función de los a_j y los c_j coeficientes del desarrollo de C.

Con una notación obvia puede escribirse:

$$\begin{bmatrix} s_0^{k+1} \\ s_1^{k+1} \\ s_2^{k+1} \\ \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_p & c_{p-1} & c_{p-2} & \dots\dots & c_0 & 0 & \dots\dots \\ c_{p+1} & c_p & c_{p-1} & \dots\dots & c_1 & c_0 & \dots\dots \\ c_{p+2} & c_{p+1} & c_p & \dots\dots & c_2 & c_1 & \dots\dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0^k \\ s_1^k \\ s_2^k \\ \cdot \end{bmatrix}$$

Si ponemos

$$c_{-1} = c_{-2} = \dots = 0,$$

la matriz infinita está formada por los elementos a_{nm} con $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$. Siendo $a_{nm} = c_{p+n-m}$.

Entonces con el sentido obvio, pues todas las sumas consideradas son finitas, se tiene para cada k

$$[s_i^k] = \mathrm{T}^k [a_{p+i}],$$

donde T es la matriz antes considerada, y $[s_i^k]$ y $[a_{p+i}]$ son los vectores fila obtenidos variando i.

Así, pues, s^k_n es un polinomio en las variables c_i y a_j lineal en las a_j. Tratamos de expresarlos explícitamente. Para ello debemos obtener la expresión de los términos de T^k.

Se tiene así si $k \geqslant 1$:

$$s_n^k = \sum_{h=0}^{\infty} a_{h+p} \Big(\sum_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} a_{n\, i_1} a_{i_1 i_2} \dots\dots a_{i_{k-1} h} \Big) =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} a_{h+p} \Big(\sum_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}} c_{p+n-i_1} c_{p+i_1-i_2} \dots\dots c_{p+i_{k-1}-h} \Big) =$$

$$= \sum_{\substack{j_0 + j_1 + \dots + j_k = n \\ 0 \leqq j_0 < +\infty \\ -p \leqq j_1 < +\infty}} c_{p+j_1} c_{p+j_2} \dots\dots c_{p+j_k} a_{p+j_0} = \sum_{\substack{\Sigma \nu = n + kp \\ 0 \leqq \nu_i < +\infty}} c_{\nu_1} c_{\nu_2} \dots c_{\nu_k} a_{p+\nu_0}.$$

Los c_k son los coeficientes de $-(1/\mathrm{B}_2)\,\mathrm{B}_1$, pero

$$\mathrm{B}_1 = b_0 + b_1 \mathrm{X} + \dots + b_{p-1} \mathrm{X}^{p-1},$$

donde los coeficientes pertenecen todos al ideal maximal de A, por tanto todos los c_k pertenecen a este ideal.

Más aún, si

$$-(1/\mathrm{B}_2) = \Sigma\, d_n \mathrm{X}^n$$

se tiene

$$c_\nu = b_0 d_\nu + b_1 d_{\nu-1} + \dots + b_{p-1} d_{\nu-p+1},$$

donde se ha puesto

$$d_{-1} = d_{-2} = \dots = 0.$$

Sustituyendo esto en la expresión encontrada antes de $s^k{}_n$, se obtiene

$$s_n^k = \sum_{\substack{\Sigma \nu = n + kp \\ 0 \leq \nu_k < +\infty}} a_{\nu_0 + p} \left(\sum_{r_1 = 0}^{p-1} b_{r_1} d_{\nu_1 - r_1} \right) \left(\sum_{r_2 = 0}^{p-1} b_{r_2} d_{\nu_2 - r_2} \right) \cdots \left(\sum_{r_k = 0}^{p-1} b_{r_k} d_{\nu_k - r_k} \right)$$

Pondremos ahora

$$r = (r_1, r_2, \ldots, r_k), \; \nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k).$$

En cambio, un subíndice r_0, ν_0 indicará un número simplemente. Diremos que $r \leqslant \nu$ si

$$r_i \leqslant \nu_i \quad \text{y} \quad \Sigma \nu = \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k.$$

