RELATIVIZACION Y EXTENSION DEL ALGEBRA BOOLEANA

Pedro J. Navarro Montesinos. Universidad de Murcia.

1. Introducción

La estructura y la forma de la lógica, así como la de la propia matemática, están determinadas por las *operaciones* que establece de las que puede derivar el resto de sus elementos básicos. Tal estructura de *cálculo*, que caracteriza ambas disciplinas, está claramente ejemplificada en el *álgebra booleana* (Cfr. 1.1.). Este álgebra satisface, sin duda alguna, todas las características de un «cálculo abstracto»: su estructura admite no sólo las variaciones sino también adopción de operadores, lo que permite formular en su interior los *tipos de relaciones* que constituyen las operaciones.

El propósito de este artículo es mostrar, a través de esta «extensión», que supone la adopción de operadores, las posibilidades de análisis algebraico del cálculo de relaciones binarias.

1.1. El Algebra [AC]

Un *álgebra booleana* [AC] es una 6-tupla $< C, +, ., \bar{}, 0, 1 >$ [1] que satisface el siguiente conjunto de axiomas:

A1. $a + (b + c) = (a + b) + c$

$a . (b . c) = (a . b) . c$

A2. $a + b = b + a$

$a . b = b . a$

A3. $a + (b . c) = (a + b) . (a + c)$

$a . (b + c) = (a . b) + (a . c)$

A4. $a + 0 = a$

$a . 1 = a$

A5. $a + \bar{a} = 1$
$a \cdot \bar{a} = 0$

El sistema de axiomas [A1-A5], tal y como ha sido formulado, representa el núcleo axiomatizado del cálculo de conjuntos [C], que tiene A, B, C, ... $\in$ U como elementos. Los elementos 0 y 1 representan el conjunto vacío $\emptyset$ y el universo de discurso U de [C] en [AC].

1.2. Representación de [AC]

De lo dicho anteriormente se deduce que todo álgebra [AC] es un modelo del cálculo [C] («representable», por tanto, en él), pero no que todo modelo de [C] sea un [AC]. Para probar que los axiomas de [C][2] *caracterizan* efectivamente las [AC] y que, por consiguiente, [C] es *representable*, necesitamos primero mostrar que el álgebra [AC] tiene la propiedad de poder ser «representada» (filtrada) sobre diversas estructuras. Como ejemplo, basta probar que los axiomas de una 3- tupla $< C, \cdot, ^{-} >$

P1. «.», es una operación conmutativa y asociativa.

P2. para todo a,b en C, si $a . \bar{b} = c \cdot \bar{c}$ para algún c en C, entonces $a . b = a$.

P3. para todo a,b en C, si $a . b = a$, entonces $a . \bar{b} = c . \bar{c}$, para todo c en C.

permiten derivar [A1-A5] como teoremas. Y definir para ella lo que es un *átomo:* un elemento a de [AC] es un átomo sii (sí y sólo sí) $a \neq 0$ y $b \leq a$ implica que $b = 0$ o $b = a$. Para x en C sea A(x) el conjunto de todos los átomos tales que $a \leq x$. Son propiedades de a y A(x) para $< C, ., ^{-} >$ con C finita:

(i) si $x \neq 0$ existe un átomo a que $a \leq x$
(ii) si a es un átomo y $x \in C$, entonces se cumple sólo una de las condiciones $a \leq x$ y $a . x = 0$. 0 si se quiere, se cumple sólo una de las condiciones $a \leq x$ y $a \leq \bar{x}$
(iii) $A(x . y) = A(x) . A(y)$
(iv) $A(\bar{x}) = A(1) - A(x)$
(v) $A(x) = A(y)$ sii $x = y$
(vi) si $a_1, a_2, ..., a_k$ son átomos distintos
$A(a_1 + a_2 + ... + a_k) = \{ a_1, a_2, \ldots, a_k \}$

A través de [i-vi] podemos probar que si C es un [AC] de n elementos, C es isomórfica al álgebra de todos los subconjuntos del conjunto de los átomos de C. Si m es el número de átomos de C, entonces $n = 2^m$. En efecto, sea T el conjunto de m átomos de C, entonces el mapeo A: C—P(T) es 1—1 por (v) y en P(T) por (vi). De acuerdo con (iii) la imagen de una unión en C es la unión de las correspondientes imágenes en P(T). Asimismo, de acuerdo con (iv), la imagen $A(\bar{x})$ de $\bar{x}$ es el complemento de la imagen de x, esto es, el complemento relativo de A(x) en T. De este modo, A es un isomorfismo, y $n = 2^m$ se sigue del hecho de que el conjunto potencia de un conjunto de m elementos tiene 2^m miembros.

Se prueba, así, el isomorfismo entre [C] y [AC][3], y, por tanto, el grado de abstracción que caracteriza al álgebra [AC]: a través de sus nociones puede definirse con facilidad y elegancia los elementos centrales de la matemática, y de su estructura, derivarse la totalidad del sistema deductivo matemático.

2. Relativización de [AC]

Construir un álgebra de relaciones que dé cuenta de todas las operaciones consideradas en el cálculo de relaciones binarias, supone relativizar y extender (Cfr.3) el álgebra [AC].

Considero una *relativización de* [AC], $R_{[AC]}$, la sustitución del conjunto, universo de discurso, C por R en [AC] (Cfr. 2.1.), e interpretación de las constantes 0 y 1 en términos relativos. Dicho con mayor precisión: un $R_{[AC]}$ es una estructura algebraica (booleana) del tipo $R = < R, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{-}, \hat{0}, \hat{1} >$ (Cfr. 2.2.).

2.1. La noción de relación R

La noción R ha sido definida de modo diverso, aunque en forma esencialmente equivalente (Cfr. 4.1.). Consideraremos aquí tres formulaciones para R, según se define en Peirce (R_1), Frege-Russell (R_2) y Wiener-Kuratowski (R_3). En base a esto, estableceremos que r, s, t, ... $\in$ R, donde R = R_1, R_2 o R_3 [4].

2.1.1. R_1 *para clases de individuos y pares.* En una primera aproximación R_1 aparece como un *relativo*[5] (que denotaremos con R^*_1), esto es, como una *clase de individuos,* cada uno de los cuales está relacionado, de un determinado modo, con algunos otros individuos. Dicho con mayor precisión: un relativo es, según esto, el dominio de una relación binaria r

$$R^*_1 = D(r) = \{ x / (\Sigma y) \, xry \}$$ [6]

Extendiendo esta noción de relativo[7], podemos definir R^{**}_1 como una *relación* –en el sentido actual del término–, esto es, como una *clase de pares*[8] de objetos (entre los que se da esta relación). En concreto: un relativo binario R^{**}_1 es la suma lógica de los pares (A:B) de objetos A y B, tales que A es un r de B. Tomando relativos binarios indivduales del tipo (A:B), podemos colocarlos, por ejemplo, en una tabla infinita:

A:A	A:B	A:C	A:D	A:E	etc.
B:A	B:B	B:C	B:D	B:E	etc.
C:A	C:B	C:C	C:D	C:E	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

A través de este procedimiento matricial[9], introducimos la noción de «relativo general» como la suma lógica de todos los «relativos individuales» (A:B)

$$R^*{}_1{}^* = \Sigma (A : B)$$

Esta «suma» recibe una nueva formulación cuando un relativo general se concibe como una suma lógica de un cierto número de relativos individuales, en tal caso

$$R^*{}_1{}^* = \Sigma_i \; \Sigma_j \; (r)_{ij} \; (I:J)$$

donde $(r)_{ij}$ es un coeficiente numérico, cuyo valor es 1 en el caso de que I tenga la relación r con J, y O en el caso contrario, y donde las sumas deben referirse a todos los individuos del universo.

