DEFINICION Y ESTUDIO DE UNA FUNCION INDEFINIDAMENTE DIFERENCIABLE DE SOPORTE COMPACTO

J. Arias de Reyna Martínez

Recibido: 5 noviembre 1980

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO CORRESPONDIENTE D. ANTONIO DE CASTRO BRZEZICKY

1. Introducción

La existencia de funciones indefinidamente diferenciables de soporte compacto definidas en $\mathbb{R}$ es un hecho elemental pero de consecuencias importantes. Las funciones de esta naturaleza suelen construirse a partir del ejemplo de Cauchy, y por esto sus derivadas sucesivas son difíciles de manejar. Este problema ha sido el que nos ha llevado a definir la función que estudiamos en este trabajo.

Al considerar la figura 1 (imagen de una función de esta clase y de su derivada), nos surgió la siguiente cuestión:

¿Existe una función $\P \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ tal que:

a) $\operatorname{sop}(\P) = [-1, 1]$.

b) $\P(t) > 0$ para $-1 < t < 1$.

c) $\P(0) = 1$.

d) Existe una constante $k > 0$ tal que, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$\P'(t) = k[\P(2t+1) - \P(2t-1)]\ ?$$

Es clara la interpretación geométrica de la cuestión.

Esta idea intuitiva se revela acertada y hemos conseguido demostrar que existe una única función $\P$ que cumple las condiciones anteriores. Resulta además que la constante k que aparece en d) es necesariamente igual a 2.

Vimos también que la función ¶ tiene otras propiedades importantes, como son su interpretación como una probabilidad (teorema 3), el constituir con sus trasladadas una partición de la unidad (teorema 5), la forma tan sencilla de sus derivadas sucesivas (teorema 4) y, la más importante de todas, que no siendo una función racional, sus valores en todos los puntos diádicos son números racionales que pueden calcularse efectivamente. Por esto y por estar sus derivadas tan estrechamente relacionadas con la función, se deduce que no sólo la función sino también todas sus derivadas pueden calcularse exactamente en los puntos diádicos.

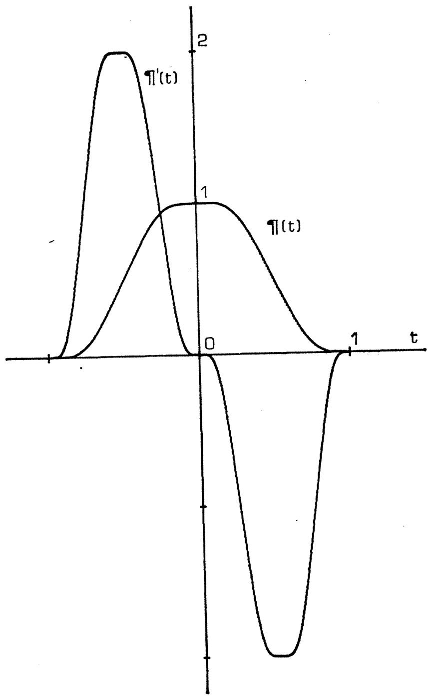

Fig. 1.

La única referencia que conocemos de esta función se encuentra en un artículo de Jessen y Wintner (1935) en el que aparece definida por su transformada de Fourier, como ejemplo de función indefinidamente derivable, sin estudiar ninguna de sus propiedades.

2. Existencia y unicidad

TEOREMA 1.—*Existe una única función* $\P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *indefinidamente diferenciable y de soporte compacto tal que:*

a) *Sop* $(\P) = [-1, 1]$.

b) $\P(t) > 0$ *para* $-1 < t < 1$.

c) $\P(0) = 1$.

d) *Existe una constante* $k > 0$ *tal que para todo* $t \in \mathbb{R}$

$$\P'(t) = k\,[\,\P(2t+1) - \P(2t-1)\,],$$

Siendo la constante k *que aparece en d) necesariamente igual a 2.*

DEMOSTRACIÓN.—En primer lugar, suponiendo la existencia de $\P$, vamos a probar que $k = 2$ y $\P$ está determinada de manera única.

