



Universidad de Sevilla
Departamento de Ingeniería Eléctrica

**FILTRADO EN EL DOMINIO ESPACIAL APLICADO AL
DISEÑO DE MÁQUINAS DE IMÁN PERMANENTE**

Tesis Doctoral
por:
Vicente Simón Sempere

Director:
Manuel Burgos Payán

Sevilla, marzo de 2015

A mis padres

A Auxiliadora

Quiero mostrar mi agradecimiento...

...a Manuel Burgos Payán, por ser mi Director de Tesis y por la ayuda que me viene prestando desde mucho antes de serlo,
...a José Ramón Cerquides Bueno, por sus acertados consejos en los aspectos relacionados con el Tratamiento de Señales,
...a mis compañeros de departamento, por darme ánimo y parte de su tiempo,
...a las empresas Hispacold y Macpuarsa, por haberme permitido llevar a la práctica buena parte de los métodos de diseño incluidos en la tesis,
y, por supuesto, mi agradecimiento a la Universidad de Sevilla.

Sevilla, marzo de 2015

El autor

Índice general

	Página
1 Introducción	1
1.1 Antecedentes	1
1.2 Referencias bibliográficas	5
1.3 Objetivo de la tesis	8
1.4 Contenido de la tesis	9
2 Modelado basado en la integral de convolución.	
Introducción	11
2.1 Modelado de la fuerza electromotriz	11
2.1.1 FEM en un conductor	12
2.1.2 FEM en un devanado con inducido liso	21
2.1.3 FEM en un devanado con ranuras	26
2.2 Modelado del par electromagnético	38
2.2.1 Características del par en el dominio espacial	38
2.2.2 Características del par en el dominio frecuencial	43
2.2.3 Características espectrales del par trifásico a partir del par de una fase	45
2.3 Modelado del par de cogging	56
2.4 Validación experimental de los modelos	60
3 Técnicas de filtrado espacial	63
Introducción	63
3.1 Clasificación	64
3.2 Filtrado mediante adición de ceros	64
3.3 Filtrado mediante modificación de ceros existentes	66

3.4	Filtrado mediante conformación de los polos	69
3.4.1	Introducción	69
3.4.2	Método propuesto para la conformación de los polos	70
3.4.3	Aplicación a la FEM	71
3.4.4	Aplicación al par de cogging	73
3.5	Filtrado no selectivo	79
3.5.1	Introducción	79
3.5.2	Fundamentos	80
3.5.3	Metodología	83
3.6	Validación experimental	89
3.6.1	Modificación de la posición de los ceros existentes	89
3.6.2	Conformación de los polos	92
3.5.3	Filtrado no selectivo	94
3.7	Conclusiones	97
3.8	Anexos	98
4	Influencia de las tolerancias de fabricación sobre la FEM y el par de cogging en motores de imanes permanentes.	
	Introducción	101
4.1	Influencia de las tolerancias de fabricación sobre la FEM	102
4.1.1	Análisis matemático	102
4.1.1.1	Modelado de los errores	102
4.1.1.2	Análisis para baja frecuencia	106
4.1.1.3	Comportamiento en alta frecuencia	114
4.1.2	Análisis de resultados y verificación numérica	117
4.1.2.1	Análisis de resultados	117
4.1.2.2	Verificación numérica	118
4.1.3	Procedimiento para la medida de los errores	120
4.1.4	Validación experimental	121

4.1.4.1	Comprobación del error de entrada	121
4.1.4.2	Comprobación para alta frecuencia	123
4.1.4.3	Comprobación de las funciones de distribución	124
4.1.4.4	Otras configuraciones	125
4.2	Influencia de las tolerancias de fabricación	
	Sobre el par de <i>cogging</i>	127
4.2.1	Análisis matemático	127
4.2.2	Comprobación numérica	130
4.2.3	Obtención experimental de m_{2i}	132
4.3	Ejemplo de aplicación al diseño	133
4.4	Conclusiones	135
5	Medida del par de cogging mediante la tensión inducida en motores de imanes permanentes superficiales	
	Introducción	137
5.1	Método propuesto	138
5.2	Verificación Numérica	144
5.3	Procedimiento de medida	148
5.4	Validación experimental	149
5.5	Conclusiones	154
5.6	Apéndices al capítulo 5	155
	5.6.1 Devanado sin ranuras utilizado en la validación	155
	5.6.2 Obtención experimental de la permeancia relativa de ranuras	155
	5.6.3 Estimación del par de cogging a partir de un espectro de FEM incompleto	157
6	Conclusiones y líneas futuras	161
	Bibliografía	165

Índice de figuras

Figura 2.1. Representación espacial (a) y a lo largo del eje z (b) de la FEM inducida en un conductor curvilíneo.	12
Figura 2.2. Obtención de la función $S(\zeta)$ a partir de la geometría del conductor y de los imanes.	15
Figura 2.3. Conformación de la FEM mediante de filtrado espacial.	18
Figura 2.4. Descomposición de la onda de inducción $B(-\alpha)$	19
Figura 2.5. Función $S(\cdot)$ para imanes con distintas configuraciones: (a) imanes y ranuras rectos, (b) imanes con inclinación constante y (c) imanes con inclinación en pasos.	20
Figura 2.6. (a) Devanado con distribución senoidal. y (b) devanado diametral de una ranura por polo y por fase.	22
Figura 2.7. Devanado diametral con dos ranuras por polo y por fase (a) y devanado fraccionario (b).	23
Figura 2.8. Generación de FEM en el devanado en los dominios espacial y frecuencial.	24
Figura 2.9. Generación de la FEM. Representación mediante bloques en cascada.	25
Figura 2.10. Esquema de la figura 2.8 permutando los bloques $D(\alpha)$ y $S(\alpha)$	26
Figura 2.11. Modelo para el análisis de la FEM inducida en una bobina en un estator con ranuras	27
Figura 2.12. Función característica de ranura $G_1(\theta)$ y geometría correspondiente (a) Derivada de $G_1(\theta)$ y espectro correspondiente (b)	32
Figura 2.13. Función característica de ranura para el caso de inducido liso: Función característica de ranura $G_1(\theta)$ y geometría correspondiente (a). Derivada de $G_1(\theta)$ y espectro correspondiente (b).	33

Figura 2.14. Función característica de ranura para el caso de reluctancia infinita en la zona entre dientes: Función característica de ranura $G_1(\theta)$ y geometría correspondiente (a) y derivada de $G_1(\theta)$ y espectro correspondiente (b).	33
Figura 2.15. (a) Función característica de la distribución de los dientes en una bobina $C(\theta)$. (b) Módulo de $C(\omega)$ para un número de ranuras z_b comprendido entre 1 y 5.	34
Figura 2.16. Bobina de paso 3 ranuras e inducido liso. (a) Función característica de ranura. (b) Derivada de la función característica de ranura. (c) Modelo de ranuras. (d) Espectro.	35
Figura 2.17. Bobina de paso 3 ranuras con reluctancia infinita. (a) Función característica de ranura. (b) Derivada de la función característica de ranura. (c) Modelo de ranuras. (d) Espectro.	35
Figura 2.18. Bobina de paso 3 ranuras. Modelo con zonas de transición. (a) Función característica de ranura. (b) Derivada de la función característica de ranura. (c) Modelo de ranuras. (d) Espectro.	36
Figura 2.19. (a) Esquema de la generación de tensión de fase incluyendo el efecto de las ranuras y (b) espectro correspondiente	38
Figura 2.20. Capa de corriente para una bobina de paso tres dientes	41
Figura 2.21. Generación del par motor de una fase como producto de la densidad de corriente por la intensidad de fase incluyendo el efecto de las ranuras.	41
Figura 2.22. Generación del par electromagnético de una fase como producto de la tensión por la intensidad incluyendo el efecto de las ranuras.	41
Figura 2.23. (a) Par motor en el caso de no simetría y (b) modelo con simetría trifásica.	41
Figura 2.24. Modelo espacial de par con simetría trifásica y modelo frecuencial correspondiente	44
Figura 2.25. Espectro de $g_3(\alpha)$	45
Figura 2.26. Cadena de generación de la FEM.	47
Figura 2.27. (a) Configuración de devanado fraccionario de $N_{spp} = 3/4$	49

con 9 ranuras y 4 imanes. (b) Configuración de devanado de paso entero de $N_{spp} = 1$ con 12 ranuras y 4 imanes.

Figura 2.28. Diagrama de coeficientes de las etapas que intervienen en la generación del par para simetría trifásica e intensidad senoidal. 50

Figura 2.29. Diagrama de coeficientes de las etapas que intervienen en la generación del par cuando la FEM contiene armónicos fraccionarios, simetría trifásica e intensidad senoidal. $p = 2$. 52

Figura 2.30. Modelo empleado en el análisis del par de *cogging* 57

Figura 2.31. Diagrama de generación del par de *cogging* en los dominios espacial y frecuencial. 59

Figura 2.32. Espectros de las ondas de posicionado de los imanes y de las ranuras y su efecto sobre el par de *cogging* resultante. 59

Figura 2.33. Rotor del prototipo usado en la validación experimental y principales dimensiones del estator 61

Figura 2.34. Banco de pruebas empleado en la validación experimental 61

Figura 2.35. FEM obtenida de forma experimental y mediante el modelo desarrollado con y sin ranuras. 62

Figura 2.36. Espectro de la FEM obtenida de forma experimental y mediante el modelo desarrollado con y sin ranuras. 62

Figura 2.37. Par de *cogging* obtenido de forma experimental y mediante el modelo desarrollado. 62

Figura 3.1. Ilustración de la síntesis de filtrado espacial mediante la convolución de una onda auxiliar continua y otra discreta. 65

Figura 3.2. Composición de la onda de inducción. 67

Figura 3.3. Proceso de deconvolución + filtrado + convolución. 68

Figura 3.4. Geometría (a), inducción (b) y espectro (c) del motor usado como ejemplo. 72

Figura 3.5. Onda auxiliar, inducción inicial e inducción resultante del filtrado. 73

Figura 3.6. Obtención del nuevo perfil de los imanes a partir de $B(\theta)$, $B_i(\theta)$ y l_m . 73

Figura 3.7. Perfiles de inducción correspondientes a la configuración objetivo (B), primera iteración (B') y segunda iteración (B'').	73
Figura 3.8. Proceso de filtrado de $B^2(\theta)$ de resultado no realizable.	74
Figura 3.9. Descomposición de $B_1^2(\theta)$ en su unidad básica y tres réplicas.	75
Figura 3.10. Proceso de filtrado mediante expansión-compresión.	77
Figura 3.11. Modelo usado para el ejemplo y su inducción al cuadrado	77
Figura 3.12. Ondas básicas $B_1^2(\theta)$ (a), $B_1(\theta)$ (b) y geometría de los imanes (c) antes y después del filtrado.	78
Figura 3.13. (a) Espectros (a), ondas espaciales del par de <i>cogging</i> (b) antes y después del proceso de filtrado y (c) configuración resultante.	79
Figura 3.14 Pulso trapezoidal simétrico y espectro correspondiente	81
Figura 3.15 Espectro de un pulso trapezoidal	82
Figura 3.16 Pulsos correspondientes a dos ondas de inducción al cuadrado, sus derivadas primera y segunda, sus espectros y par de <i>cogging</i> correspondientes.	83
Figura 3.17 Espectros de la primera derivada de la inducción al cuadrado para las configuraciones inicial y final de los imanes.	86
Figura 3.18 Ondas de inducción y derivadas de las ondas de inducción al cuadrado.	86
Figura 3.19. Derivadas segundas de las ondas de inducción al cuadrado.	87
Figura 3.20. Geometría inicial (a) y final (b) de los imanes	87
Figura 3.21 Ondas de inducción y de inducción al cuadrado, sus derivadas y los espectros respectivos. Generación de las envolventes	88
Figura 3.22. Ondas de FEM experimentales antes y después de aplicar el filtrado.	90
Figura 3.23. Espectros antes y después de aplicar el filtrado.	90
Fig. 3.24. (a) Prototipo de rotor con distribución asimétrica de los imanes y (b) girado 180°.	90

Figura 3.25 Configuraciones inicial y final de los imanes para la eliminación de los dos primeros armónicos del par de <i>cogging</i> .	92
Figura 3.26. Par de <i>cogging</i> correspondiente a las configuraciones inicial y final de los imanes.	92
Figura 3.27. (a) Rotor empleado en la prueba. (b) Configuración original de los imanes. (c) Geometría resultante de los imanes tras la modificación.	93
Figura 3.28. Par de <i>cogging</i> inicial y después de la modificación.	93
Figura 3.29. Espectro del par de <i>cogging</i> antes y después de la modificación.	93
Figura 3.30. Verificación experimental del filtrado no selectivo. Ondas de inducción (a), de inducción al cuadrado (b), sus derivadas primera (c) y segunda (d), sus espectros (e) y el par de <i>cogging</i> (f) correspondientes a la versión original y después de la modificación.	94
Figura 3.31 imanes permanentes empleado en el ensayo.	95
Figura 3.32 Comprobación experimental de la sensibilidad para el caso de filtrado selectivo y geometrías empleadas en los imanes permanentes.	96
Figura 3.33. Comprobación experimental de la sensibilidad para el caso de filtrado no selectivo y geometrías empleadas en los imanes.	96
Figura 4.1. Onda de inducción en el entrehierro (a), distribución de los bloques (b) y onda de inducción nominal de los polos (c).	103
Figura 4.2. Modelo de baja frecuencia para las componentes sin y con errores del espectro de tensión, obtenido a partir de (4.34).	110
Figura 4.3. Modelo de ruido normalizado de entrada para armónicos de baja frecuencia.	111
Figura 4.4. Sensibilidad relativa y $\hat{B}'_1(\omega)$ para un pulso de 180 grados eléctricos.	112
Figura 4.5. Sensibilidad relativa y $\hat{B}'_1(\omega)$ para un pulso trapezoidal.	112
Figura 4.6. Sensibilidad relativa y $\hat{B}'_1(\omega)$ para un pulso coseno.	113
Figura 4.7. FDP del módulo, r , en función de σ_{X1} y σ_{X2}	114

Figura 4.8. Interpretación de (4.46): enventanado de \hat{b}_i con una función Gaussiana	116
Figura 4.9. Error normalizado a la entrada de un MSIP con $N = 4$ y $M = 2$ para los primeros 50 armónicos espaciales.	118
Figura 4.10. VCMs de los espectros con y sin errores para un MSIP con $N = 4, M = 1$ en alta frecuencia	119
Figura 4.11. Conjunto de rotores de la serie 1 utilizados en la validación experimental.	121
Figura 4.12. Error normalizado de entrada obtenido de forma experimental y mediante el modelo lineal para las series 1 y 2.	122
Figura 4.13. Medida experimental de las desviaciones sobre la onda de inducción.	123
Figura 4.14. Relación entre los valores cuadrático máximo y máximo esperado para L muestras en alta frecuencia en función del número de imanes y de muestras.	124
Figura 4.15. Relación entre los valores cuadráticos máximo y medio en la zona de alta frecuencia para armónicos eléctricos impares obtenidas de forma experimental.	124
Figura 4.16. Distribución del ruido para los armónicos 1, 3, 7 y 11 para los motores de las series 1 obtenidas de forma experimental	125
Figura 4.17. Error de entrada normalizado de la serie 3, formado por 8 motores de imanes interiores y 8 polos y la serie 4, compuesta por 8 motores con imanes Nd-Fe-B Bonded en anillo de 6 polos.	126
Figura 4.18. Modelo de baja frecuencia para las componentes sin y con errores del espectro de par de <i>cogging</i> , obtenido a partir de (4.60), (4.61) y (4.62).	129
Figura 4.19. Modelo de errores de entrada para armónicos de baja frecuencia.	130
Figura 4.20. Componentes de error (VCM) de entrada para el par de <i>cogging</i>	131
Figura 4.21. Error conjunto de entrada del par de <i>cogging</i>	131
Figura 4.22. Generación de la geometría de los polos con dos ceros en $\omega = 10$	133

Figura 4.23. Espectros de la inducción de un imán conteniendo un cero simple y un cero doble en $\omega = 14$ obtenido experimentalmente.	134
Figura 5.1. Componentes real e imaginaria del espectro de inducción para un rotor de cuatro polos con asimetrías.	142
Figura 5.2. Autoconvolución de $B(h)$ para $h = 12$ y $p = 2$	143
Figura 5.3. Estimación de $B^2(h)$ a partir de los armónicos principales de $B(h)$ para una configuración 24 ranuras / 4 polos con simetría.	145
Figura 5.4. Estimación de $B^2(h)$ a partir de los armónicos principales de $B(h)$ para una configuración 24 ranuras / 4 polos sin simetría.	146
Figura 5.5. Estimación de $B^2(h)$ para armónicos secundarios de <i>cogging</i> para una configuración 6 ranuras / 4 polos sin simetría.	146
Figura 5.6. Estimación de $B^2(h)$ usando los armónicos principales de $B(h)$ excepto el tercero y usando los no múltiplos de tres para una configuración 24 ranuras / 4 polos sin simetría.	147
Figura 5.7. Estimación de $B^2(h)$ usando los armónicos principales de $\hat{e}(h)$ excepto el quinto y usando sólo los múltiplos de tres para una configuración 24/4 sin simetría.	147
Figura 5.8. Diagrama del método propuesto para la medida del par de <i>cogging</i> usando la FEM	148
Figura 5.9. Componentes utilizados en la validación experimental.	150
Figura 5.10. Configuración A: 6 ranuras /4 polos /imanes de Ferrita. Cuatro primeros armónicos del par de <i>cogging</i> . Método de medida: Estator sin ranuras.	151
Figura 5.11. Par de <i>cogging</i> estimado desde la FEM y medido en banco. Configuración A: 6 ranuras /4 polos /imanes de Ferrita. Método de medida: Estator sin ranuras.	151
Figura 5.12. Configuración B. 24 ranuras / 4 polos. Primer y segundo armónicos del par de <i>cogging</i> . Métodos de medida: Estator sin ranuras y tensión de fase.	152
Figura 5.13. Configuración B. 24 ranuras / 4 polos. Comparativa par	152

de <i>cogging</i> . Métodos de medida: Estator sin ranuras y tensión de fase.	
Figura 5.14. Configuración C. 24 ranuras / 4 polos. Imanes de Nd-Fe-B. Primer y segundo armónicos del par de <i>cogging</i> . Métodos de medida: Estator sin ranuras y tensión de línea.	153
Figura 5.15. Configuración C. 24 ranuras / 4 polos. Comparativa par de <i>cogging</i> . Métodos de medida: Estator sin ranuras y tensión de línea.	153
Figura A5.1. Devanado tipo Gramme usado para la medida de la FEM sobre un estator sin ranuras.	155
Figura A5.2 Permeancias relativas de ranura correspondientes a los modelos sin ranuras, analítico, FEM y experimental.	156
Figura A5.3 Espectros normalizados de las permeancias relativas de ranura correspondientes a los modelos analítico, FEM y experimental.	156
Figura A5.4 Obtención de $B_{1/3}(\alpha)$ a partir de $B(\alpha)$.	158
Figura A5.5 Evaluación de la integral de Fourier de $B_{1/3}^2(\alpha)$ y de $B^2(\alpha)$	159

Índice de Tablas

Tabla 2.1 Índices armónicos impares de la intensidad (i) y de la tensión (e) que contribuyen a la generación de par de una fase en un motor trifásico.	54
Tabla 2.2 Índices armónicos impares de la FEM (q) que contribuyen a la generación de par de una fase en un motor trifásico con intensidad senoidal.	54
Tabla 2.3 Índices armónicos impares de la intensidad (i) y de la tensión (e) que contribuyen a la generación de par total con simetría trifásica y alimentación a tres hilos.	54
Tabla 2.4 Especificaciones del motor ensayado	60
Tabla 3.1 Especificaciones del MSIP usado en los ensayos	91
Tabla A3.1 Ondas auxiliares utilizadas en el filtrado espacial	98
Tabla A3.2 Ondas auxiliares utilizadas en el filtrado espacial	99
Tabla 4.1 Probabilidad de ocurrencia para el caso más desfavorable	114
Tabla 4.2 Comparativa entre desviaciones obtenidas de forma directa y a través de la FEM	123
Tabla 4.3 Dimensiones de los imanes utilizados en la prueba	134
Tabla 5.1 Conjuntos de motores usados en la validación experimental	149

1

Introducción

1.1 Antecedentes

Las máquinas eléctricas rotativas con excitación mediante imanes permanentes ocuparon en su origen los escalones inferiores de potencia, tanto en los motores de corriente continua como en los alternadores, debido a las limitadas prestaciones y al elevado coste de los imanes disponibles. La aparición en los 80 de materiales magnéticos basados en tierras raras y su posterior reducción de costes permitió ampliar la gama de potencias de estas máquinas, llegando a rivalizar no sólo con los motores clásicos de corriente continua, sino también con los de inducción, en el campo de la corriente alterna.

En la actualidad, las máquinas de imanes permanentes, además de cubrir la práctica totalidad de las aplicaciones de las máquinas eléctricas clásicas, han permitido el desarrollo de nuevos tipos de accionamientos. Éste es el caso de las máquinas de imanes permanentes con un gran número de polos, baja velocidad, elevado par y máxima suavidad de marcha, empleadas en mecanismos de accionamiento directo: aerogeneradores, tracción, elevación, máquinas herramientas, etcétera. En estos casos, es primordial que el par generado sea lo más constante posible, ausente de armónicos. Las principales causas de las fluctuaciones en el par son el rizado de par y el par de *cogging*. El primero es originado por los armónicos de la FEM y por los de la intensidad de alimentación, mientras que el segundo tiene su origen en la interacción del campo magnético de los imanes con los dientes del estator y no requiere de la intervención de la corriente de alimentación.

Las técnicas actuales destinadas a eliminar en estas máquinas el par de *cogging* y a conseguir una FEM sin armónicos comparten con las técnicas clásicas una clara tendencia hacia las reglas de diseño. El diseño convencional mediante reglas se basa en el conocimiento previo de la relación entre ciertas características geométricas de la máquina y los

espectros de FEM y de par de *cogging*. Así, es sabido que para eliminar un determinado armónico de FEM debe elegirse adecuadamente el arco polar de los imanes o el paso de bobina y, del mismo modo, es posible anular determinados armónicos del par de *cogging* mediante la adecuada elección del ángulo de inclinación de las ranuras. En estos casos, el arco polar, el paso de bobina y la inclinación de las ranuras son tres ejemplos de recursos de diseño basados en un parámetro variable de la geometría de la máquina, cuyos efectos sobre el funcionamiento son conocidos de antemano.

Por lo general los recursos geométricos con un grado de libertad como los mencionados anteriormente no permiten eliminar simultáneamente dos armónicos de FEM o cubrir al mismo tiempo las exigencias de un par de *cogging* reducido y la ausencia de armónicos de FEM. Cabría entonces plantear la hipótesis de que ello fuera posible siguiendo el camino inverso, es decir, el de la síntesis, determinando la geometría a partir de los espectros de FEM y de par de *cogging* deseados, lo cual constituye la motivación de esta tesis.

En el ámbito de la Ingeniería Eléctrica es muy común el uso de la transformada de Fourier para describir una onda temporal periódica mediante su espectro en frecuencia, y viceversa: reconstruir la onda temporal a partir de su espectro. La respuesta impulsional o la función de transferencia del sistema en cuestión permite conectar las excitaciones (señales de entrada) con las respuestas (señales de salida) del sistema. Así, la traslación de estas ondas temporales al dominio frecuencial permite describir la onda en cuestión como la respuesta de una serie de bloques en cascada, con sus respectivas funciones de transferencia, a una determinada excitación. Las acumulación de características de filtrado de los distintos bloques determinan las propiedades invariables de la respuesta del sistema. Por ejemplo: si la función de transferencia de uno de los bloques tiene un cero a una determinada frecuencia (armónico), el espectro de la respuesta tampoco tendrá esa frecuencia. El camino inverso, la síntesis, sugiere la posibilidad de parametrizar las características de filtrado de alguno de los bloques del sistema a fin de que el espectro de la respuesta no contenga una determinada frecuencia preestablecida.

La reproducción cíclica de los fenómenos que impone el movimiento de rotación en las máquinas eléctricas rotativas (categoría a la que pertenecen la inmensa mayoría) hace que se produzca una conexión entre las ondas espaciales, como puede ser la de inducción creada por los polos inductores en el entrehierro, y las temporales, como la de FEM producida en los arrollamientos del inducido.

En este trabajo se presenta un método para modelar el funcionamiento de las máquinas de imanes permanentes como un conjunto de bloques encadenados capaces de filtrar tanto en el dominio espacial como en el frecuencial. La herramienta propuesta se basa en la integral de convolución que, de forma natural, conecta formalmente ambos dominios, el espacial y el frecuencial, y relaciona la geometría del motor (dominio espacial) directamente con su respuesta de frecuencia. Con este nuevo instrumento, el diseñador podrá calcular fácilmente y con precisión el efecto resultante de cualquiera de los bloques que afectan el funcionamiento de la máquina. Además, a la inversa, el diseñador podrá también sintetizar la modificación adecuada de un bloque (modificación de parámetros geométricos) para obtener la respuesta funcional deseada de una máquina.

El método de síntesis planteado debe contemplar sólo las geometrías físicamente realizables, lo que, en principio, descarta la aplicación directa de métodos basados en transformaciones espacio-frecuencia como la transformada inversa de Fourier.

El procedimiento propuesto para la síntesis de una nueva geometría consiste en el filtrado en el dominio espacial de alguna de las ondas espaciales de la máquina, tales como la onda de inducción en el entrehierro, la de posicionado de los imanes, o la distribución de los conductores que forman los devanados. Para este fin es necesario identificar y formular adecuadamente cada una de las ondas espaciales que intervienen en la generación de la FEM y en el par de *cogging* y vincularlas con parámetros geométricos. De esta forma, las ondas espaciales resultantes del filtrado tendrán una correspondencia con nuevas geometrías, consiguiendo así el objetivo buscado de un diseño basado en la síntesis.

El primer paso consiste en la identificación y formulación de cada una de las ondas espaciales, que en la práctica supone la creación de un modelo de motor en el dominio espacial. Este modelo relaciona entre sí las diferentes ondas espaciales que intervienen en la generación de la FEM, en el par electromagnético y en el par de *cogging*. La operación matemática que de forma natural relaciona las diferentes ondas espaciales entre sí es la integral de convolución. La resolución del problema planteado resulta más eficiente desde una perspectiva de Teoría de Sistemas, es decir, considerando al modelo espacial como un sistema formado por subsistemas o bloques conectados en cascada. La entrada y la salida de cada bloque serán la excitación y la respuesta, respectivamente, y se corresponderán con ondas espaciales. La relación entre ambas vendrá dada por la función de transferencia o respuesta impulsional del bloque, representada también por

una onda espacial. Encadenando mediante la convolución uno tras otro los diferentes subsistemas o bloques del modelo se obtiene finalmente la característica buscada: onda de FEM, par electromagnético y par de *cogging*.

Al mismo tiempo, la traslación de estas ondas espaciales al dominio frecuencial mediante la transformada de Fourier permite la descripción del sistema en forma tradicional. Las ondas espaciales son sustituidas por sus espectros y la conexión entre bloques pasa a realizarse mediante el producto ordinario en lugar de la convolución. La equivalencia entre los dominios espacio y frecuencia permite el diseño de los bloques en cualquiera de ellos según cada caso. Así, la cancelación de un determinado armónico de FEM o de *cogging* puede conseguirse imponiendo un cero en cualquiera de los bloques en el dominio frecuencial, el cual, gracias a la operación producto, afectará a toda la cadena. Sólo quedaría elegir el bloque cuya geometría asociada permita la inclusión del cero de forma más eficiente. En este sentido, el método de síntesis planteado debe contemplar sólo las geometrías físicamente realizables, lo que en principio descarta la aplicación directa de métodos basados en transformaciones espacio-frecuencia como la transformada inversa de Fourier.

1.2 Referencias bibliográficas

Es habitual que en la bibliografía se estudien por separado el par de *cogging* y el rizado de par. Posiblemente, la razón de ello sea que ambos efectos se deben a mecanismos diferentes. El rizado de par se debe a la interacción entre el campo magnético de los imanes y la corriente eléctrica, mientras que el par de *cogging* tiene su origen en la variación de la reluctancia que tiene lugar durante el giro del rotor.

En relación con la ondulación o rizado de par, los procedimientos empleados actualmente para disminuir los armónicos de FEM en motores de imanes permanentes tienen su origen en los utilizados en los devanados de inducido de los generadores síncronos. A este respecto pueden citarse los textos clásicos como los de R. Richter (1923) [1], Moeller-Werr (1949) [2], Kostenko, M.P y Piotrovsky, L.M. (1969) [3], Liwschitz-Garik, M (1976) [4], Ivanov, A.-Smolensky, D (1980) [5], Cortés Cherta, M. (1970) [6], Serrano Iribarnegaray, L. (2001) [7], o Fraile Mora, J. (2003) [8] entre otros. En todos ellos se encuentran normalizados los términos bobinado concentrado y distribuido, entero y fraccionario, o los factores de acortamiento, de distribución y de inclinación de ranuras, etcétera y cuyos efectos sobre la amplitud de los armónicos de la FEM eran ya bien conocidos. En cuanto al inductor, también se cuenta desde las primeras máquinas con técnicas para conseguir una onda espacial de inducción cercana a la sinusoidal y que algunas de ellas han sido adoptadas por los diseños actuales, como es el caso de los motores de imanes interiores.

Los textos que estudian las máquinas de imanes permanentes aparecen al final de los años ochenta; siendo T.E.J. Miller (1989) [9] y (1994) [10], Hanselman, D. C. (1994) [11] y (2003) [12] y Krishnnan, R. (2009) [13] ejemplos representativos. Estos trabajos tratan los aspectos relacionados con la generación de la FEM con criterios similares a los encontrados en los textos clásicos. En lo referente al bobinado, introducen los devanados concentrados de una o dos capas; muy extendidos hoy día en las máquinas de imanes permanentes y poco frecuentes en los motores tradicionales. En lo que respecta al inductor, incluyen las configuraciones de imanes interiores y superficiales, así como el tipo de magnetización de los imanes; radiales o diametrales, además de las técnicas encaminadas a conseguir una curva de inducción magnética más sinusoidal en el entrehierro.

Entre las publicaciones en revistas especializadas puede citarse el análisis realizado por Carlson, R. et. al. (1989) [14] sobre la influencia que ejercen el arco polar de los imanes y la inclinación de los mismos sobre los armónicos

de FEM. De La Ree y Boules (1991) [15-17] introdujeron un segundo grado de libertad con la altura de los imanes con el fin de minimizar los armónicos 5° y 7° de FEM, que resultan ser los principales causantes del rizado de par en motores trifásicos. Islam, M.S. (2004) [18] y Islam, R. et al. (2009) [19] analizaron diferentes configuraciones de los imanes tomando como parámetros el radio de curvatura, el paso polar y el desplazamiento de los bloques de imanes. Wu, L. (2014) [20], Shah y Lipo (2012) [21], Hwang, K.Y. (2007) [22], han realizado investigaciones en el mismo campo con el objetivo de hacer compatible los requerimientos del par de *cogging* y los de rizado de par de forma óptima. Hanselman, D.C. (1997) [23] introduce una singular aportación al destacar por primera vez la importancia de la función *sinc*(-), que aparece al analizar el efecto de la inclinación de las ranuras y que modula el espectro de la FEM como un filtro pasa bajo. Por último hay que mencionar las aportaciones de Borghi et al. (1998) [24] y Chaithongsuk et al. (2009) [25], ambas basadas en métodos de optimización multiobjetivo para conseguir un reducido contenido armónico de FEM. En el primero se toma como parámetros variables la posición de cada uno de los imanes y en el segundo la anchura de los diferentes segmentos que forman un polo.

Por otra parte, en la década de los años 80 surgen también los trabajos destinados a la atenuación del par de *cogging*, entre los cuales cabe destacar los siguientes: Touz, L. (1988) [26], Kim, K.H. (1991) [27], Zhu, Z.Q. (1992-) [28-31], Ackermann et al. (1992) [32], Seop, Ch., (1997,03) [33], [34], Saravanan, S. (2011) [35], Chabchoub, M. (2012) [36], Hwang, K.Y. (2007) [22], Shin, P.S. (2009) [37] y Chen, N. (2010) [38], siendo desde entonces uno de los temas más recurrentes en las publicaciones especializadas. Entre las técnicas más utilizadas para la reducción del par de *cogging* se encuentran la utilización de un número fraccionario de ranuras por polo realizadas por Ackermann et al. [32] y Bianchi y Bolognani (2002) [39], inclinación de las ranuras y de los imanes de Bianchi y Bolognani (2002) [39]; disposición de los imanes en bloques desplazados de Carlson et al. (1989) [14] y Wang, D. et al. (2010) [40], optimización del arco polar de los imanes de Li Zhu et al. (2009) [41] o de la forma de los mismos de Islam, R. et al.(2009) [19]; utilización de polos de arcos diferentes propuesto por Fei y Luk (2010) [42] y segmentación de los imanes de Boukais y Zeroug (2010) [43] y Ashabani y Mohamed (2011) [44].

El diseño basado en técnicas de optimización también es frecuente en este campo, sirviendo de ejemplo el basado en el problema inverso, de Alhamadi, M.A. (1999) [45], utilizando el método Taguchi; Kim, S., (2005) [46], o algoritmos genéticos, Lukaniszyn, M., (2004) [47], o métodos RSM de

Wang, D. et al. (2010) [40], Chabchoub, M. (2012) [36], Hwang, K.Y. (2007) [22], y Shin, P.S. (2009) [37].

Por su relación con el tema tratado en esta tesis, cabe destacar los trabajos de Hartman y Lorimer (2001) [48], [49], que introducen por primera vez la convolución como puente entre los dominios espacial y frecuencial y que, aunque es tratada de forma descriptiva, da fundamento a algunas de las técnicas clásicas para la eliminación del par de *cogging*. Una línea de trabajo paralela a la reducción del contenido armónico, ya sea de FEM o de *cogging*, consiste en aumentar la amplitud del tercer armónico de FEM con objeto de maximizar el rendimiento de los imanes empleados, dado que este armónico desaparece en la conexión en estrella de los motores trifásicos. Ejemplo de este tipo de trabajos es el de Wang, K. (2014) [50].

A modo de resumen de la revisión de la bibliografía se concluye que no existen técnicas de diseño publicadas basadas en la síntesis ni tampoco que hagan uso del filtrado en el dominio espacial como recurso de diseño, tanto en lo referente al par de *cogging* como al rizado de par. Solamente Hanselman, D. (1997) [23] hace referencia a la función *sinc*(\cdot), que forma parte de la expansión en serie de Fourier de determinadas configuraciones de motor y que presenta características de filtro pasa bajo.

Este trabajo se encuentra dentro de esta última línea de investigación de Hartman y Lorimer, y contiene dos mejoras principales:

La introducción formal del concepto de filtrado en el dominio espacial como una característica atribuible a la geometría y las ondas espaciales de las máquinas eléctrica.

La presentación de un método analítico para la síntesis de filtros en el dominio espacial, que proporciona una base formal para las soluciones existentes y abre la puerta a nuevas configuraciones de diseño.

1.3 Objetivo de la tesis

Esta tesis se enmarca en los trabajos destinados a reducir los armónicos de par en los motores de imanes permanentes, siendo su objetivo el desarrollo de métodos de diseño de la geometría de la máquina a partir de especificaciones en el dominio de la frecuencia, es decir, el diseño de filtros en el dominio espacial.

En el área de las máquinas eléctricas está generalizado el diseño en el dominio de la frecuencia, debido principalmente a que buena parte de las especificaciones suelen darse en ese campo. Sin embargo, también es posible el diseño en el dominio espacial, donde se manejan directamente las ondas espaciales y no sus espectros como en el frecuencial. La mayoría de las operaciones con ondas espaciales requieren del producto de convolución, mientras que los espectros se relacionan entre sí principalmente mediante el producto ordinario.

En esta tesis la convolución se usa con una doble finalidad: el modelado completo de la máquina y el diseño de filtros en el dominio espacial; constituyendo el diseño de filtros el núcleo principal de la tesis.

La metodología que se propone para el diseño de filtros en el dominio espacial se basa en la convolución de una de las ondas espaciales de la máquina, caracterizada por parámetros geométricos, con una función espacial que hace las veces de filtro, obteniendo como resultado una nueva onda espacial y una geometría asociada. Este procedimiento constituye una aportación original, ya que abre el camino a nuevas soluciones de filtrado y fundamenta muchas de las existentes.

1.4 Contenido de la tesis

Tras este breve capítulo introductorio, el resto del trabajo se ha organizado en cuatro capítulos.

El Capítulo 2 constituye el fundamento teórico de la tesis. Se parte de la FEM inducida en un conductor con inclinación arbitraria, cuya expresión es manipulada para adoptar la forma de producto de convolución de la FEM en un conductor recto por una onda espacial, que hace las veces de filtro. A partir de esta idea se configura el modelo completo de motor tanto en el dominio espacial como en el frecuencial: FEM en un devanado, par electromagnético y par de *cogging*.

El contenido de este capítulo ha dado lugar a una primera publicación [73]

El Capítulo 3 utiliza las relaciones entre los dominios espaciales y frecuencial obtenidas en el capítulo anterior para el diseño de filtros espaciales. Este capítulo constituye la principal aplicación práctica de la teoría desarrollada en el capítulo 2.

Parte de este capítulo se ha incluido en la primera publicación [73].

El Capítulo 4 se centra en los efectos de las tolerancias de fabricación sobre la FEM y el par de *cogging*, y en cómo este conocimiento permite modificar los bloques de filtrado espacial de forma que la respuesta esperada de la máquina esté dentro de unos límites admisibles. En este apartado se presenta un modelado completo de los errores y se obtienen conclusiones sobre cómo influyen las variaciones de los principales parámetros geométricos derivados de las tolerancias de fabricación sobre el comportamiento de los filtros y, en definitiva, en el funcionamiento de la máquina. Este capítulo es un importante complemento de orden práctico del capítulo anterior, dedicado al diseño de filtros.

El contenido de este capítulo ha dado lugar a una segunda publicación [64]

El capítulo 5 presenta una original aplicación del modelado del motor de imanes permanentes llevado a cabo en el capítulo 2. Dada la relación entre las distintas ondas espaciales, es posible medir el par de *cogging* a partir de la FEM, sin necesidad de transductor mecánico. Además de las lógicas ventajas que ello conlleva, el método permite controlar la calidad de los imanes antes de su montaje en el rotor.

El contenido de este capítulo ha dado lugar a una tercera publicación [74].

Finalmente, el Capítulo 6 recoge las principales conclusiones del trabajo realizado así como algunas orientaciones de ampliación y mejora para trabajos futuros. El trabajo concluye con una relación de las principales referencias bibliográficas utilizadas en su realización.

2

Modelado basado en la convolución

Introducción

Este capítulo es el punto de partida para la introducción del concepto de filtrado en el dominio espacial. Se demostrará que al ser aplicadas las expresiones electromagnéticas clásicas a las ondas espaciales de la máquina éstas adoptan la forma de integral de convolución. De esta forma, mediante el uso de las propiedades de la convolución, puede considerarse que algunas de las funciones que intervienen en la formulación se comportan como señal de entrada, mientras que otras actúan como función de transferencia del sistema o respuesta impulsional, y que puede interpretarse como un filtro espacial. Las características de filtrado del sistema están directamente relacionadas con las propiedades de la geometría de la máquina.

En primer lugar se estudia la generación de tensión inducida o fuerza electromotriz (FEM) sobre un conductor con inclinación arbitraria para poner de manifiesto el concepto de filtrado espacial y sus funciones características, continuando con la tensión generada por un devanado con y sin el efecto de las ranuras y su capacidad de filtrado. A continuación se obtienen el par electromagnético y el par de *cogging*.

2.1 Modelado de la fuerza electromotriz

Una de las características de mayor interés en las máquinas eléctricas es la tensión generada a circuito abierto ya que de ella depende el comportamiento final del motor en lo referente a rizado de par. Dado que el par electromagnético es el resultado de la interacción entre la FEM y la corriente que recorre los conductores del inducido, debe garantizarse la ausencia de armónicos, tanto en la intensidad como en la FEM para conseguir un par de salida constante.

2.1.1 FEM en un conductor

En este apartado se introduce el concepto de filtrado espacial a partir del desarrollo de la tensión inducida en un conductor elemental bajo la acción de un campo magnético. La metodología es aplicada posteriormente a la FEM inducida en una bobina y en un devanado completo.

La figura 2.1 ilustra la generación de la FEM inducida en un conductor $a-b$ situado entre los imanes del rotor, y la superficie interior del inducido sin ranuras. El conductor permanece fijo en relación al estator, que se considerará como sistema de referencia.

Los puntos a y b sobre el conductor indican el tramo bajo la acción de la inducción magnética. El vector inducción, \vec{B} , se considerará formado por una componente normal a la superficie del imán, \vec{B}_N , y otra tangencial, \vec{B}_T , cuyos módulos pueden ser representados mediante ondas espaciales $\vec{B}_N(\theta_m)$ y $\vec{B}_T(\omega_m)$, respectivamente, sobre el plano $x-y$ que sufren un desplazamiento a lo largo del eje z siguiendo la inclinación de los imanes.

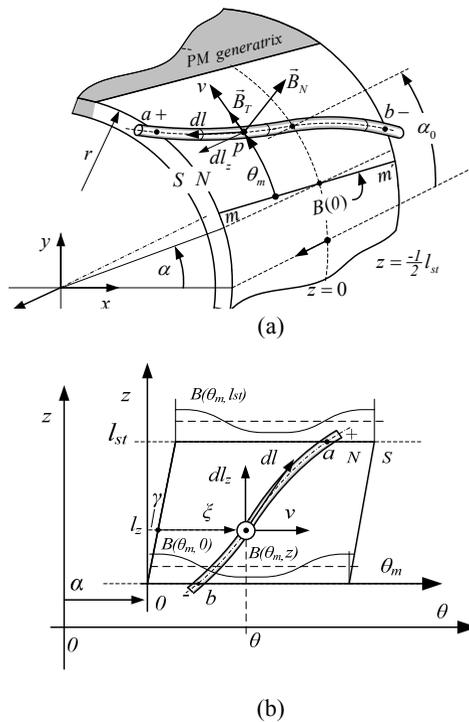


Figura 2.1. Representación espacial (a) y a lo largo del eje z (b) de la FEM inducida en un conductor curvilíneo.

En la figura 2.1, la referencia magnética es la línea $m-m'$ que indica el lugar geométrico de los puntos de inducción igual a $\bar{B}_N(0)$, α es el ángulo girado por el rotor, medido desde el eje x hasta la línea de referencia magnética en $z = 0$, α_0 es el ángulo medido desde el eje x hasta el origen del conductor, que fijaremos en $z = 0$.

En base a estas referencias se hará el cambio

$$\xi = \theta_m + \alpha - \alpha_0 \quad (2.1)$$

donde ξ representa el argumento de \bar{B} en un punto cualquiera p del conductor para un mismo valor de z cuando $\alpha = \alpha_0$. La inducción en el punto p del conductor puede expresarse ahora como

$$\bar{B}(\xi - \alpha + \alpha_0) \quad (2.2)$$

Para todos los ángulos, se considerará sentido positivo el antihorario. Particularizando la ecuación general de la FEM de movimiento

$$e = \oint (\vec{v} \wedge \bar{B}) d\vec{l} \quad (2.3)$$

al tramo de conductor $a-b$, resulta

$$e = - \int_b^a (\vec{v} \wedge \bar{B}) d\vec{l} \quad (2.4)$$

En la expresión anterior, e es la FEM de movimiento inducida entre los terminales a y b , considerados como terminal positivo y negativo, respectivamente. El signo menos en (2.4) se debe a que la velocidad considerada es la del imán respecto del conductor.

La velocidad v del punto $p(x,y,z)$ viene dada por

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} \quad (2.5)$$

La componente en el eje z es nula ya que todos los puntos del imán giran respecto de dicho eje.

Tomando

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (2.6)$$

resulta

$$\vec{v} = -r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \vec{i} + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \vec{j} \quad (2.7)$$

donde $\frac{d\theta}{dt} = \omega_r$. θ es la velocidad angular del rotor

La inducción en el punto p , $\vec{B}(x, y, z)$, la expresaremos en función del ángulo θ y de sus componentes normal y tangencial sobre la superficie del imán. Supondremos nula la componente sobre el eje z .

$$\vec{B} = (\vec{B}_N \cos \theta + \vec{B}_T \sen \theta) \vec{i} + (-\vec{B}_N \sen \theta + \vec{B}_T \cos \theta) \vec{j} \quad (2.8)$$

Por último,

$$d\vec{l} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad (2.9)$$

donde haremos el cambio de variables

$$\begin{aligned} l_x &= r \cos \theta \\ l_y &= r \sen \theta \\ l_z &= l_z \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$d\vec{l} = -r \sen \theta d\theta \vec{i} + r \cos \theta d\theta \vec{j} + dz \vec{k} \quad (2.11)$$

Resolviendo el producto vectorial,

$$\begin{aligned} (\vec{v} \wedge \vec{B}) d\vec{l} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -r \omega_r \sen \theta & r \omega_r \cos \theta & 0 \\ \vec{B}_N \cos \theta + \vec{B}_T \sen \theta & -\vec{B}_N \sen \theta + \vec{B}_T \cos \theta & 0 \end{vmatrix} \\ &\cdot \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = -r \omega_r \vec{B}_N dz \end{aligned} \quad (2.12)$$

resulta finalmente la tensión inducida,

$$e = \int_b^a r \omega_r \vec{B}_N (\xi - \alpha - \alpha_0) dl_z \quad (2.13)$$

Se observa que la tensión inducida sólo depende de la componente normal de la inducción. Por tanto, en lo sucesivo usaremos la notación $B(\cdot) \equiv \vec{B}_N(\cdot)$.

De la figura 2.1 resulta que $a \equiv l_{st}/2$ y $b \equiv -l_{st}/2$ por tanto, la expresión (2.13) queda,

$$e(\alpha) = \int_{-l_{st}/2}^{l_{st}/2} r \omega_r B(\xi - \alpha + \alpha_0) dl_z \quad (2.14)$$

siendo l_{st} la longitud axial del motor.

Como l_z y ξ guardan relación entre sí, (2.14) puede reescribirse como

$$e(\alpha) = r l_{st} \omega_r \int_{\xi_b}^{\xi_a} B(\xi - \alpha + \alpha_0) S(\xi) d\xi \quad (2.15)$$

donde $S(\xi)$ se ha definido entre $-\infty$ y $+\infty$ como

$$S(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{l_{st}} \frac{dl_z}{d\xi}, & \text{para } \xi_b < \xi < \xi_a \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Para los valores de ξ en los que el conductor se encuentra bajo la influencia del imán, $S(\cdot)$ es la derivada de $l_z(\xi)$, según se indica en las figuras 2.1 y 2.2.

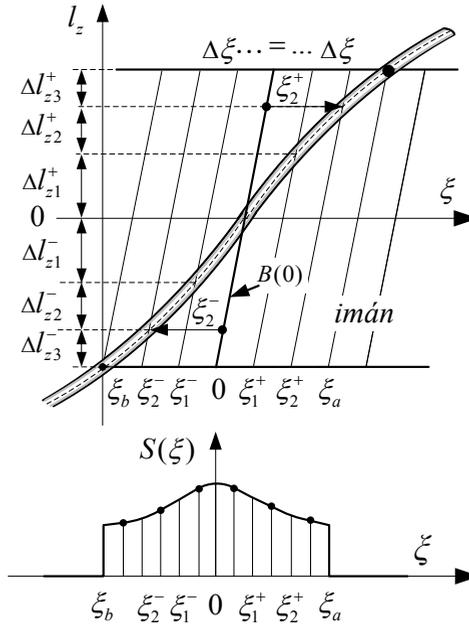


Figura 2.2. Obtención de la función $S(\xi)$ a partir de la geometría del conductor y de los imanes.

Para el resto de valores no se induce FEM en el conductor, lo que permite considerar nula la función $S(\cdot)$. Para que $S(\cdot)$ sea independiente de la longitud axial del rotor, se introduce el factor $1/l_{st}$ que convierte en relativos los incrementos sobre el eje z y al mismo tiempo normaliza el área bajo la curva $S(\cdot)$ haciéndola igual a la unidad, independientemente de la forma de

ésta. Por tanto, $S(\cdot)$ representa la inclinación relativa imanes-conductores, quedando caracterizada por la geometría de ambos.

ξ_a y ξ_b son los valores de ξ en $lz = l_{st}/2$ y en $lz = -l_{st}/2$, respectivamente.