Esta formulación presenta, sin embargo, la siguiente dificultad de interpretación: $(r)_{ij}$ parece una especie de función característica de la relación. Mientras que en la formulación anterior A y B en (A:B) representan elementos, ahora I y J deberían representar la clase e (I:J) su producto cartesiano (IxJ), esto es

$$
R_1^{**}\qquad
\begin{array}{c|cccc}
 & a & b & c & \\
\hline
a & r_{aa} & r_{ab} & r_{ac} & \cdots \\
b & r_{ba} & r_{bb} & r_{bc} & \cdots \\
c & r_{ca} & r_{cb} & r_{cc} & \\
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdot & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}
$$
[10]

La definición rigurosa de R_1^{**} resulta ahora fácil, a través de este procedimiento matricial, si consideramos finito el universo de discurso

$$
R_1^{**} = \| r_{ij} \| = \left\| \begin{array}{c} r_{11}\ r_{12} \cdots r_{1n} \\ r_{21}\ r_{22} \cdots r_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ r_{n1}\ r_{n2} \cdots r_{nn} \end{array} \right\|
$$
[11]

Esta matriz utiliza elementos de un álgebra [AC], esto es, los elementos r_{ij} son elementos de [AC].

R_1 considera, pues, a un relativo (e incluso a una clase) como una simple «suma de individuos», por lo que una relación (relativo binario) viene a equivaler, consiguientemente, a una «suma de pares de individuos»[12]. Dada una clase, cabe siempre extenderla siguiendo el mismo método para formar una relación. En efecto, esto es, lo que hemos hecho en R_1 y que haremos en R_2, al considerar una relación como una función de dos variables (o argumentos), siendo las clases funcions de una sola variable (argumento).

2.1.2. R_2 para funciones de dos variables[13]

Siguiendo esta definición, cualquier función φ (x,y) determina una relación r entre x e y. La relación determinada por la función φ (x,y) se representa por

$$\hat{x}\,\hat{y}\,\varphi(x, y)$$

La función proposicional «x tiene la relación r con y», queda, entonces, expresada por

$$x\,\{\,\hat{x}\,\hat{y}\,\varphi(x, y)\,\}\,y$$ [14]

Según esto, tenemos que

$$z \{ \hat{x} \hat{y} \varphi (x , y) \} w \equiv \varphi (z , w)$$

esto es, «z tiene con w la relación determinada por la función φ (x,y), es equivalente φ (z,w).

R_2 se define, por consiguiente

$$R_2 = \hat{x} \hat{y} \ \varphi (x , y) \equiv x \, r \, y \equiv_{x,y} \varphi (x , y)$$

donde

$$x \, r \, y = x \{ \varphi (\hat{x} , \hat{y}) \} y = \varphi (x , y)$$

Cuando se dice que «φ(x,y)es una relación» se hace una declaración acerca de una *ambigüedad* (habida cuenta de que una función es, en cuanto tal, una ambigüedad[15]. La función propiamente dicha, φ (x,y), es el objeto singular que ambiguamente indica sus múltiples valores, mientras que φ (x,y), en donde no se especifica a x e y, es uno de los objetos indicados, cuya ambigüedad estriba en la manera de indicar[16]. Así pues

$$\hat{x} \hat{y} \varphi (x , y) = \hat{x} \hat{y} \psi (x , y) \equiv \varphi (x , y) \equiv_{x,y} \psi (x , y)$$

esto es, dos funciones de dos variables determinan la misma relación cuando, y sólo cuando, las dos funciones son formalmente equivalentes[17]

R_2 no precisa lo que es una relación en cuanto tal, tan sólo establece proposiciones que hacen referencia a un «objeto abstracto» (ambiguo). Una relación entre x e y (cuando φ (x,y)) es la «totalidad de funciones proposicionales que tengan a esos valores x e y y sólo a esos valores». Es por esta definición por lo que se necesita usar para R_2 el *axioma de reducibilidad*

$$(\Sigma \ f) : \varphi \ (x,y) \equiv_{x,y} f!(x,y)$$

que supone que dada una función φ (x,y), siempre hay una función predicativa «formalmente equivalente». Esta suposición es lo que se quiere dar a entender cuando se afirma que una expresión (proposición) acerca de dos variables, define una *relación* entre ellas[18].

Sin embargo, en el análisis de la proposición que afirma que hay una relación entre dos individuos x e y, aparece implícita la proposición que afirma que un par ordenado (x,y) de individuos satisfacen una cierta función [19]. Si esto es así, una relación puede reformularse en términos de pares ordenados reduciendo, e incluso anulando, el uso del *axioma de reducibilidad*[20], necesario en R_2 para establecer relaciones.

2.1.3. R_3 para clases de pares ordenados

Si tomamos de R_2 la clase a de pares ordenados, podemos establecer una función proposicional φ de una variable, de tal modo correlacionada con ψ que su extensión sea determinable únicamente por la de ψ, y viceversa; o dicho formalmente, si φ' lleva con ψ' la misma relación que φ lleva con ψ, entonces

$$\psi'(x, y) \equiv_{x,y} \psi(x, y) : \equiv : \varphi' a \equiv_a \varphi a$$

Se puede interpretar así, cualquier proposición concerniente a la extensión de ψ como una proposición referida a la extensión de φ [21]. Donde φ es la función proposicional

$$(\Sigma x, y) \cdot \psi(x, y) \cdot a = ((x), (x, y))$$ [22]

Obtenemos de aquí la definición de R_3 como sigue

$$R_3 = \hat{x}\hat{y}\psi(x, y) = \hat{a}\{(\Sigma x, y) \cdot \psi(x, y) \cdot a = ((x), (x, y))\}$$

De modo que para todo otro par z,w

$$< x, y > = < z, w >$$

implica que $x = z$ e $y = w$

De esta ley fundamental de los pares ordenados se deriva que

$$x\,r\,y = \hat{z}\hat{w}\{z = x \cdot w = y\}$$

o, usando la anterior notación

$$x\,r\,y = < z, w > \in \{< x, y > : Fxy\} \equiv Fzw$$

donde $\{< x,y > : Fxy\}$ denota la clase de todos los pares ordenados $< x,y >$ tales que satisfacen la función Fxy, o, lo que es lo mismo, tales que $< x,y > \in F$[23].

Según esta interpretación, xry significa que x e y están emparejados, y que ambos forman un miembro de r, donde r se toma como una propiedad o, en extensión, como un conjunto o clase.

2.2. El álgebra $R_{[AC]}$

Una estructura algebraica del tipo R satisface el conjunto de axiomas [A1-A5] con r, s, t, como variables, $\hat{0}$ y $\hat{1}$ (relaciones *nula* y *universal,* respectivamente) como constantes, y $\hat{+}$, $\hat{\cdot}$, $\hat{-}$, como operadores. Así formulado, una estructura del tipo R se dice que satisface un conjunto de axiomas [Â1-Â5], que permite derivar como teoremas:

T1. $r \hat{+} s = s$

T2. $r \hat{\cdot} s = r$

T3. $r \hat{\cdot} r = r$

T4. $r \hat{+} r = r$

T5. $\bar{\bar{r}} = r$

T6. $(\hat{\bar{r}} \hat{\cdot} \hat{\bar{s}}) = r \hat{+} s$

T7. $r \hat{\cdot} s = r$

T8. $r \hat{+} (r \hat{\cdot} s) = r$
T9. $r \hat{\cdot} (r \hat{+} s) = r$
T10. $\widehat{(r \hat{\cdot} s)} = \hat{\bar{r}} \hat{+} \hat{\bar{s}}$
T11. $r \hat{\cdot} \hat{0} = \hat{0}$
T12. $r \hat{+} \hat{1} = \hat{1}$
T13. $\hat{0} = \hat{\bar{1}}$
T14. $\hat{1} = \hat{\bar{0}}$ [24]

2.2.1. El cálculo $R_{[AC]}$ para R_l

Para operar con R_l en su acepción R^*_l necesitamos definir ciertas clases de operaciones sobre conjuntos: sea X e Y cualquier conjunto contenido en un universo U, y sea r y s dos relaciones tales que

$$X = D(r) \qquad e \qquad Y = D(s)$$

sobre estos conjuntos podemos ahora establecer las siguientes *operaciones relativas*

(1) $D(r \hat{+} s)$[25]
(2) $D(r \hat{\cdot} s)$[26]
(3) $D(\hat{\bar{r}})$[27]

La clase de los l-o-s es claramente el dominio de su unión, y de manera análoga la clase de los l-y-s es el dominio del producto de la relación «l» y «s». Por último, la clase de los no-l es el dominio del complemento absoluto de la relación «l», que es un relativo[28].