Además,

$$b_\nu = \prod_{i=1}^{k} b_{\nu_i} \qquad d_\mu = \prod_{i=1}^{k} d_{\mu_i} \text{ etc.}$$

Entonces se tiene

$$s_n^k = \sum_{\substack{\nu_0 + \Sigma \nu + \Sigma \mu = n + kp \\ \nu \leq (p-1, p-1, \ldots, p-1)}} a_{\nu_0 + p} \; b_\nu \; d_\mu$$

Es interesante saber cuántos sumandos aparecen en esta suma con un mismo ν; es decir, cuántas soluciones existen de la ecuación

$$\nu_0 + \Sigma \mu = n + k p - \Sigma \nu.$$

El problema equivale a saber cuántas soluciones enteras positivas o nulas tiene la ecuación

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_h = \text{A}.$$

Será el coeficiente de z^{A} en el desarrollo de

$$(1 + z + z + \ldots)^h = (1 - z)^{-h}.$$

En definitiva $\binom{h + A - 1}{h - 1}$. En nuestro caso es

$$h = k + 1 \quad \text{y} \quad A = n + k\,p - \Sigma\, \nu,$$

luego el número de términos deseado es

$$\binom{n + k\,(p + 1) - \Sigma\, \nu}{k}$$

d) Acotación de los s^k_n.

Puesto que $-(1/B_2)$ y A son series de S (A, X) existe un número real positivo $r < +\infty$ tal que

$$\sup_q \overline{\lim} \sqrt[n]{q\,(d_n)} < r \quad \text{y} \quad \sup_q \overline{\lim} \sqrt[n]{q\,(a_n)} < r,$$

el supremo en q se toma sobre el conjunto de todas las seminormas multiplicativas que definen la topología de A.

Por tanto, para cada q existe un $M > 0$ que verifica

$$q\,(d_n) \leqslant M\, r^n \quad \text{y} \quad q\,(a_n) \leqslant M\, r^n. \tag{3}$$

De aquí, y usando la igualdad (2), se obtiene

$$q\,(s_n^k) \leqslant \sum_{\substack{\nu_0 + \Sigma \nu + \Sigma \mu = n + k p \\ \nu \leqq (p-1, \ldots p-1)}} M^{k+1}\, r^{\Sigma \mu + \nu_0 + p}\, q\,(b_\nu),$$

y teniendo en cuenta el número de sumandos con un mismo ν,

$$q\,(s_n^k) \leqslant \sum_{\nu \leqq (p-1, \ldots p-1)} M^{k+1} \binom{n + k\,(p + 1) - \Sigma\, \nu}{k} r^{n + (k+1)p - \Sigma \nu}\, q\,(b_\nu),$$

Los $b_0, b_1, \ldots, b_{p-1}$ dan lugar a p funciones enteras

$$\sum_{n \geqq 0} q\,(b_i^n)\, z^n,$$

pues $b_i \in \mathcal{M}$. Entonces

$$\sum_{n \leqq 0} \{ \sup_i q(b_i{}^n) \} z^n$$

es también entera; llamemos a los coeficientes de esta última β_n. Entonces $q(b_i{}^n) \leqslant \beta_n$.

Poniendo $\Sigma \nu = h$ se tiene

$$q(s_n{}^k) \leqslant \sum_{h=0}^{k(p-1)} M^{k+1} \binom{t}{k} r^{t'} \Big(\sum_{\substack{\Sigma \nu = h \\ \nu \leqq (p-1, \dots p-1)}} q(b_\nu) \Big)$$

donde hemos puesto

$$t = n + k(p+1) - h, \quad t' = n + (k+1)p - h.$$

Pero

$$\sum_{\substack{\Sigma \nu = h \\ \nu \leqq (p-1, \dots p-1)}} q(b_\nu) = \sum_{\substack{\Sigma \nu = h \\ \nu \leqq (p-1, \dots p-1)}} q(b_{\nu_1} b_{\nu_2} \dots b_{\nu_k})$$