La definición de $S(\cdot)$ de (2.16) permite extender los límites de la integral de (2.15) desde $-\infty$ a $+\infty$, pudiendo entonces ser identificada como la convolución de $B(-\alpha)$ y $S(\xi + \alpha_0)$:

$$e(\alpha) = r l_{st} \omega_r [B(-\alpha) * S(\alpha + \alpha_0)] \quad (2.17)$$

o bien,

$$e(\alpha) = r l_{st} \omega_r [B(-\alpha) * S(\alpha) * \delta(\alpha + \alpha_0)] \quad (2.18)$$

donde la función delta de Dirac caracteriza la posición del conductor en el entrehierro.

Un caso particular de función $S(\cdot)$ resulta cuando el conductor está situado en el origen de ángulos y los imanes son rectos o tienen la misma inclinación, es decir, $\alpha = 0$ y $\xi = 0$. En este caso, la inducción a lo largo del conductor no depende de z y se puede sacar fuera de la integral en (2.14)

$$\begin{aligned} e_{cr}(\alpha) &= r \omega_r B(-\alpha) \int_{-l_{st}/2}^{l_{st}/2} dl_z \\ &= r l_{st} \omega_r B(-\alpha) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Pudiéndose ahora expresar (2.18) en función de la FEM en un conductor recto situado en el origen como

$$e(\alpha) = e_{cr}(\alpha) * \delta(\alpha + \alpha_0) * S(\alpha) \quad (2.20)$$

Observación: La tensión inducida en un conductor situado bajo un ángulo α_0 puede obtenerse a partir de la convolución de la onda de tensión inducida en un conductor recto, colocado en el origen de ángulos, con la función característica de la inclinación de los imanes, o del conductor, $S(\alpha)$ y con la función característica del desplazamiento $\delta(\alpha + \alpha_0)$.

Ecuaciones de transformación

La convolución permite realizar el filtrado directamente en el dominio espacial, lo que resulta de utilidad para el diseño, según se verá más adelante, y al mismo tiempo facilita el paso al dominio frecuencial mediante la transformada y la serie de Fourier. Una vez en el dominio de la frecuencia, el producto de convolución se convierte en el producto ordinario, lo que facilita considerablemente el análisis.

Aplicando el teorema de la convolución a la expresión de la tensión inducida en un conductor (2.17) y considerando $\alpha_0 = 0$, esto es, con el conductor situado en el origen, resulta

$$e(\alpha) = r l_{st} \omega_r [B(-\alpha) * S(\alpha)] \quad (2.21)$$

Dado que la inducción $B(-\alpha)$ es una onda periódica y $S(\alpha)$ es aperiódica, la FEM, $e(\alpha)$, resultante de la convolución será periódica, pudiéndose expresar como serie de Fourier:

$$e(\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k^e e^{jk\omega_0\alpha} \quad (2.22)$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T_p$ y T_p es el período espacial o longitud de onda y c_k los coeficientes del desarrollo. Para las ondas espaciales de las máquinas giratorias, $T_p = 2\pi$, por lo que $\omega_0 = 1$.

Por su parte,

$$B(-\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k^B e^{jk\omega_0\alpha} \quad (2.23)$$

Desarrollando el producto de convolución de (2.15) y haciendo uso de (2.22) y (2.23) se obtiene

$$\begin{aligned} e(\alpha) &= r l_{st} \omega_r \int_{\xi_b}^{\xi_a} B(\xi - \alpha) S(\xi) d\xi = r l_{st} \omega_r \int_{\xi_b}^{\xi_a} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k^B e^{jk(\alpha - \xi)} S(\xi) d\xi \\ &= r l_{st} \omega_r \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_k^B e^{jk\alpha}}_{B(-\alpha)} \underbrace{\int_{\xi_b}^{\xi_a} e^{-jk\xi} S(\xi) d\xi}_{F\{S(\xi)\}_{\omega=k}} \end{aligned} \quad (2.24)$$

Comparando (2.24) con (2.22) se obtienen los coeficientes c_k^e de la tensión $e(\alpha)$

$$c_k^e = r l_{st} \omega_r \left[\hat{S}(\omega) \cdot c_k^B \right]_{\omega=k} \quad (2.25)$$

donde se ha usado la notación $F\{S(\xi)\} \equiv \hat{S}(\omega)$

Los coeficientes espectrales de la FEM se obtienen al multiplicar los coeficientes del desarrollo en serie de Fourier de la onda de inducción por la transformada de Fourier de $S(\cdot)$ en $\omega = k$, por la velocidad angular ω_r y por la constante dimensional $r \cdot l_{st}$.

En la figura 2.3 se muestra el proceso de conformación de la FEM para

un conductor en un motor de cuatro imanes montados superficialmente como muestra la figura 2.3 (a). La inducción se ha idealizado como una onda rectangular en la figura 2.3 (b) y su espectro de barras en la 2.3 (c). La configuración del conductor analizado, su función característica $S(\alpha)$ y su transformada de Fourier se muestran en las figuras 2.3(d), (e) y (f) respectivamente. Por último, la tensión resultante $e(\alpha)$ y su espectro de barras se muestran en las figuras 2.3(g) y (h), respectivamente. En este proceso puede interpretarse que la onda de inducción es la señal de entrada al sistema, que la transformada de Fourier de $S(\alpha)$ actúa como filtro y que la respuesta es la onda de tensión $e(\alpha)$.

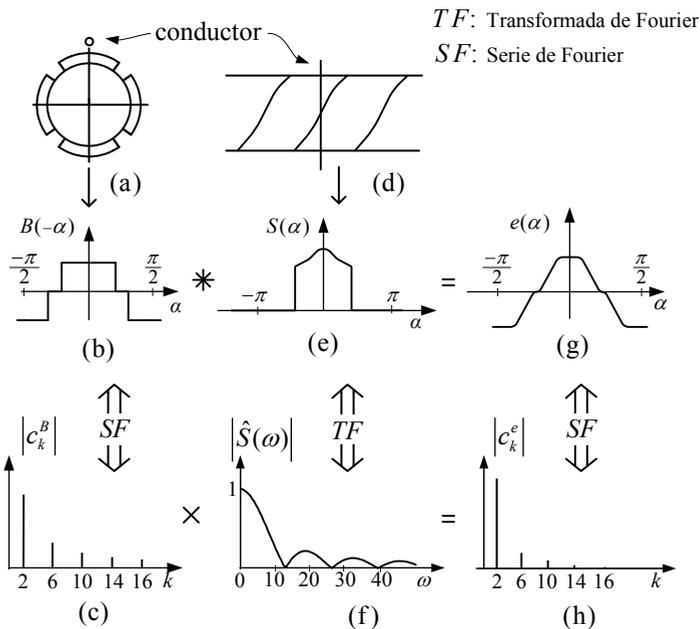


Figura 2.3. Conformación de la FEM mediante de filtrado espacial.

El espectro de $e(\alpha)$ puede obtenerse directamente a partir de su desarrollo en serie de Fourier o multiplicando los espectros de las dos etapas precedentes haciendo uso del teorema de la convolución. Este último método es de gran utilidad, ya que nos permite realizar una eliminación selectiva de armónicos al imponer ceros en determinadas frecuencias del espectro repartiéndolos en las distintas etapas. Así, el espectro de la figura 2.3 (h) contiene los ceros de c_k^B y de $\hat{S}(\omega)$.

Una formulación alternativa a (2.25) se obtiene al descomponer la onda $B(-\alpha)$ en su unidad básica aperiódica, $B_1(-\alpha)$, igual a $B(-\alpha)$ entre $-\pi$ y π y cero

fuera de este intervalo y en un tren deltas, $p(-\alpha)$, distanciadas 2π radianes como se muestra en la figura 2.2. $B_1(-\alpha)$ contiene la información de la onda de inducción y al ser aperiódica presenta un espectro continuo, $\hat{B}_1(\omega)$.

Por su parte, $p(-\alpha)$ representa la periodicidad de la onda de inducción y puede ser considerada como entrada al sistema, mientras que el resto de ondas espaciales se comportan como filtros.

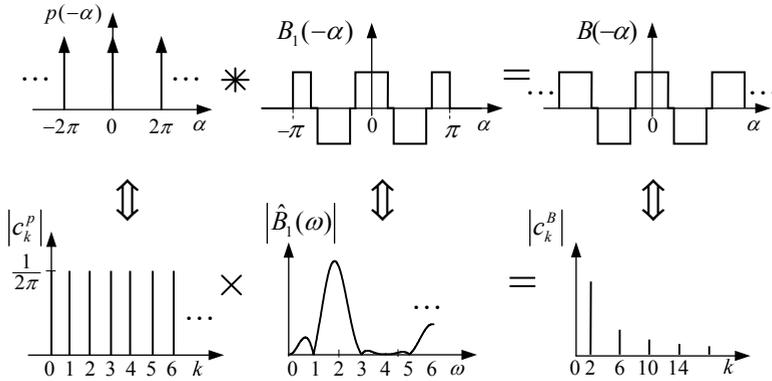


Figura 2.4. Descomposición de la onda de inducción $B(-\alpha)$.

Como el valor de todos los coeficientes de $p(-\alpha)$, c_k^p , es $1/2\pi$, (2.25) puede expresarse solamente en función de las transformadas de Fourier de las ondas implicadas.

$$c_k^e = r l_{st} \omega_r \frac{1}{2\pi} \left[\hat{S}(\omega) \cdot \hat{B}_1(\omega) \right] \Big|_{\omega=k} \quad (2.26)$$

Aplicación a geometrías convencionales

Los recursos de filtrado de la FEM basados en la geometría son muy utilizados en la práctica. Ejemplos de ellos son la inclinación de los imanes, ya sea de forma continua o en pasos, y la inclinación de las ranuras.

La figura 2.5 muestra tres ejemplos de disposiciones de imanes y conductores. La figura 2.5 (a) corresponde al caso de un conductor recto y los imanes sin inclinación. En este caso, la función característica de la inclinación es una delta de Dirac cuya transformada de Fourier es igual a la unidad para cualquier valor de ω . Esto supone que esta disposición del conductor y de los imanes no introduce ningún cambio en el espectro de la onda de inducción.

La figura 2.5 (b) corresponde a conductores rectos e imanes con

inclinación constante con ángulo total γ . La función de filtrado es un pulso de amplitud constante y anchura γ .

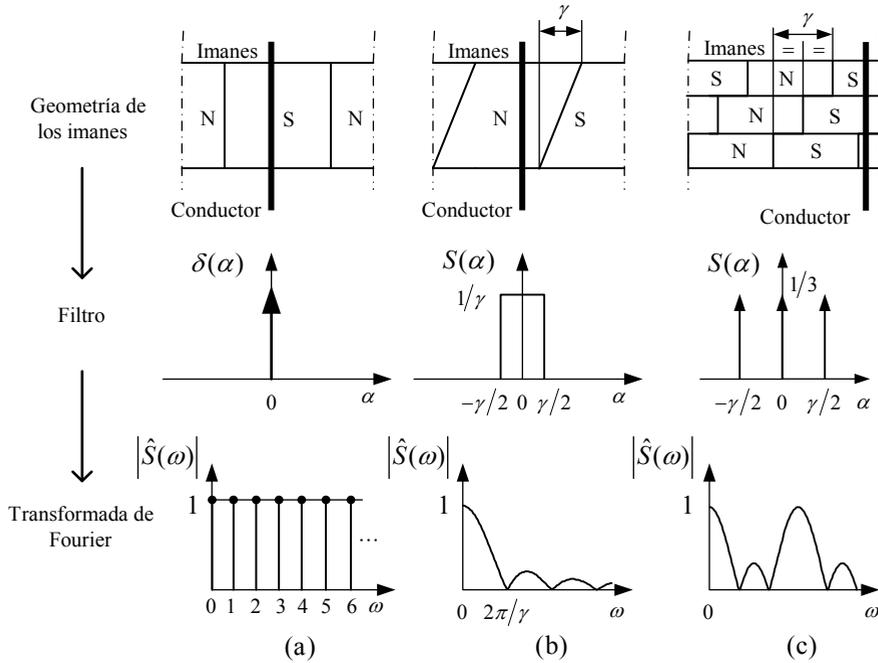


Figura 2.5. Función $S(\cdot)$ para imanes con distintas configuraciones: (a) imanes y ranuras rectos, (b) imanes con inclinación constante y (c) imanes con inclinación en pasos.

Dado que el área bajo la curva $S(\alpha)$ es igual a la unidad, su amplitud es $1/\gamma$. Su espectro es

$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{\gamma}{2}} \frac{1}{\gamma} e^{-j\omega\alpha} d\alpha = \frac{\text{sen}(\gamma\omega/2)}{\gamma\omega} \quad (2.27)$$

que corresponde a la función $\text{sinc}(\cdot)$ con características de filtro pasa bajo.

Como se puede observar en la figura 2.5 (b), el módulo de $\hat{S}(\omega)$ presenta un primer cero en $\omega = 2\pi/\gamma$ y sus posteriores lóbulos van decreciendo en amplitud hasta desaparecer. Si la inclinación γ se aplica sólo a las ranuras, se obtiene el mismo resultado. En la figura 2.5 (c) la inclinación de los imanes se realiza en pasos. Esta configuración es más utilizada que la anterior por motivos de industrialización. Consiste en el apilado de varios módulos compuestos por imanes rectos desplazados angularmente.

En este caso, la tensión generada en un conductor se obtiene sumando las tensiones inducidas por cada uno de los módulos. Al tratarse de un conductor

recto, se hará uso de (2.19),

$$e(\alpha) = r \omega_r B(-\alpha) * \sum_{i=0}^{N-1} l_i \delta(\alpha + \varphi_i) = e_{cr}(\alpha) * S(\alpha) \quad (2.28)$$

l_i y φ_i son la altura y el desplazamiento angular absoluto de cada módulo, respectivamente, y N el número de módulos.

La función $S(\cdot)$ es un tren de N deltas de amplitudes proporcionales a las longitudes de los módulos y situadas en las mismas posiciones angulares que éstos.

$$S(\alpha) = \frac{1}{l_{st}} \sum_{i=0}^{N-1} l_i \delta(\alpha + \varphi_i) \Leftrightarrow \hat{S}(\omega) = \frac{1}{l_{st}} \sum_{i=0}^{N-1} l_i e^{-\varphi_i \omega} \quad (2.29)$$

El espectro de este tipo de onda es periódico y su patrón se repite cada $2\pi N/\gamma$ radianes.

En la figura 2.5 (c) se observa que en frecuencias bajas presenta un comportamiento similar al de los imanes inclinados, pero se degrada para los armónicos superiores, ya que en esta zona las amplitudes de los lóbulos vuelven a crecer.

2.1.2 FEM en un devanado con inducido liso

En este apartado se analiza la generación de la FEM en un devanado aplicando la metodología desarrollada en los apartados anteriores. En primer lugar se obtiene la tensión en un devanado en el caso ideal de inducido liso y posteriormente se introduce el efecto de las ranuras.

La tensión en un devanado $e_w(\alpha)$ es igual a la suma de las tensiones inducidas en cada uno de los conductores $e(\alpha)$ conectados en serie que forman el devanado.

El número de conductores situados bajo un ángulo φ_i será representado mediante la variable R_i . El valor absoluto de R_i representa el número de conductores en φ_i , mientras que el signo de R_i indica la polaridad asignada a la FEM de dichos conductores. La tensión total del devanado resulta

$$\begin{aligned} e_w(\alpha) &= \sum_i e(\alpha) * \delta(\alpha + \varphi_i) R_i \\ &= e(\alpha) * \sum_i \delta(\alpha + \varphi_i) R_i = e(\alpha) * D(\alpha) \end{aligned} \quad (2.30)$$

y en función del conductor recto de referencia,

$$e_w(\alpha) = e_{cr}(\alpha) * S(\alpha) * D(\alpha) \quad (2.31)$$

$D(\alpha)$ es una nueva etapa en la cadena de filtrado, ya que convoluciona con la onda de tensión en un conductor para generar la correspondiente al devanado.

Observación: La tensión inducida en un devanado formado por N conductores alojados en distintas ranuras, puede obtenerse a partir de la onda de tensión en uno de los conductores, convolucionada con la función característica $D(\alpha)$ de la disposición de las ranuras y el número de conductores alojados en cada una.

A modo de ejemplo, en la figura 2.6 (a) se muestra una fase de un devanado trifásico con distribución senoidal

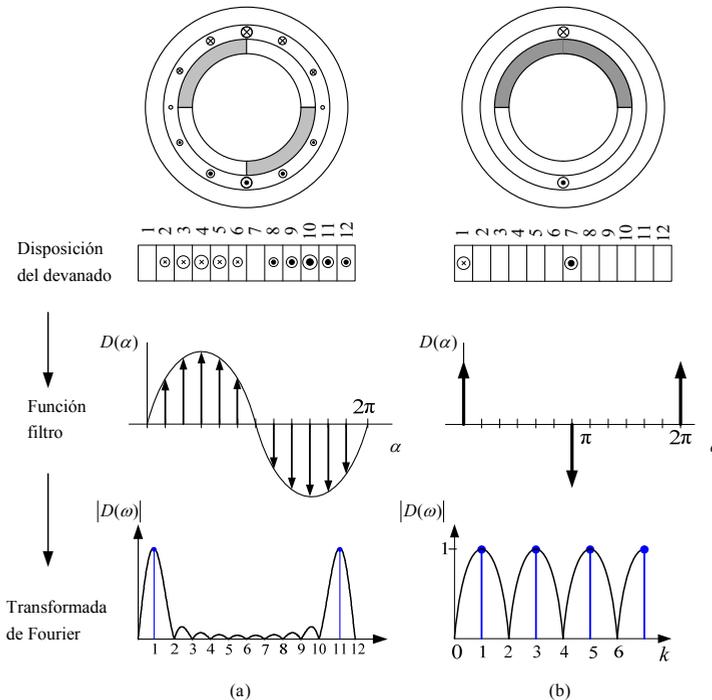


Figura 2.6. Devanado con distribución senoidal (a) y devanado diametral de una ranura por polo y por fase (b).

Esta configuración utiliza bobinas con un número variable de espiras que siguen una ley senoidal dependiendo de la ranura ocupada.

Aunque esta solución dificulta su fabricación, permite obtener una tensión con un bajo contenido armónico. Se puede observar que la función característica de filtrado, $D(\alpha)$, está formada por un tren de deltas cuyas amplitudes son iguales al número de espiras de cada ranura. Se está por tanto

ante un proceso similar al de muestreo de una señal continua, donde el número de espiras desempeña el papel de señal a muestrear y $D(\alpha)$ las muestras obtenidas mediante un tren de impulsos unitarios; siendo la frecuencia de muestreo (frecuencia espacial) igual al número de ranuras. El espectro de la señal muestreada presenta un primer armónico con frecuencia unidad, correspondiente a la función seno, más las réplicas propias de las señales muestreadas, obtenidas mediante sucesivos desplazamientos del espectro original en ambos sentidos cada doce períodos. La figura 2.6(b) corresponde a un devanado formado por una sola bobina diametral. Su función característica está formada por dos deltas separadas π radianes, igual que la separación angular de los conductores en el entrehierro. En este caso también puede considerarse como un proceso de muestreo de una onda continua senoidal con frecuencia de muestreo de dos muestras por período. Aquí las réplicas se encuentran más próximas entre sí debido al reducido valor de la frecuencia de muestreo.

La figura 2.7 muestra dos nuevos ejemplos de función de devanado; de paso entero en (a) y fraccionario en (b) y sus respectivos espectros.

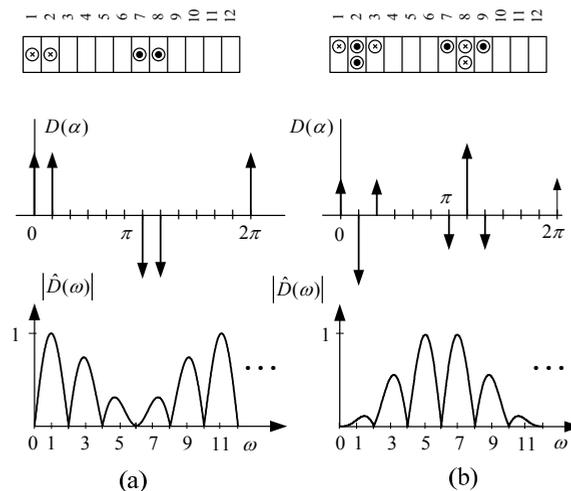


Figura 2.7. Devanado diametral con dos ranuras por polo y por fase (a) y devanado fraccionario (b).

Siguiendo con la analogía con los sistemas continuos en el tiempo, recordaremos que es muy habitual colocar un retenedor de orden cero a la salida del muestreador como filtro de reconstrucción de la señal continua muestreada. Pues bien, la función filtro correspondiente a la disposición de conductores inclinados, como el mostrado en la figura 2.5 (b), es equivalente a la de un retenedor de orden cero, siempre que la distancia γ sea igual al

período de muestreo, lo que equivale a la distancia entre dos ranuras. La envolvente del espectro tiende asintóticamente a cero, al contrario que la señal seno muestreada, cuyas réplicas se extienden a lo largo de todo el eje de frecuencias. Tiene su primer cero en $k = 2\pi/\gamma$, y como $\gamma = 2\pi/N$, resulta que $k = 12$. Esto asegura que las réplicas de la señal seno quedan prácticamente eliminadas.

Representación mediante diagramas de bloques

En la figura 2.8 se ha empleado la representación mediante diagrama de bloques para ilustrar el proceso de generación de la tensión en un devanado.

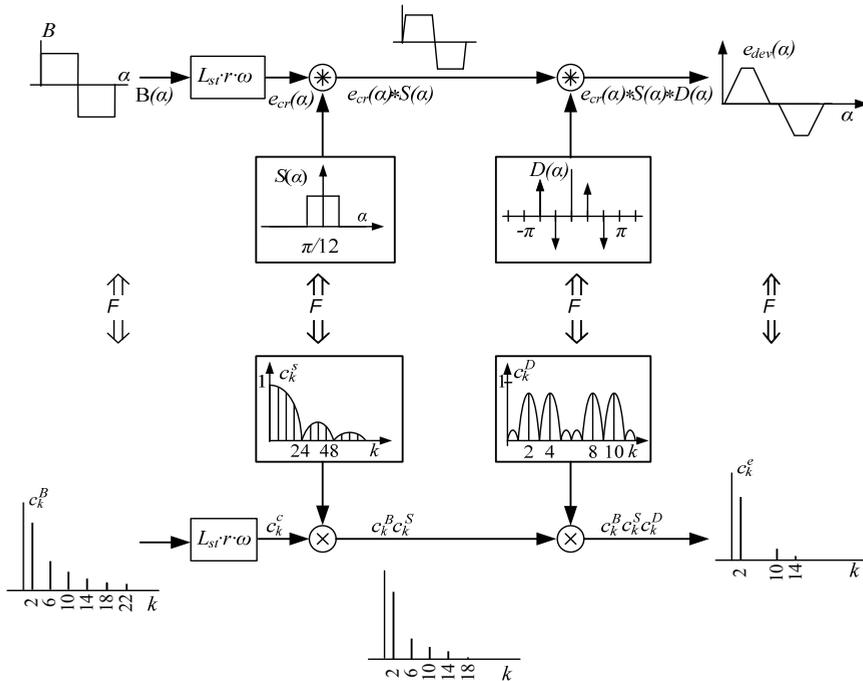


Figura 2.8. Generación de FEM en el devanado en los dominios espacial y frecuencial.

En dicha figura se muestra a modo de ejemplo el caso de un motor trifásico de imanes superficiales, de cuatro polos, seis ranuras, con imanes rectos y conductores con una inclinación total de media ranura.

La parte superior ilustra el proceso de filtrado de la onda de inducción. La primera convolución suaviza los flancos y la segunda reduce la anchura e introduce zonas muertas que le dan una forma más senoidal.

La parte inferior de la gráfica corresponde al dominio de la frecuencia. Las características de filtrado se representan mediante las transformadas de

Fourier de las ondas espaciales. Por tratarse de funciones periódicas sus transformadas dan lugar a espectros discretos, definidos sus coeficientes de Fourier c_k .

Una vez en el dominio de la frecuencia, el producto de convolución se convierte en el producto ordinario. En este ejemplo, el espectro de la onda resultante se obtiene multiplicando coeficiente a coeficiente los espectros de las distintas etapas. En la primera se multiplica el espectro de la onda cuadrada de inducción por el espectro de la onda característica de la inclinación de los conductores, que corresponde a un filtro de paso bajo, con un primer cero en $k = 24$. En el espectro resultante se han reducido los armónicos superiores, lo que es consistente con el suavizado de los flancos comentado antes. La segunda etapa de filtrado corresponde a un filtro periódico en el que se van alternando coeficientes de igual módulo con ceros. La posición de estos últimos es de gran importancia, ya que si se hacen coincidir con la de los armónicos no deseados en la onda primaria son eliminados del espectro. En el caso de la figura 2.8 existen ceros para los valores de k igual a 0, 1, 3, 5, 6, 7, 9, 11, El cero de mayor interés es el de índice $k = 6$, gracias al cual se elimina el de igual valor en la onda de inducción. Al tratarse de un motor de cuatro polos, el sexto armónico espacial se corresponde con el tercer armónico eléctrico.

El proceso de filtrado de la figura 2.8 se puede representar de forma simplificada como se muestra la figura 2.9. En este caso, debe entenderse que la operación de enlace entre los bloques de la parte superior es la convolución y entre los bloques de la parte inferior, el producto ordinario.

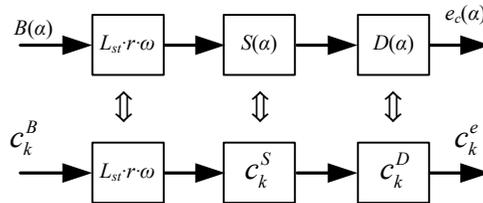


Figura 2.9. Generación de la FEM. Representación mediante bloques en cascada.

Un aspecto a tener en cuenta es que debido a la propiedad conmutativa de la convolución, se puede cambiar el orden de las etapas sin alterar el resultado final, por lo que se podrá utilizar el orden más conveniente para el diseño. En la figura 2.10 se ha reproducido el esquema de la figura 2.8, pero permutando los bloques $D(a)$ y $S(a)$ para visualizar primero el efecto del devanado y después el de la inclinación de los imanes.

Comparando la gráfica de la derecha y la central se visualiza el efecto de la inclinación sobre la onda final. Comparando las mismas gráficas de la figura anterior, se ve el efecto sobre la salida del tipo de devanado elegido.

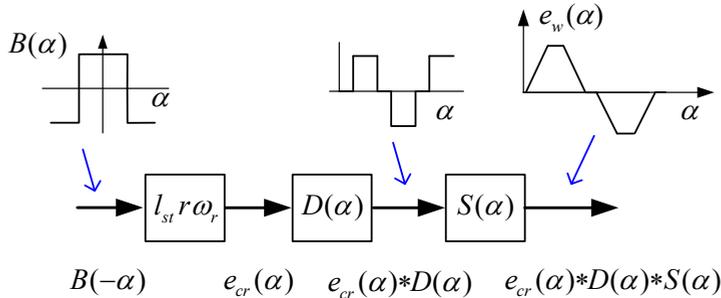


Figura 2.10. Esquema de la figura 2.8 permutando los bloques $D(\alpha)$ y $S(\alpha)$.

2.1.3 FEM en un devanado con ranuras

En los apartados anteriores se ha analizado la generación de tensión en el devanado correspondiente a una fase considerando a los conductores situados en el entrehierro, evitando así introducir el efecto de las ranuras. En este apartado se incluye este nuevo factor que modificará los resultados obtenidos para el inducido liso. En este caso, la expresión de la FEM se planteará a partir de la generada en una bobina, en lugar de en un conductor como se ha venido haciendo hasta ahora. El motivo es que la tensión inducida en una bobina depende directamente del flujo abrazado y que éste se ve afectado por el efecto de las ranuras.

El análisis que sigue se basa en el modelo de la figura 2.11 donde para mayor generalidad las ranuras y los imanes podrán ser inclinados. Se tomará como ranura de referencia la situada más a la izquierda en la figura. Como referencia estática para la medida de la posición angular θ de las ranuras se tomará la línea $l-l'$ que pasa por el centro de la ranura de referencia y recorre el eje z sobre la superficie del inducido.

Como referencia magnética, se considerará una línea de igual inducción a lo largo del eje z sobre la superficie de los imanes. El ángulo girado por el rotor, α , se medirá desde la línea de referencia estática hasta la magnética sobre el plano $z = 0$, que estará situado en el centro de la longitud axial l_{st} .

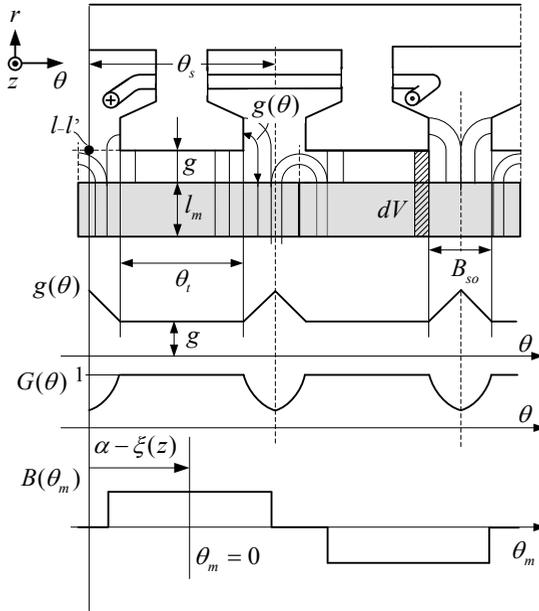


Figura 2.11. Modelo para el análisis de la FEM inducida en una bobina en un estator con ranuras

La FEM inducida en una bobina puede expresarse en función de la velocidad angular, ω_r , del número de espiras, n_b , y de la variación del flujo que la atraviesa, ϕ_b , respecto de la posición angular.

$$e_b(\alpha) = n_b \frac{d\phi_b(\alpha)}{dt} = n_b \omega_r \frac{d\phi_b(\alpha)}{d\alpha} \quad (2.32)$$

Por su parte, el flujo ϕ_b es igual a la suma de los flujos parciales en los t dientes cubiertos por la bobina [12].

Para el primer diente de la figura 2.11, se tiene:

$$\phi_{t1}(\alpha) = r \int_{-l_{st}/2}^{l_{st}/2} \int_0^{\theta_s} B(\theta, \alpha, z) d\theta dz \quad (2.33)$$

$B(\cdot)$ es la densidad de flujo en un punto del entrehierro, r el radio del entrehierro y z la distancia axial.

Para el análisis de la función $B(\theta, \alpha, z)$, correspondiente a la inducción en el entrehierro, se precisa de un modelo magnético de la distribución de las líneas de campo en función de la geometría de los imanes y de los dientes [51-53], [32], [12], [54] y [55]. Un modelo simple, pero algo alejado de la realidad consiste en suponer la permeancia constante bajo los dientes y cero en la zona de las ranuras [32]. Un modelo más preciso y muy utilizado [12],

[32] consiste en suponer progresivo el cambio de permeancia en el paso de un diente a otro. En la figura 2.11 se pueden observar las líneas de campo creada por los imanes permanentes y cómo estas se deforman en las proximidades de los dientes. Bajo los dientes, la distancia g es constante, pero en la zona de las ranuras las líneas se alargan, aumentando de forma lineal desde el final del diente hasta el eje central de la ranura. El incremento que experimenta g va desde cero en el borde del diente hasta el valor $\pi/2 \cdot r \cdot B_{sol}/2$ en el eje central, ya que en este punto las líneas de campo describen un cuarto de círculo. Por otra parte, en las fronteras entre imanes de distinta polaridad se crean cortocircuitos o puentes magnéticos, cerrándose las líneas de campo entre imanes sin pasar al estator. Esto produce una reducción de la longitud efectiva de los imanes de aproximadamente $2g$, siendo g la longitud del entrehierro bajo los dientes.

Admitiendo que la permeabilidad relativa de los imanes es igual a uno e infinita para el acero, que no existe saturación en el acero y que las ranuras son de forma rectangular, $B(\cdot)$ puede ser expresado como

$$B(\theta, \alpha, z) = B_r(\theta, \alpha, z) \frac{l_m}{l_m + g(\theta)} \quad (2.34)$$

donde $B_r(\cdot)$ es la inducción remanente de los imanes, l_m la longitud de los imanes en la dirección de magnetización y $g(\theta)$ la longitud efectiva del entrehierro en función del ángulo θ como se muestra en la figura 2.11.

La ecuación (2.34) puede expresarse como la inducción en el entrehierro en un inducido sin ranuras, $B_g(\cdot)$, y un factor multiplicador que represente el efecto de las ranuras, $G(\theta)$.

$$B(\theta, \alpha, z) = B_r(\theta, \alpha, z) \frac{l_m}{l_m + g} \frac{l_m + g}{l_m + g(\theta)} = B_g(\theta, \alpha, z) \cdot G(\theta) \quad (2.35)$$

donde

$$B_g(\theta, \alpha, z) = B_r(\theta, \alpha, z) \frac{l_m}{l_m + g} \quad (2.36)$$

y

$$G(\theta) = \frac{l_m + g}{l_m + g(\theta)} \quad (2.37)$$

Teniendo en cuenta las relaciones angulares de la figura 2.11,

$$B(\theta, \alpha, z) = B(\theta - \alpha + \xi(z)) \quad (2.38)$$

siendo $\zeta(z)$ la distancia angular entre las referencias estat6rica y magn6tica cuando $\alpha = 0$.

Como en (2.16), se definir6 la funci3n inclinaci3n como

$$S(\xi) = \frac{1}{l_{st}} \frac{dz}{d\xi} \quad (2.39)$$

en el intervalo $[\zeta(-l_{st}/2), \zeta(l_{st}/2)]$ y cero fuera del mismo. Tambi3n se sustituir6 $G(\theta)$ por su unidad b6sica $G_1(\theta)$, la cual toma los mismos valores que $G(\theta)$ en el intervalo $[0, \theta_s]$ y cero fuera del mismo. La ecuaci3n (2.33) puede reescribirse ahora como

$$\phi_1(\alpha) = r l_{st} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_g(\theta - \alpha + \xi) G_1(\theta) S(\xi) d\theta d\xi \quad (2.40)$$

De esta manera, el flujo abarcado por el primer diente puede expresarse como la convoluci3n de las funciones B_g , G_1 y S :

$$\phi_1(\alpha) = l_{st} r [B_g(-\alpha) * S(\alpha) * G_1(\alpha)] \quad (2.41)$$

Si la bobina abarca z_b dientes y estos se encuentran igualmente espaciados, el flujo que la atraviesa es

$$\phi_b(\alpha) = l_{st} r [B_g(-\alpha) * S(\alpha) * G_1(\alpha) * C(\alpha)] \quad (2.42)$$

donde

$$C(\alpha) = \sum_{i=0}^{z_b-1} \delta\left(\alpha - \frac{2\pi i}{z_b}\right) \quad (2.43)$$

caracteriza a la funci3n de posicionado de los dientes abrazados por la bobina.

La tensi3n en la bobina formada por una sola espira se obtiene finalmente de (2.32) derivando respecto de α (2.42):

$$\begin{aligned} e_b(\alpha) &= \omega_r l_{st} r \frac{d}{d\alpha} [B_g(-\alpha) * S(\alpha) * G_1(\alpha) * C(\alpha)] \\ &= \omega_r l_{st} r [B_g(-\alpha) * S(\alpha) * DG_1(\alpha) * C(\alpha)] \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dado que la derivada de la convoluci3n de dos funciones es igual a la derivada de cualquiera de ellas convolucionada con la otra funci3n, se aplicar6 la derivada sobre la funci3n $G_1(\alpha)$, indicando dicha operaci3n mediante $DG_1(\alpha)$.

En (2.44) el producto $DG_1(\alpha) * C(\alpha)$ caracteriza el efecto de las ranuras, cumpliendo el mismo papel que $D(\alpha)$ en el caso de inducido liso.

Por último, la tensión total de una fase se obtiene sumando las tensiones de cada una de las bobinas pertenecientes a dicha fase multiplicándola por el número de espiras y afectándola de la polaridad correspondiente:

$$e_{ph}(\alpha) = \sum_{i=0}^{c_{ph}-1} e_b(\alpha - \theta_i) R_i = e_b(\alpha) * \sum_{i=0}^{c_{ph}-1} \delta(\alpha - \theta_i) R_i = e_b(\alpha) * Ph(\alpha) \quad (2.45)$$

donde c_{ph} es el número de bobinas que componen la fase y θ_i el ángulo de la primera ranura de cada bobina. El módulo de R_i indica el número de espiras de cada bobina y su signo la polaridad de cada bobina.

Finalmente, en (2.46) se muestran las ondas implicadas en la generación de la tensión de fase.

$$\begin{array}{cccccc}
 FEM & conduc. & inclin. & ranura & bobina & fase \\
 e_{ph}(\alpha) = & e_{cr}(\alpha) * & S(\alpha) * & DG_1(\alpha) * & C(\alpha) * & Ph(\alpha) \\
 F \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\
 \hat{e}_{ph}(\omega) = & \hat{e}_{cr}(\omega) \times & \hat{S}(\omega) \times & \widehat{DG_1}(\omega) \times & \hat{C}(\omega) \times & \widehat{Ph}(\omega)
 \end{array} \quad (2.46)$$

Análisis del efecto de las ranuras

La función $G_1(\theta)$ representa la variación relativa de la permeancia debida al efecto de las ranuras. Es muy utilizada en la bibliografía [51-53], [56], [32], [12]. En algunos textos [12] es interpretada como un factor de corrección de ranura, pero en este trabajo se utiliza la derivada de su unidad básica $DG_1(\cdot)$ como una etapa más en la cadena de filtrado.

Se comenzará analizando el efecto de las ranuras para una bobina arrollada sobre un diente, como es el caso de los devanados concentrados, de uso muy extendido en motores de imanes permanentes.

En la figura 2.12 se muestra un ejemplo de función G_1 según el modelo descrito en la figura 2.11 y su derivada DG_1 para una ranura con $\theta_s / \theta_t = 5/3$ y un valor de $G_1(\cdot)$ en el límite de la ranura, $G_{1lim} = G_1(\theta_s/2)$, igual a 0.6. Como puede verse en la misma figura, la derivada de $G_1(\cdot)$ presenta una delta de Dirac en cada extremo como consecuencia de los flancos y cuyo área es igual al valor de G_{1lim} en $\theta = \theta_s/2$, siguiéndole una zona de transición hasta $\theta = -\theta_t / 2$ con área igual a $1 - G_{1lim}$, independientemente de la forma de la curva. En este caso, al estar formada la bobina por un solo diente, la función de posicionado de los dientes se corresponde con una delta unitaria $C(\theta) = \delta(\theta)$.

El espectro de $DG_1(\theta)$ se ha obtenido analíticamente en el apéndice de

este capítulo, cuyo resultado se comenta a continuación. En la representación del espectro se ha normalizado el eje de frecuencias para hacerlo independiente del número de ranuras, z , del motor. En la figura 2.12 se observa que el módulo del espectro muestra lóbulos de amplitud decreciente con la frecuencia, con máximos en torno a los valores $\omega/z = 0.5, 1.5, 2.5 \dots$ y ceros en las proximidades de los valores $\omega/z = 1, 2, 3 \dots$.

Para un primer análisis se considerará que el paso de bobina coincide con el paso polar. De esta forma, la frecuencia eléctrica, ω_e , es igual al número total de ranuras, z , dividido por el número de ranuras de una bobina, z_b , multiplicado por dos: $\omega_e = z/2z_b$. En el caso analizado, $z_b = 1$, por lo tanto, $\omega_e = z/2$. Los máximos y mínimos del espectro pueden ser expresados ahora en función de la frecuencia eléctrica, resultando que los máximos coinciden aproximadamente con los valores $\omega/\omega_e = 1, 3, 5, 7 \dots$ y los ceros en $\omega/\omega_e = 2, 4, 6, \dots$. Los armónicos eléctricos impares sufren una ligera atenuación con la frecuencia, lo que resulta siempre deseable, sin embargo, los armónicos pares no son cancelados completamente ya que $DG_1(\theta)$ no tiene simetría de media onda.

A continuación se compara este resultado con el obtenido para un inducido liso y con el correspondiente al modelo de reluctancia infinita, ambos comentados anteriormente.

En el primer caso se trata del modelo idealizado de inducido sin ranuras, mostrado en la figura 2.13, donde un diente ocuparía todo el paso de ranura, es decir, $\theta_s = \theta_t$. Ahora no existen zonas de transición, por lo que $DG_1(\theta)$ estaría formada por dos deltas de Dirac de distinto signo separadas una distancia igual al paso de ranura. Para este caso idealizado, el espectro se obtiene de forma inmediata:

$$\widehat{DG}_1(\omega) = e^{j\omega\frac{\theta_s}{2}} - e^{-j\omega\frac{\theta_s}{2}} = 2j\text{sen}\left(\omega\frac{\theta_s}{2}\right) \quad (2.47)$$

con máximos en $\omega = \frac{\pi}{\theta_s}, \frac{3\pi}{\theta_s}, \frac{5\pi}{\theta_s} \dots$ y ceros en $\omega = 0, \frac{2\pi}{\theta_s}, \frac{4\pi}{\theta_s} \dots$

Teniendo en cuenta que $z = \frac{2\pi}{\theta_s}$ y que $\omega_e = \frac{z}{2z_b}$ se obtiene la situación de los máximos y de los ceros del espectro:

Para los máximos: $\frac{\omega}{\omega_e} = 1, 3, 5 \dots$

Para los ceros: $\frac{\omega}{\omega_e} = 0, 2, 4, 6 \dots$

En este modelo, desaparecen los armónicos pares del espectro y la amplitud de los lóbulos se mantienen constantes e igual a 2, ya que la bobina tiene dos lados activos.

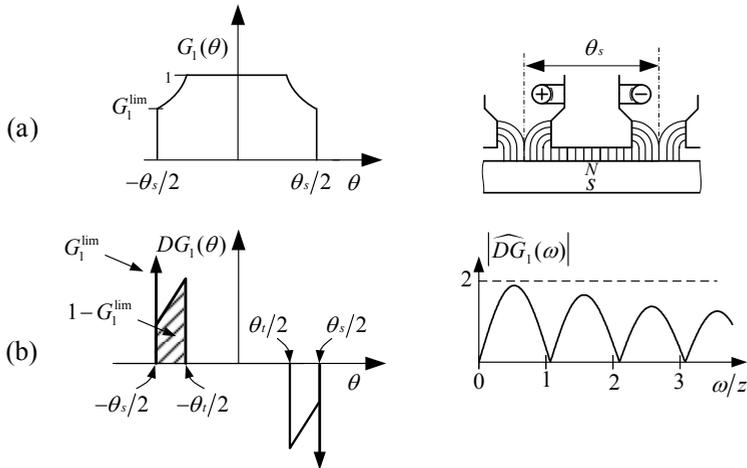


Figura 2.12. Función característica de ranura $G_1(\theta)$ y geometría correspondiente (a). Derivada de $G_1(\theta)$ y espectro correspondiente (b).

El segundo caso se muestra en la figura 2.14. En este modelo se supone cero la permeabilidad relativa en la zona de las ranuras y uno debajo de los dientes. En el ejemplo mostrado, $\theta_s/\theta_t = 5/3$. La función característica está formada por dos deltas unitarias separadas θ_t . Su espectro, obtenido de forma similar al caso anterior, presenta máximos de amplitud 2 y su primer cero tiene el valor $\omega/z = 5/3$, que coincide con la relación entre el paso de ranura y la anchura del diente.

El modelo basado en zonas de transición contiene dos deltas distanciadas θ_t como en el caso de inducido liso, sin embargo, los ceros de su espectro no coinciden con los armónicos eléctricos pares como en este último caso, ni tampoco con el valor $5/3$ del modelo de la figura 2.14. El efecto de las zonas de transición hace que la anchura efectiva del diente esté comprendida entre los valores θ_s y θ_t , como corresponde a los modelos idealizados.

De lo anterior se deduce que para el caso de un devanado concentrado, no debe tomarse como paso de bobina el paso de ranura, ya que no se tendrían en cuenta el desplazamiento de los ceros del espectro originado por las zonas de transición.

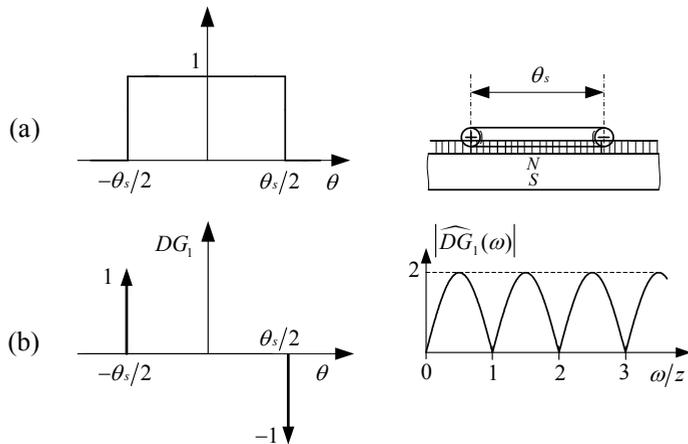


Figura 2.13. Función característica de ranura para el caso de inducido liso. Función característica de ranura $G_1(\theta)$ y geometría correspondiente (a). Derivada de $G_1(\theta)$ y espectro correspondiente (b).

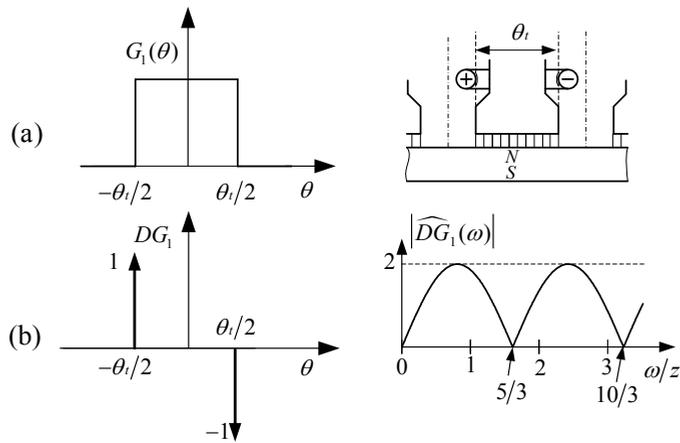


Figura 2.14. Función característica de ranura para el caso de reluctancia infinita en la zona entre dientes: Función característica de ranura $G_1(\theta)$ y geometría correspondiente (a) y derivada de $G_1(\theta)$ y espectro correspondiente (b).

Ahora se analizará el comportamiento de una bobina formada por más de un diente, para lo cual será necesario hacer intervenir a la función $C(\cdot)$ que caracteriza la posición de cada uno de los dientes que contiene la bobina. Esta función está formada por tantas deltas unitarias como dientes contiene la bobina e igualmente espaciadas, como se muestra en la figura 2.15 (a). En

la figura 2.15 (b) se muestra el espectro de $C(\theta)$ para diferentes números de dientes, z_b , y con la frecuencia espacial relativa al número de dientes que componen la bobina. Se puede observar que en $\omega = z$ y en sus múltiplos, la amplitud del espectro toma un valor máximo que coincide con el número total de dientes del estator. En las figuras 2.16, 2.17 y 2.18 se muestra como ejemplo una bobina con un paso de tres dientes para las tres aproximaciones estudiadas en el caso anterior. En dicha figura la permeabilidad relativa para el conjunto de los tres dientes se muestra con $G_3(\theta) = G_1(\theta) * C_3(\theta)$, siendo $C_3(\theta)$ la función posicionado para tres dientes, y con $DG_3(\theta)$ la derivada de $G_3(\theta)$. También se muestran los espectros de $DG_3(\theta)$ para cada una de las aproximaciones.

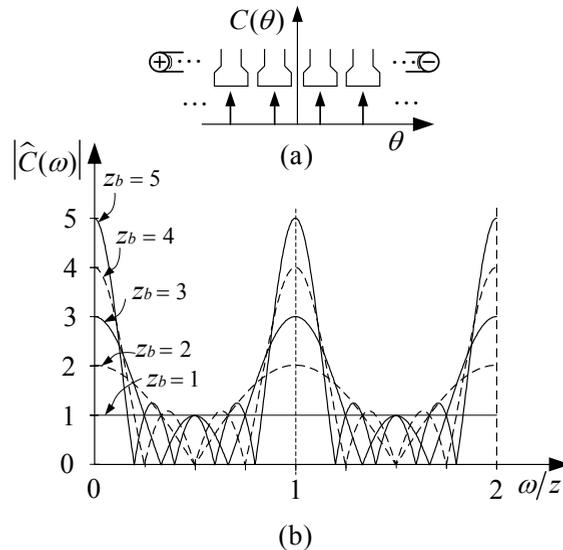


Figura 2.15. (a) Función característica de la distribución de los dientes en una bobina $C(\theta)$. (b) Módulo de $\hat{C}(\omega)$ para un número de ranuras z_b comprendido entre 1 y 5.