Puesto que $\P \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ su transformada de Fourier es una función entera

$$\hat{\P}(z) = \int \P(t)\, e^{-2\pi i t z}\, dt \tag{1}$$

Además las transformadas de $\P'(t)$, $\P(2t+1)$ y $\P(2t-1)$ son

$$2\pi i z\, \hat{\P}(z), \quad e^{\pi i z}\, \hat{\P}(z/2), \quad e^{-\pi i z}\, \hat{\P}(z/2)$$

respectivamente. La condición d) se traduce pues en

$$\hat{\P}(z) = \frac{k}{2}\, \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z}\, \hat{\P}(z/2) \tag{2}$$

Usando reiteradamente esta relación se obtiene

$$\hat{\P}(z) = (k/2)^n \left[\prod_{h=0}^{n} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\pi z}{2^h}}{\dfrac{\pi z}{2^h}} \right] \hat{\P}\left(\frac{z}{2^{n+1}} \right) \tag{3}$$

Las condiciones a) y b) implican que $\hat{\P}(0) = \int \P(t)\, dt > 0$ así que tomando límites se obtiene que $k = 2$ y

$$\hat{\P}(z) = \hat{\P}(0) \prod_{h=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} \dfrac{\pi z}{2^h}}{\dfrac{\pi z}{2^h}} \tag{4}$$

Si existe una solución a nuestro problema será única, pues al ser $\P$ de decrecimiento rápido, por el teorema de inversión de Fourier,

$$\P(t) = \int \hat{\P}(x)\, e^{2\pi i t x}\, dx \tag{5}$$

y la condición c) determinará el valor de $\hat{\P}(0)$ que es lo que queda para determinar $\P$.

Veremos más adelante que, para que se verifique c), debemos poner $\hat{\P}(0) = 1$, por lo que en lo que sigue llamaremos $\hat{\P}$ a la función definida por (4) poniendo $\hat{\P}(0) = 1$.

Pasamos ahora a probar la existencia de $\P$. Partimos de la función $\hat{\P}$ definida por (4). Es claro que $\hat{\P}$ es una función entera pues el producto converge uniformemente en compactos. La fórmula (2) puede usarse para obtener el desarrollo en serie de potencias

$$\hat{\P}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{(2k)!} (2\pi z)^{2k} \tag{6}$$

donde los c_k son números racionales determinados por la relación de recurrencia

$$(2k+1)\, 2^{2k} c_k = \sum_{h=0}^{k} \binom{2k+1}{2h} c_h \tag{7}$$

que prueba que todos los c_k son positivos. En general

$$c_k = \frac{F_k}{(2k+1)(2k-1)\ldots 1} \prod_{n=1}^{k} (2^{2n}-1)^{-1} \tag{8}$$

donde los F_k son naturales, $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_2 = 19$, $F_3 = 2\,915$, $F_4 = 2\,788\,989$.

Teniendo en cuenta

$$\frac{\operatorname{sen} z}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\cos \frac{z}{2^n} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2} \right)$$

se obtiene

$$\hat{\P}(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(\cos \frac{\pi z}{2^m} \right)^m = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2} \right)^{1 + v_2(m)} \tag{9}$$

donde $v_2(m)$ es el mayor exponente tal que $2^{v_2(m)}$ divide a m.

Es claro que $\hat{\P}$ restringida a $\mathbb{R}$ es indefinidamente diferenciable. Vamos a probar que es de decrecimiento rápido.

Designemos por $f(x) = (\operatorname{sen} x)/x$, para todo $x \in \mathbb{R}^*$. Entonces $|f(x)| \leqslant 1$ y $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$ y se tiene, para todo n,

$$|x^n \hat{\P}(x)| = \left| x^n \prod_{h=0}^{\infty} f(\pi x / 2^h) \right| \leqq x^n \left| \prod_{h=0}^{n-1} f(\pi x / 2^h) \right| \leqq 2^{\binom{n}{2}} \pi^{-n}$$

