LA CIENCIA DE LOS FILÓSOFOS, 1996, págs. 267-288.

LA CONCEPCIÓN DE LA MATEMÁTICA EN EL *TRACTATUS LOGICO-PHILOSOPHICUS* DE LUDWIG WITTGENSTEIN[1]

Angel d'Ors. Universidad Complutense;
María Cerezo. Universidad de Navarra

Resumen: En este trabajo se presta atención a los parágrafos 6.02-6.031 y 6.2-6.241 del *Tractatus*, con objeto de determinar el preciso sentido de la consideración wittgensteiniana de los números como exponentes de operaciones, y de la matemática como método lógico.

Abstract: This paper examines paragraphs 6.02-6.031 and 6.2-6.241 of the *Tractatus*, in order to determine the exact meaning of Wittgenstein's conception of number as the exponent of an operation, and of mathematics as a method of logic.

En el *Tractatus*, Wittgenstein dedicó dos series de parágrafos al esclarecimiento del estatuto de la Matemática: 6.02-6.031 y 6.2-6.241. En los parágrafos 6.02-6.031, en el marco del análisis de las formas generales de las funciones veritativas y de las operaciones, Wittgenstein prestó atención al número, que caracterizó como *exponente de una operación* (6.021). En los parágrafos 6.2-6.241, en el marco del análisis de la naturaleza de las proposiciones de la lógica y de la lógica misma, prestó atención a la naturaleza de las proposiciones de la matemática y de la matemática misma, que caracterizó, respectivamente, como *proposiciones que no expresan pensamiento alguno* (6.21), y como *método lógico* (6.2 y 6.234).

Las tesis que Wittgenstein defendió en estos parágrafos respecto al número, las proposiciones de la matemática y la matemática misma, sólo pueden ser entendidas en el marco de su diálogo polémico con Frege y Russell; entrañan, al mismo tiempo, una aceptación y una radical rectificación de las tesis logicistas de éstos. En el *Tractatus*, Wittgenstein admitió las tesis logicistas, que defendían la afinidad de lógica y matemática, y la consideración de la matemática como una parte específica de la lógica; pero rechazó la concepción que de la lógica tenían Frege y Russell, y también, por ello mismo, su concepción de la matemática.

---

[1] Las ideas que expondremos en estas páginas, en gran medida, son deudoras de los trabajos de H. Hochberg («Arithmetic and Propositional Form in Wittgenstein's *Tractatus*», en E. D. Klemke, *Essays on Wittgenstein*, University of Illinois Press, Urbana-Chicago-London, 1971, pp. 534-544), y de P. Frascolla (*Wittgenstein's philosophy of mathematics*, Routledge, London, 1994, en especial, pp. 1-41). De modo muy particular, debemos al trabajo de Frascolla cuanto se refiere a la interpretación de la notación wittgensteiniana de las operaciones; y al trabajo de Hochberg, cuanto se refiere al peculiar carácter lógico de las proposiciones de la matemática, y a las dificultades que entraña la reducción del análisis de las operaciones veritativas a la teoría general de operaciones. El reconocimiento general de esta deuda nos exime de la obligación de recordar paso a paso las deudas contraídas.

Frente al *logicismo ontológico* de Frege y Russell, Wittgenstein defendió lo que podría llamarse un *logicismo notacional*.

La crítica de Wittgenstein a las doctrinas matemáticas de Frege y Russell fue una crítica indirecta. La rectificación wittgensteiniana de las doctrinas logicistas no fue el resultado de su reflexión sobre la matemática, sino de su reflexión, más general, sobre la naturaleza de los simbolismos que Frege y Russell construyeron para la expresión de la lógica y la matemática. Por ello, antes de proceder al examen de las doctrinas wittgensteinianas relativas al número, las proposiciones de la matemática y la matemática misma, será oportuno atender a sus doctrinas relativas a la naturaleza de aquellos simbolismos, así como a las peculiares características de los simbolismos por él diseñados.

1. *Teoría general de operaciones*

En orden a dar cuenta de las proposiciones de la lógica y de la matemática, de las funciones de verdad y de los números, de la lógica y de la matemática mismas, Wittgenstein, como Frege, diseñó una nueva *notación*. Pero, a diferencia de aquél, no concibió esta nueva notación como un nuevo *lenguaje*, de la misma naturaleza que los lenguajes en sentido propio y capaz de suplir a éstos con ventaja en el ámbito de las ciencias, sino como un mero instrumento para el *análisis lógico* de esos lenguajes. Esta notación, según Wittgenstein, no es propiamente un lenguaje, porque no sirve para la *expresión* de *proposiciones*, sino sólo para *mostrar* cómo las proposiciones se expresan en los lenguajes propiamente dichos. Por esta razón, la notación que Wittgenstein diseñó, no pretende reemplazar a estos lenguajes, sino a los «lenguajes» de la lógica y de la matemática, con el propósito de así mostrar que tampoco éstos son lenguajes en sentido propio (no expresan proposiciones), sino que, asimismo, son sólo un instrumento para el análisis lógico de las expresiones de las proposiciones en los lenguajes en sentido propio.[2]

La notación diseñada por Wittgenstein está subordinada a su *teoría general de operaciones*, mediante la que éste pretende explicar el modo en que las proposiciones se expresan en los lenguajes propiamente dichos. Wittgenstein presupone la existencia, de hecho, de lenguajes, en los que cualquier proposición puede ser expresada. Pero sostiene que, en esos lenguajes, las proposiciones no se expresan a través de la expresión de sus *estructuras* (es decir, en atención a sus *constituyentes*, los *nombres*, en que toda proposición se resuelve, y las relaciones entre éstos), que son inefables, sino a través de las *relaciones internas* en que están las proposiciones. Lo que mediante la expresión de una proposición se expresa, no es su estructura, en virtud de la cual la proposición se constituye como *figura* de un determinado *estado de cosas*, sino su relación a otra u otras proposiciones, en

[2] "No llueve" expresa una proposición, pero "$\neg p$", no. La relación entre "no llueve" y "$\neg p$" no es una relación de traducción; "$\neg p$" es sólo un instrumento para el análisis de la expresión "no llueve" (y semejantes), que permite mostrar que la proposición así expresada ha quedado determinada por su relación interna a la proposición expresada por la expresión "llueve". Esta distinción entre lenguaje y notación, cumple, en el *Tractatus*, el papel asignado a la distinción entre lenguaje y metalenguaje, que Frascolla (p. 6) echa en falta en los análisis wittgensteinianos.

virtud de la cual la proposición así expresada queda determinada según su relación a éstas.

Esta relación interna a otra u otras proposiciones, que se muestra en toda expresión de una proposición, puede ser expresada como una *operación*, en virtud de la cual se obtiene (queda determinada) una nueva proposición (a la que Wittgenstein denomina *resultado*) a partir de otra u otras proposiciones dadas (a las que Wittgenstein denomina *bases*). En su expresión en un lenguaje, por tanto, toda proposición se muestra como el resultado de la *aplicación de una operación* a unas determinadas bases (5.21-5.23). El propósito de la notación diseñada por Wittgenstein es, precisamente, mostrar que es ésa la *forma general* de la expresión de una proposición; que, en su expresión, toda proposición se muestra como el resultado de la aplicación de una operación a unas determinadas bases.

La noción misma de operación, como expresión de las relaciones internas entre las proposiciones, entraña la multiplicidad de las operaciones, así como también la multiplicidad de las expresiones de una misma proposición, según sea una u otra la proposición que se expresa, y según sean unas u otras las bases en relación a las cuales esa proposición se expresa. El supuesto fundamental de esa *teoría general de operaciones*, desarrollada por Wittgenstein en los parágrafos 5.2-5.476, es el supuesto de que cabe reconocer, en las expresiones de distintas proposiciones, una *misma* operación; es decir, que distintas proposiciones pueden estar en las mismas relaciones internas a sus respectivas bases (5.242). De este supuesto se deriva la posibilidad de considerar las operaciones con una cierta autonomía respecto de las proposiciones en cuya expresión intervienen, que hace también posible el examen de sus propiedades en cuanto operaciones. Tal consideración se alcanza, según Wittgenstein, cuando se omite la consideración de las particulares bases, es decir, cuando éstas se consideran *variables* (5.24).

Según Wittgenstein, no todas las operaciones tienen las mismas propiedades, ni interesan de la misma manera a la lógica. Hay, por una parte, operaciones que cabe reconocer en todo lenguaje; por otra parte, operaciones características de uno u otro lenguaje.[3] En razón de la generalidad que conviene al análisis lógico, sólo las primeras interesan, en su particularidad, al análisis lógico, y sólo éstas reclaman la introducción de un signo específico en la notación lógica, que permita mostrar la operación de la que en cada caso se trata; éstas son las que Wittgenstein denomina «*operaciones veritativas*» (las «funciones de verdad» de Frege). En los demás casos, en razón de su particularidad, lo único que interesa a la lógica es mostrar su carácter de operación, y las propiedades que en cuanto tal le convienen. Esta es la razón por la que Wittgenstein introduce en su notación la variable de operaciones "Ω".