En el modelo de inducido liso, la función $DG_3(\theta)$ está formada por dos deltas unitarias, y su espectro tiene lóbulos con máximos de amplitud igual a 2. Este resultado es lógico, ya que al tener la bobina dos lados activos, la tensión generada no puede superar el doble de la tensión en un conductor recto. También puede hacerse otra interpretación basada en tres bobinas con seis lados activos en total, como se muestra en la figura 2.16, donde los conductores interiores a la bobina no producen efecto alguno al anularse entre sí las tensiones inducidas en los mismos.

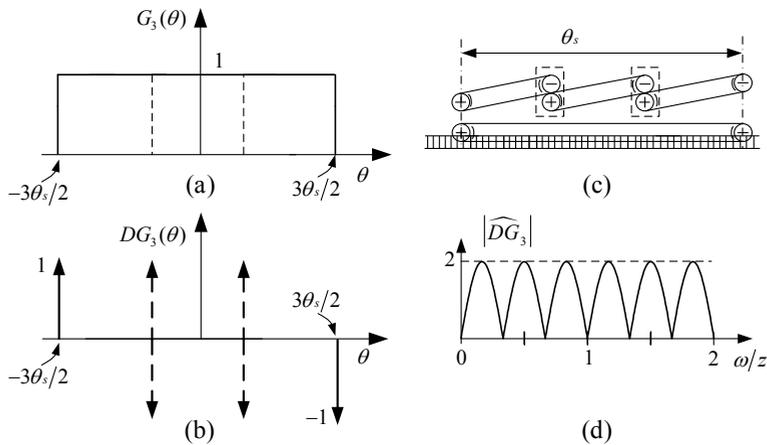


Figura 2.16. Bobina de paso 3 ranuras e inducido liso. (a) Función característica de ranura. (b) Derivada de la función característica de ranura. (c) Modelo de ranuras. (d) Espectro.

El modelo de reluctancia de ranura infinita mostrada en la figura 2.17 puede entenderse como formado por tres bobinas en serie con seis lados activos cuyos efectos no se anulan como en el caso anterior.

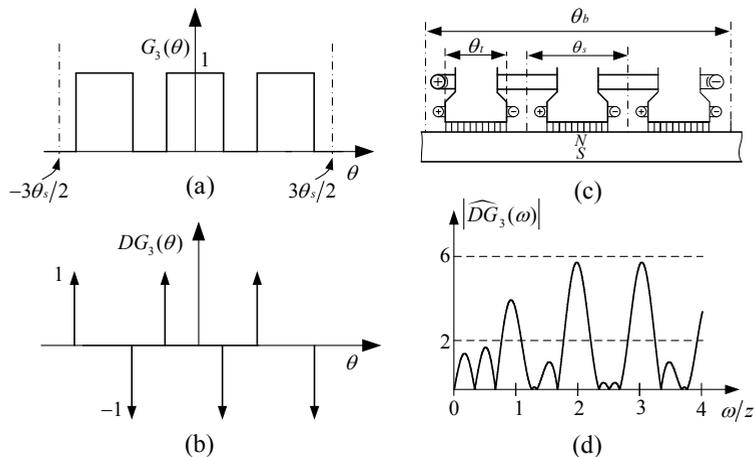


Figura 2.17. Bobina de paso 3 ranuras y reluctancia infinita. Función característica de ranura (a). Derivada de la función característica de ranura (b) Modelo de ranuras (c) y Espectro (d).

Así, su espectro tiene máximos próximos a 6, lo que se corresponde con un devanado de seis lados activos.

El hecho de que el espectro tenga un valor máximo próximo a 6 se explica si se tiene en cuenta que la función $DG_3(\theta)$ es el resultado de la convolución de DG_1 y de $C_3(\theta)$, y que por tanto, el espectro de $DG_3(\theta)$ es el producto de los espectros $\widehat{DG}_1(\omega)$ y $\widehat{C}_3(\omega)$ cuyos lóbulos tienen valores máximos 2 y 3, respectivamente.

A partir de los modelos idealizados de inducido liso y de reluctancia de ranura infinita se puede comprender el comportamiento del modelo basado en zonas de transición para una bobina de paso 3. En la figura 2.18 se observa que cuando existen zonas de transición, algunos lóbulos del espectro superan el valor 2, lo que indica que algunos armónicos son amplificados en comparación con el modelo de inducido sin ranuras.

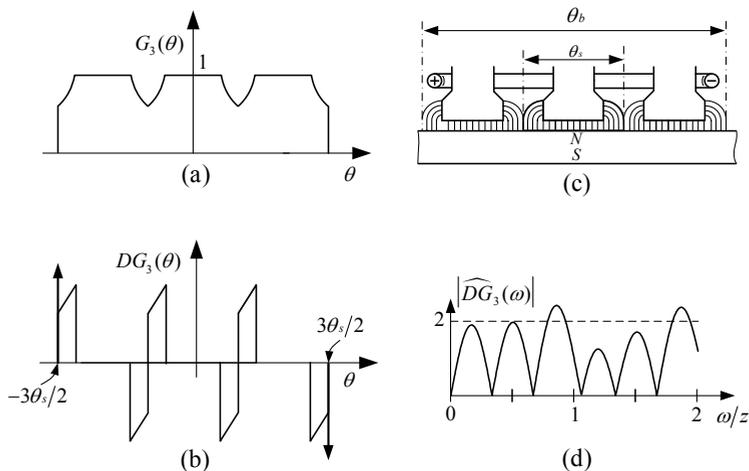


Figura 2.18. Bobina de paso 3 ranuras. Modelo con zonas de transición. (a) Función característica de ranura (a), derivada de la función característica de ranura (b), modelo de ranuras (c) y espectro (d).

Para esos mismos armónicos, la bobina se comportaría como si tuviese más de dos lados activos. Por otra parte, si se comparan las figuras 2.16 (d) y 2.18 (d), las ranuras actúan expandiendo el espectro sobre el eje de frecuencias, siendo de gran importancia el desplazamiento de los ceros. Algunos métodos de eliminación de armónicos de FEM se basan en elegir un paso de bobina determinado, tomando como paso de bobina un múltiplo del paso de ranura, como si se tratase de un inducido liso, lo que no es exacto. El desplazamiento sobre el eje de frecuencia hace aparecer armónicos donde en el modelo sin ranuras existen ceros, lo que puede conllevar la aparición de armónicos adicionales debidos a las ranuras.

El caso de bobinados concentrados, donde la bobina contiene un solo

diente, el resultado es diferente, ya que la función de posicionado $C(\theta)$ es una delta, cuyo espectro es un valor constante para cualquier frecuencia e igual a la unidad. De ello se deduce que ningún armónico será amplificado; más bien al contrario, el efecto de las zonas de transición introduce atenuación sobre el espectro, a modo de filtro pasa bajo, como se comentó en el apartado anterior.

Los efectos de las ranuras sobre la FEM inducida en una bobina arrollada sobre un diente en comparación con la FEM obtenida en una bobina del mismo paso pero en un inducido liso pueden resumirse en los siguientes:

1.- Los ceros del espectro para un inducido con ranuras no coinciden con los correspondientes a un inducido liso debido al efecto de expansión en el eje de frecuencias del primero.

2.- El dentado tiene un efecto amplificador sobre los armónicos espaciales de índice igual al número de ranuras y sus múltiplos.

3.- Las zonas de transición actúan como filtro pasa bajo, quedando de manifiesto en el caso de los devanados concentrados.

Para finalizar esta sección, en la figura 2.19 se muestra la generación de FEM de una fase incluyendo el efecto de las ranuras.

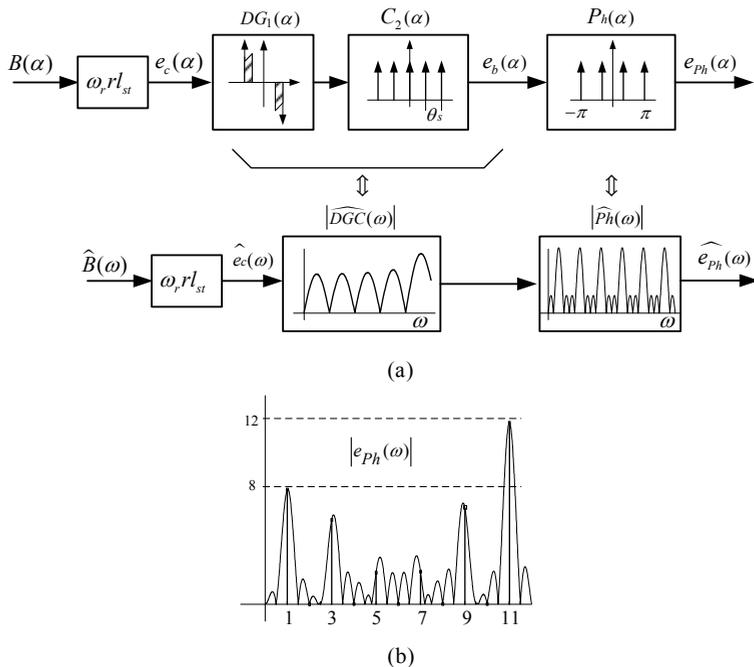


Figura 2.19. Esquema de la generación de tensión de fase incluyendo el efecto de las ranuras (a) y espectro correspondiente (b).

2.2 Modelado del par electromagnético

Para reducir el rizado de par es preciso conocer el origen del mismo y el efecto que ejercen sobre él las distintas ondas espaciales, así como la influencia de la alimentación. En este apartado se caracteriza el par electromagnético en el dominio espacial y en el frecuencial.

2.2.1 Características del par en el dominio espacial

El par electromagnético en un motor de imanes permanentes puede ser expresado como la variación de la coenergía respecto del cambio de posición angular del rotor respecto del estator [12]:

$$T = \left. \frac{\partial W}{\partial \alpha} \right|_{i=const} \quad (2.50)$$

Aplicando (2.50) al caso lineal del acoplamiento entre bobinas del estator y el flujo de los imanes resulta,

$$T = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{d\alpha} - \frac{1}{2} \phi_m^2 \frac{dR}{d\alpha} + n i \frac{d\phi_m}{d\alpha} \quad (2.51)$$

El primer sumando es conocido como el par de reluctancia, que depende de la variación de inductancia de las bobinas respecto de la posición angular relativa estator-rotor y del cuadrado de la intensidad que las recorre. El segundo sumando es el par de *cogging*, relacionado con las variaciones relativas de reluctancia entre estator y rotor y con el flujo de los imanes, siendo independiente de la intensidad. El último término es el par electromagnético, debido a la variación del flujo mutuo de los imanes y las bobinas multiplicado por la intensidad que recorre las bobinas.

En un motor de imanes superficiales, las inductancias de las bobinas son prácticamente independientes de la posición del rotor, por lo que el primer sumando de (2.51) será nulo. En este apartado se analiza el tercer sumando o par electromagnético, reservándose el estudio del par de *cogging* al apartado 2.3 de este mismo capítulo.

Supondremos que el motor está alimentado por una fuente de tensión o de intensidad de forma que la corriente en cada una de las fases depende sólo del ángulo de giro del rotor respecto del estator. Los fenómenos transitorios no se tendrán en cuenta, así como aquellas perturbaciones de la alimentación no relacionadas con el movimiento del rotor.

El par electromagnético puede ser expresado como

$$T = ni \frac{d\phi_m}{d\alpha} = ni \frac{d\phi_m}{dt} \frac{dt}{d\alpha} = \frac{ei}{\omega_r} \quad (2.52)$$

Aplicando (2.52) al caso de una bobina de una fase,

Par debido a una fase de alimentación

$$T_b = \frac{e_b i_{ph}}{\omega_r} \quad (2.53)$$

siendo T_b el par debido a una bobina de una fase del motor por la que circula la intensidad i_{ph} , e_b la tensión inducida en dicha bobina y ω_r la velocidad angular del rotor.

En el apartado 2.1.3 se analizó la tensión inducida en una bobina en presencia de ranuras, ampliando posteriormente el estudio a todas las bobinas de una misma fase y llegando finalmente al resultado de (2.46):

$$e_{ph}(\alpha) = e_{cr}(\alpha) * S(\alpha) * DG_1(\alpha) * C(\alpha) * Ph(\alpha) \quad (2.54)$$

Sustituyendo $e_{cr}(\alpha)$ por su valor de (2.19), resulta

$$e_{ph}(\alpha) = r l_{st} \omega_r B(-\alpha) * S(\alpha) * DG_1(\alpha) * C(\alpha) * Ph(\alpha) \quad (2.55)$$

De esta expresión se deduce la del par motor de una fase, sin más que dividir por la velocidad angular y multiplicar por la corriente de fase.

$$T_{ph}(\alpha) = r l_{st} B(-\alpha) * S(\alpha) * DG_1(\alpha) * C(\alpha) * Ph(\alpha) i_{ph}(\alpha) \quad (2.56)$$

Con el objetivo de relacionar las funciones que componen (2.56) con los elementos de la máquina, se expresará de nuevo el par de una fase, pero ahora en función de las ondas espaciales de capa de corriente, $J(\theta)$, y de inducción, $B(\theta)$, que aplicadas a un modelo de imanes y ranuras rectos resulta

$$T_{ph}(\alpha) = r l_{st} \int_0^{2\pi} B(\theta - \alpha) J(\theta) d\theta = r l_{st} B(-\alpha) * J(\alpha) \quad (2.57)$$

Comparando las expresiones (2.56) y (2.57) se obtiene la siguiente igualdad

$$J(\alpha) = S(\alpha) * DG_1(\alpha) * C(\alpha) * Ph(\alpha) i_{ph}(\alpha) \quad (2.58)$$

lo que significa que la convolución de las funciones S , DG_1 , C y Ph multiplicada por la intensidad de fase da como resultado la onda espacial de

capa de corriente.

La onda espacial

$$S(\alpha) * DG_1(\alpha) * C(\alpha) * Ph(\alpha) = A(\alpha) \quad (2.59)$$

representa el perfil de los conductores ficticios situados entre las ranuras como se indica en la figura 2.20 y desempeña el papel de capa de corriente unitaria o por amperio. Las deltas situadas a ambos lados de la bobina así como las zonas de transición rayadas tienen el mismo significado que las correspondientes a la función característica de ranura $DG_1(\alpha)$. Se recordará que en el modelo de ranuras cerradas del apartado 2.1.3 no existen zonas de transición, permaneciendo sólo las deltas en los extremos de la bobina. En los modelos de capa de corriente de algunos textos como en F. Moeller, pág. 333 [2] sólo se tiene en cuenta el efecto de la capa de corriente en las ranuras correspondientes a los lados activos de las bobinas y no el efecto de todas las ranuras.

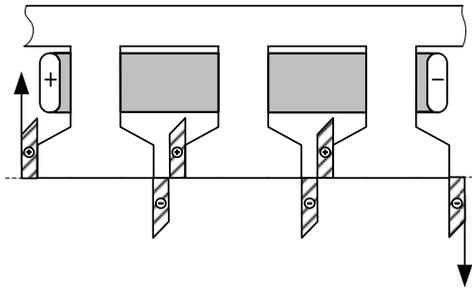


Figura 2.20. Capa de corriente para una bobina de paso tres dientes.

La generación de par en una fase en función de la capa de corriente se muestra en la figura 2.21 mediante diagrama de bloques.

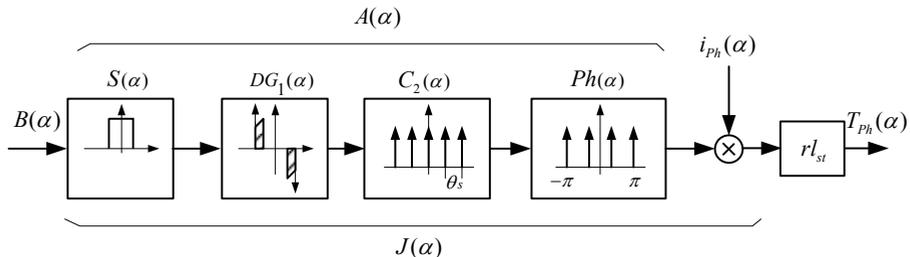


Figura 2.21. Generación del par motor de una fase como producto de la densidad de corriente por la intensidad de fase incluyendo el efecto de las ranuras.

Aunque el modelo representado en la figura 2.21 se corresponde con los elementos que intervienen en la generación del par electromagnético como son la inducción y la capa de corriente, para un análisis práctico resulta más conveniente expresar el par en función de la tensión y de la intensidad de fase, como se muestra en la figura 2.22, ya que estas variables son fácilmente medibles desde el exterior de la máquina.

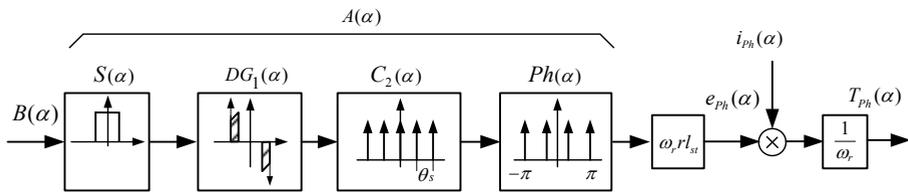


Figura 2.22. Generación del par electromagnético de una fase como producto de la tensión por la intensidad incluyendo el efecto de las ranuras.

Par en un motor trifásico

El par electromagnético en un motor trifásico puede obtenerse sumando el par generado en cada una de las fases, según se muestra en el diagrama de bloques de la figura 2.23 (a). Si las formas de onda de las tensiones e intensidades de las respectivas fases son iguales pero desplazadas un tercio de periodo, el par resultante puede obtenerse sumando el par de una de las fases con dos réplicas de la misma función desplazadas 120 y 240 grados.

$$T_1(\alpha) = \frac{e_1 i_1(\alpha)}{\omega_r}; \quad T_2(\alpha) = \frac{e_2 i_2(\alpha)}{\omega_r} = \frac{e_1 i_1(\alpha - \varphi_2)}{\omega_r}; \quad T_3(\alpha) = \frac{e_3 i_3(\alpha)}{\omega_r} = \frac{e_1 i_1(\alpha - \varphi_3)}{\omega_r}$$

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= e_1 i_1(\alpha) + e_1 i_1(\alpha - \varphi_2) + e_1 i_1(\alpha - \varphi_3) \\ &= T_1(\alpha) * [\delta(\alpha) + \delta(\alpha - \varphi_2) + \delta(\alpha - \varphi_3)] \\ &= T_1(\alpha) * g_3(\alpha) \end{aligned}$$

(2.60)

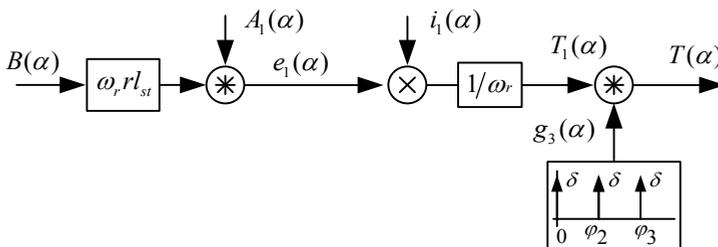
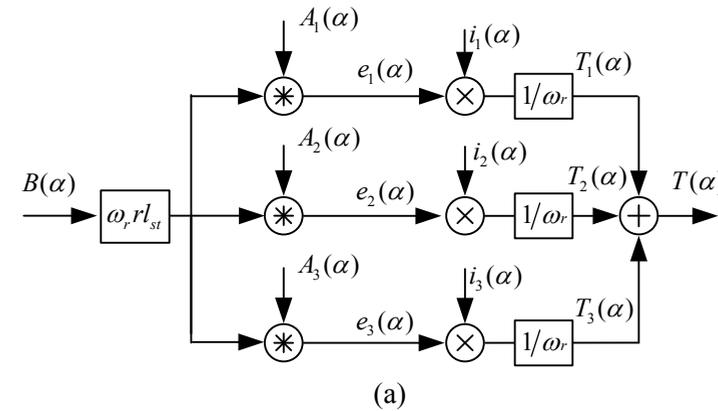


Figura 2.23. Par motor en el caso de no simetría (a) y modelo con simetría trifásica (b).

El par resultante puede obtenerse por tanto convolucionando el par de una fase con la función característica del desplazamiento entre las tensiones y entre las intensidades de las tres fases. La condición impuesta a las tensiones e intensidades no exige que éstas sean sinusoidales.

Estas operaciones quedan reflejadas en los diagramas de la figura 2.23 (b) donde se ha introducido la nueva función que modela la simetría trifásica, $g_3(\alpha)$. La función $g_3(\alpha)$ juega el papel de filtro espacial, ya que, como veremos más adelante, limita el número de armónicos presentes en el par.

2.2.2 Características del par en el dominio frecuencial

En ocasiones es necesario validar el diseño teórico de una máquina comparándolo con los resultados prácticos o bien investigar las posibles causas de fallos. En estos casos el análisis espectral es el mejor procedimiento de comparación debido a la extensa información que permite obtener. En este apartado se muestra la utilidad del análisis espectral en lo referente al par motor, que si bien es ya conocida y cuenta con abundante bibliografía, se presenta mediante una formulación más simple, ya que al tener una referencia en el dominio espacial se hace más entendible.

Se partirá del modelo trifásico con simetría de devanado y de intensidad de la figura 2.23 (b) que será convertido al dominio de la frecuencia. Para ello debe obtenerse la transformada de Fourier de las funciones de filtrado y permutar las operaciones de convolución y producto, como se muestra en la figura 2.24. $A(\alpha)$ es el resultado de la convolución de $S(\alpha)$, $DB_1(\alpha)$, $C(\alpha)$ y $Ph(\alpha)$ y que, según se vio antes, representa la capa de corriente unitaria o por amperio. Por su parte, $\hat{A}(\omega) = \hat{S}(\omega) \cdot \widehat{DB}_1(\omega) \cdot \hat{C}(\omega) \cdot \widehat{Ph}(\omega)$ y el producto $\hat{A}(\alpha) \cdot i_1(\alpha)$ se convierte en la convolución en el dominio de la frecuencia $\hat{A}(\omega) * \hat{i}_1(\omega)$.

La función g_3 caracteriza el desplazamiento espacial de las ondas de par de cada una de las fases, permitiendo conocer el par electromagnético total a partir del modelo de una fase. Su transformada de Fourier obedece a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
 g(\alpha) &= \delta(\alpha) + \delta(\alpha - \varphi_2) + \delta(\alpha - \varphi_3) \\
 &\quad \Downarrow \\
 \hat{g}(\omega) &= 1 + e^{-j\varphi_2\omega} + e^{-j\varphi_3\omega}
 \end{aligned}
 \tag{2.61}$$

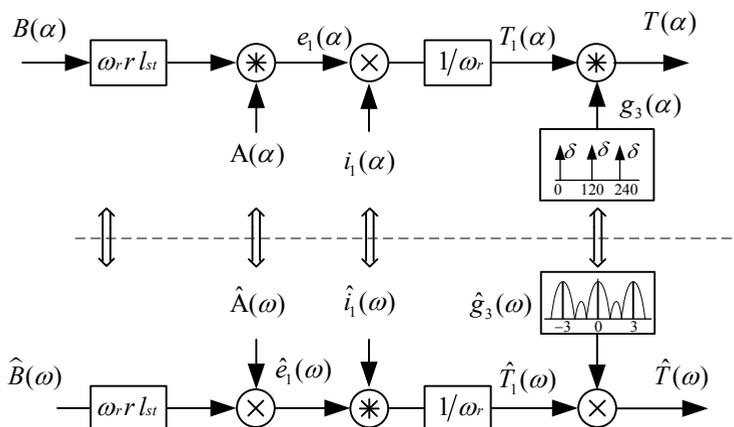


Figura 2.24. Modelo espacial de par con simetría trifásica y modelo frecuencial correspondiente.

En la figura 2.25 se ha representado el espectro de $g_3(\alpha)$, formado sólo por los armónicos múltiplos de tres y por la componente continua, quedando de manifiesto que el par en un motor trifásico sólo puede contener armónicos con estos índices. Los armónicos distintos a éstos que pueda contener $\hat{T}_1(\omega)$ serán cancelados por $\hat{g}_3(\omega)$.

Sin embargo, en la práctica puede ocurrir que las ondas de tensión e intensidad de las tres fases no sean exactamente iguales debido a las siguientes razones: i) desequilibrio de amplitudes, ii) desequilibrio de fases y iii) desequilibrio debidos a formas de ondas diferentes. La primera razón se traducirían en amplitudes diferentes de las deltas de $g_3(\alpha)$, que dejarían de ser unitarias, la segunda en el desplazamiento de dichas deltas sobre las posiciones nominales de $2\pi/3$ y $4\pi/3$. En el tercer tipo, al ser diferentes las ondas de par de cada una de las fases, no es aplicable el modelo basado en el desplazamiento y suma del par de una fase y por lo tanto el desequilibrio no podrá ser caracterizado por la función g_3 . El par trifásico deberá ser resuelto sumando los espectros de par de cada una de las fases.

Para cualquiera de los casos de asimetría comentados no se producirá la cancelación de los armónicos de índice $\omega = 1, 2, 4, 5, 7 \dots$ que pudiera contener el par de cualquiera de las fases. La existencia de estos armónicos en el par será por tanto la consecuencia de un problema de desequilibrio trifásico. En el análisis que sigue, no se tendrán en cuenta los desequilibrios debidos a formas de ondas diferentes de la tensión o de la intensidad de las distintas fases. De esta forma, los desequilibrios trifásicos pueden modelarse

mediante la función g_3 y el par trifásico mediante el par generado por una fase y la mencionada función g_3 .

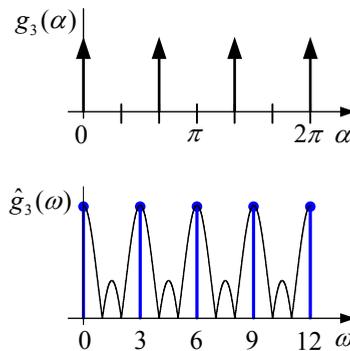


Figura 2.25. Espectro de la función característica de la simetría trifásica $g_3(\alpha)$.

En el apartado siguiente se analiza el contenido armónico de $\hat{T}_1(\omega)$, que depende a su vez de $\hat{e}_1(\omega)$ y de $\hat{i}_1(\omega)$.

2.2.3 Características espectrales del par trifásico a partir del par de una fase.

El par en una fase es el producto de la FEM por la intensidad de fase, dividido por la velocidad angular. Al pasar al dominio frecuencial, la operación producto se convierte en la convolución de los respectivos espectros. Primero se presentará el caso general y posteriormente se aplicarán algunas restricciones a las formas de onda de la tensión y de la intensidad que permiten simplificar los desarrollos.

Caso general

Se definirán los coeficientes de Fourier para las ondas e_1 , i_1 y T_1 de la fase 1.

$$\begin{aligned}
 T_1(\alpha) &= \frac{1}{\omega_r} i_1(\alpha) \cdot e_1(\alpha) & e_1(\alpha) &\leftrightarrow c_k^e & c_k^{T_1} &= \frac{1}{\omega_r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^i \cdot c_{k-n}^e \\
 & & i_1(\alpha) &\leftrightarrow c_k^i & & \\
 & & T_1(\alpha) &\leftrightarrow c_k^{T_1} & & \\
 T_1(\alpha) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{T_1} e^{jk\alpha}
 \end{aligned}
 \tag{2.62}$$

$c_k^{T_1}$ es la convolución discreta de c_k^i y de c_k^e .

El índice k se corresponde con el número de ciclos de las ondas espaciales a lo largo de 360 grados mecánicos.

Una formulación alternativa de (2.62) es la matricial, donde el vector de coeficientes del par se obtiene a partir de la matriz de convolución. Para los primeros cinco armónicos es de la forma siguiente:

$$\begin{pmatrix} c_{-2}^T \\ c_{-1}^{T_1} \\ c_0^{T_1} \\ c_1^{T_1} \\ c_2^{T_1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega_r} \begin{pmatrix} c_0^e & c_{-1}^e & 0 & 0 & 0 \\ c_1^e & c_0^e & c_{-1}^e & c_{-2}^e & 0 \\ c_2^e & c_1^e & c_0^e & c_{-1}^e & c_{-2}^e \\ 0 & c_2^e & c_1^e & c_0^e & c_{-1}^e \\ 0 & 0 & c_2^e & c_1^e & c_0^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-2}^i \\ c_{-1}^i \\ c_0^i \\ c_1^i \\ c_2^i \end{pmatrix} \quad (2.63)$$

o bien, $\mathbf{C}^T = \omega_r^{-1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{C}^i$, donde \mathbf{C}^T y \mathbf{C}^i son el vector de coeficientes de par y el de intensidad, respectivamente, y \mathbf{E} la matriz de convolución.

Por otra parte, al ser $T_1(\alpha)$ una función real, se verifica que $c_k^{T_1} = c_{-k}^{T_1*}$, pudiéndose entonces expresar en función del módulo de los coeficientes:

$$T_1(\alpha) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k^{T_1}| \cos[k\alpha + \arg(c_k^{T_1})] \quad (2.64)$$

Simplificaciones del caso general

a) Sistema de alimentación equilibrado a tres hilos

Si se trata de un sistema a tres hilos, como es lo más habitual, es necesario introducir una restricción en lo relativo a la forma de onda de la intensidad, pues en estos casos se verifica que $i_1(t) + i_2(t) + i_3(t) = 0$ y como $\omega t = \alpha$, también se verifica que $i_1(\alpha) + i_2(\alpha) + i_3(\alpha) = 0$.

Si el sistema de corrientes está equilibrado en amplitud y en fase, independientemente de la forma de onda, se verifica que

$$\begin{aligned}
& i_1(\alpha) + i_2(\alpha) + i_3(\alpha) \\
&= i_1(\alpha) * [\delta(\alpha) + \delta(\alpha - 2\pi/3) + \delta(\alpha - 4\pi/3)] \\
&= i_1(\alpha) * g_3(\alpha) = 0 \\
&\quad \Downarrow \\
&\hat{i}_1(\omega) * \hat{g}_3(\omega) = 0
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Del espectro $\hat{g}_3(\omega)$, representado en la figura 2.25, y de la igualdad (2.65), $\hat{i}_1(\omega) \cdot \hat{g}_3(\omega) = 0$, se deduce que la intensidad $\hat{i}_1(\omega)$ debe ser igual a cero para $\omega = 0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots$, es decir, en sistemas equilibrados a tres hilos la intensidad no contiene armónicos múltiplos de tres ni tampoco componente continua.

b) Tensión inducida de periodicidad $2\pi/p$ y de periodicidad 2π

En los motores con p pares de polos el período de la componente fundamental de la tensión inducida, o unidad básica de onda, es $360/p$ grados mecánicos, siendo entonces el índice k de los armónicos generados por ella múltiplo de p , esto es, $k = q \cdot p$, siendo $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm \infty$. La intensidad de fase también debe tener periodicidad $2\pi/p$ en relación a la referencia mecánica. Existen sin embargo casos donde la periodicidad de la tensión generada es 2π en lugar de $2\pi/p$, dando lugar a armónicos múltiplos no enteros de la frecuencia fundamental eléctrica: subarmónicos e interarmónicos, que están provocados por lo general por irregularidades de la onda de inducción y asimetrías del bobinado. A continuación se analiza este apartado con más de detalle.

Para simplificar el análisis se considerará la tensión inducida en un devanado sobre un inducido sin ranuras, cuya cadena de generación se estudió en el apartado 2.1.2 y que se muestra en la figura 2.26.

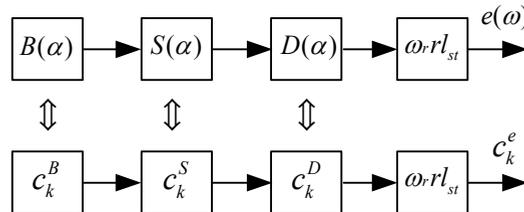


Figura 2.26. Cadena de generación de la FEM.

Del diagrama de la figura 2.26, se deduce que para que la FEM contenga armónicos de periodicidad 2π , éstos deben estar presentes en todos los bloques que forman la cadena. La función característica de la inclinación de las ranuras, $S(\alpha)$, es de periodicidad 2π , ya que está formada por un solo pulso, pero la inducción $B(\alpha)$ y la distribución de los conductores en el entrehierro, $D(\alpha)$, pueden ser de periodicidad 2π o $2\pi/p$ dependiendo del diseño. $B(\alpha)$ es, por lo general, de periodicidad $2\pi/p$ ya que lo más frecuente es que sean idénticos todos los pares de polos que forman la onda de inducción. No obstante, en algunos diseños se busca la asimetría para reducir el par de *cogging* o eliminar algunos armónicos de FEM. Por su parte, a $D(\alpha)$ le ocurre algo similar a lo comentado para $B(\alpha)$. Por lo general se busca una distribución de las bobinas con periodicidad $2\pi/p$ para que sólo contenga armónicos múltiplos del fundamental eléctrico, pero ello requiere que el número de ranuras por polo y fase, N_{spp} , sea un número entero, lo que casi siempre es incompatible con unas buenas características de par de *cogging*. En consecuencia, si N_{spp} es fraccionario, la periodicidad de $D(\alpha)$ es 2π .

En el proyecto hay que evitar que $B(\alpha)$ y $D(\alpha)$ tengan a la vez periodicidad 2π , ya que ello supondría la existencia de subarmónicos e interarmónicos eléctricos en la tensión de fase que podrían llegar a manifestarse en el par. No obstante, es inevitable la existencia de un cierto grado de asimetría causada por tolerancias mecánicas de posicionado de los imanes y por variaciones en las características magnéticas de los mismos.

La figura 2.27 muestra dos ejemplos de ondas con periodicidad 2π y $2\pi/p$. En (a) se ha representado la onda correspondiente a un bobinado fraccionario con $N_{spp} = 3/4$ con nueve ranuras y cuatro polos y en (b) con $N_{spp} = 1$ con doce ranuras y cuatro polos. En la figura se indican con el índice k los armónicos con referencia a 2π radianes mecánicos y con el índice q los armónicos eléctricos, es decir, con referencia a $2\pi/p$ radianes mecánicos. En el caso (b) los armónicos espaciales distintos de cero se corresponden con los armónicos eléctricos de índices enteros, mientras que en (a) aparecen armónicos de índice distintos de los eléctricos.

En lo que sigue se supondrá que $e_1(\alpha)$ tiene periodicidad $2\pi/p$, admitiendo con ello que alguna de las ondas espaciales $B(\alpha)$ o $Ph(\alpha)$ tienen dicha propiedad, lo que permite tomar q como nuevo índice armónico en (2.62), pero con referencia a $360/p$ grados mecánicos. El empleo del índice q tiene la ventaja de ser directamente observable a través de la tensión inducida y mediante la intensidad de fase.

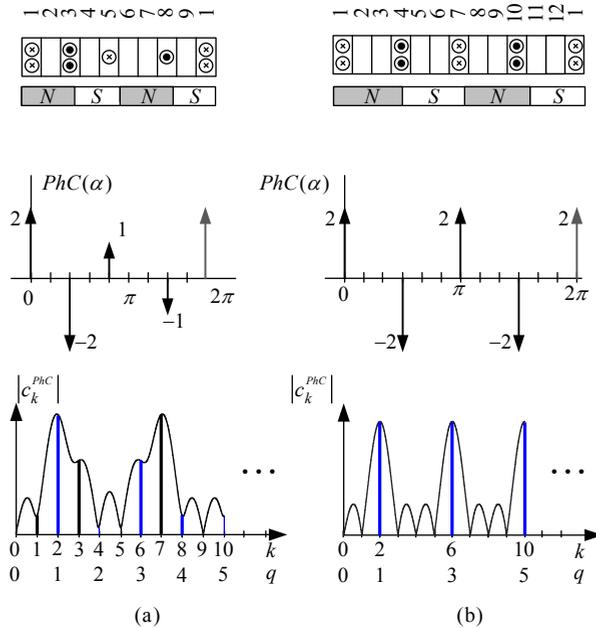


Figura 2.27. (a) Configuración de devanado fraccionario de $N_{spp} = 3/4$ con 9 ranuras y 4 imanes (a). Configuración de devanado de paso entero de $N_{spp} = 1$ con 12 ranuras y 4 imanes (b).

Análisis de casos frecuentes

A continuación se describen tres casos que suelen aparecer con frecuencia en la práctica: onda de intensidad senoidal y FEM con armónicos de periodicidad $2\pi/p$, onda de intensidad senoidal y FEM con armónicos de periodicidad 2π y onda de intensidad con armónicos impares y FEM con armónicos de periodicidad $2\pi/p$.

Caso 1. Intensidad senoidal y periodicidad $2\pi/p$

En la mayoría de los motores síncronos se busca que la intensidad de fase sea una función senoidal de α con el objetivo de conseguir un par uniforme. Bajo este supuesto, la expresión (2.62) se simplifica en gran medida como se verá a continuación.

$$c_q^{T_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^i \cdot c_{q-n}^e \quad (2.66)$$

En primer lugar supondremos que $i_1(\alpha) = I \cos(p\alpha)$, verificándose que $c_q^i = 0$ para $q \neq 1, -1$ y $c_1^i = c_{-1}^i$. Además, $c_0^e = 0$ ya que el valor medio de $e_1(\alpha)$ es nulo. Por tanto,

$$c_{q-1}^T = c_1^i \cdot c_{q-1}^e + c_{-1}^i \cdot c_{q+1}^e = c_1^i (c_{q-1}^e + c_{q+1}^e) \quad (2.67)$$

Si además se admite que la onda de tensión tiene simetría de media onda, su espectro no contendrá armónicos pares y el par estaría formado solamente por los siguientes armónicos:

$$c_q^e = \begin{cases} c_q^e, & q \text{ impar} \\ 0, & q \text{ par} \end{cases} \Rightarrow c_q^T = c_1^i (c_{q-1}^e + c_{q+1}^e) = \begin{cases} c_q^T, & q \text{ par} \\ 0, & q \text{ impar} \end{cases} \quad (2.68)$$

Por último, si existe simetría trifásica tanto en las ondas de tensión como de intensidad, el par resultante de las tres fases solo contendrá armónicos de índices múltiplos de 3 y el fundamental, de índice cero.

$$c_q^T = 3c_1^i (c_{q-1}^e + c_{q+1}^e) = \begin{cases} c_q^T, & q = 0, 6, 12, 18... \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (2.69)$$

El par útil está representado por el armónico de índice cero. Teniendo en cuenta que para una onda real, los coeficientes de Fourier cumplen que $c_k = c_{-k}^*$, el par efectivo también puede expresarse como

$$c_0^T = 3c_1^i 2 \operatorname{Re}\{c_1^e\} = 6 c_1^i \operatorname{Re}\{c_1^e\} \quad (2.70)$$

de donde se deduce que el máximo valor de par se conseguirá cuando el primer coeficiente de Fourier de la onda de FEM sea real, lo que ocurre cuando está en fase con la intensidad.

En la figura 2.28 se muestran de forma simplificada los coeficientes que intervienen en cada una de las etapas, para el supuesto de un devanado sin simetría de media onda y con una onda de inducción que sí la posee.

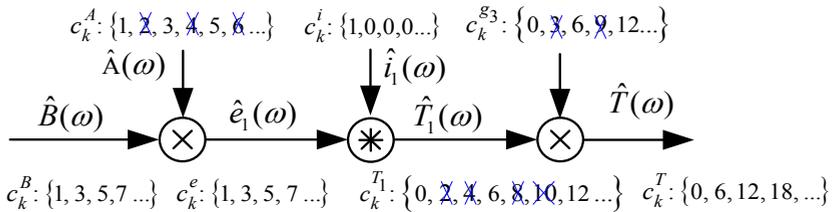


Figura 2.28. Diagrama de coeficientes de las etapas que intervienen en la generación del par para simetría trifásica e intensidad senoidal.

Los índices que aparecen tachados (x) son aquellos que se cancelan al no estar presentes en las dos ondas que intervienen en el producto. Así, en el producto de los coeficientes de la inducción c_k^B por los de la capa de corriente c_k^A , los coeficientes pares de esta última no aparecen en la onda de inducción. Por su parte, el par de una fase tiene todos los armónicos pares como resultado de la convolución de c_k^i y c_k^e , pasando al par total sólo los coeficientes múltiplos de seis, o sea, los comunes a c_k^T y a c_k^{g3} . Como se comentó anteriormente, si no existe simetría, el par puede contener armónicos de T_1 .

Caso 2. Intensidad senoidal y periodicidad 2π

Ya se ha comentado que si no existe simetría en el devanado ni en la onda de inducción, pueden aparecer en la FEM subarmónicos e interarmónicos. Si en este supuesto la intensidad es senoidal, los coeficientes armónicos del par de una fase vendrán dados por

$$c_q^{\bar{n}} = c_1^i (c_{q-1}^e + c_{q+1}^e), \quad q = \frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \frac{4}{p}, \frac{5}{p}, \dots$$

y como, $q - 1$ y $q + 1 \in \{q\}$ el par generado por una fase contendrá por tanto subarmónicos e interarmónicos. Para $p = 2$, se tiene,

$$\begin{aligned} c_0^{\bar{n}} &= c_1^i (c_{-1}^e + c_1^e) & c_{1/2}^{\bar{n}} &= c_1^i (c_{-1/2}^e + c_{1/2}^e) \\ c_1^{\bar{n}} &= c_1^i (c_0^e + c_2^e) & c_{3/2}^{\bar{n}} &= c_1^i (c_{1/2}^e + c_{5/2}^e) \\ c_2^{\bar{n}} &= c_1^i (c_1^e + c_3^e) & c_{5/2}^{\bar{n}} &= c_1^i (c_{3/2}^e + c_{7/2}^e) \\ c_3^{\bar{n}} &= c_1^i (c_2^e + c_4^e) & c_{7/2}^{\bar{n}} &= c_1^i (c_{5/2}^e + c_{9/2}^e) \\ & \dots\dots\dots & & \dots\dots\dots \end{aligned} \tag{2.71}$$

En la figura 2.29 se muestra este mismo resultado haciendo uso de un diagrama donde se puede observar que los índices de los armónicos de FEM pasan al par de fase incrementando o disminuyendo una unidad, lo que permite la presencia de armónicos fraccionarios en el par de fase.

No obstante, en el par resultante de las tres fases sólo están presentes el fundamental y los múltiplos de tres, ya que los fraccionarios y los enteros no múltiplos de tres no consiguen pasar la *barrera* de la simetría trifásica g_3 .

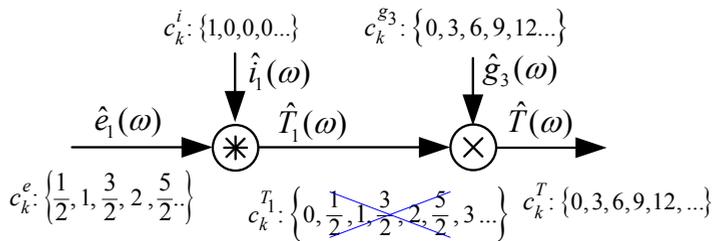


Figura 2.29. Diagrama de coeficientes de las etapas que intervienen en la generación del par cuando la FEM contiene armónicos fraccionarios, simetría trifásica e intensidad senoidal. $p = 2$.

La presencia de los armónicos $\{3, 9, 15, \dots\}$ en el par resultante de las tres fases se debe a la presencia de este conjunto de armónicos en el par de fase y que a su vez, se corresponden con armónicos pares de la FEM como consecuencia de asimetrías.

Por último, se observará que la presencia en el par trifásico de armónicos de índices eléctricos fraccionarios solo es posible si no existe simetría trifásica.

Caso 3. Tensión e intensidad con armónicos impares y periodicidad $2\pi/p$

En este nuevo caso se supondrá que existe simetría $2\pi/p$ en la FEM y que ésta no contiene armónicos pares. En cuanto a la intensidad, se tendrán en cuenta los efectos de un control no ideal de la misma por parte del convertidor así como el efecto de la saturación, tiempo de respuesta limitado, falta de linealidad, etc. y que dan lugar a una onda no senoidal. No obstante, consideraremos que la intensidad tiene simetría de media onda y que en consecuencia no contiene armónicos pares.

El análisis se realizará para el par de una fase, deduciéndose inmediatamente el resultado para el par debido a las tres fases para los casos en que exista o no simetría trifásica.

Los resultados se muestran en la tabla 2.1. En ella se ha representado con $1x, 2x$, etc, los índices de los armónicos de par de una fase en relación con la frecuencia eléctrica. La fila y la columna que ocupan se corresponden con los índices de la intensidad y de la FEM, respectivamente, de las que dependen. Las variables FEM e intensidad son intercambiables.

Como ejemplo se supondrá que se quiere conocer la causa de un segundo armónico ($2x$) en el par de un motor trifásico. Este armónico no se encuentra

en la tabla de los casos con simetría trifásica y sí en las que recogen el par de una fase. De esto se deduce que el motor analizado no tiene simetría trifásica, bien de amplitudes, bien de fases.

En un segundo ejemplo se analizará el caso de un sexto armónico de par ($6x$), muy frecuente en máquinas trifásicas [57], [58]. Estos armónicos pueden aparecer tanto si existe simetría como si no. Si la intensidad es senoidal, los armónicos causantes solo podrán ser el 5º y el 7º de FEM, es decir las parejas $(e, i) = \{5, 1\}$ y $\{7, 1\}$, según se deduce de la tabla 2.3 o de la primera fila de las tablas 2.1 y 2.2. Si la onda no es senoidal, las posibles parejas causantes serán $(e, i) = \{1, 5\}$, $\{1, 7\}$, $\{3, 3\}$, $\{5, 1\}$, $\{5, 11\}$, $\{7, 1\}$, $\{7, 13\}$, etc. De estas parejas, las situadas más a la izquierda y más arriba de la tabla 2.4 serán las que producirán mayor efecto, ya que están formadas por armónicos de menor índice.

Tabla 2.1 Índices armónicos impares de la intensidad (i) y de la tensión (e) que contribuyen a la generación de par de una fase en un motor trifásico.

$i \backslash e$	1		3		5		7		9		11		13	
1	0x	2x	2x	4x	4x	6x	6x	8x	8x	10x	10x	12x	12x	14x
3	2x	4x	0x	6x	2x	8x	4x	10x	6x	12x	8x	14x	10x	16x
5	4x	6x	2x	8x	0x	10x	2x	12x	4x	14x	6x	16x	8x	18x
7	6x	8x	4x	10x	2x	12x	0x	14x	2x	16x	4x	18x	6x	20x
9	8x	10x	6x	12x	4x	14x	2x	16x	0x	18x	2x	20x	4x	22x
11	10x	12x	8x	14x	6x	16x	4x	18x	2x	20x	0x	22x	2x	24x
13	12x	14x	10x	16x	8x	18x	6x	20x	4x	22x	2x	24x	0x	26x

Tabla 2.2 Índices armónicos impares de la FEM (q) que contribuyen a la generación de par de una fase en un motor trifásico con intensidad senoidal.

q	1		3		5		7		9		11		13	
	0x	2x	2x	4x	4x	6x	6x	8x	8x	0x	10x	12x	12x	14x

Tabla 2.3 Índices armónicos impares de la intensidad (i) y de la tensión (e) que contribuyen a la generación de par total con simetría trifásica y alimentación a tres hilos.

$i \backslash e$	1		3		5		7		9		11		13	
1	0x					6x	6x					12x	12x	
5	6x				0x			12x			6x			18x
7	6x					12x	0x					18x	6x	
11	12x				6x			18x			0x		2x	24x
13	12x					18x	6x					24x	0x	

Resumen del apartado 2.2

Se ha comenzado este apartado realizando el modelo del par electromagnético de una fase a partir de la convolución de las ondas espaciales de inducción y de la capa de corriente incluyendo el efecto de las ranuras. A su vez, la capa de corriente se ha separado en dos ondas espaciales; una primera representa la variación de la intensidad de fase en función de la posición rotórica α y la que representa la distribución de los conductores en el entrehierro, $A(\alpha)$. Esta segunda onda espacial caracteriza geoméricamente el efecto de la corriente eléctrica de los conductores sobre la inducción como origen del par electromagnético, incluyendo el efecto de la inclinación de las ranuras. En los textos clásicos, como en F. Moeller, pág. 333 [2], la capa de corriente suele considerarse como la distribución de la intensidad a lo largo de la periferia del rotor, idealizándola unas veces como una distribución senoidal y como pulso rectangular, de anchura igual a la de la ranura, en otras. En este último caso, los pulsos rectangulares se sitúan siempre asociados a los lados activos de la bobina, sin tener en cuenta las ranuras situadas en el interior de la bobina. En este trabajo se ha comprobado que estas ranuras se comportan como si alojasen conductores ficticios por las que también circula cierta intensidad.