No obstante, necesitamos consideraciones previas para poner en funcionamiento estas operaciones sobre relativos: respecto a la *suma lógica relativa*, ésta coincide con la *suma lógica absoluta* (entre clases), en efecto si hay alguien del cual es conocido que x bien lo ama o bien lo sirve, entonces es también conocido que bien hay alguien al cual x ama o hay alguien al cual x sirve, y a la inversa. Respecto al *producto lógico relativo*, éste implica el producto absoluto, en efecto, si hay alguien al cual x ama y sirve a la vez, entonces hay alguien al cual ama y también alguien al cual sirve. Y, respecto al *complemento relativo*, éste está implicado en el complemento absoluto, en efecto, si x no es un l, entonces no ama a nadie, de aquí que (asumiendo un universo nulo) haya alguien que no ama, siendo así un no-l .

El problema de este tipo de «operaciones» sobre R^*_l es que no son operaciones siempre válidas (cfr. nota 28), ya que, es posible por ejemplo, que ocurra

$$D(r) = X = D(p) \qquad y \qquad D(s) = Y = D(q)$$

donde

$$r \cdot s \neq \hat{0} \qquad y \qquad p \cdot q = \hat{0}$$

Necesitamos establecer, por consiguiente, algunas restricciones para el producto y complemento. Ambas operaciones relativas sobre los conjuntos X e Y y

X, respectivamente, dependen de qué relaciones X,Y sean tomadas como dominio de éstas; una vez fijada esta relación, para cada uno de los conjuntos X e Y puede formularse una operación de producto relativo diferente para cada dos relaciones r y s tales que X es el dominio de r, e Y es el dominio de s. Y para cada distinta relación r, donde X es su dominio, puede formularse una operación de complementación relativa distinta y única.

Así definidas ambas operaciones, podemos simbolizarlas

(2) $/_{rs}(X, Y) = D(r \hat{\cdot} s)$[29]

(3) $C_r(X) = D(\hat{\bar{r}})$[30]

No obstante, (2)-(3) no son satisfactorios como definición de operaciones relativas. Si las operaciones relativas son indizadas, entonces una operación relativa sobre cualquier conjunto debe ser definida por algún índice. Así, por ejemplo, $C_r(X)$ debe ser definida igual cuando $X \neq D(r)$ –un requerimiento no satisfecho por (3)–. Sin embargo, es posible extender (2)-(3) de manera tal que cualquier operación relativa se defina para algún conjunto/s, con respecto a alguna operación/es. Además, esto se puede hacer de modo que (2)-(3) no quede invalidado. Ambos requerimientos son satisfechos a través de la siguiente operación: dada una clase X contenida en un universo U, la enorme relación con dominio X es el producto cartesiano XxU, que abreviamos con la notación X^*[31],

(2) $/_{rs}(\bar{X}, Y) = D((r \hat{\cdot} S^*) \hat{\cdot} (S \hat{\cdot} Y^*))$

(3) $C_r(X) = D((r \hat{\cdot} X^*))$[32]

que simplificadas quedarían

(2) $/_{rs}(X, Y) = D(r \hat{\cdot} s) \hat{\cdot} X \hat{\cdot} Y$

(3) $C_r(X) = D(\hat{\bar{r}}) \hat{+} \hat{\bar{X}}$

Resulta, ahora, fácil probar que si

$$X = D(r) \qquad \text{e} \qquad Y = D(s)$$

entonces

$$/_{rs}(X, Y) = D(r \hat{\cdot} s)$$

y que

$$/_{rs}(X, Y) \subseteq X \hat{\cdot} Y$$

Asimismo, si

$$X = D(r)$$

entonces

$$C_r(X) = D(\hat{\bar{r}})$$

y

$$\hat{\bar{X}} \subseteq C_r(X)$$ [33]

Otro caso muy distinto es definir las operaciones para R_1** en donde

(1) $r \hat{+} s = || r_{ij} || + || s_{ij} || = || r_{ij} + s_{ij} ||$[34]

(2) $r \hat{\cdot} s = || r_{ij} || \cdot || s_{ij} || = || r_{ij}\ s_{ij} ||$[35]

(3) $\hat{\bar{r}} = || \bar{r}_{ij} ||$ donde $\bar{r}_{ij} = 1 - r_{ij}$[36]

(4) $\hat{O} = || b_{ij} ||$ donde $b_{ij} = 0$ para todo i,j [37]

(5) $\hat{1} = || b_{ij} ||$ donde $b_{ij} = 1$ para todo i,j[38]

y de las cuales es fácil probar que se deriva el conjunto [Â1- Â5][39] y que forman, por consiguiente una auténtica estructura algebráica.

2.2.2. El cálculo $R_{[AC]}$ para R_2

Las operaciones para R_2 se definen como sigue:

(1) $r \hat{+} s = \hat{x}\, \hat{y}\, (\,xry \vee xsy\,)$
(2) $r \hat{\cdot} s = \hat{x}\, \hat{y}\, (xry \ \&\ xsy)$
(3) $\hat{\bar{r}} = \hat{x}\, \hat{y}\, (\neg\, (\,xry\,)\,)$
(4) $\hat{0} = \hat{x}\, \hat{y}\, (\,x \neq x \ \&\ y \neq y\,)$
(5) $\hat{1} = \hat{x}\, \hat{y}\, (\,x = x \ \&\ y = y\,)$[40]

de estas definiciones se deriva, igualmente, el conjunto [Â1- Â5][41].

2.2.3. El cálculo $R_{[AC]}$ para R_3

La definición de las operaciones para R_3 es análoga a la de las clases. En efecto:

(1) $r + s = \{ \langle x , y \rangle : \langle x , y \rangle \in r \vee \langle x , y \rangle \in s \}$
(2) $r \cdot s = \{ \langle x , y \rangle : \langle x , y \rangle \in r \ \&\ \langle x , y \rangle \in s \}$
(3) $\bar{r} = \{ \langle x , y \rangle : \langle x , y \rangle \notin r \}$
(4) $\hat{0} = \{ \langle x , y \rangle : x \neq x \ \&\ y \neq y \}$
(5) $\hat{1} = \{ \langle x , y \rangle : x = x \ \&\ y = y \}$

que satisface [Â1-Â5], dado que satisface, en sentido estricto, [A1-A5] (cfr. 4.2.).

3. Extensión de $R_{[AC]}$

Considero una *extensión de $R_{[AC]}$, esto es, un álgebra de relaciones* [AC], aquel sistema algebráico compuesto por $R_{[AC]}$ con un operador binario «;», un operador unitario « ˘ », y un elemento identidad «I»[43]. Dicho con mayor precisión: un [AR] es una 9-tupla del tipo $\mathcal{U} = \langle R , \hat{+} , \hat{\cdot} , \hat{-} , \hat{0} , \hat{1} , ; , \breve{} , I \rangle$

3.1. El álgebra [AR]

Un sistema del tipo $\mathcal{U}$ satisface el siguiente conjunto de axiomas:

B1. $\langle R, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{-}, \hat{0}, \hat{1} \rangle$ es un $R_{[AC]}$

B2. $(r ; s) ; t = r; (s ; t)$

B3. $(r \hat{+} s) ; t = r ; t \hat{+} s ; t$

B4. $r ; I = r$

B5. $r^{\cup\cup} = r$

B6. $(r \hat{+} s)^{\cup} = r^{\cup} \hat{+} s$

B7. $(r ; s)^{\cup} = s^{\cup} ; r^{\cup}$

B8. $r^{\cup} ; (\overline{r ; s}) \hat{+} \bar{s} = \bar{s}$

B9. $r ; s \hat{\cdot} t^{\cup} = \hat{0} \longrightarrow s ; t \hat{\cdot} r^{\cup} = \hat{0}$

B10. $r \neq \hat{0} \longrightarrow \hat{1} ; (r ; \hat{1}) = \hat{1}$[44]

Teniendo en cuenta que

$$I^{\cup} = I^{\cup} ; I = I^{\cup} ; I^{\cup\cup} = (I^{\cup} ; I)^{\cup} = I^{\cup\cup} = I$$

por B4, B5 y B7. También usando los mismos axiomas se obtiene

$$I ; r = (r^{\cup} ; I^{\cup})^{\cup} = (r^{\cup} ; I)^{\cup} = r^{\cup\cup} = r$$

Un [AR] está formada, pues, por el sistema de axiomas [B1-B10] y la totalidad de los teoremas que de ellos se derivan[45].