En razón de su misma generalidad, las operaciones veritativas tienen dos importantes propiedades. Por una parte, se pueden aplicar a cualesquiera bases, es

[3] La negación, por ejemplo, es una operación que cabe reconocer en todo lenguaje; sea cual sea la proposición "p", podrá determinarse a partir de ella una proposición "$\neg$p". Por el contrario, la operación que a partir de la proposición "Juan es padre de Pedro" ("Juan engendró a Pedro"), determina la proposición "Juan es abuelo paterno de Pedro" ("Juan engendró al hombre que engendró a Pedro"), sólo es reconocible en ese particular lenguaje que habla de un particular mundo en el que tiene sentido decir que unos seres son engendrados por otros.

decir, determinan una proposición cualesquiera que sean las bases que se consideren; por otra, y como consecuencia de esa primera propiedad, se pueden componer entre sí y consigo mismas (iterarse), es decir, se pueden aplicar a bases que, a su vez, se determinan como resultado de la aplicación de operaciones veritativas a sus respectivas bases (5.2521, 5.2523). Si bien la primera propiedad es exclusiva de las operaciones veritativas, Wittgenstein reconoce la existencia de operaciones particulares de uno u otro lenguaje que tienen también esta segunda propiedad de composición e iteración.[4]

La teoría general de operaciones desarrollada por Wittgenstein, y a la que sirve la notación por él diseñada, pretende cumplir esa doble tarea: por una parte, pretende atender al examen particular de las operaciones veritativas, reconocibles en todo lenguaje, y de las particulares propiedades relativas a su composición e iteración; por otra parte, pretende atender al examen de las propiedades generales de la composición e iteración de operaciones cualesquiera. Ésta es la razón por la que la notación diseñada por Wittgenstein se presenta en la forma de una doble notación: una, que incluye signos de operaciones determinadas, mediante la que atiende al examen particular de las operaciones veritativas, cuyo desarrollo da cuenta del «lenguaje» de la lógica; otra, que sólo incluye variables de operación, mediante la que atiende al examen de las propiedades generales de la composición e iteración de operaciones cualesquiera, mediante la que Wittgenstein da cuenta del «lenguaje» de la matemática.

Wittgenstein diseña esta segunda notación, mediante la que va a dar cuenta del «lenguaje» de la matemática, a través de sucesivas ampliaciones de una notación básica, construida sobre cuatro nociones: *operación*, *base*, *aplicación de una operación*, e *iteración de una operación*. La operación se muestra en la variable "Ω"; la base, en la variable "x"[5]; la aplicación de la operación a la base, en la expresión "Ω'x", en la que "'"[6] muestra la aplicación. Esta expresión compleja "Ω'x" muestra,

---

[4] Frascolla (p. 8) considera que la iteración es una propiedad que conviene a cualquier operación. Wittgenstein (5.251) sostiene que una operación «puede» tomar como base su propio resultado, pero, a partir de esta afirmación, no parece necesario concluir que «toda» operación puede tomar como base su propio resultado. Esta cuestión, aunque de gran importancia en orden a determinar el alcance de la noción wittgensteiniana de operación, no interesa ahora a nuestros propósitos, pues las operaciones que hemos de examinar son, precisamente, las que tienen esta propiedad de iteración.

[5] Frascolla (p. 8) considera que el uso en este contexto de la variable "x", entraña una desviación respecto del uso que comúnmente hace Wittgenstein de este tipo de variable (como variable de objetos), y considera que la variable "x" se usa aquí para mostrar la forma de una expresión que no ha sido generada por la aplicación de una operación a una base. El uso que Wittgenstein hace de la variable "x" en otros parágrafos, también relacionados con la teoría de operaciones (por ejemplo, en 5.2522, donde "x" es usada para mostrar, no el primer término, sino un término cualquiera de una serie de formas), muestra que la variable "x" no entraña esa consideración. La variable "x" parece mostrar una expresión, en cuanto reconocible en las expresiones de cualquiera de las proposiciones de una serie formal; la variable "x" es una variable de expresiones, entendidas como «rasgos comunes» a una clase de proposiciones, y, por lo tanto, en cuanto definidoras de clases de proposiciones; "p", la variable proposicional, podría ser entendida como un caso extremo de la variable "x", en cuanto «rasgo común» a una única proposición, y, por tanto, en cuanto constituye ella misma una expresión proposicional.

[6] Contra lo que señala Frascolla (p. 8), el uso de "'" no queda restringido a la variable de operación "Ω", sino que Wittgenstein también lo aplica en ocasiones a signos de operaciones determinadas (6.001).

al mismo tiempo, la forma general de la expresión de cualquier proposición y la forma general de cualquier operación; sirve, por ello, al mismo tiempo, para el análisis lógico de la expresión de cualquier proposición y para el análisis de las propiedades de las operaciones que mediante ella se muestran. "Ω'x" tiene también, por ello, y en un doble sentido, valor de variable: de proposiciones y de operaciones.[7]

La noción de iteración de una operación, permite a Wittgenstein la generación de una serie de expresiones, del tipo:

x, Ω'x, Ω'Ω'x, Ω'Ω'Ω'x, Ω'Ω'Ω'Ω'x, etc.

que constituyen su notación básica. Esta serie de expresiones, en las que se entiende que la operación más a la izquierda se aplica a la entera expresión a su derecha, muestra la forma de una serie de proposiciones. Tal serie de proposiciones constituye lo que Wittgenstein denomina una *serie formal*, es decir, una serie de proposiciones ordenadas por una operación, de manera tal que cada una de las proposiciones de la serie puede ser entendida como el resultado de la aplicación de la misma operación a la proposición precedente (5.232). De esta manera, la notación permite mostrar, inmediatamente, tanto la forma de la expresión de cada una de las proposiciones de la serie, como las relaciones internas entre cualquiera de las proposiciones de la serie y la que inmediatamente le precede.

En cuanto que "Ω" no es el signo de una operación determinada, sino una variable de operaciones, la serie de expresiones de esta notación básica muestra la forma, no de una serie formal particular, sino de cualquier serie formal de proposiciones definida por la iteración de una operación. Cada una de las expresiones de esta serie, por tanto, muestra la forma común de las expresiones de una clase de proposiciones, pertenecientes a distintas series formales, determinadas de la misma manera, aunque por la aplicación de distinta operación. Proposiciones pertenecientes a distintas series formales, por tanto, comparten una *propiedad formal*: haber sido determinadas de la misma manera, aunque por la aplicación de distinta operación; tal propiedad formal es lo que esas expresiones muestran.

Las expresiones de esta notación básica muestran asimismo que todas las proposiciones de una serie formal comparten una propiedad formal, por la que, precisamente, pertenecen a esa serie formal: haber sido determinadas todas ellas por la aplicación de una misma operación a la proposición precedente. Tal propiedad no se muestra en ninguna de las expresiones de la serie, sino en la variable [x, ξ, Ω'ξ], en la que "x" muestra el primer término de la serie formal, "ξ" un término cualquiera de la serie, y "Ω'ξ" la forma general de cualquier término de la

[7] Frascolla (p. 8) considera que la expresión "Ω'x" es una variable, no sólo de expresiones proposicionales, sino de expresiones cualesquiera, y, por tanto, que la teoría wittgensteiniana de las operaciones es también aplicable a expresiones nominales. La teoría general de operaciones daría cuenta también de expresiones del tipo "Pedro", "el padre de Pedro", "el padre del padre de Pedro", etc. Aunque en los escritos pretactarianos, en efecto, las operaciones no quedan restringidas al ámbito de las expresiones proposicionales (22-XI-16), y la noción de «serie de formas», presente en el *Tractatus* (5.2522), parece apoyar esa interpretación, sin embargo, en el *Tractatus* no se encuentran ejemplos de ese otro tipo de operaciones, y la definición de operación que nos ofrece Wittgenstein parece restringir las operaciones al ámbito de las expresiones proposicionales (5.23, 5.24). El análisis de las expresiones "el padre de Pedro", "el padre del padre de Pedro", etc., parece que ha de subordinarse al análisis de las expresiones proposicionales "Juan es padre de Pedro", "Juan es abuelo paterno de Pedro", etc. (4.1273).

serie, que se nos muestra así como el siguiente a su precedente según la operación "Ω", y, por tanto, como miembro de la serie.