Una vez modelado el par de una fase se ha añadido a la cadena un nuevo bloque para convertir el modelo de una fase en trifásico. La nueva función caracteriza la simetría trifásica g_3 y se comporta como un filtro para los armónicos múltiplos de tres. Este modelo trifásico permite una clara interpretación de la generación del par así como la relación que debe existir entre los armónicos de las distintas etapas para que se dé la cancelación del mayor número de armónicos en el par.

También se ha realizado el estudio del origen de los subarmónicos e interarmónicos de FEM y las configuraciones de bobinados que son susceptibles de generarlos.

Por último, se han presentado tres tablas que muestran la relación entre los armónicos del par y los de FEM y de la intensidad que lo generan.

2.3 Modelado del par de *cogging*

El par de *cogging* puede expresarse como la derivada de la coenergía magnética W respecto del ángulo de giro del rotor α . [41], [12], [44], [40], [32] y [54].

$$T_{cog}(\alpha) = \frac{\partial W(\alpha)}{\partial \alpha} \quad (2.72)$$

y

$$W(\alpha) = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 dV \quad (2.73)$$

μ_0 es la permeabilidad del aire, B la inducción en el entrehierro y V el volumen ocupado por el entrehierro y el imán.

El cálculo del volumen del entrehierro se basará en un modelo de coordenadas rectangulares como el mostrado en la figura 2.30, pudiéndose escribir el diferencial de volumen como

$$dV = \bar{r} [l_m + g(\theta)] d\theta dz \quad (2.74)$$

siendo \bar{r} el radio medio del entrehierro, incluyendo en éste a los imanes.

Los modelos basados en coordenadas polares son más preciso, pero requieren considerar una sección variable para las líneas de campo que forman el diferencial de volumen, lo que complicaría el análisis.

La inducción en el entrehierro puede expresarse en función de la inducción remanente y de los parámetros geométricos de acuerdo con (2.34)

$$B^2(\theta) = B_r^2(\theta) \frac{l_m^2}{[l_m + g(\theta)]^2} \quad (2.75)$$

La coenergía en (2.72) puede expresarse ahora como

$$\begin{aligned} W(\alpha) &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{-l_{st}/2}^{l_{st}/2} \int_0^{2\pi} B_r^2(\theta - \alpha + \xi) \frac{l_m^2}{[l_m + g(\theta)]^2} \bar{r} [l_m + g(\theta)] d\theta dz \\ &= \frac{\bar{r}}{2\mu_0} \int_{-l_{st}/2}^{l_{st}/2} \int_0^{2\pi} B_r^2(\theta - \alpha + \xi) \frac{l_m^2}{l_m + g(\theta)} d\theta dz \end{aligned} \quad (2.76)$$

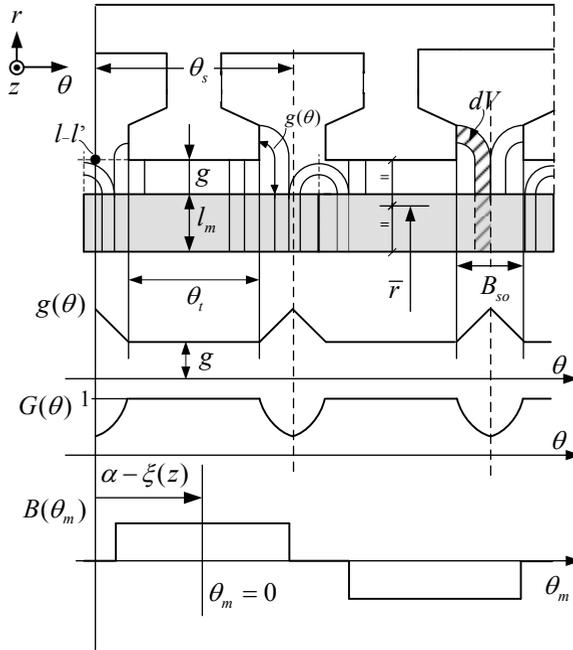


Figura 2.30. Modelo empleado en el análisis del par de cogging.

Por convenir al desarrollo, $W(\alpha)$ se expresará en términos de la inducción en el entrehierro suponiendo un inducido liso, B_g , en lugar de la inducción remanente. La relación entre ambas es:

$$B_g(\theta) = B_r(\theta) \frac{l_m}{l_m + g} \quad (2.77)$$

Sustituyendo este valor en (2.76) resulta

$$W(\alpha) = \frac{\bar{r}}{2\mu_0} \int_{-l_{st}/2}^{l_{st}/2} \int_0^{2\pi} B_g^2(\theta - \alpha + \xi) \frac{(l_m + g)^2}{l_m + g(\theta)} d\theta dz \quad (2.78)$$

Llamando ahora

$$G(\theta) = \frac{l_m + g}{l_m + g(\theta)} \quad (2.79)$$

donde $G(\cdot)$ representa la variación relativa de la permeancia, que fue definida en el apartado 2.1.3.

Finalmente,

$$W(\alpha) = \frac{\bar{r}(g + l_m)}{2\mu_0} \int_{-l_{st}/2}^{l_{st}/2} \int_0^{2\pi} B_g^2(\theta - \alpha + \xi) G(\theta) d\theta dz \quad (2.80)$$

donde $2\pi\bar{r}(g + l_m)$ es el volumen del entrehierro, v_{gap} .

Con el objetivo de dar forma de convolución a (2.80), se operará como en el apartado 2.1.1. Para extender los límites desde $-\infty$ a ∞ , se sustituirá $G(\theta)$ por su unidad básica aperiódica comprendida entre 0 y 2π , que se denominará $G_z(\theta)$ por contener las z ranuras del estator. Haciendo el mismo cambio que en (2.16) para introducir la función inclinación $S(\cdot)$, (2.80) queda,

$$W(\alpha) = \frac{v_{gap}}{4\pi\mu_0} [B_g^2(-\alpha) * G_z(\alpha) * S(\alpha)] \quad (2.81)$$

De acuerdo con (2.72) el par de *cogging* resulta,

$$T_{cog} = \frac{v_{gap}}{4\pi\mu_0} B_g^2(-\alpha) * S(\alpha) * DG_z(\alpha) \quad (2.82)$$

$DG_z(\alpha)$ es la derivada respecto de α de la función $G_z(\alpha)$.

$G_z(\alpha)$ puede descomponerse en $G_1(\alpha)$, que comprende un solo diente, y en un tren de deltas situadas en el centro de cada una de las ranuras, constituyendo una etapa más en la cadena de filtrado, como se muestra en (2.83).

$$\begin{array}{cccccc} \text{Cogging} & & \text{induc.} & \text{inclin.} & \text{ranura} & \text{n}^\circ \text{ ran.} \\ T_{cog}(\alpha) & = & k_{cog} & B_g^2(-\alpha) * S(\alpha) * DG_1(\alpha) * Z(\alpha) & & \\ \Downarrow & & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ \hat{T}_{cog}(\omega) & = & k_{cog} & \widehat{B}_g^2(\omega) \times \hat{S}(\omega) \times \widehat{DG}_1(\omega) \times \hat{Z}(\omega) & & \end{array} \quad (2.83)$$

La representación de (2.83) mediante diagrama de bloques se muestra en la figura 2.31.

La expresión (2.83) muestra las ondas espaciales que intervienen en la generación del par de *cogging* y sus correspondientes espectros. En el diagrama de la figura 2.31 la función B_g^2 se ha descompuesto en la inducción de un polo elevada al cuadrado y en la función de posicionado de los imanes $P_m(\theta)$.

De la comparación de (2.83) con (2.46) se deduce que en ambas expresiones aparecen las ondas $DG_1(\alpha)$ y $S(\alpha)$, lo que significa que el comportamiento de estos bloques afectará por igual a las ondas espaciales de

par de *cogging* y de FEM.

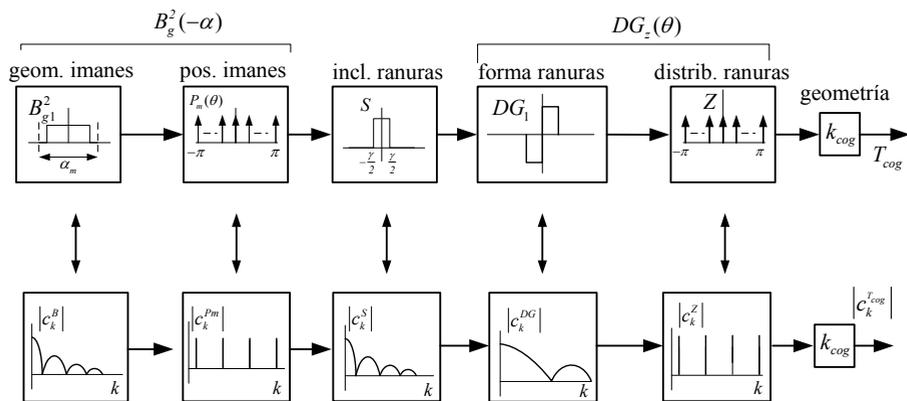


Figura 2.31. Diagrama de generación del par de *cogging* en los dominios espacial y frecuencial.

Es bien conocido que el número de ciclos de *cogging* en una revolución mecánica, o f_{cog} , es el mínimo común múltiplo del número (mcm) de ranuras y del número de imanes. Esta relación se obtiene fácilmente de los espectros de $P_m(\theta)$ y de $Z(\theta)$ de (2.83). El primer armónico de $P_m(\theta)$ coincide con el número de imanes y el de $Z(\theta)$ con el de ranuras. Por tanto, el índice k del primer término no nulo del producto de ambos coincide con f_{cog} , como puede apreciarse en el espectro de la figura 2.32.

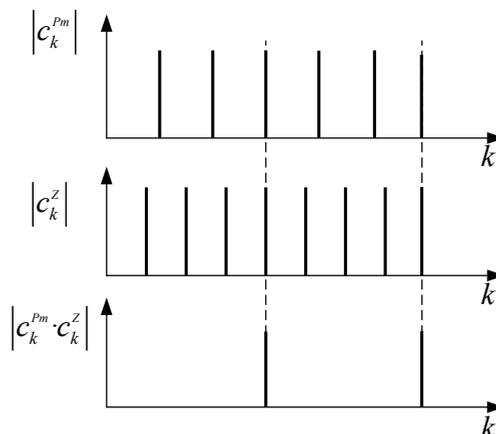


Figura 2.32. Espectros de las ondas de posicionado de los imanes y de las ranuras y su efecto sobre el par de *cogging* resultante.

En consecuencia, uno de los métodos empleados para reducir el *cogging* consiste en elegir adecuadamente el número de imanes y el de ranuras de forma que f_{cog} sea lo mayor posible.

2.4 Validación experimental de los modelos

Con la finalidad de verificar la precisión de los modelos desarrollados para la FEM y para el *cogging*, se han realizado los correspondientes ensayos sobre un prototipo de motor síncrono de imanes permanentes cuyas características se muestran en la tabla 2.4. En la figura 2.33 se muestra una imagen del rotor y de las principales dimensiones del motor y en la figura 2.34 el banco de ensayos empleado para la medida de la FEM y del par de *cogging*.

Tabla 2.4 Especificaciones del motor ensayado

Descripción	Parámetro	Valor
Número de pares de polos	$2p$	2
Número de ranuras	z	24
Abertura de ranura	w_s	2.5 mm
Entrehierro	g	1.0 mm
Radio int. estator	r_s	45 mm
Radio ext. estator	r_m	44 mm
Longitud axial	l_{st}	35 mm
Arco polar	α_m	80° mec.
Anchura rel. transiciones	\mathcal{E}	0.15
Inducción remanente	B_r	0.41T
Longitud radial imanes	l_m	6 mm
Número de fases	N_{ph}	3
Paso de bobina	α_c	5 ranuras
Bobinas por fase	--	4
Conexión	--	estrella

En la figura 2.35 se muestran las tensiones de línea a circuito abierto expresadas en *por unidad* (p.u.), obtenidas al dividir la tensión inducida por el producto $B_r \omega_r l_{st} n^{2/3}$, donde n es el número total de conductores y la fracción $2/3$ se debe a que la tensión medida es la de línea. Se ha considerado una magnetización de tipo radial para los imanes, con una zona de transición lineal con anchura $\varepsilon = 0.15$, de acuerdo con la referencia [32].

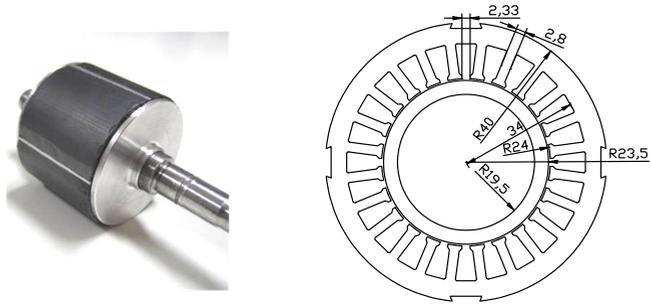


Figura 2.33. Rotor del prototipo usado en la validación experimental y principales dimensiones del estator.

En la figura 2.35 se compara la tensión de línea medida experimentalmente con la misma tensión obtenida a partir del modelo (2.46), quedando de manifiesto la validez del modelo cuando se tiene en cuenta el efecto de las ranuras y la aceptable aproximación al considerar el inducido liso. La figura 2.36 muestra la relación entre los primeros armónicos y el fundamental, expresada en decibelios. En la figura 2.37 se compara el par de *cogging* obtenido por vía experimental y a partir del modelo de (2.83).

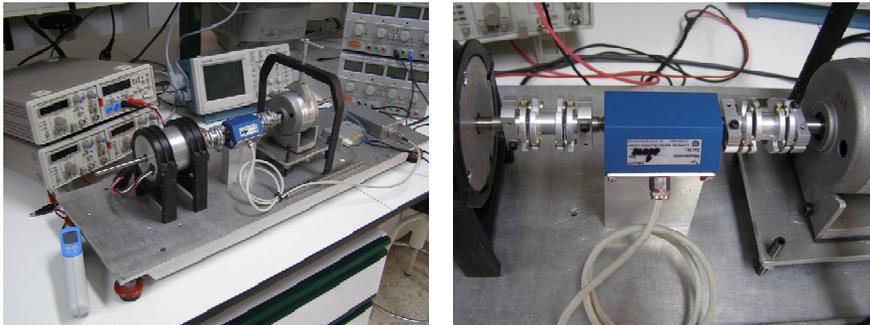


Figura 2.34. Banco de pruebas empleado en la validación experimental.

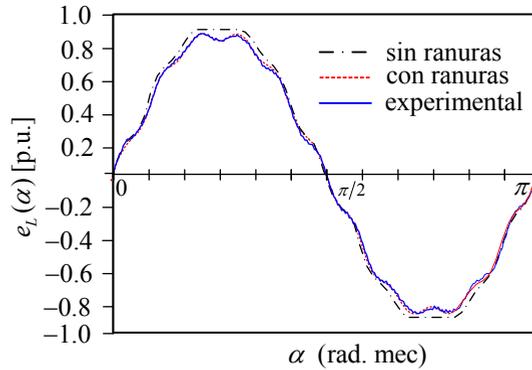


Figura 2.35. FEM obtenida de forma experimental y mediante el modelo desarrollado con y sin ranuras.

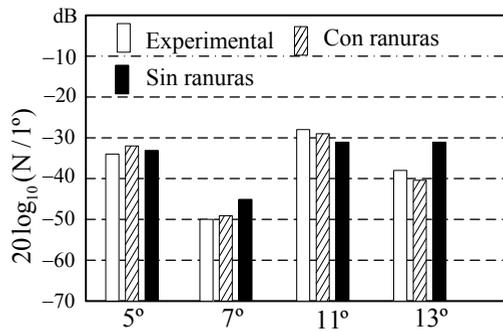


Figura 2.36. Espectro de la FEM obtenida de forma experimental y mediante el modelo desarrollado con y sin ranuras.

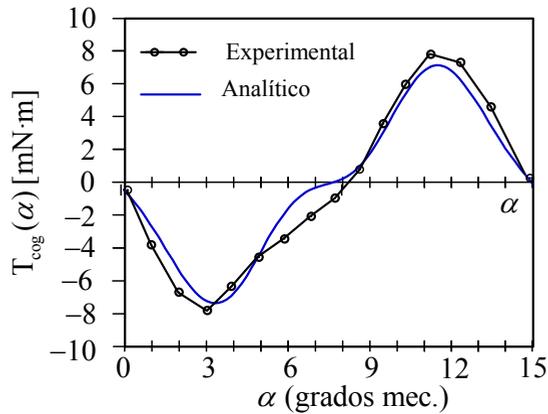


Figura 2.37. Par de cogging obtenido de forma experimental y mediante el modelo desarrollado.

3

Técnicas de Filtrado Espacial

Introducción

Un objetivo constante en el diseño de motores síncronos de imanes permanentes (MSIP) es conseguir un par lo más constante posible. En algunas aplicaciones es suficiente con reducir el efecto del *cogging*, pero en otras se exige además minimizar los armónicos de FEM como el 5°, 7°, 11°, 13°, que son los principales causantes del rizado de par en motores trifásicos [19], [58]. El 5° y el 7° armónicos de FEM son los causantes de la aparición del 6° armónico de par al interaccionar con el armónico fundamental de intensidad, y por la misma razón, el 11° y el 13° de FEM son los responsables del 12° armónico de par.

Con los procedimientos clásicos de filtrado, como la inclinación de los imanes con ángulo constante o el acortamiento del arco polar de los mismos, solo se puede fijar en diseño la frecuencia de uno de los ceros, ya que existe una relación de multiplicidad entre todos los ceros del espectro. De esto se deduce que cada etapa de filtrado debe ser diseñada para la eliminación de un solo armónico, aunque las características del filtro puedan atenuar o eliminar otros. El método de síntesis que se propone se realiza en el dominio de la convolución partiendo de especificaciones en el dominio de la frecuencia y da una solución satisfactoria a la eliminación simultánea de armónicos de *cogging* y de FEM, incluso en una misma etapa de filtrado.

3.1 Clasificación de las técnicas de filtrado espacial

Las técnicas de filtrado espacial desarrolladas en este trabajo se resumen en el siguiente cuadro:



Los filtros selectivos permiten eliminar armónicos de FEM o de *cogging* mediante la introducción de uno o varios ceros en determinadas frecuencias del espectro correspondiente. Los filtros no selectivos se destinan a reducir la amplitud de los armónicos en una banda de frecuencias. Los primeros son más efectivos, pero suelen ser más sensibles a los parámetros geométricos de la máquina que los segundos. Se comenzará estudiando los filtros selectivos mediante la adición de ceros.

3.2 Filtrado mediante la adición de ceros

Este procedimiento consiste en situar ceros en las frecuencias de los armónicos a eliminar mediante la adición de nuevos ceros, que son aportados por una función auxiliar que se hace convolucionar con una de las ondas espaciales del sistema. Las ondas auxiliares deben cumplir la condición de que al combinarse con las de la máquina den como resultado ondas físicamente realizables. En este sentido, las ondas formadas por deltas, que representan las posiciones angulares discretas de los imanes y ranuras, sólo pueden

convolucionar con ondas del mismo tipo para que el resultado siga representando posiciones discretas. Las que caracterizan a funciones continuas como la inducción sobre el plano x - y o la inclinación de los imanes a lo largo del eje z pueden convolucionar además con ondas continuas. En el anexo A3 se muestran algunas de las ondas auxiliares más simples de realización, el espectro correspondiente y el tipo de modificación que impone sobre la geometría de partida.

La figura 3.1 muestra un ejemplo de aplicación del método de filtrado basado en la adición de ceros. El objetivo es la eliminación del par de *cogging* y a la vez el quinto armónico de FEM en una configuración clásica de motor de ranuras e imanes rectos. En este caso, la función que caracteriza la inclinación relativa de ranuras es una delta de Dirac. El primer armónico de *cogging* tiene frecuencia $\omega_{C1} = \text{mcm}(z, N_m)$, que será eliminado convolucionando la función delta con otra función que posea un cero en ω_{C1} . La función auxiliar elegida es del tipo continua, consistente en un pulso de anchura $\gamma = 2\pi / \omega_{C1}$, según se vio en el capítulo 2, apartado 2.1. El resultado del filtrado es la inclinación constante de los imanes sobre el eje z y coincide con la solución clásica para la eliminación del par de *cogging*. El siguiente objetivo es la eliminación del quinto armónico de FEM; usando en este caso una onda auxiliar discreta.

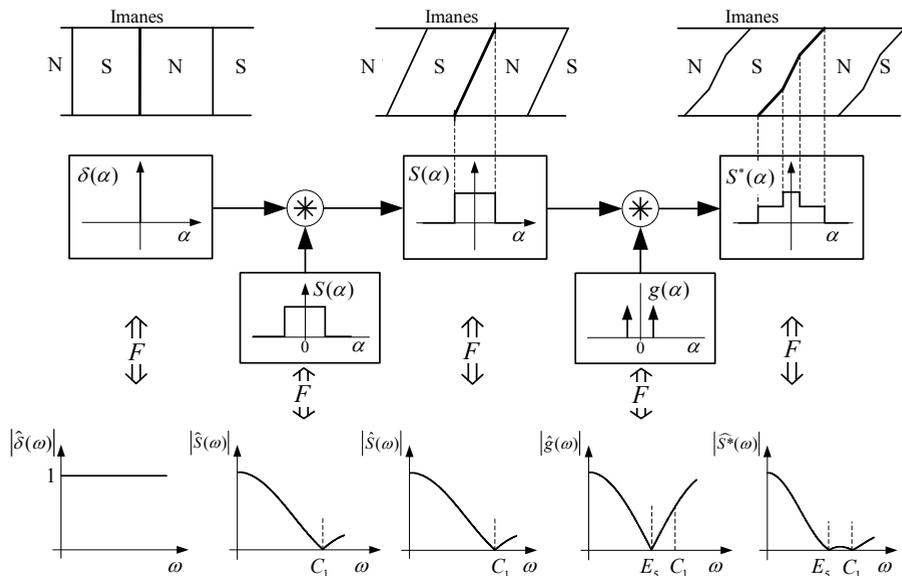


Figura 3.1. Ilustración de la síntesis de filtrado espacial mediante la convolución de una onda auxiliar continua y otra discreta.

Una de las funciones auxiliares generadoras de ceros más simple es la formada por dos deltas de igual amplitud, que será la usada para eliminar el 5° armónico de FEM. Su espectro, $\hat{c}(\omega) = \cos(\gamma \omega/2)$, donde γ es la distancia entre ellas, tiene ceros en $\omega = k\pi/\gamma$ con $k = \pm 1, \pm 3, \pm 5 \dots$

El siguiente paso consiste en crear la función auxiliar $g(\alpha)$, formada por dos deltas situadas a una distancia tal que su espectro presente un primer cero en el 5° armónico de FEM, como se muestra en la figura 3.1. Posteriormente se convolucionará esta nueva onda con la obtenida en la anterior operación, $S(\alpha)$, asociada a la inclinación de los imanes. El resultado de esta nueva operación es la función espacial $S^*(\alpha)$ que se corresponde con una nueva geometría con dos inclinaciones diferentes, proporcionales a los dos niveles de la función $S^*(\alpha)$.

En el espectro final $|\widehat{S^*}(\omega)|$ de la figura 3.1 aparecen los ceros correspondientes al primer armónico de *cogging*, C_1 , y al quinto armónico de FEM, E_5 . Ambos se han adicionado por separado y sin ningún tipo de dependencia entre ellos.

También se podrían haber empleado otras ondas auxiliares como filtro. Para el caso de una función pulso, la función $S(\alpha)$ tomaría la forma triangular y la inclinación de los imanes la de una “s” continua.

Al incluir nuevos ceros mediante funciones auxiliares hay que tener en cuenta que éstas introducen cierta atenuación sobre el armónico fundamental de tensión, siendo este efecto tanto más acusado cuanto más baja sea la frecuencia a eliminar.

También debe tenerse en cuenta la posibilidad de adicionar ceros múltiples en una misma frecuencia con objeto de disminuir la sensibilidad de la cancelación respecto de las tolerancias mecánicas. La onda auxiliar (c) del Anexo A3, está formada por tres deltas, obtenida a partir de la convolución de la onda mostrada en (b) consigo mismo. Se observa cómo la pendiente en la zona de los ceros es nula, lo que hace disminuir la sensibilidad ante cambios de posición de las deltas.

3.3 Filtrado mediante modificación de ceros existentes

Este procedimiento se basa en utilizar para el filtrado las ondas espaciales existentes, modificándolas para hacer coincidir sus ceros en las frecuencias de interés. Para llevar a la práctica este procedimiento se requieren tres pasos: deconvolución, filtrado y nueva convolución. En la deconvolución se descompone la onda espacial elegida en otras más simples que son modificadas en la fase de filtrado para que sus ceros coincidan con las

frecuencias a eliminar. Por último, estas ondas simples deben ser de nuevo “ensambladas” mediante la convolución para obtener la nueva geometría con las características espectrales buscadas.

La figura 3.3 ilustra el procedimiento para la cancelación de armónicos, sin hacer uso de ondas auxiliares, utilizando como filtro la onda espacial correspondiente al posicionado de los imanes en el plano x - y . En el ejemplo se eliminan los armónicos 5° y 7° de FEM en un motor de 4 polos y 24 ranuras. Esta solución es independiente de la configuración sobre el eje z , que podría emplearse para la reducción del *cogging*.

Se supondrá que la onda espacial de inducción $B(\alpha)$, usada en el ejemplo de la figura 3.3, está formada por dos periodos idénticos y con simetría de un cuarto de onda, como se muestra en la figura 3.2.

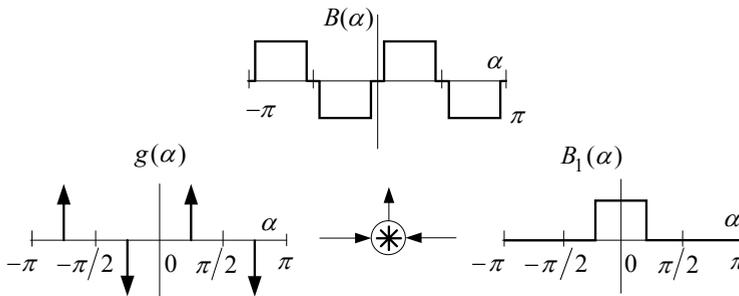


Figura 3.2. Composición de la onda de inducción usada en el ejemplo de la figura 3.3.

Esto permite considerarla como el resultado de la convolución de un semiperiodo con un tren de cuatro deltas equidistantes y alternadas.

Las deltas de $g(\alpha)$ representan la posición y la polaridad de cada uno de los cuatro imanes y será utilizada como función filtro. Su espectro, mostrado en la figura 3.3, tiene un 5° y un 7° armónico de igual amplitud que el fundamental y están indicados por E_5 y E_7 en la parte superior de dicha figura.

En un primer paso, se aplicará la deconvolución para descomponerla en dos funciones más simples. En el siguiente paso, estas nuevas funciones se modifican con el fin de que una de ellas tenga un cero en el 5° armónico y la otra en el 7°. Esto se puede conseguir variando la distancia entre las deltas y cuyo efecto es la compresión o expansión del espectro sobre el eje de frecuencias.

Por último, se vuelven a convolucionar, dando como resultado una nueva geometría con diferente respuesta en frecuencia, donde no aparecen ni el 5° ni el 7° armónico. La nueva configuración del rotor queda caracterizada por los

ángulos α_1 , α_2 , y α_3 según se muestra en la parte inferior derecha de la figura 3.3. Este ejemplo ha sido validado experimentalmente y su resultado se incluye en el apartado 3.6.

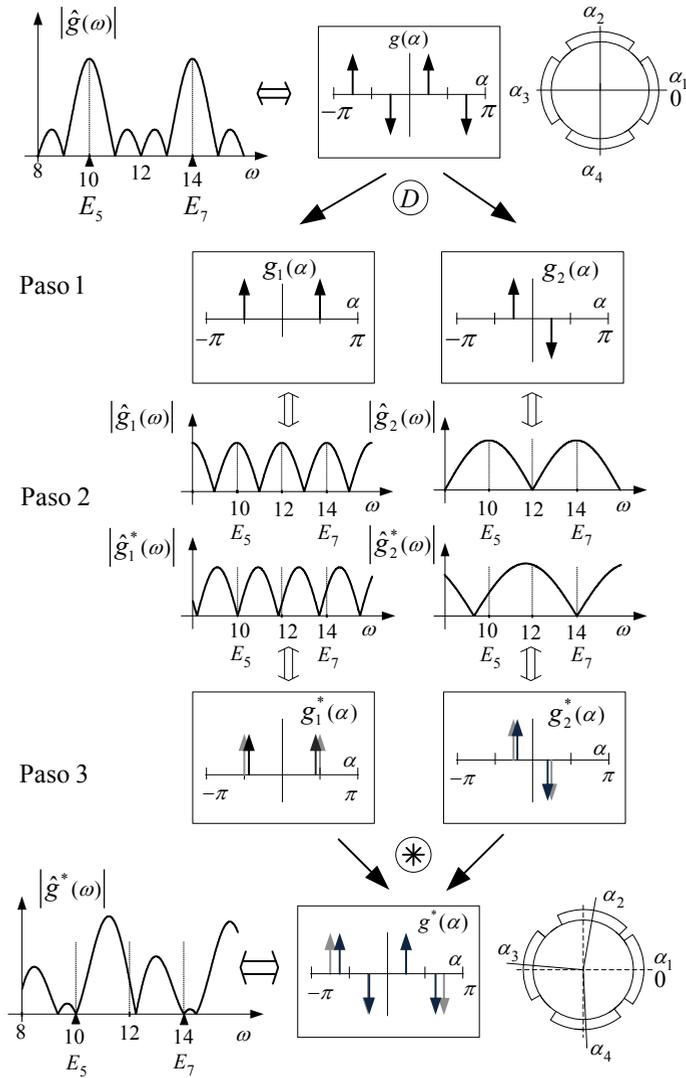


Figura 3.3. Proceso de deconvolución + filtrado + convolución.

3.4 Filtrado mediante conformación de los polos

3.4.1 Introducción

La forma de los polos magnéticos inductores ha sido estudiada desde las primeras máquinas eléctricas, tanto en las de continua como en las de alterna síncronas. En estos diseños se buscaba disminuir la distorsión armónica y las pérdidas en el hierro procurando no reducir de forma apreciable el primer armónico de la FEM. En los diseños de motores de imanes permanentes actuales, al objetivo de una FEM más senoidal se une además el de obtener un reducido par de *cogging*. En estas máquinas los polos inductores se corresponden con cada uno de los imanes del rotor, ya estén estos colocados sobre la superficie o en el interior del rotor.

En la actualidad se cuenta con una extensa bibliografía relacionada con la conformación de los polos magnéticos. En estos trabajos se persiguen distintos objetivos. Los más frecuentes son la mejora de la FEM [20], [59], [50], [22], [16], y la reducción del *cogging* [35], [36], [22], [37], [38], pero también se busca aumentar el par mediante la inyección del tercer armónico de FEM [50] o disminuir las pérdidas en el hierro [60]. Las formas de actuar sobre la geometría es diferente: modificando la forma de los bordes [35], [36], [22], [37], introduciendo un ranurado adicional [61], modificando el radio de curvatura de los imanes [59], [35], variación del entrehierro en pasos [16] o mediante la orientación de la magnetización [62][63]. En otro trabajo [64] se destaca la importancia del diseño de los polos en relación con las tolerancias de fabricación. En cuanto a las técnicas de análisis, existen dos grandes grupos: los de enfoque analítico [20], [50], [62], [35], [61], [59] y los basados en técnicas de optimización [36], [22], [37]. Estos métodos buscan obtener una onda de inducción en el entrehierro que cumpla con los objetivos de par de *cogging* o de FEM, pero la onda de inducción depende tanto del perfil de los imanes como del tipo de magnetización de los mismos. Resolver simultáneamente ambos problemas de forma analítica resulta difícil de conseguir en la práctica, debiéndose recurrir a métodos numéricos en algún punto del diseño. Por otra parte, dado que las posibles formas de los imanes que dan solución al problema son múltiples, se suele tomar una configuración básica como punto de partida sobre la que se modifican posteriormente algunos de sus parámetros geométricos. Los parámetros a modificar se limitan a los que conducen a soluciones industrializables, siendo las más frecuentes el arco polar de los imanes [29], los radios de curvatura exterior e interior [59],

[35], o chaflanado de los bordes [36].

Como se comentó antes, la relación entre estos parámetros y el efecto que produce en la inducción es difícil de calcular debido a la fuerte dependencia de la inducción con el tipo y proceso de magnetización [65], [20], lo que da como resultado una escasa precisión a la hora de definir la onda de inducción deseada. Diseños que dan buenos resultados con un tipo de magnetización pueden perder la eficacia para un tipo diferente de magnetización o, incluso, de máquina de imantar. En cuanto a las posibilidades de definir el espectro de la inducción mediante las técnicas convencionales, son muy escasas. En este sentido, los diseños se limitan a una conformación gruesa del perfil del espectro, no llegando a conseguir un filtrado selectivo de frecuencias.

3.4.2 Método propuesto para la conformación de los polos

El método consiste en modificar la geometría de los imanes para eliminar de forma selectiva los armónicos de la inducción o de la inducción al cuadrado en el entrehierro, de los que depende directamente los de FEM y de par de *cogging*, respectivamente. Para ello, se parte de una geometría inicial de los polos cuya onda espacial de inducción, o de inducción al cuadrado, es filtrada haciendo uso de la convolución y cuyo resultado dará lugar a una nueva geometría con las características buscadas.

Se parte de una geometría existente inicial con el fin de que las modificaciones introducidas por el filtrado sobre la onda de inducción se correspondan con geometrías también realizables. De esta forma, el efecto de la orientación de la magnetización o el de la forma de los imanes sobre la inducción serán tenidos en cuenta en el nuevo diseño.

El procedimiento propuesto permite obtener varias soluciones geométricas para unas mismas especificaciones dependiendo del filtro utilizado, pudiéndose elegir la más industrializable.

El método propuesto permite diseñar de forma directa la onda de inducción en función de objetivos concretos, como la ubicación exacta de ceros en el espectro de FEM o de *cogging*, mientras que los otros métodos, donde no se usa el filtrado espacial, no existe una onda de inducción objetivo para el diseño de la geometría. Por esta razón, en estos métodos las variables de diseño son parámetros geométricos y la función objetivo es directamente el comportamiento final, sin variables intermedias, debiéndose recurrir necesariamente a un proceso iterativo para su resolución.

La inmediatez del método propuesto posibilita el diseño a medida del perfil de acuerdo con el proceso de magnetización empleado, lo que facilita la

industrialización incluso en series cortas de producción. La aplicación práctica del método difiere según se trate de eliminar armónicos de inducción, relacionados con la FEM, o de la inducción al cuadrado, de la que depende directamente el *cogging*.

3.4.3 Aplicación a la FEM

Para el filtrado de la FEM puede aplicarse el método de adición de ceros descrito en el apartado 3.3 a la onda de inducción inicial, convolucionando ésta con una onda auxiliar con un cero en la frecuencia a eliminar. La onda de inducción resultante del filtrado se llevará a cabo mediante la modificación de la geometría de los imanes siguiendo algunos de los métodos existentes.

Uno de los métodos más extendidos para obtener el perfil de los imanes a partir de la onda de inducción se basa en un modelo magnético simplificado sobre un inducido liso, con permeabilidad infinita para el acero y unidad para los imanes y trayectoria radial de las líneas de campo en los límites de los dientes [50], [59], [56], [35]. En este modelo no se tiene en cuenta el flujo de fuga en el borde de los imanes. Bajo estos supuestos, la relación entre la componente de la inducción remanente en dirección radial y la efectiva, también en sentido radial, en el entrehierro, viene dada por (2.34):

$$B(\theta) = B_r(\theta) \frac{l_m(\theta)}{l_m(\theta) + g(\theta)} \quad (3.1)$$

donde l_m es la altura de los imanes, que se supondrá función de θ , g la distancia del entrehierro, medida en dirección radial, B_r la inducción remanente y B la efectiva en el entrehierro. La suma de las longitudes del imán y del entrehierro es igual a la diferencia entre los radios exterior del rotor e interior del estator para cualquier valor de θ . Por lo tanto, la nueva longitud de los imanes resulta

$$l_m(\theta) = l_{m_i}(\theta) \frac{B(\theta)}{B_i(\theta)} \quad (3.2)$$

Los parámetros de la configuración inicial se indican con el subíndice i y los correspondientes a la configuración resultante, sin subíndices.

El resultado (3.2) debe considerarse como una aproximación, ya que la suposición de que las líneas de campo son radiales resulta algo alejada de la realidad, sobre todo en los límites de los polos. Por ello, será necesario hacer uso del método de los elementos finitos para conseguir un mejor ajuste a la curva de inducción objetivo.

Como ejemplo de aplicación se considerará la eliminación del 5º armónico

de FEM del motor de cuatro polos mostrado en la figura 3.4. con imanes superficiales de ferrita e imantación radial en forma de segmentos de 90 grados y radios exterior e interior constantes. La onda de inducción, medida sobre un inducido liso y el espectro correspondiente se indican en la misma figura.

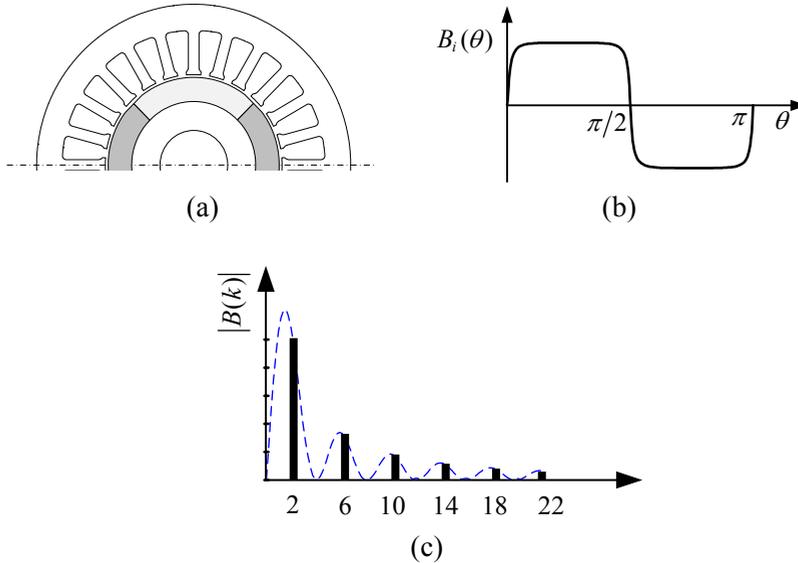


Figura 3.4. Geometría (a), inducción (b) y espectro (c) del motor usado como ejemplo para la eliminación del 5º armónico de FEM mediante conformación de los polos.

Para eliminar el 5º armónico de FEM, 10º armónico espacial, se usará como filtro la función pulso de $2\pi/10$ radianes de ancho, que una vez convolucionada con $B_i(\theta)$ da como resultado la nueva onda $B(\theta)$ mostrada en la figura 3.5.

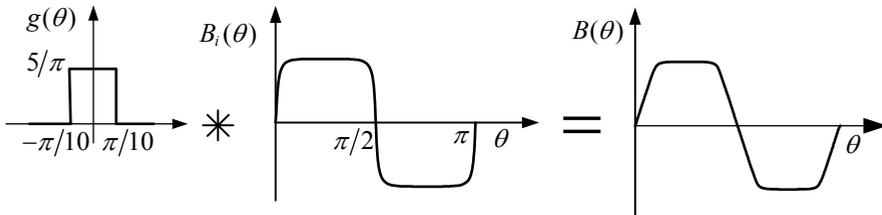


Figura 3.5. Onda auxiliar, inducción inicial e inducción resultante del filtrado.

A continuación se determinará el nuevo perfil de los imanes siguiendo el procedimiento descrito anteriormente. En primer lugar se obtiene el cociente

$B(\theta)/B_i(\theta)$, que se muestra en la figura 3.6. En la misma figura se indica cómo se obtienen los diferentes radios exteriores del imán a partir del cociente $B(\theta)/B_i(\theta)$. Posteriormente se simula el modelo con los nuevos imanes, dando como resultado la onda de inducción B' de la figura 3.7.

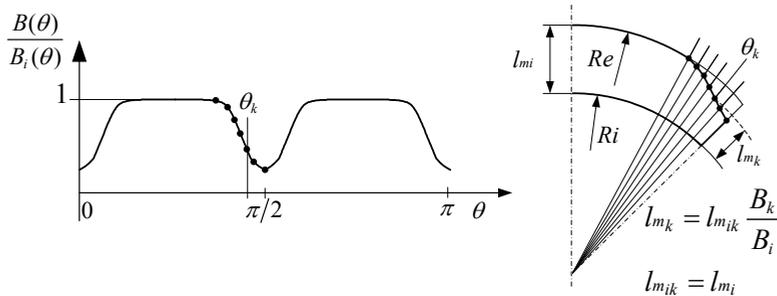


Figura 3.6. Obtención del nuevo perfil de los imanes a partir de $B(\theta)$, $B_i(\theta)$ y l_m .

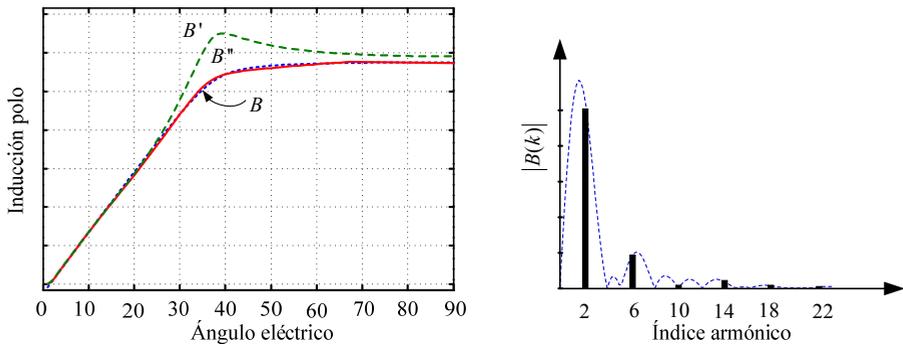


Figura 3.7. Perfiles de inducción correspondientes a la configuración objetivo (B), primera iteración (B') y segunda iteración (B'').

Tras una segunda iteración se consigue el perfil B'' , mucho más próximo al perfil objetivo, B , y en cuyo espectro no aparece ya el 5º armónico como era el fin buscado.

3.4.4 Aplicación del método al par de cogging

El par de cogging depende directamente de la inducción al cuadrado, de forma que los armónicos de éste, $T_{cog}(\omega)$, pueden ser eliminados si se cancelan los de igual índice de $\widehat{B}^2(\omega)$. Un primer procedimiento para eliminar del espectro de $B^2(\alpha)$ las frecuencias relacionadas con el cogging consiste en realizar un filtrado similar al del apartado anterior para $B(\alpha)$, pero sobre $B^2(\alpha)$.

De la onda resultante de esta operación, que llamaremos $B^{2*}(\alpha)$, se obtendrá la de inducción, $B^*(\alpha)$, que finalmente será traducida a una nueva geometría de los imanes. La relación entre $B^{2*}(\alpha)$ y $B^*(\alpha)$ viene dada por

$$B^*(\alpha) = \sqrt{B^{2*}(\alpha)} \cdot \text{sign}[B^*(\alpha)] \quad (3.3)$$

Aunque lo anterior constituye el fundamento del método, su aplicación directa no garantiza que las ondas de inducción resultantes sean realizables en la práctica. El motivo de ello son las discontinuidades que pueden aparecer en la aplicación de la operación (3.3), como se describe en el ejemplo siguiente.

En la figura 3.8 (a) se muestra el primer período de la onda de inducción de un motor genérico y en (b) su valor al cuadrado. Para eliminar el primer armónico de *cogging* se convoluciona $B^2(\theta)$ con un pulso de γ radianes de ancho, obteniéndose la onda mostrada en (c). La onda de inducción se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de esta última con el mismo signo que $B(\theta)$.

Como puede observarse, la onda resultante, $B^*(\theta)$, presenta discontinuidades a consecuencia de la reposición de los signos, que conducen a una geometría irrealizable. Las aproximaciones que se conseguirían en la práctica no garantizarían la eliminación del armónico como se pretendía.

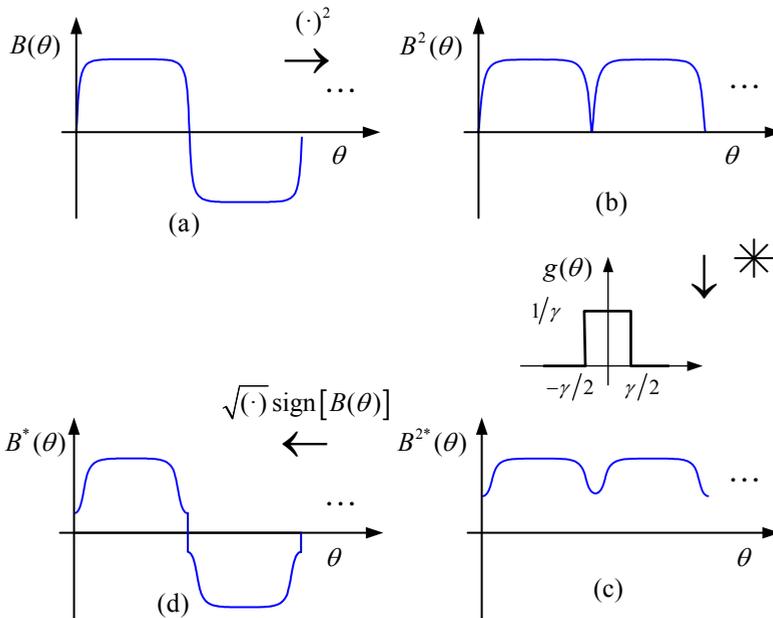


Figura 3.8. Proceso de filtrado de $B^2(\theta)$ con resultado no realizable en la práctica.

La solución al problema planteado pasa por hacer que los valores de $B^{2*}(\theta)$ al principio y al final de los polos sean iguales a cero, evitándose así las discontinuidades en $B^*(\theta)$. Una solución consiste en filtrar cada uno de los polos por separado en lugar de la onda completa de $B^2(\theta)$ como se describe a continuación.

Sea una onda $B^2(\theta)$ formada por cuatro polos como la mostrada en la figura 3.9, la cual puede considerarse formada por la suma de su unidad básica, o primer polo, $B_1^2(\theta)$ más tres réplicas de la misma desplazadas un cuarto de período.

$$B^2(\theta) = \sum_{n=-1}^2 B_1^2(\theta - \pi n/2); \quad B_1^2(\theta) = \begin{cases} B^2(\theta) & \text{si } -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (3.4)$$

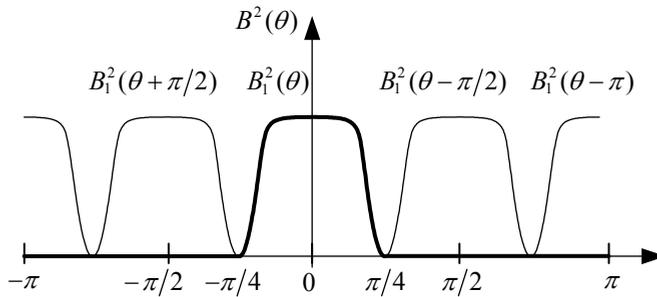


Figura 3.9. Descomposición de $B_1^2(\theta)$ en su unidad básica y tres réplicas.

y su espectro

$$\widehat{B^2}(\omega) = \widehat{B_1^2}(\omega) \sum_{n=-1}^2 e^{j\omega n \frac{\pi}{2}} \quad (3.5)$$

De (3.5) se deduce que si el espectro $\widehat{B_1^2}(\omega)$ posee un cero en una determinada frecuencia, $\widehat{B^2}(\omega)$ también tendrá ese mismo cero. Esto permite realizar la operación de filtrado también sobre la onda básica $B_1^2(\theta)$ y posteriormente obtener la onda completa mediante desplazamientos y sumas, ya que

$$B^{2*}(\theta) = \sum_{n=-1}^2 B_1^{2*}(\theta - \pi n/2) \quad (3.6)$$

Pero con esta operación aún no se conseguiría resolver el problema

planteado, ya que al convolucionar la onda básica con la función filtro, el resultado se expande sobre el eje θ un ángulo igual al ocupado por la función filtro, de tal forma que al componer la onda de inducción, ésta ya no pasará por cero debido a los solapes. Para evitar esto último será necesario comprimir la onda filtrada con un factor igual al de expansión, manteniéndose de esta forma los límites entre $-\pi/4$ y $+\pi/4$ originales.