Además es fácil ver que existe una constante $M_r > 0$ para cada $r \in N$ tal que $|\partial^r f(x)| \leqslant M_r$, por lo que

$$|\partial^r f(\pi x / 2^h)| \leqq \pi^r 2^{-hr} M_r,$$

Usando ahora la regla de derivación de un producto infinito y la misma idea que en la acotación de $|x^n \hat{\P}(x)|$ se obtiene

$$\begin{aligned} &|x^n \partial^r \P(x)| \leqq \\ &\leqq \sum_{S} \frac{r!}{s_1! \dots s_t!} \sum_{H} \left| \prod_{i=1}^{t} \partial^{s_i} f(\pi x / 2^h) \right| \left| x^n \prod_{h \neq h_i} f(\pi x / 2^h) \right| \leqq \\ &\leqq \sum_{S} \frac{r!}{s_1! \dots s_t!} M_{s_1} \dots M_{s_t} \left(\sum_{H} \pi^r 2^{-s_1 h_1 - \dots - s_t h_t} \right) 2^{\binom{n+t}{2}} \pi^{-n} < \infty \end{aligned}$$

donde la suma extendida a S se refiere a los conjuntos $\{s_1 \dots s_t\}$ de naturales tales que $s_1 + \dots + s_t = r$ y $s_i \geqslant 1$; y la sumatoria en H a todos los conjuntos $\{h_1, \dots, h_t\}$ de naturales distintos entre sí.

Habiendo probado que $\hat{¶}$ es de decrecimiento rápido podemos definir ¶ por medio de la ecuación (5). Se obtiene así una función indefinidamente diferenciable de decrecimiento rápido. Por verificar $\hat{¶}$ la ecuación (2) para $k = 2$ se obtiene que ¶ verifica d) para $k = 2$. Debemos probar que verifica además a), b) y c), en lugar de usar para esto directamente el teorema de Paley-Wiener, preferimos el siguiente método que proporciona más información.

Definimos μ_m como la medida de Radon en $\mathbb{R}$ cuya transformada de Fourier vale

$$\mathcal{F}(\mu_m) = \prod_{k=1}^{m} \left(\cos \frac{\pi x}{2^k} \right)^k \tag{10}$$

puesto que

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2} \delta_{2^{-k-1}} + \frac{1}{2} \delta_{-2^{-k-1}} \right) = \cos \frac{\pi x}{2^k} \tag{11}$$

μ_m es el producto de convolución

$$\mu_m = \mathop{\ast}_{k=1}^{m} \left(\frac{1}{2} \delta_{2^{-k-1}} + \frac{1}{2} \delta_{-2^{-k-1}} \right)^k \tag{12}$$

donde las potencias deben entenderse también como productos de convolución.

Es claro que $\| \mu_m \| = 1$, $\mu_m \geqslant 0$ y $\operatorname{sop}(\mu_m) \subset [-1, 1]$, esto último debido a que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^{k+1}} = 1,$$

Lema 1.—*La sucesión de medidas μ_m converge para la topología $\sigma(\mathcal{M}_b(\mathbb{R}), C^*(\mathbb{R}))$ hacia la medida ¶ λ que tiene densidad ¶ respecto de la de Lebesgue λ.*

Demostración.—Sea $C^*(\mathbb{R})$ el espacio de Banach de las funciones complejas continuas y acotadas definidas en $\mathbb{R}$. Como las μ_m están en la bola unidad del dual, que es débilmente compacta, existe una medida μ adherente a la sucesión μ_m.

Puesto que $\mathcal{F}(\mu_m) \longrightarrow \mathcal{F}(¶\,\lambda)$ en $C^*(\mathbb{R})$, ha de ser $\mathcal{F}(\mu) =$

$= \mathcal{F}$ (¶ λ); y, por ser $\mathcal{F}$ inyectiva en el espacio de las medidas de Radon acotadas, $\mu =$ ¶ λ. Como existe un único punto adherente, debe ser el límite débil de la sucesión μ_m.

Por ser $\mu_m \longrightarrow$ ¶ λ débilmente se obtiene que ¶ satisface la condición a) y, puesto que ¶ es continua, que ¶ $(x) \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Sabemos que $\int$ ¶ $(t)\, d\, t = \hat{¶}\,(0) = 1$, pero ahora también sabemos que sop (¶) $\subset [-1, 1]$ luego

$$¶\,(0) = \int_{-1}^{0} ¶'\,(t)\,d\,t = \int_{-1}^{0} 2\,(\,¶\,(2\,t+1) - ¶\,(2\,t-1))\,d\,t =$$

$$= 2 \int ¶\,(2\,t+1)\,d\,t = \int ¶\,(u)\,d\,u = 1,$$

y ¶ verifica la condición c).