Sistemas derivados de [B1-B10] pueden formarse eliminando los operadores unitarios "$\cup$" (i) y "$-$" (ii).

(i) Sea $\langle R, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{-}, \hat{0}, \hat{1}, x, I \rangle$ un [AR] que satisface los siguientes axiomas:

C1. $\langle R, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{-}, \hat{0}, \hat{1} \rangle$ es un $R_{[AC]}$

C2. $(r \times s) \times t = s \times ((r \times I) \times t)$

C3. $(r \hat{+} s) \times t = r \times t \hat{+} s \times t$

C4. $(r \times I) \times I = r$

C5. $(r \times I) \times (\overline{r \times s}) \hat{+} \bar{s} = \bar{s}$

En [C1-C5] se elimina «$\cup$» a través de la operación «x», donde

$$r \times s =_{df} r^{\cup} ; s$$

C1 se sigue inmediatamente de B1. Para C2, se tiene que $r \times I = r^{\cup} ; I = r^{\cup}$, por B4, obtenible entonces por B7 y B2. C3 se sigue de B6 y B3. C4 es una traslación de B5, y C5 es una traslación de $(r^{\cup}, I)^{\cup} ; (\overline{r^{\cup} ; s}) \hat{+} \bar{s} = s$, que se sigue de B4, B5, y B8.

(ii) Sea $\langle R, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{-}, \hat{0}, \hat{1}, x, I \rangle$ un [AR] que satisface los axiomas:

D1. $\langle R, \hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{-}, \hat{0}, \hat{1} \rangle$ es un $R_{[AC]}$

D2. $((r : s) : t) = (r^{\cup} : t) : s$

D3. $(r \hat{+} s) : t = r : t \hat{+} s : t$

D4. $r^{\cup} : (r : s) \hat{+} s = s$

En [D1-D4] queda eliminado «-» a través de la operación «:», donde

$$r : s =_{df} r^{\cup} ; \bar{s}$$

Entonces, siendo $I : r$, $\bar{r}$ y $r : \bar{I}$, $r^{\cup}$, $I : r = I^{\cup} ; \bar{r} = I ; \bar{r} = \bar{r}$ y $r : \bar{I} = r^{\cup} ; \bar{\bar{I}} = r^{\cup}$; $I = \underline{r}^{\cup}$. D1 se sigue inmediatamente de B1. D2 es una traslación de $((r^{\cup} ; \bar{s})^{\cup} ; \bar{t})^{\cup} = (r^{\cup\bar{\cup}} ; \bar{t})^{\cup} ; \bar{s}$ a través de B7, B5 y B2. D3 es una traslación de $(r \hat{+} s)^{\bar{\cup}} ; \bar{t} = r^{\cup} ; \bar{t} \hat{+} s^{\cup} ; \bar{t}$, que se sigue de B6 y B3. Y D4 es una traslación de $r^{\cup\cup} ; (r^{\cup} ; \bar{s}) \hat{+} s = s$, que es una consecuencia de B8[46].

3.1.1. El cálculo [AR] para R_l

Para probar la aplicación de este cálculo a R_l (en sus dos acepciones), basta definir los operadores «;», «$^{\cup}$», y el elemento identidad «I».

Sin entrar en muchos detalles, definimos los operadores para R^*_l como sigue:

(6) $D(r ; s)$[47]

(7) $D(r^{\cup})$[48]

Siguiendo las consideraciones anteriores (cfr. 2.2.1.), respecto a la operación «;», se observa que si x es un l de un s, entonces es aún un l del producto de dos relativos (dados en un cierto orden), esto es, está contenido en el primer relativo. Y respecto a la operación «$^{\cup}$», se observa que no hay ninguna relación lógica fija entre un relativo y su conversa. La conversa de la clase de los l es la clase de los amados y la conversa de este relativo es, de nuevo, la clase de los l.

Y siguiendo las restricciones antes citadas, las operaciones «;» y «$^{\cup}$» se reformulan del siguiente modo:

(6) $M_{rs}(X,Y) = D(r ; s)$[49]

(7) $K_r(X) = D(r^{\cup})$[50]

Pero dado que contamos con X^*[51] la definición de ambos operadores puede quedar del siguiente modo:

(6) $M_{rs}(X,Y) = D((r \hat{\cdot} X^*) ; (s \hat{\cdot} Y^*))$

(7) $K_r(X) = D((r \hat{\cdot} X^*)^{\cup})$

que simplificadas resultarían

(6) $M_{rs}(X,Y) = D(r ; (s \hat{\cdot} Y^*)) \hat{\cdot} X$

(7) $K_r(X) = D(r^{\cup} \hat{\cdot} (X^*)^{\cup})$

Por lo que es fácil probar que si

$$X = D(r) \qquad \text{e} \qquad Y = D(s)$$

entonces

$$M_{rs}(X,Y) = D(r\ ;\ s)$$

y que

$$M_{rs}(X,Y) \subseteq X$$

Asimismo, si

$$X = D(r)$$

entonces

$$K_r(X) = D(r^{\cup})$$

y

$$K_{r^{\cup}}(K_r(X)) = X$$ [52]

Al igual que sucedía en $R_{[AC]}$, la definición, ahora, de los nuevos operadores, y del elemento identidad, es fundamentalmente distinta para $R^{**}{}_1$. En efecto:

(6) $r\ ;\ s = \|\ r_{ij}\ \|\ ;\ \|\ s_{ij}\ \| = \|\ r_{ia}\ s_{aj}\ \|$ [53]

donde $r_{ia}s_{aj} = \sum_{k=1}^{n} r_{ik}s_{kj} = r_{i1}s_{1j} + r_{i2}s_{2j} + \ldots + r_{in}s_{nj}$ [54]

(7) $r^{\cup} = \|\ \breve{y}_{ij}\ \|$ [55]

donde $\breve{y}_{ij} = y_{ji}$

(8) $I = \|\ b_{ij}\ \|$ [56]

donde $b_{ij} = 1$ cuando $i = j$, y $b_{ij} = O$ cuando $i \neq j$, satisfacen el conjunto [B1-B10][57].

3.1.2. El cálculo [AR] para R_2

Los operadores «;», «∪» y el elemento «I» se definen para R_2 del siguiente modo:

(6) $r\ ;\ s = \hat{x}\,\hat{y}\ \{\ (\ \Sigma\ z\ )\ (\ x\ r\ z\ \&\ z\ s\ y\ )\ \}$

(7) $r^{\cup} = \hat{x}\,\hat{y}\ (\ y\ r\ x\ )$

(8) $I = \hat{x}\,\hat{y}\ (\ x = y\ )$ [58]

que satisfacen, igualmente, el conjunto [B1-B10].

3.1.3. El cálculo [AR] para R_3

Para R_3 estos operadores quedan definidos:

(6) $r\,;s = \{\langle x, y\rangle : (\Sigma z)(\langle x, z\rangle \in r \;\&\; \langle z, y\rangle \in s)\}$

(7) $r^{\cup} = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in r\}$

(8) $I = \{\langle x, y\rangle : x = y\}$

que satisfacen, asimismo, el conjunto [B1-B10]

3.2. Representación de [AR]

Podemos considerar el álgebra [AR] como un conjunto de postulados derivados de un cálculo de relaciones binarias [R][59], bajo la interpretación de la definición de R^{**}_1 en los términos

$\Sigma i\ \Sigma j\ ^{(r)}\ ij$

y la axiomatización de las definiciones de $\hat{+}, \hat{\cdot}, \hat{-}$, $\hat{0}$, $\hat{1}$, ;, $^{\cup}$, I, para todo $R_{1,2,3}$.