Las sucesivas ampliaciones de la notación básica se apoyan en otras tres nociones relativas a la teoría general de operaciones: *composición* de operaciones (*operación compleja*), *cancelación* de una operación (*operación nula*) y operación *definida* (o *nueva operación*). El examen de las expresiones de esa notación básica muestra, en forma inmediata, que cada una de esas expresiones incluye, no sólo la expresión que le precede inmediatamente, sino cualquiera de las expresiones precedentes. Estas expresiones, por tanto, muestran, no sólo las relaciones internas entre dos proposiciones inmediatas, sino entre todas las proposiciones de la serie. Esto, puesto que la operación es, precisamente, lo que muestra las relaciones internas entre dos proposiciones, entraña que no sólo la operación "Ω", sino cualquier secuencia de operaciones "Ω", puede ser entendida como «una» operación (esto podría generalizarse a la composición de operaciones cualesquiera); es decir, la iteración de una operación (o, en general, la composición de operaciones) puede ser entendida como una *operación compleja.*

Las expresiones de la notación básica, por tanto, adquieren entonces un valor múltiple: muestran la forma de la expresión de una proposición, ya como resultado de la aplicación de una operación a la expresión de la proposición que le precede inmediatamente (su base inmediata), ya como resultado de la aplicación de varias operaciones a la expresión de cualquiera de las proposiciones precedentes (su base mediata). Y si una proposición puede ser expresada como resultado de la aplicación de varias operaciones a su base mediata, es claro que tal proposición guarda determinadas relaciones internas con esa base mediata, y, por tanto, que también puede ser expresada como resultado de la aplicación inmediata de una única operación a esa misma base. Se muestra así una *nueva operación*, *equivalente a la composición* de aquéllas (5.3).

Apoyado en la noción de *operación compleja*, Wittgenstein, mediante la introducción de paréntesis, procede a un primer enriquecimiento de la notación. Las expresiones "Ω'Ω'x", "Ω'Ω'Ω'x", etc. pueden ser entendidas también en la forma "(Ω'Ω)'x", "(Ω'Ω'Ω)'x", etc., es decir, en cuanto resultado de la aplicación del complejo de operaciones entre paréntesis a la variable "x". La nueva notación, por tanto, no muestra ya la serie de proposiciones como resultados de la aplicación de una misma operación a bases en cada caso diferentes, sino como resultados de la aplicación de distintas operaciones a una y la misma base. De esta manera, la nueva notación permite mostrar la relación entre cualquiera de las proposiciones de la serie y la proposición inicial de la misma. Y mediante un uso generalizado de los paréntesis, que permite admitir expresiones del tipo "(Ω'Ω)'Ω'x", permite mostrar la relación entre dos cualesquiera de las proposiciones de la serie. Mediante la simple eliminación de los paréntesis, las expresiones de la nueva notación con paréntesis pueden ser reducidas a sus correspondientes expresiones de la notación inicial sin paréntesis (6.241).

En la forma hasta ahora examinada, las expresiones de esta notación básica wittgensteiniana, determinan las proposiciones de una serie formal como resultado de la aplicación de una operación a la proposición precedente; es decir, la notación parece reclamar una interpretación de la serie de expresiones en el sentido izquierda-derecha. Sin embargo, si una proposición está en determinadas relaciones internas con otra, también ésta está en determinadas relaciones internas con la primera; es decir, si una proposición puede ser determinada como resultado de la aplicación de una operación a otra proposición que se toma como base, también ésta ha de poder ser determinada como resultado de la aplicación de una operación a aquélla. La notación, por ello, admite también una interpretación de las expresiones en el sentido derecha-izquierda. Y, en este sentido, la operación se presenta como la *cancelación* de la aplicación de la operación "Ω" (5.253, 5.254).

***

El recurso a signos que expresan operaciones, responde a una doble exigencia. Por una parte, a la expresión de las relaciones internas entre «todas» las proposiciones de una serie formal; por otra, a la expresión, en la forma más simple y directa posible, de la relación entre una proposición y cualquier otra de las proposiciones de la serie. Para la expresión de las relaciones internas entre todas las proposiciones de una serie formal, no se requieren signos para aquellas operaciones que puedan ser consideradas como compuestas a partir de otras, sino sólo para sus operaciones componentes. Ahora bien, en razón de la noción misma de cancelación de una operación, la consideración de una operación como componente o como compuesta no es absoluta, sino relativa, y la consideración de uno u otro conjunto de operaciones como operaciones básicas será también relativa. La consideración de uno u otro conjunto de operaciones como operaciones básicas, sólo puede estar regida por razones de economía de signos (elección del conjunto mínimo de operaciones necesario para la expresión de las relaciones entre todas las proposiciones de una serie formal), o de simplicidad y facilidad en el uso de las expresiones (5.474, 5.475).

Sin embargo, para la expresión más simple y directa posible de la relación entre una proposición y cualquier otra proposición de la serie formal, se requeriría un signo específico para cada una de las múltiples operaciones. Un lenguaje adecuado debería ser capaz de expresarlas todas, y, por tanto, debería disponer de un signo para cada una de ellas. En cuanto la noción misma de operación entraña la infinitud de las operaciones, y un lenguaje adecuado solamente puede comprender un repertorio finito de signos simples, las operaciones tendrán que ser expresadas mediante un signo compuesto, que componga signos de un repertorio finito.

Por otra parte, una notación que pretenda mostrar la forma de «todas» las expresiones de «todas» las proposiciones de una serie formal, y las relaciones entre tales expresiones, debe ser capaz de mostrar, no sólo la operación que en cada caso interviene en la expresión de una proposición, sino también las relaciones entre las diversas operaciones. Tales relaciones entre las operaciones sólo pueden mostrarse a través de los signos mismos. Se suscita, así pues, un nuevo problema, que no es ya relativo al número de signos requerido, sino a su diseño: en el signo de una operación se ha de mostrar su relación a las restantes operaciones.

Estas son las razones por las que, apoyado en las nociones de *nueva operación* y de *operación nula* (complejo de una operación y de su cancelación), Wittgenstein da una nuevo paso hacia un nuevo enriquecimiento de la notación, mediante la introducción de un signo, con un particular diseño, para la expresión de cada una de las nuevas operaciones (6.02). En razón del número infinito de nuevas operaciones, que hace imposible, tanto la introducción de un signo simple para la expresión de cada una de las nuevas operaciones, como la enumeración de los infinitos signos complejos de las mismas, Wittgenstein define un procedimiento inductivo para la introducción y diseño de los infinitos signos complejos de las infinitas operaciones. Para ello, se sirve de la variable "Ω", que expresa el concepto formal de operación, y de dos nuevos signos: "^{0}" y "$^{+1}$". El signo "^{0}" sirve para construir el signo de la operación nula, cuyo valor queda determinado por la definición:

$$\Omega^{0}\text{'}x =_{df.} x.$$

Y como cualquiera de las nuevas operaciones puede ser entendida como resultado de la iteración de la misma operación "Ω", Wittgenstein, apoyado en los signos de operación ya previamente introducidos, introduce en su notación los nuevos signos de las nuevas operaciones mediante la adición a éstos del signo "$^{+1}$":

$$\Omega^{\nu+1}\text{'}x =_{df.} \Omega\text{'}\Omega^{\nu}\text{'}x.$$

Wittgenstein genera así una nueva serie de expresiones[8]:

$$\Omega^{0}\text{'}x,\ \Omega^{0+1}\text{'}x,\ \Omega^{0+1+1}\text{'}x,\ \Omega^{0+1+1+1}\text{'}x,\ \text{etc.}$$

que, respecto a la notación precedente, permiten ya mostrar la relación de cualquiera de las proposiciones de la serie a su base común, en términos de una sola operación, y según un procedimiento que muestra las relaciones entre las diversas operaciones introducidas, y que, a través de las definiciones, permite reducir las nuevas expresiones a las expresiones de la notación inicial. La propiedad común a todas las proposiciones de una serie formal, expresada antes mediante la variable $[x, \xi, \Omega\text{'}\xi]$, puede ahora ser expresada mediante la variable $[\Omega^{0}\text{'}x, \Omega^{\nu}\text{'}x, \Omega^{\nu+1}\text{'}x]$, que determina también el primer término de la serie formal y cualquiera de sus términos, en relación a la operación "Ω"; es decir, no sólo se determina un término como el siguiente a otro, sino también como el anterior a otro.

Wittgenstein da un tercer paso en el proceso de ampliación de la notación, mediante la introducción de los numerales "1", "2", "3", etc., como abreviaturas de las secuencias "0+1", "0+1+1", "0+1+1+1", etc. (6.02, 6.241), generando una cuarta serie de expresiones:

$$\Omega^{0}\text{'}x,\ \Omega^{1}\text{'}x,\ \Omega^{2}\text{'}x,\ \Omega^{3}\text{'}x,\ \text{etc.}$$

Estas expresiones, como las precedentes, permiten mostrar la relación de cualquiera de las proposiciones de la serie a su base común en términos de una sola operación, y mediante signos más simples que aquéllos, aunque los signos ya no

---

[8] Frascolla (p. 10) parece considerar estas expresiones como «abreviaturas» de las expresiones de la notación básica, en las que el índice numérico indicaría el «número» de veces que se aplica la operación básica "Ω". Así entendidas, los números serían un presupuesto de la notación. En nuestra opinión, estas expresiones deben ser entendidas, no como abreviaturas de secuencias de operaciones básicas, sino como expresión de nuevas operaciones, que guardan determinadas relaciones con la operación básica "Ω", que los índices muestran. Los números expresarían las propiedades formales de estas nuevas operaciones, en que se fundan sus relaciones a la operación básica "Ω", y en virtud de las cuales pueden considerarse equivalentes a la aplicación de la operación básica "Ω" un determinado número de veces. No se trata de que las expresiones de la notación ampliada tengan «el mismo significado» que las expresiones de la notación básica (Frascolla, pp. 9 y ss.), sino de que expresen «la misma proposición», pero como resultado de la aplicación de distintas operaciones a distintas bases.

muestran por sí mismos las relaciones entre las diversas operaciones (en este sentido, esta notación es menos adecuada que cualquiera de las precedentes); las definiciones proporcionan de nuevo el procedimiento para la reducción de estas expresiones a las expresiones de la notación primitiva.