Por último ¶ verifica b). En efecto, por el mismo razonamiento anterior se tiene, para todo $x \in (-1, 0)$,

$$¶\,(x) = 2 \int_{-1}^{x} ¶\,(2\,t+1)\,d\,t \tag{13}$$

luego ¶ es no decreciente en $(-1, 0)$ [por ser ¶$'\,(x) \geqslant 0$]. Como ¶ es par, se deduce que ¶ $(x) > 0$ implica ¶ $(t) > 0$ para todo $t \in (-x, x)$. Finalmente ¶ $(x) > 0$ implica ¶ $((x-1)/2) > 0$ y por tanto ¶ $(t) > 0$ para $t \in (-1, 1)$.

3. Otras expresiones de la función ¶

Hemos visto dos posibles definiciones de la función ¶: la expresión (5) y la dada por el lema 1. Ahora vamos a obtener otras dos, una como límite puntual de una sucesión de funciones escalonadas y otra mediante una integral. En primer lugar necesitamos algunas definiciones y notaciones.

Sea p_n la sucesión de polinomios definidos por la relación de recurrencia

$$p_0 = 1\,; \quad p_n\,(x) = p_{n-1}\,(x^2)\,(1+x)^n \tag{14}$$

Es fácil ver que

$$p_n(x) = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1 - x^{2^k}}{1 - x} \right) \tag{15}$$

El grado g_n de p_n está determinado por las relaciones

$$g_0 = 0\,; \quad g_n = 2\,g_{n-1} + n \tag{16}$$

y por tanto

$$\frac{g_n}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \ldots + \frac{n}{2^n} \tag{17}$$

Comparando (12) y (14) se tiene que μ_n es la medida que se obtiene sustituyendo en el polinomio

$$2^{-\binom{n+1}{2}} p_n(x)$$

cada potencia x^m por $\delta_{\frac{2m-g_n}{2^{n+1}}}$.

Por último, para cada $n \in \mathrm{N}$, sea $\P_n$ la función escalonada que se obtiene en $2^{-\binom{n+1}{2}} p_n(x)$ sustituyendo cada potencia x^m por la función característica del intervalo

$$\left[\frac{2m - 1 - g_n}{2^{n+1}} , \frac{2m + 1 - g_n}{2^{n+1}} \right]$$

multiplicada por 2^n. Tenemos entonces:

TEOREMA 2.—*$\P$ es el límite de la sucesión de escalonadas* $\P_m$.

DEMOSTRACIÓN.—Basta tener en cuenta que, para una función f característica de intervalo de extremos diádicos, se tiene

$$\lim_{m \to \infty} \mu_m(f) = \lim_{m \to \infty} \int \P_m\, f = \int \P\, f\,.$$

junto con el hecho fácilmente comprobable de que $¶_m$ es monótona no decreciente en $(-1, 0)$ y monótona no creciente en $(0, 1)$ y además $¶_m(0) = 1$.

Es fácil ver que

$$p_{m+1}(x) = p_m(x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{2^{m+1}-1}) \tag{18}$$

Esto proporciona un algoritmo fácil para obtener las $¶_m$ y también prueba que

$$p_m(x) = (1 + x)(1 + x + x^2 + x^3) \ldots (1 + x + \ldots + x^{2^m-1}) \tag{19}$$

y por tanto la interpretación combinatoria siguiente del coeficiente de x^r en $p_m(x)$:

El coeficiente de x^r en $p_m(x)$ es el número de descomposiciones de r, $r = s_1 + s_2 + \ldots + s_m$ tales que $0 \leqslant s_i \leqslant 2^i - 1$.