Cada ν_i es $0, 1, \dots,$ o $p-1$; n_0 de ellos son iguales a 0, n_1 de ellos a $1, \dots, n_{p-1}$ de ellos valen $p-1$; como en total hay k de ellos, se tiene

$$n_0 + n_1 + \dots + n_{p-1} = k.$$

Además,

$$\Sigma \nu = 0\, n_0 + 1\, n_1 + \dots + (p-1)\, n_{p-1} = h.$$

Pero dos ν son distintos, incluso aunque sólo se diferencien en el orden. De todo esto obtenemos:

$$\sum_{\substack{\Sigma \nu = h \\ \nu \leqq (p-1, \dots, p-1)}} q(b_\nu) \leqq \sum_{\substack{n_0 + n_1 + \dots + n_{p-1} = k \\ 0\, n_0 + 1\, n_1 + \dots + (p-1)\, n_{p-1} = h}} q(b_0^{n_0})\, q(b_1^{n_1}) \dots$$

$$\ldots q\,(b_{p-1}^{n_p-1})\ \frac{k!}{n_0!\,n_1!\ldots n_{p-1}!} \leq \sum_{\substack{n_0+\ldots+n_{p-1}=k\\ 0\,n_0+\ldots+(p-1)\,n_{p-1}=h}} \frac{k!}{n_1!\ldots n_{p-1}!}\,\beta_{n_0}\ldots\beta_{n_{p-1}} \leq$$

$$\leq k! \sum_{\substack{n_0+\ldots+n_{p-1}=k\\ 0\,n_0+\ldots+(p-1)\,n_{p-1}=h}} \frac{\beta_{n_0}}{n_0!}\,\frac{\beta_{n_1}}{n_1!}\ldots\frac{\beta_{n_{p-1}}}{n_{p-1}!}$$

Como los β son positivos,

$$\sum_{\substack{\Sigma\nu=h\\ \nu\leq(p-1\,\ldots\,p-1)}} q\,(b_\nu) \leq k! \sum_{n_0+\ldots+n_{p-1}=k} \frac{\beta_{n_0}}{n_0!}\cdots\frac{\beta_{n_{p-1}}}{n_{p-1}!}$$

Llamemos a estos números γ_k. Entonces $\gamma_k/k!$ es justamente el coeficiente de z_k en

$$(\Sigma\,\beta_n/n!\,z^n)^p.$$

Probaremos que $\Sigma\,\gamma_k\,z^k$ es entera. Supongámoslo probado. Se tendrá entonces

$$q\,(s_n{}^k) \leq \sum_{h=0}^{k\,(p-1)} \mathrm{M}^{k+1}\,r^{t'} \binom{t}{k}\,\gamma_k\,.$$

Suponiendo ahora $r>1$, lo que es posible, pues r sólo está sujeto a verificar acotaciones en un solo sentido, se tiene para

$$0 \leqslant h \leqslant k\,(p-1) \quad \text{y} \quad r^{t'}\binom{t}{k} \leqslant r^{t'}\,2^t = (r)^{n+(k+1)\,p}\,(1/2\,r)^h\,2^{n+k\,(p+1)}.$$

Sea

$$\mathrm{R} = (2\,r)/(2\,r-1) = \Sigma\,(1/2\,r)^h.$$

Se tiene

$$q\,(s_n{}^k) \leqslant \mathrm{M}^{k+1}\,r^{n+(k+1)\,p}\,.\,2^{n+k\,(p+1)}\,\mathrm{R}\,\gamma_k =$$

$$= \mathrm{R}\,\mathrm{M}\,r^p\,((2\,\mathrm{M})\,(2\,r)^p)^k\,(2\,r)^n\,\gamma_k.$$

Entonces la serie $\sum_k s_n^k$ es absolutamente convergente, pues

$$\sum_{k \geq 0} q(s_n^k) \leqslant \mathrm{R\,M}\, r^p (2r)^n \sum_{k=0}^{n} ((2\,\mathrm{M})(2r^p))^k \gamma_k.$$