Queda todavía un último paso en orden a completar el aparato notacional diseñado por Wittgenstein. Las nuevas operaciones expresadas por los nuevos signos, son ellas mismas operaciones, que caen bajo el concepto formal de operación expresado por "Ω"; por consiguiente, pueden también componerse, iterarse y cancelarse; y su composición, asimismo, puede ser concebida como definidora de nuevas operaciones. Se introducen así en la notación expresiones del tipo: "Ω^{3}'Ω^{3}'Ω^{3}'x", "Ω^{2}'Ω^{3}'Ω^{4}'x", "(Ω^{2}'Ω^{3}'Ω^{4})'x", "(Ω^{2}'Ω^{3})'Ω^{4}'x", etc. Y el procedimiento definido para el diseño de los signos que expresan como operaciones simples los complejos de operaciones, son también aplicables aquí: "Ω^{3}'Ω^{3}'Ω^{3}'x" es expresable en la forma "$(\Omega^{3})^{3}$'x", de la misma manera que "Ω'Ω'Ω'x" es expresable en la forma "Ω^{3}'x".

Conforme la notación se va enriqueciendo, y las expresiones se van haciendo más complejas, se va haciendo también más complejo el proceso de reducción de estas expresiones a las expresiones de la notación inicial. Es éste el contexto en el que Wittgenstein introduce los signos de las operaciones aritméticas, que permiten la reducción de la expresión de una operación, relativa a una operación derivada —"$(\Omega^{\mu})^{\nu}$'x"—, a su expresión relativa a la operación básica "Ω" (6.241):

$$\Omega^{\mu \times \nu}\text{'x} =_{\text{df.}} (\Omega^{\mu})^{\nu}\text{'x}.$$

Wittgenstein no define explícitamente la suma, pero podría definirse en la forma:

$$\Omega^{\mu + \nu}\text{'x} =_{\text{df.}} \Omega^{\nu}\text{'}\Omega^{\mu}\text{'x}.$$

Y, en forma análoga, cabría definir otras operaciones aritméticas.

Puesto que "Ω" no es el signo de ninguna operación determinada, sino una variable de operaciones, los nuevos signos "Ω^{0}", "Ω^{0+1}", "Ω^{0+1+1}", etc., "Ω^{1}", "Ω^{2}", etc. "$\Omega^{\mu \times \nu}$", "$\Omega^{\mu+\nu}$", etc. tampoco son signos de operaciones determinadas, sino, asimismo, variables de operaciones. Wittgenstein, por tanto, no ha definido ninguna operación, sino que simplemente ha mostrado ciertas propiedades formales de (ciertas relaciones entre) ciertos tipos de operaciones; tales propiedades formales muestran relaciones que pueden darse entre determinadas operaciones, y, derivadamente, entre las proposiciones en cuya expresión intervienen.

Los procedimientos de reducción de las expresiones de la notación ampliada a las expresiones de la notación básica han de ser entendidos como procedimientos de traducción, cuyas reglas vienen dadas por las definiciones de los nuevos signos introducidos. Son reglas puramente notacionales. Tales definiciones, por tanto, no tienen valor de proposiciones —nada dicen o figuran respecto del mundo—, sino que simplemente muestran las reglas de uso de los signos de operación mediante los que expresamos las proposiciones.

2. *Tractatus 6.02-6.031*

Examinadas las características de la notación wittgensteiniana relativa a la *teoría general de operaciones,* estamos ya en condiciones de afrontar la interpretación de los cinco parágrafos que Wittgenstein dedicó en el *Tractatus* al esclarecimiento de la naturaleza de los números, que constituyen, en forma explícita, una réplica a las tesis fregeanas. En su indagación acerca de la naturaleza de los números, Frege había partido del análisis de los *enunciados de asignación de número*, del tipo: "Juan tiene 3 patos", "Luis tiene 3 gatos"; y había concluido que "3", como "Juan" o "Luis", refiere en ambos enunciados a un *objeto* (el mismo objeto, el número tres), y que, en ambos enunciados, se asigna ese objeto, ese número, a un *concepto* ("pato de Juan" en el primero, "gato de Luis" en el segundo). Según Frege, los números son objetos, pero "tener este o aquel número" son conceptos, propiedades, de *segundo orden*, que sólo cabe asignar a conceptos.

Para la fundamentación de estas tesis,[9] Frege hubo de atender, primero, a la definición de cada uno de los números como objetos, de manera que fuera posible reconocer como «el mismo» el número asignado a dos conceptos distintos; después, a la ordenación de los números así definidos; por último, a la distinción de esos objetos respecto a los restantes objetos no numéricos, como Juan o Luis. Para la definición de los números, Frege recurrió a las nociones de "objeto", "concepto", "caer un objeto bajo un concepto", "extensión de un concepto", "correspondencia uno-a-uno entre extensiones de conceptos", "concepto equinumérico a un concepto dado A", "número de un concepto dado A", y a la definición de algunos conceptos particulares (valores de A en la definición de cada uno de los particulares números). Frege definió el "número de un concepto A" como la *extensión* —un objeto—, del concepto "equinumérico a ese concepto A", concepto, a su vez, definido por la existencia de una correspondencia uno-a-uno entre extensiones de conceptos; y definió cada uno de los particulares números como la extensión del concepto "equinumérico a ..." un particular concepto. Para la ordenación de los números, Frege recurrió a las nociones de "sucesión en una serie (o propiedad hereditaria)", "sucesor" y "sucesor inmediato". Por último, para distinguir los números respecto de los restantes objetos no numéricos, Frege definió, en general, el concepto mismo de número (no ya un objeto, sino un concepto, bajo el que caen cada uno de los particulares números), como "número de algún concepto". Russell cumplió un programa similar, en el que las *clases* desempeñaban el papel de las extensiones fregeanas.

Mediante la definición de conceptos particulares, de carácter puramente lógico, Frege y Russell pudieron *identificar* cada uno de los números así definidos, pero no pudieron *determinar* esos objetos. La determinación de esos objetos quedaba pendiente de la determinación de la extensión del concepto "equinumérico a un concepto A", imposible si no están dados de antemano «todos» los conceptos, también los de carácter empírico, y se dispone de un criterio de identidad de éstos. Para cualquier concepto A, el concepto "equinumérico al concepto A" determina una extensión, un objeto, que es identificado con un número, pero no determina qué conceptos quedan comprendidos en esa extensión; no es posible determinar «su» número, es decir, no el número que ese concepto determina, sino el que se ha de asignar a ese mismo concepto. Los conceptos cuyas extensiones son los números, no tienen ellos mismos un número determinado. Esta parece ser la raíz de la crítica wittgensteiniana a las doctrinas de Frege y Russell, al recurso

[9] G. Frege, *Die Grundlagen der Arithmetik*, §§ 55-83.

a las clases y extensiones para la definición de los números, que Wittgenstein considera superflua y casual (6.031).

Wittgenstein, que ya había rechazado la ontología fregeana de objetos y conceptos, así como la jerarquización de éstos según órdenes, rechaza también aquí la explicación fregeana de los números en términos ontológicos, y emprende una nueva explicación del sentido de los «numerales». Como Frege, Wittgenstein parte de los enunciados de asignación de número, pero ya no interpreta los numerales en términos de entidades a las que refieren, sino en términos de los procedimientos a los que obedecen estos enunciados, en cuanto «expresiones» de proposiciones; es decir, en términos de su teoría de operaciones y series formales.

Según Wittgenstein, para un correcto análisis de los enunciados "Juan tiene 3 patos", "Luis tiene 3 gatos", es preciso tener en cuenta, en primer lugar, que estas «expresiones» de proposiciones no expresan los constituyentes internos de las proposiciones, sino sus relaciones internas a otras proposiciones; en segundo lugar, que tales «expresiones» expresan proposiciones que pertenecen a series formales distintas, es decir, las determinan según relaciones internas a distintas proposiciones. "Juan tiene 3 patos" pertenece a la serie formal:

Juan tiene 0 patos, Juan tiene 1 pato(s), Juan tiene 2 patos, Juan tiene 3 patos, etc.

en tanto que "Luis tiene 3 gatos" pertenece a la serie formal:

Luis tiene 0 gatos, Luis tiene 1 gato(s), Luis tiene 2 gatos, Luis tiene 3 gatos, etc.