TEOREMA 3.—*Sea* $\sigma = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \lambda_k$ *la medida definida en* $[0, 1]^N$, *siendo* λ_k *la medida de Lebesgue en* $[0, 1]$. *Para* $-1 \leqslant x \leqslant 0$ *se tiene*

$$¶(x) = \sigma \left\{ (x_k) \mid 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} \leq x + 1 \right\}$$

DEMOSTRACIÓN.—Consideremos en $[-1, 1]^N$ la medida

$$\nu_k = \bigotimes_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \delta_{2^{-m-k}} + \frac{1}{2} \delta_{-2^{-m-k}} \right)$$

$(k = 1, 2, \ldots)$ y designemos la variable en el espacio $[-1, 1]^N$ por $(t_{k,1}, t_{k,2}, \ldots)$.

Sea μ la medida definida en $\{0, 1\}^N$ como producto de la medida que asigna a 0 y 1 peso 1/2.

Entonces $\nu_k = f_k(\mu)$ siendo $f_k : \{0, 1\}^N \longrightarrow [-1, 1]^N$ definida por $f_k(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots) = (t_{k,1}, t_{k,2}, \ldots)$ donde

$$t_{k,m} = 2^{-m-k} \quad \text{si} \quad \varepsilon_m = 1 \quad \text{y} \quad t_{k,m} = -2^{-m-k} \quad \text{si} \quad \varepsilon_m = 0,$$

También es μ la medida imagen de la de Lebesgue en $[0, 1]$ por la aplicación $g : [0, 1] \longrightarrow \{0, 1\}^N$ definida por $g(x) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots)$ si $x = \sum_{m=1}^{\infty} (\varepsilon_m / 2^m)$ con $\varepsilon_m \in \{0, 1\}$. g está definida de manera única sólo en casi todo el espacio $[0, 1]$, pero no hay dificultad en salvar este inconveniente.

Por ser $\P(t)\, d\, t$ límite de las μ_m se tiene, para toda f integrable,

$$\int f(t) \P(t)\, dt = \int f(\Sigma\, t_{k,m})\, d \bigotimes_{k=1}^{\infty} \nu_k .$$

Esta integral, por ser cada ν_k una medida imagen, puede convertirse en una integral sobre $[0, 1]^N$ con respecto a la medida $\sigma = \bigotimes_{k=1}^{\infty} \lambda$.

La relación $f_k \circ g(x_k) = (t_{k,1}, t_{k,2}, \ldots)$ implica $x_k = \sum_{m=1}^{\infty} (\varepsilon_m / 2^m)$ con $\varepsilon_m \in \{0, 1\}$, $t_{k,m} = 2^{-m-k}$ si $\varepsilon_m = 1$ y $t_{k,m} = -2^{-m-k}$ si $\varepsilon_m = 0$, luego

$$\sum_m t_{k,m} = \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m 2^{-m-k} - \left(\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-m-k} - \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon_m 2^{-m-k} \right) =$$
$$= x_k\, 2^{-k+1} - 2^{-k}$$

De esto resulta

$$\int f(t) \P(t)\, dt = \int f\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k+1} - 1 \right) d\sigma$$

Poniendo $f(t) = \chi_{[-1, 2x+1]}(t)$ queda, para $-1 \leqslant x < 0$,

$$\P(x) = \int_{-1 \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k+1} - 1 \leq 2x+1} d\sigma =$$
$$= \int_{0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k} \leq x+1} d\sigma = \tag{20}$$
$$= \sigma \left\{ (x_k) \mid 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} x_k 2^{-k} \leq x + 1 \right\}$$

El resultado puede enunciarse del siguiente modo: $\P(x)$ es la probabilidad de que la suma $\Sigma x_k 2^{-k}$ sea menor o igual que $x + 1$ (siendo $-1 \leqslant x < 0$) donde cada x_k es una variable aleatoria uniformemente distribuida en $[0, 1]$.

4. Propiedades

Teorema 4.—*Sea* $\theta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{s(k)} \P(t - 2k - 1)$ *donde* s (k) *es la suma de las cifras de* k *expresada en el sistema binario. Entonces:*

a) θ *es indefinidamente diferenciable.*

b) $\theta'(t) = 2\theta(2t)$.

c) Para $t \in [-1, 1]$, $\P^{(k)}(t) = 2^{\binom{k+1}{2}} \theta(2^k t + 2^k)$.