Como $\Sigma\, \gamma_k z^k$ es entera, la suma anterior en k es finita. Sea L esta suma que no depende de n, obtenemos

$$\sum_k q(s_n^k) \leqslant \mathrm{R\,M}\, r^p (2r)^n\, \mathrm{L}.$$

Sea entonces

$$s_n = \sum_k s_n^k;$$

tenemos la acotación

$$q(s_n) \leqslant \mathrm{R\,M}\, r^p (2r)^n\, \mathrm{L}.$$

De aquí que

$$\overline{\lim}\, \sqrt[n]{q(s_n)} \leqslant 2r,$$

y por tanto

$$\sup_q \overline{\lim}\, \sqrt[n]{q(s_n)} \leqslant 2r,$$

ya que r es independiente de q.

Esto es la serie

$$\Sigma\, s_n \mathrm{X}^n \in \mathrm{S}(\mathrm{A}, \mathrm{X}).$$

e) Demostración de que la serie $\Sigma\, \gamma_k z^k$ es entera.

Es decir, probaremos el siguiente enunciado: sea $\Sigma\, \beta_n \mathrm{X}^n$ entera y sea

$$\Sigma\, \gamma_k/k!\, \mathrm{X}^k = (\Sigma\, \beta_k/k!\, \mathrm{X}^k)^p.$$

Entonces $\Sigma\, \gamma_k x^k$ es entera.

Consideremos el orden y el tipo de la función entera

$$\Sigma\, \beta_k/k\,!\; X^k.$$

El orden será

$$\varepsilon = \overline{\lim}\, (\log n)/(\log (1/\sqrt[n]{\beta_n/n\,!})) = \lim\, (\log n)/((\log \sqrt[n]{n\,!} - \log \sqrt[n]{\beta_n}).$$

Como

$$\lim \sqrt[n]{\beta_n} = 0$$

se tiene

$$\rho \leqslant \overline{\lim}\, (\log n) \,/\, \log (\sqrt[n]{n\,!}) = 1.$$

El tipo σ está determinado por

$$\overline{\lim}\, n^{1/\rho} \sqrt[n]{\beta_n/n\,!} = (e\, \rho\, \sigma)^{1/\rho}.$$

Por tanto, si $\rho = 1$, se tiene

$$e\, \sigma = \overline{\lim}\, n \sqrt[n]{\beta_n/n\,!} \leqslant \lim \sqrt[n]{\beta_n}/e^{-1} = 0.$$

Sea entonces

$$M(r) = \sup_{|r| = z} |\, \Sigma\, \beta_n/n\,!\; z^n\, |.$$

Para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $M(r) < e^{\varepsilon r}$ siempre que $r > R(\varepsilon)$. Entonces $M(r)^p < e^{p \varepsilon r}$. Por tanto,

$$(\Sigma\, \beta_n/n\,!\; z^n)^p$$

de orden $\leqslant 1$ y si es de orden 1 es de tipo cero.

Así, si

$$(\Sigma\, \beta_n/n!\, z^n)^p = \Sigma\, \gamma^k/k!\, z^k$$

y suponemos que esta función es de orden 1, se tiene

$$\lim n \sqrt{\gamma_n/n!} = 0.$$

Como sabemos que

$$\lim \sqrt[n]{n!}/(n\, e^{-1}) = 1$$

se tiene en este caso

$$\lim \sqrt[n]{\gamma_n} = 0,$$

que es lo que queríamos probar.

Si suponemos, en cambio, que el orden de $\Sigma\, \gamma_k/k!\, z^k$ es menor estrictamente que $\mu < 1$, obtenemos

$$\overline{\lim}\, (\log n)/(\log (\sqrt[n]{\gamma_n/n!})^{-1}) < \mu.$$

De aquí que a partir de un n,

$$\log n < \mu \log \sqrt[n]{n!/\gamma_n}.$$

Esto es,

$$n^{1/\mu} < \sqrt[n]{n!/\gamma_n},$$

lo que proporciona

$$\sqrt[n]{\gamma_n} < \sqrt[n]{n!}/n^{1/\mu} \rightarrow 0,$$

pues $\mu < 1$. Esto es, de nuevo la serie pedida es entera.

