

Trabajo Fin de Grado

Grado Ingeniería Aeroespacial

Cálculo de la sustentación en alas en flecha fluctuantes con aplicaciones aerolásticas

Autor: Anabel López Pujazón

Tutor: José Manuel Gordillo Arias de Saavedra y Guillaume Riboux Acher

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015



Trabajo Fin de Grado
Grado Ingeniería Aeroespacial

Cálculo de la sustentación en alas en flecha fluctuantes con aplicaciones aerolásticas

Autor:

Anabel López Pujazón

Tutor:

José Manuel Gordillo Arias de Saavedra

Guillaume Riboux Acher

Profesor titular

Dep. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2015

Trabajo Fin de Grado: Cálculo de la sustentación en alas en flecha fluctuantes con aplicaciones aerolásticas

Autor: Anabel López Pujazón

Tutor: José Manuel Gordillo Arias de Saavedra
Guillaume Riboux Acher

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2015

El Secretario del Tribunal

Índice

Índice	vii
Índice de Tablas	ix
Índice de Figuras	xi
Notación	xiii
1 Introducción	1
1.1 <i>Objetivos</i>	2
1.2 <i>Estructura del trabajo</i>	2
2 Hipótesis Iniciales	5
3 Formulación del Problema	7
3.1 <i>Ecuaciones de Navier-Stokes</i>	7
3.2 <i>Simplificaciones</i>	8
3.3 <i>Linealización de las ecuaciones</i>	11
3.4 <i>Vorticidad y movimientos irrotacionales</i>	12
3.5 <i>Ecuaciones del flujo potencial</i>	13
3.6 <i>Condición de Kutta – Joukowski</i>	15
4 Método de Green	17
4.1 <i>Estudio bidimensional</i>	17
4.2 <i>Estudio tridimensional</i>	21
5 Método de Resolución Numérica	27
5.1 <i>Extensión a alas en flecha</i>	35
5.2 <i>Coefficiente de sustentación</i>	36
5.3 <i>Problema geométrico</i>	37
5.4 <i>Comparativa con métodos clásicos de resolución</i>	43
6 Presentación de resultados	47
6.1 $C_{L\alpha}$ vs. AR en régimen estacionario	47
6.2 <i>Aceleración repentina de una placa plana rectangular a ángulo de ataque constante hasta alcanzar una velocidad constante</i>	50
6.3 <i>Movimiento oscilatorio de una placa plana en torno a un valor del ángulo de ataque constante</i>	53
7 Dominio de validez del método	57
7.1 <i>Problema estacionario</i>	57
7.1.1 i_{ala}	57
7.1.2 $N_{Y,incog}$	65
7.1.3 <i>Puntos de colocación</i>	70
7.2 <i>Problema no-estacionario</i>	75
8 Conclusiones	79
Referencias	81
Anexo A. Código MATLAB para método numérico	83

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Tabla 1.</i> Lista de métodos clásicos y sus principales características (tabla obtenida de [2]).	44
<i>Tabla 2.</i> Comparativa entre métodos de resolución de bajo y alto orden (tabla obtenida de [2]).	45
<i>Tabla 3.</i> Tiempos de ejecución método numérico para diferentes valores de i_{ala} con flecha de 30° .	65
<i>Tabla 4.</i> Tiempos de ejecución método numérico para diferentes valores de $N_{Y,incog}$ con flecha de 30° .	70

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Figura 1.</i> Ejemplo de diferentes formas de la cola de un pez.	1
<i>Figura 2.</i> Ejes de referencia cartesianos para un ala tridimensional.	5
<i>Figura 3.</i> Condición de Kutta para el problema bidimensional.	16
<i>Figura 4.</i> Dominios de integración y definición de los vectores del problema a resolver.	18
<i>Figura 5.</i> División en paneles de un ala rectangular.	30
<i>Figura 6.</i> División en triángulos de cada panel y definición de vectores.	30
<i>Figura 7.</i> Definición del potencial y velocidades de perturbación.	31
<i>Figura 8.</i> Detalle del triángulo 1.	32
<i>Figura 9.</i> Definición de parámetros del problema geométrico.	32
<i>Figura 10.</i> Evolución del potencial en la estela para el problema no-estacionario.	35
<i>Figura 11.</i> Definición de variables auxiliares para el problema geométrico.	37
<i>Figura 12.</i> Ejemplo de división de un ala respetando su simetría respecto al eje X.	38
<i>Figura 13.</i> Definición de variables auxiliares y sentido de los vectores directores para $j < N05$.	38
<i>Figura 14.</i> Definición de variables auxiliares y sentido de los vectores directores para $j \geq N05$.	41
<i>Figura 15.</i> Ejemplo de división en paneles de algunos métodos clásicos de resolución.	43
<i>Figura 16.</i> Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento (figura obtenida de [2]).	48
<i>Figura 17.</i> Efecto de la flecha sobre la velocidad efectiva del ala.	48
<i>Figura 18.</i> Resultados del método para la pendiente de la curva de sustentación.	49
<i>Figura 19.</i> Superposición de resultados del método con datos de la literatura.	50
<i>Figura 20.</i> Evolución del coeficiente de sustentación con el tiempo para una placa plana que arranca desde el reposo hasta adquirir una velocidad determinada a un ángulo de ataque de 5° .	51
<i>Figura 21.</i> Evolución del coeficiente de sustentación con el tiempo para una placa plana que arranca desde el reposo hasta adquirir una velocidad determinada a un ángulo de ataque de 5° .	52
<i>Figura 22.</i> Superposición de resultados del método numérico y datos reportados de la literatura.	53
<i>Figura 23.</i> Evolución temporal del coeficiente de sustentación para una placa con movimiento armónico simple.	54
<i>Figura 24.</i> Evolución temporal coeficiente de sustentación para placa con movimiento armónico simple.	55
<i>Figura 25.</i> División en paneles de un ala rectangular ($AR=5$) y su estela ($i_{ala}=11$).	57
<i>Figura 26.</i> Zoom en la división en paneles del ala rectangular ($AR=5$) y puntos de colocación ($i_{ala}=11$).	58
<i>Figura 27.</i> División en paneles de un ala con flecha 60° ($AR=5$) y su estela ($i_{ala}=11$).	58
<i>Figura 28.</i> Zoom división en paneles del ala flecha de 60° ($AR=5$) y puntos de colocación ($i_{ala}=11$).	58
<i>Figura 29.</i> Esquema de la posición relativa de los puntos de colocación.	60
<i>Figura 30.</i> Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 0° .	60

<i>Figura 31.</i> Detalle de la Figura 30.	60
<i>Figura 32.</i> Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 30°.	61
<i>Figura 33.</i> Detalle de la Figura 32.	61
<i>Figura 34.</i> Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 45°.	61
<i>Figura 35.</i> Detalle de la Figura 34.	62
<i>Figura 36.</i> Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 60°.	62
<i>Figura 37.</i> Detalle de la Figura 36.	62
<i>Figura 38.</i> Variación de los errores absolutos con i_{ala} .	63
<i>Figura 39.</i> Variación de los errores relativos con i_{ala} .	64
<i>Figura 40.</i> Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 0°.	66
<i>Figura 41.</i> Detalle de la Figura 40.	66
<i>Figura 42.</i> Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 30°.	66
<i>Figura 43.</i> Detalle de la Figura 42.	67
<i>Figura 44.</i> Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 45°.	67
<i>Figura 45.</i> Detalle de la Figura 44.	67
<i>Figura 46.</i> Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 60°.	68
<i>Figura 47.</i> Detalle de la Figura 46.	68
<i>Figura 48.</i> Variación de los errores absolutos con $N_{Y,incog}$.	69
<i>Figura 49.</i> Variación de los errores relativos con $N_{Y,incog}$.	69
<i>Figura 50.</i> Definición de k_{factor} .	71
<i>Figura 51.</i> Variación de los errores absolutos con k_{factor} .	72
<i>Figura 52.</i> Detalle de la Figura 51.	72
<i>Figura 53.</i> Variación de los errores relativos con k_{factor} .	73
<i>Figura 54.</i> Detalle de la Figura 53.	73
<i>Figura 55.</i> Variación del número de condición con k_{factor} .	74
<i>Figura 56.</i> Detalle de la Figura 55.	74
<i>Figura 57.</i> Ejemplo de divergencia de la solución.	76

Notación

Λ, AR	Alargamiento
b	Envergadura
S	Superficie en planta del ala
$c(y)$	Cuerda del perfil situado en la línea y de la envergadura
c_0	Cuerda del perfil central
A	Superficie del sólido en la dirección perpendicular a la corriente incidente
ψ	Ángulo de flecha del ala
$z_p(x, y)$	Función de los puntos de la superficie del ala
$z_c(x, y)$	Función de la línea de cuerda de los perfiles del ala
$z_e(x, y)$	Función de espesor de los puntos del ala medidos desde la cuerda
α	Ángulo de ataque del ala
\vec{U}_∞	Vector velocidad del fluido sin perturbar
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$	Vectores directores unitarios
ρ	Densidad del fluido
\mathbf{v}	Vector velocidad total del fluido
p	Presión del fluido
T	Temperatura del fluido
a	Velocidad del sonido
$\boldsymbol{\omega}$	Vector vorticidad
ϕ	Potencial de velocidades
h	Entalpía
R_g	Constante universal de los gases
γ	Coefficiente de dilatación adiabática
\mathbf{f}_m	Vector de fuerzas másicas
C_v	Capacidad calorífica a volumen constante

C_p	Capacidad calorífica a presión constante
$\underline{\underline{\tau'}} : \nabla \mathbf{v}$	Término de disipación de energía cinética en interna
Q_r	Potencia calorífica por unidad de volumen recibida por radiación
Q_q	Potencia calorífica por unidad de volumen recibida por reacción química
k	Conductividad térmica
Fr	Número adimensional de Froude
Re	Número adimensional de Reynolds
Pr	Número adimensional de Prandtl
Pe	Número adimensional de Peclet
M	Número adimensional de Mach
ν	Viscosidad cinemática del fluido
δ	Espesor característico de la capa límite
C_L	Coefficiente adimensional de sustentación
C_D	Coefficiente adimensional de resistencia
$C_{L\alpha}$	Pendiente de la curva de sustentación
D / Dt	Operador derivada sustancial
ψ_0	Solución elemental de la ecuación de Laplace
ds	Diferencial de línea
$d\sigma$	Diferencial de superficie
$d\omega$	Diferencial de volumen
i_{ala}	Número de divisiones del ala según el eje X
$N_{Y,incog}$	Número de divisiones del ala según el eje Y
u	Componente según el eje X del campo de velocidades de perturbación
v	Componente según el eje Y del campo de velocidades de perturbación
w	Componente según el eje Z del campo de velocidades de perturbación
\mathbf{x}, \vec{x}	Magnitud vectorial
\mathbf{x}, \mathbf{r}	Vector posición
x'	Campo de perturbación de la magnitud x
x^+	Magnitud x medida sobre el extradós del ala
x^-	Magnitud x medida sobre el intradós del ala
x_s	Magnitud x sobre la superficie del sólido
\mathbf{n}_x	Vector normal exterior a la superficie/lado x
x_{bs}	Magnitud x en el borde de salida

x_{ba}	Magnitud x en el borde de ataque
x^t	Magnitud x en el instante t
N_{05}	Valor del índice j que hace $y = 0$
v_{ix}	Componente x del vector v_i
v_{iy}	Componente y del vector v_i
l_{xy}	Longitud del lado que une los vértices x e y

1 INTRODUCCIÓN

El deseo del hombre por volar se remonta a tiempos prehistóricos, donde la observación de las aves y otros animales voladores despertó una curiosidad en el ser humano que se ha mantenido hasta nuestra época actual. Es en estos comienzos de la humanidad donde muchos expertos sitúan precisamente el origen de la aviación, y no en el siglo XVIII, con la aparición de los primeros globos aerostáticos capaces de elevarse en el aire, o en 1903, con el primer vuelo de los hermanos Wright, como se podría pensar. Y es que, mucho antes de que sucedieran todos estos hitos históricos, el hombre ya imaginaba formas de volar tratando de imitar la estructura de las alas de algunas aves; introducía a personajes con poderes divinos en sus historias entre los que se encontraba la capacidad de volar... Y es todo esto lo que nos lleva a asegurar que el deseo de volar ha estado siempre muy presente en toda la historia de la humanidad y ha sido el impulsor de grandes avances y desarrollos tecnológicos hasta llegar a la situación actual.

Por tanto, vemos que la observación de la naturaleza ha sido una de las principales fuentes inspiradoras que han permitido alcanzar estos grandes desarrollos que podemos observar hoy en día. Y es en este punto, en esta observación de la fauna que nos rodea, donde nace la motivación de este trabajo, pero no tan centrado ahora en las aves sino en otros seres vivos que probablemente no sean los primeros que imaginamos al pensar en un ala, pero que, sin duda, son una fuente reveladora de conocimiento para este campo: los peces. A través de la observación de estos se ha comprobado que son capaces de impulsarse y mantener un movimiento controlado dentro del agua a través, principalmente, del movimiento de su cola. Asimismo, gracias a una serie de mecanismos de adaptación que han ido desarrollando, batiendo esta cola con una frecuencia y amplitud determinadas, consiguen el movimiento deseado con el mínimo consumo de energía necesario.

Por otra parte, como es bien sabido, la aerodinámica nos proporciona la capacidad de analizar el movimiento de un sólido a través de un fluido, no teniendo que ser este necesariamente un gas. Por tanto, gracias a las ecuaciones de la aerodinámica sería posible realizar un estudio de estas colas en movimiento para tratar de buscar estas frecuencias y amplitudes óptimas. De hecho, yendo un poco más allá, si observamos en mayor detalle la forma que adopta la cola de la mayoría de peces vemos que, gracias a la adaptación al medio que han experimentado a lo largo de su evolución, esta forma no es más que un ala en flecha (véase *Figura 1*). Este estudio sería extrapolable, pues, al caso de un ala moviéndose en el seno de un fluido incompresible y, posteriormente, se podría extender, incluso, a un caso compresible. Por todo esto, este estudio se reduce al análisis de un ala, típicamente en flecha, moviéndose a través de un medio fluido incompresible.

En este trabajo se desarrollarán las ecuaciones necesarias para poder realizar este estudio desde un punto de vista aerodinámico. Por otra parte, también se desarrollará un método de resolución numérico que implementará estas ecuaciones con unas ciertas simplificaciones y que permitirá estudiar este problema. Sin embargo, para probar la validez de este método, será necesario realizar múltiples análisis y comprobar los resultados que proporciona.

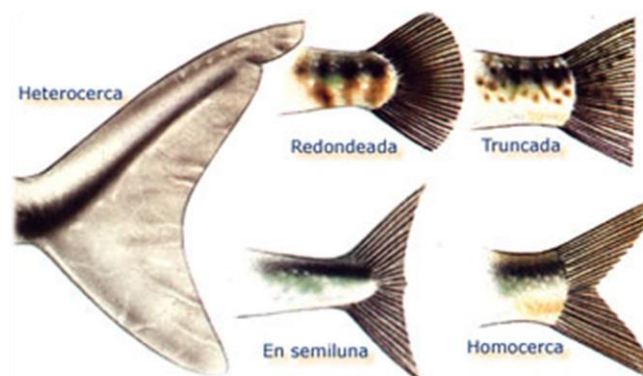


Figura 1. Ejemplo de diferentes formas de la cola de un pez.

1.1 Objetivos

Una vez expuesta la motivación de este trabajo e introducido brevemente cuál será el objetivo general del mismo, se exponen a continuación algunos de los objetivos principales de partida del mismo.

Las ecuaciones generales de la mecánica de fluidos, conocidas como *ecuaciones de Navier-Stokes*, permiten describir de manera genérica el estado y movimiento de un sólido en el seno de un fluido cualquiera. Estas ecuaciones son muy completas y aportan un gran detalle; sin embargo, su resolución es extremadamente complicada si se abarcan en su totalidad, sin realizar ninguna hipótesis inicial que permita eliminar algún grado de libertad o reduzca el número de términos que en ellas aparecen. Por tanto, será necesario establecer una serie de simplificaciones que nos permitan abordar estas ecuaciones sin necesidad de tener que recurrir a modelos muy complejos que serían inabarcables desde el punto de vista temporal para este trabajo. Por otra parte, estas simplificaciones deberán ser realistas, quedando todas ellas totalmente justificadas y permitiendo reproducir casos reales.

Por tanto, en primer lugar, se pretende llegar a las ecuaciones que definen el movimiento de un cuerpo a través de un fluido, siendo este movimiento, en general, no estacionario. De esta manera, será necesario establecer una serie de simplificaciones bien razonadas que nos permitan llegar a un modelo suficientemente versátil para los casos que estamos interesados, pero no demasiado complejo.

Establecidas estas pautas y siguiendo en la línea de resolución del problema de un ala fluctuante, con la ayuda de modelos ya existentes, se tratará de elaborar un método numérico propio de resolución del problema que nos permita estudiar diversos casos tanto estacionarios como no estacionarios y ver las diferencias entre ambos. Asimismo, la comprobación de la validez de dicho método y su sensibilidad serán también objetivos clave de este trabajo. Ambos se tratarán de conseguir a través de la prueba de múltiples casos y el estudio de sus errores.

Por todo esto, el objetivo final tras este trabajo podría resumirse como el estudio de movimientos no-estacionarios. Para ello, será necesaria la consecución de un método capaz de resolver el problema en que estamos interesados y, a su vez, será imprescindible plantear las ecuaciones que rigen dicho problema a través de una serie de procedimientos que se verán a lo largo de este trabajo.

1.2 Estructura del trabajo

Una vez planteados los objetivos de partida de este documento, y antes de comenzar con los desarrollos de este trabajo, a modo introductorio se analiza aquí cuál será la estructura que seguirá este trabajo; mostrándose así el contenido fundamental que hallaremos en cada uno de los capítulos siguientes.

Para comenzar, como ya se ha planteado anteriormente, será necesario fijar el modelo que utilizaremos en todo el documento; estableciéndose así en el capítulo 2 las hipótesis de partida que utilizaremos y desarrollándose aquellos conceptos previos sobre el modelo que pudieran plantear algún tipo de duda.

Posteriormente, aclarado este punto, se pasará a la formulación de las ecuaciones que rigen el movimiento en que estamos interesados. Para ello, en el capítulo 3 se partirá de las ecuaciones más generales de la aerodinámica y, a través de una serie de simplificaciones, se conseguirá llegar a un sistema mucho más sencillo. Del mismo modo, en dicho capítulo se plantearán también las condiciones de contorno que cierran completamente el problema y se establecerán los campos de aplicación de estas ecuaciones, excluyéndose así aquellos casos que no cumplan con las hipótesis planteadas.

Una vez totalmente claro el problema que es necesario resolver, en los capítulos 4 y 5 se plantearán los procedimientos necesarios para llegar a la solución del mismo. En el primero, se deducirá la solución natural del problema a través del conocido *método de Green*. Una vez hecho esto, en el capítulo siguiente se abarcará la resolución numérica del mismo, planteándose aquí todas las cuestiones geométricas, de aproximación de

operadores... necesarias.

En los dos capítulos siguientes se plantearán algunos resultados obtenidos a través de nuestro método y se compararán con resultados para esos mismos casos de estudio reportados por la literatura. De esta manera, se comprobará cuál es la efectividad del método, su sensibilidad, dominio de aplicabilidad... Igualmente, a través del estudio de la causa raíz de las posibles desviaciones de los resultados, se podrán plantear posibles mejoras futuras para el método.

Para terminar, en el capítulo 8 se plantearán precisamente estas posibles líneas de trabajo futuras y se extraerán las principales conclusiones de este trabajo, orientadas a la mejora futura de los métodos empleados, posiblemente eliminando algunas hipótesis de partida demasiado restrictivas.

Asimismo, se incluye en el Anexo A al final del documento el código generado para resolver este problema de alas fluctuantes, implementando este el método que se analizará en el capítulo 6.

2 HIPÓTESIS INICIALES

En este apartado se establecerán las hipótesis iniciales bajo las cuales se formulará nuestro problema y cuyo conocimiento será fundamental para la correcta comprensión del mismo, así como para plantear posibles líneas de investigación futuras para relajar algunas de las hipótesis establecidas y que podrían no darse en la realidad. De este modo, quedará completamente definido el modelo que utilizaremos de aquí en adelante para todos los planteamientos que se sigan.

En primer lugar, es necesario aclarar que se utilizará un sistema de referencia de ejes cartesianos ligado al ala, como el que se muestra en la *Figura 2*.

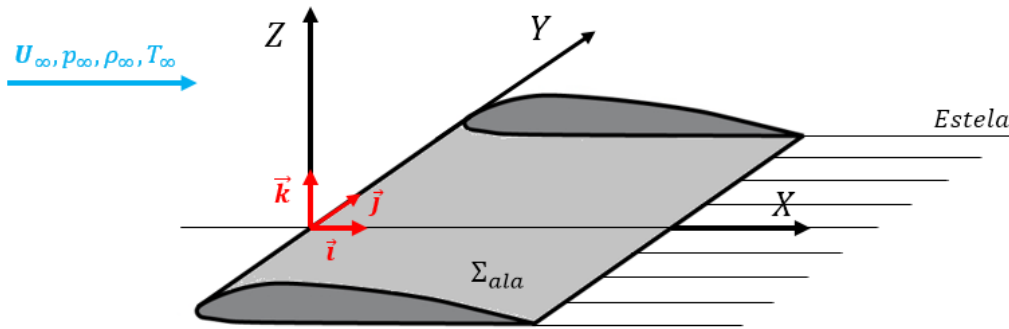


Figura 2. Ejes de referencia cartesianos para un ala tridimensional.

Por otro lado, para definir las direcciones de cada uno de estos ejes, es necesario introducir previamente algunos conceptos. Comenzaremos con la geometría, definiendo aquí el alargamiento, Λ , como el cociente adimensional de la envergadura al cuadrado entre el área de la superficie en planta del ala Σ_{ala} , es decir, $\Lambda = b^2/S$; donde b (envergadura) se define como la distancia entre los bordes marginales del ala. La envergadura suele verificar que $b \gg c(y)$, siendo $c(y)$ la cuerda o distancia que une los bordes de ataque y salida de cada uno de los perfiles; por lo que, en general, dada esta definición se verifica que $\Lambda \gg 1$. A la cuerda del perfil central la denominaremos $c(y = 0) = c_0$, y se supondrá contenida en el plano $X - Z$. Asimismo, consideraremos que las alas son simétricas respecto a este mismo plano $X - Z$ (véase *Figura 2*), y compuestas por una sucesión continua de perfiles aerodinámicos según la dirección de la envergadura.

Como estaremos interesados en obtener la linealización de las ecuaciones a las que lleguemos, para ello es necesario que se garantice que estos perfiles que componen el ala sean esbeltos, ya que, como veremos, esto nos permitirá aproximar el ala por su proyección en planta, además de realizar otras suposiciones simplificadoras. De modo que, si la superficie del ala satisface la siguiente ecuación

$$z - z_p(x, y) = 0 \quad (2.1)$$

Deberá verificarse que

$$\frac{\partial z_p}{\partial x} \ll 1 \quad y \quad \frac{\partial z_p}{\partial y} \ll \frac{\partial z_p}{\partial x} \ll 1 \quad (2.2)$$

De igual manera, gracias a linealidad de la ecuación que definirá nuestro problema (la cual se demostrará más adelante), así como de las condiciones de contorno a las que está sujeto, podemos descomponer la función $z_p(x, y) = z_c(x, y) \pm z_e(x, y)$, es decir, cada perfil situado en un punto y de la envergadura quedará completamente definido por la composición de su línea de curvatura más su espesor en cada coordenada x , medido sobre la cuerda del mismo. Esto nos permitirá dividir nuestro estudio en dos partes o problemas distintos: el problema de espesor o simétrico ($z_e(x, y)$) y el problema sustentador o antisimétrico ($z_c(x, y)$) [1] y la solución completa al problema será, por tanto, la superposición de ambas soluciones. Nosotros estaremos interesados, de aquí en adelante, solo en este segundo, que será el único que contribuya a la sustentación. Por tanto, una vez formulada la ecuación general del problema, nos centraremos en el estudio de este segundo caso únicamente, omitiendo el espesor de los perfiles. No obstante, por simplificación en la notación, no incluiremos el subíndice c en todos nuestros desarrollos; pero debemos tener presente en todo momento que nos estaremos refiriendo a este caso. No se entrará en el estudio en profundidad de ambos problemas y su justificación, puesto que no es el objeto de este trabajo y se dan por supuestos los conocimientos básicos sobre la distinción de estos dos problemas y su justificación a por qué son simétrico y antisimétrico, respectivamente. Para mayor detalle sobre ellos, es posible consultar [1] o [3] entre otros.

Por otra parte, supondremos que el campo de velocidades suficientemente lejos del ala es uniforme y estacionario y que el vector velocidad en el infinito (\vec{U}_∞) estará contenido en el plano $X - Z$ de nuevo, formando un ángulo α con el plano $z = 0$. De esta manera, se obtendrá un flujo cuya velocidad no tendrá ninguna componente según el eje Y .

Dicho todo esto, estamos en disposición de definir las direcciones de cada uno de los ejes. Para ello definiremos los vectores directores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, que llevan la dirección de los ejes X, Y, Z , respectivamente. En base a esto, el vector \vec{i} estará orientado según la dirección de la cuerda del perfil central, c_0 . El vector \vec{k} se definirá como aquel perpendicular al vector \vec{i} y contenido en su plano de simetría, positivo hacia arriba. Por último, el vector \vec{j} completará el triedro positivo a derechas. Para el caso de un ala cuya forma en planta sea rectangular, este coincidirá con la dirección que define la envergadura del ala. En otras ocasiones es posible que se utilice otra nomenclatura para estos vectores unitarios, sobre todo en la proyección de fuerzas o para tratar el problema bidimensional. En estos casos, tendremos la siguiente equivalencia:

$$\vec{e}_1 \equiv \vec{i} \quad y \quad \vec{e}_2 \equiv \vec{k}$$

Por último, de aquí en adelante, en todo el estudio que realizaremos se considerará el ala aislada, es decir, sin influencia del resto de elementos del avión, como pueden ser el fuselaje o los motores. De esta manera, no consideraremos en ningún momento la interferencia que existe entre estos elementos. Del mismo modo, tampoco consideraremos el posible efecto suelo sobre el ala en ciertas configuraciones de vuelo.

Dicho todo esto, estamos en condiciones de pasar a formular nuestro problema, teniendo presentes, en todo momento, este modelo y sus hipótesis simplificadoras de partida.

3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Una vez establecidas las principales hipótesis bajo las que se formulará el problema sustentador, es necesario pasar a analizar las ecuaciones que caracterizan este problema de manera única e inequívoca. Por tanto, comenzaremos planteando las ecuaciones generales a partir de las cuales llegaremos a nuestra ecuación final haciendo uso de una serie de relaciones y simplificaciones, como se verá a continuación. Comenzaremos así con las denominadas *ecuaciones de Navier-Stokes* y las condiciones de contorno que rigen el problema y proseguiremos analizando aquellas simplificaciones necesarias para, finalmente, llegar a las ecuaciones linealizadas que emplearemos para resolver este problema sustentador.

3.1 Ecuaciones de Navier-Stokes

- Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (3.1)$$

- Ecuación de cantidad de movimiento

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}'}} + \rho \mathbf{f}_m \quad (3.2)$$

- Ecuación de la energía

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_v \mathbf{v} \cdot \nabla T = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}'}} : \nabla \mathbf{v} + Q_r + Q_q + \nabla \cdot (k \nabla T) \quad (3.3)$$

Este sistema de ecuaciones está sujeto tanto a las condiciones iniciales como las de contorno que determinen nuestro problema concreto. Además, es necesario completar el sistema con las ecuaciones de estado que permiten relacionar las variables termodinámicas entre sí, así como con aquellas relaciones constitutivas que sean necesarias, para finalmente proporcionar los campos de densidad, velocidad, presión y temperatura en cualquier punto del dominio fluido.

De aquí en adelante haremos la aproximación de que el gas es perfecto. Esto implica que nuestro sistema de seis incógnitas (ρ, \mathbf{v}, p, T) y 5 ecuaciones ha de ser completado con la ecuación de estado de los gases perfectos:

$$\frac{p}{\rho} = R_g T \quad (3.4)$$

Anteriormente ya dijimos que, para cerrar completamente el problema diferencial, una de las condiciones necesarias era determinar las condiciones de contorno. Volviendo a este punto, son conocidas las condiciones tanto lejos del objeto ($x \rightarrow \infty$) como sobre la propia superficie del mismo ($x \rightarrow x_s$), siendo estas las siguientes:

$$\begin{aligned} x \rightarrow \infty : \quad & p \rightarrow p_\infty \\ & \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{U}_\infty \\ & T \rightarrow T_\infty \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} x \rightarrow x_s : \quad & \mathbf{v} = \mathbf{0} \\ & T = T_s \\ & k\mathbf{n}_s \cdot \nabla T = k_s \mathbf{n}_s \cdot \nabla T_s \end{aligned} \quad (3.6)$$

En todas estas expresiones, el subíndice ∞ representa las condiciones aguas arriba del sólido, es decir, las condiciones sin perturbar; mientras que el subíndice s representa las variables sobre la superficie del propio sólido.

Hechas estas aclaraciones, quedan definidas por tanto las condiciones de contorno que rigen nuestro problema en su forma más general.

Este sistema al que hemos llegado es muy complicado de resolver y abarcar en su totalidad. Sin embargo, podemos simplificarlo notablemente para cierto tipo de situaciones que se dan con mucha frecuencia en problemas típicos y reales. A continuación, veremos por tanto algunas de estas simplificaciones y sus implicaciones dentro de este sistema.

3.2 Simplificaciones

Aparte de las hipótesis iniciales ya realizadas, analizaremos ahora cada uno de los términos que aparecen en las ecuaciones en busca de posibles simplificaciones de estas despreciando, por ejemplo, términos de un orden de magnitud muy inferior al de otros.

En primer lugar, comenzaremos analizando los órdenes de magnitud de las principales variables que intervienen en nuestro problema. Esto nos permitirá hacernos una idea de qué términos pueden ser despreciables frente a otros.

Sabemos que la cuerda característica de una aeronave, c_0 , suele ser superior o del orden de 1m y las velocidades relativas típicas a las que el ala se desplaza con respecto a la corriente serán, por lo general $U_\infty \gg 10 \text{ m/s}$. Si definimos, por tanto, el número adimensional de Froude (que, por definición, compara el orden de magnitud de las fuerzas másicas frente al término de fuerzas de inercia convectivas) como

$$Fr^2 = \frac{v^2}{gl}$$

, donde

v : velocidad característica [m/s]

l : longitud característica [m]

g : aceleración de la gravedad [m/s²]

, vemos que este verifica que $Fr \gg 1$, por lo que, en primera aproximación, podremos despreciar el término correspondiente a las fuerzas másicas frente al de las aceleraciones convectivas. Es necesario aclarar que, para esta afirmación, se ha utilizado la cuerda como longitud característica del movimiento.

Asimismo, dado el tipo de estudio en el que estamos interesados, se pueden despreciar los términos correspondientes a la potencia calorífica aportada al fluido por radiación y reacción química [1].

Por otra parte, definimos ahora el número de Reynolds como

$$Re = \frac{vc}{\nu}$$

, donde

v : velocidad característica del fluido [m/s]

c : longitud característica del sistema [m]

$\nu = \mu/\rho$: viscosidad cinemática del fluido [m²/s]

Conociendo las características del aire y las geometrías típicas de las alas, podemos afirmar que $c \sim 1$, $\nu \sim 10^{-5}$ y $v \gg 10$. Dadas estas condiciones, el número de Reynolds verificará que $Re \gg 1$. Por definición, este número adimensional compara la importancia relativa entre el término de la ecuación correspondiente a las aceleraciones convectivas frente al de los efectos viscosos, por lo que, en general, este último podrá ser despreciado frente al primero en distancias características del orden de c_0 tal y como hemos visto. No obstante, no debemos olvidar bajo qué condiciones lo estamos aceptando. Estos términos deberán ser retenidos en las regiones cercanas a la pared del sólido, en la zona conocida como *capa límite*. En esta zona sí se considerarán los mecanismos físicos que fuerzan la condición de velocidad relativa nula entre el fluido y el sólido.

Por otro lado, con estas estimaciones que hemos hecho, conocidas las características típicas del aire, ya podemos estimar que el número de Prandtl, que por definición es $Pr = \nu/\alpha$ (siendo α la difusividad térmica del gas), será de orden unidad ($Pr_{aire} \approx 0.7$). Este resultado es de gran importancia para lo que analizaremos a continuación.

Sabemos que el número de Peclet mide la importancia relativa del término de potencia calorífica aportada por conducción a la partícula fluida frente al término convectivo. Por su definición, guarda la siguiente relación con los números de Reynolds y Prandtl:

$$Pe_c = \frac{cv}{\alpha} = Re_c \cdot Pr \gg 1$$

Por tanto, por las estimaciones hechas hasta el momento, vemos que el término debido a la potencia calorífica aportada por conducción será despreciable en nuestras ecuaciones. De nuevo, al igual que sucedía anteriormente, al despreciar la aportación de este término estamos suponiendo implícitamente que el gradiente, en este caso de temperaturas, sucede en una distancia característica del orden de c_0 . Pero, tal y como sucedía antes, suficientemente cerca del cuerpo sólido sí hemos de considerar estos efectos, así como los mecanismos físicos que fuerzan, ahora, la condición de igualdad de temperaturas entre el fluido y el sólido justo en la pared de contacto.

No obstante, es inmediato ver que el espesor característico de estas capas límite es muy pequeño en comparación con c_0 sin más que saber que, por definición, en esta región el término de esfuerzos viscosos será del mismo orden que el correspondiente a fuerzas convectivas, ya que estas fuerzas viscosas son las únicas que generan una resultante tangente a la superficie que será la única capaz de forzar estas condiciones de las que hemos hablado en la pared de contacto del sólido con el fluido. Para el caso del gradiente de temperaturas, la explicación es

análoga, pero apareciendo, en este caso, el término correspondiente a la potencia calorífica por conducción en lugar de los términos viscosos, pero la lógica seguida es completamente idéntica, puesto que las partículas fluidas han de adaptarse a la temperatura del objeto en distancias del orden de c_0 y solo el mecanismo físico de conducción de calor puede hacer que se cumpla esta condición de contorno.

Dicho esto, si aplicamos estas condiciones y definiciones, la estimación a la que llegamos para deducir el espesor característico de cada una de estas capas límite es:

$$\begin{aligned} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \sim \nabla \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}'}} &\Leftrightarrow \rho \frac{U_\infty^2}{c_0} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \Leftrightarrow \frac{\delta}{c_0} \sim Re^{-\frac{1}{2}} \ll 1 \\ \rho c_v \mathbf{v} \cdot \nabla T \sim k \nabla^2 T &\Leftrightarrow \rho c_v \frac{T_\infty - T_s}{c_0} \sim k \frac{T_\infty - T_s}{\delta_T^2} \Leftrightarrow \frac{\delta_T}{c_0} \sim Re^{-\frac{1}{2}} Pr^{-\frac{1}{2}} \ll 1 \end{aligned} \quad (3.7)$$

, siendo δ y δ_T los espesores característicos de las capas límite correspondientes al campo de velocidades y temperaturas, respectivamente.

Por lo tanto, hechas estas aclaraciones, vemos que existirán dos regiones claramente diferenciadas dentro del dominio fluido: una primera en la que los términos viscosos y de conducción de calor pueden ser despreciados y que debe verificar que $y \gg \delta$ y $\delta \ll c_0$; y una segunda región en la que estos dos términos no puedan ser despreciados, que se corresponderá con el resto del dominio fluido, y tendrá un espesor característico δ mucho menor que la cuerda típica de nuestra ala.

Tras haber definido estos números adimensionales de gran ayuda para estimar la importancia de unos términos frente a otros en determinadas regiones, estamos ahora en disposición de analizar las contribuciones o la importancia de cada una de estas regiones en la sustentación y resistencia aerodinámica que, como sabemos, serán la proyección según la componente perpendicular o paralela a la corriente incidente, respectivamente, de la resultante de fuerzas sobre la superficie del ala. Por tanto, tenemos que:

$$C_D = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} \mathbf{e}_1 \cdot \left(\int_{\Sigma_s} (p - p_\infty) (-\mathbf{n}_s) d\sigma \right) + \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} \mathbf{e}_1 \cdot \left(\int_{\Sigma_s} \mathbf{n}_s \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}'}} d\sigma \right) = C_{D,p} + C_{D,f} \quad (3.8)$$

$$C_L = \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} \mathbf{e}_2 \cdot \left(\int_{\Sigma_s} (p - p_\infty) (-\mathbf{n}_s) d\sigma \right) + \frac{1}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2 A} \mathbf{e}_2 \cdot \left(\int_{\Sigma_s} \mathbf{n}_s \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}'}} d\sigma \right) = C_{L,p} + C_{L,f} \quad (3.9)$$

Puesto que los esfuerzos viscosos son tangentes a la superficie, se puede ver que

$$\mathbf{n} \cdot \underline{\underline{\boldsymbol{\tau}'}} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta} (\mathbf{e}_1 \cos \alpha - \mathbf{e}_2 \sin \alpha) \sim \mu \frac{U_\infty}{c_0} Re^{\frac{1}{2}} (\mathbf{e}_1 \cos \alpha - \mathbf{e}_2 \sin \alpha) \quad (3.10)$$

, donde el ángulo de incidencia de la corriente sobre el objeto $\alpha \ll 1$ para evitar el desprendimiento de la capa límite [1], por lo que:

$$C_{L,f} \sim \mathbf{e}_2 \cdot (\mathbf{e}_1 \cos \alpha - \mathbf{e}_2 \sin \alpha) \frac{\mu A U_\infty}{\rho A U_\infty^2 \delta} \sim \alpha Re^{-\frac{1}{2}} \ll 1 \quad (3.11)$$

Dado este resultado, podremos estimar el coeficiente de sustentación – que sabemos, por resultados experimentales e históricos (véase [2]), que debe ser de orden unidad – como $C_L \simeq C_{L,p} \sim O(1)$. Por lo que, si la capa límite permanece adherida (y esto sucederá cuando $\alpha \ll 1$ [1]), no será necesario calcular la contribución de esta región de la capa límite a la sustentación. Además, el hecho de que $\alpha \ll 1$ será una de las condiciones fundamentales que nos permitirán aplicar las ecuaciones del potencial linealizadas como veremos posteriormente; lo cual simplificará notoriamente nuestro problema.