Eliminando los coeficientes numéricos de R^{**}_1, e interpretando los símbolos Σ y Π como los cuantificadores existencial y universal[60], los coeficientes $(r)_{ij}$[61] juegan el papel de verdaderos predicados[62], sobre los que se establecen los axiomas contenidos en el cálculo [R], a saber:

R1. $\Pi x\, \Pi y\, [\, x\, r \hat{+} s\, y \longleftrightarrow (x\, r\, y \vee x\, s\, y)\,]$

R2. $\Pi x\, \Pi y\, [\, x\, r \hat{\cdot} s\, y \longleftrightarrow (x\, r\, y \;\&\; x\, s\, y)\,]$

R3. $\Pi x\, \Pi y\, [\, \bar{r}\, x\, y \longleftrightarrow (\neg\, x\, r\, y)\,]$

R4. $\Pi x\, \Pi y\, \neg\, x\, \hat{0}\, y$

R5. $\Pi x\, \Pi y\, x\, \hat{1}\, y$

R6. $\Pi x\, \Pi y\, [\, x\, r\, ;\, s\, y \longleftrightarrow \Sigma z\, (x\, r\, z \;\&\; z\, s\, y)\,]$

R7. $\Pi x\, \Pi y\, [\, \check{x}\, r\, y \longleftrightarrow y\, r\, x\,]$

R8. $\Pi x\, x\, I\, x$

R9. $\Pi x\, \Pi y\, \Pi z\, [\, (x\, r\, y \;\&\; y\, I\, z) \longrightarrow x\, r\, z\,]$

R10. $r = s \longleftrightarrow \Pi x\, \Pi y\, (x\, r\, y \overline{\longleftrightarrow} x\, s\, y)$[63]

De [R1-R10][64] puede probarse que se derivan como teoremas el conjunto [B1-B10], por lo que un conjunto completo de axiomas como [R1-R10] permite caracterizar efectivamente todas las [AR] abstractas, mientras que un conjunto de axiomas como [B1- B10] consigue axiomatizar algebráicamente, esto es, con variables algebráicas, el cálculo [R].

Ahora bien, ¿es todo modelo de [R], que satisface [R1-R10], *isomorfo* a una clase de relaciones binarias que contiene las relaciones O, 1, I, y cerrado respecto a todas las operaciones que se consideran en el cálculo [R]?[65]. Es decir, ¿es todo [R] isomorfo a un [AR] que satisface [B1- B10]?[66]. Este es el problema metalógico fundamental de la *representación.*

3.2.1. Problemas de representación

Podemos retrotraer la pregunta anterior, acerca de la equivalencia entre [R] y [AR], a la pregunta acerca del isomorfismo entre [AR] y [ARP][67], habida cuenta de que [ARP] supone una axiomatización algebráica de [R]. El problema de la representación se reduce, por consiguiente, a la pregunta de si todos [AR], que satisface [B1-B10], es isomorfo a un [ARP].

La respuesta, como ya anticipara Löwenheim (cfr. nota 66), es fundamentalmente *negativa.* Para probar esta afirmación basta definir, siguiendo a Lyndon[68], ciertas condiciones recursivas C0-C5, que son satisfechas por las [ARP] y que no lo son en su totalidad por [AR]. A través de la construcción de un modelo K finito de un [AR] que satisface [B1-B10] y no cierta condición recursiva C2[69], se llega al siguiente resultado: si bien las [ARP] son modelos de [B1-B10] (cfr. nota 45), no todo modelo de [B1-B10] es un [ARP], esto es, no todo modelo de [B1-B10] es representable; de lo que se deduce que [B1- B10] no caracteriza las [ARP], pues existe un [AR] finita[70] que no es isomorfa a ninguna [ARP][71].

Se deriva de este resultado la escisión de las [AR] en representables/no-representables y la posibilidad de *caracterización,* a través de conjuntos específicos de axiomas algebráicos, de la clase de todas las [AR] que son isomorfas a las [ARP], esto es, de las representables.

3.2.2. Caracterización de [AR]

Una caracterización (o *representación,* en el sentido restringido del término) de un álgebra del tipo $\mathcal{U}$, sobre un conjunto D, es un par $\langle T, \emptyset \rangle$ de donde T es un álgebra concreta de relaciones binarias sobre D, y $\emptyset$ es un isomorfismo de $\mathcal{U}$ en T. En este apartado vamos a mostrar algunas caracterizaciones de las [AR] sobre diversas estructuras algebráicas y geométricas. Estas caracterizaciones de [AR] nos permite ver el cálculo de relaciones desde una perspectiva matemática.

3.2.2.1. [AR] representable sobre grupos

Una representación directa de $\mathcal{U}$ es sobre un grupo. En efecto, considerando las relaciones que satisfacen la condición

$$r \,;\, r^{\cup} = I \;\&\; r^{\cup} \,;\, r = I$$

y los axiomas B2, B4, B5 y B7, es fácil mostrar que se satisface la estructura de grupo[72]. Dicho con otras palabras: un [AR] es *representable sobre un grupo* si es isomorfo a una subálgebra de un àlgebra

$$\mathcal{U}(G) = \langle P(G),\ \hat{\cup},\ \hat{\cap},\ \hat{-},\ o,\ ^{-1},\ \{e\} \rangle$$

llamada *álgebra compleja* de G, y compuesta por todos los subconjuntos de un grupo G, cuyo elemento neutro es e, siendo $\langle P(G), \hat{\cup}, \hat{\cap}, \hat{-} \rangle$ un $R_{[AC]}$ con $\{e\} \in P(G)$ y para todo r,s contenidos en G, r o s es el producto complejo de r y s, y $r^{-1} = \{x^{-1} ; x \in r\}$ es la inversión (satisfaciendo los axiomas de grupo).

Diversas representaciones de [AR] pueden derivarse de la dada sobre grupos, a saber, sobre semigrupos[73] y poligrupoides.

Un *poligrupoide* es una versión polivalente de un grupoide y, en concreto, una 4-tupla $\langle A, *, ^{-1}, I \rangle$ con una operación binaria parcial polivalente * sobre A, con $^{-1}$ sobre A y un elemento $I \subseteq A$, que satisface los siguientes axiomas:

1. $(x * y) * z = x * (y * z)$
2. $x * I = x = I * x$
3. las fórmulas $x \in y * z$, $y \in x * z^{-1}$, $z \in y^{-1} * x$ son equivalentes.

Si aplicamos, ahora, un [AR] sobre un poligrupoide m, obtenemos el sistema

$$\mathcal{U}(m) = \langle P(m), \cup, \cap, *, ^{-1}, I \rangle$$

El álgebra compleja $\mathcal{U}$(m) de un poligrupoide m es un [AR] atómica completa: el axioma B1 es obvio y los axiomas | B2-B10| son extensiones de los axiomas anteriores [1-3] para subconjuntos. Concluimos, por tanto, que toda [AR] es *empotrable* en el álgebra compleja de un poligrupoide[74].

3.2.2.2. [AR] representable sobre geometrías

Podemos representar geométricamente las [AR] tomando las variables de relación como relaciones entre números reales, y considerando un sistema de coordenadas rectangulares en el plano.

Supongamos que toda relación r puede ser representada como un cierto conjunto de puntos en el plano, a saber, el conjunto de todos los puntos (x,y) tales que x está en la relación r con y e inversamente, todo conjunto de puntos en el plano representa una cierta relación, a saber, la relación que actúa entre dos números x e y sii el punto (x,y) pertenece al conjunto.

La fórmula «r = s» es válida en esta representación geométrica sii los conjuntos correspondientes a r y s son idénticos.

Las relaciones $\hat{0}, \hat{1}$, I, son representadas por determinados conjuntos particulares de puntos: "$\hat{0}$", por el conjunto de puntos vacío; "$\hat{1}$", por el plano entero; «I», por la recta en la que la ecuación es «x = y».

A las operaciones sobre relaciones corresponden determinadas operaciones sobre conjuntos de puntos. De este modo, decimos que se satisface para esta representación el álgebra $R_{[AC]}$ y, por tanto, el axioma B1 de [AR]. Para obtener la representación de r^{u} tomamos el conjunto de puntos correspondientes a r y le hacemos rotar 180° (en el espacio tridimensional) alrededor de la recta x = y. Para mostrar, por último, la operación geométrica que corresponde al producto relativo, necesitamos recurrir al espacio tridimensional y añadir al sistema de coordenadas el eje z perpendicular al plano xy. Para representar r;s (en el plano xy) rotamos el conjunto de puntos correspondientes a r 90° alrededor del eje x, llevamos para cada punto del conjunto así obtenido una recta paralela al eje y, y tomamos la unión de todas estas rectas, obteniendo el conjunto cilíndrico de puntos r*. Del mismo modo rotamos el conjunto correspondiente a s 90° alrededor del eje y, trazamos las paralelas al eje x, obteniendo el conjunto cilíndrico de puntos s*. Por último, tomamos la intersección de r* y s* y la proyectamos ortogonalmente sobre el plano xy. La proyección así obtenida constituye la represantación geométrica de r;s[75].