Las expresiones:

$$\Omega^{0}\text{'}x,\ \Omega^{1}\text{'}x,\ \Omega^{2}\text{'}x,\ \Omega^{3}\text{'}x,\ \text{etc.}$$

muestran la forma común de estas dos series formales. A la luz de estas expresiones, esas dos series formales podrían ser expresadas en la forma:

Juan tiene patos^{0}, Juan tiene pato(s)^{1}, Juan tiene patos^{2}, Juan tiene patos^{3}, etc.
Luis tiene gatos^{0}, Luis tiene gato(s)^{1}, Luis tiene gatos^{2}, Luis tiene gatos^{3}, etc.

Y, a la luz de las reglas a las que obedece la notación wittgensteiniana de las operaciones, y que permiten la reducción de las expresiones de la notación ampliada a las expresiones de la notación básica, podrían ser expresadas también, primero, en la forma:

Juan tiene patos^{0}, Juan tiene pato(s)$^{0+1}$, Juan tiene patos^{0+1+1}, Juan tiene patos$^{0+1+1+1}$, etc.
Luis tiene gatos^{0}, Luis tiene gato(s)$^{0+1}$, Luis tiene gatos^{0+1+1}, Luis tiene gatos$^{0+1+1+1}$, etc.,

y, finalmente, en la forma[10]:

Juan no tiene patos, Juan tiene pato, Juan tiene pato-pato, Juan tiene pato-pato-pato, etc.
Luis no tiene gatos, Luis tiene gato, Luis tiene gato-gato, Luis tiene gato-gato-gato, etc.

---

[10] Obviamente, estos análisis no obedecen a la literalidad del análisis wittgensteiniano, pero expresan su sentido. Wittgenstein, probablemente, expresaría las secuencias del tipo "pato-pato-pato" en términos de cuantificaciones existenciales sobre variables distintas: (∃xyz) Px&Py&Pz & etc.

En esta última forma, en la que los numerales han sido eliminados, puede advertirse, por una parte, que tales proposiciones no hablan, en ningún sentido, de números; y, por otra parte, que es distinta la operación que ordena una u otra serie: mientras que en la primera serie formal, la operación cuya iteración genera y ordena la serie es la adición de "pato", en la segunda, es la adición de "gato". No hay nada, ningún objeto, del que hablen a la vez ambas proposiciones, ni, tampoco, ninguna operación que intervenga en la construcción de ambas series formales. Lo único que ambas series formales tienen en común es una *propiedad formal*, la propiedad de que una y otra se construyen en virtud de la iteración, de la misma manera, de una operación, en cada caso distinta. Esta propiedad formal, que se deriva de la aplicación iterada de una operación "Ω", es la que expresa el exponente numérico "$^{+1}$", y la que hace posible que quepa reconocer una forma común a ambas series formales, que se muestra en cualquiera de las series de expresiones:

$$\Omega^{0}{}'x,\ \Omega^{1}{}'x,\ \Omega^{2}{}'x,\ \Omega^{3}{}'x,\ \text{etc.}$$
$$\Omega^{0}{}'x,\ \Omega^{0+1}{}'x,\ \Omega^{0+1+1}{}'x,\ \Omega^{0+1+1+1}{}'x,\ \text{etc.}$$
$$x,\ \Omega'x,\ \Omega'\Omega'x,\ \Omega'\Omega'\Omega'x,\ \text{etc.}$$

Esta propiedad formal común a ambas series formales, entraña, por una parte, propiedades formales comunes a los términos correlativos de cada una de las distintas series formales (en cuanto determinados de la misma manera en relación a sus respectivas bases), que vienen expresadas por los particulares exponentes que caracterizan a cada una de las expresiones de la forma "$\Omega^{\nu}{}'x$"; por otra parte, una propiedad formal común a todos los términos de cada una de las series formales (en cuanto determinados por la iteración de una misma operación), que es expresada mediante la variable "$[\Omega^{0}{}'x, \Omega^{\nu}{}'x, \Omega^{\nu+1}{}'x]$". Aquellas propiedades formales son, según Wittgenstein, las que dan cuenta del sentido de los numerales (es decir, explican cada uno de los particulares números); y ésta, la que da cuenta de la noción general de número.

Este es el sentido de la definición wittgensteiniana de número, como «exponente de una operación» (6.021). Contra lo que creyeron Frege o Russell, los numerales "0", "1", "2", "3", etc., no pueden ser entendidos como nombres de determinados objetos; tampoco como signos de operación, que mostrarían que son las mismas las relaciones internas entre las proposiciones de diversas series formales. Los signos "0", "1", "2", "3", etc., no son signos de operación, sino exponentes de los signos de operación; muestran, por una parte, las propiedades formales comunes a los términos correlativos de diversas series formales, en cuanto obtenidos en virtud de la iteración, de la misma manera, de una operación, en cada caso distinta, y, por tanto, puesto que la iteración de una operación puede ser entendida como definidora de una «nueva» operación, muestran asimismo las propiedades formales de ciertas clases de operaciones; muestran también, por otra parte, las diferencias y relaciones entre los diversos términos de una serie formal, y, por tanto, también, entre las diferentes «nuevas» operaciones así definidas.

Wittgenstein da todavía un paso más en el análisis de los numerales, dirigido a dar cuenta del modo en que se usan los numerales, no ya en los enunciados de asignación de número, sino en los «enunciados de la matemática». La forma de los enunciados de la matemática, como "2+3=5", "Existe un número par y primo", etc., no es ya la forma característica de los enunciados de asignación de número, como "Juan tiene 3 patos" o "Luis tiene 3 gatos", en los que se asignan números a conceptos, sino que son enunciados en los que se atribuyen propiedades a, o se establecen relaciones entre números.

Dejando a un lado la cuestión relativa a su sentido, que examinaremos en el último apartado de este trabajo, estos enunciados de la matemática entrañan, según Wittgenstein, una consideración separada de los exponentes de aquellas operaciones. Tales exponentes, los numerales, en cuanto que sirven a la determinación de los términos de una serie formal, asumen por sí mismos, al menos en apariencia, la forma de una serie formal:

0, 0+1, 0+1+1, 0+1+1+1, 0+1+1+1+1, etc.,

construida por la aplicación reiterada de la operación "+1" a la base "0", serie formal cuya forma general viene dada, como la de cualquier otra serie formal, por una variable: "[0, ξ, $\xi+1$]", que expresa el concepto formal de número (6.022, 6.03).

Sin embargo, ni tales expresiones constituyen propiamente una serie formal, ni "+1" constituye propiamente un signo de operación, que genera y ordena esa serie, pues, por definición, una operación expresa relaciones internas entre proposiciones (expresa una proposición como resultado de la aplicación de la operación a otras proposiciones tomadas como bases), y ninguna de las expresiones de esa serie es expresión de una proposición. No es "0+1" el término de una serie formal, obtenido por la aplicación de la operación "+1" al término "0", que le precede, sino que el término de la serie formal propiamente dicha es "Ω^{0+1}", que se obtiene por la aplicación de la operación "Ω" al término "Ω^{0}" que le precede. Para dar sentido a aquellas expresiones, se requiere restablecer su carácter de exponentes de operaciones, que sirven a la expresión de las proposiciones. Esta, como veremos, es una de las raíces de la consideración wittgensteiniana de las proposiciones de la matemática como «pseudoproposiciones».

Wittgenstein ha reemplazado las nociones fregeanas de "objeto", "concepto", "caer un objeto bajo un concepto" y "extensión de un concepto", por las nociones de "base", "operación", "aplicación de una operación" e "iteración de una operación"; y ha reemplazado la tarea de la determinación ontológica de cada uno de los números como objetos, su ordenación, y la definición general del concepto de número, por las tareas de construcción de series formales por la aplicación iterada de una operación, y de determinación de las propiedades formales de los términos de una serie formal, y de una propiedad formal común a todos los términos de la serie. La noción de serie formal obtenida por la iteración de una operación, da cuenta de las nociones de "sucesión en una serie", "sucesor" y "sucesor inmediato" que ordenan la serie de los números naturales. Y las nociones de "correspondencia uno-a-uno entre extensiones de conceptos", "concepto equinumérico a un concepto dado A", "número de un concepto dado A", se resuelven todas en la noción de "términos correlativos" de distintas series formales, construidas por la iteración de distintas operaciones. Ha reemplazado, así pues, la fundamentación ontológica de los números, al modo de Frege y Russell, por una nueva fundamentación, de carácter meramente notacional, que le aproxima a las posiciones formalistas.

3. *Operaciones veritativas. Proposiciones de la lógica*

En el *Tractatus*, en orden al análisis lógico de las proposiciones, Wittgenstein, frente a Frege, confiere la primacía a la perspectiva semántica. El examen de las condiciones de verdad prima sobre el examen de la estructura sintáctica de las proposiciones (4.4-4.432); el examen de las relaciones de consecuencia, sobre el de las relaciones de deducibilidad (5.11-5.12, 5.132); la teoría de la probabilidad, sobre la teoría de la demostración (5.15-5.153, 6.126-6.1265). Esta inversión de la perspectiva fregeana, sin embargo, responde a una exigencia fregeana, que el propio Frege no fue capaz de cumplir: la exigencia de que, en un lenguaje conceptográfico adecuado, todos los contenidos judicables entre sí equivalentes tengan una única expresión.[11] Tal exigencia es incompatible con la perspectiva sintáctica, que introduce conectivas lógicas dotadas de propiedades algebraicas, y, derivadamente, una multiplicidad de expresiones entre sí equivalentes, expresión de las propiedades algebraicas de esas conectivas. Sólo la perspectiva semántica, que determina las proposiciones en atención a sus condiciones de verdad, permite alcanzar una expresión única de todas las proposiciones entre sí equivalentes.