No abarcaremos aquí el estudio del coeficiente de resistencia. No obstante, para su cálculo completo sí sería necesario realizar cálculos dentro de la capa límite, lo cual no analizaremos en este trabajo. Para ver el desarrollo de estos cálculos, es posible consultar otros textos como [2].

Por tanto, viendo que solo nos centraremos en la región exterior a la capa límite, nuestras ecuaciones podrán ser modificadas y simplificadas. Sin embargo, antes de esto, es necesario ver si las condiciones de contorno (3.5) y (3.6) que habíamos definido siguen siendo válidas o se verán modificadas. Recordando que usamos un sistema de referencia ligado al sólido, las siguientes condiciones se mantienen

$$\mathbf{x} \rightarrow \infty : \quad p - p_\infty \rightarrow 0, \quad \mathbf{v} \rightarrow \mathbf{U}_\infty, \quad T \rightarrow T_\infty \quad (3.12)$$

Sin embargo, al despreciar los términos viscosos y de conducción de calor y, con ello, la capa límite, no podemos aplicar ninguna condición directamente sobre la superficie del sólido, por lo que la condición (3.6) deja de ser válida. Ahora la única condición que podemos aplicar es la de impenetrabilidad de la corriente sobre el ala, que se traduce en lo siguiente

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s = 0 \quad (3.13)$$

, donde se ha tenido en cuenta que el espesor de la capa límite es muy pequeño, con lo cual los errores que se cometen debido a la existencia de velocidades transversales en este punto son despreciables y asumibles [1]. Asimismo, esta condición la suponemos aplicada sobre Σ_s en lugar de en el exterior de la capa límite, como debería (ya que ahí es donde se cumplirán nuestras ecuaciones), dado que esto simplifica enormemente el problema. Nuevamente, los errores relativos derivados de esta aproximación son muy pequeños para los casos en los que estamos interesados [1].

Por otra parte, en los cálculos realizados hasta el momento se han omitido algunos pasos o consideraciones que se presuponen conocidas, ya que no es el objeto de este trabajo realizar un desarrollo de las ecuaciones que rigen la aerodinámica, sino que se muestran de manera meramente introductoria como una fase natural para deducir las ecuaciones de nuestro problema en las que sí estaremos interesados. Por tanto, para mayor detalle o duda, es posible consultar [1], entre otros muchos textos. Asimismo, en los desarrollos que mostraremos nos centraremos en el campo de velocidades; no obstante, el cálculo del resto de campos sería similar y se podrían obtener utilizando las relaciones vistas hasta el momento.

Como conclusión de este apartado, debemos tener presente de aquí en adelante la aproximación que estaremos realizando para el coeficiente de sustentación. Por ello, solo estaremos interesados en calcular la resultante de presiones sobre el cuerpo y en eso nos centraremos a partir de ahora, dejando de lado el problema de capa límite. Todos los cálculos que se desarrollen de aquí en adelante se harán, por tanto, bajo estas premisas.

3.3 Linealización de las ecuaciones

A partir de las simplificaciones que hemos visto en el apartado anterior, podemos llegar a unas conclusiones básicas que serán en las que se base la linealización de las ecuaciones:

- Puesto que $\alpha_0 = \alpha(y=0) \sim \alpha(y) \ll 1$ (siendo α_0 el ángulo de ataque característico, que no tiene por qué ser constante a lo largo de la envergadura), la capa límite permanece adherida, por lo que no habrá desprendimiento de la corriente.

- Por este mismo motivo, la estela y el perfil forman ángulos de ataque pequeños con la corriente incidente y podremos aproximar el ala por su proyección en planta.
- $h_0 \ll c_0, b$ (siendo h_0 el espesor característico del ala).

Por tanto, uniendo todo esto, podemos concluir que el ala introduce pequeñas perturbaciones en la corriente incidente. Esto nos permite escribir los campos de velocidades, presión y densidad como sigue [3]:

$$\begin{aligned}\vec{v}(\vec{x}) &= \vec{U}_\infty + \vec{v}'(\vec{x}), \quad |\vec{v}'(\vec{x})| \ll U_\infty \\ p(\vec{x}) &= p_\infty + p'(\vec{x}), \quad p'(\vec{x}) \ll p_\infty \\ \rho(\vec{x}) &= \rho_\infty + \rho'(\vec{x}), \quad \rho'(\vec{x}) \ll \rho_\infty\end{aligned}\tag{3.14}$$

Siendo $\vec{v}'(\vec{x})$, $p'(\vec{x})$ y $\rho'(\vec{x})$ los campos de perturbación de velocidades, presiones y densidades, respectivamente.

Esto también nos permite realizar las siguientes aproximaciones trigonométricas: $\sin \alpha \simeq \alpha$ y $\cos \alpha \simeq 1$.

A partir de esta linealización, se puede demostrar que los resultados a los que llegamos para C_L nos revelan que podemos expresarlo como una función lineal con el ángulo de ataque, $C_L = C_{L\alpha} \alpha$, siempre que se verifiquen las hipótesis de partida [1]. Al coeficiente $C_{L\alpha}$ se le suele dar el nombre de pendiente de la curva de sustentación y, para la aerodinámica potencial linealizada, conocido el ángulo de ataque del ala, calcular su valor es equivalente a calcular el coeficiente de sustentación. Este parámetro resulta muy interesante puesto que nos da una idea de cuánta sustentación genera el ala a ángulos de ataque pequeños, sin necesidad de conocer el ángulo de ataque de esta, y es una forma de comparar unas alas con otras, una determinada distribución de perfiles frente a otra...

De aquí en adelante, en ocasiones hablaremos indistintamente de, por ejemplo, $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ o $\mathbf{v}'(\mathbf{x})$. Sin embargo, no debemos olvidar que, por la definición que hemos dado de ellas, conocida una de ellas, la otra queda totalmente definida, por lo que será equivalente hablar de una expresión u otra.

3.4 Vorticidad y movimientos irrotacionales

En esta sección y las posteriores trataremos de simplificar el sistema de ecuaciones (3.1) – (3.3) al que nos enfrentamos para resolver nuestro problema, escribiendo las ecuaciones solo en aquellas regiones del dominio fluido no afectadas por los efectos viscosos ni de conducción de calor y con el resto de simplificaciones expuestas hasta el momento.

Como ya sabemos, estamos considerando aquellos casos en los que las partículas fluidas provienen de una región en la que los valores de las variables termodinámicas son uniformes e iguales a p_∞ , ρ_∞ y T_∞ . De las ecuaciones deducidas anteriormente, sabemos que la entropía se conservaba en todos los puntos exteriores a la capa límite y la estela [1], por lo que

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \Leftrightarrow \rho = \rho_\infty \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \Rightarrow \nabla p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \nabla \rho = a^2 \nabla \rho\tag{3.15}$$

Si definimos ahora el vector vorticidad como $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ la ecuación de cantidad de movimiento en función de este queda como

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\mathbf{v} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{v^2}{2}\right) - \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \quad (3.16)$$

A partir de esto, tomando ahora el rotacional de la ecuación (3.16), y aprovechando la intercambiabilidad de las derivadas, llegamos al siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{D\mathbf{v}}{Dt} \right) &= \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \times \nabla \left(\frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \right) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) = \\ &= \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \times \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + \mathbf{v} \cdot \nabla\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = \\ &= \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{1}{\rho^2} \nabla\rho \times \nabla p = \frac{a^2}{\rho^2} \nabla p \times \nabla p = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Puesto que sabemos que la divergencia de un rotacional y el rotacional de un gradiente son 0, podemos simplificar esta última ecuación (3.17):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla\boldsymbol{\omega} &= \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{v} - \boldsymbol{\omega} \nabla \cdot \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla\mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \boldsymbol{\omega} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\rho} \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} - \frac{1}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \boldsymbol{\omega} &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \right) = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\rho} \cdot \nabla\mathbf{v} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sabiendo ahora que, suficientemente lejos del sólido la vorticidad es nula (por su propia definición) y el vector \mathbf{v} tiende a \mathbf{U}_∞ , podemos concluir, sin más que integrar su expresión entre $-\infty$ y un valor x genérico, que $\boldsymbol{\omega}(x, y, z) = 0$ para cualquier (x, y, z) perteneciente al dominio fluido no afectado por la viscosidad.

Por tanto, el vector velocidad será irrotacional, de modo que podemos asegurar que proviene de un gradiente $\mathbf{v} = \nabla\phi$, donde ϕ es una función escalar que denominaremos *potencial de velocidades* y que se convertirá en nuestra incógnita de aquí en adelante. Esto simplificará enormemente el problema, como se demostrará a continuación.

3.5 Ecuaciones del flujo potencial

Puesto que ya hemos demostrado que podemos reducir nuestro problema al cálculo de la función $\phi(x, y, z)$, en esta sección nos centraremos en la reducción de las ecuaciones anteriormente mostradas a una ecuación en ϕ . También se expresarán las condiciones de contorno en función de esta incógnita.

Como ya mostramos cómo descomponíamos el campo de velocidades en la velocidad en el infinito aguas arriba más un campo de perturbaciones mucho menor en módulo que esta U_∞ , para el potencial es inmediato ver que podemos hacer la misma descomposición, de modo que $\phi(\mathbf{x}) = \phi_\infty + \phi'(\mathbf{x})$.

Recordemos ahora que, por ser el flujo irrotacional, entonces se verifica que $\mathbf{v} = \nabla\phi$. Esto podemos garantizarlo en las regiones exteriores a la capa límite y a la estela. Aquí podemos expresar la ecuación de cantidad de

movimiento (3.2), en base a las simplificaciones que hemos visto anteriormente y mediante esta transformación, como

$$\frac{\partial \nabla \phi}{\partial t} + \nabla \left(\frac{|\nabla \phi|^2}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (3.19)$$

De la definición de entalpía y recordando que $dS = 0$

$$dh = d \left(e + \frac{p}{\rho} \right) = T dS - p d \left(\frac{1}{\rho} \right) + p d \left(\frac{1}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho} dp = \frac{1}{\rho} dp \quad (3.20)$$

Esta ecuación debe cumplirse para cualquier incremento diferencial, luego también debe hacerlo para $\nabla h = \nabla p / \rho$. Por tanto, volviendo a la expresión (3.19) tenemos ahora que

$$\nabla \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + h \right] = 0 \quad (3.21)$$

Teniendo en cuenta que $C_p/C_v = \gamma$ y que $R_g/C_v = \gamma - 1$, la entalpía queda como

$$h = C_p T = \frac{C_p p}{R_g \rho} = \frac{\left(\frac{C_p}{C_v} \right) p}{\left(\frac{R_g}{C_v} \right) \rho} = \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} \right) \frac{p}{\rho} = \frac{a^2}{\gamma - 1} \quad (3.22)$$

Por tanto,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{|\nabla \phi|^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma - 1} = C(t) \quad (3.23)$$

, siendo $C(t)$ una función que solo depende del tiempo.

Vemos ahora que el problema queda reducido al cálculo de ϕ y $\nabla \phi$ sobre la superficie del sólido.

Para el caso incompresible ($\equiv \rho = cte$), ampliamente estudiado por muchos autores, el problema puede reducirse a una forma muy sencilla y se puede comprobar que, cometiendo errores del orden de $O(M^2)$, siendo $M = |\mathbf{v}|/a$ el número de Mach (donde a representa la velocidad del sonido a una determinada altura), finalmente se llega a que el potencial verifica la denominada ecuación de Laplace [1], es decir,

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (3.24)$$

Esta aproximación, denominada casi incompresible, da buenos resultados, según los errores que hemos visto que se cometen, cuando $M_\infty^2 \ll 1$, es decir, cuando el número de Mach verifica $M_\infty < 0.3$. Esta simplificación nos permitirá resolver el sistema general de una forma mucho más sencilla, al convertirse este en la ecuación de Laplace, con soluciones elementales ya conocidas. La linealidad de esta ecuación nos permitirá superponer, como se adelantó en capítulos anteriores, soluciones elementales para hallar la solución general a nuestro problema, lo cual es un método clásico para abarcar esta resolución.

La suposición de un flujo incompresible alrededor del ala introducirá unos ciertos errores en nuestro método dependiendo del régimen que estemos considerando. No obstante, esta hipótesis es adoptada en numerosas ocasiones por otros autores para realizar los estudios y veremos que simplifica enormemente el problema y, además, nos permitirá comparar nuestros resultados con otros reportados de la literatura. Asimismo, para el caso del que hablábamos al principio del estudio del movimiento de la cola de un pez en el agua, al ser este medio

casi incompresible, esta ecuación reportará buenos resultados.

En algunos de los apartados siguientes abarcaremos el estudio analítico y numérico de este problema para ver cómo es la solución al mismo y cómo podemos deducirla de manera natural, sin necesidad de suponer ninguna solución previamente y luego verificar su validez. Para ello, haremos uso del denominado *método de Green*, entre otras herramientas.

Al no estar interesados en los cálculos que llevan al resultado (3.24), que no son más que simples manipulaciones de las ecuaciones, no se han incluido en este apartado. Para mayor detalle es posible consultar cualquiera de los textos de las referencias.

Por último, es sencillo expresar las condiciones de contorno que cierran el problema en función del potencial, quedando el problema completo de la forma [1]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi &= 0 \\ |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad \nabla \phi &\rightarrow U_\infty \\ \mathbf{x} \in \Sigma_S, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \phi &= 0 \end{aligned} \tag{3.25}$$

+condición de Kutta – Joukowski

Esta última condición, conocida como *condición de Kutta-Joukowski* nos permitirá elegir la solución real a nuestro problema de entre las infinitas que pueden existir para este problema. Al estar considerando el flujo ideal sin viscosidad, se obtiene que este problema admite una infinidad de soluciones. Será precisamente esta condición la que nos determine cuál de ellas es la que se da en la realidad, considerando el efecto que produce la existencia en la realidad de la capa límite sobre este flujo no viscoso. A continuación trataremos esta cuestión con algo más de detalle.

3.6 Condición de Kutta – Joukowski

En este apartado abarcaremos, brevemente, el tema de la condición de Kutta-Joukowski y sus implicaciones en el problema aerodinámico. No obstante, no entraremos en mucho detalle, puesto que no es el propósito de este escrito su estudio; pero sí será de gran importancia en el futuro a la hora de plantear nuestras ecuaciones y las condiciones de contorno que cierran el problema.

Condición de Kutta-Joukowski:

La solución real del sistema (3.25) es aquella para la que el flujo no rebordea el borde de salida.

Una vez resolvemos el sistema, podemos observar que llegamos a una solución que depende del valor de la circulación Γ (que puede ser expresado de manera inmediata en función del potencial). Este resultado aparece demostrado en varios de los títulos de las Referencias como [1] y [2]. Por ello, es necesario determinar aquel valor de Γ , de entre la infinidad de posibilidades, que hace que nuestra solución se corresponda con la realidad. Este valor está íntimamente relacionado con la posición de los puntos de remanso sobre el cuerpo cuyo efecto estamos analizando. Por tanto, es necesario escoger aquella configuración o posición de los puntos de remanso que garantiza que la corriente no rebordea el borde de salida. Este fenómeno se puede comprobar experimentalmente.

Esta condición, junto con el hecho de que la presión ha de ser igual tanto en extradós como en intradós en el

borde de salida [3], indica simplemente el hecho de que no somos capaces de soportar una diferencia de presiones en las regiones en las que no existe presencia de un sólido.

Para el caso estacionario, esto implica que las velocidades del fluido han de ser iguales en ambas caras. Como la velocidad es tangente a los perfiles, en el caso de que el borde de salida sea anguloso, esta condición se traduce en que dicho punto ha de ser un punto de remanso; en el caso de que sea de retroceso, implica que las velocidades de intradós y extradós han de tener el mismo sentido y módulo, pero no necesariamente debe tratarse de un punto de remanso.

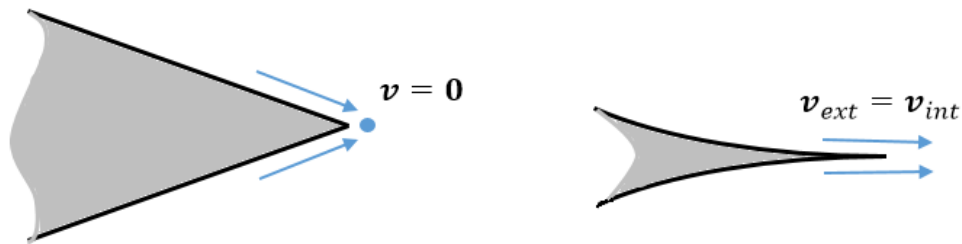


Figura 3. Condición de Kutta para el problema bidimensional.

La extensión de esta *Figura 3* a 3D es inmediata.

Posteriormente deduciremos en qué se traduce esta condición en términos de nuestras variables, tanto para el caso estacionario como para el no estacionario, en mayor detalle.

Dicho todo esto, damos por concluida, por tanto, la búsqueda de la ecuación y condiciones de contorno que definen nuestro problema. Llegados al sistema (3.25), en los capítulos siguientes nos centraremos en la resolución de este sistema con la ayuda de métodos clásicos y métodos numéricos.

4 MÉTODO DE GREEN

A continuación expondremos un método clásico conocido como método de Green, que se formula bajo las hipótesis citadas hasta el momento y que nos permitirá obtener la ecuación necesaria para resolver de manera numérica la ecuación de Laplace sujeta a la condición de contorno de impenetrabilidad sobre la superficie de un sólido genérico. Este método lo que nos permite es obtener, de forma natural, cuál es la solución al problema que estamos resolviendo, sin tener que suponerla conocida desde el principio, como sucede en otros métodos, en los que se suponen soluciones elementales del problema, se superponen para hallar la solución y a posteriori se verifica que la solución sea la correcta.

Comenzaremos analizando este método en 2D, ya que esto nos permitirá definir los dominios de integración y mecanismos físicos de manera mucho más sencilla e ilustrativa. Posteriormente, veremos su extensión a 3D, que será inmediata sin más que hacer algunos pequeños ajustes.

4.1 Estudio bidimensional

Comenzaremos mostrando este método para el caso de perfiles bidimensionales, para entrar en algo más de detalle en la física y matemática del problema y luego lo extenderemos al caso tridimensional sin más que hacer algunas pequeñas correcciones. Esto nos permitirá ilustrar más fácilmente los fenómenos y dominios de integración que intervienen en el problema, más difíciles de representar en 3D.

Este método permite expresar el valor del potencial sobre cualquier punto de la superficie del objeto como la superposición de una distribución continua de dos tipos de soluciones básicas: fuentes situadas sobre la superficie del objeto, $\psi_j = \ln\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$, donde $\mathbf{x}_j \in \Sigma_s$, y dobletes situados sobre la superficie del objeto y orientados según la normal exterior al mismo, $\mathbf{n} \cdot \nabla\psi_j$.

De las deducciones realizadas hasta el momento, el sistema a resolver (recordemos que estamos tratando ahora el caso bidimensional) queda expresado como:

$$\begin{aligned} \nabla^2\phi &= 0 \\ |x| \rightarrow \infty, \quad \phi &\rightarrow \cos\alpha x + \sin\alpha z \\ \mathbf{x} \in \Sigma_s, \quad \mathbf{n} \cdot \nabla\phi &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

+Condición de no rebordeo del borde de salida:

condición de Kutta – Jukowski.

Para su resolución se supone una función singular solución de la ecuación de Laplace, ψ_j , como ya hemos visto. Como los dos tipos de soluciones que vamos a utilizar son soluciones elementales de la ecuación de Laplace, se verifica que:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{y} \quad \nabla^2 \psi_j = 0 \quad (4.2)$$

Y, por tanto, también se cumple que

$$\psi_j \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi_j = 0 \quad (4.3)$$

Se toma la integral de volumen de esta última ecuación (4.3) extendida al dominio Ω'_c (véase *Figura 4*), el cual, para evitar la singularidad que presenta la función ψ_j que estamos utilizando, excluye el punto de singularidad añadiendo una superficie circular de radio $\epsilon \ll 1$ en torno a este punto y centrada en él. Aplicando el teorema de Gauss a esta integral, el resultado al que llegamos es el siguiente:

$$\int_{\Omega'_c} (\psi_j \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi_j) d\omega = \int_{\Omega'_c} \nabla \cdot (\psi_j \nabla \phi - \phi \nabla \psi_j) d\omega = \int_{\Sigma'_c} (\psi_j \nabla \phi - \phi \nabla \psi_j) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \quad (4.4)$$

, donde el vector normal \mathbf{n} es exterior al dominio (definido en la *Figura 4*) y $j \in [1, N]$, siendo N el número de fuentes localizadas en $\mathbf{x}_j = x'_j \mathbf{i} + z'_j \mathbf{k}$, puntos distintos sobre la superficie del perfil.

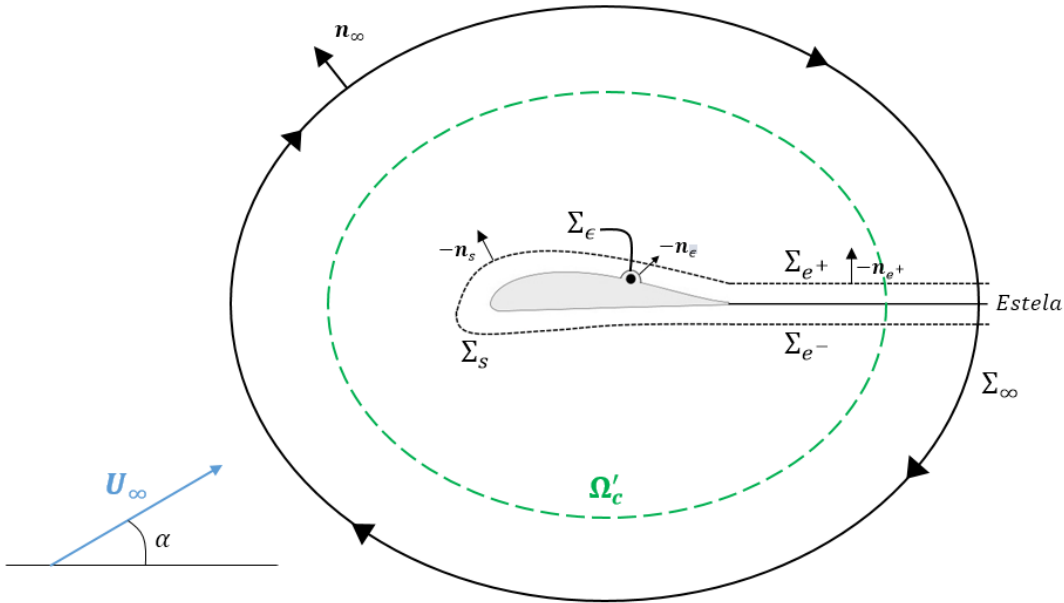


Figura 4. Dominios de integración y definición de los vectores del problema.

Llegados a este punto, para calcular esta última integral a la que hemos llegado, descomponemos la superficie como $\Sigma'_c = \Sigma_\infty \cup \Sigma_\epsilon \cup \Sigma_s \cup \Sigma_{e+} \cup \Sigma_{e-}$, de nuevo definidos en la *Figura 4*. Aplicando esta integral al potencial perturbado $\phi' = \phi - \phi_\infty$ sobre la superficie Σ_∞ , vemos que su resultado es 0, ya que el valor de ϕ' es nulo sobre esta superficie por definición. Por lo tanto, la integral que estamos interesados en calcular pasa a ser:

$$\int_{\Sigma_\epsilon \cup \Sigma_s \cup \Sigma_{e+} \cup \Sigma_{e-}} (\psi_j \nabla \phi - \phi \nabla \psi_j) \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \quad (4.5)$$

A continuación supondremos que la estela es recta y sigue la dirección de la corriente incidente. Por lo tanto, puesto que el espesor de la estela se puede despreciar, tenemos que $\mathbf{n}_{e^+} = -\mathbf{n}_{e^-}$. Asimismo, la velocidad asociada al potencial perturbado debe ser continua a través de la misma [1], por lo que $\nabla\phi'(\Sigma_{e^+}) = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\infty/u_\infty = \nabla\phi'(\Sigma_{e^-})$. Con todo esto, sustituyendo estas expresiones en el integrando, llegamos a que $\psi_j \nabla\phi' \cdot \mathbf{n}_{e^+} + \psi_j \nabla\phi' \cdot \mathbf{n}_{e^-} = 0$ sobre estas superficies. En el caso no-estacionario, la condición de que la velocidad debe ser continua a través de la estela no es necesariamente cierta; sin embargo, sabemos que, en el punto donde termina la estela, sí se verificará esta condición, luego, al ser diferenciales exactas las que estamos tratando e integrar entre 2 extremos donde el integrando es nulo, el resultado será igualmente 0.

Luego la integral sobre las superficies Σ_{e^+} y Σ_{e^-} , que delimitan las partes superior e inferior de la estela respectivamente, queda reducida a:

$$\int_{\Sigma_{e^+} \cup \Sigma_{e^-}} (\psi_j \nabla\phi' - \phi' \nabla\psi_j) \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \int_{\Sigma_{e^+}} (\phi^+ - \phi^-) \nabla\psi_j \cdot \mathbf{n}_{e^+} d\sigma = \Gamma \int_0^\infty \nabla\psi_j \cdot (-\mathbf{n}_{e^+}) ds \quad (4.6)$$

, donde ds es el diferencial de longitud a lo largo de la estela.

A continuación, para los desarrollos de aquí en adelante, es conveniente deshacer el cambio $\phi' = \phi - \phi_\infty$.

Por comodidad, definimos la integral

$$\begin{aligned} I_\infty &= \int_{\Sigma_s \cup \Sigma_\epsilon} (\psi_j \nabla\phi_\infty - \phi_\infty \nabla\psi_j) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \\ &= \int_{\Sigma_s} (\psi_j \nabla\phi_\infty - \phi_\infty \nabla\psi_j) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \int_{\Sigma_{\epsilon^-}} (\psi_j \nabla\phi_\infty - \phi_\infty \nabla\psi_j) \cdot \mathbf{n}_{\epsilon^-} d\sigma + \\ &+ \int_{\Sigma_\epsilon} (\psi_j \nabla\phi_\infty - \phi_\infty \nabla\psi_j) \cdot \mathbf{n}_\epsilon d\sigma + \int_{\Sigma_{\epsilon^-}} (\psi_j \nabla\phi_\infty - \phi_\infty \nabla\psi_j) \cdot (-\mathbf{n}_{\epsilon^-}) d\sigma = I_{\infty,s} + I_{\infty,\epsilon} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Donde las superficies y las normales aquí presentadas aparecen esquematizadas en la *Figura 4* para mayor claridad; entendiendo la superficie Σ_ϵ como el círculo completo, Σ_{ϵ^+} el semicírculo superior y Σ_{ϵ^-} el inferior.

Vemos que la integral $I_{\infty,\epsilon}$ es la integral sobre una superficie circular de radio $\epsilon \rightarrow 0$. Si recordamos que definimos $\psi_j = \ln\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j\|$, sobre esta superficie, $\psi_j = \ln \epsilon$ y, por tanto, $\mathbf{n} \cdot \nabla\psi_j = -\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r (1/\epsilon) = -1/\epsilon$. De modo que

$$I_{\infty,\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} [(\ln \epsilon) \nabla\phi_\infty \cdot \mathbf{n}_\epsilon + (\ln \epsilon) \phi_\infty] \epsilon d\theta = 2\pi \phi_\infty(\mathbf{x}_j) \quad (4.8)$$

Para esta última expresión, se ha tenido en cuenta que $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \ln \epsilon \rightarrow 0$.

Para la segunda integral, $I_{\infty,s}$, aplicaremos el teorema de Gauss, de modo que podemos reescribir su expresión como

$$I_{\infty,s} = - \int_{\Omega_{s,\infty}} (\psi_j \nabla^2 \phi_\infty - \phi_\infty \nabla^2 \psi_j) d\omega = 0 \quad (4.9)$$

Como vemos, en el volumen encerrado por la superficie $\Sigma_s \cup \Sigma_{\epsilon^-}$, $\nabla^2 \phi_\infty = 0$ y $\nabla^2 \psi_j = 0$ por no existir singularidades en su interior.

Resuelta esta integral que acabamos de definir, I_∞ , pasamos a analizar la parte del problema en que estábamos interesados. Volviendo a la ecuación (4.5), tenemos ahora que

$$\int_{\Sigma_s \cup \Sigma_\epsilon} (\psi_j \nabla \phi' - \phi' \nabla \psi_j) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \int_{\Sigma_s \cup \Sigma_\epsilon} (\psi_j \nabla \phi - \phi \nabla \psi_j) \cdot \mathbf{n} d\sigma - I_\infty \quad (4.10)$$

Como ya hemos calculado esta última, procedemos a continuación al siguiente cálculo

$$\int_{\Sigma_\epsilon} (\psi_j \nabla \phi - \phi \nabla \psi_j) \cdot \mathbf{n} d\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\pi \left[(\ln \epsilon) \nabla \phi \cdot \mathbf{n}_\epsilon - \left(\frac{\phi}{\epsilon} \right) (\mathbf{e}_r) \cdot (-\mathbf{e}_r) \right] \epsilon d\theta = \pi \phi(\mathbf{x}_j) \quad (4.11)$$

Ahora introduciendo todos estos resultados en la ecuación original (4.5), podemos reescribirla como

$$\begin{aligned} \phi(x'_j, z'_j) &= 2(x'_j \cos \alpha + z'_j \sin \alpha) + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_s} (-\psi_j \nabla \phi + \phi \nabla \psi_j) \cdot \mathbf{n} d\sigma + \\ &+ \frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\infty \nabla \psi_j \cdot (-\mathbf{k} \cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha) ds \end{aligned} \quad (4.12)$$

En esta expresión ya hemos considerado que la estela sigue la dirección de la corriente incidente.

Teniendo ahora en cuenta que $\mathbf{x}_j = x'_j \mathbf{i} + z'_j \mathbf{k}$, la condición de impenetrabilidad sobre el cuerpo ($\mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0$) y que, por definición,

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \psi_j = \frac{\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)} \quad (4.13)$$

Llegamos finalmente a la conocida como ecuación de Green, que tiene la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} \phi(x'_j, z'_j) &= 2(x'_j \cos \alpha + z'_j \sin \alpha) + \frac{1}{\pi} \int_{\Sigma_s} \phi(x, z) \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^2} d\sigma + \\ &+ \frac{\Gamma}{\pi} \int_{\Sigma_e} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \cdot (-\mathbf{k} \cos \alpha + \mathbf{i} \sin \alpha)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_j|^2} d\sigma \end{aligned} \quad (4.14)$$

Nótese que, con este método, llegamos a la respuesta de forma natural y razonada de que la solución al potencial, en un punto genérico (x'_j, z'_j) , es la superposición de potenciales de una distribución continua de dobletes de intensidades por unidad de longitud $\phi(x, z)$ y Γ orientados según la normal de las superficies Σ_s y Σ_e respectivamente.

Al comienzo de este apartado hablábamos también de la superposición, junto con esta solución, de potenciales de una distribución continua de fuentes. Para este caso de flujo potencial alrededor de un sólido, donde se cumple la condición de impenetrabilidad, la intensidad de estas fuentes es nula; no obstante, para casos más generales en los que esta condición no tiene por qué cumplirse, según la ecuación (4.12), también es necesario superponer los potenciales creados por una distribución continua de fuentes de intensidad por unidad de longitud $\nabla \phi \cdot \mathbf{n}$ sobre la superficie Σ_s .

Para la resolución numérica del problema mediante el uso del método de Green, bastará con dividir la superficie en N paneles y, sobre cada uno de ellos, obtendremos una ecuación al sustituir la ecuación de Green. De esta forma, discretizada la geometría, ya tendremos el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y podremos

resolver fácilmente nuestro problema sin más que solucionar este sistema al que llegamos.

No entraremos en mayor detalle en la resolución mediante el uso de este método, puesto que no es el propósito de este trabajo y en apartados posteriores veremos cuál será nuestra filosofía en mayor detalle, que no se alejará sustancialmente de esta y seguirá un procedimiento similar. De esta manera, podremos comparar características de nuestro procedimiento como la robustez del método, fiabilidad, rapidez... frente a otros métodos clásicos empleados hasta el momento.

A continuación, pasemos a analizar qué sucede con este método de Green para el caso en el que estamos interesados: para un ala en el espacio tridimensional.

4.2 Estudio tridimensional

Acabamos de introducir el método de Green para la resolución de un flujo 2D alrededor de un perfil. Con él, se ha pretendido aclarar un poco de dónde vienen las ecuaciones que se utilizarán a continuación y su justificación, puesto que las superficies de control (en el caso bidimensional) son mucho más sencillas de entender y representar, aunque en 3D serán completamente equivalentes. Ahora simplemente tendremos que aplicar las funciones correspondientes a dominios esféricos, que sería lo equivalente al caso anterior.

Bajo las hipótesis de partida reflejadas en el *Capítulo 2: Hipótesis Iniciales* de este mismo documento y las posteriores simplificaciones que hemos ido realizando, se va a proceder a resolver la ecuación que define nuestro problema, haciendo uso de la fórmula de Green deducida en el apartado anterior, extendiéndola a 3D. Para ello, de manera similar a como hicimos anteriormente, definimos una solución elemental de la ecuación de Laplace, ahora tridimensional, correspondiente a una fuente situada en el punto (x_0, y_0, z_0) , de modo que es una solución singular:

$$\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} \quad (4.15)$$

Al ser esta solución de la ecuación de Laplace, garantiza que $\nabla^2 \Psi_0 = 0$, al igual que lo garantiza el campo de velocidades que estamos buscando. Por tanto, la siguiente diferencia también lo garantizará

$$\Psi_0 \nabla^2 \mathbf{v}' - \nabla^2 \Psi_0 \mathbf{v}' = 0 \quad (4.16)$$

Vemos que llegamos a una expresión muy similar a la que teníamos en la ecuación (4.3). De igual forma que hicimos entonces, integramos en el dominio Ω'_c , que estará delimitado por las mismas superficies que antes, pero extendidas a 3D, y aplicamos el teorema de Gauss a la expresión a la que llegamos, haciendo uso de la siguiente igualdad vectorial:

$$\nabla \cdot (\Psi_0 \nabla \mathbf{v}' - \nabla \Psi_0 \mathbf{v}') = \nabla \Psi_0 \cdot \nabla \mathbf{v}' + \Psi_0 \nabla^2 \mathbf{v}' - \nabla^2 \Psi_0 \mathbf{v}' - \nabla \Psi_0 \cdot \nabla \mathbf{v}' = \Psi_0 \nabla^2 \mathbf{v}' - \nabla^2 \Psi_0 \mathbf{v}' \quad (4.17)$$

Por lo que obtenemos lo siguiente

$$\int_{\Omega_c} (\Psi_0 \nabla^2 \mathbf{v}' - \nabla^2 \Psi_0 \mathbf{v}') d\omega = \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela} \cup \Sigma_\epsilon} (\Psi_0 \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v}' - \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_0 \mathbf{v}') d\sigma = 0 \quad (4.18)$$

En esta expresión ya hemos tenido en cuenta que $\mathbf{v}' = 0$ sobre Σ_∞ , ya que con $\mathbf{r} \rightarrow \infty$ el campo de perturbaciones se hace nulo.

Calculando ahora esta integral sobre la superficie Σ_ϵ tomando límites

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\epsilon} \Psi_0 \mathbf{n}_\epsilon \cdot \nabla \mathbf{v}' d\sigma = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\epsilon} \frac{1}{\epsilon} \mathbf{n}_\epsilon \cdot \nabla \mathbf{v}' d\sigma \rightarrow 0 \quad (4.19)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\epsilon} -\mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_0 \mathbf{v}' d\sigma = -\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Sigma_\epsilon} \frac{\mathbf{v}'(\mathbf{x})}{\epsilon^2} d\sigma = -4\pi \mathbf{v}'(\mathbf{x}_0)$$

La justificación de estos dos límites es la siguiente. En primer lugar, debemos tener claro que el dominio sobre el que calculamos la integral es una esfera. Por tanto, la función Ψ_0 , que va como la inversa a la distancia, en este caso, irá como la inversa del radio, siendo este ϵ . Por esto mismo, $\nabla \Psi_0$ irá como $1/\epsilon^2$. Ahora, como estamos calculando una integral de superficie, $d\sigma$ introducirá un término ϵ^2 . Aclarado todo esto, es trivial ver los resultados. En la primera expresión de (4.19), el ϵ del denominador se anula, quedando solo ϵ en el numerador que, como tiende a 0 según el límite que estamos calculando, hace que toda la integral tienda también a 0. En la segunda expresión sucede algo similar, solo que en este caso se anulan los dos ϵ^2 de numerador y denominador y aparece el término 4π que proviene del cálculo del área de la esfera. De esta forma, quedan justificados los resultados de estos dos límites.