Unicidad

Basta probar la unicidad de las series S y R que verifican

$$A = (X^p - C)\,S + R.$$

Supongamos que hubiese dos de ellas:

$$A = (X^p - C)\,S_1 + R_1 \quad \text{y} \quad A = (X^p - C)\,S_2 + R_2,$$

entonces

$$(X^p - C)\,(S_1 - S_2) = R_2 - R_1.$$

Aplicando la existencia ya probada, existe un polinomio P de grado menor o igual a $p - 1$ y una serie H tal que

$$X^p = (X^p - C)\,H + P.$$

Pasando a las funciones analíticas asociadas, mediante φ se obtiene

$$z^p = z^p\,h(z) + p(z),$$

donde $p(z)$ es un polinomio de grado menor o igual que $p - 1$. Así, pues, $p = 0$ y $h = 1$. Esto en los coeficientes de P son todos no invertibles y H tiene una inversa K en S (A, X). Por tanto,

$$(X^p - C) = (X^p - P)\,K.$$

La relación entre los S y los R queda ahora en la forma

$$(X^p - P)\,(S_1 - S_2)\,K = R_2 - R_1.$$

Probaremos seguidamente que si la serie

$$\Sigma\, b_n X^n \in S\,(A, X)$$

y los

$$c_0, c_1, \ldots, c_{p-1}$$

son no invertibles, la ecuación

$$(a_0 + a_1 X + \dots + a_{p-1} X^{p-1}) = (c_0 + c_1 X + \dots + c_{p-1} X^{p-1} + X^p) (\Sigma\, b_n X^n)$$

no tiene más solución que

$$b_0 = b_1 = \dots = b_n = \dots = 0$$

y por tanto,

$$a_0 = a_1 = \dots = a_{p-1} = 0.$$

Aplicando esto a nuestro caso, se obtiene

$$K (S_1 - S_2) = 0 \quad \text{y} \quad R_2 - R_1 = 0.$$

Esto es, $R_1 = R_2$, y puesto que K es invertible, $S_1 = S_2$. El teorema quedará así probado.

Igualando los coeficientes de potencias análogas, en la ecuación se obtiene

$$b_k = \sum_{n=0}^{p-1} c'_n\, b_{p+k-n},$$

donde hemos puesto $c'_k = - c_k$.

Tenemos entonces que probar que $b_0 = 0$. La demostración de que los demás b_n son nulos se obtiene de la misma manera.

Sabemos que

$$b_0 = \sum_{n=0}^{p-1} c'_n\, b_{p-n} = \sum_{n_1=0}^{p-1} c'_{n_1} \sum_{n_2=0}^{p-1} c'_{n_2}\, b_{2p-n_1-n_2} = \dots$$

$$\dots = \sum_{n_i=0}^{p-1} c'_{n_1} c'_{n_2} \dots c'_{n_h}\, b_{hp-(n_1+n_2+\dots+n_h)}\,.$$

Si $b_0 \neq 0$, existe una seminorma q tal que $q\,(b_0) \neq 0$. Por ser

$$c'_0,\ c'_1,\ \dots,\ c'_{p-1}$$

no invertibles, existe una función entera con coeficientes positivos $\Sigma\, \delta_n\, z^n$ tal que $q\,(c_i'^n) < \delta_n$ para todo n y para todo

$$i = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Tratemos de acotar ahora $q\,(b_0)$; el razonamiento es análogo al usado antes en d):

$$b_0 = \sum_{k=0}^{h(p-1)} b_{hp-k} \left(\sum_{\Sigma \nu = k} c'_{n_1}\, c'_{n_2} \ldots c'_{n_h} \right);$$

además

$$\sum_{\Sigma n = k} c'_n\, c'_n \ldots c'_n = \sum_{\substack{\Sigma m = k \\ \Sigma i\, m_i = k}} (h\,!/(m_0\,! \ldots m_{p-1}\,!))\; c'^{m_0}_0\, c'^{m_1}_1 \ldots c'^{m_{p-1}}_{p-1}$$