De estas definiciones se deriva | B2-B10 | y, por tanto, junto con las operaciones de $R_{[AC]}$, el conjunto [B1-B10]. En efecto, cojamos, por ejemplo, los axiomas B5 y B10.

B5 corresponde al hecho geométrico inmediatamente intuitivo de que, si tomamos un conjunto cualquiera de puntos y lo hacemos rotar 180° alrededor de la misma recta, el resultado es el conjunto original.

Si consideramos que B10 se obtiene a partir de

$$r ; \hat{1} = \hat{1} \vee \hat{1} ; \bar{r} = \hat{1}$$ [76]

podemos mostrar que $r ; \hat{1}$ o $\hat{1} ; \bar{r}$ es el plano entero. Supongamos que el conjunto que representa $r ; \hat{1}$ no es el plano entero. Como hemos visto, este conjunto es la unión de todas las rectas paralelas al eje y, y que pasan por un punto perteneciente al conjunto que representa r. Si esta unión no coincide con el plano entero, debe existir una recta paralela al eje y que no contenga ningún punto del conjunto que corresponde a r, y que está, pues, exclusivamente compuesto de puntos del conjunto correspondiente a $\bar{r}$. Si para todo punto de esta recta trazamos una paralela al eje x, y tomamos la unión de todas estas paralelas, obtenemos el plano entero. De este modo la relación $\hat{1} ; \bar{r}$ está representada por el plano entero.

Estos ejemplos muestran el grado de vinculación del álgebra [AR] con la geometría, y reflejan la adaptabilidad de [AR] para su representación geométrica, esto es, para ofrecer modelos geométricos. Más aún, dada una geometría determinada [g], es posible derivar de ella un [AR] que satisface los axiomas B1, B2, B3, B4, además de los axiomas:

B11. $r ; s = s ; r$

B12. $r^{\cup} = r$

B13. $I \subset r ; s$ sii $r \cdot s \neq 0$

siempre que se le asocie una geometría [g] definida como un conjunto de *puntos*, junto con ciertos subconjuntos llamados *líneas*. [g] cumple los siguientes axiomas:

1. Existe, al menos, una línea y cada línea contiene al menos cuatro puntos.
2. Cada par de puntos distintos p y q están en una única línea $\overline{pq}$.
3. Si p, q y r son puntos distintos, y una línea corta a $\overline{pq}$ y $\overline{pr}$ en distintos puntos, entonces corta a pr.

Ahora, si p, q, r ..., denotan puntos y elementos del conjunto g, la estructura de $\mathcal{U}(g) = \langle g, \cup \cap - \rangle$ que representa el álgebra de todos los subconjuntos del conjunto de todos los puntos de [g] con un elemento de I que no es un punto de [g], y que pertenece al conjunto g. Si definimos una operación «;» sobre $\mathcal{U}(g)$ como sigue

$$I ; I = I,\ I ; p = p ; I = p\ ,\ p ; p = p + 1$$

para todo $p \in g$, verificamos que $\mathcal{U}(g)$ es un álgebra derivada de la geometría [g][77].

3.2.3. Propiedades de las [AR] representables

Existen determinadas propiedades características de las [AR] representables. Algunas de estas propiedades están formuladas en términos de resultados.

Si simbolizamos por h la clase de todas las [AR] *representables integrales,* y por w la clase de todas las [AR] *representables sobre grupos,* siendo p la clase de todas las [AR] *permutacionales* y k la clase de todas las [AR] que satisfacen los axiomas B11, B12, y B13, podemos establecer los siguientes resultados:

(1) $w \subseteq h$[78]

(2) $w \subseteq p \subseteq h$[79]

(3) si $d \geq 2$, entonces cada representación de $\mathscr{U}(\dot{g})$ es equivalente a una representación sobre un grupo[80].

(4) para todo k, ni la clase de todas las [AR] representables en k, ni la clase de todas las álgebras contenidas en k representables sobre un grupo, son finitamente axiomatizables. En particular, la clase de todas las [AR] representables, así como la clase de todas las [AR] representables sobre grupos, resultan no ser finitamente axiomatizables[81]. Es decir, la clase k, tal que $w \subseteq k \subseteq h$, no es finitamente axiomatizable.

(5) si k contiene a p, entonces w no es finitamente axiomatizable respecto a k[82].

(6) w no es finitamente axiomatizable relativamente a h[83].

4. Conclusiones

Hemos visto como el isomorfismo que se establece entre [AC] y [C] no es satisfecho en las extensiones de [AC], esto es, por [AR]. En efecto, si tomamos como modelo en paralelo las relaciones entre las álgebras [C] y [AC], por un lado, y [ARP] y [AR], por otro, donde [AR] hace el papel de [AC] y [ARP] el de [C] en la teoría lógica de relaciones, vemos que no se establece el isomorfismo entre [AR] y [ARP] que se establecía entre [C] y [AC]. Vimos, así pues, como las [ARP] eran modelos de las [AR] pero que no todo modelo de [AR] era un [ARP][84] y que, por tanto, las [AR] no caracterizaban las [ARP][85]. Sin embargo, una propiedad de las álgebras [AR] era la de poder ser *caracterizadas* a través de conjuntos de ecuaciones, sí y sólo sí serán representables, esto es, isomorfas a las [ARP]. Una caracterización, que le era especialmente adecuada entre otras, fue la caracterización sobre un grupo, la cual permite mostrar claramente la auténtica estructura del álgebra [AR] que es, en realidad, una cierta unión del álgebra [AC] y la teoría de grupos, es decir, dos de las más abstractas y potentes estructuras de la matemática.

Esta constitución de [AR] hace de ella el instrumento más potente de que disponemos para fundamentar la matemática, en efecto, en su interior puede describirse la estructura de diversas disciplinas matemáticas (siempre que estén suficientemente desarrolladas) y definirse el elemento central de toda la matemática, a saber, las *operaciones* (a través del análisis de los tipos de relaciones que las componen). Este poder de análisis del álgebra [AR] muestra, pues, indirectamente que la matemática está compuesta en realidad de relaciones y de funciones, que su estructura y su forma están determinadas por las operaciones de las cuales forma parte.