Demostración.—La suma que define $\theta(t)$ es localmente finita. Por tanto θ es indefinidamente diferenciable y su derivada es

$$\theta'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{s(k)} 2 [\P(2t - 4k - 2 + 1) - \P(2t - 4k - 2 - 1)] =$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\infty} [(-1)^{s(k)} \P(2t - 2(2k) - 1) - (-1)^{s(k)} \P(2t - 2(2k+1) - 1)]$$

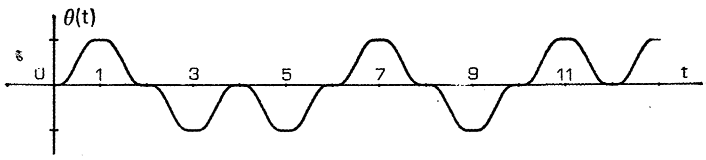

Fig. 2.

y teniendo en cuenta la definición de $s(k)$

$$\theta'(t) = 2\theta(2t) \tag{21}$$

Derivando sucesivamente (21)

$$\theta^{(k)}(t) = 2^{\binom{k+1}{2}} \theta(2^k t) \tag{22}$$

Teniendo en cuenta que si $t \in [-1, 1]$, $¶(t) = \theta(t+1)$ se obtiene

$$¶^{(k)}(t) = 2^{\binom{k+1}{2}} \theta(2^k t + 2^k) \quad \text{si} \quad t \in [-1, 1] \tag{23}$$

Esta relación prueba que en cualquier punto diádico $t = q/2^n$ el desarrollo de Taylor es un polinomio

$$T(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{¶^{(k)}(t)}{k!} x^k \tag{24}$$

y si q es impar el grado de $T(t, x)$ es n.

COROLARIO.—*La función* ¶ *no es analítica en ningún punto del intervalo* $[-1, 1]$.

TEOREMA 5.—*Si* $u > 0$ *y* $t \in \mathbb{R}$ *se tiene*

$$\sum_{k \in Z} ¶(t + uk) = \sum_{k \in Z} \frac{1}{u} \hat{¶}\left(\frac{k}{u}\right) e^{2\pi i k \frac{t}{u}} \tag{25}$$

DEMOSTRACIÓN.—La suma de la izquierda en (25) es localmente finita y por tanto indefinidamente diferenciable; además es claro que es función periódica en t de período u. Por esto admite un desarrollo en serie de Fourier del tipo.

$$\sum_{k \in Z} ¶(t + uk) = \sum_{k \in Z} a_k e^{2\pi i k \frac{t}{u}}$$

donde

$$a_n = \frac{1}{u} \int_0^u \sum_{k \in Z} ¶(t + uk) e^{-2\pi i n \frac{t}{u}} dt =$$

$$= \sum_{k \in Z} \frac{1}{u} \int_0^u ¶(t + uk) e^{-2\pi i n \frac{t}{u}} dt =$$

$$= \sum_{k \in Z} \frac{1}{u} \int_{uk}^{u(k+1)} ¶(v) e^{-2\pi i n \frac{v - uk}{u}} dv =$$

$$= \frac{1}{u} \int ¶(v) e^{-2\pi i v \frac{n}{u}} dv = \frac{1}{u} \hat{¶}\left(\frac{n}{u}\right)$$

Casos particulares de (25) son

$$\sum_{k \in Z} ¶ \left(t + \frac{k}{n} \right) = n \quad \text{si} \quad n \in N \tag{26}$$

que es fácil probar derivando directamente. En particular

$$\sum_{k \in Z} ¶ \, (t + k) = 1 \tag{27}$$

que equivale a

$$¶ \, (t) + ¶ \, (t - 1) = 1 \quad \text{si} \quad t \in [0, 1] \tag{28}$$

También de (25) se obtiene

$$\sum_{k \in Z} ¶ \, (t + 2k) = \frac{1}{2} \sum_{k \in Z} \hat{¶} \left(\frac{k}{2} \right) e^{\pi i k t} \tag{29}$$

que, en esencia, no es más que el desarrollo de Fourier, rápidamente convergente

$$¶ \, (t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \hat{¶} \left(\frac{2k+1}{2} \right) \cos \, (2k+1) \pi t \tag{30}$$

válido para $t \in [-1, 1]$.