Por tanto, tras estos resultados, podemos reescribir la ecuación (4.18) como

$$4\pi \mathbf{v}'(\mathbf{x}_0) = \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} (\Psi_0 \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v}' - \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_0 \mathbf{v}') d\sigma \quad (4.20)$$

, que multiplicando por el vector unitario \mathbf{k}

$$4\pi w'(\mathbf{x}_0) = \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} (\Psi_0 \mathbf{n} \cdot \nabla w' - \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_0 w') d\sigma \quad (4.21)$$

Ahora, como por continuidad debe garantizarse que $w'(x, y, z = 0^+) = w(x, y, z = 0^-)$, y la normal exterior a las superficies es \mathbf{k} para Σ_{ala}^- y Σ_{estela}^- y $-\mathbf{k}$ para Σ_{ala}^+ y Σ_{estela}^+ ; obtenemos que

$$\int_{\Sigma_{ala}^+ \cup \Sigma_{ala}^-} \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_0 w' d\sigma = 0 \quad y \quad \int_{\Sigma_{estela}^+ \cup \Sigma_{estela}^-} \mathbf{n} \cdot \nabla \Psi_0 w' d\sigma = 0 \quad (4.22)$$

Con lo que llegamos a

$$\begin{aligned} 4\pi w'(\mathbf{x}_0) &= \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} \Psi_0 \mathbf{n} \cdot \nabla w' d\sigma = \\ &= \int_{\Sigma_{estela}^+ \cup \Sigma_{ala}^+} -\Psi_0 \frac{\partial w'^+}{\partial z} d\sigma^+ + \int_{\Sigma_{estela}^- \cup \Sigma_{ala}^-} \Psi_0 \frac{\partial w'^-}{\partial z} d\sigma^+ \end{aligned} \quad (4.23)$$

, donde $w'^{+,-}$ representan la componente de velocidad de perturbación vertical sobre el extradós y el intradós respectivamente.

La ecuación de continuidad (para régimen incompresible) impone que $\nabla \cdot \mathbf{v}' = 0$, luego, aplicándola en extradós e intradós:

$$\begin{aligned}\frac{\partial w'^{+}}{\partial z} &= -\frac{\partial u'^{+}}{\partial x} - \frac{\partial v'^{+}}{\partial y} \\ \frac{\partial w'^{-}}{\partial z} &= -\frac{\partial u'^{-}}{\partial x} - \frac{\partial v'^{-}}{\partial y}\end{aligned}\quad (4.24)$$

Ahora debemos hacer una distinción. En el caso estacionario, al no haber salto de presiones a través de la estela,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 - \frac{1}{2}\rho [(U_{\infty} + u'^{+})^2 + (w'^{+})^2 + (v'^{+})^2] &\simeq -\rho U_{\infty} u'^{+} = \\ = \frac{1}{2}\rho U_{\infty}^2 - \frac{1}{2}\rho [(U_{\infty} + u'^{-})^2 + (w'^{-})^2 + (v'^{-})^2] &\simeq -\rho U_{\infty} u'^{-} \\ \Rightarrow u'^{+} &= u'^{-}\end{aligned}\quad (4.25)$$

Para el caso no estacionario, no se verifica esta propiedad en la estela y lo único que podemos garantizar es lo siguiente

$$\frac{\partial(\phi'^{+} - \phi'^{-})}{\partial t} + U_{\infty} \frac{\partial(\phi'^{+} - \phi'^{-})}{\partial x} = 0 \quad (4.26)$$

No obstante, como sabemos, la estela tendrá una longitud finita, que irá aumentando a medida que vaya avanzando el tiempo o el movimiento. De forma que, por ejemplo, en el instante inicial, esta tendrá una longitud según X de $U_{\infty} t_0$ y así irá aumentando sucesivamente. Por tanto, justo a esa distancia de $U_{\infty} t_0$, al final de la estela, donde el fluido se encuentra sin perturbar, sí debe garantizarse que $u'^{+} = u'^{-}$ y de hecho estos dos valores deben ser idénticamente nulos por no existir perturbación alguna. Este resultado nos valdrá para poder aplicar igualmente el resultado que estamos buscando y nos permitirá generalizar tanto para estacionario como para no estacionario, como se verá en un momento.

Para nuestro último paso, necesitaremos hacer uso también de las siguientes igualdades

$$\begin{aligned}\Psi_0 \frac{\partial u'}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_0 u') - u' \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \\ \Psi_0 \frac{\partial v'}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\Psi_0 v') - v' \frac{\partial \Psi_0}{\partial y}\end{aligned}\quad (4.27)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Sigma_{estela}^{+} \cup \Sigma_{ala}^{+}} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_0 u'^{+}) d\sigma^{+} - \int_{\Sigma_{estela}^{-} \cup \Sigma_{ala}^{-}} \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_0 u'^{-}) d\sigma^{+} &= 0 \\ \int_{\Sigma_{estela}^{+} \cup \Sigma_{ala}^{+}} \frac{\partial}{\partial y} (\Psi_0 v'^{+}) d\sigma^{+} - \int_{\Sigma_{estela}^{-} \cup \Sigma_{ala}^{-}} \frac{\partial}{\partial y} (\Psi_0 v'^{-}) d\sigma^{+} &= 0\end{aligned}\quad (4.28)$$

Con todo esto, la expresión final a la que llegamos es la siguiente

$$\begin{aligned}
4\pi w'(\mathbf{x}_0) = & - \int_{\Sigma_{estela}^+ \cup \Sigma_{ala}^+} u'^+ \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} d\sigma + \int_{\Sigma_{estela}^- \cup \Sigma_{ala}^-} u'^- \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} d\sigma - \\
& - \int_{\Sigma_{estela}^+ \cup \Sigma_{ala}^+} v'^+ \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} d\sigma + \int_{\Sigma_{estela}^- \cup \Sigma_{ala}^-} v'^- \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} d\sigma
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Para esto se ha hecho uso de todo lo que dijimos anteriormente. En concreto, el hecho de que $u'^+ = u'^-$ en la estela o al final de ella, como ya hemos razonado, nos permite anular varias integrales, puesto que, al tratarse de diferenciales exactas calculadas sobre una superficie, podemos descomponerlas en una integral doble según x e y . De este modo, integrando primero en x vemos que nos quedaría un término que implica la diferencia de velocidad u' entre el borde de ataque del ala y el final de la estela. Por tanto, por esta propiedad que hemos visto, vemos que esta integral sería finalmente nula (en el borde de ataque $u' = 0$ como demostraremos en apartados posteriores).

Por último, haremos uso de la antisimetría del campo de velocidades, con lo que la expresión final a la que llegamos, y que usaremos para resolver numéricamente nuestro problema posteriormente, es:

$$\boxed{2\pi w'(\mathbf{x}_0) = - \int_{\Sigma_{estela}^+ \cup \Sigma_{ala}^+} u'^+ \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} d\sigma - \int_{\Sigma_{estela}^+ \cup \Sigma_{ala}^+} v'^+ \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} d\sigma} \tag{4.30}$$

Por tanto, debemos tener presente esta expresión en todo momento en los cálculos que realicemos de aquí en adelante, que no tendrán otro objetivo más que hallar los valores que hacen que nuestro problema se corresponda con el real.

Para el caso particular del régimen estacionario, si se tiene en cuenta que, por la teoría linealizada, las velocidades de perturbación vertical son iguales en cada punto de extradós e intradós tanto sobre la superficie del ala como sobre la de la estela y que el campo de velocidades de perturbación es antisimétrico respecto a $z = 0$ [1], es decir, $u'^+ = -u'^-$ y $v'^+ = v'^-$; como también debe cumplirse la igualdad (4.25) sobre la estela, se llega a la conclusión de que $u' = 0$ en la estela. Esto permite simplificar la ecuación (4.30), evitando en el primer término el cálculo sobre la superficie de Σ_{estela}^+ .

Esta expresión es completamente análoga a la que obtuvimos para el caso 2D. Si derivamos la expresión de Ψ_0 como se muestra en la ecuación (4.31) y combinamos su resultado con la ecuación a la que acabamos de llegar, vemos que ahora la ecuación (4.30) nos demuestra que podemos expresar la componente vertical del campo de velocidades de perturbación como la superposición de los campos de velocidades creados por una distribución continua de torbellinos situados sobre la superficie del ala de intensidad por unidad de longitud $2u'^+(x, y)$ según la dirección \mathbf{j} ; más la suma de los campos de velocidades generados por una distribución continua de torbellinos situados tanto sobre la superficie del ala como la de la estela de intensidad por unidad de longitud $2v'^+(x, y)$, situados siguiendo la dirección \mathbf{i} (Ecuación (4.32)).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Psi_0}{\partial x} &= \frac{x_0 - x}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}} \\
\frac{\partial \Psi_0}{\partial y} &= \frac{y_0 - y}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Un detalle importante de estas ecuaciones es que nos han permitido deducir la ley de Biot-Savart, sin necesidad de suponerla conocida desde el principio. Además, si recordamos, en esta ley el factor constante que aparece es

$1/4\pi$, y es por esto que aparece el factor de 2 en la intensidad por unidad de longitud de los torbellinos ($2u'^+$ ó $2v'^+$), por comparación con la expresión (4.32).

$$w'_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}^+ \cup \Sigma_{estela}^+} u'^+ \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} d\sigma \quad (4.32)$$

$$w'_2 = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala}^+ \cup \Sigma_{estela}^+} v'^+ \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} d\sigma$$

Por tanto vemos que, de nuevo, al igual que sucedía anteriormente, el método nos lleva a obtener, de forma natural, cuál es la solución a nuestro problema, sin necesidad de hacer ninguna suposición que requiera de una posterior comprobación; simplemente eligiendo al principio una función singular que verifique la ecuación de Laplace. En este apartado se han detallado menos los pasos realizados por ser prácticamente idénticos a los dados en el caso 2D, con las pequeñas variaciones que introduce el hecho de considerar efectos tridimensionales como el rebordeo. Estos resultados nos permitirán avanzar en el método de resolución numérica que será explicado a continuación.

Una vez llegados a este punto, bastaría con determinar cuál debe ser la intensidad por unidad de longitud de estos torbellinos para tener el problema completamente determinado. La solución finalmente será aquella que garantice la condición de impenetrabilidad sobre el ala. No obstante, no entraremos en detalle en este punto, puesto que lo único que queríamos ilustrar con este apartado es la forma de llegar a las soluciones elementales que estamos buscando de manera natural, sin necesidad de suponer a priori ninguna de ellas y obtener estas ecuaciones necesarias para cálculos posteriores como base del método. Para la determinación de las soluciones, utilizaremos el método que a continuación se detalla.

5 MÉTODO DE RESOLUCIÓN NUMÉRICA

Legamos ahora a uno de los puntos clave de este trabajo: la explicación del método que utilizaremos para resolver el problema sustentador numéricamente. En base a todas las ecuaciones que hemos ido viendo hasta el momento, desarrollaremos nuestra nueva propuesta de método para la resolución del problema aerodinámico para el caso de un ala tridimensional y finita, que serán aquellas que encontremos en la realidad. Las simplificaciones adoptadas hasta el momento siguen siendo válidas.

En primer lugar, tal y como sabemos de las expresiones deducidas anteriormente, podemos determinar la resultante del campo de presiones sobre el ala como:

$$\vec{F}(t) = \int_{\Sigma_{ala}} (p - p_{\infty})(-\vec{n}_s) d\sigma \quad (5.1)$$

, donde esta fuerza $F(t)$, en general, dependerá del tiempo y puede ser descompuesta en una componente vertical y otra horizontal sin más que proyectar sobre los vectores unitarios en cada dirección que ya definimos en los primeros apartados:

$$\begin{aligned} E &= \vec{F} \cdot \vec{e}_1 \\ F_v &= \vec{F} \cdot \vec{e}_2 \end{aligned} \quad (5.2)$$

A partir de la ecuación de conservación de cantidad de movimiento (3.2) simplificada con todas las hipótesis ya mencionadas, podemos deducir la ecuación de Euler-Bernoulli como sigue:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p \quad (5.3)$$

Ahora, teniendo en cuenta que podemos escribir el campo de perturbaciones de velocidad como el gradiente de un campo escalar y que $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} \right)$, junto con la definición del módulo de un vector $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2$, podemos reescribir la expresión anterior como sigue

$$\mathbf{v}' = \nabla \phi' : \quad \nabla \left(\rho \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p \right) = 0 \Rightarrow \rho \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + p = cte = \frac{1}{2} \rho u_{\infty}^2 + p_{\infty} \quad (5.4)$$

, donde en la ecuación (5.4) se ha hecho uso de la intercambiabilidad de las derivadas. En esta misma ecuación, en el desarrollo final también se ha hecho uso del hecho de que el valor de la expresión debe ser constante para cualquier punto del dominio fluido y conservarse por tanto en todo el dominio, incluyendo en el infinito aguas arriba, siendo esta la justificación del resultado obtenido.

Obtenemos así la ecuación de Euler-Bernoulli para un movimiento general (estacionario o no estacionario), que será de gran utilidad de aquí en adelante.

De nuevo, como venimos haciendo hasta el momento, linealizando y despreciando los términos de órdenes inferiores, esta quedaría de la forma:

$$\rho \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \rho u_{\infty} u' + p' = 0 \quad (5.5)$$

, donde se ha tenido en cuenta que $\mathbf{v} = (U_\infty + u')\mathbf{e}_1 + v'\mathbf{e}_2 + w'\mathbf{e}_3$.

Luego,

$$p - p_\infty = -\rho \left(\frac{\partial \phi'}{\partial t} + u_\infty u' \right) \quad (5.6)$$

Por lo tanto, vemos que para determinar el campo de presiones sobre el ala bastará con conocer la expresión de ϕ' sobre esta (la expresión de u' sabemos que queda determinada por la de ϕ' sin más que derivar respecto a x).

Por otro lado, sabemos que en la región en la que no existe sólido, se verifica que:

$$\rho \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho u_\infty \frac{\partial \phi'}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{D\phi'}{Dt} = 0 \quad (5.7)$$

Es decir, la derivada sustancial de ϕ' es 0.

La justificación de la expresión (5.7) reside en que, como ya vimos por la condición de Kutta, solo se puede soportar una diferencia de presión en las regiones en las que existe sólido; en el resto, no puede existir ningún salto de presión en un punto. Por tanto, la deducción que hemos tenido que utilizar es que la presión en cada punto debe ser igual a p_∞ . Lógicamente, esta deducción es aplicable para cada punto donde no haya sólido, como es el caso de la estela (no es posible que un punto soportara una diferencia de presión tan grande en un espesor infinitesimal).

La ecuación (5.6), ya linealizada, podemos aplicarla tanto a las partículas fluidas del extradós como a las del intradós, de modo que

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \phi'^+}{\partial t} + \rho u_\infty \cdot u'^+ + p'^+ &= 0 \\ \rho \frac{\partial \phi'^-}{\partial t} + \rho u_\infty \cdot u'^- + p'^- &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

Restando las dos expresiones de la ecuación (5.8) y aplicando la definición de $u' = \frac{\partial \phi'}{\partial x}$,

$$\boxed{\rho \frac{\partial}{\partial t} (\phi'^+ - \phi'^-) + \rho u_\infty \frac{\partial}{\partial x} (\phi'^+ - \phi'^-) + p'^+ - p'^- = 0} \quad (5.9)$$

Deberemos tener en mente en todo momento esta última expresión (5.9), a la que hemos llegado, pues será la base para definir todo nuestro movimiento y nuestras condiciones de contorno de aquí en adelante.

En primer lugar, describiremos precisamente estas condiciones de contorno para nuestro problema. Como sabemos, aguas arriba, donde no existe sólido, $p'^+ - p'^- = 0$, ya que sabemos que solo somos capaces de soportar una diferencia de presión si existe un sólido de por medio. Por tanto, la ecuación (5.9) quedaría de la forma

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\phi'^+ - \phi'^-) + \rho u_\infty \frac{\partial}{\partial x} (\phi'^+ - \phi'^-) = 0 \quad (5.10)$$

De la expresión (5.10) podemos simplificar ρ y la ecuación resultante la podemos expresar como

$$\frac{D(\phi'^+ - \phi'^-)}{Dt} = 0 \quad (5.11)$$

Si recordamos, el operador *derivada sustancial* es equivalente a calcular la variación temporal de una variable fluida ($\phi'^+ - \phi'^-$ en este caso) para un observador que se mueve con la partícula a U_∞ según la ecuación a la que hemos llegado. Por tanto, como sabemos que, en el infinito aguas arriba, $\phi'^+ - \phi'^- = 0$, ya que no existe perturbación alguna, tendremos que esta magnitud se conservará en todo el dominio fluido en el que no existe sólido. Por tanto, en el borde de ataque y los bordes marginales también debe verificarse, por lo que ya tenemos las condiciones de contorno en estos puntos:

$$\boxed{\phi' = 0 \text{ en borde de ataque y bordes marginales}}$$

De esta manera se reduce nuestro número de ecuaciones, ya que el potencial será conocido en todos estos puntos y, por tanto, no necesitaremos las ecuaciones correspondientes. Desde el punto de vista numérico, esto tendrá repercusión en el número de puntos de colocación que necesitaremos (que se reducirá, como ya veremos), así como en el número de recursos necesarios.

Para el resto del campo ϕ' , utilizaremos la *Ley de Biot-Savart*, al igual que hacen otros métodos muy similares al nuestro. Por lo tanto, sabemos que, de manera análoga a lo que empleábamos en el método de Green extendido a 3D, podemos definir una misma función que en el caso anterior con la forma:

$$\psi_0 = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (5.12)$$

Esta es solución elemental de la ecuación $\nabla^2 \phi' = 0$ para el caso 3D. Ahora, aplicando la ley de Biot-Savart y los resultados del método de Green, el resultado al que llegamos es el siguiente:

$$w' = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{ala} \cup \Sigma_{estela}} \vec{v}'_s \cdot \nabla \psi_0 d\sigma \quad (5.13)$$

, donde ϕ' es nuestra única incógnita, ya que el campo de velocidades de perturbación verticales lo podemos conocer fácilmente sin más que conocer la geometría del ala y el movimiento que le estamos imponiendo a esta. Esta ϕ' aparece como incógnita a través de \vec{v}'_s como veremos a continuación.

Es necesario por tanto aclarar que, en la ecuación anterior, \vec{v}'_s representa el campo de velocidades superficiales, es decir, $\vec{v}'_s = u'\vec{e}_1 + v'\vec{e}_2$, que podemos escribirlo en función de ϕ' sin más que hacer el cambio: $u' = \frac{\partial \phi'}{\partial x}$, $v' = \frac{\partial \phi'}{\partial y}$. Por lo tanto, vemos que, dado w' , nuestras incógnitas solo aparecerían en el integrando.

A continuación, para poder resolver nuestro problema numéricamente, lo simplificaremos discretizando el campo ϕ' sobre el ala. Para ello, dividiremos el ala primero en cuadriláteros, como vemos en la *Figura 5*, donde se muestra la división de un ala rectangular. Posteriormente extenderemos estos resultados a geometrías más genéricas con flecha y/o estrechamiento. No obstante, aquí comenzaremos con este caso más sencillo para entender la filosofía del método.

Nuestras incógnitas las situaremos sobre las esquinas de cada uno de los rectángulos. A su vez, en cada uno deberemos imponer los valores de w' sobre puntos discretos, que denominaremos *puntos de colocación* por analogía con otros métodos que también utilizan este concepto. A grandes rasgos podemos decir que la misión de estos puntos de colocación es permitirnos cerrar el sistema de ecuaciones al que nos enfrentamos al discretizar nuestro problema y su introducción viene motivada por la utilización de la función ψ_0 y su forma. Dado que la función ψ_0 presenta una singularidad cuando $\vec{r} \rightarrow \vec{r}_0$, conforme más nos acerquemos a las esquinas de los cuadriláteros, que será donde se sitúen los potenciales incógnitas de nuestro problema, más cerca estaremos de esta singularidad.

Siguiendo con la división del ala, en cada cuadrado la componente w' del campo de velocidades será la generada por ese mismo cuadrado más el que crean el resto sobre este más el inducido por los torbellinos de la estela. En principio, los resultados proporcionados por el método deben ser independientes de la situación dentro de cada

elemento de estos puntos de colocación. Sin embargo, como veremos más adelante, por motivos de condicionamiento numérico, esto no es del todo cierto.

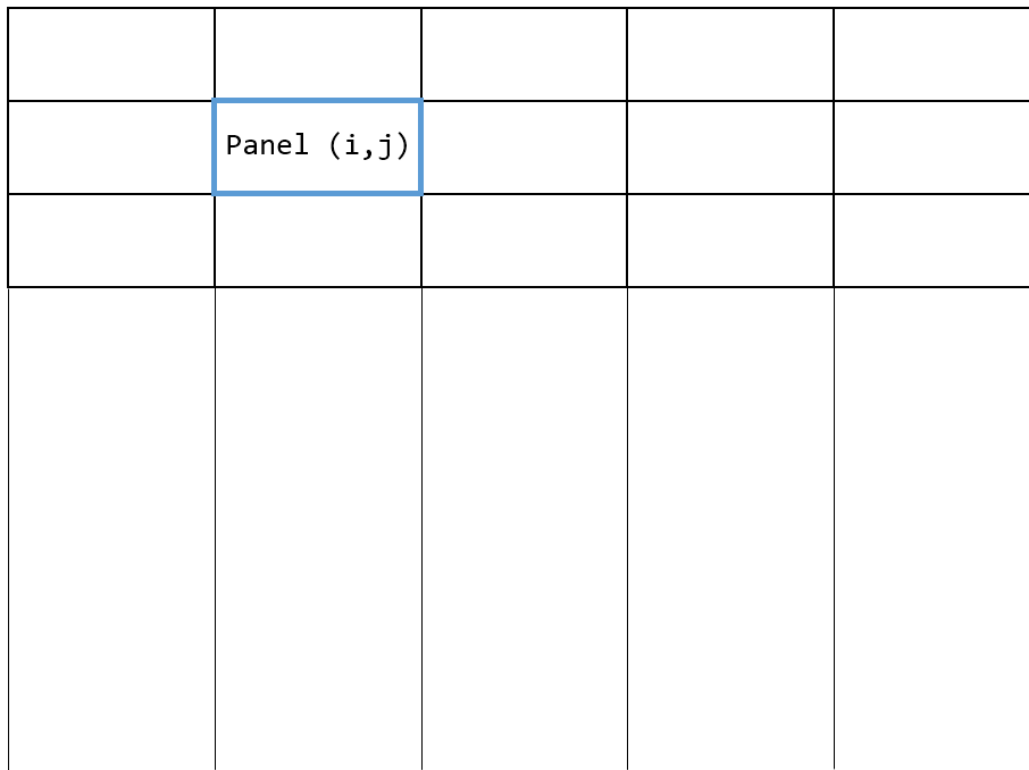


Figura 5. División en paneles de un ala rectangular.

Hecho esto, dividiremos, a su vez, cada cuadrado en 2 triángulos idénticos como se muestra en la Figura 6.

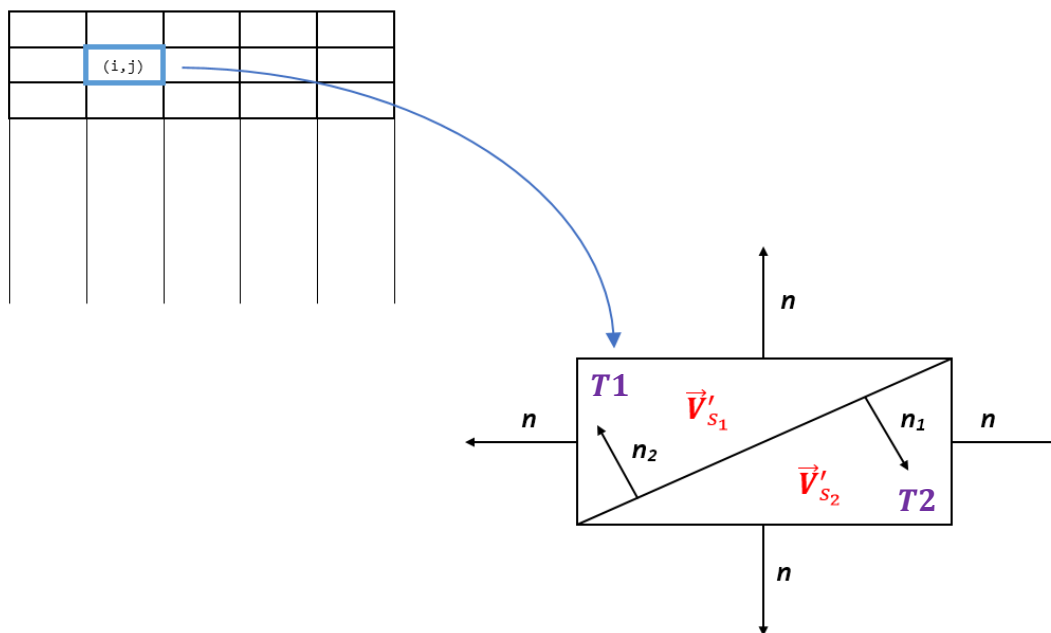


Figura 6. División en triángulos de cada panel y definición de vectores.

A continuación, haremos la aproximación numérica de suponer \mathbf{v}'_s constante en cada triángulo (\mathbf{v}'_{s1} y \mathbf{v}'_{s2}), de

modo que todas las integrales de superficie quedarán reducidas a sumas sobre cada uno de los elementos de división. Sabemos que, si los triángulos en que dividimos nuestra ala son lo suficientemente pequeños, esta aproximación será bastante buena y los errores que se cometerán serán muy pequeños. No obstante, analizaremos estos hechos posteriormente en nuestros resultados numéricos, determinando así la validez y campo de aplicabilidad del método.

Volviendo al hecho de aproximar \mathbf{v}'_s por una constante sobre cada triángulo, tenemos que

$$\vec{v}'_s \cdot \nabla \psi_0 = \nabla_s \cdot (\vec{v}'_s \psi_0) - \nabla \cdot \vec{v}'_s \psi_0 \quad (5.14)$$

Donde vemos que el último término de la igualdad se anula por haber considerado precisamente, $\vec{v}'_s = cte$. Como veremos, esto nos simplificará enormemente los cálculos.

Llegados a este punto, bastará con particularizar todas las ecuaciones anteriores para nuestro caso.

A continuación se muestran las relaciones que se cumplirán en cada triángulo particularizadas para el triángulo t_1 . Bastará para extenderlas al resto de casos con particularizar con los subíndices correspondientes, resultando expresiones idénticas a estas.

$$w'_{t_1} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma_{t_1}} \nabla \cdot (\vec{v}'_s \psi_0) d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_{C_{t_1}} (\vec{v}'_s \cdot \vec{n}_{t_1}) \psi_0 ds \quad (5.15)$$

, donde C_{t_1} representa el contorno del triángulo 1 y, en la última igualdad, simplemente se ha aplicado el teorema de Gauss. Los distintos w'_t son datos conocidos de nuestro problema, ya que los impondremos nosotros mismos a través de la posición del ala (α), el movimiento que impongamos..., como ya hemos adelantado anteriormente, simplemente adaptándolos para que se garantice la condición de impenetrabilidad sobre el sólido.

Es importante remarcar que hemos dividido nuestra geometría inicial en triángulos en lugar de dejarla dividida en cuadrados (lo cual podría parecer más sencillo a priori) porque, de esta forma, al tener 4 esquinas cada cuadrado, a la hora de calcular $\partial \phi' / \partial x$, tendríamos problemas a la hora de elegir qué ϕ'_x seleccionamos, qué Δx (recordamos que estamos aproximando esta expresión numéricamente, por lo que la derivada la sustituiríamos por incrementos en las esquinas, al ser las distancias suficientemente pequeñas)... Así, la aproximación de \mathbf{v}'_s que tanto nos simplifica el problema para la geometría triangular, nos daría grandes problemas en otro tipo de geometrías, los cuales serían más difíciles de solventar.

Retomando lo anterior y estos conceptos de aproximación de derivadas de los que estamos hablando, sobre cada cuadrado tenemos los siguientes valores:

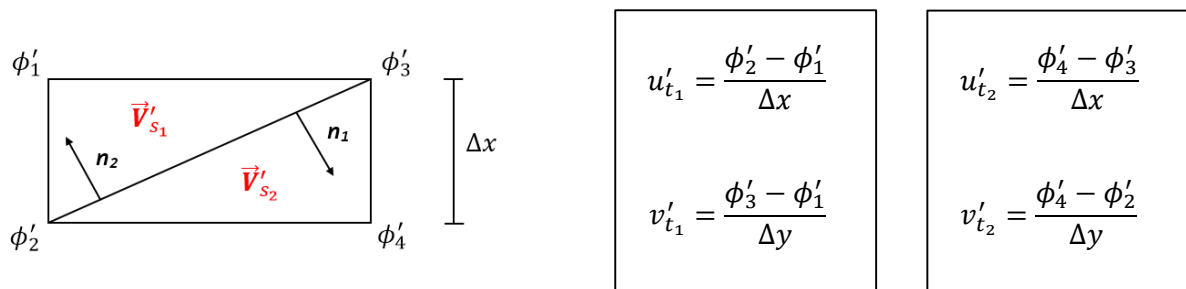


Figura 7. Definición del potencial y velocidades de perturbación.

Aunque se haya utilizado aquí el símbolo de igualdad como base para la resolución numérica del problema, realmente estas igualdades se verificarán cuando los incrementos $\Delta x, \Delta y$ tiendan a cero; aunque podemos aceptar sus resultados como válidos siempre que sean lo suficientemente pequeños, ya que se cometerán errores relativos muy pequeños, como es fácilmente demostrable.

Por otra parte, w'_t (velocidad vertical que induce cada triángulo en un punto) se compone de la suma de la contribución de cada uno de los lados ($\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$). Si analizamos en mayor detalle el problema vemos que, bajo las hipótesis que estamos analizando, podemos reducir todo nuestro problema a un problema de geometría y

desarrollos trigonométricos.

Analicemos esto en mayor detalle. Para ello, centrémonos, por ejemplo, en el lado definido por el vector normal exterior \mathbf{n}_1 de cualquiera de los 2 triángulos (el resto serían completamente análogos):

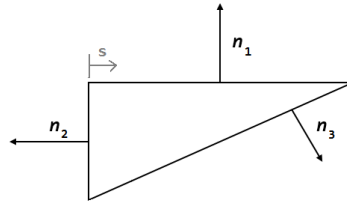


Figura 8. Detalle del triángulo 1.

Si recordamos, la integral que queríamos calcular había quedado para este *Tramo I*, después de los cambios introducidos, de la forma

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\phi'_2 - \phi'_1}{\Delta x} \int_{s_1} \psi_0 ds \quad (5.16)$$

Que, viendo la *Figura 7* y la *Figura 9*, y siguiendo la nomenclatura y los razonamientos anteriores, se reduce ahora a la expresión (5.17).

$$-\frac{1}{2\pi} \frac{\phi'_2 - \phi'_1}{\Delta x} \int_{s_1}^{s_2} \frac{1}{d(s)} ds = -\frac{1}{2\pi} \frac{\phi'_2 - \phi'_1}{\Delta x} I(s) \quad (5.17)$$

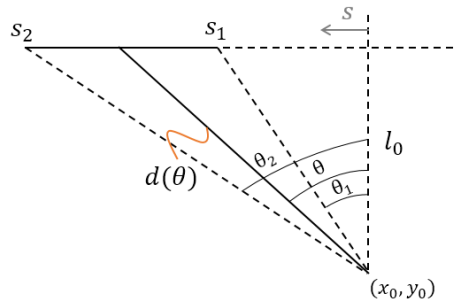


Figura 9. Definición de parámetros del problema geométrico.

Para seguir avanzando, será necesario hacer uso de las siguientes relaciones trigonométricas existentes entre las distintas variables definidas:

$$d = \frac{l_0}{\cos \theta}, \quad \tan \theta = \frac{s}{l_0} \Rightarrow s = l_0 \tan \theta \quad (5.18)$$

$$ds = l_0 d(\tan \theta) = l_0 \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$I(\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta}{l_0} \frac{l_0}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{\cos \theta} d\theta \quad (5.19)$$

Resolviendo esta integral a través de un cambio de variable:

$$\begin{aligned} I(\theta) &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\cos \theta} = \left(\begin{array}{l} \sin \theta = x \\ \cos \theta d\theta = dx \end{array} \right) = \int_{\sin \theta_1}^{\sin \theta_2} \frac{dx}{1-x^2} = \int_{\sin \theta_1}^{\sin \theta_2} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1+x) - \ln(1-x)) \Big|_{\sin \theta_1}^{\sin \theta_2} = \frac{1}{2} \left(\ln \frac{1+\sin \theta_2}{1+\sin \theta_1} - \ln \frac{1-\sin \theta_2}{1-\sin \theta_1} \right) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Por lo tanto, vemos que el problema se reduce a la determinación de los senos de 2 ángulos, lo cual es sencillo de abordar geoméricamente como sigue:

$$\sin \theta_1 = \frac{y_0 - y_1}{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}} \quad (5.21)$$

(Para $\sin \theta_2$ la expresión sería totalmente equivalente a la (5.21)).

Por último, y antes de entrar en el resto de detalles geométricos de la resolución numérica del problema, pasaremos a analizar la estela. Para el caso estacionario, sabemos que esta debe tener una longitud lo suficientemente grande en comparación con la geometría del ala, aunque no puede ser infinita lógicamente, porque si no, no sería abordable desde el punto de vista numérico. Por tanto, le daremos una extensión que se corresponderá con un cierto factor numérico entero multiplicado por la envergadura del ala. De este modo, a no ser que se tome un factor muy pequeño, se puede comprobar que se obtienen soluciones bastante razonables y que proporcionan buenos resultados. Para el caso no estacionario, la longitud de la estela irá aumentando conforme avance el movimiento; de modo que, inicialmente, esta tendrá una extensión según X de $U_\infty t_0$ y se irá propagando como veremos a continuación. Por ello, aquí es posible realizar 2 casos: una estela de longitud variable que vaya aumentando conforme una ley de variación del movimiento del ala o bien predefinir una longitud suficientemente grande de la estela, de modo que, inicialmente, sin ninguna perturbación, el potencial en esos puntos valga 0 y después se vaya actualizando conforme avanza el tiempo. Esto, lógicamente, produce mayores errores cuando se llega al límite de la dimensión predefinida; sin embargo, puede resultar interesante desde el punto de vista de que reservamos previamente un lugar en la memoria del ordenador para estos valores, luego se acelera ligeramente el proceso, no tenemos que ir variando los límites de iteración en cada instante y esto simplifica el programa... Esta segunda suposición proporciona, en general, buenos resultados puesto que, a distancias suficientemente grandes, las perturbaciones por la presencia del sólido ya pasan a ser despreciables [2]. No obstante, hace necesario comprobar a partir de qué extensión, aproximadamente, los errores que se comenten comienzan a hacerse demasiado grandes.

Por otra parte, retomando la ecuación (5.9), al no haber cuerpo sólido en la estela, esta condición se vuelve a traducir en que

$$\frac{D(\phi'^+ - \phi'^-)}{Dt} = 0, \quad \text{en la estela.} \quad (5.22)$$

, que no es más que aplicar la condición de Kutta al borde de salida.

Ahora podemos distinguir 2 casos: estacionario y no estacionario.

En el primero, la parcial temporal de ϕ' desaparece, de modo que llegamos a la siguiente expresión:

$$\frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial x} = 0 \quad (5.23)$$

, que no es más que decir que

$$u'_{bs}^+ = u'_{bs}^- \quad (5.24)$$

, donde el subíndice bs representa el valor de una determinada magnitud en el borde de salida.

Ahora bien, si recordamos, el problema sustentador es un problema antisimétrico, por lo que, para cualquier punto, debe verificarse que

$$u'^+ = -u'^- \quad (5.25)$$

Por lo tanto, para que se den las 2 condiciones (5.24) y (5.25) la única opción es que

$$u'_{bs}^+ = u'_{bs}^- = 0 \quad (5.26)$$

Y como hemos visto que debe mantenerse constante en toda la estela, tendremos que la condición recogida en la ecuación (5.26) se verificará en toda ella.

En este caso estacionario, es inmediato ver, debido a esta misma condición, que v' será constante a lo largo de toda la estela; siendo, por tanto, su valor aproximado numéricamente en ella el siguiente:

$$v' = \frac{\phi'_{bs2} - \phi'_{bs1}}{\Delta y} \quad (5.27)$$

Una vez impuestas las condiciones de contorno sobre los bordes de ataque y marginales (de las cuales ya hemos hablado), así como la condición de Kutta en el borde de salida que acabamos de ver para el caso estacionario, solo quedaría imponer la condición de impenetrabilidad sobre el ala (que determinará el valor de las velocidades de perturbación verticales) para tener nuestro problema completamente cerrado.

Por lo tanto, con esto cerraríamos nuestro problema imponiendo las w' del ala a través de esta condición y obteniendo así el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, que serían, como sabemos, las ϕ' sobre cada esquina de los cuadrados en que hayamos dividido nuestra geometría.

Pasemos a comentar a continuación el caso no estacionario.

Como hemos visto, para un caso no-estacionario general, tras ser linealizada la expresión del fluido en la estela quedaba de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\phi'^+ - \phi'^-) + u_\infty \frac{\partial}{\partial x}(\phi'^+ - \phi'^-) = 0 \quad (5.28)$$

De nuevo volvemos a tener que la derivada sustancial de $\phi'^+ - \phi'^-$ es 0 en toda la estela. Por ende, esta magnitud se mantendrá constante si nos movemos junto a una partícula fluida a U_∞ . Por tanto, ahora tenemos la situación esquematizada en la *Figura 10*.