Este requisito de unicidad de expresión, asociado también al requisito de unicidad de análisis de las proposiciones entre sí equivalentes (3.25), imposible de satisfacer desde una perspectiva sintáctica, es la razón que lleva a Wittgenstein a declarar inefable la estructura de las proposiciones, y a explicar la forma de las expresiones de las proposiciones, no en tanto que expresión de su estructura, sino en tanto que expresión de las relaciones internas entre las diversas proposiciones; es, también, la razón que mueve a Wittgenstein a reemplazar la teoría fregeana de las funciones de verdad, por su teoría de las operaciones veritativas.

Como consecuencia de estos cambios, la noción misma de «funcion de verdad» sufre una profunda transformación. Puesto que las proposiciones tienen la condiciones de verdad que tienen, con independencia de las conectivas que intervienen en su expresión (5.25), Wittgenstein, frente a Frege, defenderá que las funciones de verdad son, no las conectivas (supuestos constituyentes de las proposiciones), sino las proposiciones mismas (5). No son las conectivas lógicas las que determinan las condiciones de verdad de una proposición, sino que son las condiciones de verdad de una proposición las que hacen posible que ésta pueda ser expresada, de una u otra manera, mediante estas o aquellas conectivas. Las conectivas serán consideradas por Wittgenstein como meros signos de operación, que expresan relaciones entre proposiciones, pero que no refieren a entidad alguna.

Las proposiciones, consideradas como funciones de verdad, son funciones de verdad de las proposiciones elementales (5). Determinado un número de proposiciones elementales, queda determinado también el número de funciones de verdad, es decir, el número de proposiciones distintas (no equivalentes), que se pueden formar a partir de esas proposiciones elementales (4.42). «$2^{(2^n)}$» es el número de proposiciones distintas que se pueden formar a partir de «n» proposiciones elementales (4 para n=1; 16 para n=2; 256 para n=3; etc.). Las proposiciones, funciones de verdad de «n» proposiciones elementales, como es sabido, pueden disponerse en una tabla, en la que cada una de esas proposiciones viene

---

[11] G. Frege, *Begriffsschrift* I, §3.

definida por una columna de valores de verdad, que determina las condiciones de verdad de esa proposición en relación a las condiciones de verdad de las proposiciones elementales (4.45, 5.101). La tabla de las «$2^{(2^n)}$» funciones de verdad de «n» proposiciones elementales comprende como caso particular todas las funciones de verdad de cualquier subconjunto de esas «n» proposiciones elementales, y por ello mismo, también, todas las proposiciones elementales (funciones de verdad de sí mismas).

La columna de valores de verdad que, en esa tabla, determina cada proposición como función de verdad de un número «n» de proposiciones elementales, puede ser considerada como la expresión más adecuada de esa misma proposición (4.442). Esa es la raíz de la notación semántica wittgensteiniana, en la que (VV)(p), (VF)(p), (FV)(p), (FF)(p) expresan las cuatro funciones de verdad de una proposición elemental «p»; (VVVV)(p,q), (VVVF)(p,q), (VVFV)(p,q), (VFVV)(p,q), (FVVV)(p,q), ..., (FFVF)(p,q), (FFFV)(p,q), (FFFF)(p,q), las dieciseis funciones de verdad de dos proposiciones elementales «p» y «q»; y de manera análoga se expresarían las funciones de verdad de un número cualquiera «n» de proposiciones elementales. Esta notación semántica proporciona el fundamento a la teorías de la probabilidad y de la consecuencia wittgensteinianas.

Esta notación semántica expresa todas las proposiciones en tanto que funciones de verdad de un determinado conjunto de proposiciones elementales. Consideradas ahora estas proposiciones en el marco de la teoría general de operaciones, esto significa que todas las proposiciones están en determinadas relaciones internas con las proposiciones elementales, y, por tanto, que todas las proposiciones pueden ser expresadas como resultados de la aplicación de operaciones a las proposiciones elementales consideradas como bases (5.3). Puesto que cada proposición constituye una función de verdad distinta, serán también distintas las relaciones internas entre cada una de estas proposiciones y las proposiciones elementales, y, por tanto, se definirán tantas operaciones, y, por consiguiente, se requerirán tantos signos de operación distintos, como funciones de verdad se hayan definido. Estas operaciones, mediante las que se expresan las relaciones internas entre una proposición y un determinado conjunto de proposiciones elementales, son las que Wittgenstein denomina «operaciones veritativas» (las funciones de verdad de Frege) (5.234). Negación, conjunción, disyunción (inclusiva y exclusiva), condicionalidad, bicondicionalidad, etc., son operaciones veritativas, y los signos mediante los que éstas se expresan, las conectivas lógicas, son los signos de estas operaciones (5.2341).

Las proposiciones, funciones de verdad de proposiciones elementales, no sólo están en relaciones internas con las proposiciones elementales, sino que, por ser todas ellas funciones de verdad de las mismas proposiciones elementales, están también en relaciones internas entre sí. Esto significa que las condiciones de verdad de una proposición pueden también quedar determinadas según su relación a otra, y que aquélla proposición puede ser concebida como resultado de la aplicación de una operación a ésta considerada como base; las proposiciones elementales, bases inmediatas de ésta, se presentarán ahora como bases mediatas de aquélla, que quedará así expresada, no en términos de una operación, sino en términos de una composición de operaciones, equivalente a la operación que expresa de forma inmediata su relación a las proposiciones elementales (5.32).

Es un hecho bien conocido que todas las funciones de verdad pueden ser expresadas mediante un conjunto mínimo de operaciones veritativas (5.32); es más, que es suficiente una única operación veritativa —ya la definida en la forma (FFFV)(p,q), ya la definida en la forma (FVVV)(p,q)—. Todas las restantes operaciones veritativas pueden ser definidas a partir de cualquiera de éstas. Pero es también bien sabido, que en los lenguajes ordinarios se reconoce una multiplicidad de conjunciones, consideradas signos de múltiples operaciones veritativas distintas.

Wittgenstein, a partir, por una parte, del reconocimiento de la posibilidad de disponer en una tabla, en la forma de una serie, ordenada de acuerdo con procedimientos combinatorios elementales, todas las funciones de verdad de un número cualquiera de proposiciones elementales; y, por otra parte, de la posibilidad de expresar todas esas funciones de verdad en términos de una única operación veritativa —(FFFV)(p,q)—, creyó[12] que tendría que ser posible entender todas las funciones de verdad como términos de una serie formal, determinada por la aplicación iterada de esa única operación veritativa al conjunto de las proposiciones elementales consideradas como bases (5.5). Introdujo, por ello, el signo "N" para la expresión de esa única operación veritativa (5.502), y definió la variable "[“$\bar{p}$”, “$\bar{\xi}$”, N'($\bar{\xi}$)]", como expresión de la forma general de los términos de esa serie formal, es decir, de la forma general de las proposiciones o funciones de verdad (6).

Consecuentemente, Wittgenstein consideró que el resto de las operaciones veritativas podrían ser entendidas como resultados de la iteración de esta única operación "N", de manera tal que todas ellas podrían ser expresadas en la forma "N^{ν}". Wittgenstein estaba equivocado. Sólo consideró el problema del orden de los argumentos (5.501), sin advertir que, a partir de tres o más argumentos, es decisivo el modo en que estos se agrupan. El carácter no asociativo de la operación "N" no permite entender la generación de todas las funciones de verdad en una forma tan simple.[13] Pero, aunque no en la forma de esa simple iteración, es cierto, sin embargo, que todas ellas pueden ser entendidas como resultado de la composición de aplicaciones, en forma más compleja, de esa única operación. Y esto puede ser suficiente para la justificación de la forma general de las funciones veritativas, y del resto del discurso wittgensteiniano en relación al estatuto de las proposiciones de la lógica y de la lógica misma. Una notación que incorpore una multiplicidad de signos de operaciones, puede, en todo caso, ser entendida como una ampliación de una notación básica que recurre al signo "N" como único signo de operación, en forma análoga a como las expresiones de la teoría general de operaciones: Ω^{0}'x, Ω^{1}'x, Ω^{2}'x, Ω^{3}'x, etc., pueden ser entendidas como resultado de una ampliación de la notación básica: x, Ω'x, Ω'Ω'x, Ω'Ω'Ω'x, etc.

***

[12] El parágrafo 5.503 parece poner de manifiesto que Wittgenstein no encontró el procedimiento para ordenar las funciones de verdad en la forma requerida, pero, pese a ello, siguió pensando que tendría que ser posible encontrarlo.