NOTAS

[1] Siendo: a, b, c, ..., elementos de un conjunto C; «+», la adición lógica en C; «.», el producto lógico en C; «-», la relación de complemento en C; «O», la clase nula; «1», la clase universal (en C).
[2] Que son [A1-A5], con A,B,C,... como elementos y con Ø, U.
[3] Véase una prueba análoga en A. TARSKI: «Sur les fondements de l'algèbre de Boole», en *Logique, Semantique, Metamathematique,* 2 vols., París, Armand Colin, tr. francesa de G. Kalinoswki et al., 1974, t.2, pp. 61-67.
[4] Utilizamos de este modo la notación R como base para definir, usando subíndices, las diferentes concepciones de relación $R_{1,2,3}$, entendiendo que para todo r, s, t, ... pertenecen bien a $R_{1,2\ \acute{o}\ 3}$. Lo que les dota de las características del conjunto al que pertenecen, así, p.e., si r, s, t, ... $\in R_1$ se entenderá que r_1, s_1, t_1,... son los elementos considerados.
[5] Cfr. C.S. PEIRCE: «Description of a notation for the logic of relatives, resulting from an amplification of the conceptions of Boole's calculus of logic», en *Collected Papers* (CP), Cambridge (Mass.), Harvard University Press, 1974, vol. III, p.35.
[6] Cfr. C. BRINK: «The algebra of relatives», *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 20, n.4, 1979, pp. 900-901.
[7] Cfr. C.S. PEIRCE: *op. cit.,* p.75.
[8] Cfr. C.S. PEIRCE: «On the algebra of logic», CP, p.140.
[9] El procedimiento matricial es usado por Peirce sólo a título de ilustración, sin intención de utilizarlo para un desarrollo efectivo del cálculo de relaciones como haremos aquí.
[10] Según esto $(r)_{ij}$ representaría un operador de selección, que eligiría en IxJ los pares $\langle i, j \rangle$ de elementos que satisfacen la relación, dando así su grafo.
[11] Cfr. I.M. COPILOWISH: «Matrix development of the calculus of relations». *The Journal of Symbolic Logic,* 13, n.4, 1.948, p.197.
[12] Cfr. B. RUSSELL: «La lógica de las relaciones, con algunas aplicaciones a la teoría de las series», en *Lógica y Conocimiento,* tr. castellana de J. Muguerza, Madrid, Taurus, 1966, pp.5-6.
[13] Esta definición de relación se debe a Frege. Cfr. G. FREGE: «Function and concept», en P. Geach-M. Black (eds.): *Translations from the philosophical writings of Gottlob Frege,* Oxford, Basic Blackwell, 1977, pp. 38-39.
[14] Que abreviada resulta xry y que sustituye esta engorrosa notación. Cfr. A.N. WHITEHEAD-B. RUSSELL: *Principia Mathematica,* 3 vols.,, Cambridge, Cambridge U.P. (2ª ed.), vol. I, pp.26 y 200-201.
[15] Cfr. *Principia Mathematica,* p.40.
[16] $x\{\hat{x}\,\hat{y}\,\psi(x, y)\} \equiv \psi(x, y)$ establece, entonces que dos términos tienen una relación dada cuando y sólo cuando satisfacen su función de definición. Esto muestra que x tiene con y la relación determinada por ψ, cuando y sólo cuando x e y satisfagan ψ (x,y).
[17] Decimos que dos funciones φ (x,y) y ψ (x,y) son «formalmente equivalentes» cuando $\varphi(x,y) \equiv_{x,y} \psi(x,y)$, es decir, cuando ambas se satisfacen con el mismo conjunto de argumentos. Cfr. *Principia Mathematica,* pp. 56 y 167.
[18] Cfr. *Ibid.* Este axioma asegura explícitamente, que una función establece una relación efectiva entre x e y (por ello a este axioma también se le llama el *axioma de las relaciones).*
[19] En efecto, como reconocen los autores de *Principia Mathematica* (en su 2ª ed.), las relaciones pueden ser tratadas como clases de pares ordenados: «es decir el par (x,y) debe ser uno de la clase de pares que constituye la relación r si x tiene la relación r con y (...). Si consideramos una relación como una clase de pares, la relación determinada por $\overline{\varphi}$ (x,y) es la clase de los pares (x,y) para los cuales $\overline{\varphi}$ (x,y) es verdadera». *Principia Mathematica,* p.26. No obstante, esta definición de relación como pares ordenados no se introduce en el tratamiento simbólico de *Principia Mathematica.*
[20] Pues, como los propios autores de *Principia* reconocen, «que el axioma de reducibilidad sea autoevidente es una proposición que difícilmente pueda sostenerse». *Principia Mathematica,* p.59.
[21] Se evita, así, el uso del *axioma de reducibilidad,* que asegura la existencia de la extensión de una función proposicional de dos variables.
[22] De este modo podemos determinar, para cualquier par de valores x,y, un orden riguroso que denotaremos a través de la notación $\langle x, y \rangle$ y que se define $\langle x, y \rangle = ((x), (xy))$ como una cierta clase de clases compuesta por la clase unitaria (x) y el par no ordenado (x,y). Cfr. N. WIENER: «A simplification of the logic of relations», en J.V. Heijenoort (ed.): *From Frege to Gödel. A source book in mathematical logic, 1879-1931,* Cambridge (Mass), Harvard U.P., 1967 p.225. Cfr. C. KURATOWSKI: «Sur la notation de l'ordre dans la théorie des ensembles», *Fundamenta Mathematicae,* 2 1921, p.171.

[23] Las variables de relación r, s, t, etc., representan relaciones abstractas de la forma $\{ \langle x , y \rangle : F x y \}$ que es la reformulación de la definición de relación como $\hat{x}\, \hat{y}\, \varphi\ (x , y)$.
[24] Cfr. *Principia Mathematica,* pp. 213-215 y 228-230. T1 y T2 pueden ser interpretados como que postulan la inclusión r c s.
[25] Tomando los relativos peirceanos l = enamorado y s = sirviente tenemos aquí la *suma lógica relativa* de X e Y, esto es, x es un l-o-s si hay alguien del cual puede decirse que x bien lo ama o bien lo sirve.
[26] O *producto lógico relativo* de X e Y, esto es, x es un l-y-s sii hay alguien al cual x ama y sirve a la vez.
[27] O *complemento relativo* de X, esto es, x es un no-l sii hay alguien al cual x no ama.
[28] La clase de los «l» es un ejemplo claro de relativo: x es un l sii hay alguien al cual x ama. Un individuo (o una clase) es llamado un relativo dependiendo de si es considerado o no desde el punto de vista de su relación con alguna cosa más (o relación de sus elementos hacia otros individuos). Se admiten, por tanto, todos los conjuntos como relativos, ya que todo conjunto es el dominio de alguna relación. Pero dado además, que cualquier conjunto es el dominio de un número de distintas relaciones, todo conjunto puede ser considerado como un relativo por diferentes modos (y esto es, claramente, un problema).
[29] O *producto lógico relativo* de X e Y con respecto a r y s.
[30] O *complemento relativo* de X con respecto a r. Considerando el conjunto potencia P(U), las relaciones sobre U son subconjuntos de V = UxU de elementos de P(V) las operaciones absolutas quedan definidas sobre los elementos de P(U) como ciertas operaciones relativas, las cuales son indizadas por elementos de P(V).
[31] Que satisface

P1. $(X \hat{\cdot} Y)^* = X^* \hat{\cdot} Y^*$

P2. $(\bar{x})^* = (\overline{x^*})$

P3. $D(X^*) = X$

P4. $r \subseteq (D (r))^*$

P5. $D (r \hat{\cdot} x^*) = D (r) \hat{\cdot} X$

[32] para todo conjunto $X \subseteq U$, X^* es una relación contenida en V; $r \hat{\cdot} X^*$ se define para todo $r \subseteq V$. Las operaciones $\hat{\cdot}$, $\hat{-}$, se definen para tales relaciones, el resultado es, de nuevo, una relación contenida en V y su dominio es un conjunto contenido en U. Luego, toda operación relativa queda definida y es una operacion de valor único para todo conjunto contenido en U y toda relación contenida en V.
[33] Aún pudiendo definir las constantes $\hat{0}$ y $\hat{1}$, a través de las operaciones y mapear las relaciones sobre sus dominios, el conjunto de *operaciones relativas* no satisfacen los postulados [Â1-Â5]; por lo que no puede afirmarse que posean la estructura de un verdadero álgebra. Cfr. C. BRINK: *op. cit.,* pp. 903-907.
[34] La relación de i con j, tal que i mantiene la relación r con j, o i mantiene la relación s con j, que representa esta matriz, es la *suma lógica* (relacional) de r con s.
[35] Esta matriz representa la relación de i con j, tal que i mantiene la relación r con j, e i mantiene la relación s con j.
[36] Esta matriz representa la relación entre i y j, tal que i no mantiene la relación r con j.
[37] La matriz O representa la *relación nula,* que es aquella relación que no es válida entre cualesquiera dos términos.
[38] La matriz 1 representa la *relación universal,* que es aquella relación que es válida entre cualquier par de términos.
[39] Cfr. C.S. PEIRCE: «Description ...», CP, pp. 47-54. Cfr. I.M. COPILOWISH: *op. cit.,* pp.197-200. Las matrices así definidas sobre el álgebra [AC] obedecen algunas de las leyes elementales de las matrices ordinarias, pero no todas, en efecto para cualquier n, las matrices cuadradas de orden n sobre [AC] son, ellas mismas, elementos de este álgebra respecto a las operaciones "$\hat{+}$" y "$\hat{\cdot}$".
[40] Cfr. *Principia Mathematica,* p.213. Cfr. R. FEYS: «A simple notation for relations», *Methodos,* 1, 1949, pp. 82-86.
[41] Cfr. *Principia Mathematica,* pp. 213-215, 228.
[42] Utilizamos aquí las mismas operaciones para clases, dado que tomamos las relaciones como pares ordenados $\langle x , y \rangle$ que han sido definidos como una clase de clases. No obstante, se distingue notacionalmente entre 0,1 y $\hat{0}$,$\hat{1}$, precisamente porque no se distingue entre la notación de operaciones sobre clases y sobre relaciones.
[43] Cfr. B. JONSSON-A.TARSKI: «Representation problems for relation algebras», *Bulletin American Mathematical Society,* 54, 1948, abst. 89. Estos operadores se definen más adelante para $R_{1,2,3}$. No introducimos un cuarto operador unitario «*», llamado *ancestral,* dado que no es definible en un [AR] abstracta. Para un estudio de álgebra con este operador cfr. O.ORE: «Theory of equivalence relations», *Duke Mathematical Journal,* 9, 1942, pp. 573-627.