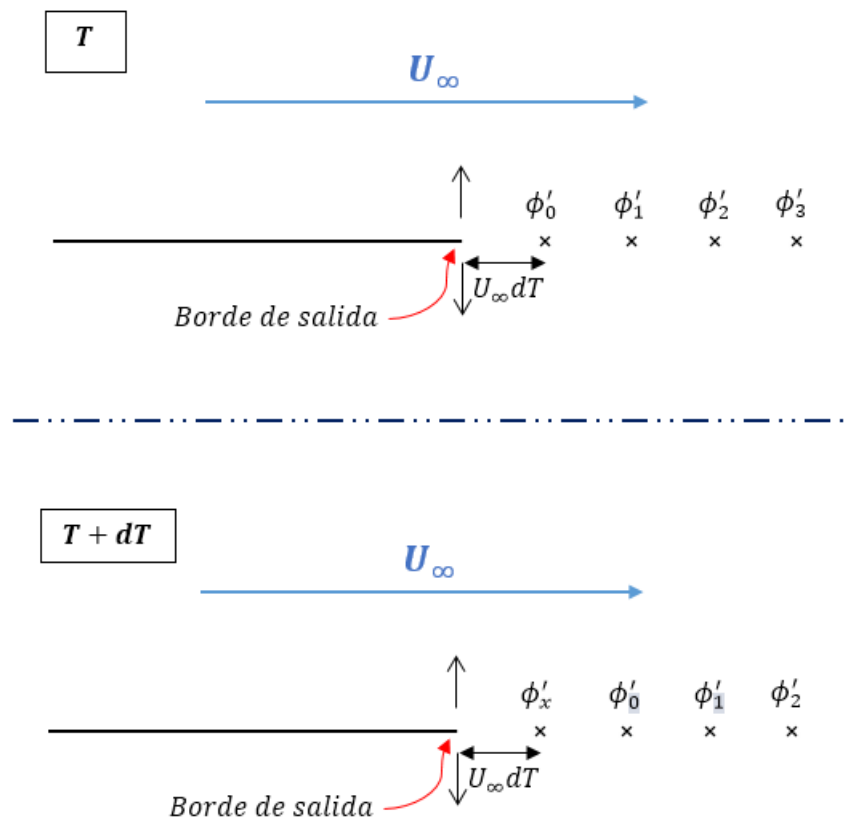


Figura 10. Evolución del potencial en la estela para el problema no-estacionario.

En esta *Figura 10* vemos una representación bidimensional del ala, donde el extremo de la derecha representa el borde de salida de la misma y los puntos tras él pertenecen a la estela. Si nos fijamos, tal y como está hecha la partición de la estela y por la ecuación (5.28), transcurrido un instante dT , la posición de un determinado punto de la estela ahora se habrá desplazado $U_\infty dT$, con lo cual el valor que tenía el potencial en ese punto (por ser nula la derivada sustancial), se habrá trasladado con la partícula. Lo mismo sucederá con el resto de partículas tras ella. Por lo tanto, esto nos simplificará notablemente nuestro problema, ya que no será necesario calcular en cada instante de tiempo el potencial en la estela, puesto que lo conoceremos de los instantes inmediatos anteriores. Por tanto, nuestra única incógnita será el potencial en el borde de salida, que ya hemos visto cómo calcularlo; para el resto, bastará con propagar estos valores en el tiempo tal y como hemos mostrado, simplificándose notoriamente la programación y reduciéndose así los cálculos y, con ello, recursos a la hora de resolver el sistema, tiempos de ejecución... Esto también nos indica que no es necesario así dividir la estela en triángulos como hacíamos en el ala, sino que bastará con hacer una división en rectángulos cuya longitud según X ya hemos determinado.

5.1 Extensión a alas en flecha

Aunque en el apartado anterior en todo momento se ha hablado de geometrías rectangulares para deducir las ecuaciones del movimiento, es inmediato ver que estas son fácilmente extensibles a otro tipo de geometrías, como alas en flecha o incluso con estrechamiento, sin más que hacer que los Δx o Δy que aparecen sean variables según sea un lado u otro del paralelogramo (los rectángulos se deformarían y pasarían a ser paralelogramos en

una geometría más general), o bien proyectando según la normal a cada lado... No obstante, esto no modificaría las ecuaciones que ya hemos visto, sino simplemente sus aproximaciones.

Además, como estos desarrollos se han hecho la mayoría para un lado cualquiera de una figura con lados rectos, es sencillo ver que no se modificarán, independientemente de si elegimos rectángulos u otro tipo de paralelogramos.

Por tanto, para conseguir un método aún más genérico y con un mayor ámbito de aplicación, todos los desarrollos geométricos y numéricos que se realicen de aquí en adelante se harán para un ala en general con flecha, como se verá en apartados posteriores. Cuando esta flecha tome el valor 0, entonces estaremos en el caso extremo de un ala rectangular.

5.2 Coeficiente de sustentación

Por último, vistas ya las ecuaciones y expresiones numéricas que nos permitirán calcular aquellos parámetros en los que estemos interesados, en este apartado introduciremos brevemente cómo se realizará el cálculo del coeficiente de sustentación, que será el principal valor en el que estemos interesados (o en su defecto $C_{L\alpha}$, para el que bastará con dividir entre el ángulo de ataque según la teoría linealizada).

Si recordamos la expresión (3.9), aplicando las simplificaciones correspondientes, una vez que desaparecen nuestras variables físicas del problema, dado que finalmente estamos interesados en calcular la resultante de presiones sobre la superficie del ala, nuestro problema se reduce a calcular (volviendo a hacer uso de la relación (5.9)):

$$\iint \left(\frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial x} \right) dx dy \quad (5.29)$$

, donde hemos transformado la integral de superficie en una integral doble, calculada según los ejes X e Y . Ahora podemos dividir claramente esta integral en dos partes. Primero calcularemos la segunda parte de esta integral, que es más sencilla.

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x_{ba}(y)}^{x_{bs}(y)} \frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial x} dx dy = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} ((\phi'_{bs}^+ - \phi'_{bs}^-) - (\phi'_{ba}^+ / \phi'_{ba}^-)) dy \quad (5.30)$$

Puesto que ya demostramos que en el borde de ataque, el potencial se anulaba. Es inmediato ver que esta expresión, finalmente, se reduce a calcular la integral según y de la función de circulación $\Gamma(y)$, que es a lo que equivale la diferencia de potenciales.

Volviendo ahora a la ecuación (5.29), tenemos la otra parte de la integral que nos quedaba por calcular:

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{x_{ba}(y)}^{x_{bs}(y)} \frac{\partial(\phi'^+ - \phi'^-)}{\partial t} dx dy \quad (5.31)$$

Para este caso, lo que haremos será discretizar la derivada temporal, calculándola numéricamente a través de una aproximación usando Euler de primer orden, obteniendo:

$$\frac{\partial \phi'}{\partial t} \simeq \frac{\phi^t - \phi^{t-1}}{\Delta t} \quad (5.32)$$

Y esta expresión la aplicaremos dentro de la primera integral de la expresión (5.29).

Esta es muy sencilla de implementar en nuestro método sin más que almacenar los valores del potencial en el instante anterior para realizar estos cálculos.

Asimismo, es importante destacar que, al tratarse de un problema antisimétrico, se verifica que $\phi'^+ - \phi'^- = 2\phi'^+$, reduciéndose así a la mitad el número de variables a calcular.

Una vez hecho todo esto, finalmente lo que obtenemos es que debemos realizar una integral en y de una función $f(y)$, lo cual será sencillo y puede realizarse de múltiples formas. Nosotros, por comodidad, precisión y otras ventajas que ofrece frente a otros métodos, utilizaremos la regla de los trapecios para resolver numéricamente esta integral.

Todos estos cálculos y este proceso de resolución numérica resultan inmediatos sin más que recordar que lo que obteníamos era el potencial en distintos puntos discretos sobre la geometría del ala y la estela.

Por tanto, llegados a este punto, ya tenemos perfectamente definido nuestro método, a falta de establecer unas ciertas relaciones geométricas para el cálculo más sencillo de las funciones que aparecen, como veremos a continuación.

5.3 Problema geométrico

Finalmente, vistos todos los desarrollos numéricos, en este apartado abarcaremos las cuestiones geométricas que terminarán de definir nuestro método. De este modo, cerraremos completamente nuestro problema y veremos que todas las ecuaciones a las que hemos llegado se reducen a un simple problema de geometría. Por tanto, no aportaremos ningún dato ni ninguna ecuación nueva, sino que nos limitaremos a reescribir las ecuaciones actuales para dejarlas como una función de nuestra geometría.

Comenzaremos con los ángulos θ definidos anteriormente. Trataremos de definirlo en función de otras variables más fácilmente calculables.

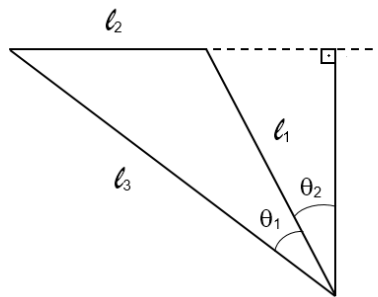


Figura 11. Definición de variables auxiliares para el problema geométrico.

$$l_3^2 = l_2^2 + l_1^2 - 2 l_1 l_2 \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{l_2^2 + l_1^2 - l_3^2}{2 l_1 l_2}$$

$$\theta_0 = \theta - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \theta_0 = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta \quad (5.33)$$

$$\sin \theta_1 = \frac{l_2 - l_1 \sin \theta_0}{l_3}$$

Ordenando los lados del triángulo de modo que se verifique $l_3^2 \leq l_2^2 + l_1^2$, definimos las siguientes variables auxiliares:

$$R = \frac{l_2^2 + l_1^2 - l_3^2}{2l_1l_2} = \sin \theta_0 \Rightarrow \sin \theta_1 = \frac{l_2 - l_1R}{l_3} \tag{5.34}$$

Por lo tanto, ya tenemos una expresión general para la ecuación (5.20), en función solamente de distancias entre puntos, lo cual es muy sencillo de calcular.

Según hemos decidido dividir la geometría para mantener la simetría de esta, el resultado al que llegamos sería algo como lo que se muestra en la *Figura 12*, donde se ha dividido en paneles, como ejemplo, un ala rectangular.

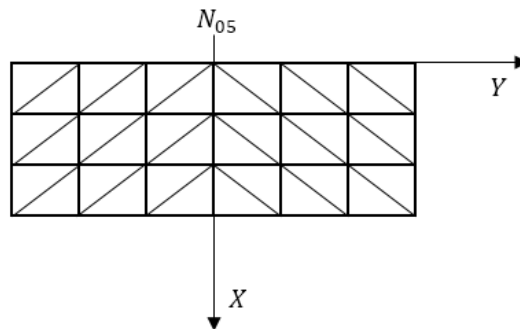


Figura 12. Ejemplo de división de un ala respetando su simetría respecto al eje X.

Pasemos, a continuación, a ver qué sucede con el resto de variables que intervienen en nuestro problema.

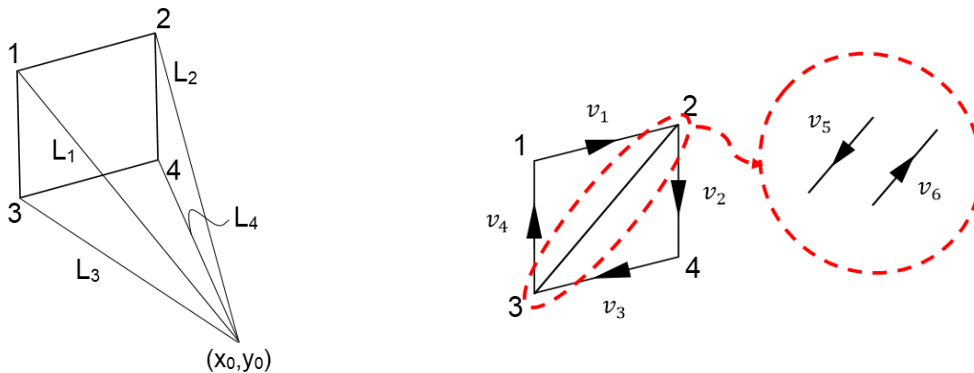
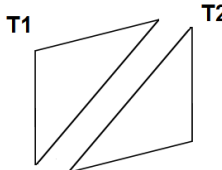


Figura 13. Definición de variables auxiliares y sentido de los vectores directores para $j < N_{05}$.

Definimos N_{05} como el valor del índice j (índice auxiliar utilizado para el barrido numérico según Y) que hace que $y = 0$. Comprenderemos la importancia de este valor a partir de la *Figura 12*, que esquematiza cómo es la división de la geometría alar en paneles. Como se desprende de ella, para conservar la simetría del ala, la división en triángulos es distinta para la región $y < 0$ y la región $y > 0$. De ahí la importancia de este valor. En base a esta distinción, podemos distinguir ahora dos casos de estudio geométrico. Como ya dijimos anteriormente, estos desarrollos los haremos para una geometría de ala en flecha en general, para hacer nuestro método más genérico; de ahí la forma de paralelogramo presentada en todas nuestras imágenes. Dicho esto, veamos cuáles son estos 2 casos de los que hablamos, fijándonos ahora en la *Figura 13* y la *Figura 14*, y viendo qué vectores componen cada uno de los triángulos en cada caso:

$$\begin{array}{l}
 j_1 < N_{05}: \\
 T_1: v_1, v_5, v_4 \\
 T_2: v_2, v_3, v_6
 \end{array}
 \quad \parallel \parallel \quad
 \begin{array}{l}
 j_1 \geq N_{05}: \\
 T_1: v_5, v_3, v_4 \\
 T_2: v_1, v_2, v_6
 \end{array}$$

Analicemos cada caso por separado. Para ello, recordemos que ya se dio la definición de los vectores normales, que eran exteriores siempre a los lados de cada triángulo (*Figura 8*). Asimismo, para evitar confusiones con la notación, se recuerda que las componentes del vector velocidad las representábamos por u , v y w ; por tanto, los vectores $v_{ix,y}$ representan la componente x o y de los vectores que definen los lados del cuadrado o vectores directores (definidos en la *Figura 13*), que nos interesarán para proyectar y obtener la componente v del campo de velocidades de una forma sencilla y rápida. Comencemos pues con este análisis.



$j_1 < N_{05}, T_1:$

$$u = \frac{\phi_3 - \phi_1}{l_{13}} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_1 &= \nabla \phi \cdot \left[\frac{v_{1x} \mathbf{e}_1 + v_{1y} \mathbf{e}_2}{l_{21}} \right] = \frac{\phi_2 - \phi_1}{l_{21}} \Rightarrow uv_{1x} + vv_{1y} = \phi_2 - \phi_1 \\
 \Rightarrow v &= \frac{\phi_2 - \phi_1}{v_{1y}} - u \frac{v_{1x}}{v_{1y}} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{v_{1y}} - \frac{\phi_3 - \phi_1}{l_{13}} \frac{v_{1x}}{v_{1y}}
 \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$v = \phi_1 \left(\frac{1}{v_{1y}} \frac{v_{1x}}{l_{13}} - \frac{1}{v_{1y}} \right) + \phi_2 \frac{1}{v_{1y}} - \phi_3 \frac{v_{1x}}{v_{1y}} \frac{1}{l_{13}} \quad (5.37)$$

Por lo tanto, vemos que, llegados a este punto, ya tenemos las dos componentes del vector velocidad definidas sobre la superficie del triángulo en función del valor del potencial en cada una de sus esquinas.

A continuación, en base a estos resultados, definimos, por comodidad, 2 vectores fila de modo que, al multiplicarlos por el vector columna que contiene el potencial en cada una de las 4 esquinas del cuadrado (dado por la expresión (5.44)), el resultado que obtenemos sea el vector velocidad sobre un determinado triángulo. Esta definición será de gran utilidad para facilitar la comprensión del método numérico.

$$\begin{aligned}
 u_{t_1} &= \left(-\frac{1}{l_{13}}, 0, \frac{1}{l_{13}}, 0 \right) \\
 v_{t_1} &= \left(\frac{1}{v_{1y}} \frac{v_{1x}}{l_{13}} - \frac{1}{v_{1y}}, \frac{1}{v_{1y}}, -\frac{v_{1x}}{v_{1y}} \frac{1}{l_{13}}, 0 \right)
 \end{aligned} \quad (5.38)$$

Pasemos ahora a analizar otro de los posibles casos en función de la geometría. El razonamiento a seguir será totalmente análogo al empleado hasta ahora, pero con el segundo triángulo que compone el paralelogramo de los situados en la semiala izquierda.

$$\boxed{j_1 < N_{05}, T_2:}$$

$$u = \frac{\phi_4 - \phi_2}{l_{24}} \quad (5.39)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_3 = \nabla \phi \cdot \left[\frac{v_{3x} \mathbf{e}_1 + v_{3y} \mathbf{e}_2}{l_{43}} \right] = \frac{\phi_3 - \phi_4}{l_{43}} \Rightarrow uv_{3x} + vv_{3y} = \phi_3 - \phi_4 \quad (5.40)$$

$$\Rightarrow v = \frac{\phi_3 - \phi_4}{v_{3y}} - u \frac{v_{3x}}{v_{3y}} = \frac{\phi_3 - \phi_4}{v_{3y}} - \frac{\phi_4 - \phi_2}{l_{24}} \frac{v_{3x}}{v_{3y}}$$

$$\mathbf{v} = \phi_2 \frac{1}{v_{3y}} \frac{v_{3x}}{l_{24}} + \phi_3 \frac{1}{v_{3y}} - \phi_4 \left(\frac{v_{3x}}{v_{3y}} \frac{1}{l_{24}} + \frac{1}{v_{3y}} \right) \quad (5.41)$$

$$\mathbf{u}_{t_2} = \left(0, -\frac{1}{l_{24}}, 0, \frac{1}{l_{24}} \right)$$

$$\mathbf{v}_{t_2} = \left(0, \frac{1}{v_{3y}} \frac{v_{3x}}{l_{24}}, \frac{1}{v_{3y}}, -\frac{v_{3x}}{v_{3y}} \frac{1}{l_{24}} - \frac{1}{v_{3y}} \right) \quad (5.42)$$

Como vemos, dada la naturaleza geométrica de este problema, es posible calcular con este método cualquier tipo de ala, ya sea recta, con flecha, estrechamiento..., puesto que hemos usado geometrías genéricas.

Dado el tipo de discretización que hemos hecho, lo que antes consistía en resolver una integral en un contorno, ahora pasa a ser un sumatorio contando la aportación de cada lado de cada uno de los dos triángulos. De este modo, ahora el resultado en el que estamos interesados es el siguiente:

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^6 \vec{v}'_s \cdot \vec{n}_i \text{faclog}_i = -\frac{1}{2\pi} \left[\sum_{i=1}^3 (\mathbf{u}_{t_1} \cdot \underline{\phi} n'_{ix} + \mathbf{v}_{t_1} \cdot \underline{\phi} n'_{iy}) + \sum_{i=1}^3 (\mathbf{u}_{t_2} \cdot \underline{\phi} n'_{ix} + \mathbf{v}_{t_2} \cdot \underline{\phi} n'_{iy}) \right] \quad (5.43)$$

En la ecuación anterior (5.43), vemos que hemos utilizado estos vectores auxiliares \mathbf{u}_{t_i} y \mathbf{v}_{t_i} de los que hablábamos antes que inventábamos como vectores auxiliares que creábamos por comodidad. Así vemos que, directamente, obtenemos una expresión que multiplicada por el vector columna $\underline{\phi}$ nos permitirá llegar a las expresiones deseadas, donde

$$\underline{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \quad (5.44)$$

Finalmente, definimos una matriz auxiliar que será la que vaya multiplicando a este vector y que tendrá la forma, según la nomenclatura de los lados utilizada anteriormente dada por la expresión (5.45).

$$\begin{aligned} Mat = & \underline{u}_{t_1} n'_{1x} + \underline{v}_{t_1} n'_{1y} + \underline{u}_{t_1} n'_{5x} + \underline{v}_{t_1} n'_{5y} + \underline{u}_{t_1} n'_{4x} + \underline{v}_{t_1} n'_{4y} + \\ & + \underline{u}_{t_2} n'_{2x} + \underline{v}_{t_2} n'_{2y} + \underline{u}_{t_2} n'_{3x} + \underline{v}_{t_2} n'_{3y} + \underline{u}_{t_2} n'_{6x} + \underline{v}_{t_2} n'_{6y} \end{aligned} \quad (5.45)$$

Esto numéricamente será muy sencillo de manipular ya que nuestro problema se reduce a resolver una ecuación del tipo $A = Bx$. Asimismo, vemos que en la ecuación (5.43) hemos introducido un término denominado $faclog_i$; este recogerá la aportación de cada triángulo a través de los factores logarítmicos que obteníamos al discretizar y resolver la integral bajo nuestras hipótesis iniciales. Por último, en esta misma ecuación, en la segunda igualdad se engloba bajo el nombre $n'_{ix,y}$ la influencia tanto de este factor logarítmico como de cada vector normal, según el lado del triángulo que estemos estudiando.

Repetimos que muchas de estas variables solo las introducimos por comodidad, no siendo necesario su uso. Para mayor detalle, es posible consultar el Anexo A, donde aparece la implementación de un código numérico para resolver nuestro problema usando este método y en él intervienen todas estas variables.

Ahora pasaremos a analizar estos mismos resultados, pero para el lado simétrico del ala, es decir, para $j \geq N_{05}$. En este caso, la geometría de los paralelogramos será completamente idéntica, pero en su versión simétrica respecto al eje X , como se puede observar en la Figura 14.

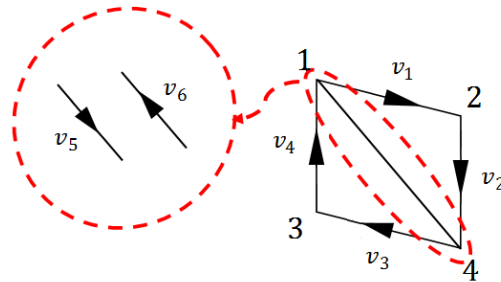


Figura 14. Definición de variables auxiliares y sentido de los vectores directores para $j \geq N_{05}$.

$$\boxed{j_1 \geq N_{05}, T_1:}$$

$$u = \frac{\phi_3 - \phi_1}{l_{13}} \quad (5.46)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_3 &= \nabla \phi \cdot \left[\frac{v_{3x} \mathbf{e}_1 + v_{3y} \mathbf{e}_2}{l_{34}} \right] = \frac{\phi_3 - \phi_4}{l_{34}} \Rightarrow uv_{3x} + vv_{3y} = \phi_3 - \phi_4 \\ \Rightarrow v &= \frac{\phi_3 - \phi_4}{v_{3y}} - u \frac{v_{3x}}{v_{3y}} = \frac{\phi_3 - \phi_4}{v_{3y}} - \frac{\phi_3 - \phi_1}{l_{13}} \frac{v_{3x}}{v_{3y}} \end{aligned} \quad (5.47)$$

$$v = \phi_1 \frac{1}{l_{13}} \frac{v_{3x}}{v_{3y}} + \phi_3 \left(\frac{1}{v_{3y}} - \frac{v_{3x}}{v_{3y}} \frac{1}{l_{13}} \right) - \phi_4 \frac{1}{v_{3y}} \quad (5.48)$$

$$u_{t_1} = \left(-\frac{1}{l_{13}}, 0, \frac{1}{l_{13}}, 0 \right)$$

$$v_{t_1} = \left(\frac{1}{l_{13}} \frac{v_{3x}}{v_{3y}}, 0, \frac{1}{v_{3y}} - \frac{v_{3x}}{v_{3y}} \frac{1}{l_{13}}, -\frac{1}{v_{3y}} \right) \quad (5.49)$$

$$\boxed{j_1 \geq N_{05}, T_2:}$$

$$u = \frac{\phi_4 - \phi_2}{l_{24}} \quad (5.50)$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_1 = \nabla \phi \cdot \left[\frac{v_{1x} \mathbf{e}_1 + v_{1y} \mathbf{e}_2}{l_{21}} \right] = \frac{\phi_2 - \phi_1}{l_{21}} \Rightarrow uv_{1x} + vv_{1y} = \phi_2 - \phi_1 \quad (5.51)$$

$$\Rightarrow v = \frac{\phi_2 - \phi_1}{v_{1y}} - u \frac{v_{1x}}{v_{1y}} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{v_{1y}} - \frac{\phi_4 - \phi_2}{l_{24}} \frac{v_{1x}}{v_{1y}}$$

$$v = -\phi_1 \frac{1}{v_{1y}} + \phi_2 \left(\frac{1}{v_{1y}} + \frac{v_{1x}}{v_{1y}} \frac{1}{l_{21}} \right) - \phi_4 \frac{v_{1x}}{v_{1y}} \frac{1}{l_{21}} \quad (5.52)$$

$$u_{t_2} = \left(0, -\frac{1}{l_{24}}, 0, \frac{1}{l_{24}} \right)$$

$$v_{t_2} = \left(-\frac{1}{v_{1y}}, \frac{1}{v_{1y}} + \frac{v_{1x}}{v_{1y}} \frac{1}{l_{21}}, 0, -\frac{v_{1x}}{v_{1y}} \frac{1}{l_{21}} \right) \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} Mat = & \underline{u}_{t_1} n'_{3x} + \underline{v}_{t_1} n'_{3y} + \underline{u}_{t_1} n'_{5x} + \underline{v}_{t_1} n'_{5y} + \underline{u}_{t_1} n'_{4x} + \underline{v}_{t_1} n'_{4y} + \\ & + \underline{u}_{t_2} n'_{2x} + \underline{v}_{t_2} n'_{2y} + \underline{u}_{t_2} n'_{1x} + \underline{v}_{t_2} n'_{1y} + \underline{u}_{t_2} n'_{6x} + \underline{v}_{t_2} n'_{6y} \end{aligned} \quad (5.54)$$

5.4 Comparativa con métodos clásicos de resolución

Una vez introducido nuestro método, es inmediato pensar en hacer una comparativa que muestre las principales diferencias con respecto a algunos métodos clásicos de resolución.

En primer lugar, se puede comprobar que la tendencia histórica de estos métodos ha sido, al igual que en nuestro caso, utilizar la fórmula de Green y distribuciones de soluciones elementales para hallar la solución al problema completo. La complejidad o precisión de estas soluciones se ha ido incrementando históricamente, determinando en todos los casos, el peso de cada solución dentro de la completa a través de las condiciones de contorno; siendo esto por tanto un elemento que comparten la mayoría de los métodos con el nuestro. Esto ha permitido ir eliminando hipótesis de partida y crear un método de resolución mucho más genérico. Asimismo, otro elemento importante que comparten normalmente estos métodos es la división en paneles del cuerpo a estudiar.

Por otra parte, todos estos métodos y su evolución han ido acompañados de un rápido desarrollo de los ordenadores y sus procesadores, lo cual ha ido permitiendo utilizar métodos cada vez más complejos y sofisticados. De esta manera, esto no solo ha aumentado la complejidad de los métodos, sino que también ha permitido refinar las mallas en las que se suelen dividir los cuerpos a estudiar, pudiendo prestarse así mayor atención a puntos críticos como bordes de salida, esquinas... Estas tendencias las podemos apreciar en la *Tabla 1*, donde se muestran las principales características de algunos métodos y su año de desarrollo.

Gracias a esta *Tabla 1* se puede ver el procedimiento que se va a seguir para la obtención de resultados en este trabajo es muy similar a otras líneas desarrolladas por otros autores, con geometrías de paneles planas y suponiendo fuentes de intensidad constante.

El método conocido como *Hess Code* fue probablemente el primer método de paneles que consiguió resolver con éxito el problema tridimensional. Si avanzamos en el tiempo, vemos que con la gran evolución de la tecnología, se han desarrollado algoritmos mucho más complejos que el empleado por este primer método basados en aproximaciones de órdenes cada vez superiores y, por tanto más precisos, tanto a la hora de dividir los cuerpos en estudio como en las propias distribuciones de soluciones elementales. Esta es precisamente una de las mayores limitaciones que presenta nuestro método frente a otros más sofisticados: está basado en la linealización de las ecuaciones y se utiliza muchas aproximaciones de primer orden (para el cálculo de derivadas, por ejemplo), lo cual limita mucho más sus resultados.

Hoy en día, con los métodos de paneles bastante maduros y los numerosos algoritmos de cálculo desarrollados y al alcance de muchas personas, las principales líneas de trabajo se centran en el pre- y postprocesado, es decir, la generación de las superficies y su división, la presentación gráfica de los resultados... Asimismo, otro de los puntos de trabajo más importantes es el desarrollo de diseños interactivos, donde el diseñador pueda modificar libremente la geometría y obtener las distribuciones de presiones que desee.

Por otra parte, se ha demostrado que, a pesar de la sofisticación de algunos de los últimos métodos desarrollados, los métodos de menor orden son claramente mucho más rápidos y baratos de operar; presentando, por tanto, grandes ventajas frente a estos otros, ya que además, en la mayoría de los casos, son capaces de proporcionar resultados bastante exactos ajustando bien algunos de sus parámetros.

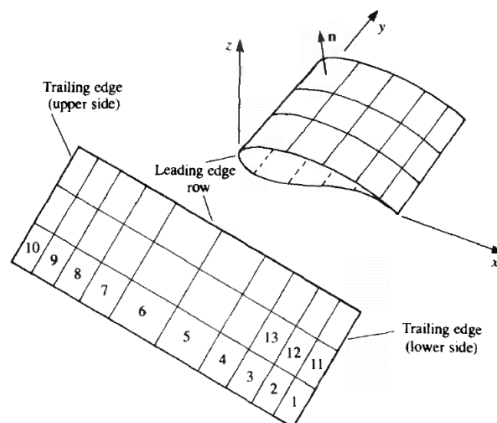


Figura 15. Ejemplo de división en paneles de algunos métodos clásicos de resolución (figura obtenida de [2]).

Chronological list of some panel methods and their main features

Method	Geometry of panel	Singularity distribution	Remarks
1962, Douglas-Neumann	Flat	Constant source	
1966, Woodward I	Flat	Linear sources Constant vortex	$M > 1$
1973, USSAERO	Flat	Linear sources Linear vortex	$M > 1$
1972, Hess I	Flat	Constant source Constant doublet	
1980, MCAIR	Flat	Constant source Quadratic doublet	Coupling with B. L. design mode
1980, SOUSSA	Parabolic	Constant source Constant doublet	Linearized unsteady
1981, Hess II	Parabolic	Linear source Quadratic doublet	
1981, PAN AIR	Flat subpanels	Linear source Quadratic doublet	$M > 1$
1982, VSAERO	Flat	Constant source and doublet	Coupling with B. L., wake rollup
1983, QUADPAN	Flat	Constant source and doublet	
1987, PMARC	Flat	Constant source Constant doublet	Unsteady wake rollup

Tabla 1. Lista con algunos métodos clásicos y sus principales características (tabla obtenida de [2]).

La principal diferencia con conocidos métodos como el de Vortex-Lattice es que nuestro método calcula los potenciales en las esquinas de los paneles en que se divide el ala, mientras que en otros se calcula una distribución de potencial sobre cada panel, pudiendo ser esta continua, lineal... según la precisión que se requiera. No obstante, debemos recordar, para poder comparar, las hipótesis bajo las que se postulan las ecuaciones, lo que es equivalente a hablar de los casos de aplicación; ya que no sería equiparable a otros métodos de geometrías tridimensionales mucho más complejas, sin tantas limitaciones y que no implica linealizaciones, por ejemplo.

Por tanto, podemos concluir que la mayoría de los métodos que se utilizan actualmente emplean algoritmos con aproximaciones de órdenes bajos, luego nuestro método podría ser un digno competidor de muchos de estos métodos de primer orden para los casos que nos permiten estudiar. Asimismo, en términos de aproximación de la geometría y divisiones de esta, para los casos de alas que vamos a considerar, nuestro método permite también aproximaciones tan buenas como se desee, asumiendo las penalizaciones computacionales que esto pueda suponer. Por último, el uso obligatorio de las mismas condiciones de contorno para cerrar el problema también es un elemento común con estos otros métodos.

Claimed advantages of low- and high-order panel codes

	Low-order methods	High-order methods
Derivation of influence coefficients	Simple derivation	More complex derivation
Computer programming	Relatively simple coding	Requires more coding effort
Program size	Short (fits minicomputers)	Longer (will run on mainframes only)
Run cost	Low	Considerably higher
Accuracy	Less—for same number of panels (but more accurate for same run time)	Higher accuracy for a given number of panels
Sensitivity to gaps in paneling	Not very sensitive*	Not allowed
Extension to $M > 1$	Possible	Simple (for arbitrary geometry)

Tabla 2. Comparativa entre métodos de resolución de bajo y alto orden (tabla obtenida de [2]).

6 PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

A continuación se presentan algunos de los resultados obtenidos con este método para varios casos de estudio distintos. En este capítulo nos limitaremos a presentar y analizar estos resultados, así como tratar de buscar su justificación. Se deja para capítulos posteriores el análisis de posibles mejoras, la búsqueda de la raíz de posibles errores...

Dada la amplia posibilidad de casos que es posible estudiar, nos centraremos concretamente en 3 cuyos resultados se presentan en [2], por comodidad a la hora de comparar valores y verificar así la fiabilidad de este método.

En primer lugar, estudiaremos cómo varía la pendiente de la curva de sustentación al hacerlo el alargamiento del ala, para el problema estacionario. Posteriormente, pasando ya al caso no estacionario, abarcaremos otros dos problemas distintos: en el primero, una placa plana a un determinado ángulo de ataque, arranca desde un estado de reposo hasta alcanzar una velocidad U_∞ y veremos cómo evoluciona el coeficiente de sustentación con respecto al tiempo; en el segundo, estudiaremos este mismo caso, pero en esta ocasión la placa partirá del reposo y adquirirá un movimiento ondulatorio armónico simple. A continuación se detallan cada uno de los problemas así como los resultados obtenidos para cada uno de ellos.

6.1 C_{L_α} vs. AR en régimen estacionario

Como hemos dicho anteriormente, en este apartado trataremos el problema de un ala en régimen estacionario. Estaremos interesados concretamente en estudiar la evolución de la pendiente de la curva de sustentación al variar el alargamiento o *Aspect Ratio* (AR), ya definidos en capítulos anteriores; ya que, como se deduce de su expresión, existe una dependencia indudable entre un parámetro y otro.

A continuación mostramos los resultados que proporciona la literatura, en concreto [2], para este caso de estudio en particular en la *Figura 16*.

Como podemos apreciar, en esta imagen se estudia esta variación para distintos valores de la flecha. Aquí se muestran tanto los resultados experimentales obtenidos de ensayos en túnel de viento como los resultados proporcionados por otros métodos clásicos de resolución.

Como vemos, conforme el alargamiento del ala aumenta, el valor de C_{L_α} se va haciendo cada vez mayor. Esta tendencia es la esperada ya que, conforme este aumenta, el ala va tendiendo a un ala infinitamente larga o de gran alargamiento, de modo que los efectos tridimensionales de rebordeo que hacen que se reduzca la sustentación de un ala tridimensional con respecto al caso de perfiles bidimensionales, se van haciendo cada vez menos notorios. Por tanto, para el caso del ala recta, este valor deberá tender, cuando $AR \rightarrow \infty$, a $C_{L_\alpha} \rightarrow 2\pi$, que es el resultado teórico bidimensional que se obtiene de la teoría potencial linealizada [1]. No entraremos en mayor detalle en el estudio de estos efectos, puesto que no es el objeto de este trabajo. Para mayor información de este punto, se puede consultar cualquiera de los títulos presentes en las *Referencias*.

Asimismo, también vemos que, al aumentar la flecha del ala, la sustentación también se ve reducida. En este caso, esta reducción se debe a que, al aumentar la flecha, la componente de la velocidad normal al borde de ataque del ala (que es la velocidad efectiva que ve el ala) que contribuye a la sustentación se ve reducida, como se esquematiza en la *Figura 17*.

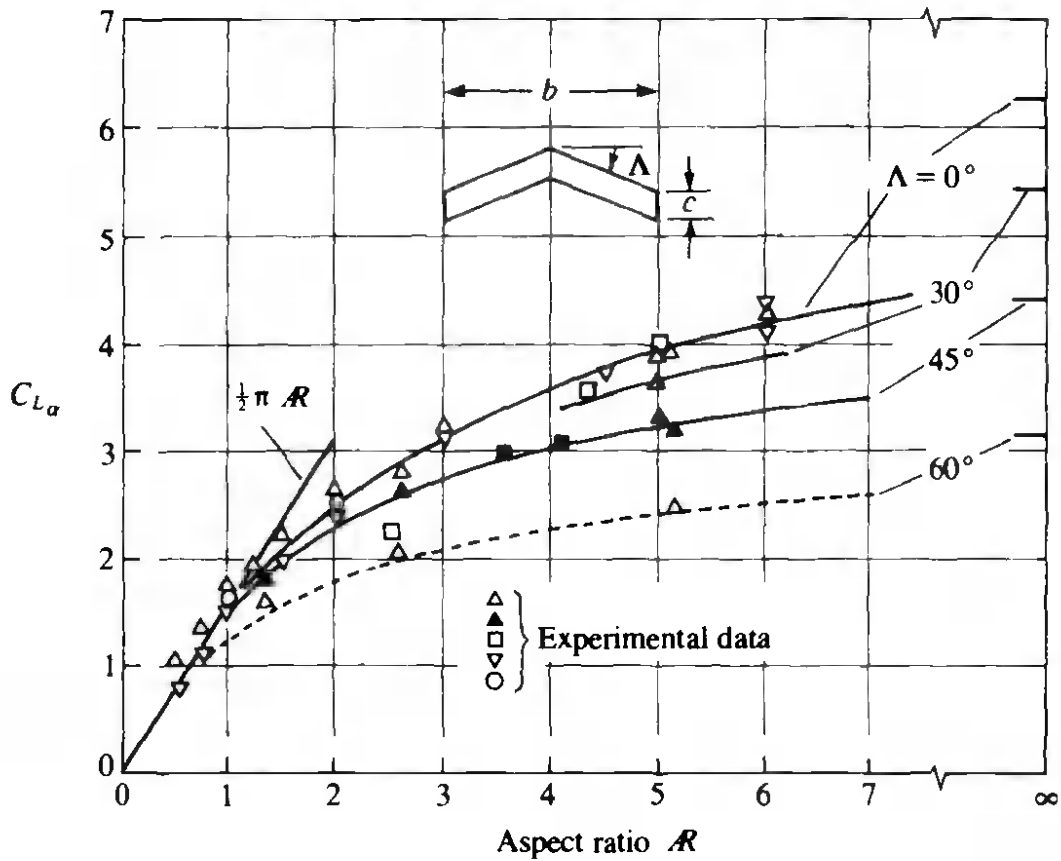


Figura 16. Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento (figura obtenida de [2]).