Así, pues,

$$q\left(\sum_{\Sigma n = k} c'_n\, c'_n \ldots c'_n\right) \leqslant \sum_{\Sigma m = h} (h\,!/(m_0\,! \ldots m_{p-1}\,!))\; q\,(c'^{m_0}_0) \ldots q\,(c'^{m_{p-1}}_{p-1}) \leqq \gamma_h;$$

donde, como ya vimos en e), $\Sigma\, \gamma_n\, z^n$ es entera.

Como

$$\Sigma\, b_n\, X^n \in S\,(A, X)$$

existe $r < +\infty$ tal que $q\,(b_h) < M\, r^h$ y podemos suponer $r < 1$, pues si se verifica sólo para $r \geqslant 1$, tomamos $R > r$ y se tiene

$$q\,(b_h/R^h) < M\,(r/R)^h$$

y bastaría sustituir en la ecuación propuesta al principio X por X/R y multiplicar por R^p para obtener

$$a_0\, R^p + \ldots + a_{p-1}\, R\, X^{p-1} = (c_0\, R^p + \ldots + X^p)\,(\Sigma\, h_h/R^h\, X^h).$$

Tenemos entonces

$$q\,(b_0) \leqslant \sum_{k=0}^{h(p-1)} M\, r^{hp-k}\, \gamma_k = L\, M\, r^{hp},$$

donde $L = \gamma_k/r^k$. Como esto vale para todo k, se obtiene $q\,(b_0) = 0$.

3. Consecuencias del teorema de preparación

Sea A un álgebra de Abel y anillo de integridad. Sea $\Omega = \varphi^{-1}(G)$ una región de A; $f : \Omega \to A$ una función analítica, y $g : G \to \mathbb{C}$ la función asociada. Si g tiene un cero simple $\alpha \in G$, $g(\alpha)' = '0$, existe $a \in \Omega$ tal que $\varphi(a) = \alpha$ y $f(a) = 0$.

En efecto, desarrollemos f en α:

$$f(X) = \Sigma\, a_n (X - \alpha)^n.$$

Como

$$g(z) = \Sigma\, \varphi(a_n)(z - \alpha)^n.$$

se tiene

$$\varphi(a_1) \neq 0 \quad \text{y} \quad \varphi(a_0) = 0.$$

Dividamos X por la serie $\Sigma\, a_n X^n$, se obtiene

$$X = Q(\Sigma\, a_n X^n) + r_0;$$

pasando a las funciones asociadas resulta

$$z = q(z)(\Sigma\, \varphi(a_n) z^n) + \varphi(r_0),$$

luego

$$\varphi(r_0) = 0.$$

Sustituyamos ahora r_0 en lugar de la X en la igualdad obtenida por división:

$$Q(r_0)(\Sigma\, a_n r_{n0}) = 0.$$

Pero $Q(r_0)$ no puede ser cero, pues su primer coeficiente es invertible. Como A es de integridad, r_0 es cero de $\Sigma\, a_n X^n$.

Supongamos que siga siendo A anillo de integridad; f sea como antes, pero g tenga en α un cero de orden n.

Desarrollemos f:

$$f(X) = \Sigma a_n (X - \alpha)^n.$$

Apliquemos φ:

$$g(z) = \Sigma \varphi(a_n)(z - \alpha)^n.$$

Por tanto,

$$\varphi(a_0) = \varphi(a_1) = \dots = \varphi(a_{n-1}) = 0 \quad \text{y} \quad \varphi(a_n) \neq 0.$$

Si dividimos X^n por $S = \Sigma a_n X^n$, obtenemos

$$X^n = Q\,S + r_0 + r_1 X + \dots + r_{n-1} X^{n-1}.$$

Aplicando φ se obtiene que

$$\varphi(r_0) = \varphi(r_1) = \dots = \varphi(r_{n-1}) = 0$$

y que $\varphi(Q)$ no tiene cero en el origen.