[13] Vid. Hochberg, pp. 537-538.

Entre las funciones de verdad de un número cualquiera de proposiciones elementales, se reconocen dos proposiciones —las que de ordinario ocupan las posiciones extremas de la tabla—, que contrastan con todas las demás, por quedar definidas por una columna igual en todas sus líneas; son las proposiciones que, como funciones de verdad de dos proposiciones «p» y «q», se expresan en la forma (VVVV)(p,q) y (FFFF)(p,q), y que Wittgenstein denomina, respectivamente, "Tautología" y "Contradicción" (4.46). Son proposiciones necesariamente verdaderas o falsas. Son, por ello mismo, de acuerdo con la teoría de la figuración wittgensteiniana, proposiciones vacías de sentido, que no dicen nada (4.461, 6.11), pero que, como miembros de la tabla de las funciones de verdad, constituyen proposiciones en un sentido propio (4.4611).

Tautología y contradicción, en tanto que funciones de verdad, son expresables, al igual que las restantes funciones de verdad, como resultados de operaciones veritativas sobre proposiciones elementales, o sobre cualesquiera otras funciones de verdad. Son por tanto, susceptibles de múltiples expresiones, que constituyen las llamadas "tautologías" o "contradicciones". Estas tautologías son las «Leyes del pensamiento puro» de Frege, que se descubren así, todas ellas, como expresiones de una misma proposición, de una proposición, además, vacía de sentido, es decir, que no dice nada (4.461, 6.11). Estas tautologías son las que Wittgenstein denomina «proposiciones de la lógica» (6.1).

Según Wittgenstein, frente a Frege, la tarea específica de la lógica no consiste en el reconocimiento y axiomatización de las tautologías, sino en el examen, en toda su generalidad, de las relaciones entre las proposiciones o funciones de verdad (relaciones de oposición, consecuencia, etc.). Es tarea de la lógica mostrar esas relaciones entre las proposiciones, y, para ello, la lógica ha de construir los instrumentos de análisis que permitan mostrar con claridad esas relaciones. Tales instrumentos son de dos tipos: por una parte, instrumentos notacionales; por otra, instrumentos metódicos, ordenados a la manipulación de esos instrumentos notacionales.

Los instrumentos notacionales, por su parte, son también dobles. A la lógica le corresponde, por una parte, construir notaciones adecuadas, como la notación semántica wittgensteiniana o como la notación básica (que comprende un único signo de operación, que permite expresar todas las proposiciones a partir de unas mismas bases), que muestren de forma inmediata las relaciones entre las distintas proposiciones (6.122, 5.1311). Pero, por otra parte, también le corresponde mostrar esas relaciones, cualquiera que sea el modo en que, en los lenguajes propiamente dichos, se expresen las proposiciones; para ello, ha de construir notaciones ampliadas, capaces de mostrar la forma en que, en los lenguajes propiamente dichos, las proposiciones se expresan, y, por tanto, que, como éstos, comprendan una multiplicidad de operaciones; y ha de determinar con precisión las relaciones entre estas notaciones ampliadas y la notación básica (los procedimientos de reducción de aquéllas a ésta).

En los lenguajes propiamente dichos, las proposiciones se expresan como resultados de la aplicación de diversas operaciones a diversas bases. Esta multiplicidad de operaciones y bases oculta las relaciones entre las diversas proposiciones (5.1311). Y a la lógica le corresponde sacar a la luz tales relaciones. Estas relaciones, que en las expresiones de las proposiciones mediante operaciones se ocultan, se muestran cuando estas expresiones son reducidas a expresiones de la notación básica o de la notación semántica; pero se muestran, también, en las tautologías de la notación ampliada. Cada tautología, en cuanto que expresión de la Tautología como resultado de una operación que toma como bases otras funciones de verdad, muestra las relaciones lógicas entre esas proposiciones que se consideran como bases (6.12-6.1221). Para que una operación, aplicada a unas determinadas bases, dé lugar a una tautología, es preciso que se dé una determinada relación entre las bases, relación que las tautologías muestran (6.12-6.1201). Las tautologías, así pues, consideradas como proposiciones, no figuran nada, carecen de sentido; pero muestran las relaciones entre sus bases, y ésa es, precisamente, la tarea de la lógica. De ahí que las tautologías se constituyan, precisamente, como las «proposiciones de la lógica».

Las tautologías, en cuanto que muestran las relaciones entre las proposiciones que constituyen sus bases, muestran también las relaciones entre los estados de cosas por éstas figurados; muestran, por tanto, lo que es común a proposiciones y estados de cosas, en virtud de lo cual aquéllas pueden representar a éstos, es decir, muestran la forma lógica, la forma del mundo (6.12).

En cuanto que, en las expresiones de las proposiciones como resultados de la aplicación de operaciones a determinadas bases, las relaciones entre las proposiciones se ocultan, se requieren métodos para la manifestación de esas relaciones. Ese es el carácter de los denominados por Wittgenstein *métodos lógicos*, que también corresponde determinar a la lógica. En cuanto que son múltiples las vías a través de las cuales pueden llegar a manifestarse esas relaciones entre las proposiciones (la reducción a la notación semántica, la reducción a la notación básica, las tautologías), también serán múltiples estos métodos. Son métodos lógicos, por tanto, todos aquellos métodos que permiten determinar las condiciones de verdad de la proposición que una determinada expresión expresa, o que permiten reconocer una expresión como expresión de la Tautología o de la Contradicción (la demostración entre ellos); también, todos aquellos métodos que permiten reducir o traducir las expresiones en que intervienen signos de operación definidos, a expresiones en las que sólo intervienen los signos de las operaciones consideradas básicas, o, a la inversa, que permiten expresar un complejo de operaciones en términos de una única operación.

Lo peculiar de todos estos métodos radica, según Wittgenstein, en su carácter notacional. No se requiere en ningún caso la consideración de lo que la proposición figura, ni el conocimiento de su verdad o falsedad, sino sólo la consideración de la forma de su expresión y el conocimiento del valor asignado a cada uno de los signos que intervienen en esa expresión. Los métodos lógicos no presuponen ningún conocimiento del mundo del que las proposiciones hablan, sino sólo la comprensión de la notación empleada en la expresión de tales proposiciones.

***

Entre las funciones de verdad de dos proposiciones elementales, se incluye la proposición (VFFV)(p,q), que, mediante el recurso a signos de operación, suele expresarse en la forma $(p \equiv q)$. El signo de operación "$\equiv$" presenta algunas peculiaridades, que, en orden a una correcta comprensión del análisis wittgensteiniano de las «proposiciones de la matemática», merecen ser señaladas. Este signo de operación, como cualquier otro, puede formar parte de tautologías (expresiones de la Tautología). Tales tautologías, por lo general, muestran, según se ha visto, las relaciones entre las proposiciones que constituyen sus bases; pero, en este particular caso, lo que muestran, no es tanto una relación entre «dos proposiciones», sino entre «dos expresiones»: muestran que son dos expresiones de una y la misma proposición.[14]

La peculiaridad de la relación que en estas tautologías se muestra, entre expresiones y no ya entre proposiciones, mueve a Wittgenstein a eludir el uso, con ese propósito, de esas tautologías, y a introducir para ello un nuevo signo, el signo "=", que, a diferencia de "≡", ya no es un signo de operación, ni interviene en la expresión de las proposiciones (tampoco en la expresión de las tautologías).[15] El signo "=" no es un signo de operación, que exprese relaciones internas entre proposiciones, y, por ello, no pertenece a la notación; es un signo que ninguna notación adecuada debe incluir. Es un signo auxiliar del análisis, que manifiesta la intersustituibilidad de las expresiones que enlaza; es expresión de la traducibilidad de una expresión a otra, relación que ninguna proposición con sentido puede expresar. Las expresiones en las que interviene el signo "=", por tanto, son expresiones sin sentido, pero no ya como las tautologías lo son, sino en un sentido más fuerte: no expresan proposición alguna (no están incluidas en la tabla de las funciones de verdad); son, por ello, pseudoproposiciones (4.241-4.242, 5.533-534).

4. *Tractatus* 6.2-6.241

Hemos atendido anteriormente al análisis wittgensteiniano de los enunciados de asignación de número. Tales enunciados, en cuya expresión intervienen los «numerales», expresan proposiciones con sentido, figuras de estados de cosas, que pueden ser verdaderas o falsas. Esas son las proposiciones que «necesitamos en la vida» (6.211). Pero no son ésas las «proposiciones de la matemática». Las proposiciones de la matemática son las ecuaciones, expresiones mediante las que se establecen relaciones entre expresiones numéricas, del tipo "2+3=5", que, según Wittgenstein, permiten deducir un enunciado de asignación de número de otro enunciado de asignación de número, que expresa la misma proposición (6.211).