Por tanto, la sustentación será menor con respecto al caso de un ala recta. Sin embargo, a pesar de este efecto, la tendencia de $C_{L\alpha}$ con AR debe ser la misma que para el ala recta, tal y como se puede deducir fácilmente de las ecuaciones. De nuevo, no entraremos en detalle en el estudio de este efecto, pero, al igual que antes, se puede consultar la literatura anteriormente mencionada para mayor detalle.

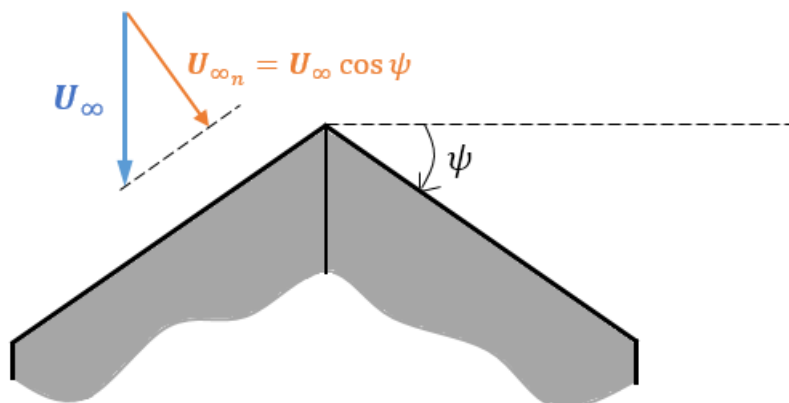


Figura 17. Efecto de la flecha sobre la velocidad efectiva del ala.

Explicado brevemente a qué se deben estas tendencias en las gráficas y visto el comportamiento que debe mostrar nuestro método, se pasa a continuación a mostrar los resultados que presenta nuestro método para este mismo caso que en la Figura 16. Es importante notar que en esta figura, correspondiente a otros métodos de

resolución clásicos, vemos que las gráficas correspondientes a los resultados proporcionados por otros métodos se ajustan perfectamente a los resultados proporcionados por la experimentación (con pequeñas desviaciones que lógicamente aparecerán por la dificultad de reproducir un caso ideal sin ningún tipo de perturbación externa en la realidad, simplificaciones adoptadas..., pero despreciables). Por tanto, para probar la validez de nuestro método, además de mostrar estas tendencias, será importante que los valores que proporciona sean bastante cercanos a estos, con errores de aproximación lo más pequeños posibles.

Nuestros resultados se muestran en la *Figura 18*.

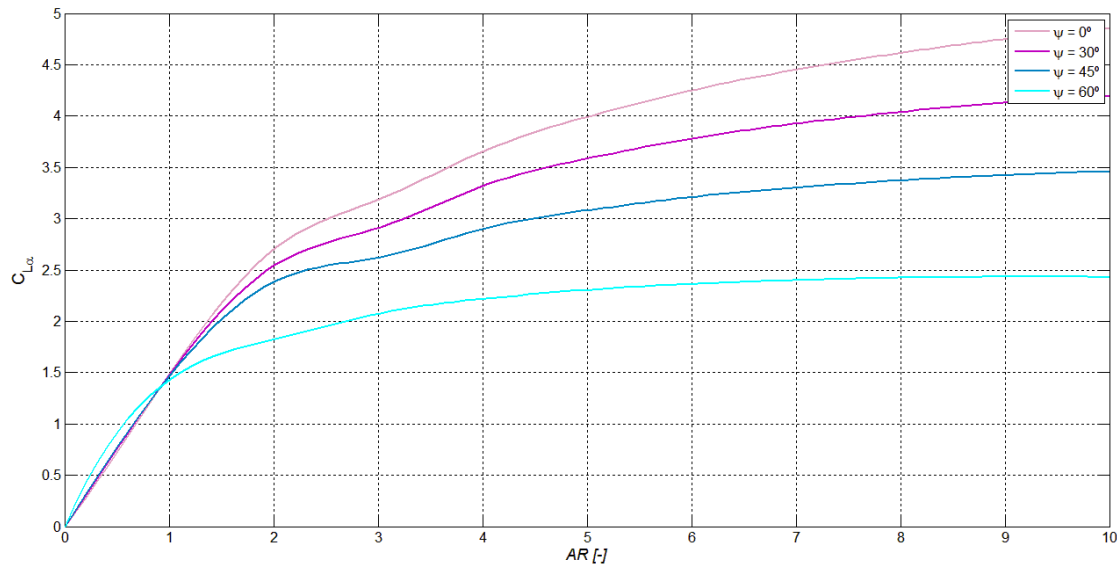


Figura 18. Resultados del método para la pendiente de la curva de sustentación.

Como vemos, en la *Figura 18* se ha utilizado la nomenclatura de la que venimos haciendo uso hasta el momento para referirnos a la flecha del ala (ψ) y no confundirla con nuestro alargamiento (Λ). No obstante, no debemos confundirnos y, en este caso, el valor de ψ en la *Figura 18* sería el equivalente de Λ en la *Figura 16*, que representa el ángulo de flecha geométrica que forma el borde de ataque del ala con el eje Y .

Hecha esta aclaración, pasamos a analizar los resultados. A simple vista, comparando los resultados numéricos con los anteriores, los resultados parecen bastante cercanos a los reales. Asimismo, todas estas tendencias de las que hemos hablado anteriormente están presentes en nuestras curvas. No obstante, parece aparecer una cierta curvatura en las gráficas, más pronunciada en unos casos que en otros, entorno a $AR = 3$, que no se observa en los resultados de otros métodos. Estos errores los analizaremos en mayor detalle en el siguiente apartado de este trabajo. Sin embargo, podemos adelantar que, como indicamos en los primeros capítulos, se suele verificar que $\Lambda \gg 1$, por su definición, luego estaremos más interesados en reproducir los resultados para valores altos del alargamiento. No obstante, el hecho de que algunos valores no sean del todo exactos nos crea una cierta incertidumbre sobre la capacidad de reproducir resultados del método.

Para mayor claridad, en la *Figura 19* se superponen nuestros resultados y los reportados por la literatura.

Como se desprende de esta última figura, nuestros resultados se ajustan bastante bien a la realidad numéricamente. Aquí se han presentado solo algunos valores puntuales para apreciar más claramente este efecto y evitar sobrecargar la imagen.

Para el ala recta vemos que los valores son prácticamente idénticos a los de la literatura, con errores relativos ínfimos entre ambos. No obstante, conforme aumenta la flecha, vemos que estos errores se hacen algo mayores y, en concreto, para el caso de $AR = 3$ del que hablábamos antes, es donde se aprecian los mayores errores para la mayoría de los casos. Sin embargo, como veremos en el siguiente capítulo, es posible reducir estos errores y conseguir ajustar mejor las gráficas. Por el momento, aceptaremos estos resultados como válidos. Por tanto, de momento parece que nuestro método va bien encaminado y que proporciona resultados que se podrán aceptar para estudios aerodinámicos. No obstante, como ya dijimos, es necesario realizar comparaciones con otros casos

de estudio distintos.

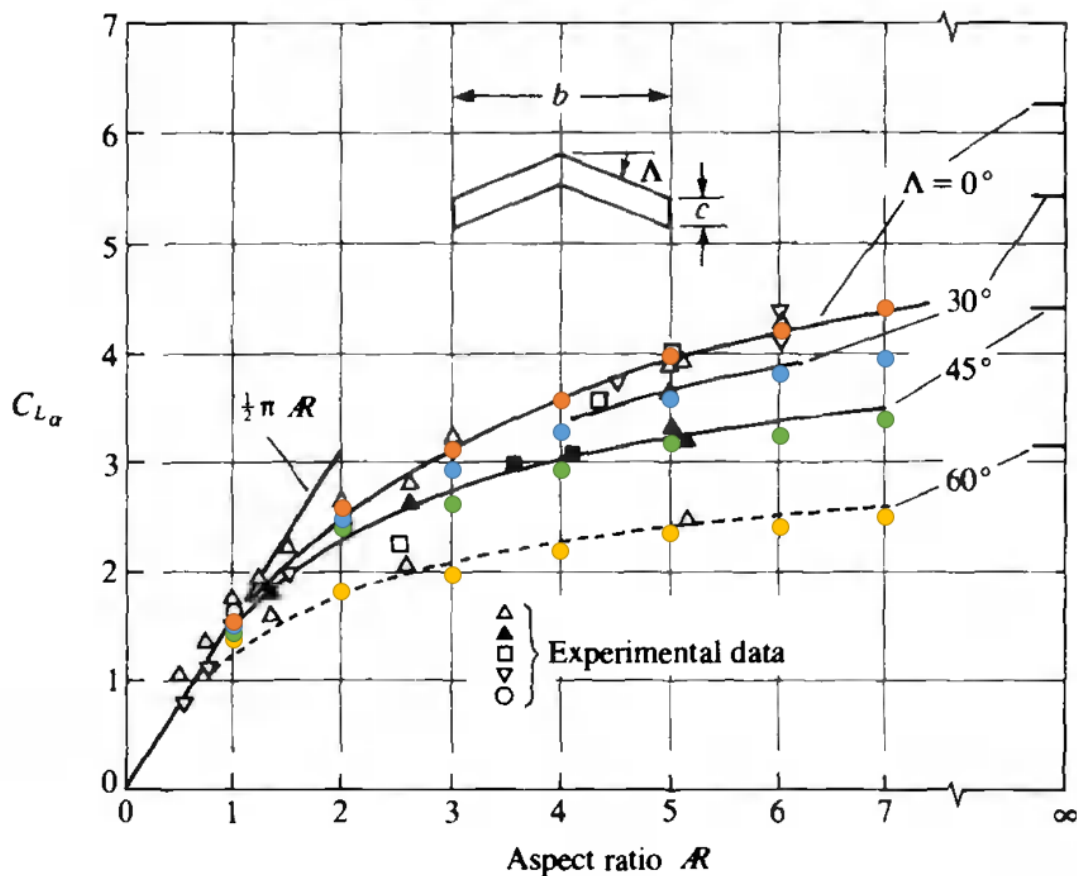


Figura 19. Superposición de resultados del método con datos de la literatura.

A continuación analizaremos otros casos distintos y, por último, cuantificaremos los errores cometidos.

6.2 Aceleración repentina de una placa plana rectangular a ángulo de ataque constante hasta alcanzar una velocidad constante

Como se deduce del título de esta sección, ahora abarcaremos un caso no estacionario. Para ello, consideraremos una placa plana rectangular en la que, por definición, podremos suponer despreciable su espesor y, por tanto, aplicar las ecuaciones de potencial linealizadas que venimos usando hasta el momento. Según la lógica de la que estamos haciendo uso, esto también es aplicable al plano que forman las cuerdas de un ala tridimensional sin torsión a un determinado ángulo de ataque.

Esta placa con la que se trata se encontrará a un ángulo de ataque $\alpha = 5^\circ$ constante, es decir, que no variará con el tiempo. Además, en un instante inicial t_0 , que será cuando comencemos a contar nuestro tiempo, la placa arrancará desde una velocidad inicial nula hasta adquirir una velocidad de vuelo constante U_∞ .

Para este caso, los resultados que ofrece nuestro programa aparecen reflejados en la Figura 20.

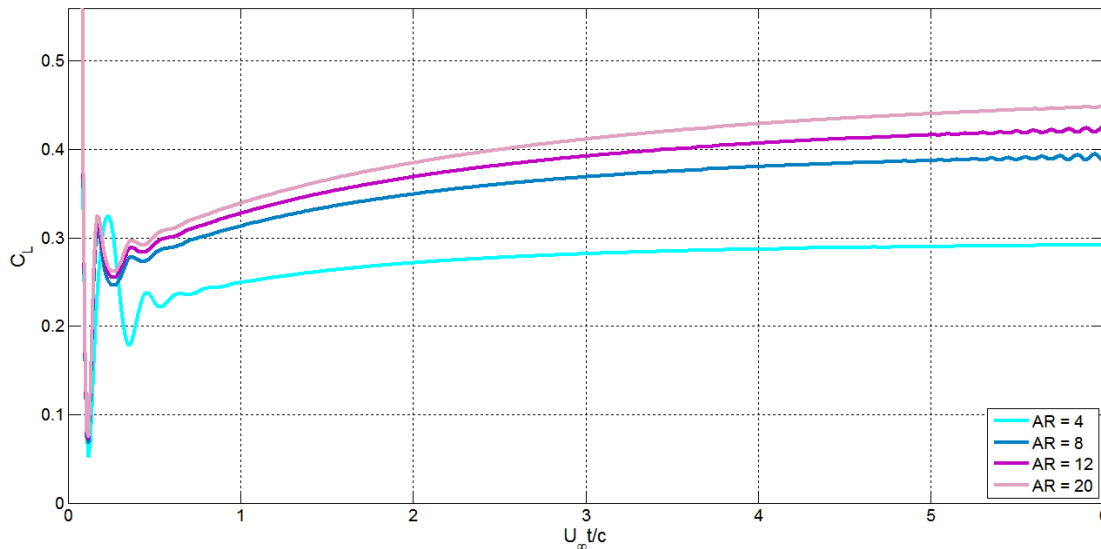


Figura 20. Evolución del coeficiente de sustentación con el tiempo para una placa plana que arranca desde el reposo hasta adquirir una velocidad determinada a un ángulo de ataque de 5° .

En primer lugar, comparémoslos cualitativamente con los resultados presentes en la literatura. Para ello, observemos la Figura 21.

En ella se presentan los mismos resultados que los que estamos estudiando nosotros. Para buscar la total convergencia, también se ha ajustado en nuestro código el siguiente parámetro, presentado en la misma figura anteriormente mencionada, que mide el paso de integración:

$$\frac{U_\infty \Delta t}{c} = \frac{1}{16}$$

Por tanto, lo que se espera es que el comportamiento de C_L sea el mismo frente al parámetro adimensional representado. No obstante, a simple vista se pueden apreciar variaciones importantes en el comportamiento de la gráfica en los instantes iniciales. Los resultados reportados por nuestro método tardan más tiempo en estabilizarse y el coeficiente de sustentación presenta una distribución menos “uniforme” a lo largo del tiempo, presentando más oscilaciones y variaciones.

También se observa que, en el instante inicial t_0 , nuestra gráfica tiene a un valor infinito, mientras que los datos reportados por la literatura no llegan a mostrar una asíntota, sino que la gráfica parece cortarse mucho antes, en un valor elevado en comparación al resto de la función, pero finito. Por lo tanto, este otro comportamiento tampoco somos capaces de reproducirlo con exactitud.

Por último, otro de los detalles importantes a analizar en cuanto a comportamiento cualitativo de las gráficas es las tendencias, una vez que el movimiento tiende a estabilizarse y convertirse en estacionario, cuando la placa ha alcanzado su velocidad U_∞ y haya transcurrido un tiempo suficiente para ello. En este aspecto vemos que nuestro programa sí reproduce más fidedignamente este comportamiento. De hecho, a simple vista es apreciable que las tendencias de nuestras funciones y las provenientes de [2] son muy similares (aunque a continuación evaluaremos cuantitativamente este aspecto). Sin embargo, vemos que, en los últimos instantes representados, algunas de las funciones comienzan a presentar unas ciertas oscilaciones en su forma, volviéndose así algo inestables, aunque sigan en torno al valor real esperado. Si siguiéramos representando más valores, veríamos que el comportamiento se vuelve cada vez más inestable, aportando así resultados poco realistas y difíciles de evaluar. Por tanto, este es un problema grave que presenta nuestro método tal como está planteado hasta el momento. Las causas de este y los anteriores problemas los evaluaremos más adelante, por lo que dejamos esta tarea pendiente, ya que, como hemos dicho, aquí solo analizaremos los resultados, dejando sus causas para más adelante. No obstante, podemos adelantar que estos problemas se deben, principalmente, a aproximaciones demasiado burdas y a ciertas inestabilidades que presenta el programa por cómo está planteado.

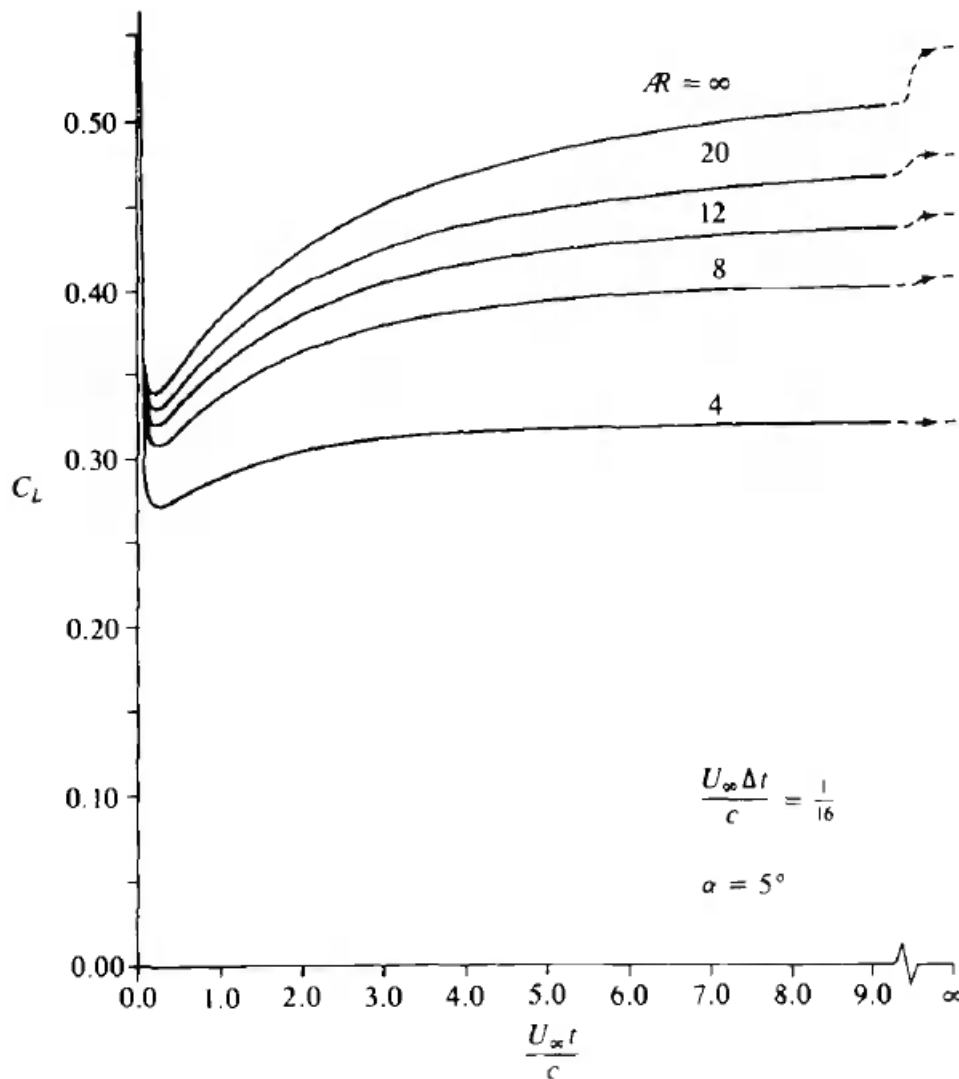


Figura 21. Evolución del coeficiente de sustentación con el tiempo para una placa plana que arranca desde el reposo hasta adquirir una velocidad determinada a un ángulo de ataque de 5° (figura obtenida de [2]).

Para terminar con este caso, trataremos de ver más cuantitativamente las diferencias entre nuestros resultados y los de otros autores. Para ello, superponemos, al igual que hicimos para el caso de estudio anterior, las dos gráficas presentadas hasta el momento en la Figura 22.

Como podemos ver, al igual que anteriormente, el caso $AR \rightarrow \infty$ no se ha representado, ya que, para valores demasiado grandes del alargamiento, el método comienza a presentar grandes inestabilidades debidas a singularidades en las matrices del cálculo numérico que aparecen. No obstante, si se puede probar que, conforme AR va aumentando, los valores del coeficiente de sustentación van tendiendo a los aquí mostrados.

Por otra parte, de nuevo, tal y como dijimos anteriormente, en los primeros instantes de tiempo en los que la placa arranca, se aprecia esta gran distorsión en los resultados, que provoca desviaciones muy grandes con respecto a la realidad. Sin embargo, vemos cómo después los resultados se adaptan perfectamente a los esperados, no solo en las tendencias de las funciones, sino cuantitativamente; es decir, los valores que se obtienen son bastante realistas.

Como se puede apreciar en esta última figura, en los primeros instantes de tiempo se han representado más puntos, por considerarse más característicos debidos a la forma irregular de la función, y ver así mejor la distorsión de las gráficas en los instantes iniciales. Sin embargo, después este número de puntos se ha reducido, cuando comienza a estabilizarse la función.

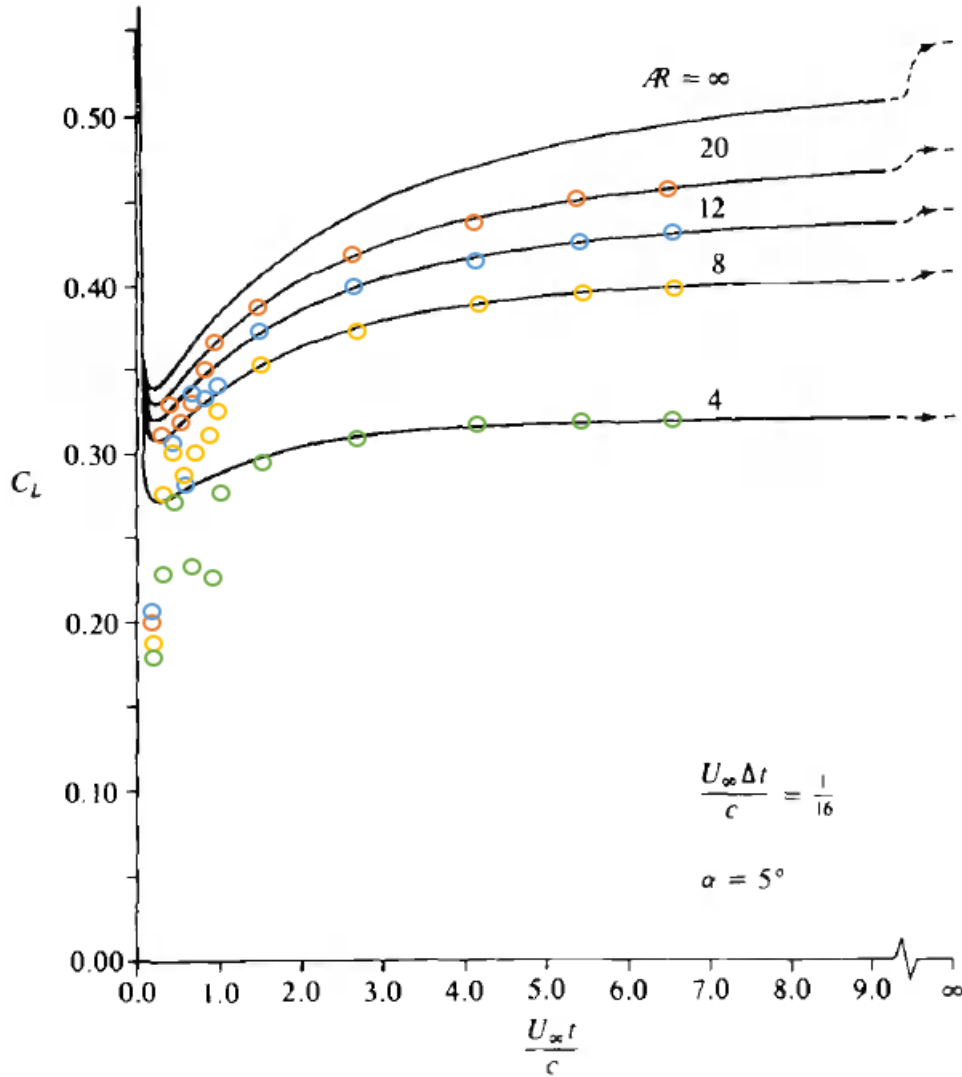


Figura 22. Superposición de resultados del método numérico y datos reportados de la literatura.

6.3 Movimiento oscilatorio de una placa plana en torno a un valor del ángulo de ataque constante

Este es el último caso que estudiaremos en este proyecto. En esta ocasión nos encontramos ante una placa plana rectangular a ángulo de ataque $\alpha_0 = 5^\circ$ que arranca desde el reposo (al igual que en el caso anterior), pero adquiriendo ahora un movimiento armónico simple en torno a este valor. Para definir el movimiento, basta con caracterizar la variación temporal del ángulo de ataque de la placa como sigue:

$$\alpha(t) = -(\alpha_0 + 0.1 \cdot 2 \cdot k \cos(\omega t)) \quad (6.1)$$

, donde definimos el factor adimensional $k = \frac{\omega c}{2U_\infty}$, cuyo valor iremos variando para comprobar su efecto en el movimiento. En cuanto a la amplitud del movimiento, esta ha sido ajustada para cuadrar los resultados con los reportados por la literatura y de esta manera poder comparar más fácilmente. De igual modo, como seguimos interesados en parámetros adimensionales, las ecuaciones no dependerán de los valores de $U_\infty, c \dots$ que elijamos.

Por ello, se les da un valor arbitrario de 1 a cada una de estas variables, de modo que, al variar k , lo que realmente estamos modificando será la frecuencia y amplitud del movimiento.

Hecha esta aclaración, pasemos a comparar nuestros resultados con los reportados de la literatura, mostrados en la *Figura 23*.

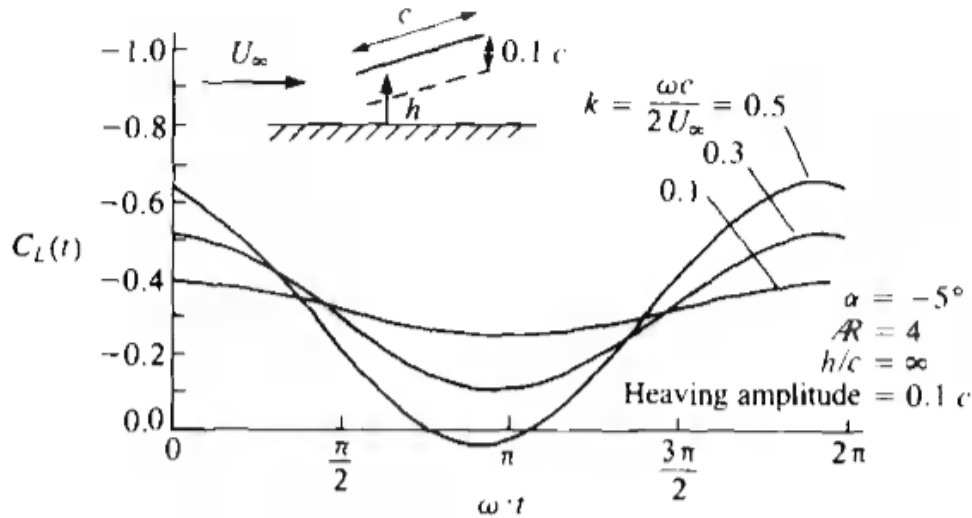


Figura 23. Evolución temporal del coeficiente de sustentación para una placa con movimiento armónico simple (figura obtenida de [2]).

Con este ejemplo vemos que, en el caso de la *Figura 23* se muestra directamente el movimiento una vez se ha estabilizado, es decir, sin incluir el arranque previo de la placa. En este detalle radica la principal diferencia que se observa con respecto a nuestro método (*Figura 24*), ya que, en los primeros instantes de tiempo, nuestras gráficas presentan una singularidad similar a la que aparecía en el caso anterior debida a este hecho, que no está presente en las otras gráficas. Sin embargo, dada la forma que presenta y las imprecisiones del método en estos instantes iniciales, de las que hablaremos en apartados posteriores, podemos obviar esta parte de la gráfica y centrarnos en el resto.

Analicemos ahora nuestros resultados presentados en la *Figura 24*. Si observamos la forma general de las gráficas, vemos que, dependiendo del valor de k , la amplitud del movimiento es mayor o menor (siendo ambos valores proporcionales), al igual que le frecuencia del mismo (lo cual es lógico dadas las expresiones anteriores). Asimismo, vemos que entre las funciones de C_L existe un cierto desfase, al igual que en los resultados de la literatura.

Fijándonos ahora en el valor de C_L constante en torno al cual oscilan las gráficas, si lo calculamos y lo comparamos, vemos que estos valores difieren ligeramente entre nuestro método y los datos de otros métodos tradicionales de resolución, siendo mayores o menores estas diferencias entre unos casos y otros.

Por último, para terminar, también observamos que los valores máximos y mínimos que se alcanzan son ligeramente distintos. Si bien según el eje X las gráficas sí siguen el comportamiento apropiado en todos los aspectos, vemos que según el eje Y los resultados no son del todo correctos, siendo notándose en mayor o menor medida las diferencias según el valor del parámetro k que elijamos, pero sin llegar a ser nunca exactos los valores.

Debido a todo esto, no podemos considerar como válidos los resultados reportados por nuestro programa en este caso. Si bien para algunos valores concretos de k , por ejemplo, los resultados sí son bastante fieles a la realidad; para otros casos no sucede lo mismo, luego no podemos generalizar que sean correctos. Por ello evitaremos también superponer ambas gráficas como hicimos en casos anteriores, ya que, a simple vista, se ve que existen diferencias importantes entre ambas.

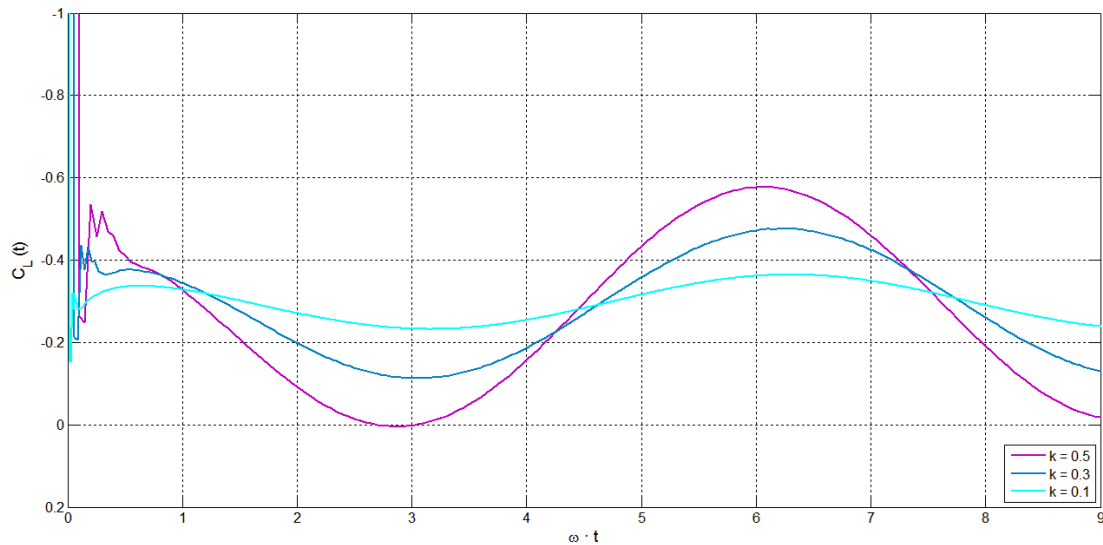


Figura 24. Evolución temporal del coeficiente de sustentación para una placa con movimiento armónico simple.

Uno de los principales motivos para estas diferencias es que los resultados de nuestro método son muy sensibles a dónde situemos los puntos de colocación, como veremos a continuación. Por ello, para poder realizar este apartado, con este valor del alargamiento concreto, era necesario seleccionar unos determinados puntos que no proporcionan buenos resultados en general; de lo contrario, las funciones presentaban mucho ruido que impedía apreciar los resultados correctos. Para valores del AR mayores que este, sí es posible fijar una posición de los puntos de colocación que proporciona resultados más realistas en el resto de los casos, con lo que se esperaría lo mismo de este. Sin embargo, por falta de datos de la literatura de estos casos, nos limitaremos a mostrar este caso, no siendo posible demostrar la validez o no de estos otros.

Por tanto, aunque las diferencias no son extremadamente grandes, no podemos dar por válidos estos resultados.

Comprobados todos estos resultados, en el siguiente apartado pasaremos a analizar uno de los puntos más recurrentes que se han visto durante el tratamiento de estos problemas y es el estudio de los errores que se producen, cómo se ven afectados los resultados por una elección u otra de las distintas variables, si es posible conseguir mayor precisión numérica, la sensibilidad del método... Todos estos y otros temas los trataremos a continuación.

7 DOMINIO DE VALIDEZ DEL MÉTODO

A partir de los resultados presentados y de los múltiples estudios llevados a cabo, en este apartado se pretende estudiar cuál es el dominio de validez de nuestro programa, así como la precisión de nuestro método. Para ello, en vista de los resultados obtenidos, se realizan varios estudios de sensibilidad para observar qué rango de precisión ofrece la programación actual, a través de comparativas con datos de referencia reportados por la literatura.

Para analizar estos errores nos remitiremos primero al caso estacionario, en el que no intervienen las derivadas respecto al tiempo, por lo que será más sencillo estudiar la influencia de las distintas variables sin que interfieran otros fenómenos.

Comenzaremos analizando el caso estacionario, donde será más sencillo ver la influencia de estas, dada la ausencia de perturbaciones debidos a otros efectos, como derivadas temporales. Los resultados que obtengamos de estos estudios serán extrapolables al caso no-estacionario, pero será más sencillo de interpretar en el primero. Posteriormente, analizaremos brevemente algunas características propias del régimen no-estacionario.

7.1 Problema estacionario

7.1.1 i_{ala}

Comenzaremos analizando la dependencia con la variable i_{ala} . Para ello daremos la definición de dicha variable dentro del problema numérico: i_{ala} representa el número de divisiones o de líneas en que dividimos el ala según el eje X de la misma, independientemente de si el ala tiene flecha o no (obsérvense las Figuras 25-28).

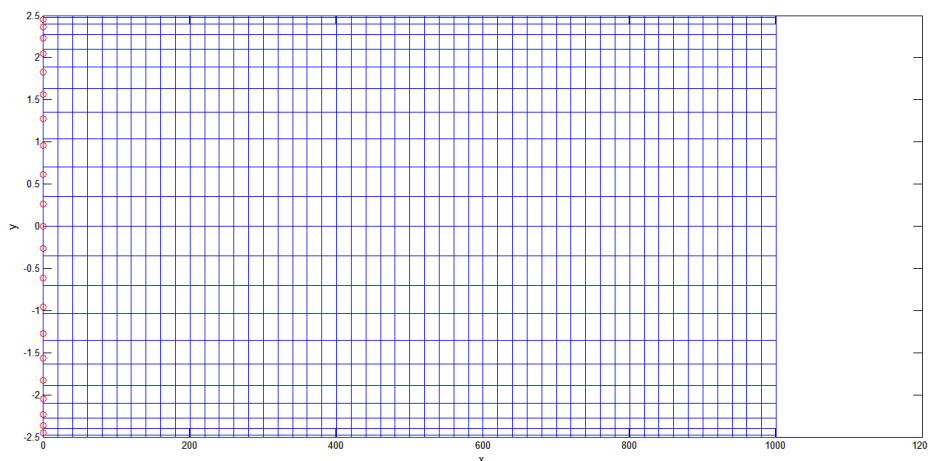


Figura 25. División en paneles de un ala rectangular (AR=5) y su estela ($i_{ala}=11$).

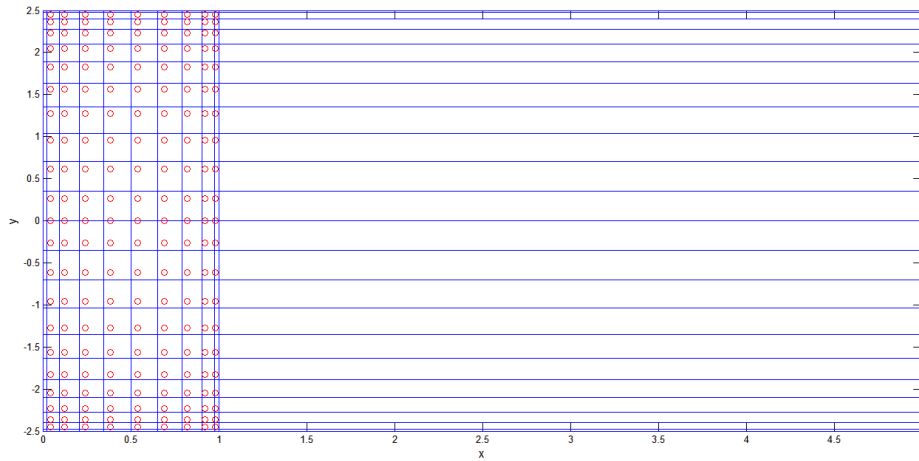


Figura 26. Zoom en la división en paneles del ala rectangular (AR=5) y puntos de colocación ($i_{ala}=11$).