Sea θ_p el ángulo ocupado por el polo y θ_{FIL} el ocupado por la función filtro. La extensión del polo, una vez filtrado, $B_1^*(\theta)$, es $\theta_p + \theta_{FIL}$ debido a la convolución. El factor de escala, sobre el eje θ , que habrá que aplicar a $B_1^*(\theta)$ para que vuelva a ocupar θ_p es $a = (\theta_p + \theta_{FIL}) / \theta_p$. Por otra parte, la compresión en el espacio supone la expansión en frecuencia, según la expresión

$$f(\theta) \leftrightarrow F(\omega); \quad f(a\theta) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (3.7)$$

que haría cambiar la situación de los ceros de $\widehat{B}_1^2(\omega)$. Por ello, al diseñar el filtro, se debe tener en cuenta la posterior compresión.

Sea ω_{OBJ} la frecuencia del armónico a anular y ω_{FIL} , la frecuencia del filtro. De (3.7), $\omega_{OBJ} = \omega_{FIL} / a$. Sustituyendo el valor de a , resulta el valor de la frecuencia del filtro en función de la frecuencia buscada.

$$\omega_{FIL} = \frac{\theta_p + \theta_{FIL}}{\theta_p} \omega_{OBJ} \quad (3.8)$$

Por su parte, θ_{FIL} depende de ω_{FIL} y del tipo de filtro. Así, para la función pulso, la relación entre su ancho y la frecuencia del primer cero es $\theta_{FIL} = 2\pi/\omega_{FIL}$ y para dos deltas, $\theta_{FIL} = \pi/\omega_{FIL}$. Para generalizar, tomaremos, $\theta_{FIL} = \xi/\omega_{FIL}$. Sustituyendo esta relación en (3.8) y operando resulta la ecuación

$$\omega_{FIL} = \omega_{OBJ} - \frac{\xi_{FIL}}{\theta_p} \quad (3.9)$$

Si el filtro se realiza con la función pulso, $\omega_{FIL} = \omega_{OBJ} - 2p$, siendo $2p$ el número de polos, y para el caso de dos deltas $\omega_{FIL} = \omega_{OBJ} - p$.

En la figura 3.10 se esquematiza el proceso de filtrado de una onda de inducción de cuatro polos y un filtro de tipo pulso.

Si los imanes no son equidistantes los flancos de la onda de inducción podrán ser diferentes a causa de la desigual distancia entre los polos. En el caso más general se filtrarán cada uno de los polos por separado siguiendo el procedimiento anterior y se sumarán finalmente para obtener $B^*(\theta)$.

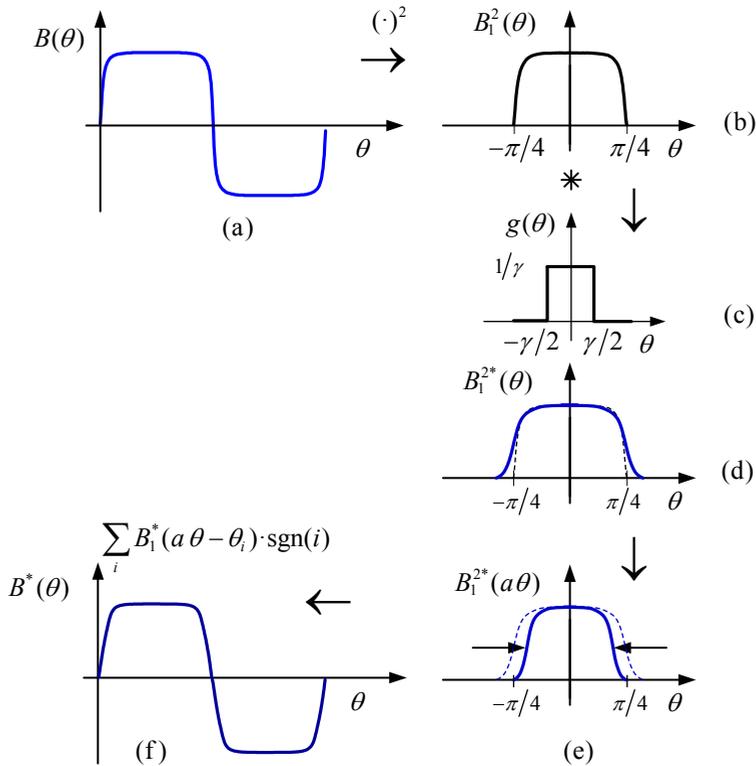


Figura 3.10. Proceso de filtrado mediante expansión-compresión.

Ejemplo de aplicación

Se mostrará la aplicación del método a la eliminación del primer armónico de *cogging* sobre un motor de 4 polos, con por imanes equiespaciados de Nd-Fe-B, imantación diametral y 24 ranuras.

a) Configuración de partida.

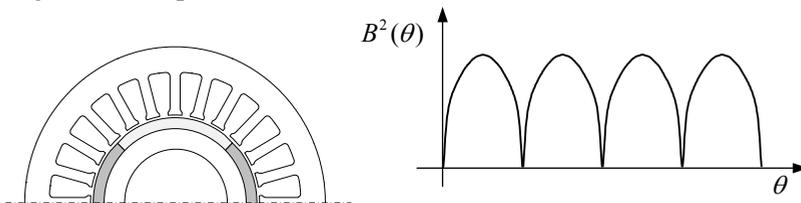


Figura 3.11. Modelo usado para el ejemplo y su inducción al cuadrado

b) Filtrado

Esta configuración presenta un primer armónico de *cogging* en $\omega = 24$, mcm (24,4). Si se usa la función pulso como filtro, la frecuencia del primer cero, según (3.7), es $\omega_{FIL} = 24-4 = 20$, siendo la anchura del pulso $\gamma = 2\pi/20$. En la figura 3.12 (a) se muestran las ondas de inducción al cuadrado original, una vez filtrada y cambiada de escala. En (b) aparecen las ondas de inducción inicial y después de filtrar junto a la aproximación obtenida con la nueva geometría. En la figura 3.13 se muestran los espectros antes y después del proceso.

Como puede observarse, se ha conseguido situar el cero en el armónico de *cogging*, $\omega = 24$, desplazando el situado en $\omega = 22$ de la onda inicial. En la figura 3.13 (b) se comparan los valores de *cogging* antes y después del filtrado, donde ya no aparece el primer armónico.

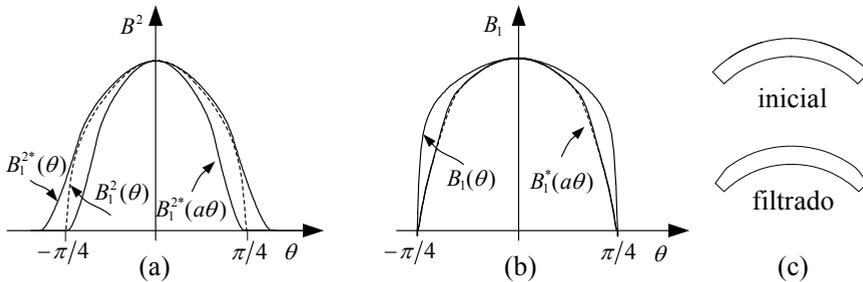


Figura 3.12. Ondas básicas $B_i^2(\theta)$ (a), $B_1(\theta)$ (b) y geometría de los imanes antes y después del filtrado (c).

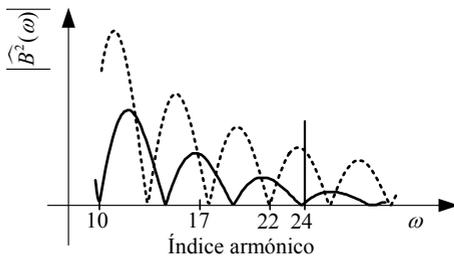


Figura 3.13 (a)

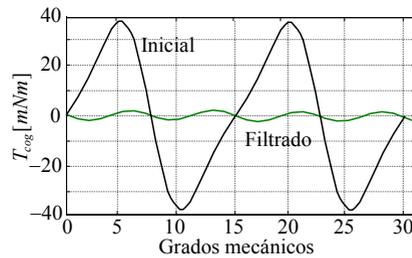


Figura 3.13 (b)

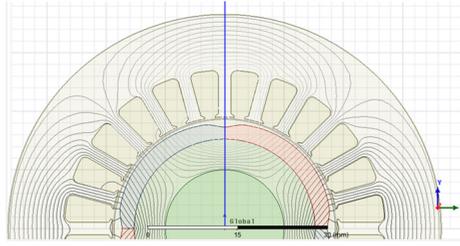


Figura 3.13 (c)

Figura 3.13. Espectros (a), ondas espaciales del par de *cogging* (b) antes y después del proceso de filtrado (b) y configuración resultante (c).

3.5 Filtrado no selectivo

3.5.1 Introducción

El filtrado selectivo estudiado hasta ahora resulta eficaz si la posición de los cerros introducidos en el espectro queda garantizada. Pero en ocasiones esto resulta difícil de conseguir debido principalmente a las tolerancias mecánicas y magnéticas y también por las dificultades de fabricación.

En el capítulo 4 se demuestra que las tolerancias de fabricación se traducen en desviaciones del espectro ideal de la inducción en el entrehierro, siendo estas desviaciones más acusadas a medida que aumenta el índice de los armónicos. Las desviaciones del espectro pueden consistir en cambios de su amplitud, motivados por los errores de posicionado o de magnetización de los imanes y también en cambios de la escala de frecuencias, debidos a cambios en la achura y en la forma de los polos; siendo estos últimos los que tienen efectos más negativos. La expansión o compresión del espectro sobre el eje de frecuencias desplaza las posiciones previstas para los cerros, pudiendo tomar el espectro en dichas frecuencias valores comprendidos entre cero y la envolvente del espectro como cota máxima.

De lo anterior se deduce que si se limita la amplitud de la envolvente del espectro en una banda de frecuencias, también se estará limitando el valor máximo de los armónicos comprendidos en ella, siendo éste el fundamento del filtrado no selectivo. Obviamente, los filtros diseñados con este criterio serán menos eficientes que los selectivos, pero también serán menos sensible a las tolerancias de fabricación.

Existen configuraciones donde el bajo coste obliga a simplificar al máximo el proceso de fabricación, lo que supone renunciar a técnicas de filtrado

eficientes y bien consolidadas como la inclinación de los imanes o el acortamiento del arco polar. La inclinación continua de los imanes encarece el producto y la inclinación por pasos presenta dificultades para su fijación. También resulta más fácil la colocación de los imanes si estos cubren completamente el arco polar. En lo referente al número de ranuras, es conocido que haciendo q un número fraccionario se favorece la disminución del par de cogging, pero el conexionado del devanado no se realiza de forma tan automatizada si se compara con un devanado con q entero.

Las restricciones mencionadas conducen al empleo de los polos como único recurso de filtrado, cuyo diseño puede realizarse mediante un filtrado selectivo como el descrito en los apartados 3.5.3 y 3.5.4 según se aplique a la FEM o al par de *cogging*. El filtrado del par de *cogging* consistiría en situar ceros en el espectro de la inducción al cuadrado, justo en el armónico de índice igual al número de ranuras y en sus múltiplos. Desde un punto de vista geométrico, esto supone la cancelación de un armónico espacial de período igual a la distancia entre ranuras y de la mitad de esta distancia para el segundo armónico, lo que da idea de la precisión que es necesaria para conseguir el nuevo perfil de inducción. Si el número de ranuras es elevado, la precisión requerida en la magnetización puede ser incompatible con los procesos de fabricación.

La conformación de los polos mediante filtrado no selectivo puede dar solución a estos casos, ya que el filtrado no es tan dependiente del perfil de imantación y de la geometría como en los filtros selectivos.

3.5.2 Fundamento

El objetivo buscado es conseguir la máxima atenuación de los armónicos no deseado manteniendo la máxima amplitud del armónico fundamental. Los parámetros de diseño de los filtros no selectivos serán por tanto la atenuación de la envolvente del espectro y sus frecuencias de corte. El diseño que se propone se basa en aplicar las propiedades espectrales de las señales con forma de pulsos a las ondas de inducción y a sus derivadas con el fin de fijar las frecuencias de corte y la atenuación de sus espectros. Se comenzará describiendo las propiedades de la función pulso [66].

Sea $f(\alpha)$ una onda en forma de pulso y $F(\omega)$ su espectro. Si se verifica que las n primeras derivadas de $f(\alpha)$, $d^n f(\alpha)/d\alpha^n$ son continuas, pero en $d^{n+1} f(\alpha)/d\alpha^{n+1}$ existe una discontinuidad finita, la envolvente del espectro de $F(\omega)$ decae como $1/\omega^{n+1}$ cuando ω tiende a infinito. Así, el espectro de un pulso rectangular decae como $1/\omega$ ya que la discontinuidad aparece en el propio

pulso. En este caso, $n = 0$. Para un pulso triangular simétrico, la discontinuidad finita estaría en su primera derivada, $n = 1$, y por tanto, su espectro decae como $1/\omega^2$.

Esta propiedad permite conocer el decrecimiento de la envolvente del espectro solamente para valores elevados de la frecuencia. Para bajas frecuencia la envolvente depende de la forma particular de cada onda.

Sea el pulso trapezoidal simétrico de la figura 3.14. El espectro de este pulso es bien conocido en el área de señales y contiene dos frecuencias de corte, ya que su primera derivada presenta discontinuidades finitas. La primera frecuencia de corte se corresponde con la anchura media del pulso y la segunda con la anchura de los flancos.

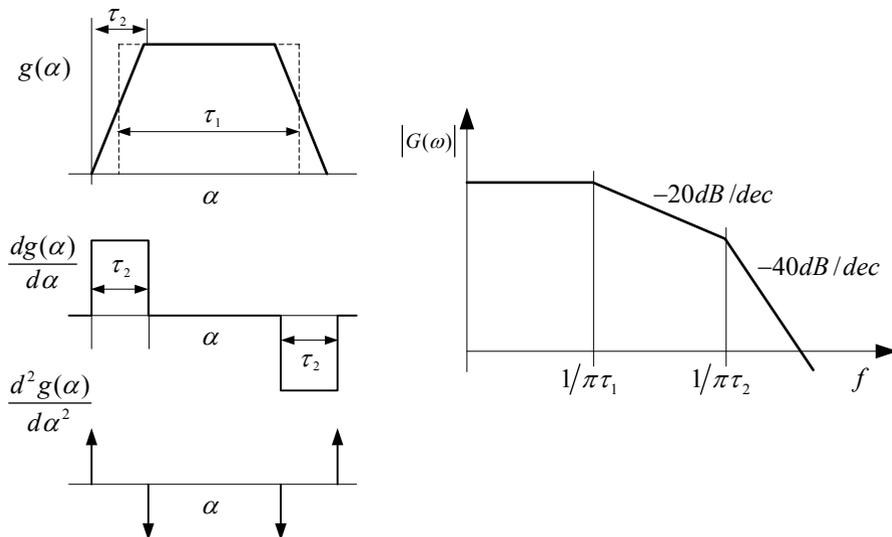


Figura 3.14 Pulso trapezoidal simétrico y espectro correspondiente

Se puede observar que la primera de las frecuencias de corte coincide con la de un pulso rectangular de anchura τ_1 y la segunda con la anchura τ_2 de cualquiera de los pulsos que forman la primera derivada de la onda.

Este resultado se mantiene para el caso mostrado en la figura 3.15, donde las discontinuidades finitas aparecen ahora en la segunda derivada.

De este nuevo ejemplo se desprende que la primera frecuencia de corte viene fijada por la anchura τ_1 del pulso, la segunda frecuencia de corte, por la duración de los flancos del mismo pulso y la tercera frecuencia de corte por la duración de los flancos de la primera derivada.

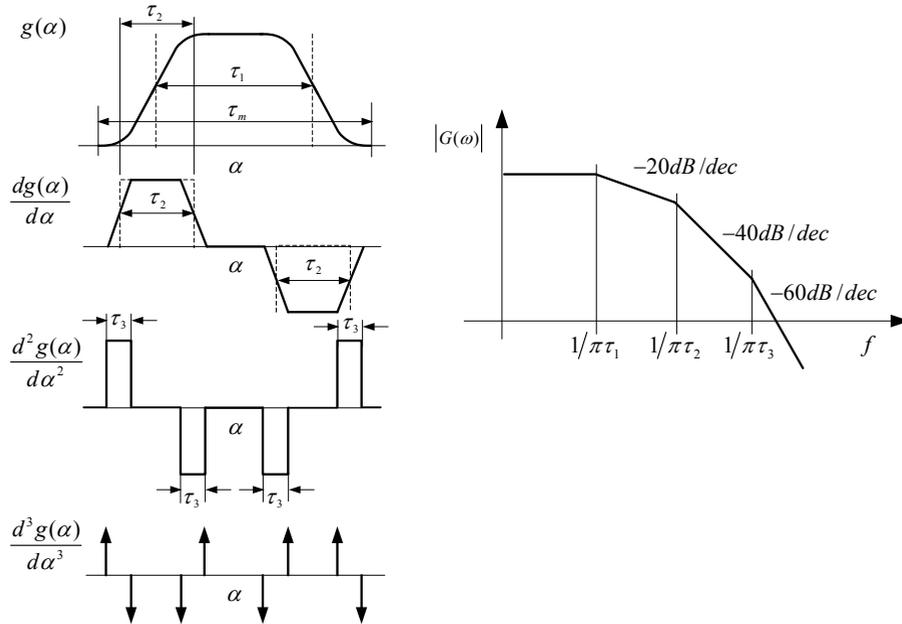


Figura 3.15 Espectro de un pulso trapezoidal

Por otra parte, las tres frecuencias de corte están relacionadas entre sí, ya que $\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 = \tau_m$, siendo τ_m la anchura de un polo.

Los ejemplos expuestos se basan en formas de onda idealizadas, no obstante, la relación encontrada entre las frecuencias de corte del espectro de $G(\omega)$ y la anchura de los pulsos de las sucesivas derivadas de $g(\alpha)$ puede ser aplicada a formas de onda reales, donde las discontinuidades finitas pasarían a ser frentes abruptos y las deltas de Dirac pulsos de elevada amplitud y corta duración. De lo anterior se deduce que es posible determinar las frecuencias de corte en la zona de baja frecuencia, como es el objetivo buscado.

Aunque el análisis anterior se refiere a un pulso aislado, es totalmente aplicable a ondas periódicas formadas por un número de pulsos igual al de polos. Es fácil comprobar que el espectro de una onda periódica formada por varios pulsos equiespaciados, de signos iguales o alternados, puede obtenerse del espectro de un polo aislado, eliminando del mismo los armónicos que se cancelan por simetría y multiplicando la amplitud de los armónicos restantes por el número de polos. De esto se deduce que las envolventes de ambas ondas son proporcionales

Como se ha comentado antes, el objetivo es hacer compatible la máxima atenuación de los armónicos a eliminar con la máxima amplitud del armónico

fundamental. Esto supone situar el mayor número de frecuencias de corte por encima de la fundamental y a una distancia que no comprometa la amplitud de este primer armónico. Para ello, deberá procurarse que los pulsos correspondientes a las primeras derivadas tengan anchuras similares para que las frecuencias de corte estén próximas entre sí.

Para ilustrar lo expuesto anteriormente, en la figura 3.16 se compara el comportamiento frente al par de cogging de dos imanes de diferentes geometrías, referenciadas por A y B, de un motor de 4 polos y 24 ranuras. En (a) se muestran las ondas de inducción de un polo B(α) y en (b) su valor al cuadrado $B^2(\alpha)$ del que depende el par de cogging.

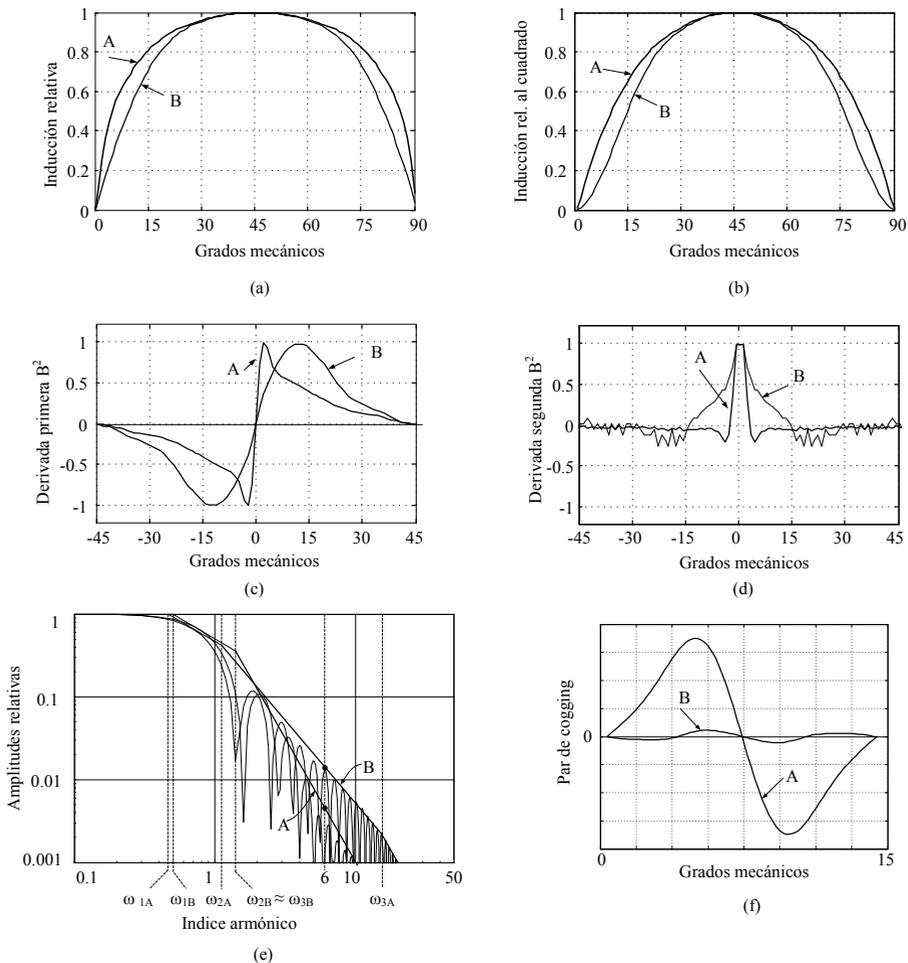


Figura 3.16 Pulsos correspondientes a dos ondas de inducción al cuadrado, sus derivadas primera y segunda, sus espectros y par de cogging correspondientes.

La figura 3.16 (e) corresponde al espectro de $B^2(\alpha)$ para cada uno de los dos imanes y las frecuencias de corte correspondientes. Las frecuencias de corte más bajas, $\omega_{1A}=1/\pi\tau_{1A}$ y $\omega_{1B}=1/\pi\tau_{1B}$ guardan relación con las anchuras de las ondas $B^2(\alpha)$ de ambas configuraciones. Por su parte, $\omega_{2A}=1/\pi\tau_{2A}$ y $\omega_{2B}=1/\pi\tau_{2B}$ están asociadas con las duraciones de los flancos de $B^2(\alpha)$ y con las anchuras de los pulsos correspondientes a las primeras derivadas de $B^2(\alpha)$. Estos valores no son muy diferentes entre sí. No obstante, en la segunda derivada sí existe una clara diferencia en la anchura de los pulsos, lo que conduce a una frecuencia de corte $\omega_{3A}=1/\pi\tau_{3A}$ muy superior a $\omega_{3B}=1/\pi\tau_{3B}$. En el caso mostrado, la diferencia en la segunda derivada origina una mayor atenuación del espectro de la configuración B. El resultado en términos de par de cogging aparece en la figura 3.16 (f).

3.5.3 Metodología de diseño

El método descrito permite cumplir con un determinado nivel de atenuación del espectro sin imponer a los imanes una forma geométrica concreta. Para ello, según se comentó antes, se debe procurar que los pulsos correspondientes a las primeras derivadas tengan una anchura mínima para que las frecuencias de corte tengan valores reducidos. El método de diseño que se propone comprende dos fases. En la primera se lleva a cabo la síntesis de la geometría de los imanes de forma analítica y en la segunda se refina iterativamente dicha geometría con el objetivo de facilitar su fabricación y verificación.

La fase analítica consiste en obtener la onda objetivo, inducción o inducción al cuadrado, a partir de un espectro cuyo perfil y frecuencias de corte son definidos de acuerdo con los objetivos a conseguir y al que se llamará espectro objetivo. Desde el punto de vista del diseño es indiferente tomar como onda objetivo la inducción o su derivada, ya que los espectros de una y de otra mantienen las frecuencias de corte y sólo difieren en el factor $j\omega$. En esta tesis se ha optado por tomar como función objetivo la derivada primera, ya que su representación gráfica facilita la comparación. De esta forma, el procedimiento analítico comienza con el diseño del espectro correspondiente a la derivada primera de la inducción o de la inducción al cuadrado, según se trate de diseñar un filtro para la FEM o para el par de cogging. Aplicando la transformada inversa de Fourier al espectro objetivo se obtiene la derivada, que una vez integrada dará como resultado la inducción, en el caso de la FEM, o la inducción al cuadrado, si se trata del cogging. En

el caso del *cogging*, será necesario también extraer la raíz cuadrada para obtener la inducción. El último paso consistirá en determinar la geometría de los imanes. Si se parte de un tipo de imantación y de una geometría de los imanes conocidos, esta última fase puede resolverse siguiendo el procedimiento desarrollado en el apartado 3.4.3.

El método descrito ha de considerarse como una primera estimación analítica de la primera derivada de $B(\alpha)$ o de $B^2(\alpha)$ y de la geometría de los imanes. A efectos de industrialización, esta primera geometría de los imanes deberá ajustarse a formas que puedan ser definidas por pocos parámetros geométricos, lo que harán necesarias algunas iteraciones mediante elementos finitos. En el proceso de iteración juegan un papel fundamental las formas de onda de las derivadas primera y segunda, ya que éstas indican en qué sentido debe ser modificada la geometría para alcanzar el espectro objetivo.

Como espectros objetivos pueden servir las funciones de respuesta en frecuencia de uso común en señales con características paso-bajo y de transformadas inversas conocidas, tales como las mostradas en (3.10).

El primer espectro es de polos múltiples y el segundo de polos dobles conjugados.

En las figuras 3.17 a 3.20 se muestra el proceso de diseño de filtrado no selectivo del par de *cogging* en un motor de cuatro polos y 24 ranuras. En la figura 3.17 aparecen los espectros correspondientes a la primera derivada de la inducción al cuadrado para las configuraciones inicial y final de los imanes.

$$f(\alpha) \leftrightarrow F(\omega)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{[1 + j(\omega/\omega_c)]^{n+1}} \leftrightarrow f(\alpha) = \frac{\alpha^n}{n! \omega^{n+1}} e^{-\alpha} u(\alpha) \quad (3.10)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 2\xi j\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)} \leftrightarrow f(\alpha) = \frac{\omega_c}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\alpha} \text{sen } \omega_c \sqrt{1 - \xi^2} \alpha$$

La amplitud del espectro inicial para el primer armónico de *cogging* es 0.4 y se desea que ésta disminuya hasta 0.04, lo que supone una disminución proporcional del primer armónico del par de *cogging*. El espectro objetivo ha sido obtenido mediante la segunda expresión de (3.10) con $\omega_c = 7$ y $\xi = 0.8$.

En la figura 3.18 se muestran las ondas de inducción inicial, $B_i(\alpha)$, y la derivada de su cuadrado, $dB_i^2(\alpha)/d\alpha$. Esta última es comparada con la derivada $dB^2(\alpha)/d\alpha$, obtenida mediante la transformada inversa del espectro objetivo, apreciándose una clara diferencia entre sus valores de pico y en sus anchuras. En la figura 3.19 se pueden observar las derivadas segundas de las versiones

original y filtrada. Por último, la onda de inducción objetivo, $B(\alpha)$, se obtiene de extraer la raíz cuadrada a la integral de $dB^2(\alpha)/d\alpha$.

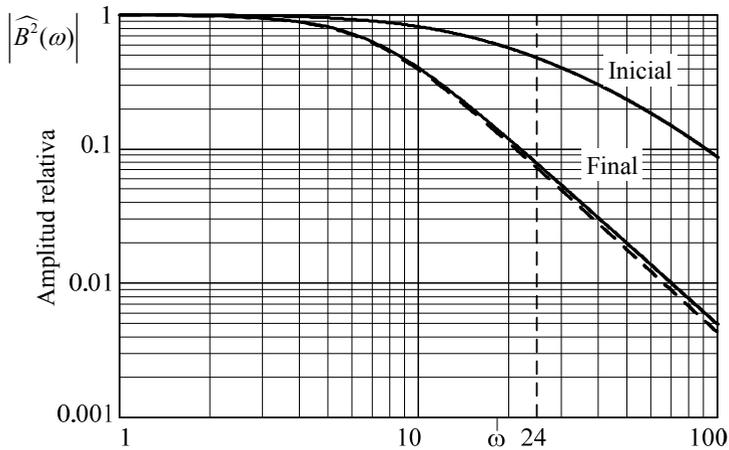


Figura 3.17 Espectros de la primera derivada de la inducción al cuadrado para las configuraciones inicial y final de los imanes.

La nueva geometría de los imanes se ha obtenido a partir de la inducción inicial, $B_i(\alpha)$, y de la inducción objetivo, $B(\alpha)$, mediante la expresión 3.2, $l_m = l_{mi} [B_i(\alpha) / B(\alpha)]$. En la figura 3.20 (a) se puede observar la geometría resultante de la primera iteración y en (b) su aproximación a una geometría caracterizada por dos parámetros: el ángulo δ , de 20 grados, y el radio de curvatura de los bordes R , de 10mm. Esta nueva geometría no difiere en la práctica de la obtenida analíticamente como puede observarse del nuevo espectro obtenido, mostrado en la figura 3.17 con línea discontinua.

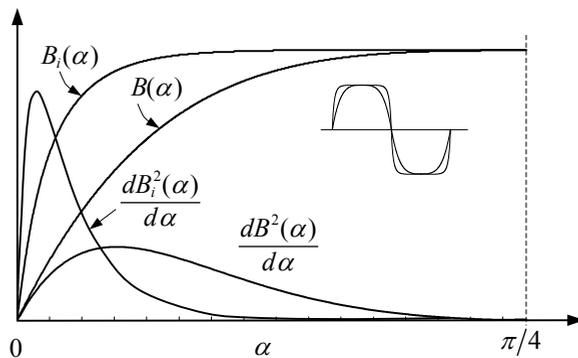


Figura 3.18 Ondas de inducción y derivadas de las ondas de inducción al cuadrado.

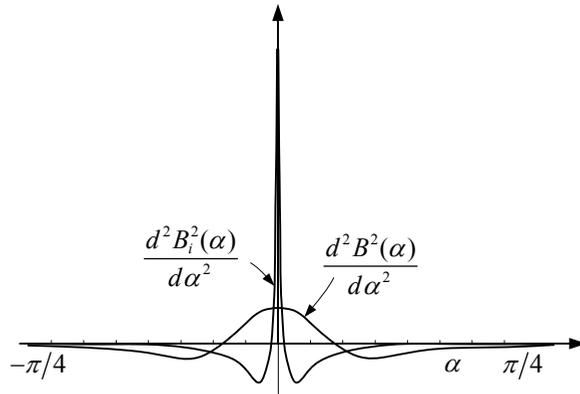


Figura 3.19. Derivadas segundas de las ondas de inducción al cuadrado.

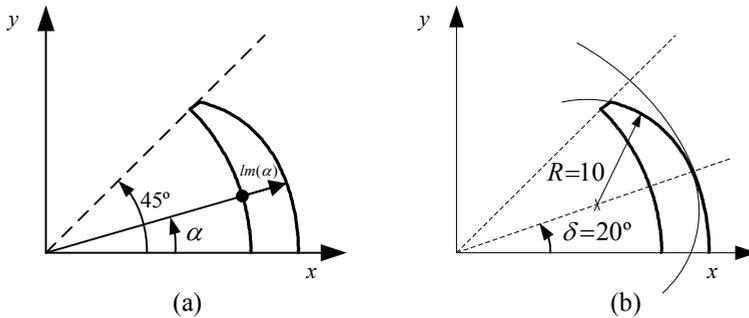


Figura 3.20. Geometría inicial (a) y final (b) de los imanes

Representación de las envolventes de los espectros

En el filtrado no selectivo es muy importante conocer la forma de la envolvente del espectro, incluso más que la forma exacta del mismo. En este sentido, si el espectro se obtiene considerando la longitud total de la onda, los armónicos cancelados por los efectos de simetría y de periodicidad no aparecerán en su representación. Si, por el contrario, el espectro se obtiene a partir de la unidad básica de la onda, no tendrán lugar este tipo de cancelaciones y éste exhibirá con mayor claridad la envolvente. En la figura 3.21 (a) se muestra como ejemplo una onda de inducción, en (b) su derivada y en (c) el módulo del espectro de la anterior, obtenido de dos formas diferentes; tomando la longitud completa de 0 a 2π y tomando sólo el intervalo entre $3\pi/4$ y $5\pi/4$. En el primer caso, el espectro está formado solamente por los armónicos de índice $h \in \{2, 6, 10, 14, \dots\}$ debido a la simetría de media onda respecto de su periodicidad, mientras que en el segundo caso, el espectro contiene todos los armónicos, permitiendo representar claramente la

envolvente.

En la figura 3.21 (d) se muestra un ejemplo de onda de inducción elevada al cuadrado, en (e) su derivada y en (f) el módulo del espectro de esta última, obtenido de tres formas diferentes; tomando la longitud total, tomando la unidad de repetición, de 0 a $\pi/2$, correspondiente a un polo, y por último, tomando la unidad básica de onda correspondiente a medio polo, de 0 a $\pi/4$.

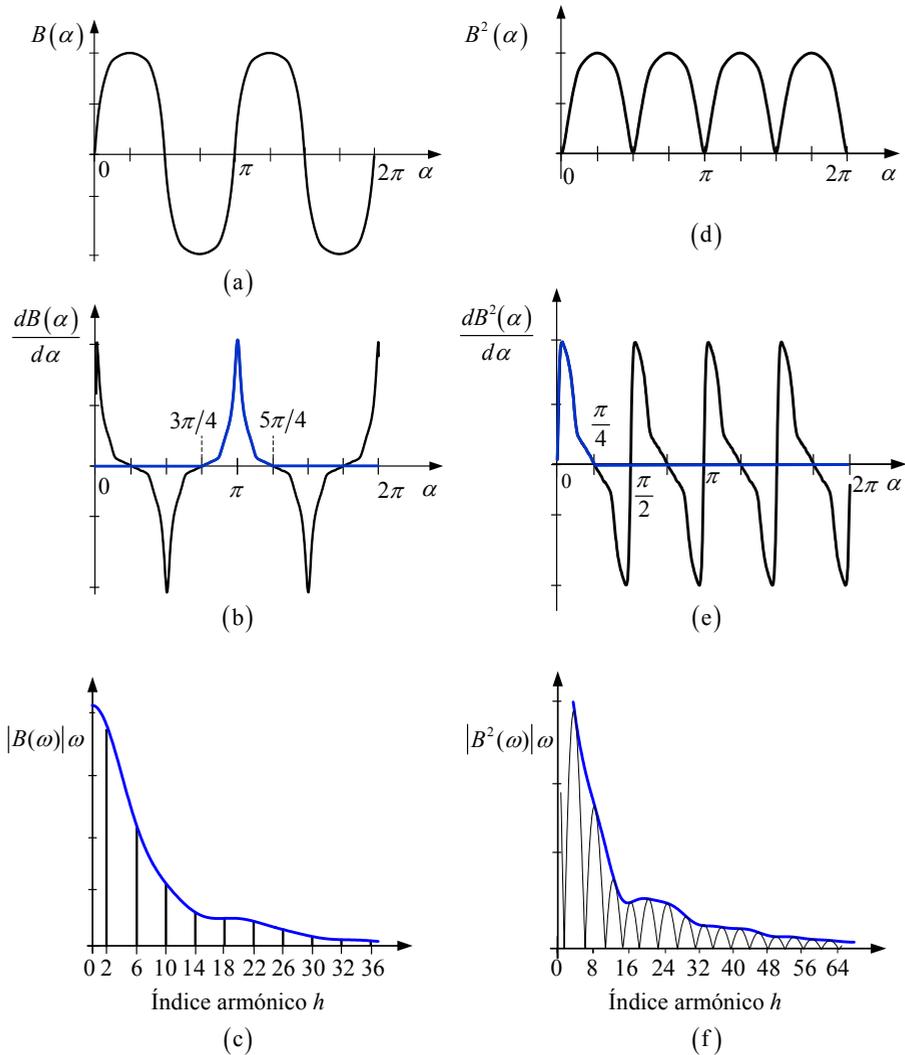


Figura 3.21. Ondas de inducción y de inducción al cuadrado, sus derivadas y los espectros respectivos. Generación de las envolventes.

En el primer caso, el espectro solo contiene los armónicos $h \in \{4, 8, 12, 16, \dots\}$ debido a la periodicidad de los pulsos, pero en el segundo caso solo existe simetría impar, por lo que solo aparecerán las partes imaginarias de todos los armónicos. En ambos casos, las amplitudes de los armónicos están contenidas en la curva continua formada por lóbulos. En el tercer caso ya no se anulan las partes imaginarias, resultando que las amplitudes de los armónicos están contenidas en la línea continua que envuelve a los lóbulos y que define por tanto a la envolvente buscada.

En el apartado 3.5 de este capítulo se muestra un ejemplo de filtrado del par de cogging siguiendo los pasos anteriores incluyendo la forma de los imanes resultantes y el efecto conseguido en el par de *cogging*.

3.6 Validación experimental

En este apartado se muestran algunos de los resultados experimentales realizados con el fin de validar los métodos de filtrado propuestos.

3.6.1 Modificación de los ceros existentes

Aplicación del método a la FEM

Se aplicará el método de filtrado por modificación de los ceros, usando la posición de los imanes como único recurso de filtrado, con el fin de obtener una onda de FEM más senoidal. El prototipo sobre el que se ha realizado la comprobación posee cuatro imanes iguales sin inclinación en sentido axial, con un arco polar de 80 grados mecánicos y con un desfase entre ellos de 90 grados mecánicos. En la tabla 3.1 se indican las características del mencionado prototipo. Según este método de diseño, con cuatro imanes sólo se pueden cancelar dos armónicos simultáneamente. Tomando el 5° y el 11° por ser los de mayor amplitud, resulta la siguiente configuración angular para los imanes: $\alpha_1 = 81.81^\circ$, $\alpha_2 = 162^\circ$ y $\alpha_3 = 243.81^\circ$. Las figuras 3.22 y 3.23 muestran la nueva onda y su espectro, respectivamente, tras el filtrado. Se observa que si bien, los armónicos 5° y 11° no han desaparecido totalmente como consecuencia de los errores mecánicos de posicionado, éstos han disminuido sustancialmente, quedando de manifiesto en la forma de onda, con un valor de THD = 0.67% frente al 5.24% de la onda original obtenida con los imanes equiespaciados.

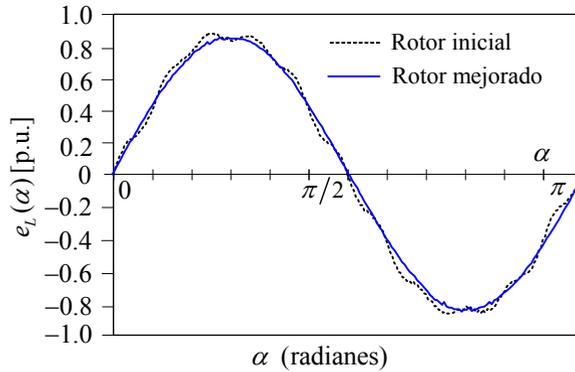


Figura 3.22. Ondas de FEM experimentales antes y después de aplicar el filtrado por modificación de los zeros existentes.

Por su parte, el 13° armónico ha disminuido en 12dB como consecuencia de la proximidad del cero impuesto al armónico 11°.

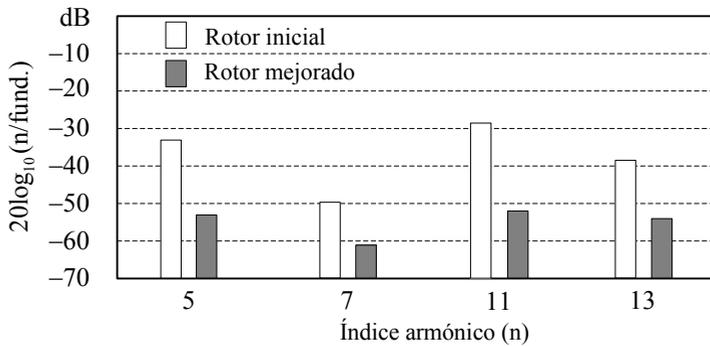


Figura 3.23. Espectros antes y después de aplicar el filtrado.

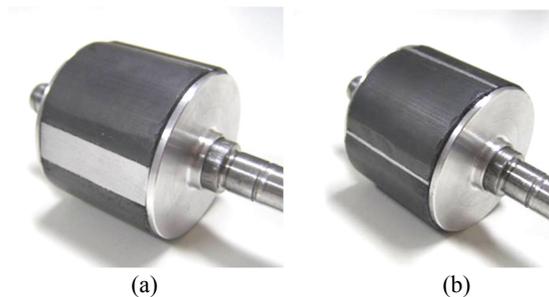


Figura 3.24. (a) Prototipo de rotor con distribución asimétrica de los imanes y (b) girado 180°.

Tabla 3.1 Especificaciones del MSIP usado en los ensayos

Número de pares de polos	$2p$	2
Número de ranuras	z	24
Abertura de ranura	w_s	2.5 mm
Longitud entrehierro	g	1.0 mm
Radio interior estator	r_s	45 mm
Radio exterior rotor	r_m	44 mm
Longitud axial	l_{st}	35 mm
Arco polar	α_m	80° mecánicos
Remanencia imanes	B_r	0.41 T
Longitud radial imanes	l_m	6 mm
Número de fases	N_F	3
Paso de bobina	A_b	5 ranuras
Bobinas por fase		4
Conexión	estrella	

Aplicación del método al par de cogging

En este caso el objetivo es reducir el par de *cogging* de un motor de cuatro polos y 24 ranuras, con imanes superficiales de Nd-Fe-B y entrehierro de 0.8mm de altura y 36.5mm de diámetro. En la configuración de partida los imanes ocupan un arco de 90 grados mecánicos.

Como en el apartado anterior, los cuatro imanes permiten eliminar dos armónicos simultáneamente, eligiéndose en este caso los dos primeros armónicos del par de *cogging*; $h = 24$ y $h = 48$. El procedimiento de filtrado consiste en descomponer la función característica del posicionado de los imanes, formada por cuatro deltas equiespaciadas, en otras dos ondas, una primera formada por dos deltas distanciadas 90° y una segunda formada por dos deltas espaciadas 180°. El primer armónico se elimina modificando la distancia de las deltas de la primera onda de 90° a 82.5° y el segundo armónico se cancela al aumentar la distancia de las deltas de la segunda onda de 180° a 187.5°.

Por otro lado, dado que la el arco ocupado por los imanes debe reducirse para que sea compatible con la nueva posición de las deltas, conviene que el nuevo valor minimice o cancele algunos de los armónicos objetivos. Es fácil deducir que para un arco de 97.5° se elimina el primer armónico y es compatible con la nuevas posiciones de las deltas.

En la figura 3.25 se muestran la configuración de partida la y la obtenida tras el filtrado y en la figura 3.26 aparecen las ondas del par de *cogging* correspondientes a ambas configuraciones.

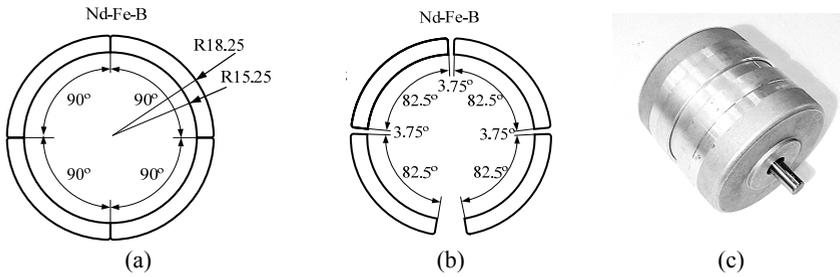


Figura 3.25 Configuraciones inicial y final de los imanes para la eliminación de los dos primeros armónicos del par de *cogging*

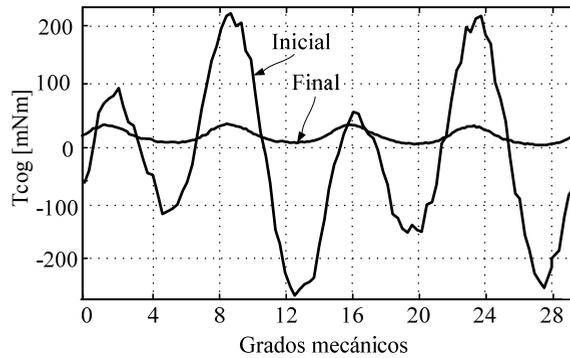


Figura 3.26. Par de *cogging* correspondiente a las configuraciones inicial y final de los imanes.

3.6.2 Reducción del par de *cogging* mediante el conformado de los polos

En este apartado se verifica experimentalmente el procedimiento descrito en el apartado 3.4.4, consistente en modificar la geometría de los polos. En este caso, se ha recurrido a modificar la distancia entre la cara interior de los imanes y la superficie exterior del rotor. Los imanes utilizados para la prueba son de Nd-Fe-B de 90 grados y 3 mm de espesor y el procedimiento empleado es idéntico al descrito en el ejemplo de simulación del apartado 3.4.4.

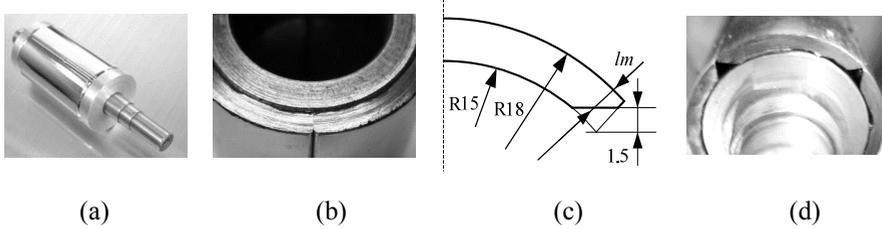


Figura 3.27. Rotor usado en la prueba (a), configuración original de los imanes (b), nueva geometría generada por diseño (c) y geometría resultante de los imanes (d).

En este caso, la altura del imán $lm(\theta)$ obtenida puede aproximarse sin gran error a una recta perpendicular al eje de simetría del imán, tal como se muestra en la figura 3.27 (c) y en la geometría resultante de la figura 3.27 (d).

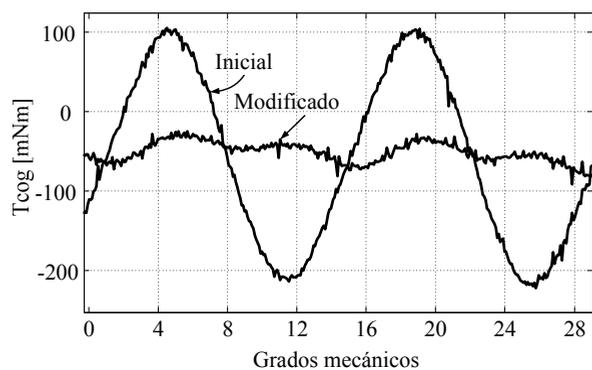


Figura 3.28. Par de cogging inicial y después de la modificación.

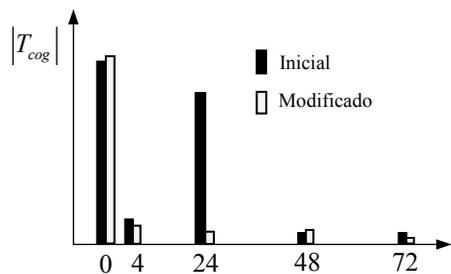


Figura 3.29. Espectro del par de cogging antes y después de la modificación.

3.6.3 Filtrado no selectivo

La comprobación experimental de este apartado se llevará a cabo mediante el diseño de un filtro para la reducción del par de *cogging*, empleando para ello la misma configuración de motor del apartado anterior; $2p = 4$, $N_s = 24$ ranuras e imanes de Nd-Fe-B.