Cuando Wittgenstein analiza las «proposiciones de la matemática», no las analiza según la forma en que estas debieran expresarse en una notación adecuada, sino según la forma «inadecuada» en que se expresan en la práctica matemática

---

[14] Wittgenstein tropieza aquí con el mismo problema con el que ya había tropezado Frege, raíz de su interpretación del signo de igualdad de contenido como expresión de una relación entre signos (G. Frege, *Begriffsschrift* I, §8).

[15] En la literatura wittgensteiniana no se ha prestado suficiente atención a la importancia del uso del signo "=", en lugar del signo "≡", en el ámbito específicamente lógico. No se ha advertido la peculiaridad de las tautologías en las que interviene el signo "≡", y, derivadamente, la diferencia entre las tautologías, carentes de sentido, pero que pertenecen al lenguaje, y las pseudopropocisiones, que ya no pertenecen al lenguaje. Se ha oscurecido, por ello, uno de los argumentos decisivos para la equiparación wittgensteiniana de las «proposiciones de la lógica» y las «proposiciones de la matemática».

usual. Su análisis, por tanto, persigue un doble propósito, raíz de las dificultades que su interpretación suscita. Por una parte, Wittgenstein pretende mostrar la inadecuación de esa forma usual de expresión; pero, por otra parte, pretende poner de manifiesto el estricto sentido que encierran esas inadecuadas expresiones, el sentido de las «proposiciones de la matemática», que, en una notación adecuada, se haría por sí mismo manifiesto.

Son dos, según Wittgenstein, las razones de la inadecuación de las expresiones usuales de las «proposiciones de la matemática». Por una parte, el modo en que, en esas expresiones, se usan los «numerales»; por otra, el uso que en esas expresiones se hace del signo "=". En razón del modo en que se usan los numerales, que oculta que éstos son exponentes de operaciones que expresan propiedades formales, estas expresiones son inadecuadas porque parecen mostrar que los numerales son nombres de objetos, y que, por tanto, las proposiciones de la matemática son auténticas figuras de estados de cosas. Y en razón del signo "=", que se usa para manifestar la igualdad de significado de las expresiones a izquierda y derecha de la igualdad (6.2323), estas expresiones son inadecuadas porque dan a las «proposiciones de la matemática» la forma de «pseudoproposiciones» (6.2).

En una notación adecuada, la ecuación "$2+3=5$", debiera ser expresada en la forma: $\Omega^{2+3}{}'x \equiv \Omega^{5}{}'x$, en la que los numerales recuperan su condición de exponentes de operaciones, y "=" es reemplazado por "≡", dando de este modo a la expresión la forma de una proposición en sentido estricto. Se mostraría así que las expresiones a izquierda y derecha del signo "≡" son expresiones de una y la misma proposición. Wittgenstein, sin embargo, evita dar este último paso. Por la misma razón que, en el ámbito de las operaciones veritativas, para poner de manifiesto que dos expresiones son expresión de una y la misma proposición, Wittgenstein introdujo el signo "=", en lugar de servirse del signo "≡", en razón de la peculiar relación (no entre proposiciones, sino entre signos) que de esa manera se muestra, también ahora Wittgenstein prefiere recurrir al signo "=", y conservar el carácter «pseudoproposicional» de las «proposiciones de la matemática».

Como en el ámbito de las operaciones veritativas, Wittgenstein no tiene ningún inconveniente en reconocer el carácter pseudoproposicional de las expresiones en que interviene el signo "=", ni necesidad de encontrar una expresión equivalente a estas pseudoproposiciones, que sea auténticamente proposicional, porque considera que, ni en aquel ni en este caso, se necesita afirmar la igualdad de significado de dos expresiones; la igualdad de significado de dos expresiones es algo que, en una notación adecuada, se muestra en la expresión misma (6.23-6.2322). La igualdad de significado de dos expresiones, que se manifiesta mediante las expresiones del tipo: "$\Omega^{2+3}{}'x \equiv \Omega^{5}{}'x$", se muestra por sí misma, sin necesidad de que sea afirmada, cuando las expresiones a izquierda y derecha del signo "≡", se expresan, respectivamente, en la forma: "$((\Omega'\Omega)'(\Omega'\Omega'\Omega))'x$, $(\Omega'\Omega'\Omega'\Omega'\Omega)'x$", o en la forma: "$\Omega^{0+1+1}{}'\Omega^{0+1+1+1}{}'x$, $\Omega^{0+1+1+1+1+1}{}'x$ (6.231).

Esta preferencia notacional por las expresiones pseudoproposicionales, en nada afecta, sin embargo, al carácter cuasi-tautológico de las expresiones del tipo "$\Omega^{2+3}{}'x \equiv \Omega^{5}{}'x$", o, según prefiere Wittgenstein, del tipo "$\Omega^{2+3}{}'x = \Omega^{5}{}'x$", que permiten equiparar las «proposiciones de la matemática» a las «proposiciones de la lógica». Como las tautologías, estas expresiones expresan «proposiciones» necesariamente verdaderas. Como las tautologías, por tanto, carecen de sentido; no constituyen propiamente figuras del mundo, ni expresan pensamiento alguno (6.21), sino que muestran simplemente la forma del mundo (6.22). Como las tautologías expresadas mediante la operación "$\equiv$", muestran solamente la intersustituibilidad de determinadas expresiones (6.23, 6.24).[16] La única diferencia radica en que en estas expresiones intervienen variables de operaciones cualesquiera, y no sólo signos de operaciones veritativas; los procedimientos o métodos de reducción de estas expresiones (incluidos los procedimientos de demostración), ordenados a manifestar las relaciones entre las proposiciones por ellas expresadas, aunque distintos de los que son de aplicación en el ámbito de las operaciones veritativas, son de la misma naturaleza que éstos. Son también procedimientos de carácter notacional, es decir, que no presuponen ningún conocimiento del mundo (6.2321), sino sólo la comprensión de la notación empleada. Los métodos matemáticos, por tanto, pueden ser considerados como métodos lógicos; y la matemática misma puede ser considerada como uno de estos métodos (6.2, 6.234).

Se cumple así el programa de equiparación de matemática y lógica, característico del logicismo, aunque en una forma nueva, que no requiere ya ni, por una parte, el reconocimiento de entidades lógicas y matemáticas, y la construcción de las entidades matemáticas a partir de las supuestas entidades lógicas, ni, por otra parte, la deducción de las «proposiciones de la matemática» a partir de las «proposiciones de la lógica». El programa logicista se cumple, no porque las «proposiciones de la matemática» se obtengan por deducción puramente lógica a partir de otras proposiciones, las «proposiciones de la lógica» o tautologías, sino porque se reconoce que su naturaleza es la misma, y que la lógica comprende por igual a unas y otras. Las «proposiciones de la matemática» no se deducen de las tautologías, sino que tienen exactamente la misma naturaleza que éstas; son proposiciones de carácter puramente notacional.

Establecido el carácter lógico de las «proposiciones de la matemática», Wittgenstein da todavía un paso más, en orden a determinar el carácter analítico o sintético de tales proposiciones. Entre los propósitos del programa logicista desarrollado por Frege y Russell, se incluía el reconocimiento, frente a Kant, del carácter analítico, puramente lógico, de los juicios de la aritmética; es decir, el reconocimiento de que la aritmética no entraña intuición alguna. Desde este punto de vista, el logicismo notacional wittgensteiniano entraña un paso en sentido inverso. La teoría de la figuración wittgensteiniana se construye sobre el reconocimiento de la existencia de hecho de lenguajes significativos, en los que cualquier proposición puede ser expresada. El reconocimiento y análisis de las tautologías, el examen de las relaciones entre las funciones de verdad que en las

---

[16] Hochberg (pp. 539-540) equipara las ecuaciones de la matemática, en cuanto fundamento de reglas de inferencia, con las reglas de inferencia lógica (*modus ponens*), y, derivadamente, con las tautologías en general. Sin embargo, parece que las ecuaciones de la matemática sólo son equiparables a ese particular tipo de tautologías que expresan relaciones de equivalencia. Las reglas de inferencia matemática que fundan las ecuaciones, no pueden, por tanto, ser equiparadas al algoritmo de la suma, en la forma en que Hochberg parece entenderlo, pues en tal caso se trataría de una paso desde unas proposiciones a otras, y no del paso desde una expresión de una proposición a otra expresión de la misma proposición.

tautologías se muestran, o, en general, de las relaciones entre las proposiciones, que se muestran en las proposiciones de la lógica y de la matemática, está subordinado al reconocimiento de la existencia de esos lenguajes, y al reconocimiento de la figuración. Entraña, por tanto, la experiencia del lenguaje. Esta experiencia del lenguaje es la que, según Wittgenstein, proporciona la intuición que lógica y matemática necesitan (6.233-6.2331). Por tanto, no sólo no es posible asignar a la aritmética el carácter analítico y «a priori» que Frege pretendía asignarle, sino que se descubre así que tal carácter tampoco conviene a la lógica.

* * *

Angel d'Ors
Dpto. de Lógica y Fª de la Ciencia
Facultad de Filosofía
Universidad Complutense
28040 Madrid

María Cerezo
Facultad de Filosofía y Letras
Universidad de Navarra
31080 Pamplona