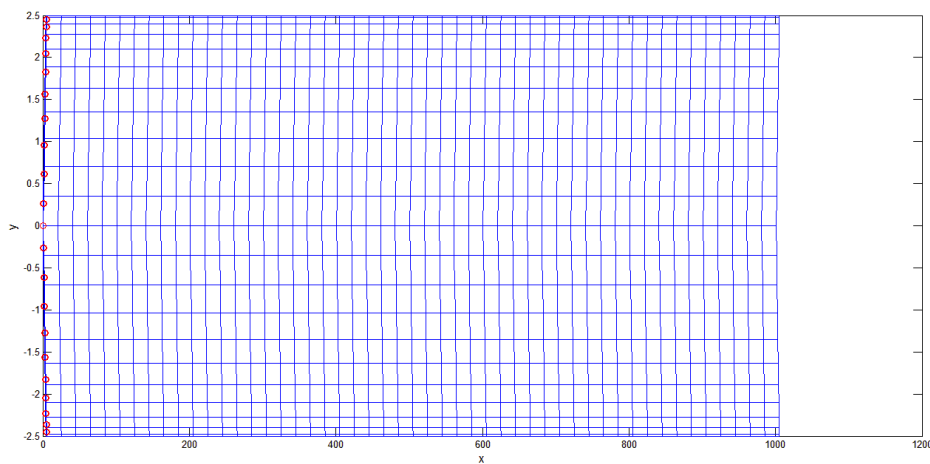


Figura 27. División en paneles de un ala con flecha 60° (AR=5) y su estela ($i_{ala}=11$).

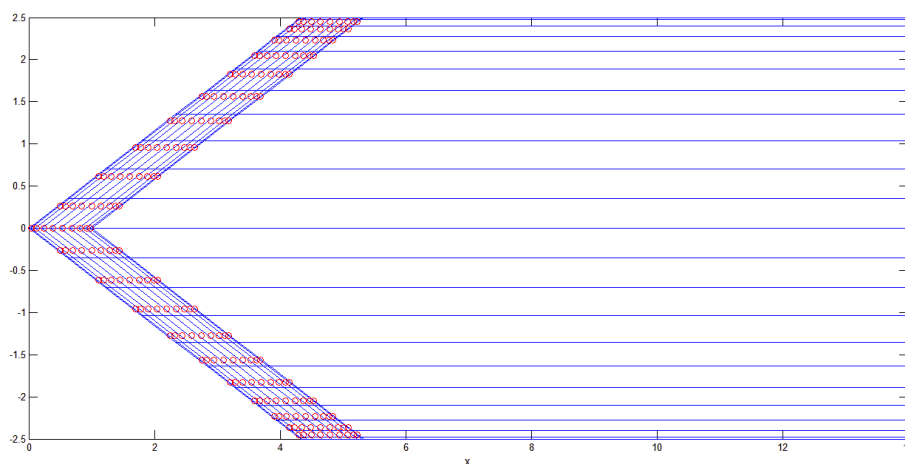


Figura 28. Zoom en la división en paneles del ala con flecha de 60° (AR=5) y puntos de colocación ($i_{ala}=11$).

En las Figuras 25-28 se aprecia cómo la división que se realiza del ala no es lineal en ninguno de sus 2 ejes. De hecho, sigue una expresión cosenoidal que aparece reflejada en nuestro código (consultar Anexo A). Esto lo que nos permite es refinar la malla en aquellos lugares que nos interesa que, en este caso, serían los bordes del ala: borde de ataque, de salida y marginales; ya que en ellos las variables aerodinámicas serán menos uniformes y serán los que requieran de una mayor precisión para medir con más exactitud los saltos de las distintas variables. No obstante, cualquier otro tipo de división también es admisible, aunque probablemente requiera de un mayor número de paneles para conseguir esta misma precisión, lo cual se traduce en un mayor uso de la memoria, mayores tiempos de ejecución... De hecho, sin más que hacer algunas sencillas comprobaciones, se puede ver que el número de incógnitas (y por tanto de ecuaciones) es $(i_{ala} - 1)N_{Y,incog}$, luego podemos ver a través de esta relación cómo el incremento de divisiones en ambos ejes incrementa el número de incógnitas y, por tanto, de iteraciones.

Por otro lado, este valor de i_{ala} también influye en la estela. En las figuras 25 y 27 aparece representada precisamente esta estela y vemos que, en comparación con el ala (situada en los puntos rojos de estas mismas figuras), su extensión puede considerarse casi infinita. Esta extensión dependerá del AR que tenga ese ala, (la longitud de la estela la asumiremos proporcional a este parámetro para hacerla lo suficientemente grande), pero la distancia entre los paneles de la estela sí dependerá del i_{ala} . Por ello, se define una variable i_{estela} que será equivalente a i_{ala} y tendrá una cierta relación de proporcionalidad con ella, y la contabilizará. Para el caso no estacionario, los resultados deberían ser independientes de este valor, puesto que, como hemos visto, las variables se conservan a través de la estela. No obstante, para el caso no estacionario esto tendrá una mayor relevancia y, ya que las variables irán pasando de un panel al siguiente en cada instante de tiempo posterior, será importante que el panel del borde de salida del ala tenga un tamaño muy similar a los paneles de la estela que, como vemos, sí siguen una división lineal por este motivo que estamos explicando. Por tanto, será importante seleccionar estos parámetros con cuidado para evitar errores demasiado grandes.

Por último, y antes de pasar a analizar algunos resultados, en las figuras 26 y 28 vemos representados por puntos rojos los que serían los puntos de colocación sobre el ala. No entraremos en ningún tipo de detalle sobre ellos ahora puesto que, un poco más adelante, nos centraremos en su importancia a través de estos estudios. No obstante, haremos algunas consideraciones previas sobre ellos ahora que estamos tratando en mayor detalle el código. Para empezar, estos puntos simplemente tienen un interés numérico desde el punto de vista de que debemos aplicar nuestras ecuaciones en algunos puntos concretos para poder tener un sistema cerrado en cuanto a número de ecuaciones e incógnitas (como ya se explicó anteriormente), dada la forma que vimos que tenían nuestras ecuaciones. En teoría, estas ecuaciones deberían verificarse para cualquier punto, no obstante veremos que, dados los operadores que intervienen en nuestras ecuaciones, estas serán altamente inestables por lo que sí influirá la elección de estos puntos y convendrá seleccionarlos de forma que nos acerquemos lo máximo posible a los puntos donde tenemos nuestras incógnitas (es decir, a las esquinas de nuestros triángulos) para obtener una matriz de condición muy próxima a diagonal y, por tanto, más fácilmente invertible.

En primer lugar, no situaremos estos puntos ni sobre los paneles de los bordes marginales ni de ataque porque, como ya vimos, en ellos ya tenemos impuestas unas determinadas condiciones de contorno (potencial nulo), por lo que el potencial sobre ellos no es una incógnita y, por tanto, no necesitamos estas ecuaciones.

Por otro parte, como vemos, los puntos de colocación los hemos definido de forma que siempre mantengan su posición relativa dentro de cada panel (véase Figura 29), independientemente de la geometría alar: flecha, estrechamiento... Esta será la definida y, aunque podríamos variarla, por motivos de estabilidad del método (como veremos en apartados posteriores) es mejor mantenerla constante. No obstante, esta figura es solo un esquema para representar la simetría y posición relativa de estos puntos ya que, en realidad, en los paneles de los bordes no habrá tales puntos y sí los habrá en la línea media del ala. Para ver la representación real, ver Figuras 26 y 28.

Dicho esto, pasemos a analizar algunos resultados representados en las Figuras 30 – 37. En estas gráficas se ha representado, para varios valores de la variable i_{ala} cómo varía la forma de las gráficas que vimos para el caso estacionario en el capítulo anterior. El resto de parámetros, por tanto, permanecerán constantes en cada representación. Es posible pensar que, una variación conjunta de varios de estos parámetros pueda provocar efectos contrapuestos y, por tanto, este tipo de estudios en el que el resto de parámetros se mantienen constantes, no sea válido. Sin embargo, se puede demostrar fácilmente que, independientemente del valor del resto de parámetros, el comportamiento cualitativo de las gráficas es siempre el mismo para los mismos valores de este parámetro que estamos analizando, luego todos estos resultados serán extrapolables al resto de casos.

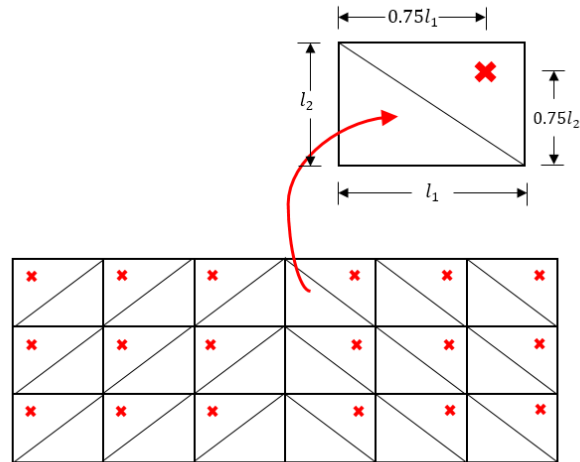


Figura 29. Esquema de la posición relativa de los puntos de colocación.

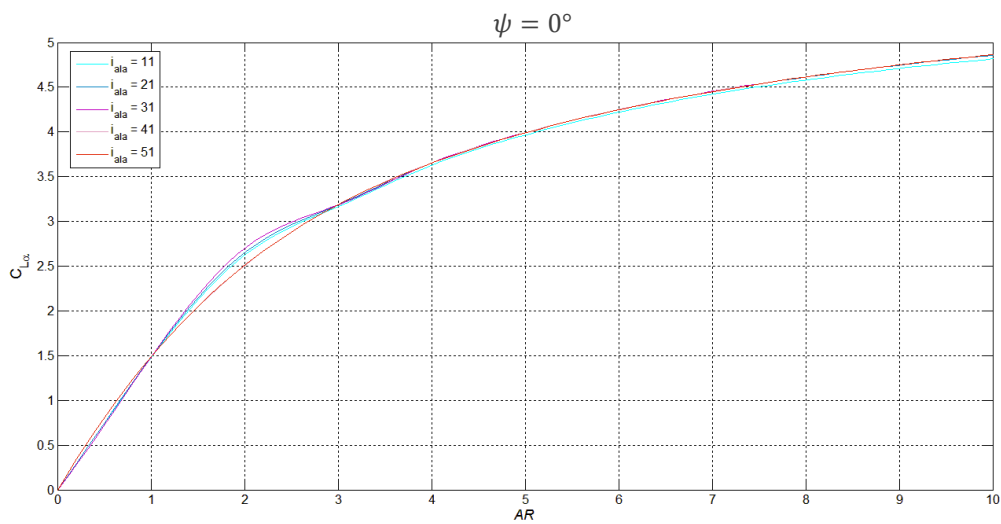


Figura 30. Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 0° .

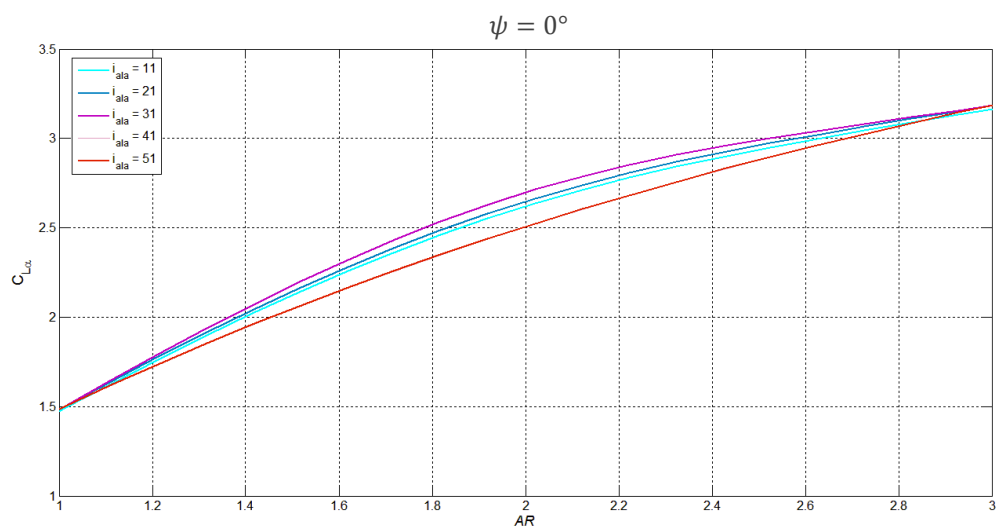


Figura 31. Detalle de la Figura 30.

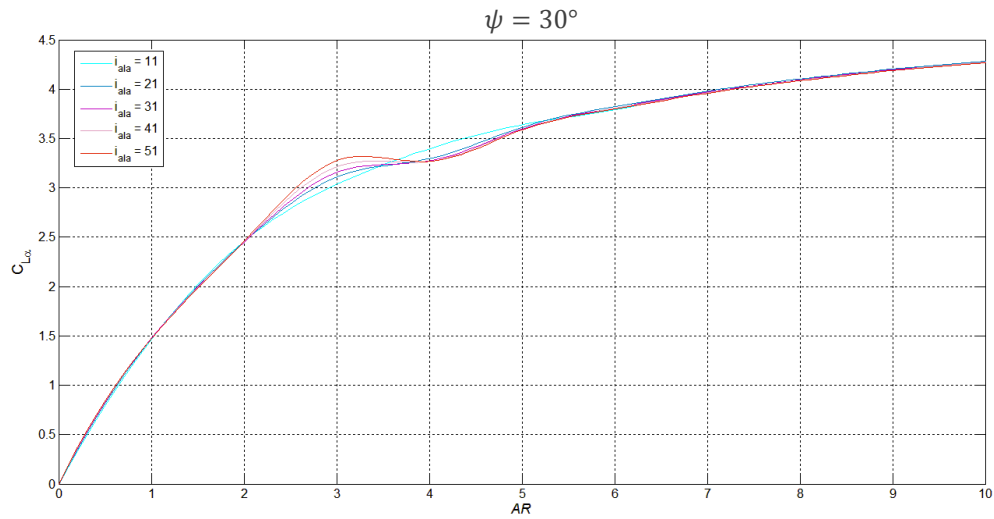


Figura 32. Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 30° .

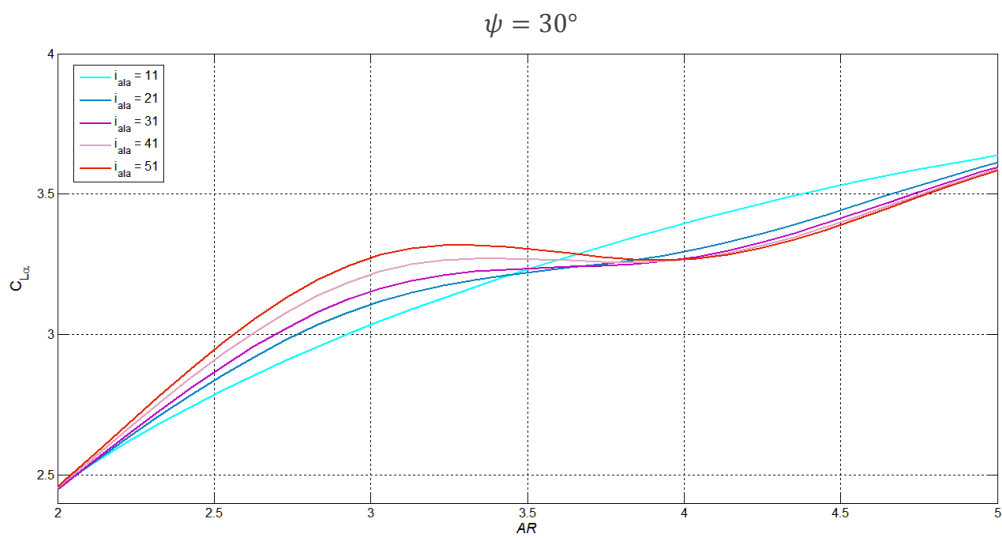


Figura 33. Detalle de la Figura 32.

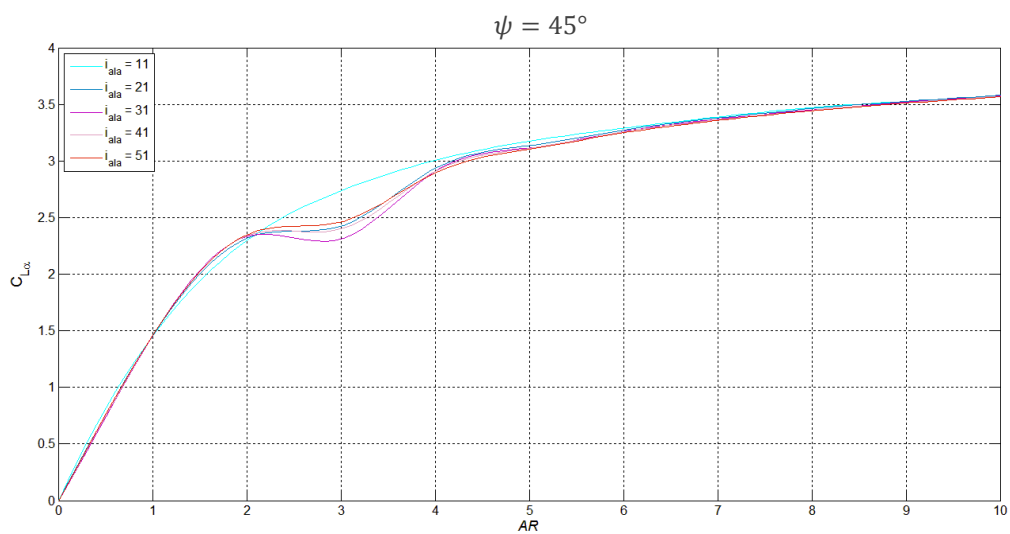
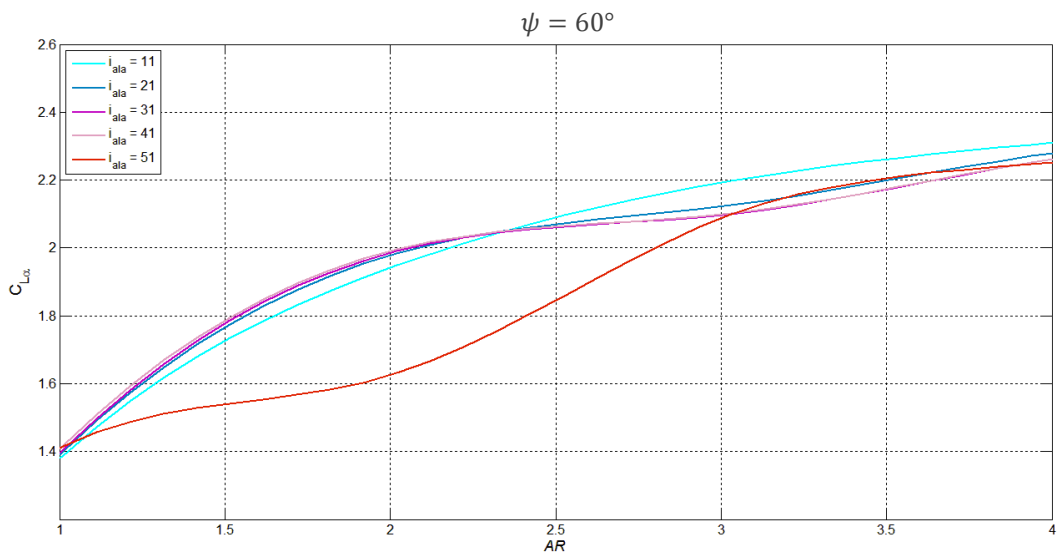
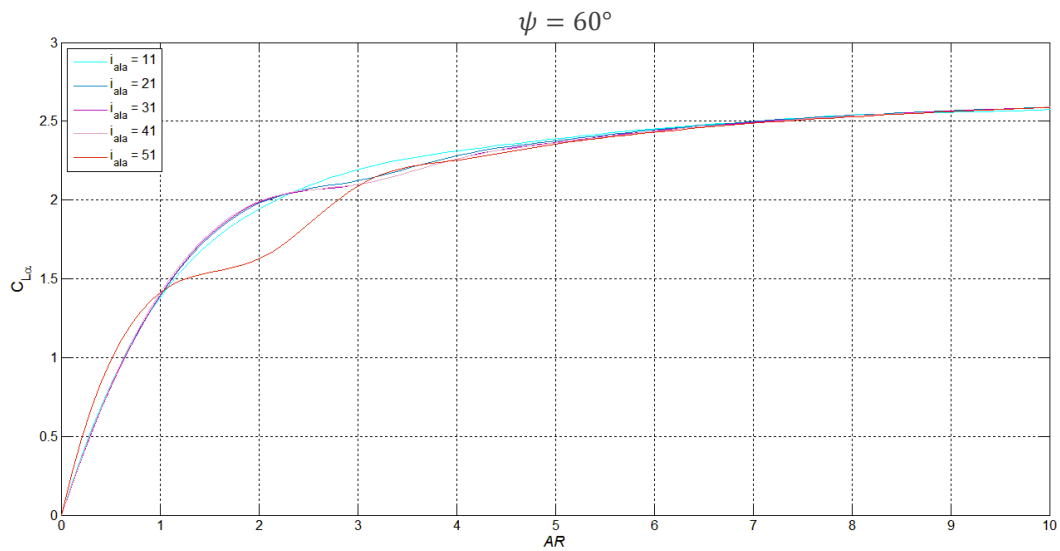
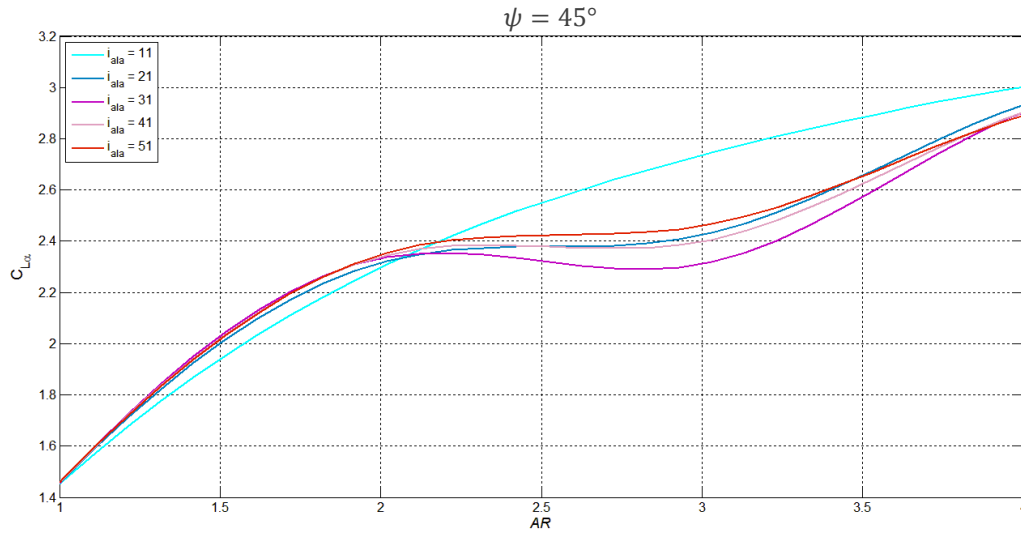


Figura 34. Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 45° .



De las figuras 30 - 37 se desprende la siguiente información. Por un lado, vemos que, conforme el alargamiento del ala aumenta, independientemente del ángulo de flecha que se tenga, todas las gráficas tienden a la misma, siendo el valor de i_{ala} irrelevante para este aspecto, ya que todas convergen a la misma, con errores despreciables entre ellas. No obstante, vemos que, para valores más pequeños del AR , típicamente entre $AR = 1$ y $AR = 5$, las gráficas se van volviendo más inestables conforme i_{ala} aumenta. Asimismo, este efecto se va retrasando, afectando a valores del alargamiento menores conforme i_{ala} aumenta la flecha; pero también se producen errores mayores conforme esta aumenta. También vemos que, el comportamiento de las gráficas no es sencillo de predecir al variar i_{ala} ; ya que, a pesar de presentar siempre una forma muy similar, el desplazamiento de las gráficas con i_{ala} varía de un caso a otro, no presentando un patrón claro e identificable a primera vista. Esto lo observaremos con mayor claridad en las siguientes gráficas que se mostrarán con los errores del método.

Por tanto, dicho todo esto, en vista de los resultados, un valor de $i_{ala} = 11$ parece proporcionar unos resultados más aceptables que el resto y con menores errores, por lo que este valor ha sido el escogido para realizar los cálculos de los apartados anteriores y el que se recomienda para el uso de nuestro método de aquí en adelante.

Es importante destacar que este valor es el idóneo para el tipo de división del ala que estamos realizando que, como hemos visto anteriormente, no es lineal, sino que sigue una expresión cosenoidal, refinándose así la malla en los bordes del ala, que es donde se presentan mayores saltos en las variables y serán los puntos más críticos. Por tanto, para otro tipo de división, sería necesario contemplar de nuevo estos estudios. Siguiendo con el tipo de división que se ha hecho del ala, se ha comprobado que esta era mucho más eficaz que una lineal, por los motivos ya expuestos.

Para terminar, con la influencia de i_{ala} , analicemos los errores, absolutos y relativos, que se cometen con el método, comparándolos con los valores reportados por la literatura ya vistos.

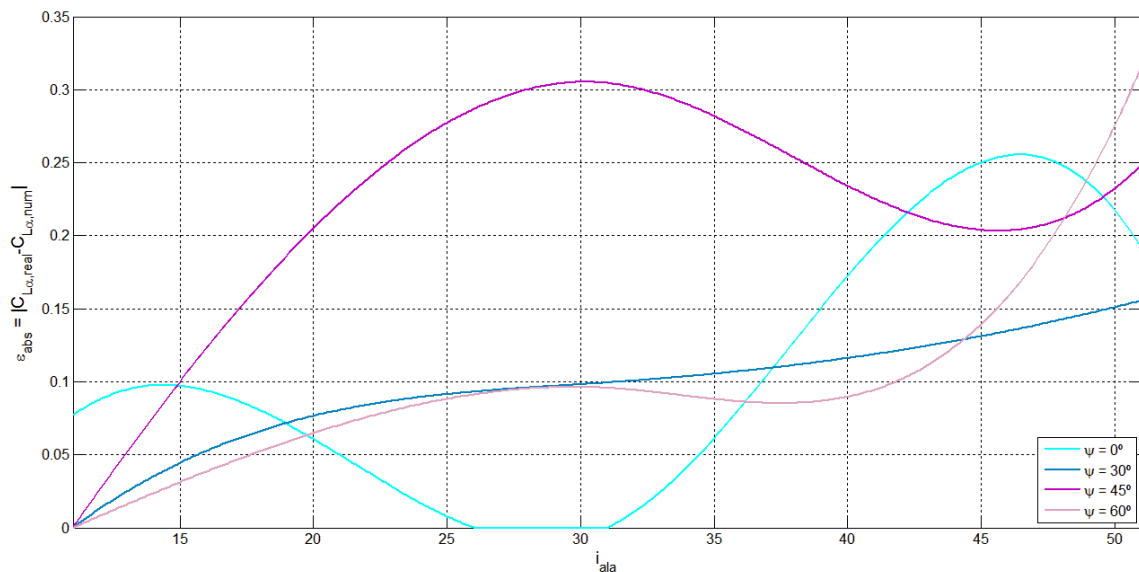


Figura 38. Variación de los errores absolutos con i_{ala} .

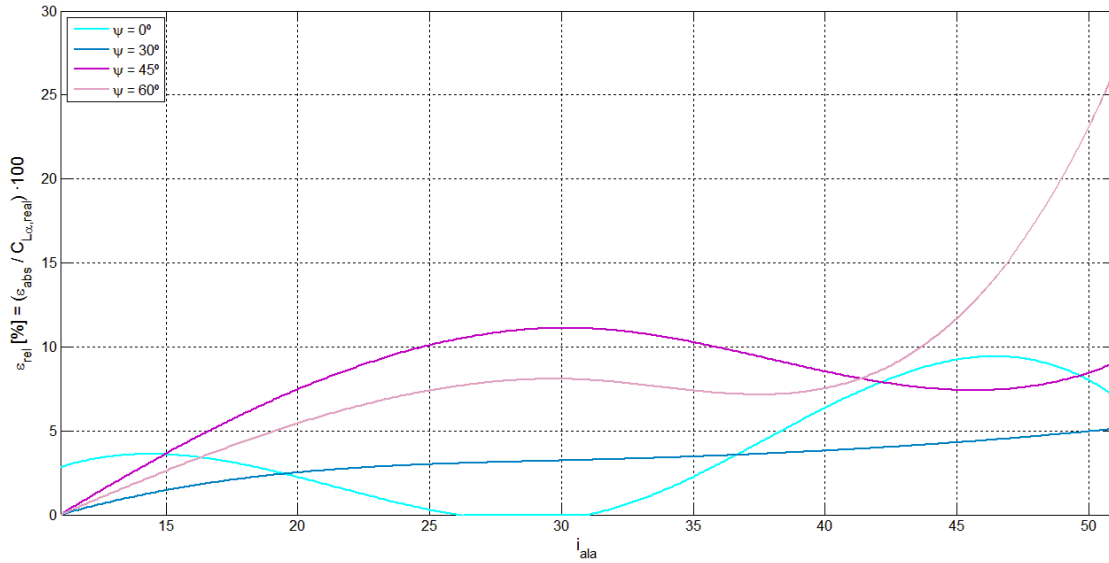


Figura 39. Variación de los errores relativos con i_{ala} .

Como podemos ver, en la *Figura 38* y la *Figura 39*, hemos definido los errores absoluto y relativo, respectivamente, como sigue:

$$\varepsilon_{abs} = |C_{L\alpha,real} - C_{L\alpha,numérico}| \quad (7.1)$$

$$\varepsilon_{rel} = \frac{|C_{L\alpha,real} - C_{L\alpha,numérico}|}{C_{L\alpha,real}} \cdot 100 \quad (7.2)$$

Es necesario añadir que estos cálculos se han realizado calculando la máxima diferencia entre el valor real de $C_{L\alpha}$ y su estimado, es decir, que nuestro criterio es que consideramos como error de la función el máximo de todos los errores.

En estas mismas figuras vemos por tanto el comportamiento que siguen estos errores. Como ya hemos visto, para valores de i_{ala} menores, los errores también son menores (salvo para el caso de flecha 30° , en que son menores para $i_{ala} \sim 30$, aunque para $i_{ala} \sim 10$ también son pequeños). Esta diferenciación del caso de flecha 30° tiene una justificación y es que, si volvemos a la *Figura 16*, vemos que para este valor concreto faltaban muchos datos de la literatura, luego se han tenido que tomar valores experimentales, interpolaciones..., por lo que estos han sido más difíciles de interpretar y esta gráfica podría considerarse menos representativa. En el resto de gráficas, aunque no se aprecie, los errores que aparecen marcados como 0, realmente son valores de varios órdenes de magnitud inferior a los otros, de ahí que al escalarlos en los ejes parezcan ser nulos, pero realmente no existe ningún error nulo totalmente. Sin embargo, esto sí nos permite ver que existen rangos de valores de i_{ala} para los cuales los errores son bastante admisibles. Estos valores se aproximan por 0 dada la dificultad de obtener datos con decimales exactos de la literatura y solo disponer de gráficas como las mostradas para aproximar los datos. Asimismo, hay que considerar que los valores de las gráficas se calculan en unos determinados puntos y el resto se consiguen por interpolación, luego esto también introducirá un cierto error ya más difícil de calcular y que no se está considerando.

Fijándonos en la gráfica de errores relativos, que es de las más indicativas, vemos que, como ya dijimos, en general las funciones no siguen un patrón establecido, sino que los errores varían de formas distintas, viendo que, en general, aumentan considerablemente al hacerlo i_{ala} , llegando a dispararse mucho en algunos casos.

Como vemos que, en general, para valores de i_{ala} comprendidos entre 10-15, los errores que se cometen son inferiores al 5%, estos son los valores que nos convendrá utilizar para nuestros cálculos.

Por último, comparemos algunos de los tiempos de ejecución en función de i_{ala} . Lógicamente, esto dependerá del ordenador, del tipo de procesador, de la versión de Matlab (el programa que estamos utilizando en este caso para calcular los resultados) de la que estemos haciendo uso, del número de puntos que calculemos para interpolar..., incluso de la forma en que hayamos programado nuestro método, usando unas funciones que incorpore Matlab u otras. Sin embargo, si es interesante ver la diferencia relativa entre todos los valores, comparando unos con otros, sin prestar tanta atención al resultado numérico concreto, teniendo en cuenta que todos los demás parámetros serán constantes en este estudio, así como los recursos utilizados.

i_{ala} [-]	Tiempo de ejecución [s]
11	28.569
21	69.180
31	116.835
41	177.822
51	240.140

Tabla 3. Tiempos de ejecución del método numérico para diferentes valores de i_{ala} para una flecha de 30°.

Como se desprende de la Tabla 3, la diferencia entre realizar los cálculos con un $i_{ala} = 11$ y otro valor de $i_{ala} = 51$, solo unas 5 veces mayor, puede llegar a multiplicarse casi por 10. Por ello, es recomendable utilizar los valores mínimos de i_{ala} posibles, además de los recursos de memoria que son necesarios consumir, que se reducen notoriamente. Por tanto, el hecho de que al reducir i_{ala} se reduzcan los errores, es una doble ventaja: en términos de tiempo de ejecución y en precisión.

Pasemos a continuación a analizar la influencia del resto parámetros.

7.1.2 $N_{Y,incog}$

Este caso, el de influencia de la variable $N_{Y,incog}$, es completamente análogo al anterior, sustituyendo lo que antes eran divisiones según el eje X por divisiones ahora según el eje Y , es decir, siguiendo la envergadura del ala. La influencia, por tanto, de este parámetro a la hora de calcular los resultados es indiscutible.

Las divisiones según este eje seguirán el mismo razonamiento que seguíamos anteriormente, para el caso de i_{ala} , por lo que está claro por qué los resultados variarán al seleccionar un valor u otro de esta variable, que será, principalmente, por precisión y aproximaciones del método. No obstante, la influencia en la estela simplemente estará marcada por el número de divisiones en el eje Y que se realicen de la misma.

En cuanto este parámetro, lo que nos interesa, grosso modo, es que, al igual que sucedía anteriormente, seamos capaces de recoger las variaciones de las parámetros según el eje Y , realizando el menor número de divisiones posibles, pero reproduciendo fielmente los resultados. Antes veíamos que para el eje X el número de divisiones solo desviaba los resultados para valores del alargamiento pequeños, siendo incluso más conveniente usar pocas divisiones, lo cual resultaba muy ventajoso. Comprobemos ahora lo que sucede al variar $N_{Y,incog}$, manteniendo el resto de parámetros constantes.

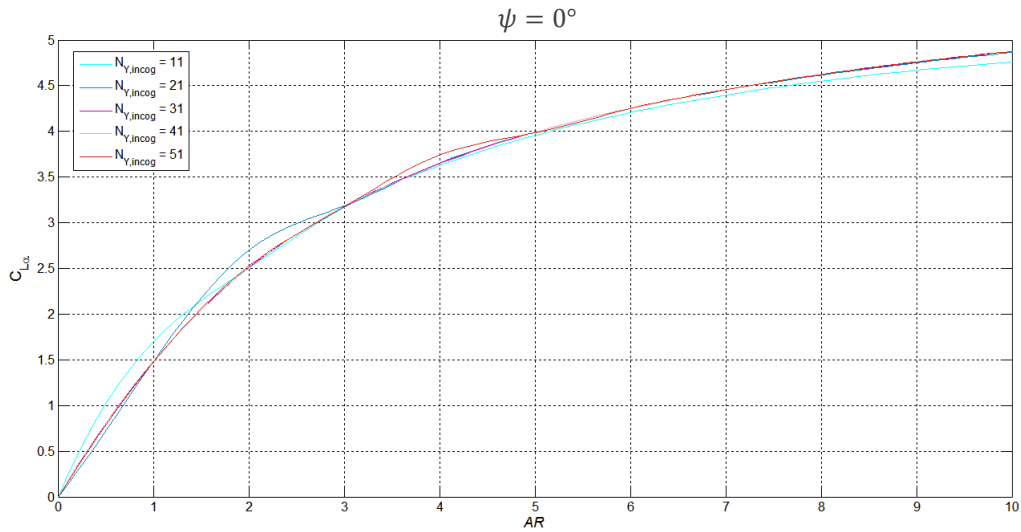


Figura 40. Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 0° .

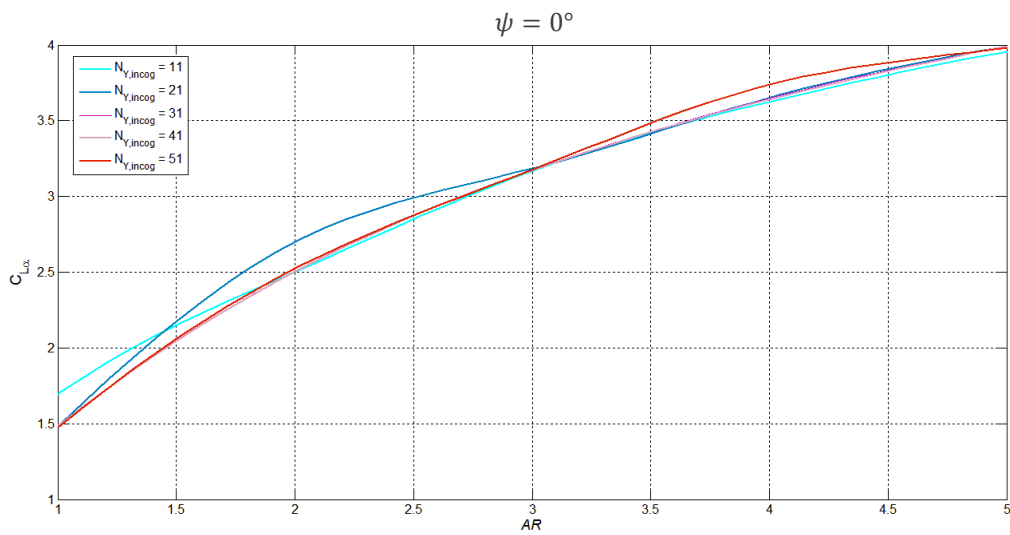


Figura 41. Detalle de la Figura 40.