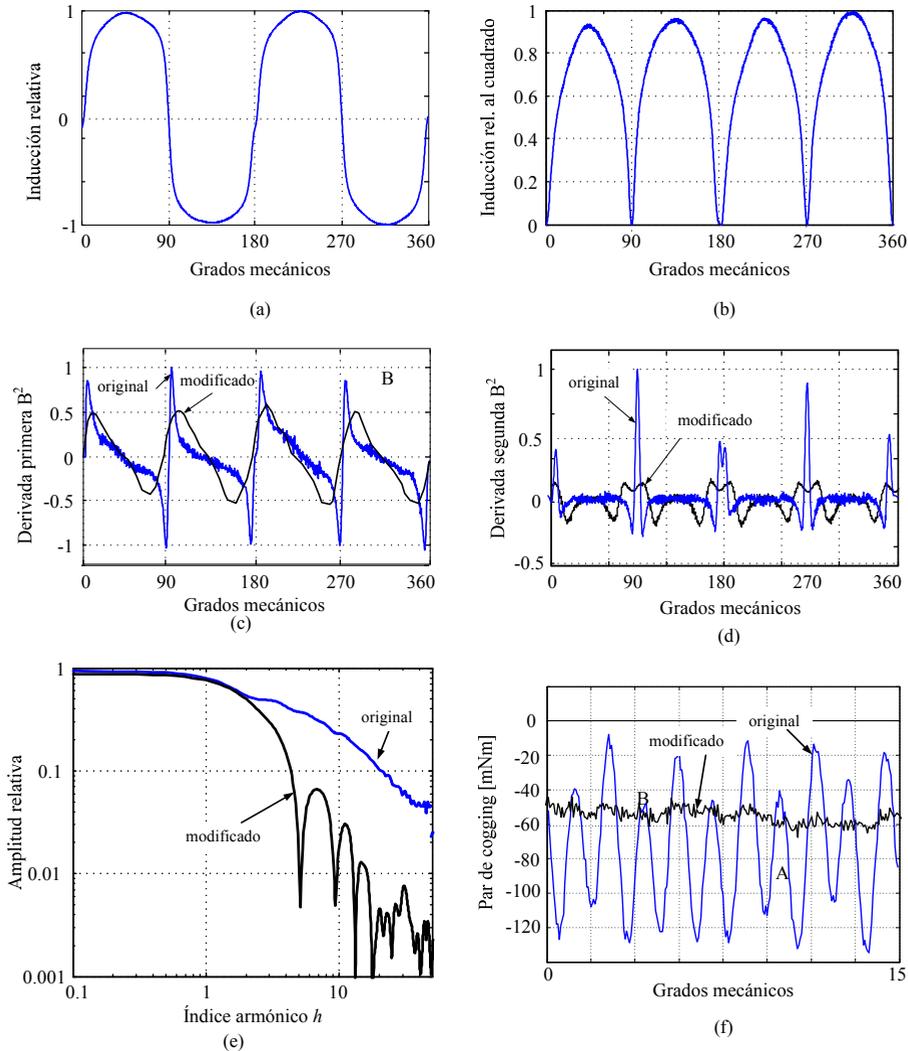
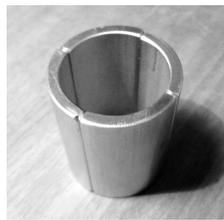


Figura 3.30. Verificación experimental del filtrado no selectivo. Ondas de inducción (a), de inducción al cuadrado (b), sus derivadas primera (c) y segunda (d), sus espectros (e) y el par de *cogging* (f) correspondientes a la versión original y después de la modificación.

La configuración de partida tiene imanes con arco magnético de 180 grados de radios exterior e interior constantes. El método de filtrado ha consistido en modificar la curvatura exterior de los imanes en las proximidades de los bordes. Las figuras 3.30 (a) y (b) muestran las ondas de inducción y de inducción al cuadrado correspondiente a la geometría original, en (c) y (d) las derivadas primera y segunda correspondientes a la configuración original y tras la modificación de la geometría siguiendo el procedimiento indicado en el apartado 3.5.3. En (e) y (f) se muestran los espectros y el par de *cogging* resultante. La geometría original de los imanes y la resultante del diseño se muestran en la figura 3.31.



(a) Configuración original



(b) Configuración final

Figura 3.31 imanes permanentes empleado en el ensayo

Comparativa de sensibilidades ante tolerancias de fabricación

Por último, para comprobar las características de sensibilidad frente a las tolerancias mecánicas del filtrado no selectivo, se ha realizado una prueba comparativa entre el método de filtrado no selectivo y el de imposición de ceros para una misma configuración de motor. La configuración basada en el posicionado de ceros será la empleada en el apartado 3.6.1 en la que se introducirá un desplazamiento de un milímetro a uno de los imanes para simular un error de fabricación. Por su parte, para la configuración basada en el filtrado no selectivo se emplearán los imanes del motor mostrado en la figura 3.31 (b) descrito más arriba. En esta configuración se aplicará un cambio en uno de los imanes, consistente en el acortamiento de su arco, que pasa de 90 grados a 86.25°, y que supone un espacio libre de un milímetro entre imanes. La curvatura de los bordes se ha mantenido tras el acortamiento del arco.

En la figura 3.32 se muestran las curvas de par de *cogging* antes y después de la modificación introducida para el prototipo que incorpora el filtrado

selectivo. De las gráficas se deduce una clara dependencia del *cogging* con los cambios geométricos. En la figura 3.33, se muestran las curvas de *cogging* para el prototipo con filtrado no selectivo. Como se puede observar, en este caso la sensibilidad a los errores geométricos es bastante menor.

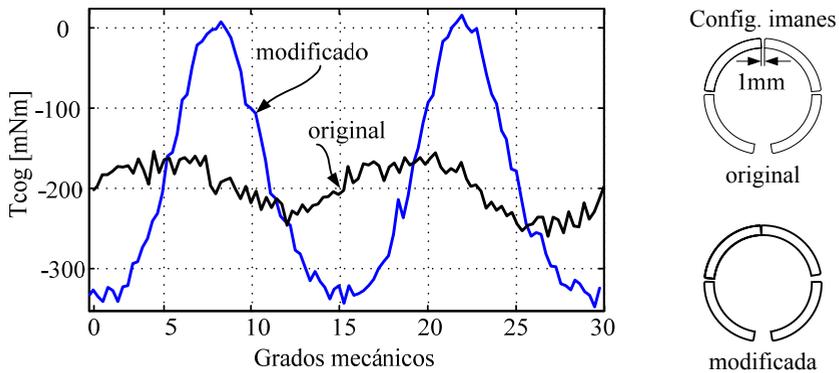


Figura 3.32 Comprobación experimental de la sensibilidad para el caso de filtrado selectivo y geometrías empleadas en los imanes permanentes.

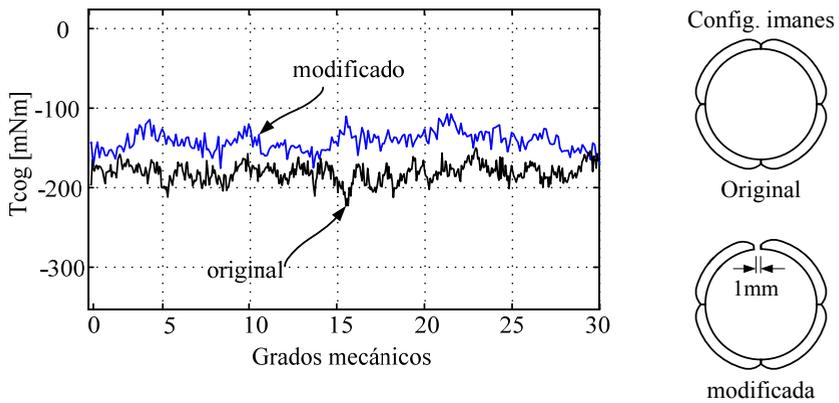


Figura 3.33. Comprobación experimental de la sensibilidad para el caso de filtrado no selectivo y geometrías empleadas en los imanes.

3.7 Conclusiones

Se ha realizado un análisis de la máquina de imanes permanentes basado en la convolución que permite la creación de filtros espaciales selectivos en frecuencia capaces de eliminar armónicos de FEM y de par de *cogging* de forma separada o simultánea.

Se han desarrollado cuatro métodos de síntesis de filtrado: adición de ceros, modificación de los ceros existentes, conformación de los polos y filtrado no selectivo, que cubren buena parte de las necesidades de fabricación industrial.

Se han sentado las bases para el desarrollo de una metodología general de diseño de filtros espaciales, demostrando los resultados experimentales la validez de los métodos desarrollados.

Anexo al capítulo 3

Tabla A3.1 Ondas auxiliares utilizadas en el filtrado espacial

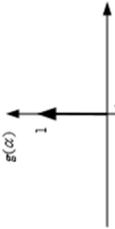
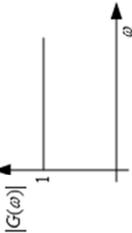
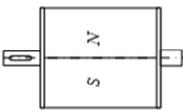
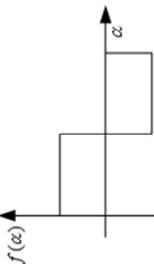
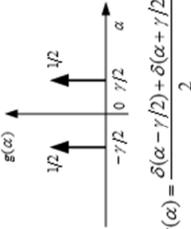
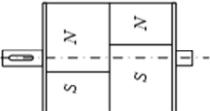
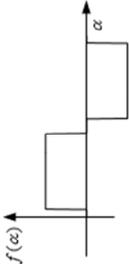
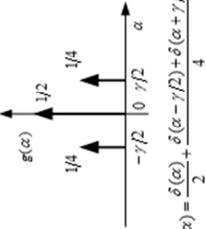
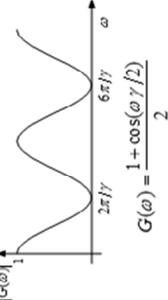
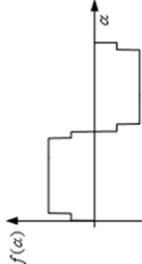
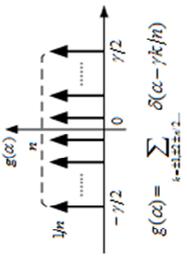
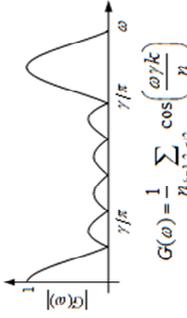
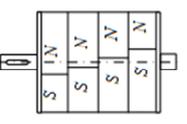
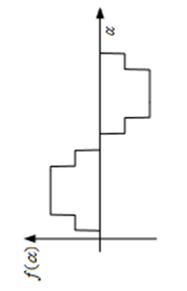
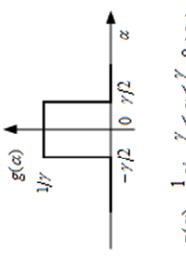
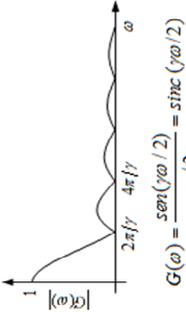
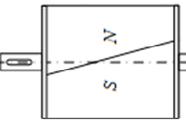
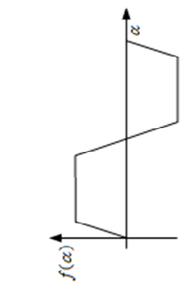
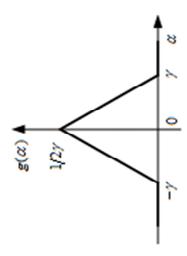
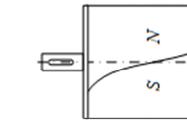
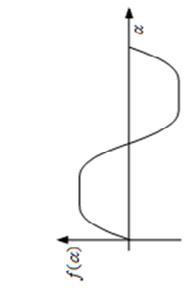
Onda auxiliar	Espectro	Eje z	Plano x-y
<p>(a) Delta de Dirac</p>  $g(\alpha) = \delta(\alpha)$	 $ G(\omega) = 1$		
<p>(b) Desplazamiento</p>  $g(\alpha) = \frac{\delta(\alpha - \gamma/2) + \delta(\alpha + \gamma/2)}{2}$	 $ G(\omega) = \cos(\omega \gamma/2)$		
<p>(c) Doble desplaz.</p>  $g(\alpha) = \frac{\delta(\alpha - \gamma/2) + \delta(\alpha + \gamma/2) + \delta(\alpha - 3\gamma/4) + \delta(\alpha + 3\gamma/4)}{4}$	 $ G(\omega) = \frac{1 + \cos(\omega \gamma/2)}{2}$		

Tabla A3.2 Ondas auxiliares utilizadas en el filtrado espacial

Onda auxiliar	Espectro	Eje z	Plano x-y
<p>(d) Desplaz. múlt.</p>  $g(\alpha) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\alpha - \gamma k / 2)$	 $G(\omega) = \frac{1}{\gamma} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\omega \gamma k}{2}\right)$		
<p>(e) Pulso</p>  $g(\alpha) = \frac{1}{\gamma} \text{si} \left[\alpha - \frac{\gamma}{2} \leq \alpha \leq \frac{\gamma}{2}, 0 \text{ e.o.c.} \right]$	 $G(\omega) = \frac{\text{sinc}(\gamma \omega / 2)}{\gamma \omega / 2} = \text{sinc}(\gamma \omega / 2)$		
<p>(f) Doble pulso</p>  $g(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{2\gamma} \alpha + \frac{1}{2\gamma} \text{ si } -\gamma \leq \alpha \leq 0 \\ \frac{1}{2\gamma} \alpha - \frac{1}{2\gamma} \text{ si } 0 \leq \alpha \leq \gamma \end{cases}$	 $G(\omega) = \text{sinc}^2(\omega \gamma / 2)$		

4

Influencia de las Tolerancias de Fabricación sobre la FEM y el Par de *Cogging*

Introducción

En el diseño de cualquier producto industrial es importante conocer de antemano las posibles diferencias entre el comportamiento del modelo teórico y el real tras la industrialización. El origen de estas diferencias suele estar en las tolerancias mecánicas de fabricación y en las variaciones de las propiedades de los materiales empleados. En este trabajo se estudia la influencia de los errores de magnetización, de dimensionado y de posicionamiento de los imanes y de los bloques sobre la fuerza electromotriz inducida y sobre el par de *cogging* en motores síncronos de imanes permanentes.

Los errores y las tolerancias de fabricación provocan la deformación de los espectros con la consiguiente aparición de nuevos armónicos, o la reaparición de aquellos que fueron cancelados de forma expresa en el diseño. Trabajos recientes demuestran el interés por conocer el origen de los errores en la magnetización [62] [67]-[68] y sus efectos [69], [70].

Aunque las tolerancias de fabricación generan además otras fuentes de error, como deformaciones o excentricidades entre el estator y el rotor [71], sólo se estudiarán los errores relacionados con el rotor.

En este trabajo las desviaciones se modelan mediante variables aleatorias, lo que obliga a utilizar métodos estadísticos para el análisis de sus efectos. Con este fin se han desarrollado dos modelos de errores totalmente analíticos. El primero es lineal y describe cómo influyen las distintas fuentes de error sobre los primeros armónicos de FEM y de *cogging*, donde se encuentran los de interés práctico en máquinas eléctricas. Un segundo modelo, no lineal, permite interpretar el efecto de las imperfecciones sobre los armónicos de mayor frecuencia de la FEM. Ambos modelos han sido validados, tanto numérica como experimentalmente para la FEM. Para la validación experimental se han utilizado más de setenta motores tomados al

azar de una cadena de producción.

Los resultados del análisis pueden ser aplicados a dos campos: al del diseño y al del control de calidad.

Al primero aportan un estudio completo de sensibilidades respecto de las distintas fuentes de error, lo que lo convierte en un valioso complemento de los métodos destinados a la cancelación de armónicos, sobre todo en motores con un número reducido de ranuras por polo y fase. En estos casos, las variables estáticas permiten escasa libertad para el diseño, por lo que es preciso recurrir a modificar algunos parámetros de los imanes, como el arco polar, el espaciado o la forma de los mismos, entre otros, para conseguir una FEM más senoidal o un reducido valor del par de cogging [59], [44], [25]. Pero la eficacia real de estas técnicas depende finalmente de las tolerancias de fabricación y de la sensibilidad del diseño a dichas tolerancias.

El modelo lineal propuesto es una valiosa herramienta en los procesos de control de calidad, ya que permite cuantificar por separado los diferentes errores a partir del análisis estadístico del espectro de la FEM. La información obtenida puede servir para mejorar los procesos de fabricación y corregir los errores de magnetización.

4.1 Efecto de las tolerancias sobre la FEM

En primer lugar se presentará el método seguido para analizar los efectos de las tolerancias sobre la FEM, que será empleado también en el estudio del par de *cogging*.

4.1.1 Análisis matemático

4.1.1.1 Modelado de los errores

Se partirá de un modelo de rotor con imanes superficiales o interiores, de iguales dimensiones nominales, formado por M bloques axiales de N imanes cada uno. La distribución angular nominal de los imanes será idéntica en todos los bloques. Como suele ser habitual, se considerará que tanto la posición de los imanes como la de los bloques presentan simetría par respecto de algún punto del entrehierro. El análisis se centra en los siguientes tipos de errores:

- (i) Desviaciones de la inducción de cada imán.

- (ii) Desviaciones del posicionamiento de los imanes.
- (iii) Desviaciones de la anchura nominal de los imanes.
- (iv) Desviaciones del ángulo de cada bloque.

Cada uno de estos cuatro tipos de desviaciones o errores se modelarán mediante variables aleatorias con función de densidad de probabilidad (FDP) Gaussiana, como es habitual en este tipo de análisis [67], [69]. La figura 4.1 muestra la onda de inducción en el entrehierro para uno de los bloques de imanes y las variables usadas en el modelo.

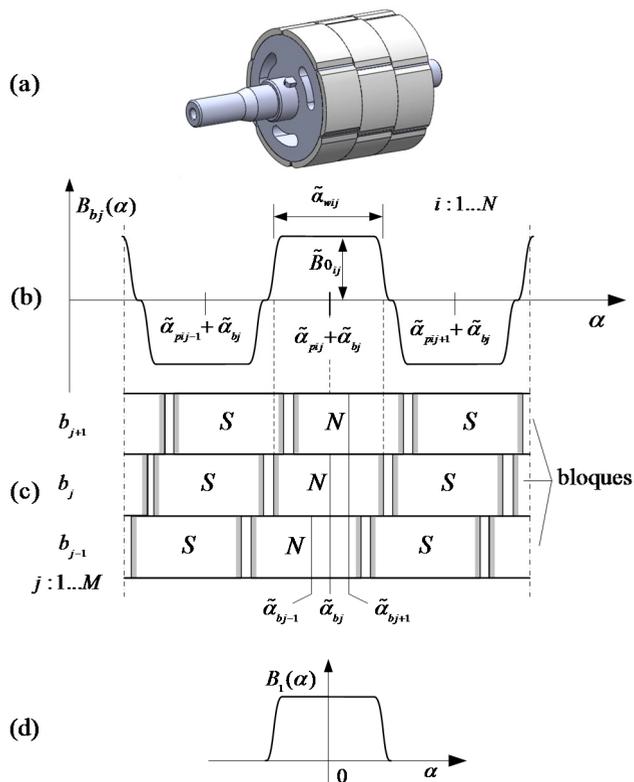


Figura 4.1. Onda de inducción en el entrehierro (a), distribución de los bloques (b) y onda de inducción nominal de los polos (c).

En dicha figura,

$$\begin{aligned}
\tilde{\alpha}_{pij} &= \alpha_{pi} + \theta_{pij}; & \theta_{pij} &\sim N(0, \sigma_{\theta p}^2) \\
\tilde{\alpha}_{bj} &= \alpha_{bj} + \theta_{bj}; & \theta_{bj} &\sim N(0, \sigma_{\theta b}^2) \\
\tilde{\alpha}_{wij} &= \alpha_w(1 + \varepsilon_{ij}); & \varepsilon_{ij} &\sim N(0, \sigma_\varepsilon^2) \\
\tilde{B}_{0ij} &= B_0(1 + \beta_{ij}); & \beta_{ij} &\sim N(0, \sigma_\beta^2)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde

α_{pi} es la posición angular nominal del i -ésimo imán dentro de un mismo bloque y θ_{pij} su desviación en el bloque j -ésimo.

α_{bj} es la posición angular nominal del j -ésimo bloque y θ_{bj} su desviación.

α_w es el ancho nominal de los polos y ε_{ij} la desviación relativa de dicha anchura del polo i -ésimo del bloque j -ésimo.

B_0 es la amplitud nominal de la inducción de los polos y β_{ij} la desviación relativa del polo i -ésimo del bloque j -ésimo.

El resultado buscado es el efecto de las varianzas de las variables aleatorias definidas en (4.1) sobre el espectro de la FEM.

Para un rotor formado por M bloques de igual longitud axial, la tensión inducida en un conductor recto es:

$$e_{cr}(\alpha) = \frac{\omega_r r l_{st}}{M} \sum_{j=1}^M B_{bj}(\alpha - \tilde{\alpha}_{bj}) \tag{4.2}$$

donde ω_r es la velocidad angular del rotor, r el radio del rotor, l_{st} la longitud axial del paquete magnético, $B_{bj}(\alpha)$ la inducción a lo largo del entrehierro creada por el bloque j -ésimo, (figura 4.1), y $\tilde{\alpha}_{bj}$ el desplazamiento angular de dicho bloque con relación al bloque de referencia.

La onda de inducción de cualquiera de los bloques, $B_{bj}(\alpha)$, puede expresarse como la suma de sucesivos desplazamiento e inversiones de la inducción nominal de un polo, $B_1(\alpha)$, mostrada en la figura 4.1(c), que en cada posición tiene diferente amplitud y anchura, caracterizadas por los factores descritos en (4.1), $(1+\beta_{ij})$ y $(1+\varepsilon_{ij})$, respectivamente.

$$e_{cr}(\alpha) = \frac{\omega_r r l_{st}}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} (1 + \beta_{ij}) B_1 \left(\frac{\alpha}{1 + \varepsilon_{ij}} - \tilde{\alpha}_{pij} - \tilde{\alpha}_{bj} \right) \tag{4.3}$$

donde N es el número de imanes o polos.

Por su parte, la FEM de una sección del bobinado, $v(\alpha)$, puede obtenerse a partir de las fuerzas electromotrices inducidas en los conductores alojados en las ranuras:

$$\begin{aligned}
v(\alpha) &= \sum_{k=1}^L e_{cr}(\alpha - \varphi_k) R_k \\
&= \frac{\omega_r r l_{st}}{M} \sum_{k=1}^L \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} (1 + \beta_{ij}) B_1 \left(\frac{\alpha}{1 + \varepsilon_{ij}} - \tilde{\alpha}_{pij} - \tilde{\alpha}_{bj} - \varphi_k \right) R_k
\end{aligned} \tag{4.4}$$

donde L es el número de ranuras que forman la sección del bobinado y φ_k la posición angular de la ranura k -ésima. El número y la polaridad de los conductores alojados en cada ranura se indican con el valor absoluto y el signo de R_k , respectivamente.

En el estudio que sigue se supondrá que B_1 es aperiódica y que toma el valor cero fuera del intervalo $[-\pi, \pi]$. Este enfoque no supone pérdida de generalidad y permite trabajar con espectros continuos en lugar de discretos, lo que resulta de utilidad en el análisis de sensibilidades y en la interpretación de los resultados, como se verá más adelante.

Expresando (4.4) en función de las posiciones nominales y de las desviaciones y transformando por Fourier, resulta:

$$\begin{aligned}
F\{v(\alpha)\} = V(\omega) &= \frac{\omega_r r l_{st}}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ |1 + \varepsilon_{ij}| (1 + \beta_{ij}) \right. \\
&\quad \left. \cdot (-1)^{i-1} \hat{B}_1[\omega(1 + \varepsilon_{ij})] e^{-j\omega(\alpha_{pi} + \alpha_{bj})} e^{-j\omega(\theta_{pij} + \theta_{bj})} \right\} D(\omega)
\end{aligned} \tag{4.5}$$

donde ω es la frecuencia espacial, $\hat{B}_1(\omega)$ la transformada de $B_1(\alpha)$ y $D(\omega)$ el espectro de la distribución del devanado.

$$D(\omega) = \sum_{k=1}^L e^{-j\omega\varphi_k} R_k \tag{4.6}$$

El espectro de FEM, $V(\omega)$, de (4.5) es una función continua de ω , pero en la máquina real solo tiene significado para los valores enteros de ω .

$V(\omega)$ resulta de más fácil interpretación si se normaliza respecto de la magnitud nominal del primer armónico eléctrico, de frecuencia $\omega = N/2$. Para ello se considerará que la FEM por polo del primer armónico es máxima y que los vectores unitarios $\exp[-j\omega(\alpha_{pi} + \alpha_{bj})]$ de (4.5) están prácticamente en fase, siendo la suma de todos ellos NM . De esta forma, el espectro normalizado resulta

$$\begin{aligned}
V'(\omega) &= \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ |1 + \varepsilon_{ij}| (1 + \beta_{ij}) \right. \\
&\quad \left. \cdot (-1)^{i-1} \hat{B}'_1(\omega + \omega\varepsilon_{ij}) e^{-j\omega(\alpha_{pi} + \alpha_{bj})} e^{-j\omega(\theta_{pij} + \theta_{bj})} \right\} D'(\omega)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

El símbolo (') de V' , B_1' y D' indica que son espectros normalizados respecto de sus primeros armónicos.

4.1.1.2 Análisis para bajas frecuencias

Para los armónicos de baja frecuencia se admitirán las siguientes aproximaciones:

(i) La segunda exponencial de (4.7) se aproximará por Maclaurin

$$e^{-j\omega(\theta_{pij} + \theta_{bj})} \approx 1 - j\omega(\theta_{pij} + \theta_{bj}) \quad (4.8)$$

(ii) Las tolerancias de magnetización, β_{ij} , se supondrán muy superiores a las del ancho de los polos, ε_{ij} , y por lo tanto,

$$|1 + \varepsilon_{ij}|(1 + \beta_{ij}) \approx (1 + \beta_{ij}) \quad (4.9)$$

(iii) Se aplicará el desarrollo en serie de Taylor en el entorno de ω al término $\hat{B}'_1(\omega + \omega\varepsilon_{ij})$ resultando

$$\hat{B}'_1(\omega + \omega\varepsilon_{ij}) \approx \hat{B}'_1(\omega) + \frac{d\hat{B}'_1(\omega)}{d\omega} \omega\varepsilon_{ij} \quad (4.10)$$

Sustituyendo (4.8), (4.9) y (4.10) en (4.7) y despreciando los errores de segundo orden, resulta finalmente:

$$V'(\omega) \approx V'_L(\omega) + V'_{\beta}(\omega) + V'_{\theta_p}(\omega) + V'_{\varepsilon}(\omega) + V'_b(\omega) \quad (4.11)$$

donde

$$V'_L(\omega) = P(\omega)\hat{B}'_1(\omega)D'(\omega) \quad (4.12)$$

$$V'_{\beta}(\omega) = \frac{1}{NM} \hat{B}'_1(\omega)D'(\omega) \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} e^{-j\omega(\alpha_{pi} + \alpha_{bj})} \beta_{ij} \quad (4.13)$$

$$V'_{\theta_p}(\omega) = \frac{-1}{NM} \hat{B}'_1(\omega)D'(\omega) \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} e^{-j\omega(\alpha_{pi} + \alpha_{bj})} j\omega\theta_{pij} \quad (4.14)$$

$$V'_{\varepsilon}(\omega) = \frac{1}{NM} \frac{d\hat{B}'_1(\omega)}{d\omega} D'(\omega) \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} e^{-j\omega(\alpha_{pi} + \alpha_{bj})} \omega\varepsilon_{ij} \quad (4.15)$$

$$V'_{\theta_b}(\omega) = \frac{-1}{NM} \hat{B}'_1(\omega)D'(\omega) \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} e^{-j\omega\alpha_{pi}} \sum_{j=1}^M e^{-j\omega\alpha_{bj}} j\omega\theta_{bj} \quad (4.16)$$

$V'_L(\omega)$ es el espectro normalizado de FEM sin errores y $P(\omega)$ la función

de posicionado de cada uno de los imanes:

$$P(\omega) = \underbrace{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} e^{-j\omega\alpha_{pi}}}_{P_m(\omega)} \cdot \underbrace{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M e^{-j\omega\alpha_{bj}}}_{P_b(\omega)} \quad (4.17)$$

P_m define la posición nominal de cada imán en los bloques y P_b el desplazamiento angular nominal de cada bloque. P_b forma parte de (4.16).

$V'_\beta(\omega)$, $V'_p(\omega)$, $V'_\varepsilon(\omega)$ y $V'_b(\omega)$ son los espectros debidos a los errores representados por las variables β , θ_p , ε y θ_b , respectivamente. A la suma de todos ellos se llamará $V'_N(\omega)$

$$V'_N(\omega) = V'_\beta(\omega) + V'_{\theta_p}(\omega) + V'_\varepsilon(\omega) + V'_{\theta_b}(\omega) \quad (4.18)$$

Ocasionalmente se usará el término “*ruido*” para hacer referencia a $V'_N(\omega)$ y a sus componentes.

Para la caracterización de los errores se usará el valor cuadrático medio (VCM), o momento de segundo orden respecto del origen, de $V'_N(\omega)$ y la FDP de su módulo. El VCM es un estadístico de fácil interpretación y manipulación algebraica, mientras que de la FDP se obtiene la probabilidad de ocurrencia de un determinado valor.

Se comenzará determinando el VCM de los errores haciendo uso de la siguiente notación:

$$E\{|X(\omega)|^2\} = \overline{|X(\omega)|^2} = m_2^X \quad (4.19)$$

siendo $E\{\cdot\}$ el operador esperanza.

El VCM de $V'_N(\omega)$ se obtiene de (4.18), teniendo en cuenta que las variables aleatorias de las que depende son independientes entre sí y de media cero.

$$\overline{|V'_N(\omega)|^2} = \overline{|V'_\beta(\omega)|^2} + \overline{|V'_{\theta_p}(\omega)|^2} + \overline{|V'_\varepsilon(\omega)|^2} + \overline{|V'_{\theta_b}(\omega)|^2} \quad (4.20)$$

A continuación se calcula el VCM de cada uno de los términos que componen $V'_N(\omega)$.

1) Desviaciones en la amplitud de la inducción de los imanes

El VCM del espectro (4.13) debido a los errores en la inducción es:

$$\overline{|V'_\beta(\omega)|^2} = \frac{1}{(NM)^2} |\hat{B}'_1 D'(\omega)|^2 E\left\{ [X_1^\beta]^2 + [X_2^\beta]^2 \right\} \quad (4.21)$$

siendo $X_1^\beta = X_1^\beta(\omega)$ y $X_2^\beta = X_2^\beta(\omega)$ las componentes real e imaginaria del doble sumatorio de (4.13), respectivamente,

$$\begin{aligned} X_1^\beta &= \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} \cos(\omega \alpha_{pi} + \omega \alpha_{bj}) \beta_{ij} \\ X_2^\beta &= -\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (-1)^{i-1} \sin(\omega \alpha_{pi} + \omega \alpha_{bj}) \beta_{ij} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Estas ecuaciones pueden ser expresadas como transformación lineal de las variables aleatorias β_{ij} :

$$\begin{bmatrix} X_1^\beta \\ X_2^\beta \end{bmatrix} = \mathbf{T} \cdot [\beta_{11} \beta_{12} \cdots \beta_{NM}]^T \quad (4.23)$$

La matriz de covarianzas de las variables X_1^β y X_2^β , C_X^β , puede obtenerse a partir de la matriz de transformación, \mathbf{T} , y de la matriz de covarianzas C_β de las variables aleatorias β_{ij} :

$$C_X^\beta = \begin{bmatrix} C_{11}^\beta & C_{12}^\beta \\ C_{21}^\beta & C_{22}^\beta \end{bmatrix} = \mathbf{T} C_\beta \mathbf{T}^T \quad (4.24)$$

Si las variables aleatorias β_{ij} son independientes entre sí y de igual varianza,

$$C_\beta = \mathbf{I}_{NM} \sigma_\beta \quad (4.25)$$

Operando, se obtiene

$$\begin{aligned} C_{11}^\beta &= \text{var} \{X_1^\beta\} = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \cos^2(\omega \alpha_{pi} + \omega \alpha_{bj}) \sigma_\beta^2 \\ C_{22}^\beta &= \text{var} \{X_2^\beta\} = \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \sin^2(\omega \alpha_{pi} + \omega \alpha_{bj}) \sigma_\beta^2 \\ C_{12}^\beta &= C_{21}^\beta = -\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \sin(2\omega \alpha_{pi} + 2\omega \alpha_{bj}) \frac{\sigma_\beta^2}{2} \end{aligned} \quad (4.26)$$

El doble sumatorio de las covarianzas C_{12}^β y C_{21}^β es cero debido a que se ha considerado simetría par en el posicionado de los imanes. Por otro lado, como en este caso se verifica que $E\{X_1^\beta\} = E\{X_2^\beta\} = 0$, resulta

$$E\left\{\left(X_1^\beta\right)^2\right\} + E\left\{\left(X_2^\beta\right)^2\right\} = \text{var} \{X_1^\beta\} + \text{var} \{X_2^\beta\} \quad (4.27)$$

Sustituyendo (4.27) en (4.21) y teniendo en cuenta (4.26), se obtiene finalmente el VCM del espectro $\hat{B}_\beta(\omega)$ como,

$$\overline{|V'_\beta(\omega)|^2} = \left| \hat{B}'_1(\omega) D'(\omega) \right|^2 \frac{1}{MM} \sigma_\beta^2 \quad (4.28)$$

2) Desviaciones en el posicionado de los imanes

Operando de igual forma sobre $V'_{\theta p}(\omega)$ de (4.14) se llega a las siguientes expresiones para las covarianzas y para el VCM:

$$\begin{aligned} C_{11}^p &= \text{var}\{X_1^p\} = \omega^2 \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \sin^2(\omega \alpha_{pi} + \omega \alpha_{bj}) \sigma_{\theta p}^2 \\ C_{22}^p &= \text{var}\{X_2^p\} = \omega^2 \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \cos^2(\omega \alpha_{pi} + \omega \alpha_{bj}) \sigma_{\theta p}^2 \\ C_{12}^p &= C_{21}^p = \omega^2 \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \sin(2\omega \alpha_{pi} + 2\omega \alpha_{bj}) \frac{\sigma_{\theta p}^2}{2} \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\overline{|V'_p(\omega)|^2} = \left| \hat{B}'_1(\omega) D'(\omega) \right|^2 \frac{1}{NM} \omega^2 \sigma_{\theta p}^2 \quad (4.30)$$

3) Desviaciones en la anchura de los imanes

Operando sobre el espectro $V'_\varepsilon(\omega)$ de (4.15) de igual forma que en el apartado 1), se obtiene la siguiente expresión para el VCM:

$$\overline{|V'_\varepsilon(\omega)|^2} = \left| \frac{d\hat{B}'_1(\omega)}{d\omega} D'(\omega) \right|^2 \frac{1}{NM} \omega^2 \sigma_\varepsilon^2 \quad (4.31)$$

4) Desviaciones en el posicionado de los bloques

El desarrollo es similar al realizado en 2). Operando,

$$\begin{aligned} C_{11}^b &= \text{var}\{X_1^b\} \omega^2 \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin^2(\omega \alpha_{bj}) \sigma_{\theta b}^2 \\ C_{22}^b &= \text{var}\{X_2^b\} \omega^2 \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \cos^2(\omega \alpha_{bj}) \sigma_{\theta b}^2 \\ C_{12}^b &= C_{21}^b = \omega^2 \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sin(2\omega \alpha_{bj}) \frac{\sigma_{\theta b}^2}{2} \end{aligned} \quad (4.32)$$

y para el VCM:

$$\overline{|V'_{\theta b}(\omega)|^2} = \left| P_m(\omega) \hat{B}'_1(\omega) D'(\omega) \right|^2 \frac{\omega^2 \sigma_{\theta b}^2}{M} \quad (4.33)$$

5) Efecto conjunto de los errores

El VCM total normalizado se obtiene como suma de los VCMs parciales (4.28), (4.30), (4.31) y (4.33).

$$\begin{aligned} \overline{|V'_N(\omega)|^2} &= \frac{(\sigma_\beta^2 + \omega^2 \sigma_{\theta p}^2)}{NM} \left| \hat{B}'_1 D'(\omega) \right|^2 \\ &+ \frac{\omega^2 \cdot \sigma_{\theta b}^2}{M} \left| P_m \hat{B}'_1 D'(\omega) \right|^2 + \frac{\omega^2 \cdot \sigma_\varepsilon^2}{NM} \left| \frac{d\hat{B}'_1(\omega)}{d\omega} D'(\omega) \right|^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Por su parte, los VCMs de los espectros total y sin errores se obtendrán de (4.11) y de (4.12), respectivamente.

$$\overline{|V'(\omega)|^2} = \overline{|V'_L(\omega)|^2} + \overline{|V'_N(\omega)|^2} \quad (4.35)$$

$$|V'_L(\omega)|^2 = |P(\omega)|^2 \cdot |\hat{B}'_1(\omega)|^2 \cdot |D'(\omega)|^2 \quad (4.36)$$

La figura 4.2 muestra las componentes que forman el espectro sin errores (4.36) en la parte superior y las trayectorias de las distintas fuentes de error (4.34) en la inferior. Se puede observar el efecto del espectro \hat{B}'_1 sobre las componentes σ_β , $\sigma_{\theta p}$ y $\sigma_{\theta b}$ y el de su derivada sobre σ_ε .

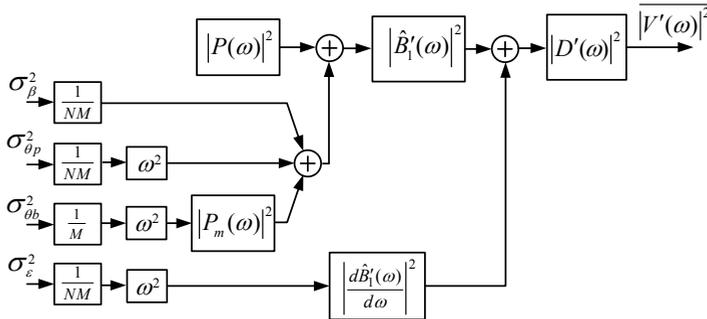


Figura 4.2. Modelo de baja frecuencia para las componentes sin y con errores del espectro de tensión, obtenido a partir de (4.34).

Un modelo alternativo para los errores es el mostrado en la figura 4.3, donde todos los errores se suman en un mismo punto.

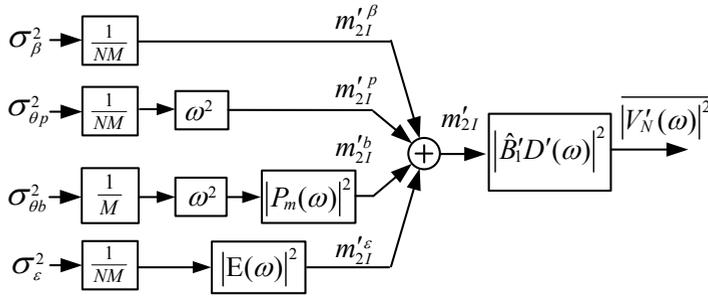


Figura 4.3. Modelo de ruido normalizado de entrada para armónicos de baja frecuencia.

Para ello, se ha introducido una nueva función $E(\omega)$ en la trayectoria de la componente σ_ϵ .

$$E(\omega) = \frac{d\hat{B}'_1}{d\omega} \frac{\omega}{\hat{B}'_1} \quad (4.37)$$

En la figura 4.3, m'_{2I} actúa sobre el mismo punto del sistema que $P(\omega)$ en la figura 4.2. Por lo tanto, m'_{2I} puede considerarse como el error asociado al espectro de posicionado de los imanes y a la vez como error normalizado de entrada, lo que se ha indicado con el subíndice “I” en la variable que lo identifica y en sus componentes. El error normalizado a la entrada es

$$m'_{2I}(\omega) = \frac{\sigma_\beta^2 + \omega^2 \sigma_p^2 + |E(\omega)|^2 \sigma_\epsilon^2}{NM} + \frac{|P_m(\omega)|^2 \omega^2 \sigma_b^2}{M} \quad (4.38)$$

Por su parte, la nueva función $E(\omega)$ que aparece en la figura 4.3 es el resultado de dividir la derivada de $\hat{B}'_1(\omega)$ por la propia función $\hat{B}'_1(\omega)$ y multiplicarla por ω , cuyo significado es la sensibilidad relativa normalizada de $\hat{B}'_1(\omega)$ respecto de ω . La expresión de E coincide con la definición matemática de elasticidad.

$$E[f(x)] = \frac{df(x)}{dx} \frac{x}{f(x)}$$

Una propiedad de la función elasticidad es que es independiente del factor de escala de su función argumento. Consecuentemente, en nuestro caso, $E(\omega)$ no se ve afectada por el factor de escala del espectro $\hat{B}'_1(\omega)$ ni por la amplitud de $B_1(\alpha)$.

En la figura 4.4 se muestra la función $E(\omega)$ correspondiente a una onda de inducción con forma idealizada de pulso rectangular de 180 grados

eléctricos. Los máximos y los ceros de E coinciden con los ceros y con los máximos de $\hat{B}'_1(\omega)$, respectivamente. En este caso particular, debido a la periodicidad de los lóbulos de $\hat{B}'_1(\omega)$, el valor de E en los armónicos eléctricos impares es constante e igual a la unidad. La figura 4.5 corresponde a una inducción de forma trapezoidal, más realista que la anterior. En este ejemplo, los armónicos impares coinciden en distintos puntos de los lóbulos, dando lugar a diferentes valores de la sensibilidad para cada armónico. Por último, la figura 4.6 ilustra el resultado para una función en forma de coseno. Los armónicos impares coinciden con los ceros de $\hat{B}'_1(\omega)$, lo que conduce a que en dichas frecuencias la sensibilidad relativa tienda a infinito.

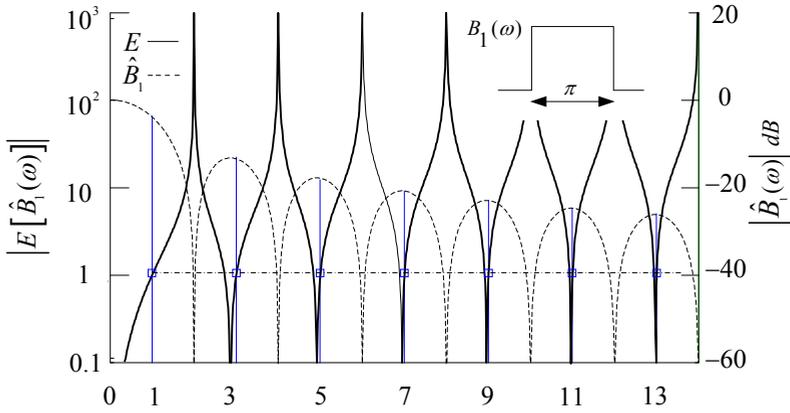


Figura 4.4. Sensibilidad relativa y $\hat{B}'_1(\omega)$ para un pulso de 180 grados eléctricos.

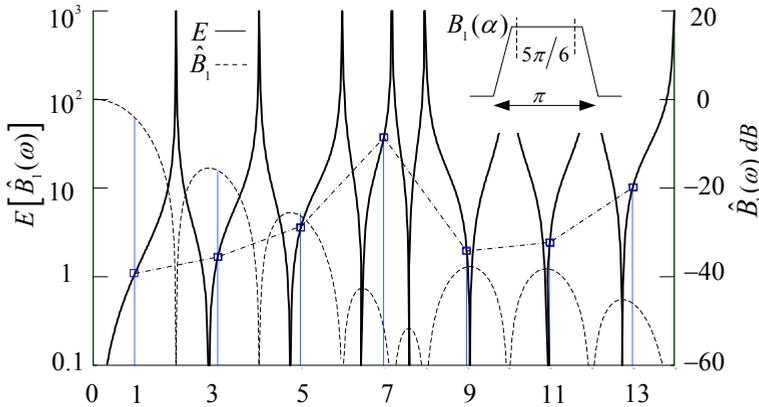


Figura 4.5. Sensibilidad relativa y $\hat{B}'_1(\omega)$ para un pulso trapezoidal.

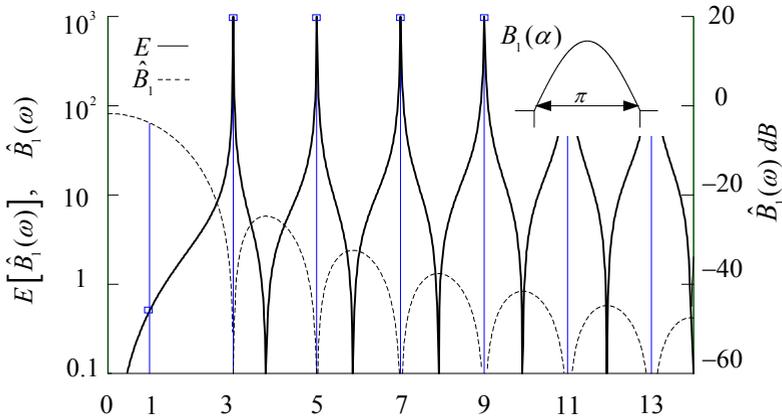


Figura 4.6. Sensibilidad relativa y $\hat{B}_1(\omega)$ para un pulso coseno.

Partiendo de la FDP binormal en coordenadas cartesianas $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$, pasando a polares, $f_{R\theta}(r, \theta)$, e integrando respecto de θ para obtener $f_R(r)$, se llega a la siguiente expresión:

$$f_R(r) = \frac{r}{\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}} \exp\left(\frac{-r^2}{4} \frac{\sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2}{\sigma_{X_1}^2\sigma_{X_2}^2}\right) I_0\left(\frac{r^2}{4} \frac{\sigma_{X_1}^2 - \sigma_{X_2}^2}{\sigma_{X_1}^2\sigma_{X_2}^2}\right) \quad (4.39)$$

donde $I_0(\cdot)$ es la función de Bessel de orden cero modificada.

$f_R(r)$ toma la forma de una FDP de Rayleigh cuando las varianzas son iguales y de una FDP semi-normal cuando una de ellas es cero. De (4.39) se obtiene la probabilidad de ocurrencia de un determinado valor del módulo, R , a partir de las varianzas $\sigma_{x_1}^2$ y $\sigma_{x_2}^2$. Fácilmente se comprueba que la suma de estas varianzas coincide con el VCM del módulo, m_2 :

$$m_2^2 = E\{R^2\} = E\{X_1^2\} + E\{X_2^2\} = \sigma_{X_1}^2 + \sigma_{X_2}^2 \quad (4.40)$$

donde los valores medios de X_1 y X_2 se han considerado cero.

La figura 4.7 muestra las formas que adquieren las funciones de densidad y de distribución para distintos valores de $\sigma_{x_1}^2$ y $\sigma_{x_2}^2$, para $m_2 = 1$. De las gráficas se deduce que el reparto de errores entre las componentes real e imaginaria influye poco en la función de distribución, permitiendo tomar un valor de referencia en función del ruido total y no de sus componentes.

A tal efecto, se tomará el caso más desfavorable a partir de la envolvente de las funciones $F_R(r)$, recogido en la tabla 4.1.

De la tabla 4.1 se deduce que la probabilidad de que el error $|V'_N(\omega)|$ asociado a un determinado armónico obtenido de una sola muestra sea igual o superior al valor RMS de $|V'_N(\omega)|$, obtenido de (4.47), es 0.368 y la de

triplicar dicho valor, $2.7 \cdot 10^{-3}$.