[44] Cfr. A. TARSKI: «Sur le calcul des relations», en *Logique, Semantique, Metamathematique,* ed. cit., t.2, pp. 247-249. Cfr. L. CHIN-A.TARSKI: «Distributive and modular laws in the arithmetic or relation algebras», *University of California Publications* in Mathematicas, 1, 1951, pp. 341- 384.
[45] Denominaremos *álgebra relacional propia* [ARP] a un álgebra de la forma $\langle$ R , $\hat{\cup}$, $\hat{\cap}$, $\hat{-}$, Ø , U, ;, $^{\cup}$, I $\rangle$ donde para algún conjunto D, $\langle$ R , ∪ , ∩ , $\hat{-}$, Ø, U $\rangle$ es un álgebra $R_{[AC]}$ (booleana) de subconjuntos de DxD, I la relación de identidad en términos del conjunto (a,a) ∈ D, ; el producto relativo de r,s contenidos en DxD y $^{\cup}$ la conversa, satisfaciendo [B1-B10] en estos términos. Las [ARP] resultan, así pues, modelos concretos de las [AR] abstractas. Calificaremos de *completa* a toda [AR] cuya $R_{[AC]}$ sea completa; de *simple* si satisface el axioma B10, e *integral* si para todo r,s ∈ R r;s = O implica que r = O o s = O. Por último, diremos que un [AR] es *permutacional* si una de sus representaciones admite un grupo transitivo de automorfismo. Cfr. R. LYNDON: «The representation of relational algebras, *Annals of Mathematics,* 51, n.3, 1950, pp. 707-709.
[46] Cfr. C. BRINK: «Two axiom systems for relation algebras», *Notre Dame Journal of Formal Logic,* 20, n.4, 1979, pp. 909-912.
[47] O *producto relativo* de X e Y, esto es, x es un l de un s, sii hay un y tal que x ama a y e y es un s.
[48] O *conversa* de X, esto es, x es amado sii alguien que ama a x.
[49] O *producto relativo* de X e Y con respecto a r y s.
[50] O *conversa* de X con respecto a r. Si esto no se asume, la conversa de la conversa de un relativo puede no ser, necesariamente, el relativo original.
[51] Que satisface, además de [P1-P5], los postulados

P6. $D\left((X^*)^{\cup} \right) = \mathcal{U}$ siempre que $X \neq \emptyset$

P7. $D\left((r \,\hat{\cdot}\, X^*) ; s \right) = D(r ; s) \,\hat{\cdot}\, X$

[52] Cfr. C. BRINK: «The algebra of relatives, pp. 904-907. La dificultad para definir el elemento «I» para R^*_1 se deriva, como es obvio, de su propia definición. Por esta razón resulta inaplicable el cálculo [AR].
[53] Esta matriz representa la relación que tiene lugar entre i y j, cuando hay un término medio a tal que i tiene la relación r con respecto a a, y a tiene la relación s con respecto a j.
[54] La representación matricial del producto relativo para R_1** supera, con mucho la formulacion que para $R_{2,3}$ pueda darse. En efecto, el producto relativo de r y s es la matriz producto de las matrices que representan a r y s.
[55] Esta matriz representa la relación que j tiene con i, cuando i la tiene con j.
[56] Esta matriz representa la relación de cada objeto consigo mismo.
[57] Y por consiguiente los conjuntos [C1-C5] y [D1-D4].
[58] O dicho en otros términos: xIx. Cfr. *Principia Mathematica,* pp. 239, 256 y 333. Cfr. R. FEYS: *op. cit.,* pp. 87-88.
[59] Como el presentado en D. HILBERT-W ACKERMANN: *Grundzüge der theoretischen logik,* Berlin, Springer Verlag, 1972, pp., 65-111.
[60] Cfr. C.S. PEIRCE: «On the algebra of logic», CP, pp. 152-153, Cfr. C.S. PEIRCE: «The logic of relatives», CP, pp. 206- 207.
[61] Cfr. C.S. PEIRCE: «The critic of arguments», CP, p. 262.
[62] Cfr. C.S. PEIRCE: «The logic of relatives», CP, p. 295.
[63] Cfr. A.TARSKI: *ibid.*
[64] *Con sus reglas de inferencia: la de sustitución y separación; además de las de manipulación de cuantificaciones.*
[65] *Cfr. A.TARSKI: op. cit.,* p. 262.
[66] Se debe a Löwenheim una respuesta parcial a esta pregunta. Löwenheim llama *condensable* a toda fórmula que es trasladable a su representación algebráica, y demuestra que: Teorema 1. *Hay ecuaciones no-condensables, p.e.*

$$\sum_{h,i,j,k,} \hat{\bar{I}}_{hijk} = \hat{0} \text{ o } \hat{1}$$

$$\sum_{h,i,j,k,l} \hat{\bar{I}}_{hijkl} = \hat{0} \text{ o } \hat{1}$$

Cfr. L. LÖWENHEIM: «On possibilities in the calculus of relatives», en J.V. Heijenoort (ed.): *From Frege to Gödel,* ed.cit., pp. 233-234. Se sigue que no todo teorema demostrable en [R1-R10] puede serlo en [B1-B10], aunque sí a la inversa. [R] y [AR] no son, desde luego deductivamente equivalentes.
[67] Esta pregunta es análoga a la que hicimos (cfr. 1.2.) respecto al isomorfismo entre [C] y [AC], sólo que respecto, ahora, a las relaciones binarias.
[68] Cfr. R.LYNDON: *op. cit.,* pp. 710-713.

[69] Véase R. LYNDON: *op. cit.*, pp. 714-715.
[70] El modelo K no-representable.
[71] Cfr. R.LYNDON: op. cit., pp. 715-717.
[72] Donde «;» juega el papel de «o» en la teoría de grupos; “$\smile$”, el papel de «-1» e «I» el de «e».
[73] Véase M. LUBANSKI: «Algebraiczne aspekty teorii relacji», *Studia Philosophiae Christianae*, 11, n.2, 1975, pp. 104-118, abst.
[74] Cfr. S.D. COMER: «A new foundation for the theory of relations», *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 24, n.2, 1983, pp. 183-186.
[75] Cfr. A.TARSKI: *op. cit.*, pp. 251-252.
[76] Cfr. B. JONSSON-A. TARSKI: *op. cit.*, p. 80. Cfr. R. LYNDON: «The representation of relational algebras», p. 708 (nota 1).
[77] Cfr. R. LYNDON: «Relation algebras and proyective geometries», *Michigan Mathematics Journal*, 8, 1961, pp. 22-26.
[78] Esto es, un [AR] representable sobre un grupo es un $\mathcal{U}$ integral.
[79] Cfr. R. McKENZIE: «Representations of integral relation algebras», *Michigan Mathematics Journal*, 17, 1970, p. 208.
[80] Siendo d la dimensión de la geometría [g]. Cfr. R. LYNDON: *op. cit.*, p. 26.
[81] Cfr. D.MONK: «On representable relation algebras», *Michigan Mathematics Journal*, 11, 1964, p. 208.
[82] Cfr. R. McKENZIE: *op. cit.*, p. 282.
[83] Cfr. R. McKENZIE: *op. cit.*, p. 279.
[84] [ARP] representa, como vimos la axiomatización algebráica de [R], a través del conjunto de axiomas [B1-B10], en sus propios términos (ver nota 45).
[85] La razón de que las [AR] no sean representables; no se encuentra en un problema concreto (como en el caso del isomorfismo de [AC] y [C] sino en la posibilidad de obtener modelos de [AR] que no sean representables.