El signo de $\hat{¶} \, ((2k + 1)/2)$, teniendo en cuenta el producto (9) es la paridad de $1 + v_2 (1) + 1 + v_2 (2) + \ldots + 1 + v_2 (k) = k + v_2 (k!) = s (k)$, así pues el signo de $\theta (k)$.

No solamente es (25) un desarrollo de Fourier sino que es también la fórmula de Poisson aplicada a la función $¶ \, (t + x)$. Para $t = 0$ da en particular

$$\sum_{m \in Z} ¶ \, (ma) = \sum_{m \in Z} \frac{1}{a} \hat{¶} \left(\frac{m}{a} \right) \tag{31}$$

que, por la forma del soporte de ¶, proporciona

$$a + 2a \, ¶ \, (a) = \sum_{m \in Z} \hat{¶} \left(\frac{m}{a} \right) \quad \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq a \leq 1 \tag{32}$$

5. Valores en los puntos diádicos

En primer lugar determinamos los valores $\P\,(1-2^{-n})$.

TEOREMA 6.—*Para todo* n *natural*

$$\int_0^1 t^{n-1}\,\P\,(t)\,dt = (n-1)!\,2^{\binom{n}{2}}\,\P\,(1-2^{-n}) \tag{33}$$

$$\int_0^1 t^{2n}\,\P\,(t)\,dt = \frac{c_n}{2} \tag{34}$$

donde c_n *son los números racionales que aparecen en el desarrollo* (6) *de* $\hat{\P}$.

DEMOSTRACIÓN.—Es fácil probar, derivando, que en la sucesión de funciones

$$f_0\,(t) = \P\,(t),\quad f_1\,(t) = \P\left(\frac{t}{2}-\frac{1}{2}\right),\quad f_2\,(t) = 2\,\P\left(\frac{t}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

$$f_k\,(t) = 2^{\binom{k}{2}}\,\P\left(\frac{t}{2^k}-\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k-1}}-\ldots-\frac{1}{2}\right)$$

cada función es primitiva en $[-1, 1]$ de la anterior y todas se anulan en $t=-1$.

Así pues, integrando por partes sucesivamente,

$$\int_0^1 t^n\,\P\,(t)\,dt = (-1)^n\int_{-1}^0 t^n\,\P\,(t)\,dt = (-1)^n\int_{-1}^0 t^n f_0\,(t) =$$

$$= -(-1)^n\,n\int_{-1}^0 t^{n-1} f_1\,(t)\,dt = (-1)^n(-1)^n\,n!\int_{-1}^0 f_n\,(t)\,dt =$$

$$= n!\,f_{n+1}\,(0) = n!\,2^{\binom{n+1}{2}}\,\P\,(1-2^{-n-1})$$

Por otra parte

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_{-1}^{-1} t^n \P(t)\, dt = \int_{-1}^{1} e^{xt} \P(t)\, dt = \hat{\P}\left(\frac{ix}{2\pi}\right) = \sum \frac{c_k}{(2k)!}\, x^{2k}$$

que prueba (34)

De las dos obtenemos

$$\P(1 - 2^{-n-1}) = \frac{2^{\binom{2n+1}{2}}}{(2n)!} \frac{F_k}{(2n+1)(2n-1)\ldots 1} \prod_{k=1}^{n} (2^{2k} - 1)^{-1} \quad (35)$$

donde los F_k son los enteros introducidos en (8).