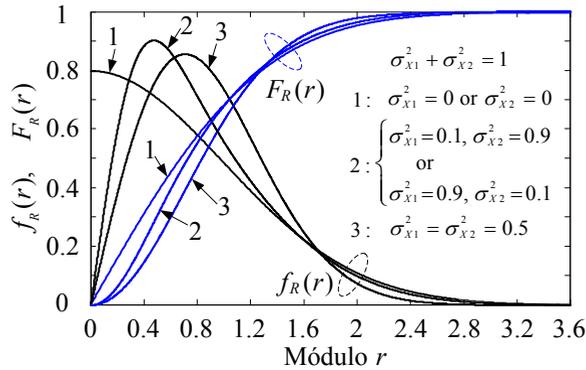


Figura 4.7. FDP del módulo, r , en función de σ_{x1} y σ_{x2}

TABLA 4.1
PROBABILIDAD DE OCURRENCIA
PARA EL CASO MÁS DESFAVORABLE

$r_0 / \sqrt{m_2^R}$	$P(R > r_0)$
1	0.368 ⁽¹⁾
1.5	0.134 ⁽²⁾
2	0.046 ⁽²⁾
2.5	0.012 ⁽²⁾
3	$2.7 \cdot 10^{-3}$ ⁽²⁾
(1) Rayleigh (2) semi-normal	

4.1.1.3 Comportamiento en alta frecuencia

La aproximación lineal $\exp(j\omega\theta) \approx 1+j\omega\theta$ de (4.9) del modelo de baja frecuencia deja de ser válida para valores elevados de ω . Sin embargo, en este caso, es posible considerar que el argumento $\omega\theta$ del número complejo $\exp(j\omega\theta)$ se comporta como una variable aleatoria uniformemente distribuida entre $-\pi$ y π . Retomando el análisis en (4.7), los términos adicionales de fase representados por la potencia $(-1)^{i-1}$ o el factor $\exp[-j\omega(\alpha_{pij} + \alpha_{bj})]$ son, en este caso, irrelevantes. También se considerarán despreciables los efectos de β y de ε sobre la amplitud en comparación con los que introduce $\omega\varepsilon$ como argumento de \hat{B}_1 . De este modo, para valores elevados de ω , se puede expresar el espectro de tensión como:

$$V'_H(\omega) = D'(\omega) \frac{1}{NM} \sum_{k=1}^{NM} \hat{B}'_1(\omega + \omega \varepsilon_k) e^{-j\omega u_k} \quad (4.41)$$

siendo u_k una v.a. uniforme en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

El VCM de V'_H es

$$\begin{aligned} \overline{|V'_H(\omega)|^2} &= E \{ V'_H(\omega) \cdot V'^*_H(\omega) \} \\ &= \frac{|D'(\omega)|^2}{(NM)^2} \sum_{l=1}^{NM} \sum_{k=1}^{NM} E \{ \hat{B}'_1(\omega + \omega \varepsilon_k) \cdot \hat{B}'^*_l(\omega + \omega \varepsilon_l) \cdot e^{-j(u_k - u_l)} \} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Haciendo uso de la propiedad de linealidad del operador esperanza así como de la independencia de los términos $\varepsilon_k, \varepsilon_l$ de las respectivas vv.aa. u_k y u_l , resulta

$$\begin{aligned} &E \{ \hat{B}'_1(\omega + \omega \varepsilon_k) \cdot \hat{B}'^*_l(\omega + \omega \varepsilon_l) \cdot e^{-j(u_k - u_l)} \} \\ &= \begin{cases} 0 & k \neq l \\ E \left\{ \left| \hat{B}'_1(\omega + \omega \varepsilon_k) \right|^2 \right\}, & k = l \end{cases} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Por lo tanto, únicamente contribuirán al sumatorio los términos que verifiquen $k = l$. De ese modo

$$\overline{|V'_H(\omega)|^2} = \frac{|D'(\omega)|^2}{NM} E \left\{ \left| \hat{B}'_1(\omega + \omega \varepsilon_k) \right|^2 \right\} \quad (4.44)$$

Por otra parte,

$$E \left\{ \left| \hat{B}'_1(\omega + \omega \varepsilon_k) \right|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{B}'_1(\omega + \omega \varepsilon_k) \right|^2 f_{\varepsilon}(\varepsilon_k) d\varepsilon \quad (4.45)$$

Introduciendo en (4.45) el cambio de variables $\omega + \omega \varepsilon_k = \Omega$, y teniendo en cuenta que $f_{\varepsilon}(\varepsilon_k) \sim N(0, \sigma_{\varepsilon})$, se obtiene:

$$E \left\{ \left| \hat{B}'_1(\omega + \omega \varepsilon_k) \right|^2 \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{B}'_1(\Omega) \right|^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma_{\varepsilon}^2 \omega^2}} e^{-\frac{(\Omega - \omega)^2}{2\omega^2 \sigma_{\varepsilon}^2}} d\Omega \quad (4.46)$$

La integral (4.46) es el VCM de la función $\hat{B}'_1(\Omega)$ multiplicada por una función ventana de tipo Gaussiana centrada en ω y cuya anchura depende de la frecuencia, según la figura 4.8.

Si \hat{B}_1 sigue una ley senoidal su VCM discurrirá paralelo a su envolvente, A_{B1}^2 , con un valor $A_{B1}^2/2$, como se muestra en la figura 4.8. En este caso, (4.44) toma la forma:

$$\overline{|V'_H(\omega)|^2} = \frac{1}{NM} \frac{A_{B1}^2}{2} |D'(\omega)|^2 \quad (4.47)$$

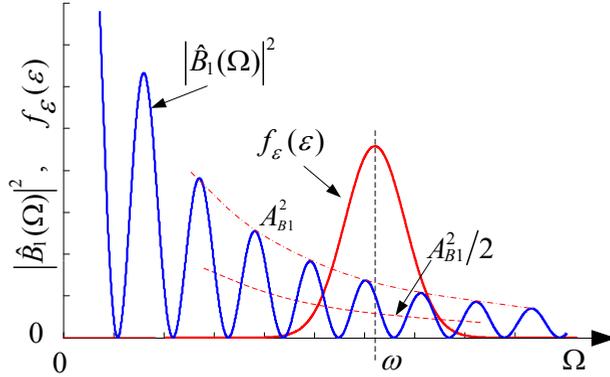


Figura 4.8. Interpretación de (4.46): enventanado de \hat{B}_1 con una función Gaussiana

Con el fin de comparar este valor con el VCM del espectro sin ruido en alta frecuencia, se tomará una configuración convencional con imanes equidistantes y pequeño desplazamiento angular entre bloques. Haciendo uso de (4.17) se comprueba que para los armónicos eléctricos impares $P(\omega) \simeq 1$, para $\omega = \{N/2, 3N/2, 5N/2, \dots\}$ Por tanto, de (4.36)

$$\overline{|V'_L(\omega)|^2} \simeq |\hat{B}_1(\omega)|^2 |D'(\omega)|^2, \quad \omega = \{N/2, 3N/2, 5N/2, \dots\} \quad (4.48)$$

Comparando (4.47) y (4.48) se concluye que el VCM de $\hat{B}_1(\omega)$ pasa de ser fluctuante en el espectro sin errores (4.48) a igualarse a su valor medio, dividido por el factor NM , en presencia de errores como aparece en (4.47).

Por último, se obtendrá la relación entre el VCM de V'_H de (4.47) y el máximo valor cuadrático muestral, que nos será de utilidad para la validación experimental del modelo para frecuencias altas, que se realizará en el apartado 4.1.3.

De (4.41) se obtiene el máximo valor de $|V'_H(\omega)|^2$ en alta frecuencia.

$$\max \left\{ |V'_H(\omega)|^2 \right\} = \max \left\{ \left| \hat{B}'_1(\omega) \right|^2 \right\} |D'(\omega)|^2 = A_{B_1}^2 |D'(\omega)|^2 \quad (4.49)$$

y de (4.47) y (4.49) se obtiene:

$$\frac{\max \left\{ |V'_H(\omega)|^2 \right\}}{|V'_H(\omega)|^2} = 2NM \quad (4.50)$$

Expresión que relaciona el máximo valor cuadrático muestral de $V'_H(\omega)$ y su VCM para cualquier valor de ω .

4.1.2 Análisis de resultados y verificación numérica

En esta sección se exponen las principales conclusiones del análisis realizado y se comprueban los modelos mediante simulación numérica.

4.1.2.1 Análisis de resultados

Del diagrama de bloques de la figura 4.2 se deduce lo siguiente:

- El espectro $\hat{B}'_1(\omega)$ actúa como filtro para todos los errores excepto para los errores en la anchura de los imanes, caracterizados por σ_ε . Por lo tanto, los ceros del espectro $\hat{B}'_1(\omega)$ cancelarán a todos los errores menos a estos últimos.
- La función $P_b(\omega)$ no aparece en ninguna de las trayectorias de los errores, por lo que no podrá ser utilizada para la cancelación de los mismos. Por su parte, los ceros del espectro $P_m(\omega)$, definido en (4.17), cancelan sólo los errores de desplazamiento entre bloques, $\sigma_{\theta p}$.
- La fuente de error σ_ε , depende de la derivada de $\hat{B}'_1(\omega)$ y no de $\hat{B}'_1(\omega)$ como en los otros casos. De esto se deduce que para que exista una completa cancelación de los errores en una determinada frecuencia es necesario que tanto $\hat{B}'_1(\omega)$ como su derivada contengan al menos un cero en dicha frecuencia.
- En la zona lineal, todas las componentes de error aumentan con la frecuencia, a excepción de V'_β que no depende de ella.

Del análisis realizado en 4.1.1.3:

- En la zona de alta frecuencia, el ruido deja de comportarse como lineal aditivo para transformar completamente la forma del espectro de FEM. El resultado es un espectro suavizado en el que han desaparecido los máximos y los ceros.

4.1.2.2 Verificación numérica

En la figura 4.9 se muestra el error normalizado a la entrada de un MSIP obtenido de forma analítica y mediante simulación numérica. El motor simulado es de cuatro polos y ocho imanes, distribuidos en dos bloques desfasados $\pi/14$ radianes con el fin de eliminar el séptimo armónico eléctrico de FEM (14° espacial). La onda de inducción $B_1(\alpha)$ considerada es un pulso de 169.2° grados eléctricos de anchura. Se han considerado los siguientes errores: $\sigma_\beta = 0.07$, $\sigma_{\theta_p} = 0.016\text{rad}$, $\sigma_{\theta_b} = 0.04\text{rad}$ y $\sigma_\varepsilon = 0.01$. La gráfica muestra el VCM debido a cada uno de los errores por separado y el resultado total para los primeros 50 armónicos espaciales.

Para la simulación se ha utilizado el método de Monte Carlo con un vector de entrada pseudoaleatorio de componentes $(\beta, \theta_b, \theta_p, \varepsilon)$, promediando posteriormente los valores cuadráticos de los espectros generados.

De las gráficas se deduce que la componente de error de magnetización, $m'_{21}{}^\beta$, es independiente de la frecuencia, mientras que las de posición del imán, $m'_{21}{}^p$, y desplazamiento de los bloques, $m'_{21}{}^b$, varían linealmente con la frecuencia, con una pendiente de 20dB por década.

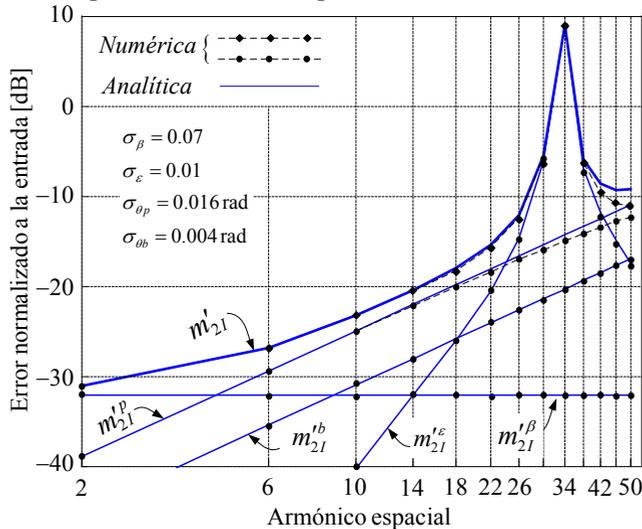


Figura 4.9. Error normalizado a la entrada de un MSIP con $N = 4$ y $M = 2$ para los primeros 50 armónicos espaciales.

Por su parte, la componente de ruido debida a la anchura de los polos, $m'_{21}{}^\varepsilon$, tiene un efecto despreciable en los primeros armónicos y presenta un máximo en las proximidades del armónico eléctrico 17 (34° espacial). La

resultante m'_{2l} toma la forma de la envolvente de las componentes que la forman. Así, en los primeros armónicos, m'_{2l} tiende al valor de $m'_{2l}{}^\beta$, que es el efecto dominante. En frecuencias medias, se aproxima al valor de $m'_{2l}{}^p$ y llega prácticamente a igualarse a $m'_{2l}{}^e$ en $\omega = 34$.

El cero impuesto en el séptimo armónico eléctrico mediante el posicionado de los bloques no introduce ningún cambio en la gráfica de m'_{2l} , como se comentó en la sección 4.1.2.1 b).

Para comprobar la validez del modelo para alta frecuencia se han obtenido por simulación los espectros con errores (4.47) y sin errores (4.48) para una fase de un motor trifásico con $N=4$, $M=1$, $\sigma_\beta = \sigma_\epsilon = 0.02$ y $\sigma_{\theta p} = 0.02$ rad. El devanado es diametral con una ranura por polo y fase, de forma que para los armónicos eléctricos impares $D'(\omega) = 1$. En la figura 4.10 se muestran los espectros con y sin errores evaluados en los armónicos eléctricos impares. Hasta el armónico espacial 30 los espectros con y sin ruido coinciden prácticamente, pero a partir de ese valor el espectro con ruido disminuye, manteniéndose 9dB por debajo de la envolvente de $|V'_L(\omega)|^2$, que en este ejemplo es igual a A^2_{B1} . Este valor coincide con el analítico de (4.47), ya que $10\log(1/2NM) \approx -9\text{B}$.

De las figuras 4.9 y 4.10 queda de manifiesto la correspondencia entre los resultados analíticos y numéricos, lo que nos permite pasar a la verificación experimental, que se tratará en el apartado 4.1.4.

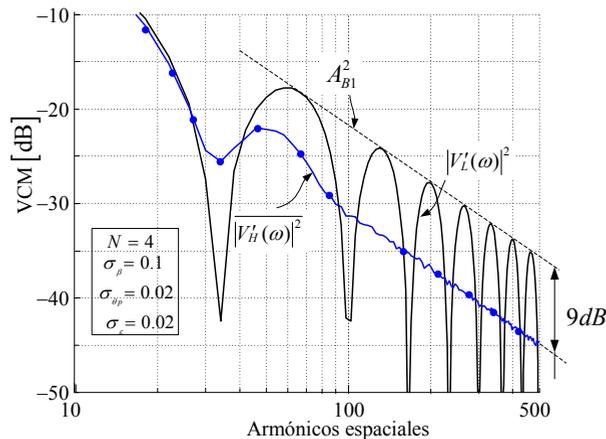


Figura 4.10. VCMs de los espectros con y sin errores para un MSIP con $N=4$, $M=1$ en alta frecuencia.

4.1.3 Procedimiento para la medida de los errores

En esta sección se describe el método experimental seguido para obtener las varianzas de cada una de las fuentes de error por separado a partir del análisis estadístico de los espectros de la tensión inducida. La estimación de dichas varianzas se realizará en dos fases. En la primera se obtiene el ruido normalizado de entrada, m'_{2I} , y a continuación se identifican las cuatro varianzas haciendo uso del modelo analítico (4.38). Cabe destacar que si el rotor está formado por un solo bloque de imanes, el número de varianzas a determinar se reduce a tres.

Obtención del error de entrada normalizado m'_{2I}

Del diagrama de la figura 4.3 se deduce la relación

$$\overline{|V'_N(\omega)|^2} = m'_{2I}(\omega) |B'_1 D'(\omega)|^2 \quad (4.51)$$

Haciendo uso de (4.35) y de (4.36), (4.51) queda

$$m'_{2I}(\omega) = \frac{\overline{|V'(\omega)|^2} - |V'_L(\omega)|^2}{|V'_L(\omega)|^2} |P(\omega)|^2 \quad (4.52)$$

$P(\omega)$ es conocida y analítica, ya que representa la posición de diseño de los imanes, pero por lo general $V'_L(\omega)$ no es conocida y deberá ser estimada. Un primer estimador consiste en el promediado de los espectros de FEM de las diferentes muestras, haciendo $|V'_L| \approx \overline{|V'|}$. Este estimador requiere que el ruido tenga media nula, lo que solo es cierto en la zona de baja frecuencias, según vimos en el apartado 6.1.1.3. No obstante, los armónicos de interés en máquinas eléctricas son los de baja frecuencia, donde tiene validez el método analítico propuesto.

Separación de las componentes del ruido

Para estimar el valor de cada una de las varianzas por separado se formará un sistema lineal de n ecuaciones a partir de (4.38), tomando en cada ecuación un valor diferente de ω y el correspondiente valor de m_{2I} obtenido de los ensayos. El sistema tendrá solución si se toma n igual al número de varianzas a determinar, pero dado que las variables contienen errores, conviene que el sistema sea sobredeterminado con el fin de aplicar técnicas de ajuste que minimicen el error.

En (4.38) interviene la función $E(\omega)$, que a su vez depende de $\hat{B}_1(\omega)$ y que puede obtenerse de (4.12).

$$\hat{B}_1(\omega) = \frac{V_L'(\omega)}{P'(\omega)D'(\omega)} \approx \frac{\overline{V'(\omega)}}{P'(\omega)D'(\omega)} \quad (4.53)$$

donde también se ha aplicado la aproximación $|V_L'| \approx |\overline{V'}|$

4.1.4 Validación experimental

Con el objetivo de validar experimentalmente los modelos, se han realizado varias series de ensayos de motores, consistentes en hacerlos girar mediante un motor auxiliar a velocidad constante, registrando la FEM de una fase mediante un sistema de adquisición de datos de 14 bits reales. Las series de motores ensayados son las siguientes:

Serie 1: formada por 35 unidades de una preserie de motores brushless trifásicos de 100 W, de cuatro polos e imanes superficiales.

Serie 2: formada por 35 motores de iguales características que los anteriores, pero de la serie definitiva.

Serie 3: corresponde a 8 prototipos de motor brushless de imanes interiores de Nd-Fe-B de ocho polos y 250 W.

Serie 4: La forman 8 prototipos de BLDC de imanes superficiales Nd-Fe-B bonded de seis polos y 180W.



Figura 4.11. Conjunto de rotores de la serie 1 utilizados en la validación experimental.

4.1.4.1 Comprobación del error de entrada normalizado

Se ha obtenido el error de entrada normalizado (4.52) de las series 1 y 2 a partir de las medidas de FEM para los armónicos eléctricos impares, cuyo resultado se muestra en la figura 4.12 (“medida”). Una vez obtenido m'_{2l} se

han calculado las varianzas σ_β^2 , σ_p^2 y σ_ε^2 y $\hat{B}_1(\omega)$ siguiendo el procedimiento descrito en 4.1.3. Por último, se han introducido los valores anteriores de las varianzas y de $\hat{B}_1(\omega)$ en el modelo analítico (4.38) y se ha representado en la figura 4.12 (analítica).

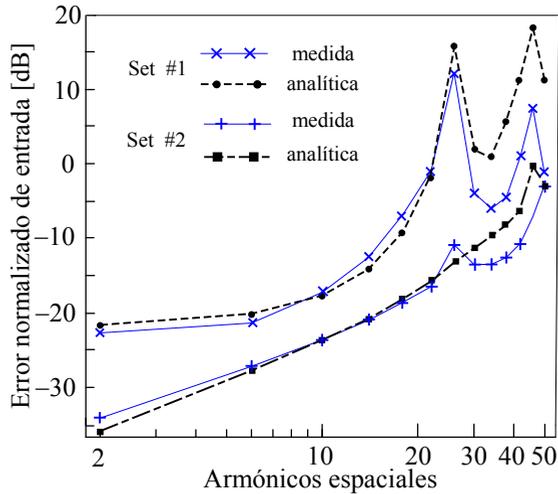


Figura 4.12. Error normalizado de entrada obtenido de forma experimental y mediante el modelo lineal para las series 1 y 2.

Para comprobar la precisión en el cálculo de las varianzas σ_β^2 , σ_p^2 y σ_ε^2 se han medido los errores reales a partir de la inducción en el entrehierro de cada uno de los motores. Para ello se ha empleado como sonda una bobina arrollada sobre un diente del estator, cuya tensión inducida, una vez integrada y escalada permite conocer la onda de inducción, $B(\alpha)$, [72] de cada motor. En comparación con el empleo de sondas [65], este método tiene la ventaja de promediar la inducción en el entrehierro en sentido axial.

La figura 4.13 muestra una de las ondas $B(\alpha)$ obtenidas e ilustra el procedimiento seguido para la medida de los errores.

Se ha tomado como anchura de los polos, $\tilde{\alpha}_w$, la diferencia entre los ángulos correspondientes al 50% de inducción máxima y como posición de los polos, $\tilde{\alpha}_p$, el valor medio de dichos ángulos. Como medida de la inducción en cada uno de los polos, \tilde{B}_0 , se ha tomado su valor medio entre dos pasos por cero, representado por el valor pico a pico de su integral. En la tabla 4.2 se muestran los resultados obtenidos por este método, al que se le llamará *Directo*, y los obtenidos mediante la lectura de la FEM.

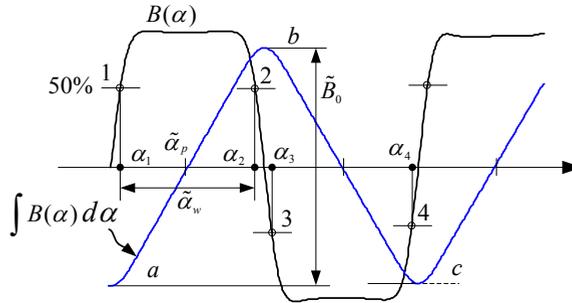


Figura 4.13. Medida experimental de las desviaciones sobre la onda de inducción.

TABLA 4.2
Comparativa entre desviaciones obtenidas de forma directa y a través de la FEM

	Serie 1			Serie2		
Método	σ_β	σ_p	σ_ε	σ_β	σ_p	σ_ε
FEM	0.095	0.031	0.024	0.026	0.0088	0.010
Directo	0.11	0.027	0.022	0.022	0.012	0.0078
Error %	13.6	14.8	9.10	18.2	26.7	28.2

4.1.4.2 Comprobación para alta frecuencia

En este punto se comprobará la relación (4.50) entre los valores cuadráticos máximo y medio de $|V^r(\omega)|^2$. Pese a que el valor cuadrático máximo no puede medirse directamente a partir de un número limitado de experimentos, sí resulta posible estimarlo a partir del valor máximo observado sobre L muestras ensayadas. Partiendo de (4.41) es posible obtener una relación estadística, λ , entre el valor cuadrático máximo esperado de $|V^r(\omega)|^2$ al medir L muestras y el valor cuadrático máximo teórico posible. En nuestro caso, λ , se ha obtenido de forma numérica, y se muestra en la figura 4.14 en función del número total de imanes, NM , y de L . Para el caso que nos ocupa, $NM = 4$ y $L = 35$.

La figura 4.15 muestra la relación entre el VC máximo estimado, obtenido de dividir por λ el máximo de 35 muestra, y el VC medio de dichas muestras para las series 1 y 2. Se observa que las gráficas de las dos series tienden a 9dB, que se corresponde con el valor de (4.50) para $NM = 4$. La serie 1 alcanza antes dicho valor debido a su mayor nivel de error.

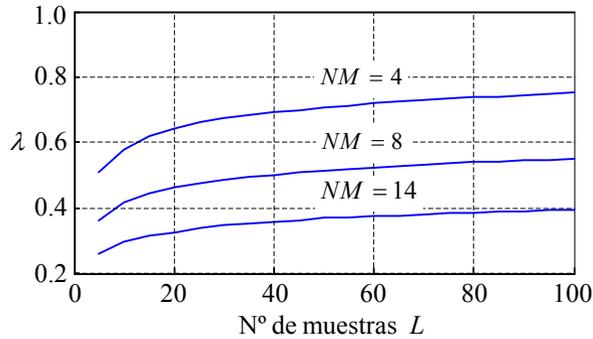


Figura 4.14. Relación entre los valores cuadrático máximo y máximo esperado para L muestras en alta frecuencia en función del número de imanes y de muestras.

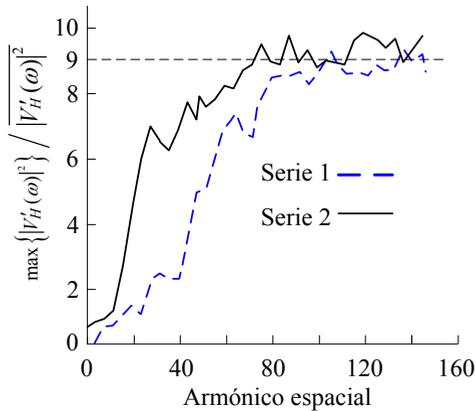


Figura 4.15. Relación entre los valores cuadráticos máximo y medio en la zona de alta frecuencia para armónicos eléctricos impares obtenidas de forma experimental.

4.1.4.3 Comprobación de las funciones de distribución

El tipo de distribución que sigue el módulo de un determinado armónico depende de la relación entre las varianzas de sus componentes real e imaginaria, pudiendo oscilar entre la de Rayleigh, cuando las dos son iguales, y la semi-normal cuando una de las varianzas es cero, como se indicó en la figura 4.7. Las componentes real e imaginaria vienen dadas por (4.26), (4.29) o (4.32) según el tipo de error. Aplicando estas expresiones a las configuraciones de los motores de las series 1 y 2, se comprueba que la parte real del espectro $V'_N(\omega)$ se debe a los errores de posicionado de los imanes y la parte imaginaria a las desviaciones en la amplitud de la inducción y en la anchura de los polos.

Como se indicó en el apartado 4.1.2.1, en los primeros armónicos dominan los errores de amplitud sobre el resto. Esto hace que la componente real del error sea prácticamente cero, lo que conduce a una distribución semi-normal. En frecuencias superiores aparecen nuevas componentes de error, con partes real e imaginaria, lo que da lugar a una distribución de tipo Rayleigh.

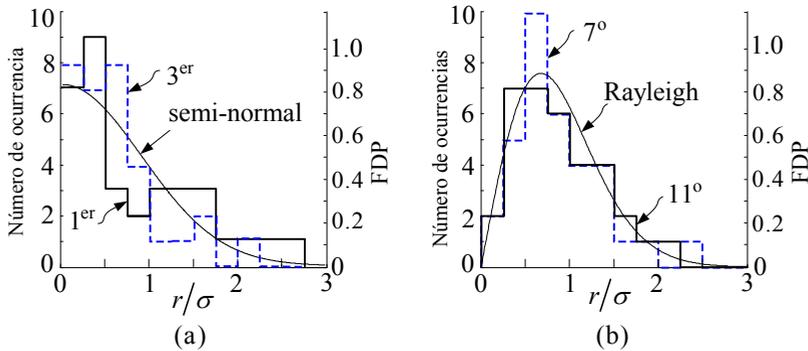


Figura 4.16. Distribución del ruido para los armónicos 1, 3, 7 y 11 para los motores de las series 1 obtenidas de forma experimental

En la figura 4.16 (a) se muestra el histograma de los armónicos eléctricos 1 y 3 de la serie 1 y en la figura 4.16 (b) los armónicos 7 y 11 de la misma serie. La semejanza del primer histograma con la FDP semi-normal y la del segundo histograma con la FDP Rayleigh confirma las suposiciones.

4.1.4.4 Otras configuraciones

Por último, se muestran en la figura 4.17 los ensayos realizados a los motores de las series 3 y 4.

La serie 3 la componen ocho motores de preserie con imanes interiores de Nd-Fe-B y la serie 4 ocho motores, también de preserie, con un imán bonded en anillo de Nd-Fe-B. Los motores de la serie 3 exhiben menos errores que los de la serie 4 debido a que al ser de imanes interiores, el guiado del flujo se realiza de forma más precisa gracias al núcleo rotórico. Por otra parte, la imantación de los imanes isotrópicos de la serie 4 suele tener más errores que los imanes anisotrópicos [63].

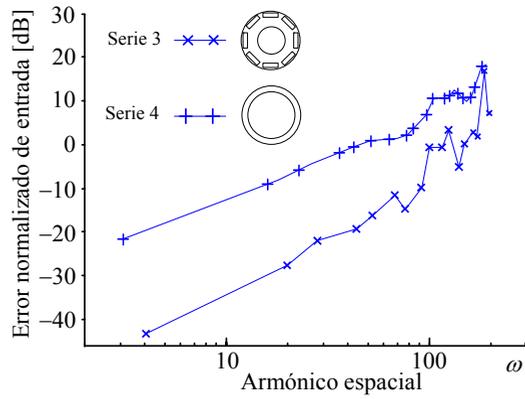


Figura 4.17. Error de entrada normalizado de la serie 3, formado por 8 motores de imanes interiores y 8 polos y la serie 4, compuesta por 8 motores con imanes Nd-Fe-B Bonded en anillo de 6 polos.

4.2 Influencia de las Tolerancias de Fabricación sobre el Par de *Cogging*

Ya se ha comentado que uno de los aspectos más importantes del diseño de los motores de imanes permanentes es el par de *cogging*. En este apartado se analiza la sensibilidad del par de *cogging* respecto de los mismos errores de fabricación que fueron descritos en la sección 4.1:

- (i) Variaciones en la amplitud de la inducción de los imanes.
- (ii) Variaciones en la posición de los imanes dentro de los respectivos bloques.
- (iii) Desplazamiento de los bloques entre sí.
- (iv) Variaciones de la anchura de los imanes.

4.2.1 Análisis matemático

4.2.1.1 modelado

Se empleará el mismo modelo de errores utilizado en la sección 4.1, si bien será necesario introducir algunos cambios en la formulación debido a que el *cogging* no es función de la inducción $B(\alpha)$ sino de su cuadrado.

Se recordará que el par de *cogging* puede ser descrito en el dominio espacial como la convolución de las funciones inducción al cuadrado, $B_g^2(\alpha)$, inclinación de ranuras, $S(\alpha)$, función de ranura, $DG_1(\alpha)$, y la función posicionado de ranura, $Z(\alpha)$, que fueron descritas con anterioridad.

$$\begin{aligned}
 T_{cog}(\alpha) &= k_{cog} B_g^2(-\alpha) * S(\alpha) * DG_1(\alpha) * Z(\alpha) \\
 \Downarrow & \qquad \qquad \Downarrow \qquad \qquad \Downarrow \qquad \qquad \Downarrow \\
 \hat{T}_{cog}(\omega) &= k_{cog} \widehat{B}_g^2(\omega) \times \widehat{S}(\omega) \times \widehat{DG}_1(\omega) \times \widehat{Z}(\omega)
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

De todos los espectros que intervienen en la generación del *cogging*, solamente el de la inducción al cuadrado resulta afectado por los errores en los imanes, ya que el resto caracteriza a variables del estator. Esto permite limitar el estudio al espectro de la inducción y considerar al resto de espectros como constantes.

Se partirá del modelo de la figura 4.1, donde se sustituirá la inducción en un bloque $B_b(\alpha)$ por su cuadrado, $B_b^2(\alpha)$. Para M bloques con igual distancia axial y distribución de los imanes, la inducción media en sentido axial

resulta,

$$B^2(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M B_{bj}^2(\alpha - \alpha_{bj}) \quad (4.55)$$

La onda de inducción al cuadrado de cualquiera de los bloques, $B_{bj}^2(\alpha)$, puede expresarse como la suma de sucesivos desplazamientos de la inducción nominal al cuadrado de un polo, $B_1^2(\alpha)$, mostrada en la figura 4.1(c), que en cada posición tiene diferente amplitud y anchura, caracterizadas por los factores descritos en (4.1), $(1+\beta_{ij})$ y $(1+\varepsilon_{ij})$, respectivamente.

$$\tilde{B}^2(\alpha) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (1 + \beta_{ij})^2 B_1^2 \left(\frac{\alpha}{1 + \varepsilon_{ij}} - \tilde{\alpha}_{pij} - \tilde{\alpha}_{bj} \right) \quad (4.56)$$

donde N es el número de imanes o polos.

Como en el caso de la FEM, se supondrá que B_1^2 es aperiódica y que toma el valor cero fuera del intervalo $[-\pi, \pi]$. Con ello se obtienen espectros continuos en lugar de discretos, lo que facilita la interpretación de resultados, si bien en la máquina real sólo tendrán sentido los valores enteros de ω .

Expresando (4.56) en función de las posiciones nominales y de las desviaciones y transformando por Fourier, resulta:

$$\begin{aligned} F \{ \tilde{B}^2(\alpha) \} &= \widehat{B}^2(\omega) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ |1 + \varepsilon_{ij}| (1 + \beta_{ij})^2 \cdot \widehat{B}_1^2[\omega(1 + \varepsilon_{ij})] e^{-j\omega(\alpha_{pi} + \alpha_{bj})} e^{-j\omega(\theta_{pij} + \theta_{bj})} \right\} \end{aligned} \quad (4.57)$$

donde ω es la frecuencia espacial y $\widehat{B}_1^2(\omega)$ la transformada de $B_1^2(\omega)$.

El número de imanes, N , afecta al espectro $\widehat{B}_1^2(\omega)$ en sus factores de escala de frecuencia y de amplitud. Para analizar la influencia de N sobre las sensibilidades conviene que aparezca de forma explícita y no formando parte de $\widehat{B}_1^2(\omega)$, lo que se consigue separando $\widehat{B}_1^2(\omega)$ en una componente normalizada en amplitud, $\widehat{B}_1^{2'}(\omega)$, y en el término $1/N$.

$$\widehat{B}_1^2(\omega) = \frac{1}{N} \widehat{B}_1^{2'}(\omega) \quad (4.58)$$

De esta forma, el número de imanes sólo afectará al factor de escala de frecuencia y no al de amplitud. La expresión (4.57) queda ahora

$$\widehat{B}^2(\omega) = \frac{1}{NM} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \left\{ |1 + \varepsilon_{ij}| (1 + \beta_{ij})^2 \cdot \widehat{B}_1^2[\omega(1 + \varepsilon_{ij})] e^{-j\omega(\alpha_{pi} + \alpha_{bj})} e^{-j\omega(\theta_{pij} + \theta_{bj})} \right\} \quad (4.59)$$

4.2.1.2 Análisis en baja frecuencia

Admitiendo las mismas aproximaciones y desarrollando de la misma forma que en la FEM se obtiene la siguiente expresión para la inducción al cuadrado como suma de su valor nominal y de las componentes de error:

$$\widehat{B}^2(\omega) \approx \widehat{B}_L^2(\omega) + \underbrace{\widehat{B}_\beta^2(\omega) + \widehat{B}_p^2(\omega) + \widehat{B}_\varepsilon^2(\omega) + \widehat{B}_b^2(\omega)}_{\widehat{B}_N^2(\omega)} \quad (4.60)$$

siendo su valor cuadrático medio, VCM

$$\begin{aligned} \overline{|\widehat{B}_N^2(\omega)|^2} &= \frac{4}{NM} |\widehat{B}_1^2(\omega)|^2 \sigma_\beta^2 + \frac{\omega^2}{NM} |\widehat{B}_1^2(\omega)|^2 \sigma_{\theta_p}^2 \\ &+ \frac{\omega^2}{M} |P_m \widehat{B}_1^2(\omega)|^2 \sigma_{\theta_b}^2 + \frac{\omega^2}{NM} \left| \frac{d\widehat{B}_1^2(\omega)}{d\omega} \right|^2 \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned} \quad (4.61)$$

y el VCM del par

$$\overline{|\widehat{T}_{cog}(\omega)|^2} = \overline{|\widehat{B}^2(\omega)|^2} \cdot |\widehat{DG}(\omega)|^2 \cdot k_{cog}^2 \quad (4.62)$$

La figura 4.18 muestra las componentes que forman el espectro sin errores en la parte superior y las trayectorias de las distintas fuentes de error (4.61) y (4.62) en la inferior.

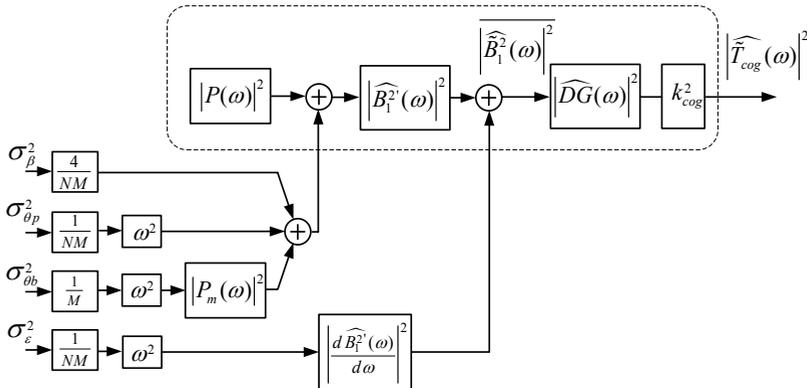


Figura 4.18. Modelo de baja frecuencia para las componentes sin y con errores del espectro de par de cogging, obtenido a partir de (4.60), (4.61) y (4.62).

Un modelo alternativo para los errores es el mostrado en la figura 4.19, donde todos los errores se suman en un mismo punto. En este caso, el par obtenido sólo contiene los errores.

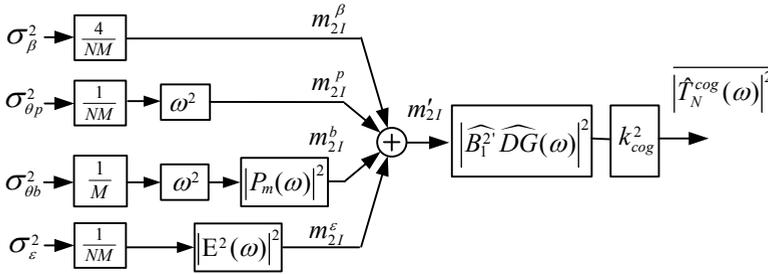


Figura 4.19. Modelo de errores de entrada para armónicos de baja frecuencia.

En dicha figura,

$$E^2(\omega) = \frac{d\widehat{B}_1^2}{d\omega} \frac{\omega}{\widehat{B}_1^2} \quad (4.63)$$

$$m_{2l}^T(\omega) = \frac{4}{NM} \sigma_\beta^2 + \frac{1}{NM} \omega^2 \sigma_p^2 + \frac{|E^2(\omega)|^2}{NM} \sigma_\epsilon^2 + \frac{|P_m(\omega)|^2}{M} \omega^2 \sigma_b^2 \quad (4.64)$$

Los modelos de error para el par de *cogging* son similares a los obtenidos para los errores de la FEM. En concreto, los modelos de error a la entrada de la figura 4.19 y el de la figura 4.15 sólo difieren en la componente de error debida a la amplitud de la inducción, que en el caso del par de *cogging* es cuatro veces mayor que en el caso de la FEM, de lo que resulta mayor sensibilidad a estos errores. La otra diferencia es el espectro de la función asociada a los polos. La inducción (unidad básica) en el caso de la FEM y la inducción al cuadrado para el *cogging*. En este apartado, se recordará que la amplitud del espectro $\widehat{B}_1^2(\omega)$ decrece más rápidamente que el espectro $\widehat{B}_1(\omega)$ debido a que el primero es el resultado de la convolución del segundo por sí mismo.

4.2.2 Comprobación numérica

En la figura 4.20 se muestra el error de entrada para cada una de las componentes (4.64) obtenidas de forma analítica y mediante simulación para

un motor de imanes permanentes de cuatro polos y ocho imanes en dos bloques. Se trata del mismo modelo simulado en el apartado de FEM. La onda de inducción $B_1(\alpha)$ considerada es un pulso de 169.2° grados eléctricos de anchura. Las varianzas consideradas son las siguientes: $\sigma_\beta = 0.07$, $\sigma_{\theta_p} = 0.016\text{rad}$, $\sigma_{\theta_b} = 0.04\text{rad}$ y $\sigma_\varepsilon = 0.01$. La figura 18 muestra el VCM global a la entrada.

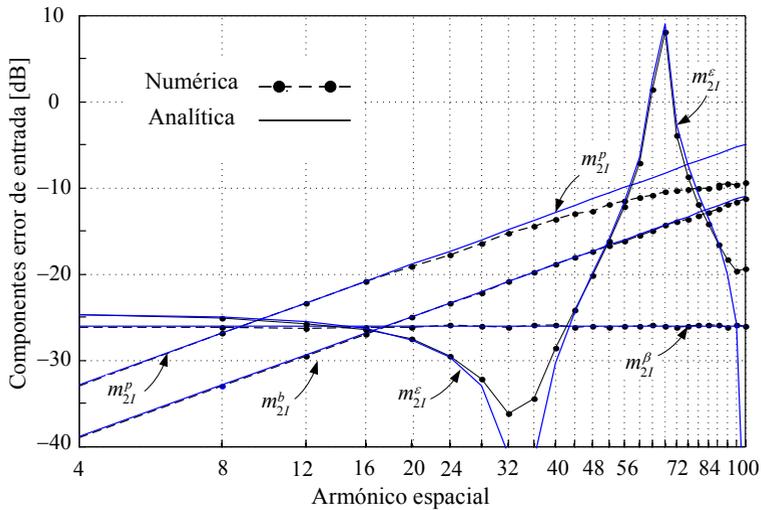


Figura 4.20. Componentes de error (VCM) de entrada para el par de cogging

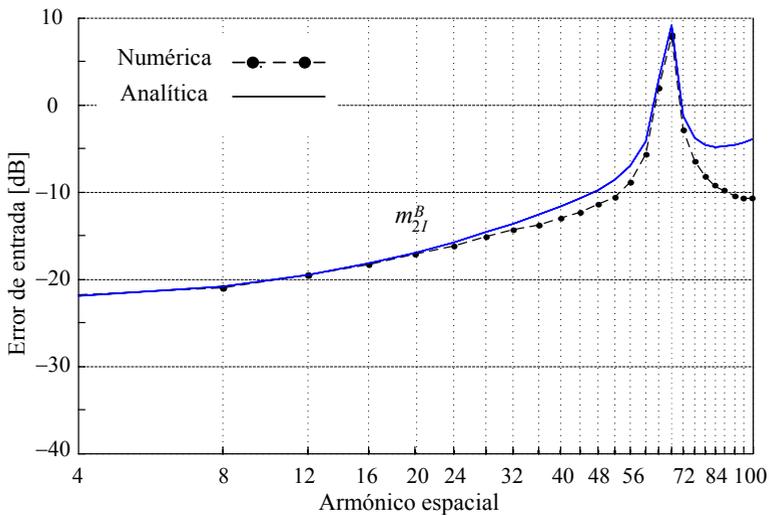


Figura 4.21. Error conjunto de entrada del par de cogging

Como puede observarse, el modelo lineal es aplicable a armónicos de índice inferiores a 100. Los armónicos de interés de m_{2l} serán los de índice múltiplos del número de ranuras, ya que sólo para estos, la función $Z(\omega)$ es distinta de cero.

4.2.3 Obtención experimental de $m_{2l}(\omega)$

El valor cuadrático medio global de los errores puede obtenerse experimentalmente si se dispone de un conjunto de espectros del par de *cogging*.

Del diagrama de la figura 4.18,

$$\overline{|T_N^{cog}(\omega)|^2} = k_{cog}^2 |\widehat{B}_1^{2l}(\omega)|^2 |\widehat{DG}(\omega)|^2 m'_{2l}(\omega) \quad (4.65)$$

$$\overline{|T_L^{cog}(\omega)|^2} = k_{cog}^2 |\widehat{B}_1^{2l}(\omega)|^2 |\widehat{DG}(\omega)|^2 |P(\omega)|^2 \quad (4.66)$$

Por otra parte,

$$\overline{|\widehat{T}_{cog}(\omega)|^2} = \overline{|\widehat{T}_N^{cog}|^2} + \overline{|\widehat{T}_L^{cog}|^2} \quad (4.67)$$

y por último, de (4.65), (4.66) y (4.67) se obtiene,

$$m'_{2l}(\omega) = \frac{\overline{|\widehat{T}_{cog}(\omega)|^2} - \overline{|\widehat{T}_L^{cog}(\omega)|^2}}{\overline{|\widehat{T}_L^{cog}(\omega)|^2}} |P(\omega)|^2 \quad (4.68)$$

Como en el caso de la FEM, $P(\omega)$ es conocida, ya que representa la posición de diseño de los imanes, pero no así T_L^{cog} , que puede ser estimado asumiendo que los errores tienen media cero

$$|\widehat{T}_L^{cog}|^2 \approx \overline{|\widehat{T}_{cog}(\omega)|^2} \quad (4.69)$$

m_{2l} comprende las cuatro componentes de error, que para un motor formado por un solo bloque de imanes se reducen a tres. La obtención del valor global m_{2l} puede ser suficiente para conocer el nivel de calidad de fabricación, pero también es deseable separar las componentes de ruido tal como se realizó en el análisis de la FEM, tomando el valor de m'_{2l} para, al menos, cuatro frecuencias diferentes con el fin de formar un sistema de ecuaciones linealmente independientes. Aunque este procedimiento es también válido para el par de *cogging*, hay que tener presente que los armónicos de *cogging*

con posibilidad de ser medidos son los múltiplos del número de ranuras que, salvo en el caso de máquinas de baja potencia, suele ser de índice elevado. Además se recordará que debido a que el espectro está dominado por la función $\widehat{B}_1^2(\omega)$ cuya amplitud decrece rápidamente con la frecuencia como ya se indicó en otro apartado. Todo esto hace que los armónicos superiores del *cogging* sean de pequeña amplitud y difíciles de medir con precisión.

4.3 Ejemplo de aplicación al diseño

En algunos diseños es necesario introducir ceros en determinadas frecuencias del espectro de FEM con el fin de obtener una onda más senoidal. La sensibilidad de dichos ceros a las tolerancias de fabricación debe ser mínima. En estos casos, según se comentó en 4.1.2.1.c), es necesario actuar sobre las dos trayectorias del ruido del diagrama de la figura 4.2, imponiendo ceros en $\widehat{B}_1(\omega)$ y en su derivada. Esta condición supone la creación de ceros dobles en $\widehat{B}_1(\omega)$ en dichas frecuencias. Obviamente estos ceros deben ser creados usando como único recurso la geometría de los polos.

Para comprobar experimentalmente la robustez de un cero doble frente a los errores de fabricación se han fabricado dos tipos de imanes para un mismo motor de cuatro polos con imanes superficiales; el primero con un cero en el 7º armónico eléctrico y el segundo con un cero doble en la misma frecuencia. El cero del primer tipo de imán se ha obtenido acortando el arco polar, haciéndolo igual a $3\pi/7$ rad. mecánicos. El primer cero del segundo tipo de imán se ha obtenido también haciendo el arco polar igual a $3\pi/7$ rad. y el segundo introduciendo una inclinación axial de los imanes en forma de escalón de $\gamma = \pi/14$ rad. mecánicos, utilizando el procedimiento descrito en [73]. En la figura 4.22 se muestra la forma del primer tipo de imán en (a) y la del segundo en (b).

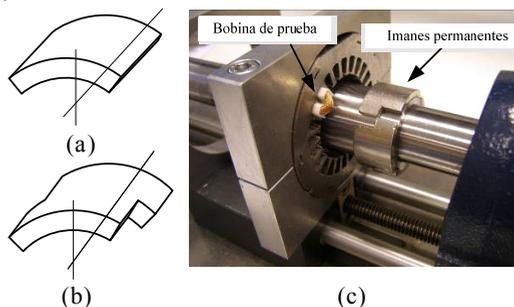


Figura 4.22. Generación de la geometría de los polos con dos ceros en $\omega = 10$

Para la realización de los ensayos se han construido dos juegos de imanes con inclinación y otros dos juegos con imanes rectos. En los primeros juegos de cada tipo se ha introducido intencionadamente una desviación sobre el valor nominal del arco polar de un +3% y de un -3% en los segundos juegos, según se indica en la tabla 4.3.

Tabla 4.3
Dimensiones de los imanes utilizados en la prueba

	var.	Recto	Escalonado
Longitud	l	20 mm	20 mm
Diámetro exterior	D	38mm	38mm
Diámetro interior	d	32mm	32mm
Arco polar	α_m	Nominal.: 77.14°	Nominal.: 77.14°
		Tipo I: 79.5°	Tipo I: 79.5°
		Tipo II: 74.8°	Tipo II: 74.8°
Desplazamiento	γ	0°	12.85°

En la figura 4.23 se muestran los espectros de la inducción en el entrehierro para los diferentes tipos de rotores. La onda $B(\alpha)$ se ha obtenido experimentalmente a partir de la inducción en un diente, siguiendo el procedimiento descrito en 4.1.1. Para su representación en forma continua se ha empleado la técnica de interpolación espectral.

Se puede observar claramente que la geometría con dos ceros es menos sensible a las tolerancias que la que tiene un solo cero, como se deduce al comparar los cambios de amplitud de sus respectivos espectros en $\omega = 14$.

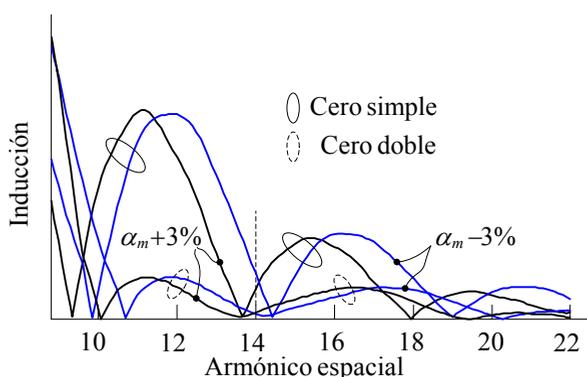


Figura 4.23. Espectros de la inducción de un imán conteniendo un cero simple y un cero doble en $\omega = 14$ obtenido experimentalmente.