Así, cualquier cero de

$$X^n - r_{n-1} X^{n-1} - \dots - r_0$$

es cero de $S(X)$. Los ceros de f serán, pues, éstos más α.

De aquí se obtiene fácilmente la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 4. — *Un álgebra de Abel, anillo de integridad, es cerrada si y sólo si todo polinomio mónico de grado* n *tiene justamente* n *raíces.*

También se obtiene la siguiente:

PROPOSICIÓN.—*Si A es un álgebra de Abel es un anillo henseliano.*

Esto es consecuencia de la nota anterior tomando para f un polinomio. No es necesario aquí suponer que A sea anillo de integridad. Para más detalles puede verse M. Raynaud.

Sean A y B dos álgebras de abel; diremos que $f : A \to B$ es un morfismo si es homomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras y continua.

Llamaremos subálgebra de Abel de A a una subálgebra B de A que con la topología inducida sea un álgebra de Abel. En este caso la inyección $i : B \to A$ es un morfismo.

Sea A un álgebra de Abel. Buscamos un álgebra de Abel cerrada $\bar{A}$ y un morfismo $\pi : A \to \bar{A}$ que verifique la propiedad siguiente. Cada vez que B sea un álgebra de Abel cerrada y $f : A \to B$ un morfismo, existe un morfismo $g : \bar{A} \to B$ tal que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bar{A} \arrow[dr, dashed, "g"] & \\ A \arrow[u, "\pi"] \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

A una solución $\bar{A}$ de este problema de aplicación universal la llamaremos cierre analítico del álgebra A.

Puede plantearse este problema considerando sólo álgebras de Abel que sean anillos de integridad. En este caso parece que la solución estaría en darle una topología adecuada al anillo B cierre entero de A en un cuerpo K que sea el cierre algebraico del cuerpo de los cocientes de A, K. En esta dirección se dispone de un resultado parcial (véase Arias de Reyna, *Prolongación de seminormas multiplicativas*). En todo caso quedan problemas abiertos: el de la existencia de álgebras de Abel cerradas no triviales (es decir, distintas de $\mathbb{C}$) y el de encontrar el cierre analítico, si es que existe, de un álgebra de Abel.

Bibliografía

Arias de Reyna, J.: *Diferenciación en espacios vectoriales topológicos*. Tesis doctoral. Sevilla (1973).

— — *Prolongación de seminormas sultiplicativas*. Comunicación presentada en las II Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas (1973).

— — *Algebras de Abel e integración en álgebras de Abel*. «Rev. de la Real Academia de Ciencias», tomo 68, págs. 495-545 (1974).

Bourbaki, N.: *Topologie générale*. Chap. 2 y 3, 3.ª édition. Hermann, París (1960).

BOURBAKI, N.: *Topologie générale*. Chap. 9, nouvelle édition. Hermann. París (1968).

— — *Algèbre commutative*. Chap. 1 a 7. Hermman. París.

CARTAN, H.: *Seminaire Henri Cartan* 1951-52, 1953-54. W. A. Benjamin, Inc. (1967).

MICHAEL, R. A.: *Locally multiplicatively-convex topological Algebras*. Memoirs of the «Amer. Math. Soc.», number 11, Providence R. I. (1952).

PÓLYA, G. y SZEGÖ, G.: *Aufgaben und Lehrsätze aus des Analyses*, 3.ª ed., 2 vols., Springer, Berlín (1964).

RICKART, C.: *General theory of Banach Algebras*. D. Van Nostrand, New York (1960).

RAYNAUD, M.: *Anneaux Locaux Henséliens*. «Lectures Notes», número 169. Springer Verlag (1970).