Podemos calcular de manera análoga todos los $\P(1 - 2^{-n})$. Para ello observamos que

$$\int_0^1 \P(t)\, e^{-2\pi i x t}\, dt = \frac{1}{2\pi i x} + \int_0^1 \P'(t) \frac{e^{-2\pi i x t}}{2\pi i x}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i x} - \int_0^1 2\,\P(2t-1) \frac{e^{-2\pi i x t}}{2\pi i x}\, dt = \frac{1}{2\pi i x}\left(1 - e^{-\pi i x}\hat{\P}(x/2)\right)$$

por tanto

$$\int_0^1 e^{xt} \P(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \int_0^1 t^n \P(t)\, dt = -\frac{1}{x}\left(1 - e^{\frac{x}{2}}\, \hat{\P}\left(\frac{ix}{4\pi}\right)\right) \quad (36)$$

de la que se obtienen los $\P(1 - 2^{-n})$. Otro modo de calcularlos es usar

$$f(x) = 1 + x \int_0^1 e^{xt} \P(t)\, dt = e^{\frac{x}{2}}\, \hat{\P}\left(\frac{ix}{4\pi}\right) \quad (37)$$

y tener en cuenta

$$f(2x) = \frac{e^x - 1}{x} f(x) \tag{38}$$

con lo que se obtiene

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{n!} x^n \tag{39}$$

donde $d_0 = 1$ y vale la relación de recurrencia:

$$(n+1)(2^n - 1) d_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} d_k \tag{40}$$

De aquí que, con G_n entero, se tiene

$$d_n = \frac{G_n}{(n+1)!} \prod_{k=1}^{n} (2^k - 1)^{-1} \tag{41}$$

que junto a (33) y

$$d_n = \int_0^1 t^{n-1} ¶(t)\, dt \tag{42}$$

determina los valores de ¶ $(1 - 2^{-n})$.

Con esto estamos en condiciones de probar el siguiente teorema:

Teorema 7.—*La función* ¶ *toma valores racionales en todos los puntos diádicos.*

Demostración.—Sea $t = q/2^n$ con $|q| < 2^n$ y vamos a calculas ¶ $(q\, 2^{-n})$.

Como ¶ y todas sus derivadas se anulan en -1 la fórmula integral del resto de la fórmula de Taylor proporciona

$$¶ (q\, 2^{-n}) = \int_{-1}^{t} \frac{(t-x)^n}{n!} ¶^{(n+1)} (x)\, dx$$

usando ahora la expresión de la derivada n-ésima

$$¶ (t) = \frac{1}{n!} 2^{\binom{n+2}{2}} \int_{-1}^{t} (t-x)^n\, \theta\, (2^{n+1} (1+x))\, dx$$

Teniendo en cuenta que, para $2\,h \leqslant 2^{n+1} (1+x) \leqslant 2\,(h+1)$, se verifica $\theta\,(2^{n+1} (1+x)) = (-1)^{s(h)}\, ¶\, (2^{n+1} (1+x) - 2\,h - 1)$ y haciendo $2^{n+1} (1+x) - 2\,h - 1 = u$

$$¶ (t) = \frac{1}{n!} 2^{\binom{n+2}{2}} 2^{-n-1} \sum_{h=0}^{q+2^n-1} (-1)^{s(h)} \int_{-1}^{1} \left(t - \frac{u}{2^{n+1}} - \frac{2\,h+1}{2^{n+1}} + 1 \right)^n ¶ (u)\, du =$$

$$= \frac{1}{n!} 2^{-\binom{n+1}{2}} \sum_{h=0}^{q+2^n-1} (-1)^{s(h)} \int_{-1}^{1} [2\,(q-h) + 2^{n+1} - 1 - u]^n\, ¶ (u)\, du =$$

$$= \frac{1}{n!} 2^{-\binom{n+1}{2}} \sum_{h=0}^{q+2^n-1} (-1)^{s(h)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [2\,(q-h) + 2^{n+1} - 1]^{n-k} (-1)^k \int_{R} t^k\, ¶ (t)\, dt$$

que junto con

$$\int_{-1}^{1} t^n\, ¶ (t)\, dt = [1 + (-1)^n] \int_{0}^{1} t^n\, ¶ (t)\, dt$$

y (34) prueba nuestro teorema, pudiéndose escribir

$$¶ (q\, 2^{-n}) =$$

$$= 2 \sum_{h=0}^{q+2^n-1} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{s(h)} \frac{2^{\binom{2k+1}{2} - \binom{n+1}{2}}}{(n-2\,k)!} [2\,(q-h) + 2^{n+1} - 1]^{n-2k}\, ¶ (1 - 2^{-2k-1})$$