El problema onomástico para los ordinales numerables

Por JUAN ARIAS DE REYNA MARTÍNEZ

Recibido: 12 mayo 1982

PRESENTADO POR EL ACADÉMICO CORRESPONDIENTE D. NORBERTO CUESTA DUTARI

Título abreviado: *Problema onomástico*

Título en inglés: *The problem of the notation for numerable ordinal numbers*

Abstract

Assuming the existence of inaccesible cardinal numbers it is proved that there is not a notation, for each numerable ordinal number, satisfying the conditions imposed by N. Cuesta Dutari in his book *La matemática del orden* (1959).

Cuesta (1949; 1959, ap. 48, y 1981, pp. 542 y 718) compara la notación usada por Cantor para los ordinales con la numeración romana de los números naturales y plantea el problema de dar una notación sistemática para los ordinales numerables. En 1981, pp. 46-47, 648-649 y 721, critica la notación de Von Neumann porque no satisface el requisito de tener el nombre una longitud menor que el ordinal nombrado.

Particularmente, Cuesta nos ha planteado el problema onomástico en los siguientes cuatro puntos:

1. Se consideran únicamente los tipos de las buenas ordenaciones del conjunto N de los números naturales; es decir, los números ordinales de cardinal ω_0.
2. El alfabeto sería un conjunto A, numerable a lo sumo, de «letras». Quizá convendría darlo bien ordenado. Podrían ser sus «letras» los números naturales, puestos entre paréntesis: (1), (10), (11), (100), (101), (110), (111), etc.
3. Las «palabras numéricas» que nombrarían a los ordinales numerables, serían sucesiones bien ordenadas de letras del alfabeto; $(A_1 <_{\text{b.o.}})$ $(A_2 <_{\text{b.o.}})$, etc. Por ejemplo:

$$(1)(11)(101)(111)\cdots(10)(100)(110)(1.000)\ldots$$

4. Parece exigencia esencial que el tipo ordinal de la palabra numérica, sea menor que el tipo ordinal designado. Es decir, que si $(A_1 <_{\text{b.o.}})$ fuera el nombre del tipo de la buena ordenación $(N <_{\text{b.o.}})$, se ha de verificar siempre: tipo ordinal de $(A_1 <_{\text{b.o.}})$ < tipo ordinal de $(N <_{\text{b.o.}})$.

Este problema así planteado tiene sentido en un sistema axiomático basado sólo en los axiomas de extensionalidad, comprehensión, unión, reemplazamiento e infinito. Por tanto, no se necesita admitir la existencia de los reales ni de ω_1. Nosotros probaremos que, admitiendo la consistencia de la teoría **ZFC + I** (donde I es la proposición: existe un cardinal inaccesible), el problema no tiene solución. Aun siendo esto, desde el punto de vista de Kronecker, un defecto esencial de la demostración, creemos, sin embargo, que ésta será útil a los creyentes en **ZFC** + **I**.

Dado un conjunto A que denominamos alfabeto, llamaremos palabra a una aplicación $\mathbf{x}\colon \alpha \to A$, donde α es un ordinal, designaremos la palabra con la notación $\mathbf{x} = \langle x_\beta\colon \beta < \alpha \rangle$, donde $x_\beta = \mathbf{x}(\beta)$. Diremos que α es la longitud de la palabra $\mathbf{x}$ y escribiremos $\alpha = l(\mathbf{x})$. Denotaremos por $P_1(A)$ el conjunto de las palabras de longitud menor que ω_1 formadas con el alfabeto A.

El problema entonces es el siguiente:

Dado un alfabeto A numerable, ¿puede definirse efectivamente una aplicación $\mathbf{o}$: $\omega_1 \to P_1(A)$, inyectiva y de modo que, para todo $\alpha < \omega_1$, se tenga $l(\mathbf{o}(\alpha)) \leqslant \alpha$, verificándose la igualdad sólo para un conjunto numerable de ordinales α?

Al decir definir, efectivamente queremos indicar que debemos escribir una fórmula $\Phi(t)$ con una sola variable libre y sin parámetros de modo que $\mathbf{o} = \{t\colon \Phi(t)\}$, pero admitimos que para probar las propiedades requeridas se use el axioma de elección. Pueden verse ejemplos en Sierpinski (1921).

Si no exigimos que $\mathbf{o}$ esté definido efectivamente, sino que sólo pretendemos demostrar su existencia, tenemos una solución muy sencilla usando el conjunto de números reales definido por Hardy (1904). Esta es en esencia la crítica de Hobson (1907) a dicha construcción de Hardy (véase Hardy (1907) y Russell (1907)).

Desde otros puntos de vista el problema onomástico para los ordinales numerables ha sido tratado por Veblen (1908), Kleene (1938) y Cuesta (1959). En este último se encuentra una amplia bibliografía del tema y se da una impresionante notación para un segmento inicial de los ordinales numerables.

Proposición (admitiendo **I**). Existe un modelo de **ZFC** en el que toda aplicación inyectiva $\mathbf{o}\colon \omega_1 \to P_1(\omega)$ definible a partir de una sucesión de ordinales verifica $l(\mathbf{o}(\alpha)) \geqslant \alpha$ para todos los α de un subconjunto no numerable de ω_1.