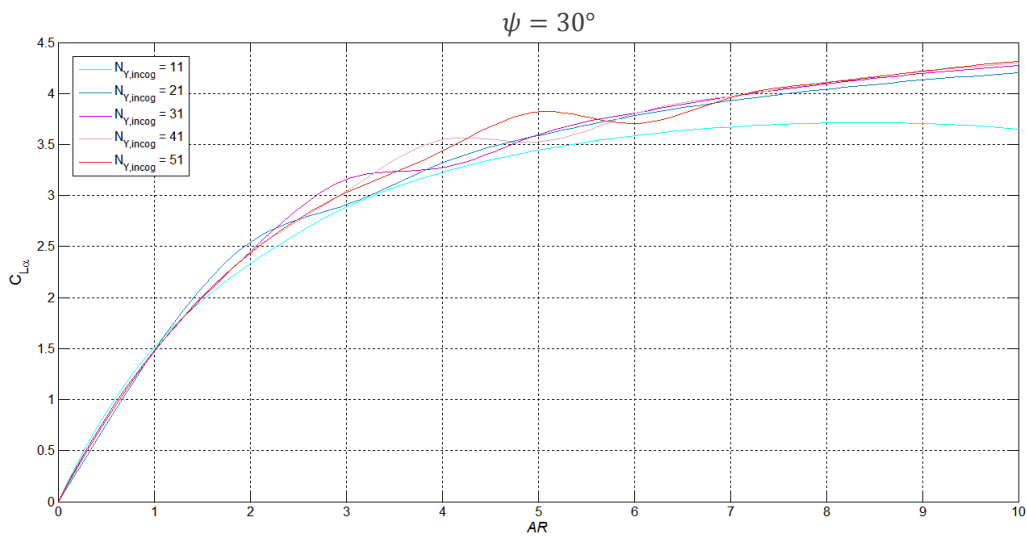


Figura 42. Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 30° .

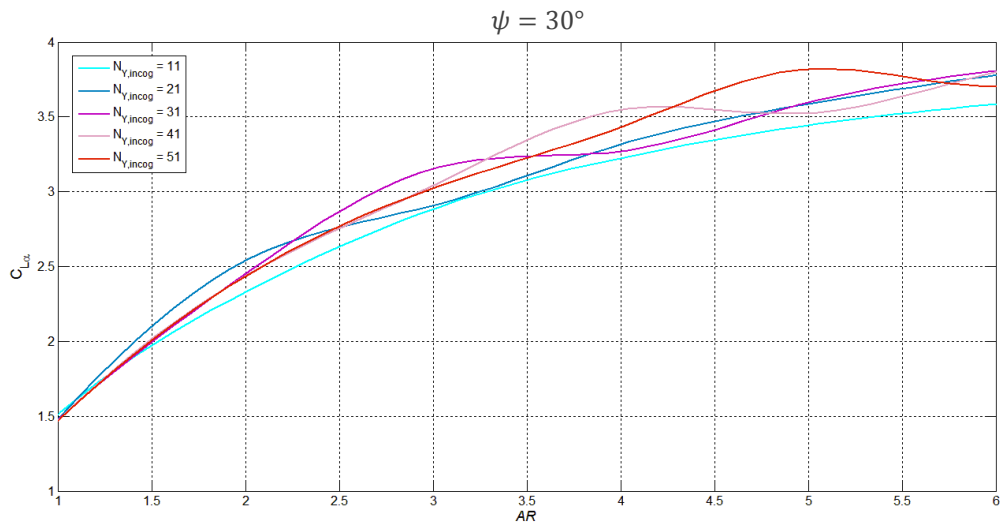


Figura 43. Detalle de la Figura 42.

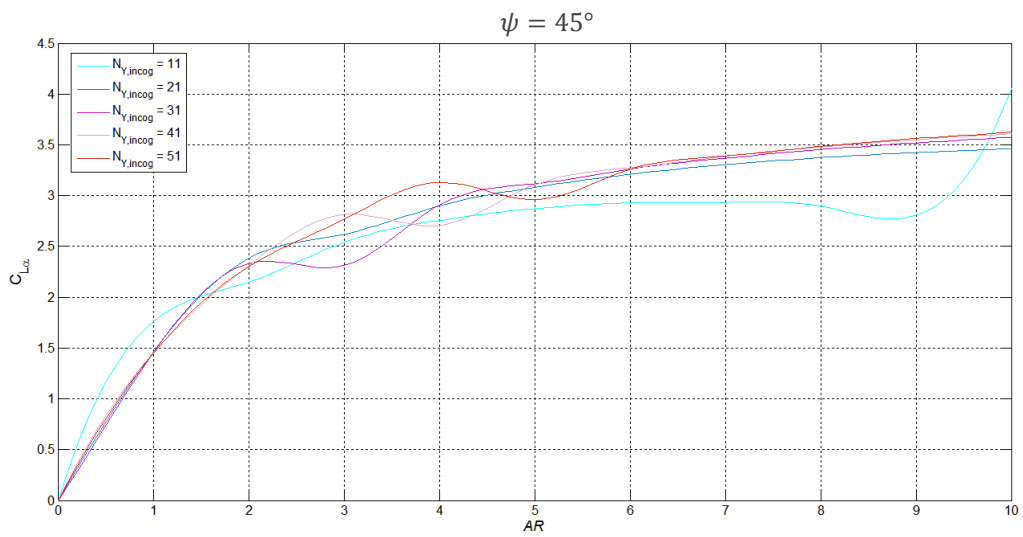


Figura 44. Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 45°.

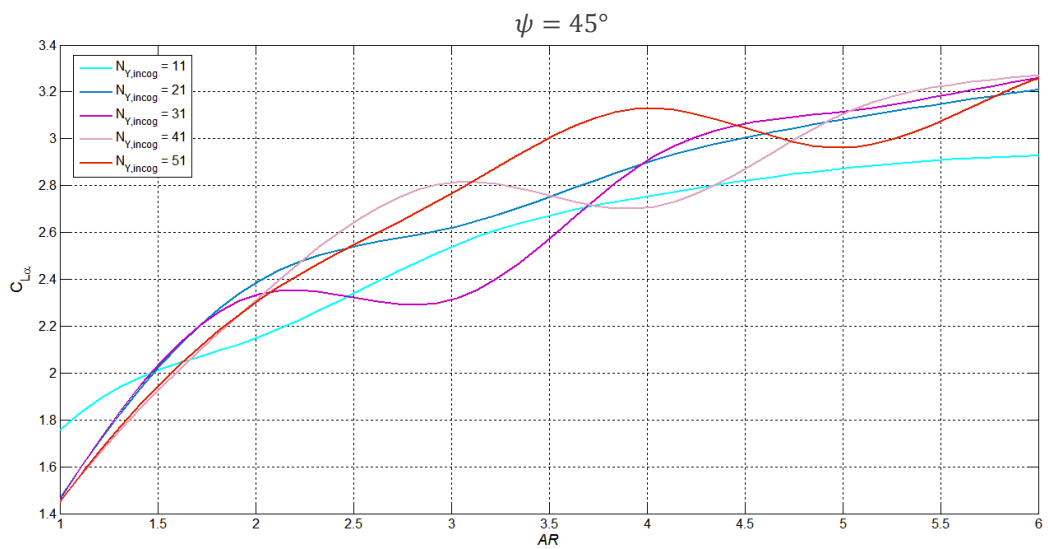


Figura 45. Detalle de la Figura 44.

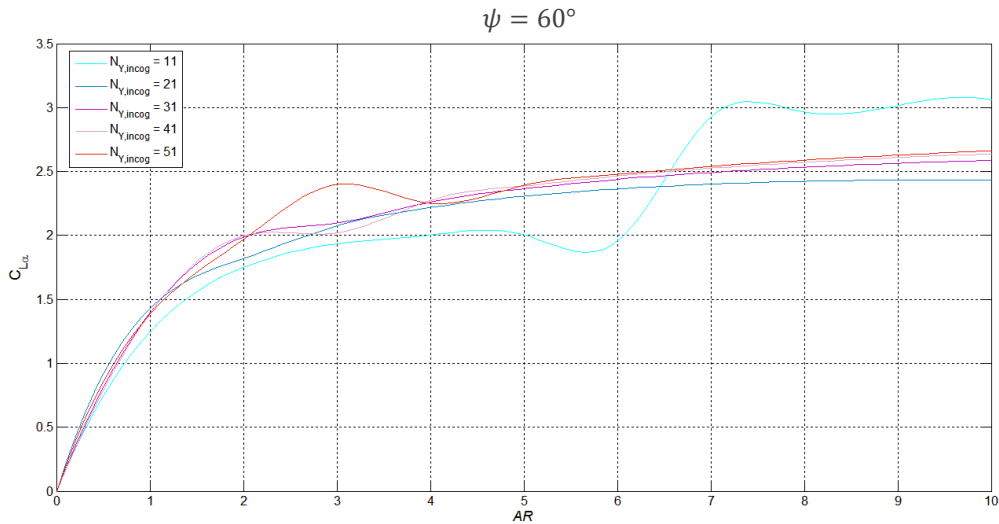


Figura 46. Pendiente de la curva de sustentación frente al alargamiento para una flecha de 60° .

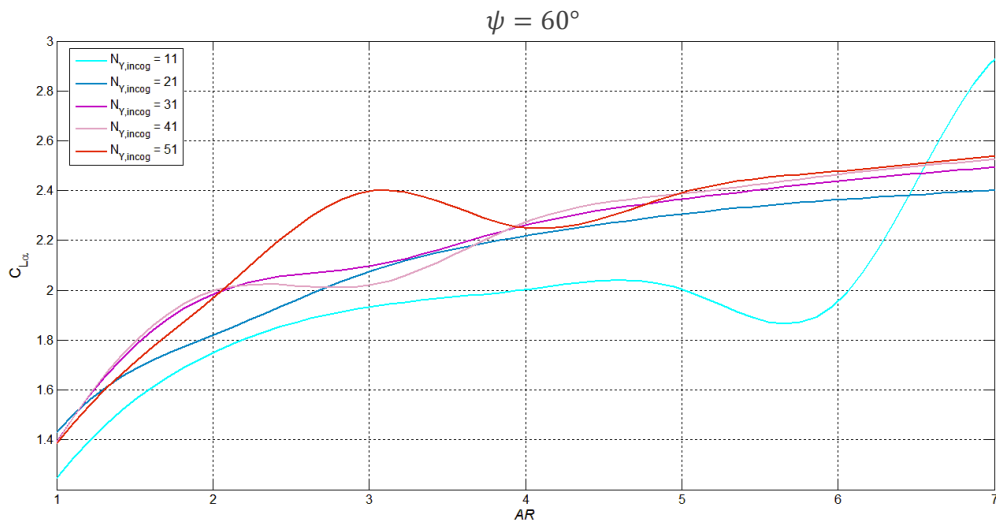


Figura 47. Detalle de la Figura 46.

Como podemos apreciar en las Figuras 40-47 nuestros resultados son muy sensibles al valor del parámetro $N_{Y,incog}$ que seleccionemos. Para la mayoría de las flechas seleccionadas, las curvas presentan importantes oscilaciones hasta alcanzar un valor de $AR \sim 6$. Además, para valores muy pequeños de $N_{Y,incog}$ vemos que los valores de $C_{L\alpha}$ que se alcanzan son inferiores a los esperados, por lo que los errores se van incrementando a medida que lo haga el alargamiento. No obstante, vemos que, en general, para $N_{Y,incog}$ pequeños es cuando se presentan menos oscilaciones en las gráficas, aunque no demasiado pequeños, porque la falta de precisión provoca resultados sin sentido físico en algunos casos. Resumiendo, vemos que valores pequeños de $N_{Y,incog}$ dan buenos resultados para alargamientos pequeños y viceversa.

Por tanto, ahora es más difícil de cuantificar qué valores de $N_{Y,incog}$ es necesario seleccionar para obtener mejores resultados. Para tratar de aclarar esta idea, al igual que hicimos con el caso anterior, observemos los errores que se producen en cada uno de los casos.

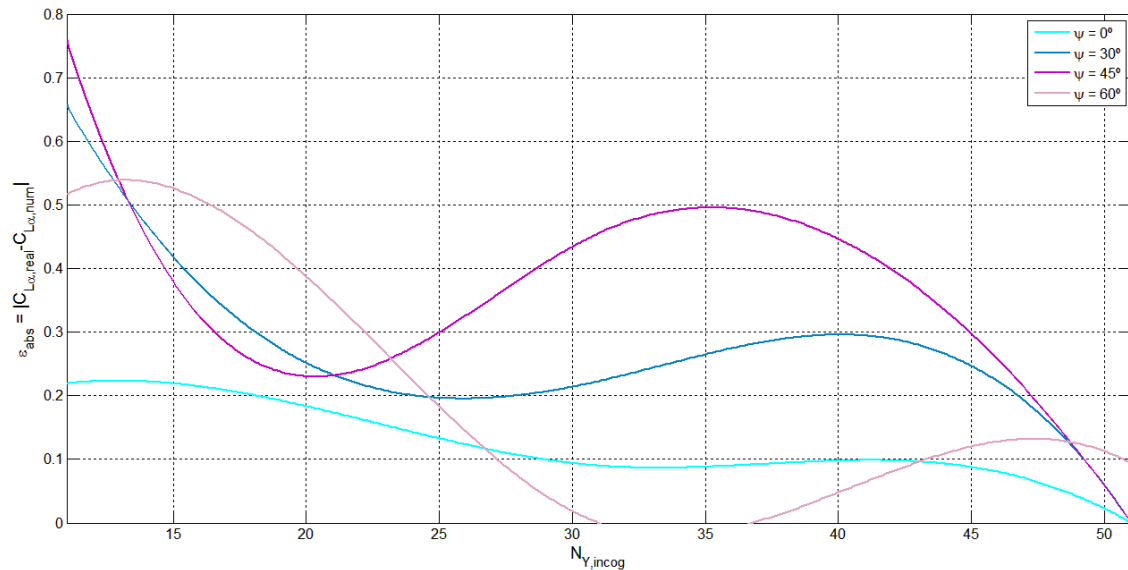


Figura 48. Variación de los errores absolutos con $N_{Y,incog}$.

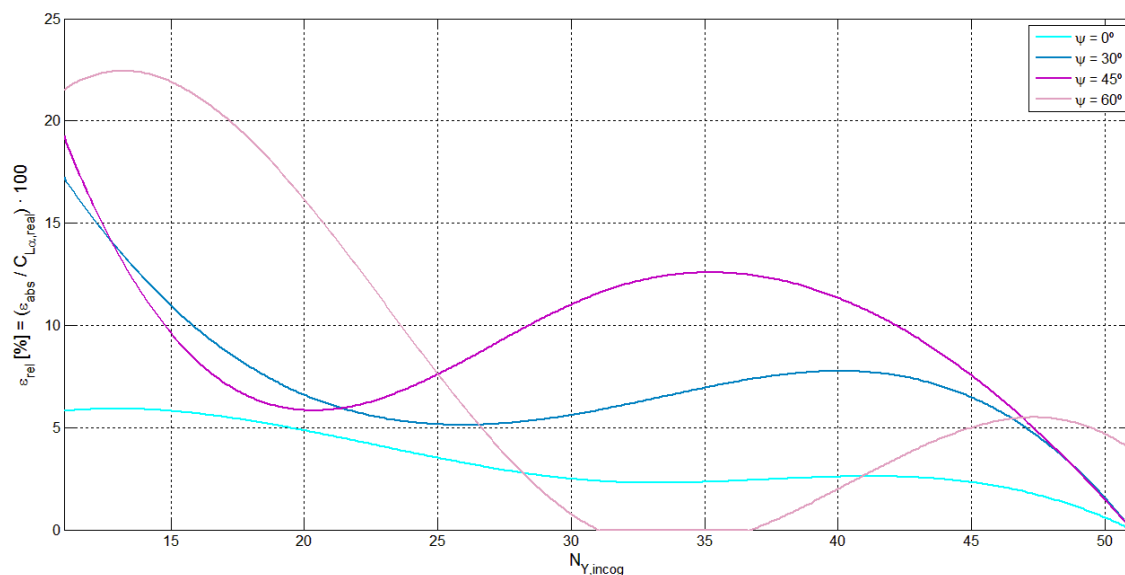


Figura 49. Variación de los errores relativos con $N_{Y,incog}$.

Lo que se desprende ahora de las Figuras 48 y 49 es que, en general, para cometer errores relativos menores del 5%, lo que interesa ahora son valores de $N_{Y,incog}$ grandes. Al igual que sucedía en el apartado anterior, los errores que aparentemente son nulos, en realidad representan errores de algún orden de magnitud inferior y debemos recordar que comparamos con datos aproximados de la literatura, no exactos, a partir de interpolaciones, datos experimentales... Es por esto que, a pesar de observar una forma en una determinada gráfica, nos pueda chocar que en ella se cometan errores tan pequeños, puesto que esto son solo aproximaciones para crear una idea general de las tendencias de los errores y tienen un carácter más divulgativo.

Volviendo a los errores, debido a estos resultados, es conveniente soportar las pequeñas oscilaciones que se dan para alargamientos pequeños, ya que, en su conjunto, introducen errores menores que los que provocan valores de $N_{Y,incog}$ pequeños. De nuevo, para la estimación de los errores se ha utilizado la misma definición (7.1) y (7.2) y se ha vuelto a emplear el mayor de los errores.

Al igual que para el caso anterior, no se observa un patrón de comportamiento claro, aunque parece que, a aumentar la flecha, los errores aumentan en general, y las tendencias de las gráficas es a aumentar los errores al

reducir $N_{Y,incog}$, disparándose los errores cuando este último disminuye considerablemente. Para valores de $N_{Y,incog}$ mayores que estos, los errores se reducen una cantidad despreciable en comparación a la pérdida que supone el incremento del tiempo de ejecución necesario para el programa, por lo que no se valoran y se aceptan estos resultados como razonables.

El hecho de que ahora debamos seleccionar un valor de $N_{Y,incog}$ lo más grande posible, en general, como acabamos de decir, perjudica al tiempo de ejecución. Veamos por tanto, al igual que antes, cómo se modifican estos valores para un caso cualquiera, realizando una comparación relativa entre ellos por los motivos expuestos en este mismo apartado de la sección anterior.

$N_{Y,incog}$ [-]	Tiempo de ejecución [s]
11	6.407
21	21.893
31	45.490
41	79.195
51	124.011

Tabla 4. Tiempos de ejecución del método numérico para diferentes valores de $N_{Y,incog}$ para una flecha de 30°.

Todos estos incrementos en el tiempo de ejecución se deben a la aparición de esta variable tanto en el montaje de las matrices como en la construcción geométrica del ala, de la estela..., al igual que para el caso anterior.

Vemos ahora que, desde el valor menor de $N_{Y,incog}$ elegido hasta el mayor, que lo quintuplica aproximadamente, el tiempo de ejecución se multiplica aproximadamente por 20; lo cual supone algo mucho más desfavorable incluso que lo que teníamos para i_{ala} , pero que será necesario asumir.

Por último, para terminar con estos análisis, examinaremos un tercer parámetro relacionado ahora con la posición de los puntos de colocación.

7.1.3 Puntos de colocación

En efecto, la situación exacta de los puntos de colocación influye en los resultados que aporta nuestro método y, además, como veremos, de una manera muy rotunda; pudiendo causar una mala elección de estos puntos unos resultados totalmente disparatados.

Como sabemos, estos son los puntos en los que se sustituyen nuestras ecuaciones para así conseguir llegar a un sistema determinado. Ya vimos también que en cada panel del ala necesitamos un punto de colocación, excluyendo a los paneles de los bordes del ala, donde, como ya hemos repetido en otras ocasiones, ya conocemos las condiciones de contorno y, por tanto, no necesitamos aplicar ninguna otra condición.

En las Figuras 26 y 28 pudimos ver representados estos puntos por una marca roja dentro de cada panel para varios ejemplos reales. En teoría, nuestro método debe converger independientemente de cuál sea la colocación de estos. Sin embargo, una buena colocación nos aseguraría una convergencia más rápida del método. Ahora bien, en la práctica, este hecho no se refleja del todo, como veremos a continuación.

En primer lugar, hemos de decir que, para conservar la simetría, los puntos de colocación se sitúan, en todo momento, simétricos respecto al eje $y = 0$, siendo este el de simetría del ala. Asimismo, sobre este mismo eje,

los puntos se sitúan siguiendo una colocación similar al resto. Esto lo podemos apreciar en las figuras anteriormente citadas. Si recordamos, en los paneles de los bordes del ala no necesitaremos dichos puntos por conocer ya en ellos el valor del potencial.

Dada la naturaleza de las ecuaciones con las que estamos tratando, se presenta un grave problema y es que, al estar trabajando con logaritmos (véanse ecuaciones del *Capítulo 5*), lo que puede suponer una diferencia de 10 veces mayor, en el resultado solo se traduce en el doble, porque sabemos que $\log 100 = 2 \log 10$, por ejemplo. Esto nos hace perder una gran precisión.

Además, como estamos buscando resolver un problema del tipo $A\phi' = b$, deberemos calcular la inversa de la matriz A para poder resolver este problema, con los problemas de condicionamiento que ello conlleva. Por tanto, interesará buscar una matriz lo más cercana a diagonal posible, es decir, cuyos términos predominantes se encuentren en su diagonal principal o en sus bandas cercanas. Para ello, se puede demostrar que conviene acercar los puntos de colocación todo lo posible a los puntos donde vamos a calcular el potencial, es decir, a las esquinas de los triángulos geométricos en los que hemos dividido nuestra ala. No obstante, como sabemos que la diferencia entre el vector posición del punto de colocación y el de aplicación del potencial aparece como su inversa dentro de nuestra ecuación, cuanto más nos acerquemos, más cerca estaremos de esta singularidad de la función. Por tanto, todo lo que podamos acercarnos estará limitado por la precisión decimal del programa que estemos utilizando y su límite de aproximación, ya que, si se alcanzan valores demasiado grandes, los resultados que se obtendrán vendrán marcados por indeterminaciones o valores infinitos, lo cual no tendría sentido físico.

Aclarado este hecho, basándonos en los resultados de la literatura, para cada caso estudiado se ha tratado de ajustar estos puntos de modo que los resultados que se obtuvieran fueran cercanos a los reales. En la *Figura 29* se muestra en mayor detalle la configuración típica que proporciona los mejores resultados para la mayoría de los casos. Como ya dijimos anteriormente, esta configuración es simétrica respecto al eje Y .

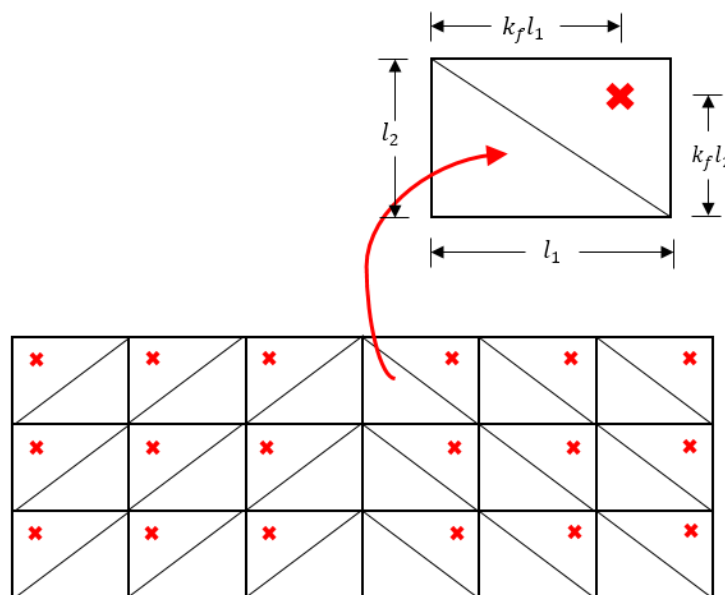


Figura 50. Definición de k_{factor} .

Ahora, haciendo uso de la misma definición de los errores que aparece en las ecuaciones (7.1) y (7.2), calcularemos estos errores, al igual que hicimos en apartados anteriores, variando la posición de los puntos de colocación y manteniendo el resto de parámetros fijos. Para ello, haremos uso de un factor que denominaremos k_{factor} y que definiremos como se muestra en la *Figura 50*. Este factor simplemente variará la posición relativa de los puntos de colocación dentro de cada panel. De nuevo, debemos recordar que en esta figura se muestra un esquema con el que se pretende definir una variable auxiliar. Ya hemos hablado en otras ocasiones de la situación real de los puntos de colocación, que no será exactamente la que aparece en esta figura; por tanto, no se debe entender dicha representación como una reproducción de la realidad, sino un esquema para esta definición de k_{factor} .

Los resultados obtenidos para el error de $C_{L\alpha}$ (de nuevo seleccionando el mayor de todos), son los que se muestran en la *Figura 51*. No obstante, en principio no estaremos interesados en todo el rango de valores que adopta k_{factor} , sino solo en aquellos que nos mantengan los puntos dentro del triángulo. Por ello, en la *Figura 52* se ha ampliado aproximadamente a los casos que verifican esta propiedad, para mayor detalle.

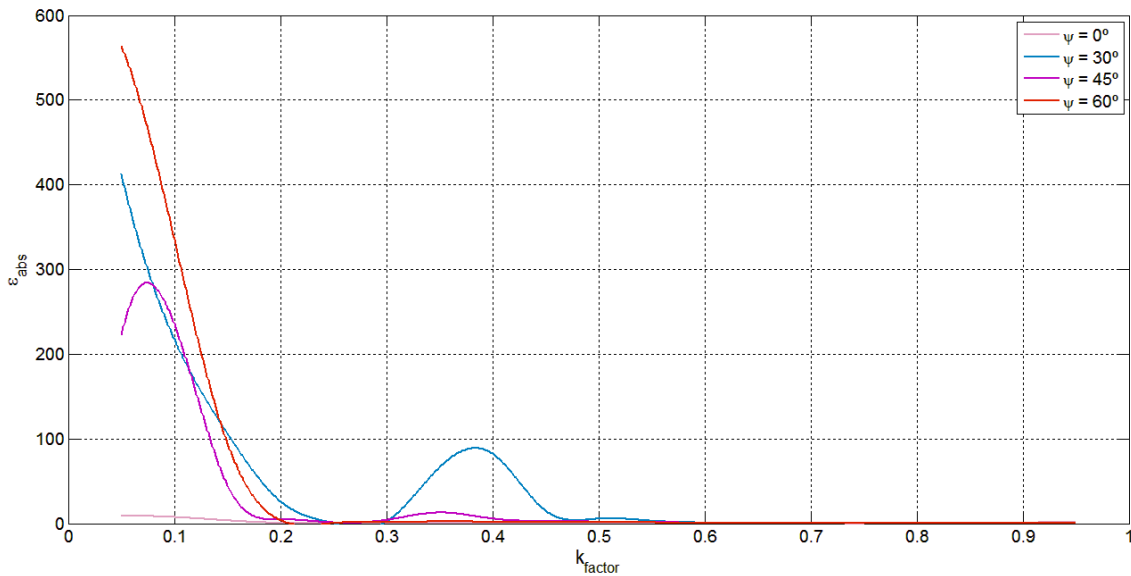


Figura 51. Variación de los errores absolutos con k_{factor} .

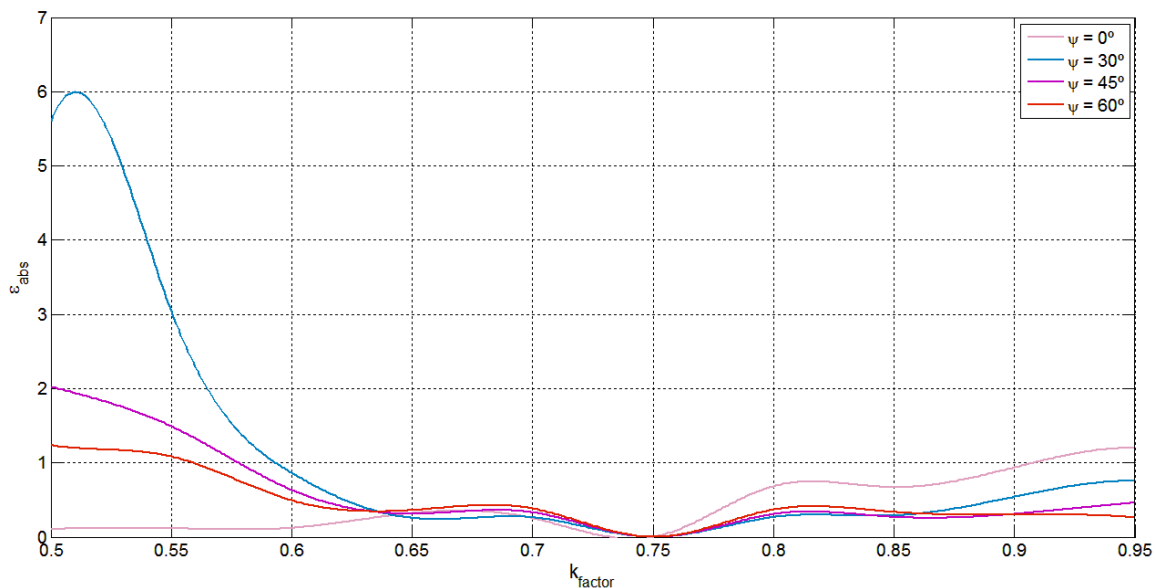


Figura 52. Detalle de la Figura 51.

Al igual que antes, también es posible observar los errores relativos cometidos en la *Figura 54*.

Podemos apreciar claramente que para un valor de $k_{factor} = 0.75$ (configuración que ya se mostró en los primeros capítulos), es donde se consiguen los mejores resultados, con errores muy pequeños. También vemos que en un entorno muy cercano de este, los errores aparentemente no son demasiado grandes, aunque experimentan un rápido crecimiento al separarnos muy poco de este valor. Además, no debemos olvidar que estamos interesados en calcular la pendiente de la curva de sustentación del ala, que después irá multiplicada por unos ciertos valores para conseguir obtener la sustentación total del ala y, por tanto, estos errores se irán propagando cada vez más, además de las simplificaciones que ya hemos hecho con los errores que estas introducen. Por tanto, si consideramos los errores intrínsecos del propio método también, por aproximaciones...

interesará reducir lo máximo posible cualquier fallo. Por ello, es importante vigilar los factores que se eligen para los puntos de colocación.

Vemos por tanto que, la tendencia general es a aumentarse este error a medida que nos alejamos del punto $k_{factor} = 0.75$, así como también tiende a aumentar a medida que aumenta la flecha, en general.

A raíz de los resultados, como podemos imaginar, los errores relativos también serán muy elevados, incluso de más del 100% en algunos casos; y esto podemos verlo ilustrado en la *Figura 54*.

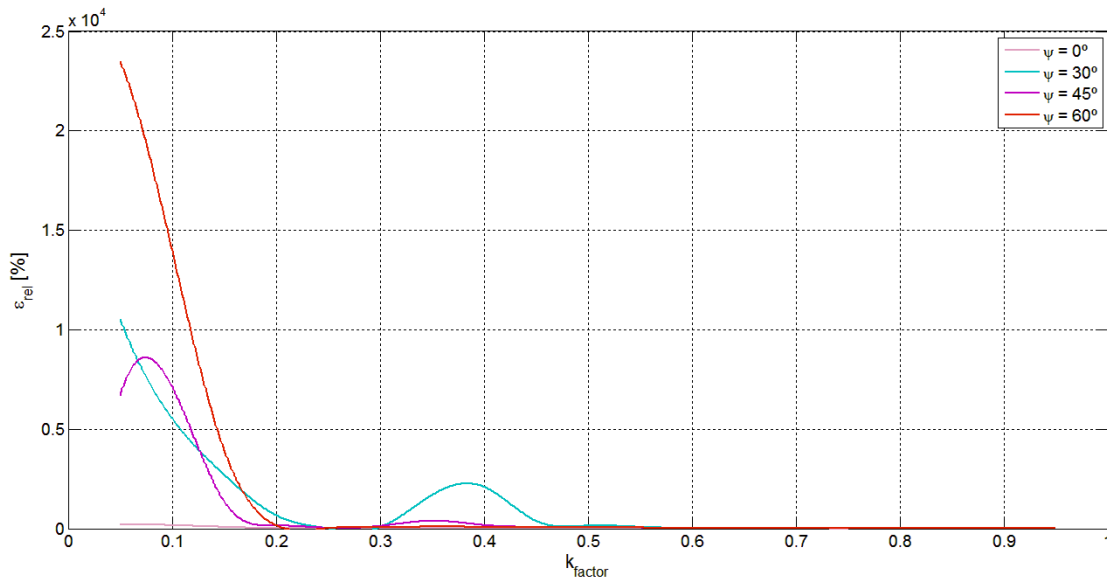


Figura 53. Variación de los errores relativos con k_{factor} .

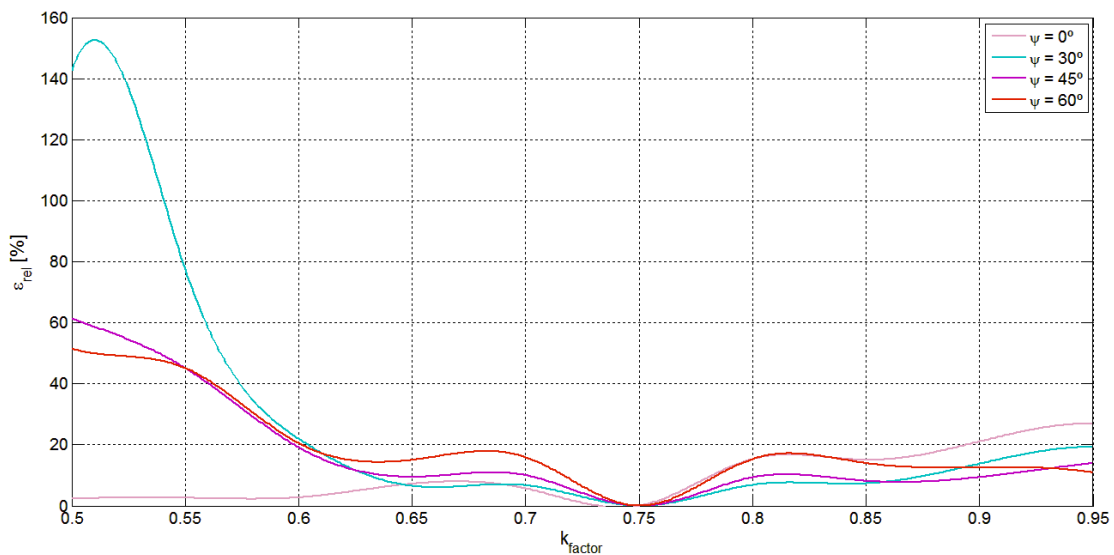


Figura 54. Detalle de la Figura 53.

Asimismo, para movimientos no estacionarios, en los que existe una mayor distorsión que en estos, se pueden llegar a resultados aún más disparatados que estos, obteniéndose, en algunos casos, valores de hasta 10^{86} órdenes de magnitud superiores al real.

También recordamos que aquí se muestran los errores absolutos, pero se puede comprobar que, en algunos casos, los resultados que proporciona el programa dan lugar a coeficientes de sustentación incluso negativos.

Por otra parte, ya hemos hablado de la importancia de un buen condicionamiento de la matriz característica del

sistema para poder resolver el sistema y también hemos dicho que este hecho estaba directamente relacionado con lo “correctos” que fueran nuestros resultados y, por tanto, con la posición de los puntos de colocación. Ahora demostraremos esta relación a través del comando `cond(Mat)` que incorpora Matlab y que nos proporciona una especie de número de condición con respecto a la inversión que define de forma que, cuanto mayor sea este número, más cerca estaremos de tener una matriz singular. Por tanto, veamos cómo evoluciona este número con respecto al factor k_{factor} anterior en la *Figura 55* y la *Figura 56*.

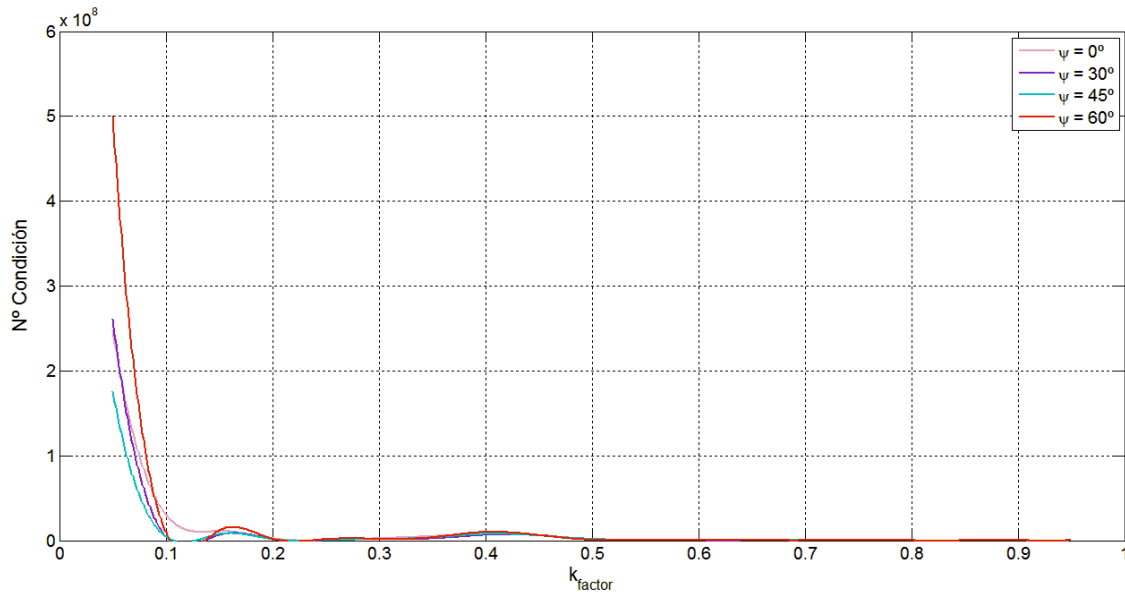


Figura 55. Variación del número de condición con k_{factor} .

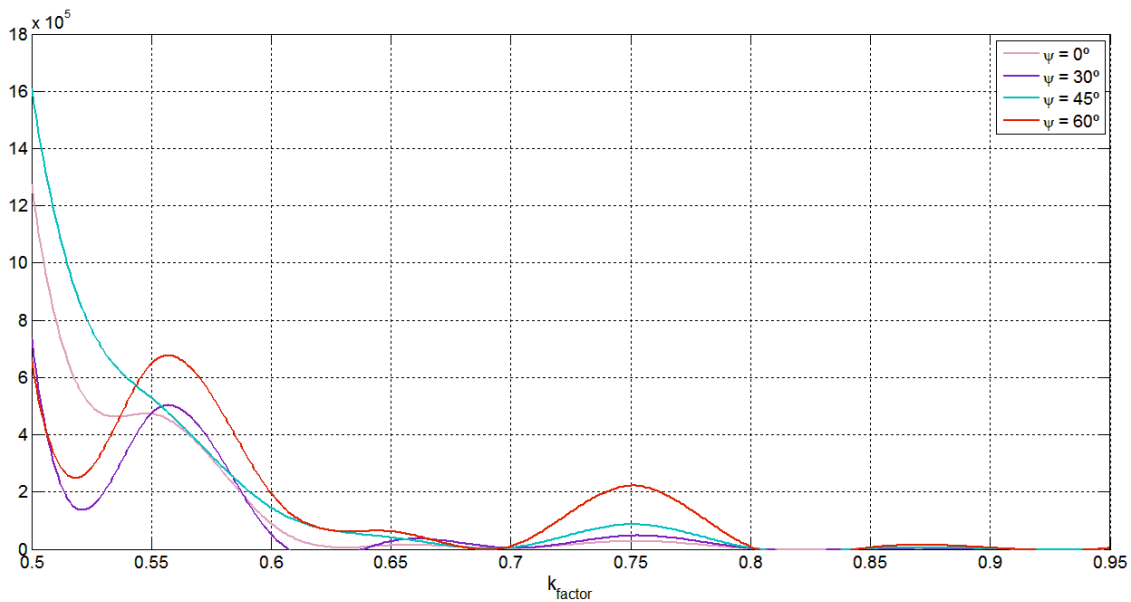


Figura 56. Detalle de la Figura 55.

La información que se desprende de estas gráficas es la siguiente. En primer lugar, vemos que, la tendencia general del número de condición de la matriz es a disminuir a medida que aumenta el factor k_{factor} , aunque para ciertos valores de este experimenta un cierto crecimiento, que luego vuelve a atenuarse. Asimismo, según la definición que se ha dado de este número, vemos que, en general, tenemos valores muy grandes, por lo que el condicionamiento de la matriz no será demasiado bueno y esto, lógicamente, se refleja en los resultados; por ello, es necesario ser muy cuidadosos a la hora de seleccionar cada uno de los distintos parámetros.

Observamos también un hecho curioso y es que, para $k_{factor} = 0.75$, que es donde se producían los resultados más exactos, el número de condición experimenta un crecimiento respecto a sus otros factores adyacentes. Esto, sin duda, es un problema que se refleja en todos los casos de estudio en los que, para conseguir resultados precisos (usando por tanto este factor) se obtiene mucho ruido en las funciones que es difícil de reducir con nuestro programa actual. No obstante, como ya hemos dicho y demostrado, este valor de k_{factor} es el que proporciona mejores resultados.

En vista de estos últimos resultados, podría ser lógico pensar que, al acercarnos a las esquinas de los paralelogramos y acercarnos así a la singularidad de la matriz, esta se hará más predominantemente diagonal y, por tanto, el número de condición mejora y con ello los resultados. Vemos que lo primero sí sucede, no ocurriendo lo mismo para lo segundo. La justificación de esto reside en que, a medida que nos acercamos a esta singularidad, por motivos de aproximación del programa por límite de decimales, los errores comienzan a propagarse a través de la matriz y, por ello, los resultados que se obtienen son cada vez más imprecisos. Es por esto que es necesario hallar una solución de compromiso entre no alejarnos demasiado de las esquinas ni estar lo suficientemente cerca como para cometer errores grandes por singularidades. De ahí proviene la justificación de los buenos resultados para $k_{factor} = 0.75$.

Por último, respecto a la *Figura 56*, es importante destacar que, la elección de una correcta posición del punto de colocación permite reducir en varios órdenes de magnitud incluso este número de condición de la matriz, es decir, vuelve nuestro problema más estable y, por tanto, más fiable en cuanto a resultados proporcionados por el mismo.

Para terminar, aunque aquí se ha ilustrado esta forma de variar los puntos de colocación, es posible probar otras muchas opciones; aunque los resultados a los que llegamos demuestran que la opción seleccionada sigue siendo la más óptima. Si bien, por ejemplo, para el caso no estacionario, existen valores del alargamiento para los cuales es más conveniente utilizar otros puntos de colocación para conseguir gráficas con menos ruido, los resultados a los que nos conducen suelen estar ligeramente desviados respecto a los reales, luego perderíamos esa precisión por ganar claridad en la gráfica. Además, en el caso no estacionario los resultados serán mucho más sensibles todavía a la situación de los puntos de colocación.

7.2 Problema no-estacionario

Para terminar con este breve estudio para la comprobación de la validez de nuestro método, hablaremos brevemente del caso no estacionario. Para ello, se puede demostrar que los estudios realizados respecto a las 3 variables ya definidas i_{ala} , $N_{Y,incog}$ y k_{factor} son totalmente análogos, obteniéndose los mismos resultados que hasta ahora, para el caso de la placa que arrancaba desde el reposo hasta adquirir una velocidad U_{∞} , ya que estas variables marcan, principalmente, las tendencias o comportamiento general de las gráficas una vez que ha pasado el régimen transitorio inicial del movimiento. No obstante, para el caso oscilatorio es necesario realizar un nuevo estudio de estas, ya que el comportamiento mejora o empeora para otros valores ligeramente distintos de las variables, luego será necesario ajustarlas de nuevo; aunque se puede ver que las variaciones con respecto al caso anterior son muy pequeñas. Sin embargo, este fenómeno es un indicador de las dificultades que presenta el método a la hora de estudiar los distintos casos no estacionarios. A pesar de esto, analizaremos aquí solamente otros parámetros que no aparecían en el caso anterior, ya que los resultados serían muy similares como hemos dicho y no tendría mayor interés el estudio de estas variables por no proporcionar datos generalizables a todos los casos no estacionarios (algo que sí sucedía para el caso estacionario).

Comenzaremos hablando de algo a lo que ya hemos hecho alusión anteriormente y que resulta de gran importancia para mejorar la precisión del método: el tamaño del último panel del ala según la dirección X (correspondiente al borde de salida de la misma), con respecto al tamaño según X de los paneles de la estela. Este fenómeno ya lo explicamos en capítulos anteriores, así que aquí nos limitaremos a mostrar que, efectivamente, para el caso estacionario, sí existe una relación entre este valor y los resultados proporcionados

por el programa. Si recordamos lo que sucedía con la estela para el caso no-estacionario (véase *Figura 10*) parece lógico pensar que, para obtener buenos resultados, al pasar el potencial del borde de salida a la estela en los instantes posteriores, estos paneles deben tener un tamaño similar para que las aproximaciones que estamos realizando den buenos resultados. Efectivamente, comprobaremos que esto es así, aunque gracias a la rápida convergencia del método para determinados valores de las variables, el efecto es casi despreciable.

Para esto, como sabemos que el valor de i_{ala} también influye, este se mantendrá constante, variando solamente otro parámetro que denominamos D_T y que define la longitud según X de los paneles de la estela.

Los resultados que obtenemos es que este efecto es casi despreciable y lo único que permite es afinar los resultados cuando ya son cercanos a los reales. Sin embargo, en comparación con otras variables, el efecto de variar este parámetro no se nota, por lo que no merece la pena afinarlo demasiado, ya que el principal efecto es un incremento en el número de iteraciones a realizar y, por tanto, un incremento importante en el tiempo de ejecución. De hecho, aún consiguiendo que los paneles del borde de salida del ala sean idénticos en tamaño a los de la estela, esto no permite solventar algunos problemas importantes en los resultados como el ruido. Por ello, se evita la inclusión de estas gráficas, por no presentar diferencias apreciables a simple vista.

Para el caso no-estacionario del apartado 6.3 (variación armónica del ángulo de ataque), en el que vimos que era difícil cuadrar los resultados con los reales, haremos, además, algunas consideraciones aparte que pueden resultar interesantes.

En primer lugar, vimos que las amplitudes del movimiento alcanzadas no eran las esperadas. Ahora bien, si simulamos el movimiento como si fuera estacionario, vemos que estas se cuadran perfectamente, con los factores k_{factor} apropiados (cosa que no podíamos seleccionar libremente en el caso no-estacionario, debido a los resultados tan dispares que se lograban, en lugar de una convergencia del método). Estos mismos valores de k_{factor} en el método estacionario sí proporcionan buenos resultados.

Obsérvese ahora la *Figura 57*. En ella, se ha seleccionado un valor de $k_{factor} = 0.5$, lo cual, a priori es algo razonable y proporciona valores bastante exactos y precisos para este mismo método en caso estacionario. No obstante, fijándonos en los resultados que da para el no-estacionario, vemos que, con una mala elección de este factor, se pueden conseguir resultados totalmente falsos, caóticos y sin ningún sentido físico. Asimismo, también se ve que este caso no-estacionario es mucho más sensible a este parámetro que el estacionario. Estas gráficas también nos sirven para comprobar otro comportamiento general observado anteriormente: cuanto menor es la amplitud del movimiento y la frecuencia, antes se desestabilizan nuestros resultados. Este mismo comportamiento se observaba al disminuir el AR del ala, siendo más difícil conseguir resultados sin ruido y fiables.

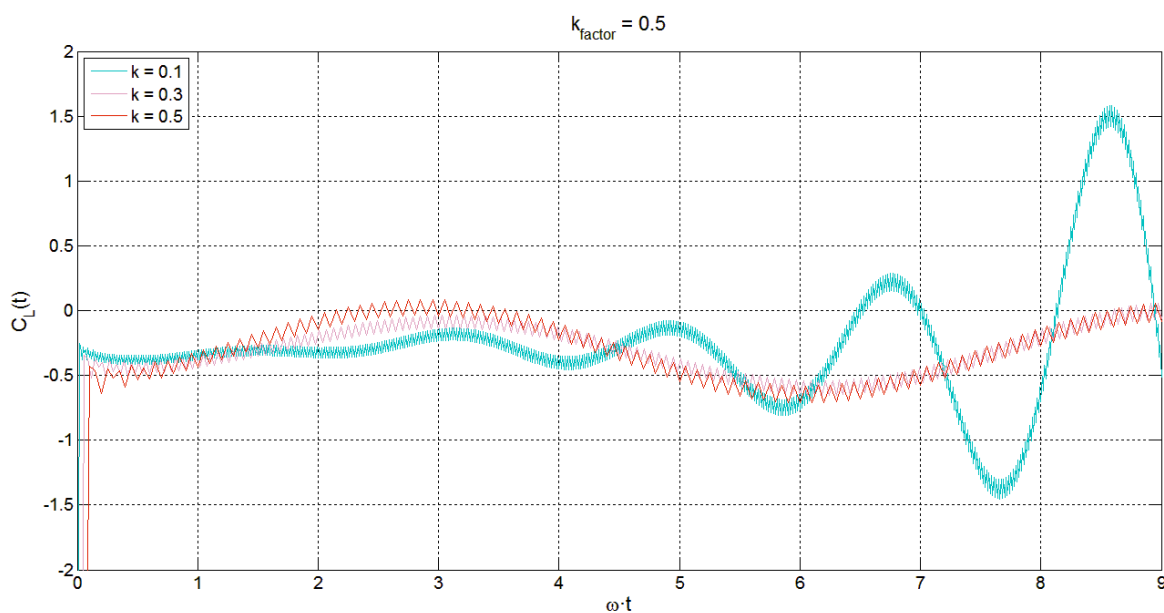


Figura 57. Ejemplo de divergencia de la solución.

Resumiendo, en el movimiento armónico simple, que era el que ofrecía peores resultados, el principal problema al que nos enfrentamos es el ajuste del parámetro k_{factor} , que vimos que era uno de los parámetros a los que las gráficas respondían de una forma más sensible. De la misma forma, vimos que el mejor ajuste se lograba haciendo $k_{factor} = 0.75$, algo que no es posible establecer en este problema dado el ruido excesivo que esta elección implica en las funciones (para este caso nos limitamos a poder elegir un valor de este parámetro comprendido entre 0.89 y 0.95 aproximadamente, si queremos conseguir gráficas sin excesivo ruido). Asimismo, el efecto del tamaño de los paneles del ala correspondientes al borde de salida vemos que solo afecta si la diferencia es excesivamente grande en comparación con los paneles de la estela.

Por último, es importante destacar que, analizando este mismo caso, pero suponiendo régimen estacionario, las amplitudes para el coeficiente de sustentación que se alcanzan sí son las predichas por la teoría. No obstante, no se cumplen los fenómenos esperados en frecuencia.

Por tanto, todos estos resultados nos llevan a pensar que, tal y como está planteado nuestro método actualmente, la principal fuente de error reside en las variaciones que introduce el planteamiento no-estacionario respecto al estacionario. Tras una revisión de las ecuaciones, del método y sus planteamientos geométricos... y en vista de que los resultados que proporciona para algunos casos son correctos, el principal problema parece residir en las aproximaciones realizadas hasta el momento, que, probablemente, sean demasiado burdas para la precisión que queremos conseguir. Por tanto, esta será una de las principales líneas de trabajo futuras.

Las derivadas temporales son uno de los principales problemas y su aproximación usando Euler de primer orden. En el caso de la placa que arranca desde el reposo hasta adquirir una velocidad determinada, aquí la derivada temporal es más importante solamente en los instantes iniciales, puesto que, una vez alcanzada la velocidad deseada, el movimiento se vuelve cuasi-estacionario pasado un tiempo determinado. Este efecto se nota en nuestras gráficas, en las que en los primeros instantes de tiempo los resultados son muy malos y, posteriormente, conforme nos vamos acercando a este régimen cuasi-estacionario, los resultados los aproximamos muy bien. No obstante, para otros casos en los que las derivadas temporales son importantes durante más tiempo, como puede ser el caso oscilatorio, estos efectos se notan durante todo el estudio, siendo siempre peores cuanto mayor importancia tenga esta derivada.

8 CONCLUSIONES

Para concluir finalmente este trabajo, se extraerán en este capítulo algunas de las conclusiones más significativas a las que se han llegado tras la realización del mismo. Una vez establecidas dichas conclusiones, se proporcionarán algunas posibles líneas de trabajo o investigación futuras para tratar de mejorar los resultados aquí obtenidos o como ampliación de los métodos expuestos.

Por tanto, dicho esto, comenzaremos con las conclusiones globales de este trabajo:

- La linealización de las ecuaciones bajo las hipótesis formuladas proporciona buenos resultados que se corresponden bastante fielmente con la realidad y permiten estudiar un amplio número de casos reales. Por tanto, se trata probablemente de una de las simplificaciones más interesantes realizadas puesto que, además de ofrecer buenos resultados para una amplia gama de problemas, vemos que la simplificación que introduce en las ecuaciones es enorme, permitiendo obtener sistemas con un grado de dificultad mucho menor y muy fácilmente abordables.
- El método de Green nos permite obtener de forma natural cuál es la solución al problema aerodinámico, sin necesidad de suponer conocidas las soluciones para luego comprobar a posteriori que estas eran correctas. Además, la fórmula final a la que conduce este método es la base para nuestro método de resolución numérica, luego su comprensión y deducción son de suma importancia como fundamento de muchos de los puntos bajo los que se postula este trabajo.
- En el método de aproximación numérica, un refinamiento del mallado cerca de los bordes de ataque, marginales y de salida, teniendo una malla más basta en el resto del ala, permite reducir enormemente el número divisiones que es necesario realizar para conseguir buenos resultados. Con esto también se reducen los tiempos de espera en la ejecución del programa, uso de memoria...
- Dada la forma en que está planteado el método de resolución numérico, este es muy inestable y sensible a pequeñas variaciones en muchas de las variables que intervienen. Aunque se logren matrices de condicionamiento con diagonal predominante, una mala elección de alguna otra variable puede conducir a resultados erróneos e incluso disparatados. La dificultad para fijar unos valores generales de todas las variables que den buenos resultados para cualquier caso de estudio, convierte al método en un método poco fiable y con bastantes puntos de mejora para el futuro.
- A pesar de la inestabilidad del método, una buena elección de los parámetros permite obtener resultados con una gran precisión. Por tanto, esto es indicativo de la validez del método, a pesar de los problemas que presenta por el contrario y que ya se han citado.
- Aunque los objetivos iniciales de este trabajo estaban probablemente más enfocados a la experimentación con el método planteado, dadas las dificultades derivadas del uso de este, algunos de estos objetivos se han visto truncados y no ha sido posible estudiar a fondo el problema de un ala fluctuante en búsqueda de las frecuencias que hagan disminuir la energía necesaria. Por el contrario, finalmente este trabajo ha tenido un enfoque más teórico y la búsqueda de la raíz de muchos de los problemas ha permitido conocer más exhaustivamente las ecuaciones que rigen el problema y los métodos para llegar a ellas. Por tanto, se ha entrado mucho más en profundidad en estas cuestiones, dejando un poco más de lado el carácter experimental del trabajo.

Expuestas todas estas conclusiones, se plantean a continuación posibles líneas de trabajo futuras para tratar de mejorar los métodos aquí propuestos o indagar más en algunos de los aspectos.

- En primer lugar, para mejorar la precisión del método, se propone la aproximación lineal de las velocidades dentro de cada triángulo de cada panel; que, si recordamos, se suponen constantes en este

trabajo. De este modo, será mucho más sencillo recoger variaciones en el potencial dentro de cada panel, no serán necesarias tantas divisiones, se aproximarán mejor los campos de perturbaciones... y, con esto, se mejorará la precisión del método.

- Dada la inestabilidad del método, aunque muchos de los defectos del mismo han sido identificados y subsanados, en esta línea queda mucho trabajo por realizar. Es posible mejorar este aspecto buscando nuevas combinaciones de las variables que proporcionen mejores resultados para el caso no estacionario concreto en que estemos interesados, buscando nuevas formas de definir estas variables, modificando otros parámetros, realizando mejores aproximaciones de las derivadas e integrales...
- Otro sistema para hacer el método más estable sería realizar el cálculo analítico de las integrales que aparecen, sin realizar aproximaciones numéricas. Esto nos permitiría situar los puntos de colocación justo en los extremos de cada panel, coincidiendo con los puntos de aplicación de los potenciales, algo que desde el punto de vista numérico es inabarcable por proporcionar singularidades. Esto nos permitiría obtener los resultados exactos y evitar así el principal problema de inestabilidad al que nos enfrentamos: la elección de los puntos de colocación.
- Para la mejora del régimen no estacionario (uno de los puntos más críticos), es posible utilizar métodos de aproximación más exactos para la derivada temporal de las variables. Hasta ahora se ha utilizado Euler de Primer Orden, luego un método más preciso proporcionaría mejores resultados en los problemas en los que el no-estacionario predomina.
- Queda pendiente para el futuro un estudio más exhaustivo de la sustentación del ala, una vez que se hayan comprobado los buenos resultados del método. Asimismo, esto nos permitirá examinar algunas cuestiones iniciales como frecuencias para batir, amplitudes, empuje que producen...
- Así, también queda pendiente el estudio de la resistencia del ala. De la misma forma, se propone el estudio para la determinación de los coeficientes que definen la resistencia en el ala a través de los resultados obtenidos, de forma que, multiplicados estos por una serie de funciones trigonométricas, nos proporcionen la resistencia que genera dicho ala [1].
- De igual modo, como uno de los objetivos iniciales de este trabajo no cumplido, se propone la búsqueda de aquellas frecuencias que optimicen el movimiento oscilatorio del ala, una vez mejorado este método o mediante el uso de otros métodos alternativos.
- Por último, es posible eliminar algunas de las hipótesis aquí establecidas en trabajos futuros. Por ejemplo, sería posible extender este estudio a régimen compresible, rehaciendo algunas de las ecuaciones que rigen el problema y analizando sus implicaciones.

REFERENCIAS

- [1] J. M. Gordillo Arias de Saavedra y G. Riboux Acher. Introducción a la Aerodinámica Potencial. Paraninfo, 2012.
- [2] J. Katz y A. Plotkin, Low-Speed Aerodynamics. McGraw-Hill, 1991.
- [3] M. Pérez-Saborid, Apuntes Mecánica de Fluidos II (ETSI). Sevilla, 2015.

Anexo A.

Código MATLAB para método numérico

```
%%%%%%%%%%%%% MÉTODO NUMÉRICO %%%%%%%%%%%%%%

clc; clear all; close all;

flecha = 0;

b = 4;
UNSTEADY = 1;
iala = 31;
Nyincog = 21;

%% GEOMETRÍA

%% Número de paneles

if UNSTEADY==0
    iestela = 50;
    finT = 0;
    Dt = 20*b/iestela;
else
    finT = 80;
    Dt = 1/16;
    iestela = fix(10*b/Dt);
end

contT = 0;
N05 = (Nyincog+2)/2+1;

alpha0 = 5*pi/180;
dthetax = pi/(iala-1);
dthetay = pi/(Nyincog+1);

Nxec = iala-2;
Nyec = Nyincog;

%% Geometría del ala y puntos en los que se aplica la condición de
impenetrabilidad

for i=1:iala
    for j=1:(Nyincog+2)
        mx(i,j) = 0.5*(1-cos((i-1)*dthetax));
        my(i,j) = -0.5*b*cos((j-1)*dthetay);
    end
end
```

```

for i=1:iestela
    for j=1:(Nyincog+2)
        mx(iala+i,j) = mx(iala,j)+i*Dt;
        my(iala+i,j) = -0.5*b*cos((j-
1)*dthetay)+abs(my(i,j))*tan(flecha*pi/180);
    end
end

Dxbs = mx(iala,1)-mx(iala-1,1);

for i = 1:Nxec
    for j = 2:(Nyec+1)
        if j==fix(Nyincog/2+2)
            mx0(i,j-1) = 0.75*mx(i+1,j) + 0.25*mx(i+2,j);
            my0(i,j-1) = my(i,fix(Nyincog/2)+2);
        else
            if j<fix(Nyincog/2+2)
                my0(i,j-1) = 0.75*my(i,j) + 0.25*my(i,j+1);
                mx0(i,j-1) = 0.75*(0.75*mx(i+1,j)+0.25*mx(i+1,j+1)) +
0.25*(0.75*mx(i+2,j)+0.25*mx(i+2,j+1));
            else
                mx0(i,j-1) = 0.75*(0.75*mx(i+1,j)+0.25*mx(i+1,j-1)) +
0.25*(0.75*mx(i+2,j)+0.25*mx(i+2,j-1));
                my0(i,j-1) = 0.75*my(i,j) + 0.25*my(i,j-1);
            end
        end
    end
end

% for i=1:(iala+iestela)
%     figure(1)
%     plot(mx(i,:),my(i,:))
%     hold on
% end
%
% for j=1:(Nyincog+2)
%     figure(1)
%     plot(mx(:,j),my(:,j))
%     hold on
% end
%
% for i = 1:Nxec
%     for j = 2:(Nyec+1)
%         plot(mx0(i,j-1),my0(i,j-1),'o');
%         hold on
%     end
% end
%
% pause

%% Inicialización de matriz y valores del potencial en la estela

Mat(1:(iala-1)*Nyincog,1:(iala+iestela)*Nyincog) = 0;
sol(1:(iala-1)*Nyincog) = 0;

Phiestela(1:iestela,1:Nyincog) = 0;

phibs(1:(Nyincog+2)) = 0;

```

```

phibstm1(1:(Nyincog+2)) = 0;
phibsm1(1:(Nyincog+2)) = 0;
phibsm1tm1(1:(Nyincog+2)) = 0;
intphiunsteadym1(1:(Nyincog+2)) = 0;
intphiunsteady(1:(Nyincog+2)) = 0;
intphitotal(1:(Nyincog+2)) = 0;
intphitotalm1(1:(Nyincog+2)) = 0;
ubsalidatm1(1:(Nyincog+2)) = 0;

%% Montaje de las Nxec*Nyec ecuaciones en las que se impone el w

for k=1:(Nxec)%%ATENCIÓN CAMBIO cuando funciona es Nxec+1
%   k
    for l=1:Nyec
%       l

        for j=1:(Nyincog+1)

i1=1:(iala+iestela-1);
j1=j;
i0=k;
j0=1;

vx0=mx0(i0,j0);    %%Posición del punto de colocación a considerar
vy0=my0(i0,j0);

L1=sqrt((mx(i1,j1)-vx0).^2+(my(i1,j1)-vy0).^2);
L2=sqrt((mx(i1,j1+1)-vx0).^2+(my(i1,j1+1)-vy0).^2);
L3=sqrt((mx(i1+1,j1)-vx0).^2+(my(i1+1,j1)-vy0).^2);
L4=sqrt((mx(i1+1,j1+1)-vx0).^2+(my(i1+1,j1+1)-vy0).^2);

vx(:,1)=mx(i1,j1+1)-mx(i1,j1);
vy(:,1)=my(i1,j1+1)-my(i1,j1);
vx(:,2)=mx(i1+1,j1+1)-mx(i1,j1+1);
vy(:,2)=my(i1+1,j1+1)-my(i1,j1+1);
vx(:,3)=mx(i1+1,j1)-mx(i1+1,j1+1);
vy(:,3)=my(i1+1,j1)-my(i1+1,j1+1);
vx(:,4)=mx(i1,j1)-mx(i1+1,j1);
vy(:,4)=my(i1,j1)-my(i1+1,j1);

if j1<N05

    vx(:,5)=mx(i1+1,j1)-mx(i1,j1+1);
    vy(:,5)=my(i1+1,j1)-my(i1,j1+1);
    vx(:,6)=-vx(:,5);
    vy(:,6)=-vy(:,5);

else

    vx(:,5)=mx(i1+1,j1+1)-mx(i1,j1);
    vy(:,5)=my(i1+1,j1+1)-my(i1,j1);
    vx(:,6)=-vx(:,5);
    vy(:,6)=-vy(:,5);

end

l2(:,1:6)=sqrt(vx(:,1:6).^2+vy(:,1:6).^2);
for contador=1:length(i1)
l3(contador,1)=max(L2(contador),L1(contador));
l1(contador,1)=min(L2(contador),L1(contador));

```

```

l3(contador,2)=max(L4(contador),L2(contador));
l1(contador,2)=min(L4(contador),L2(contador));

l3(contador,3)=max(L4(contador),L3(contador));
l1(contador,3)=min(L4(contador),L3(contador));

l3(contador,4)=max(L3(contador),L1(contador));
l1(contador,4)=min(L3(contador),L1(contador));
end
if j1<N05
    for contador=1:length(i1)
        l3(contador,5)=max(L2(contador),L3(contador));
        l1(contador,5)=min(L2(contador),L3(contador));
        end
    else
        for contador=1:length(i1)
            l3(contador,5)=max(L4(contador),L1(contador));
            l1(contador,5)=min(L4(contador),L1(contador));
        end
    end

l3(:,6)=l3(:,5);
l1(:,6)=l1(:,5);

for i=1:5

    Rbas(:,i)=(l2(:,i).^2+l1(:,i).^2-l3(:,i).^2)/(2*l1(:,i).*l2(:,i));
    Sbas(:,i)=(l2(:,i)-l1(:,i).*Rbas(:,i))./l3(:,i);

    for j=1:length(i1)

        if (abs(Sbas(j,i))>(1-1e-14)) || (abs(Rbas(j,i))>(1-1e-14))
            faclog(j,i)=0;

        else

            faclog(j,i)=0.5*(log((1+Sbas(j,i))/(1-Sbas(j,i)))+log((1+Rbas(j,i))/(1-
Rbas(j,i))));

        end
    end
end

faclog(:,6)=faclog(:,5);

nx(:,1:6)=-vy(:,1:6).*faclog(:,1:6)./l2(:,1:6);
ny(:,1:6)=vx(:,1:6).*faclog(:,1:6)./l2(:,1:6);
phit(:,1:4)=zeros(length(i1),4);

if j1<N05

    %%Triángulo 1

    ut1(:,1)=-1./l2(:,4);
    ut1(:,2)=0;
    ut1(:,3)=-ut1(:,1);
    ut1(:,4)=0;

```

```

vt1(:,1)=(1./vy(:,1)).*(vx(:,1)./l2(:,4)-1);
vt1(:,2)=1./vy(:,1);
vt1(:,3)=-vx(:,1)./(vy(:,1).*l2(:,4));
vt1(:,4)=0;

%%%Triángulo 2

ut2(:,1)=zeros(length(i1),1);
ut2(:,2)=-1./l2(:,2);
ut2(:,3)=0;
ut2(:,4)=-ut2(:,2);

vt2(:,1)=zeros(length(i1),1);
vt2(:,2)=vx(:,3)./(vy(:,3).*l2(:,2));
vt2(:,3)=1./vy(:,3);
vt2(:,4)=-((1./vy(:,3)).*(1+vx(:,3)./l2(:,2)));

for i=1:4

phit(:,i)=(ut1(:,i).*nx(:,1)+vt1(:,i).*ny(:,1))+(ut1(:,i).*nx(:,5)+vt1(:,i).*
ny(:,5))+(ut1(:,i).*nx(:,4)+vt1(:,i).*ny(:,4))+(ut2(:,i).*nx(:,2)+vt2(:,i).*n
y(:,2))+(ut2(:,i).*nx(:,3)+vt2(:,i).*ny(:,3))+(ut2(:,i).*nx(:,6)+vt2(:,i).*ny
(:,6));
    end
else

%%%Triángulo 1

ut1(:,1)=-1./l2(:,4);
ut1(:,2)=0;
ut1(:,3)=-ut1(:,1);
ut1(:,4)=0.;

vt1(:,1)=(vx(:,3)./vy(:,3))./l2(:,4);
vt1(:,2)=0;
vt1(:,3)=(1./vy(:,3)).*(1-vx(:,3)./l2(:,4));
vt1(:,4)=-((1./vy(:,3)));

%%%Triángulo 2

ut2(:,1)=zeros(length(i1),1);
ut2(:,2)=-1./l2(:,2);
ut2(:,3)=0;
ut2(:,4)=-ut2(:,2);

vt2(:,1)=-1./vy(:,1);
vt2(:,2)=(1./vy(:,1)).*(1+vx(:,1)./l2(:,2));
vt2(:,3)=0;
vt2(:,4)=-((1./vy(:,1)).*(vx(:,1)./l2(:,2)));

for i=1:4

phit(:,i)=(ut1(:,i).*nx(:,5)+vt1(:,i).*ny(:,5))+(ut1(:,i).*nx(:,3)+vt1(:,i).*
ny(:,3))+(ut1(:,i).*nx(:,4)+vt1(:,i).*ny(:,4))+(ut2(:,i).*nx(:,1)+vt2(:,i).*n
y(:,1))+(ut2(:,i).*nx(:,2)+vt2(:,i).*ny(:,2))+(ut2(:,i).*nx(:,6)+vt2(:,i).*ny
(:,6));
    end

end

```

```

%%%Definimos la fila en la que se insertan los valores de phit

nfila=(i0-1)*Nyec+j0;

%%%Definimos las columnas en las que se insertan los valores del vector
phit

ncol(:,1)=(i1-2).*Nyincog+j1-1;
ncol(:,2)=ncol(:,1)+1;
ncol(:,3)=(i1-1).*Nyincog+j1-1;
ncol(:,4)=ncol(:,3)+1;

if j1==1

    ncol(:,3)=-10*ones(length(i1),1);
    ncol(:,1)=ncol(:,3);

end

if j1==(Nyincog+1)

    ncol(:,4)=-10*ones(length(i1),1);
    ncol(:,2)=ncol(:,4);

end

for i=1:4

    for contador=1:length(i1)

        if ncol(contador,i)>0

            Mat(nfila,ncol(contador,i))=Mat(nfila,ncol(contador,i))-
1/(2*pi)*phit(contador,i);

            end

        end

    end

end

end

end

if UNSTEADY==0
    for j=2:(Nyincog+1)
        %% ((i1a-2)*Nyincog+1):(i1a-1)*Nyincog,((i1a-2)*Nyincog+1):(i1a-
1)*Nyincog)
        Mat(Nyec*Nxec+j-1,(i1a-2)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1,(i1a-
2)*Nyincog+j-1)+1;
        Mat(Nyec*Nxec+j-1,(i1a-3)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1,(i1a-
3)*Nyincog+j-1)-1;
    end
end

```



```

    end

else

    for j=2:(Nyincog+1)
        Mat(Nyec*Nxec+j-1, (iala-2)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1, (iala-
2)*Nyincog+j-1)+1+0.5*Dt/Dxbs;
        Mat(Nyec*Nxec+j-1, (iala-3)*Nyincog+j-1)=Mat(Nyec*Nxec+j-1, (iala-
3)*Nyincog+j-1)-0.5*Dt/Dxbs;

    end

end

if UNSTEADY==0

    for j=2:(Nyincog+1)

        for k=1:iestela

            Mat(1:(Nxec*Nyec), (iala-2)*Nyincog+j-1)=Mat(1:(Nxec*Nyec), (iala-
2)*Nyincog+j-1)+Mat(1:(Nxec*Nyec), (iala+k-2)*Nyincog+j-1);

        end

    end

end

Ntot = (iala-1)*Nyincog;

%% Comienza a contar el tiempo

while contT<=finT

    contT = contT+1;
    vecT(contT) = Dt*contT;

%% Vector w

for i=1:(Ntot)
    w(i) = 0;
end

if UNSTEADY==0
    alpha = alpha0;
else
    alpha = alpha0;
    % kfrec = 0.5;
    % alpha = -(alpha0+0.1*2*kfrec*cos(Dt*contT*2*kfrec));
    for j=1:Nyincog
        w(Nyec*Nxec+j) = phibstm1(j)*(1-
0.5*Dt/Dxbs)+0.5*Dt*phibsm1tm1(j)/Dxbs;
    end
end

w(1:Nxec*Nyec) = -alpha;

```

```

if UNSTEADY==1
for i=1:Nxec*Nyec
    for k=1:iestela
        for j=1:Nyincog
            w(i) = w(i)-Mat(i, (iala+k-2)*Nyincog+j)*Phiestela(k,j);
        end
    end
end
end

%% Resolución del sistema

sol = Mat\w';

for j=1:Nyincog
    phibstml(j)=phibs(j);
    phibsm1tml(j)=phibsm1(j);
    phibs(j)=sol((iala-2)*Nyincog+j);
    phibsm1(j)=sol((iala-3)*Nyincog+j);
    intphitotalml(j)=intphitotal(j);
    intphiunsteadym1(j)=intphiunsteady(j);
    ubvalidatml(j)=(Phiestela(1,j)-phibs(j))/Dt;
end

Puntero=Phiestela(iestela);

for i=iestela:-1:2
    Phiestela(i)=Phiestela(i-1);
end
Phiestela(1)=Puntero;

for j=1:Nyincog
    Phiesetela(1,j) = phibs(j);
end

%% Término integral no estacionario en t+dt que contribuye a la sustentación

for j=1:Nyincog
%   kphi=sol(j)/(2*sqrt(mx(2,j+1)-mx(1,j+1)));
%   fsucba(j)=pi*kphi*kphi;
%
    if UNSTEADY==1
        intphiunsteady(j)=0;
        for i=1:(iala-1)
            nfila0=(i-2)*Nyincog+j;
            nfila1=(i-1)*Nyincog+j;
            if i==1
                intphiunsteady(j)=intphiunsteady(j)+0.5*sol(nfila1)*(mx(i+1,j+1)-
mx(i,j+1));
            else
                intphiunsteady(j)=intphiunsteady(j)+0.5*(sol(nfila0)+sol(nfila1))*(mx(i+1,j+1)
)-mx(i,j+1));
            end
        end
        intphitotal(j)=2*((intphiunsteady(j)-
intphiunsteadym1(j))/Dt+phibs(j));
    else
        intphitotal(j) = 2*phibs(j);
    end
end

```

```

    end

end

% Cl2d(contT) = 2*intphitotal(Nyincog/2+1);

CL=0;
% CD=0;

phibs(Nyincog+1) = 0;
intphitotal(Nyincog+1) = 0;
% fsucba(Nyincog+1) = 0;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

for j=2:(Nyincog+1)
    alpha=alpha0;
    CL = CL+2*0.5*(intphitotal(j-1)+intphitotal(j))*(my(1,j+1)-my(1,j))/b;
    % CD = CD+2*((0.5*(intphitotal(j-1)+intphitotal(j))*sin(alpha) -
    0.5*(fsucba(j-1)+fsucba(j))*cos(alpha))*(my(1,j+1)-my(1,j)))/b;
end

CL = CL+2*(0.5*intphitotal(1))*(my(1,2)-my(1,1))/b;
CLT(contT) = CL;
% CDT(contT) = CD
contT

end

```