NOTA. $A \subset \omega_1$ dice estacionario si $A \cap C \neq \phi$ para todo conjunto $C \subset \omega_1$ cerrado y no acotado. En particular, si A es estacionario, no es acotado.

Se dice que un conjunto X es definible a partir de una sucesión $s = \langle \alpha_n\colon n < \omega \rangle$ de ordinales si existe una fórmula $\Phi(x, y)$ con sólo dos variables libres tal que $X = \{t\colon \Phi(t, s)\}$. Es claro que si X puede definirse efectivamente, puede definirse a partir de una sucesión de ordinales. El concepto de ser definible a partir de una sucesión de ordinales tiene la ventaja de ser expresable en el lenguaje de la teoría de conjuntos.

Demostración. Solovay (1970, teorema 3) construye, admitiendo **I**, un modelo **M** de **ZFC** tal que verifica:

1. $2^{|\omega_0|} = |\omega_2|$.
2. Cualquier conjunto no numerable de reales definible a partir de una sucesión de ordinales contiene un subconjunto perfecto. (Aquí se entiende por real una sucesión de naturales, y se dota al espacio de todos los reales de la topología habitual).

Veremos que en este modelo $\mathcal{M}$ se verifica nuestra proposición.

Supongamos $\mathbf{o}\colon \omega_1 \to P_1(\omega)$ definida en $\mathcal{M}$ a partir de una sucesión $s = \langle \alpha_n\colon n < \omega \rangle$ de ordinales. Existe una fórmula $\Phi(x, y)$ del lenguaje de la teoría de conjuntos tal que $\mathbf{o} = \{z\colon \Phi(z, s)\}$. Supongamos, además, que salvo para un conjunto numerable de $\alpha < \omega_1$ se verifica $l(\mathbf{o}(\alpha)) < \alpha$.

Modificando convenientemente $l(\mathbf{o}(\alpha))$ en un conjunto numerable se tiene entonces una función regresiva. Aplicando un teorema de Fodor (1956) (cfr. Levy, 1979, pág. 153), existe $\eta < \omega_1$ y un cònjunto estacionario $A \subset \omega_1$ tal que $\alpha \in A$ implica $l(\mathbf{o}(\alpha)) = \eta$.

Sea $t:\omega \to \eta$ sobreyectiva, que existe por ser η numerable. Consideremos el conjunto de sucesiones de naturales $R = \{r(\alpha):\alpha < \omega_1\}$, donde $r(\alpha) = \langle \mathbf{o}(\alpha)(t(n)): n<\omega \rangle$. R es un conjunto de reales definible a partir de la sucesión de ordinales s_0, t_0, s_1, t_1, ..., s_n, t_n, ..., ya que

$$R = \left\{ x: \underset{\alpha<\omega_1}{\exists} \ \underset{u}{\exists} \left(x = \langle u(\alpha)(t(n)): n < \omega \rangle \wedge u = \{z: \Phi(z, s)\} \right) \right\}$$

Por ser $\mathbf{o}$ inyectiva y recorrer t todo η resulta que $\alpha, \beta \in A$ y $\alpha \neq \beta$ implica $r(\alpha) \neq r(\beta)$. Así pues, como A es no numerable, R es un conjunto no numerable de reales. Pero según 2, R contiene un perfecto, luego $|R| = 2^{|\omega_0|}$. Esto contradice 1, pues es claro que $|R| \leqslant |\omega_1|$.

BIBLIOGRAFIA

[1] CUESTA, N. (1949): «Sucesiones ascendentes de números ordinales», *Rev. Mat. Hisp. Amer.* (4), *9*, 83-96.

[2] CUESTA, N. (1958): «Matemática del orden». *Rev. Acad. Ci. Madrid*. *52*, 147-321, 609-770.

[3] CUESTA, N. (1959): «Matemáticas del orden», *Rev. Acad. Ci. Madrid*, *53*, 33-190.

[4] CUESTA, N. (1981): *La sinfonía del infinito y ya en el paraíso de Euler*, Ediciones de la Universidad de Salamanca, Salamanca.

[5] FODOR, G. (1956): «Eine Bemerkung zur Theorie der regressiven Funktionen», *Acta Sci. Math. (Szeged)*, *17*, 139-142.

[6] HARDY, G. H. (1904): «A theorem concerning the infinite cardinal numbers», *Quarterly J. of Math.*, *35*, 87-94.

[7] HARDY, G. H. (1907): «The continuum and the second number class», *Proc. London Math. Soc.* (2), *4*, 10-17.

[8] HOBSON, E. W. (1907): «On the general theory of transfinite numbers and order types», *Proc. London Math. Soc.* (2), *4*, 170-188.

[9] KLEENE, S. C. (1938): «On notations for ordinal numbers», *J. Symbolic Logic*, *3*, 150-155.

[10] LEVY, A. (1979): *Basic Set Theory*, Springer, Berlín.

[11] RUSSELL, B. (1907): «On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types», *Proc. London Math. Soc.* (2), *4*, 29-53.

[12] SIERPINSKI, W. (1921): «Les exemples effectifs et l'axiome du choix», *Fund. Math.*, *2*, 112-118.

[13] SOLOVAY, R. M. (1970): «A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable», *Ann. of Math.*, *92*, 1-56.

[14] VEBLEN, O. (1908): «Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals», *Trans. Amer. Math. Soc.*, *9*, 280-292.

Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla
Tarfia, s/n. 41012 Sevilla