4.4 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un modelo estadístico que describe el efecto de los errores de imantación, de posicionado de los imanes y de los bloques y las desviaciones de la anchura de los polos sobre la FEM y sobre el par de *cogging*.

El modelo ha sido validado mediante simulación en ambos casos y de forma experimental para la FEM, a través de una batería de medidas realizada sobre setenta motores.

El modelo permite predecir el cambio que sufrirán los distintos armónicos de la FEM y del par de *cogging* como consecuencia de las tolerancias de fabricación, lo que es de gran utilidad en el diseño de filtros.

Adicionalmente, se ha desarrollado un procedimiento que permite obtener la varianza de cada uno de los errores a partir del análisis estadístico de la FEM.

El modelo presentado permite obtener reglas de diseño para disminuir la sensibilidad a las tolerancias mecánicas y magnéticas.

5

Medida del Par de *Cogging* Mediante la Tensión Inducida

En este capítulo se presenta una aplicación práctica del modelado mediante la convolución estudiada en el capítulo 2. La herramienta desarrollada ha permitido crear un método para la medida del par de *cogging* en motores de imanes permanentes superficiales a partir de la FEM, sin necesidad de medidores de par mecánicos. Las ventajas de este método frente a los convencionales es que en estos últimos se requiere un tiempo de ensayo excesivo, por lo que no son aptos para verificar todas las unidades en una producción en masa. El método desarrollado relaciona el par de *cogging* con la FEM a través de la onda espacial de inducción en el entrehierro. Una vez expuestos los fundamentos del método se estudian las limitaciones impuestas por la presencia de las ranuras y por el tipo de devanado. El método es comprobado mediante simulación y verificado experimentalmente sobre 40 motores.

Introducción

El par de *cogging* es un efecto no deseable en las máquinas eléctricas de imanes permanentes que origina vibración y ruido acústico [41] [39], cuya cancelación resulta difícil de conseguir en motores de producción en masa debido a las tolerancias de fabricación [67], [70], [69], [18]. En motores fabricados en grandes series no se suele verificar el par de *cogging* en todas las unidades ya que ello presenta algunas dificultades como la necesidad de un transductor mecánico y el excesivo tiempo requerido por el ensayo [31]. La primera dificultad viene impuesta por tratarse de una variable mecánica de pequeño valor en comparación con el par nominal, lo que hace necesario una medida de precisión. Además, el acoplamiento entre motor y sensor no está exento de dificultad y no es aplicable a la verificación individual para

motores en producción en masa. La segunda dificultad se debe a que al ser un par oscilante, su lectura se ve afectada por la inercia del rotor y de los elementos en rotación. Para conseguir una medida precisa ésta debe realizarse en condiciones cuasi estacionarias es decir, a muy baja velocidad, del orden de una revolución por minuto, lo que consume un excesivo tiempo.

En este capítulo se describe un procedimiento de medida indirecta del par de *cogging* que utiliza como variable de medida la FEM y está basado en el conocimiento de los modelos de par de *cogging* y de FEM y de los elementos comunes de ambos. Para llevarlo a la práctica se mide la FEM y tras su procesado se obtiene el espectro del par de *cogging* con un número de armónicos limitado por la precisión de la medida de la FEM y por el método empleado. El método está orientado principalmente al control de calidad, para detectar cambios en el par de *cogging* nominal debidos a las tolerancias de fabricación. En este estudio solo se tienen en cuenta los cambios en el par de *cogging* debidos al rotor, como el posicionado, las dimensiones o la forma de la inducción de los imanes, que suelen ser las causas más frecuente [67], [49], [18], [65] y [62][63] en los motores de producción en masa.

Se proponen dos formas de llevar a cabo el método: sobre el motor ya fabricado o durante la fase de fabricación, empleándose en este caso un estator sin ranuras a modo de útil de verificación con el que se obtiene mayor precisión.

Este capítulo consta de una primera parte donde se realiza un estudio teórico, posteriormente se comprueban los resultados para distintas configuraciones mediante simulación y por último se verifica experimentalmente sobre 40 motores empleando un banco de ensayo de par.

5.1 Método propuesto

El par de *cogging* puede ser calculado como la derivada de la coenergía magnética W respecto del ángulo de rotación, α , [49], [32].

$$T_{cog}(\alpha) = \partial W(\alpha) / \partial \alpha \quad (5.1)$$

siendo

$$W(\alpha) = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B_g^2 dV \quad (5.2)$$

B_g es la inducción en el entrehierro y V el volumen de los imanes y el entrehierro. Por otra parte, la tensión inducida en un conductor viene dada por

$$e_c(\alpha) = \oint_c (v \wedge B_g) dl \quad (5.3)$$

La aplicación de las ecuaciones (5.2) y (5.3) a una máquina real requiere que éstas sean expresadas en función de otras ondas espaciales además de la inducción, como la permeancia o la distribución espacial de los conductores, siendo el tipo de formulación más utilizado el desarrollo en serie de Fourier.

En el capítulo 2 se desarrolló un modelo basado en la convolución para el par y la FEM, que permite expresar sus respectivos coeficientes de Fourier como producto de los coeficientes de Fourier de las distintas ondas espaciales de la máquina.

$$\hat{T}_{cog}(h) = k_{cog} \cdot \hat{B}^2(h) \cdot \hat{S}(h) \widehat{DG}_1(h) \cdot \hat{Z}(h) \quad (5.4)$$

$$\hat{e}_{ph}(h) = \omega_r k_{fem} \cdot \hat{B}(h) \cdot \hat{S}(h) \widehat{DG}_1(h) \cdot \hat{C}(h) \cdot \hat{P}_h(h) \quad (5.5)$$

$\hat{e}_{ph}(h)$ y $\hat{T}_{cog}(h)$ son los coeficientes espectrales de la FEM de una fase y del par de *cogging*, respectivamente, $h \in \mathbb{Z}$, es el índice armónico, \widehat{DG}_1 , \hat{S} , \hat{C} , \hat{P}_h , y \hat{Z} son los coeficientes espectrales de las siguientes funciones: derivada de la permeabilidad relativa de ranura, inclinación imanes-ranuras, distribución de los dientes cubiertos por una bobina, distribución de las bobinas en el devanado y posicionado de las ranuras en el estator, respectivamente. $\hat{B}(h)$ y $\hat{B}^2(h)$ son los coeficientes espectrales de la inducción $B(\alpha)$ sobre un inducido liso, sin considerar el efecto de las ranuras, y el de ésta al cuadrado, $B^2(\alpha)$, respectivamente, k_{fem} y k_{cog} constantes dimensionales y ω_r la velocidad angular del rotor.

Para el presente análisis se considerará que las ranuras e imanes son rectos, siendo entonces $\hat{S}(h) = 1$. Además, se considerará la FEM en un devanado genérico en lugar de una fase, sustituyendo en (5.5) $\hat{P}_h(h)$ por $\hat{W}(h)$ y $\hat{e}_{ph}(h)$ por $\hat{e}(h)$. (5.4) y (5.5) quedan ahora de la siguiente forma

$$\hat{T}_{cog}(h) = k_{cog} \cdot \hat{B}^2(h) \cdot \widehat{DG}_1(h) \cdot \hat{Z}(h) \quad (5.6)$$

$$\hat{e}(h) = \omega_r k_{fem} \cdot \hat{B}(h) \cdot \widehat{DG}_1(h) \cdot \hat{C}(h) \cdot \hat{W}(h) \quad (5.7)$$

El método que se propone consiste en utilizar el espectro de FEM, $\hat{e}(h)$, para obtener el de la inducción $\hat{B}(h)$; a partir de éste, el de $\hat{B}^2(h)$ y

finalmente, a partir de $\widehat{B}^2(h)$ el del par de cogging $\widehat{T}_{cog}(h)$. A continuación se describen estas tres fases.

A. Obtención de $\widehat{B}(h)$ a partir de $\widehat{e}(h)$

Despejando $\widehat{B}(h)$ en (5.7) y llamando

$$F_1(h) = \omega_r k_{emf} \widehat{D}G_1(h) \cdot \widehat{C}(h) \cdot \widehat{W}(h) \quad (5.8)$$

resulta,

$$\widehat{B}(h) = F_1^{-1}(h) \widehat{e}(h) \quad (5.9)$$

Si la FEM se obtiene usando un estator de trabajo con ranuras, $F_1(h)$ estará formada por los coeficientes de Fourier de las funciones de devanado y de ranuras. Si alguno de estos coeficientes es cero, aparecerán singularidades en la evaluación de $F_1^{-1}(h)$, por lo que deberán ser excluidos de la misma. La supresión de estos armónicos dará lugar a una versión incompleta de $F_1^{-1}(h)$ y de $\widehat{B}(h)$, que se denominará $F_1'^{-1}(h)$ y $\widehat{B}'(h)$, respectivamente.

Si se emplea un estator sin ranuras y un devanado transparente a la mayoría de los armónicos, como el que se describe en el apartado 5.6.1 de este capítulo, $F_1(h)$ se reduce a una constante, permitiendo reproducir la onda de inducción prácticamente sin distorsión. El análisis que sigue se centra en el estator con ranuras, estudiándose por separado las limitaciones impuestas por el devanado y por las ranuras para obtener $F_1^{-1}(h)$.

1) Limitaciones debidas al devanado

La principal limitación que impone el devanado es la cancelación de armónicos. Un primer tipo de cancelación, que afecta a los armónicos pares, se da cuando el devanado tiene simetría de media onda. Por lo general este tipo de filtrado no supone merma de la información, ya que $B(\alpha)$ no suele tener armónicos pares por poseer también simetría de media onda. Un segundo tipo de cancelación es la impuesta en el diseño y afecta sólo a determinados armónicos, por ejemplo al acortar el paso polar para eliminar el 5º o el 7º armónico. Un tercer tipo de cancelación es inherente al tipo de motor, como en los motores trifásicos, donde la tensión de línea no contiene los terceros armónicos. En el apartado B.iii) y en el apartado 5.6.3 se da solución a los dos últimos tipos de cancelaciones.

2) Limitaciones debidas a las ranuras

El efecto de las ranuras puede ser caracterizado por la permeancia relativa de ranura $G_1(\theta)$, que representa la relación entre la inducción en el entrehierro de un estator con ranuras y la que tendría el mismo estator sin ranuras. $G_1(\theta)$ es utilizada extensamente en la literatura [51], [56], [32], [12] y está representada en (5.6) y (5.7) por los coeficientes de Fourier de su derivada, $\widehat{DG}_1(h)$. Disponer de un modelo preciso de $\widehat{G}_1(h)$ es crucial para obtener una buena aproximación de $\widehat{B}(h)$ a partir de la FEM. En este sentido, pueden emplearse modelos analíticos simples como el descrito en [12] o [32], o utilizar elementos finitos para obtener mayor precisión. Una vez obtenido $G_1(\theta)$ y desarrollado en serie de Fourier, los coeficientes de $\widehat{DG}_1(h)$ resultan de aplicar la propiedad de la derivada: $\widehat{DG}_1(h) = jh\widehat{G}_1(h)$, siendo j la unidad imaginaria y h el índice armónico.

En el apartado 5.6.2 de este capítulo se describe el procedimiento experimental empleado para la medida de $\widehat{G}_1(h)$ y una comparación con los modelos analítico y por elementos finitos.

$\widehat{G}_1(h)$ no suele contener ceros en los primeros armónicos, pero de existir, serán tratados como las cancelaciones descritas en el apartado anterior.

B. Obtención de $\widehat{B}^2(h)$. Autoconvolución de $\widehat{B}(h)$

En este punto conviene tener presente que para un estator dado, el par de cogging está directamente relacionado con el espectro $\widehat{B}^2(h)$, ya que el h -ésimo armónico de $\widehat{T}_{cog}(h)$ es proporcional al armónico de igual índice de $\widehat{B}^2(h)$. Se comenzará analizando las características espectrales de la onda de inducción $\widehat{B}(h)$ de la que se obtendrá el espectro $\widehat{B}^2(h)$. En la figura 5.1 se muestra como ejemplo el espectro de la inducción correspondiente a un rotor de cuatro polos. Los armónicos unidos con líneas discontinuas representan los armónicos presentes cuando los imanes están igualmente espaciados y la inducción de los polos presenta simetría de 1/4 de onda.

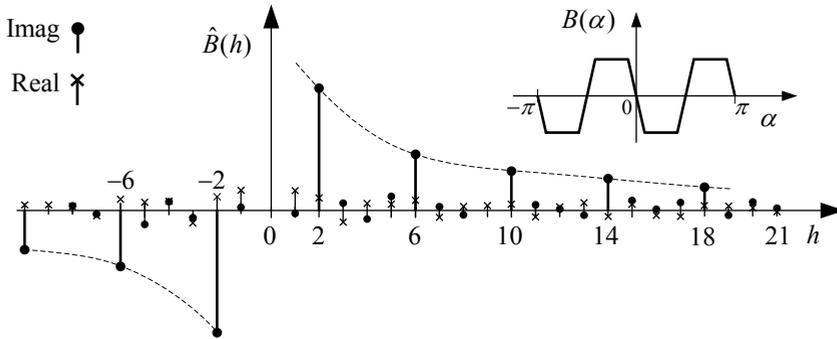


Figura 5.1. Componentes real e imaginaria del espectro de inducción para un rotor de cuatro polos con asimetrías.

En estas condiciones de simetría sólo existen armónicos impares del número de pares de polos; $h \in \{ p, 3p, 5p, \dots \}$ donde p es el número de pares de polos. Además, el espectro es puramente real o puramente imaginario dependiendo el origen tomado en $B(\alpha)$. A estos armónicos asociados a la simetría se les denominará armónicos principales.

Si estas condiciones de simetría no se cumplen pueden aparecer además armónicos de menor amplitud pero en todas las frecuencias, con amplitudes y fases aleatorias, ya que tienen su origen en errores mecánicos y magnéticos. Los nuevos armónicos que coincidan en frecuencia con los principales se sumarán a ellos, modificando ligeramente la amplitud y la fase de los mismos. A estos armónicos se les denominará secundarios y se muestran en la figura 5.1 con amplitud menor que la de los armónicos principales.

Para obtener los coeficientes de la onda de inducción al cuadrado se aplicará la autoconvolución discreta a los coeficientes $\hat{B}(h)$

$$\hat{B}^2(h) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \hat{B}(l) \cdot \hat{B}(h-l) \quad (5.10)$$

En la figura 5.2 se muestra el proceso de autoconvolución del espectro de la figura 5.1 para $h = 12$.

Sobre esta figura se estudiarán tres casos de interés:

i) El índice de $\hat{B}^2(h)$, h , además de ser múltiplo del número de ranuras, es múltiplo del número de imanes. Este es el caso mostrado como ejemplo en la figura 5.2 y correspondería al armónico fundamental del par de *cogging*, definido en la literatura como el de índice igual al mínimo común múltiplo (MCM) del número de imanes y de ranuras, y a sus múltiplos.

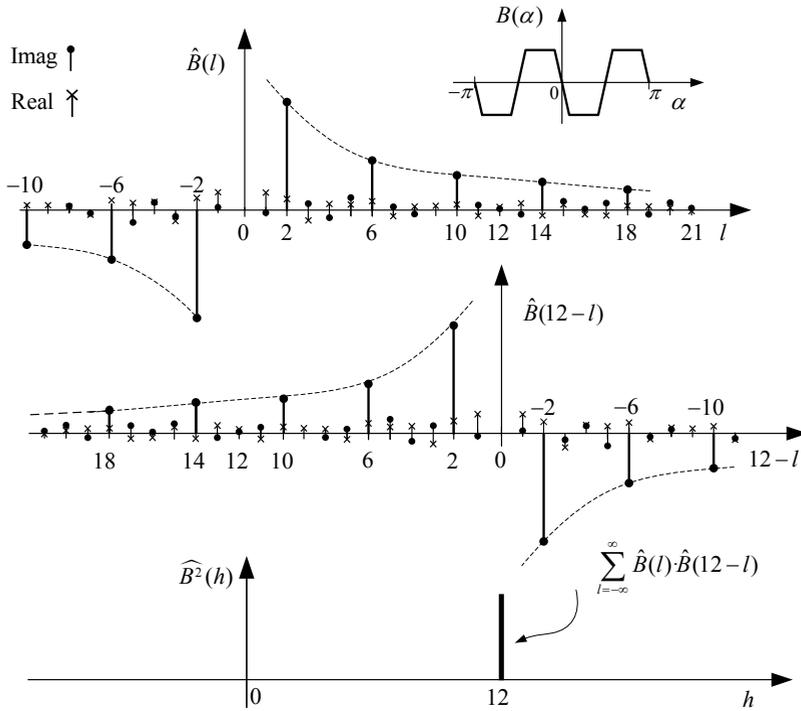


Figura 5.2. Autoconvolución de $\hat{B}(h)$ para $h = 12$ y $p = 2$

En este caso, los sumandos de (5.10) están formados por productos de armónicos principales entre sí y de armónicos secundarios entre sí. No existen productos de armónicos primarios con secundarios. Como $\hat{B}(h)$ suele tener características de filtro pasa bajos, los productos formados por armónicos principales situados entre los ejes de amplitud y en las proximidades de las colas aportan el mayor peso al sumatorio (5.10) y por tanto al armónico h -ésimo del par de *cogging*. De lo anterior se desprende que si la FEM reproduce los armónicos principales de inducción, el par de *cogging* queda en la práctica definido.

ii) El índice de $\hat{B}^2(h)$ es múltiplo del número de ranuras, pero no del número de imanes. Estos armónicos suelen ser de valor reducido en comparación con el fundamental de *cogging* y se deben exclusivamente a las asimetrías, ya que los sumandos de (5.10) están formados por productos donde uno de los factores es un armónico secundario. En este caso, para que el par pueda ser estimado, es imprescindible que la FEM contenga los armónicos principales de la inducción y también los secundarios que forman productos con ellos.

iii) La convolución se realiza a partir de un espectro de FEM incompleto debido a las cancelaciones del devanado.

Como se comentó en el apartado A.1), la configuración del devanado puede dar lugar a cancelaciones de armónicos principales de inducción, como el 5° o el 7° o los terceros armónicos en los motores trifásicos, que pueden comprometer la recuperación del par de *cogging*. Afortunadamente, el par de *cogging* puede estimarse aún sin conocer todos los primeros armónico de $\hat{B}(h)$. En el apartado 5.6.3 se demuestra que si la forma de onda de la inducción es aproximadamente trapezoidal y el ángulo total ocupado por los flancos es inferior a 1/3 de período, el par de *cogging* obtenido a partir de los armónicos múltiplos de tres es igual a un tercio del valor obtenido considerando la totalidad de los armónicos. Esta importante propiedad permite salvar la ausencia del 5°, del 7° o de cualquier otro armónico no múltiplo de tres tomando para la estimación del par de *cogging* sólo los terceros armónicos de FEM. Del mismo modo, es posible salvar la ausencia de alguno o de todos los terceros armónicos evaluando el par de *cogging* a partir de los armónicos no múltiplos de tres.

C. Obtención de $\hat{T}_{cog}(h)$ a partir de $\hat{B}^2(h)$

Para obtener finalmente el espectro del par de *cogging* se hará uso de (5.4), donde $\hat{Z}(h)$ son los coeficientes de Fourier de la función posicionado de ranuras, $Z(\alpha)$, formada por un tren de deltas situadas en el centro de cada ranura [74]. $\hat{Z}(h)$ sólo toma valores no nulos para los índices múltiplos del número de ranuras y, por tanto, serán los únicos a tener en cuenta para determinar $\hat{T}_{cog}(h)$. Por lo general es suficiente con el primero o los dos primeros armónicos para definir la amplitud del par de *cogging*.

5.2 Verificación numérica

Las conclusiones a las que se han llegado en los apartados anteriores son verificadas de forma numérica en esta sección y de forma experimental en la sección 5.4. Para las simulaciones se ha partido del espectro de una onda de inducción idealizada, de forma trapezoidal, de cuatro polos como la mostrada en la figura 5.1, modificando de forma pseudo aleatoria dos grupos de parámetros geométricos de la misma: los que no afectan a la simetría y los que afectan de forma diferente a cada uno de los imanes. En el primer grupo se han incluido el arco polar de los imanes y la pendiente de los

flancos; fijándoles varianzas del 3% y del 10% de sus valores nominales, respectivamente y en el segundo, la amplitud de la inducción y la anchura y el posicionado de cada uno de los imanes. Para estos últimos parámetros se han fijado varianzas del 7% del valor nominal, 1% y 1% del arco polar, respectivamente.

Se han considerado dos estatores diferentes; de 6 y de 24 ranuras según el caso a estudiar.

En primer lugar se comprobará la conclusión del apartado 5.1.B.i) sobre el grado de error cometido en la obtención de $\widehat{B}^2(h)$ al considerar sólo los armónicos principales de $\widehat{B}(h)$.

En la figura 5.3 se muestra el resultado de 100 experimentos sobre una configuración 24 ranuras y 4 polos, para los dos primeros armónicos del par de *cogging*, $h = 24$ y $h = 48$, modificando los parámetros que no afectan a la simetría. En abscisas se muestra el valor exacto de $\widehat{B}^2(h)$, usando todos los armónicos, y en ordenadas el valor estimado, $\widehat{B}^2(h)$, usando sólo los armónicos principales de FEM. Con línea discontinua se ha representado la recta de regresión lineal de los puntos obtenidos y con línea continua la recta de pendiente unidad. En la figura 5.4 se han incluido los cambios en la geometría que afectan a la simetría. Como se puede observar en las figuras 5.3 y 5.4, las líneas de ajuste coinciden prácticamente con las de pendiente unidad y, además, los índices de correlación lineal, r , entre los puntos obtenidos son elevados, de lo que se desprende que la pérdida de información no es significativa si se toman sólo los armónicos principales.

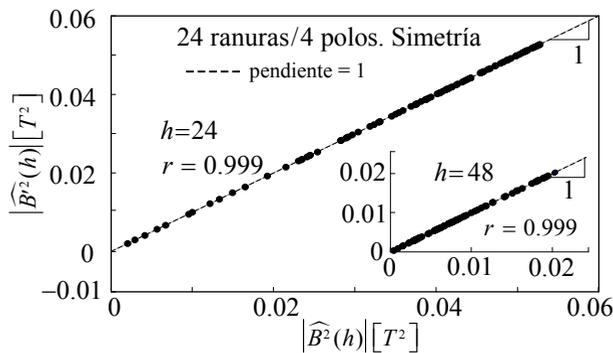


Figura 5.3. Estimación de $\widehat{B}^2(h)$ a partir de los armónicos principales de $\widehat{B}(h)$ para una configuración 24 ranuras / 4 polos con simetría.

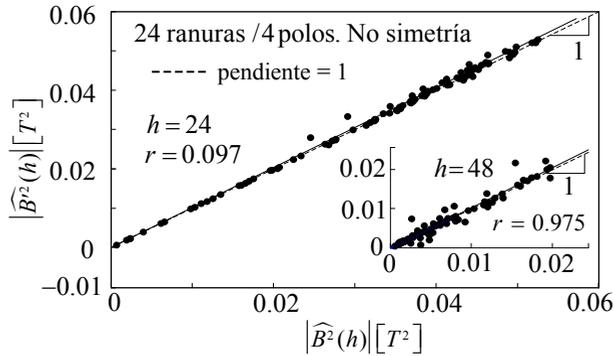


Figura 5.4. Estimación de $\widehat{B}^2(h)$ a partir de los armónicos principales de $\widehat{B}(h)$ para una configuración 24 ranuras / 4 polos sin simetría.

La figura 5.5 ilustra el caso de un armónico de *cogging* originado exclusivamente por asimetrías, para una configuración 6/4, discutido en el apartado 5.1 B.ii). El armónico representado es el de índice $h=6$, que corresponde a un subarmónico del fundamental, $h=12$, que ha de ser evaluado necesariamente a partir de los armónicos de FEM $h \in \{p, 2p, 3p, 4p, \dots\}$, ya que sólo con los principales, $h \in \{p, 3p, 5p, 7p, \dots\}$, el resultado sería cero.

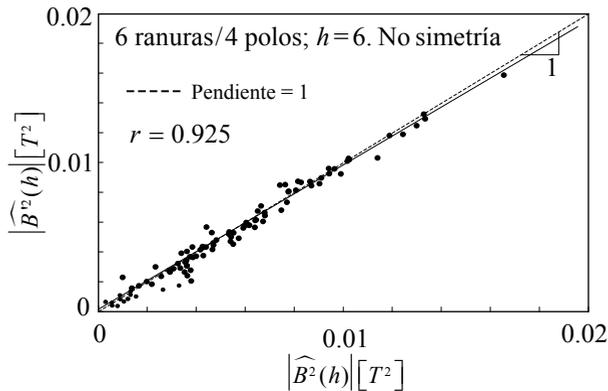


Figura 5.5. Estimación de $\widehat{B}^2(h)$ para armónicos secundarios de *cogging* para una configuración 6 ranuras / 4 polos sin simetría.

Por último, en las figuras 5.6 y 5.7 se muestran dos ejemplos de cancelaciones en los primeros armónicos de FEM, que fue el caso estudiado en II.B.iii). En la figura 5.6 se ha eliminado el 3^{er} armónico de FEM ($h=3p$)

y en la figura 5.7 el 5° armónico ($h = 5p$). En ambas gráficas se ha representado mediante aspas (x) los 100 valores obtenidos de la simulación para el armónico de índice $h = 24$, correspondiente al primer armónico de *cogging*, tomando para su evaluación todos los armónicos principales. Resulta evidente que los resultados son de escasa precisión en ambos casos. No obstante, si en el caso de la figura 5.6, donde se había eliminado el 3er armónico de FEM, el par de *cogging* se evalúa a partir de los armónicos no múltiplos de tres, la precisión aumenta de forma notable según se desprende de los nuevos 100 puntos marcados con círculos.

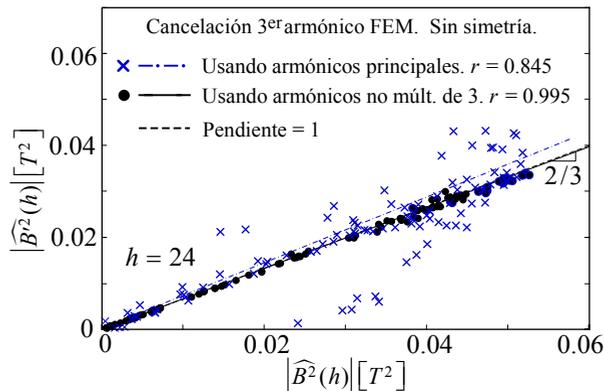


Figura 5.6. Estimación de $\hat{B}^2(h)$ usando los armónicos principales de $\hat{B}(h)$ excepto el tercero y usando los no múltiplos de tres para una configuración 24 ranuras / 4 polos sin simetría.

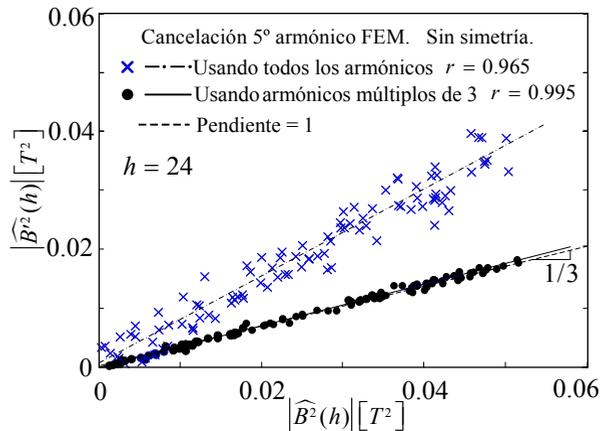


Figura 5.7. Estimación de $\hat{B}^2(h)$ usando los armónicos principales de $\hat{e}(h)$ excepto el quinto y usando sólo los múltiplos de tres para una configuración 24/4 sin simetría.

De igual forma, cuando la cancelación se da en un armónico no múltiplo de tres, como es el caso del 5º armónico de la figura 5.6, el par de *cogging* debe evaluarse ahora con los armónicos múltiplos de tres. En las figuras 5.6 y 5.7 se observa que las rectas de regresión tienen pendientes de 1/3 o de 2/3 dependiendo de si la evaluación se ha realizado a partir de los armónicos múltiplos de tres o no múltiplos de tres, respectivamente. La justificación de estos valores se realiza en el apartado 5.6.3 de este capítulo.

5.3 Procedimiento de Medida

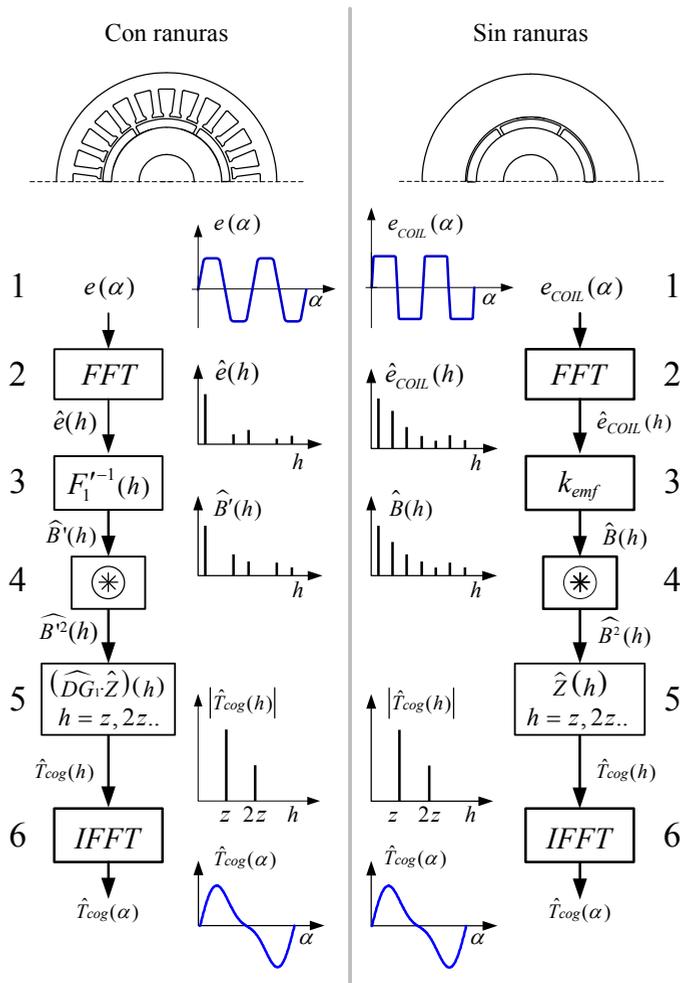


Figura 5.8. Métodos propuestos para la medida del par de *cogging* usando la FEM.

El procedimiento para obtener el par de *cogging* a partir de la FEM se muestra en los 6 pasos de la figura 5.8.

Los tres primeros pasos son diferentes según se utilice un estator con ranuras o un estator liso para la medida de la FEM. En el primer caso, una vez obtenido el espectro de la FEM debe ser multiplicado por la función $F'^{-1}(h)$, según se comentó en el apartado 5.1.A. El resultado es convolucionado consigo mismo en 4, obteniéndose $\widehat{B}^2(h)$.

En la fase 5 se aplica (5.5) para obtener el espectro del par de *cogging* y en 6 se tiene la misma información que en 5, pero en el dominio espacial.

En el caso de estator sin ranuras se ha considerado un devanado capaz de reproducir todos los armónicos, siendo la FEM una imagen de la inducción. En el apartado 5.6.1 se propone un devanado con una sola bobina con estas características.

5.4 Validación experimental

En esta sección se verifica experimentalmente el método propuesto sobre 40 motores y tres configuraciones, cuyas características y procedimiento de medida se indican en la Tabla 5.1.

Tabla 5.1: Conjuntos de motores usados en la validación experimental

Configuración	A	B	C
Nº de motores	15	15	10
Nº de polos, $2p$	4	4	4
Nº de ranuras, N_s	6	24	24
Tipo de imanes	Ferrita	Ferrita	NdFeB
D. ext. estator [mm]	80	80	67
D. ext. rotor [mm]	45	45	37
Entrehierro [mm]	0.7	0.7	0.8
Proc. de medida	Sin ran. (V_{COIL})	Sin ran. (V_{COIL}) Con ran. ($V_{\text{F-N}}$)	Sin ran. (V_{COIL}) Con ran. ($V_{\text{F-F}}$)
Figuras	5.10 y 5.11	5.12 y 5.13	5.14 y 5.15

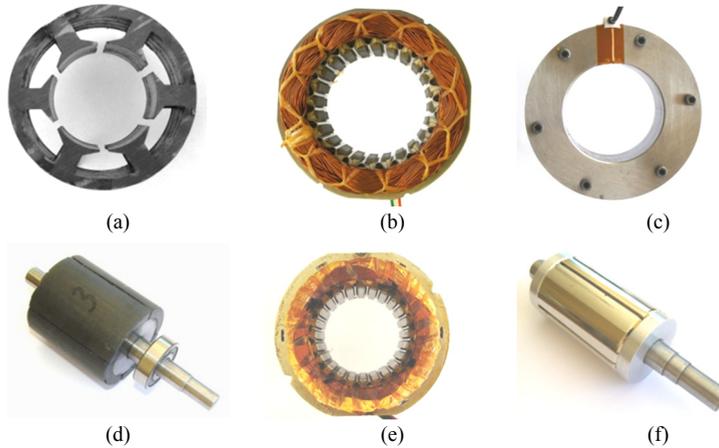


Figura 5.9. Componentes utilizados en la validación experimental. (a) Estator de 6 ranuras del conjunto A (15 unidades). (b) Estator de 24 ranuras del conjunto B (15 unidades.). (c) Estator de 24 ranuras del conjunto C (10 unidades). (d) Estator sin ranuras empleado en la medida (1 unidad). (e) Rotor de los conjuntos A y B (15 unidades.). (f) Rotor del conjunto C (10 unidades).

Los motores ensayados se hacen girar mediante un motor auxiliar a velocidad constante, registrándose la tensión inducida de cada uno de ellos.

Se han empleado los dos métodos ya mencionados para la medida de la FEM: mediante el estator de trabajo con ranuras y mediante un estator sin ranuras. Con el primero se ha medido la tensión de fase de los motores de la configuración B y la de línea de los motores de la configuración C. El segundo método utiliza una bobina de prueba (apartado 5.6.1) con la que se ha medido la tensión, V_{coil} , de las tres configuraciones.

Las figuras 5.10 a 5.15 muestran las relaciones entre los primeros armónicos del par de *cogging* obtenidos con un medidor de par, T_{METER} , sobre banco de ensayos y los estimados a partir de la tensión inducida, T_{FEM} , para las configuraciones de la Tabla 5.1. El medidor de par es de 0.5 Nm de fondo de escala y Clase 0.2 y el sistema de adquisición de datos utilizado para el procesado de la FEM es de 14.5 bits reales.

Para la configuración A, $N_s = 6$, $p = 2$, mostrada en la figura 5.10, se han obtenido los cuatro primeros armónicos de *cogging*; dos de ellos principales, $h = 12$ y $h = 24$, múltiplos de N_s y de $2p$ y dos secundarios, $h = 6$ y $h = 18$, múltiplos sólo de N_s . La precisión obtenida en la estimación queda de manifiesto en la figura 5.11, que muestra la onda espacial del par de *cogging* para la unidad ensayada indicada con un círculo en la figura 5.10.

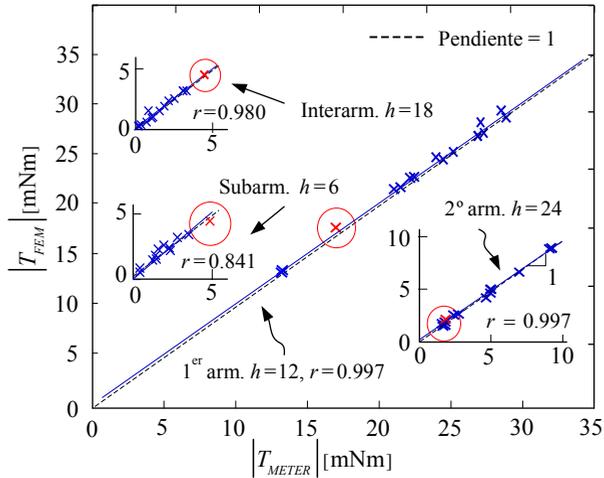


Figura 5.10. Configuración A: 6 ranuras /4 polos /imanes de Ferrita. Cuatro primeros armónicos del par de *cogging*. Método de medida: Estator sin ranuras.

En las figuras 5.12 y 5.13 se muestran los resultados de la configuración B para los dos primeros armónicos de *cogging*, usando para la medida de la FEM los métodos de estator sin ranuras y tensión de fase.

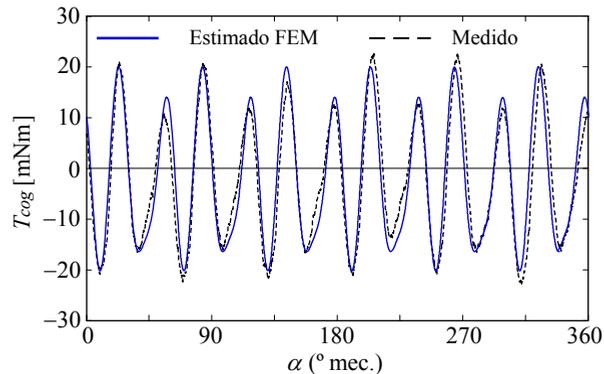


Figura 5.11. Par de *cogging* estimado desde la FEM y medido en banco. Configuración A: 6 ranuras /4 polos /imanes de Ferrita. Método de medida: Estator sin ranuras.

Los factores de correlación obtenidos son elevados, si bien el segundo armónico estimado a partir de la tensión de fase es menos preciso.

Las figuras 5.14 y 5.15 muestran los dos primeros armónicos de *cogging* de la configuración C. En esta configuración la FEM medida es la de línea-línea y por tanto no contiene los terceros armónicos. La evaluación del par de *cogging* se ha realizado a partir de los armónicos no múltiplos de tres, según 5.1.B.iii), lo que no supone una merma importante de la precisión.

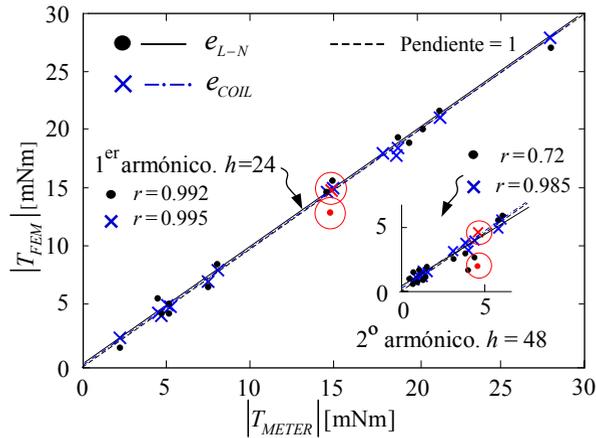


Figura 5.12. Configuración B. 24 ranuras / 4 polos. Primer y segundo armónicos del par de *cogging*. Métodos de medida: Estator sin ranuras y tensión de fase.

En la figura 5.14 se comparan los resultados sobre los 10 motores usando un estator sin ranuras y la tensión línea-línea.

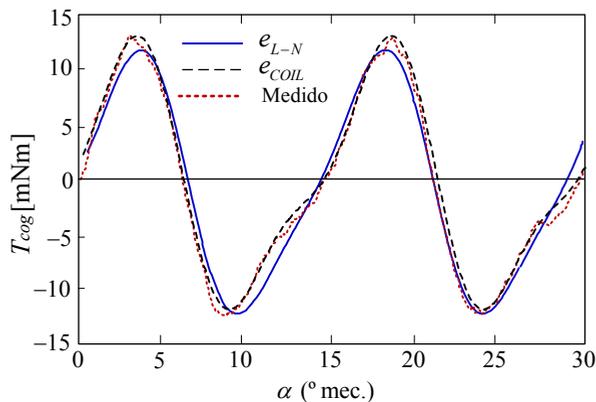


Figura 5.13. Configuración B. 24 ranuras / 4 polos. Comparativa par de *cogging*. Métodos de medida: Estator sin ranuras y tensión de fase.

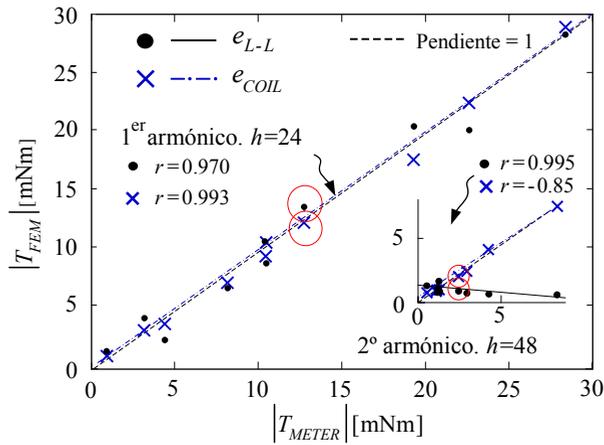


Figura 5.14. Configuración C. 24 ranuras / 4 polos. Imanes de Nd-Fe-B. Primer y segundo armónicos del par de cogging. Métodos de medida: Estator sin ranuras y tensión de línea.

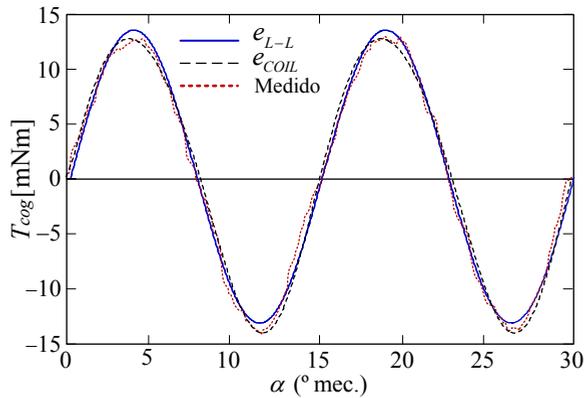


Figura 5.15. Configuración C. 24 ranuras / 4 polos. Comparativa par de cogging. Métodos de medida: Estator sin ranuras y tensión de línea.

5.5 Conclusiones

Se ha presentado un método de medida indirecta del par de *cogging* a través de la tensión inducida que no precisa de medidor mecánico de par, orientado principalmente a la verificación de motores de producción en masa. Se han expuesto los fundamentos teóricos del método y han sido contrastados numérica y experimentalmente sobre 40 motores de imanes superficiales. El método permite ser llevado a la práctica de dos formas diferentes: usando el propio estator de trabajo o empleando un estator sin ranuras con el que se consigue mayor precisión y que se llevaría a cabo durante la fabricación.

En el estudio llevado a cabo se da solución a las cancelaciones de armónicos por parte del devanado y a la distorsión de la FEM debida a las ranuras, que podrían comprometer la precisión del método.

El método podría ser aplicado a otras máquinas de imanes permanentes como las de flujo axial o de imanes interiores o permitir su uso en motores en marcha normal tras la desconexión.

5.6 Apéndices del capítulo 5

5.6.1 Devanado sin ranuras utilizado en la validación

Para la medida de la FEM sin ranuras se ha utilizado un sencillo y eficaz devanado en anillo tipo Gramme como el mostrado en la figura A5.1. Su comportamiento teórico es el de un conductor colocado axialmente sobre el entrehierro, sobre el que se induce una FEM proporcional a la inducción de los imanes. En nuestro caso se han arrollado dos espiras de hilo de 0.2 mm de diámetro. El bajo nivel de tensión generado debe ser amplificado antes de su conversión a señal digital.

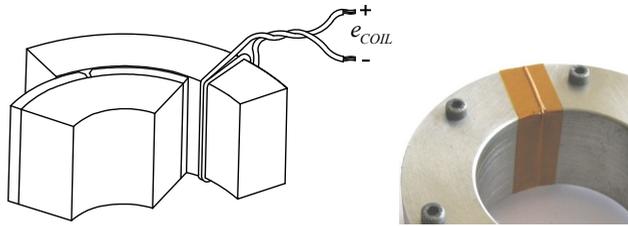


Figura A5.1. Devanado tipo Gramme usado para la medida de la FEM sobre un estator sin ranuras.

5.6.2 Obtención experimental de la permeancia relativa de ranuras

Sea $\hat{e}_T(h)$ el espectro de tensión en un motor con ranuras obtenido con un devanado formado por una bobina arrollada en un solo diente y $\hat{e}_C(h)$ el espectro correspondiente al mismo motor pero usando un estator sin ranuras y un devanado tipo Anillo de Gramme como el descrito en el apartado 5.6.1 con igual número de ranuras. De (5.7) se obtiene

$$\frac{\hat{e}_T(h)}{\hat{e}_C(h)} = \frac{\omega_r k_{jem} \hat{B}(h) \widehat{DG}_1(h)}{\omega_r k_{jem} \hat{B}(h)} = \widehat{DG}_1(h) = jh \hat{G}_1(h) \quad (\text{A5.1})$$

$$\hat{G}_1(h) = \frac{1}{jh} \frac{\hat{e}_T(h)}{\hat{e}_C(h)}$$

donde se ha aplicado la relación entre el espectro de una función y el de su derivada: $f(\alpha) \leftrightarrow \hat{f}(h)$; $df(\alpha)/d\alpha \leftrightarrow jh \hat{f}(h)$, siendo j la unidad imaginaria y h

el índice armónico. En (A5.1) no aparece la función de devanado $\widehat{W}(h)$ ya que éste se limita a un solo diente.

La figura A5.2 muestra la permeancia relativa de ranura para un motor de imanes superficiales de 6 mm de altura, 0.5 mm de entrehierro y 24 ranuras con abertura de 0.7, obtenida de tres formas diferentes: mediante el modelo analítico basado en trayectorias en forma de círculos de las líneas de campo, mediante elementos finitos y de forma experimental a partir de (A5.1). Junto a ellas también se muestra el caso ideal de un estator sin ranuras.

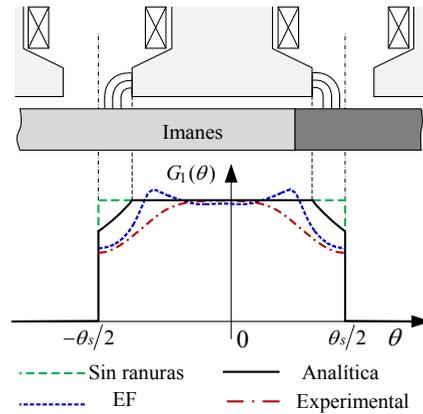


Figura A5.2. Permeancias relativas de ranura correspondientes a los modelos sin ranuras, analítico, FEM y experimental.

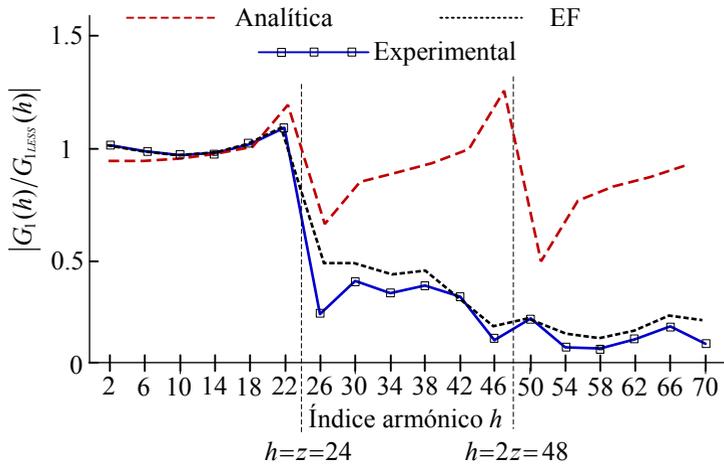


Figura A5.3. Espectros normalizados de las permeancias relativas de ranura correspondientes a los modelos analítico, FEM y experimental.

La figura A5.3 muestra las amplitudes de los coeficientes espectrales de cada una de las permeancias relativas divididas por los respectivos coeficientes de la permeancia relativa del estator sin ranuras. Estos espectros normalizados permiten observar la atenuación que sufren los armónicos de índices superiores al número de ranuras, claramente visible sólo en los modelos experimentales y de elementos finitos, pero no en el modelo analítico debido a su menor precisión.

5.6.3 Estimación del par de *cogging* a partir de un espectro de FEM incompleto

En ciertas configuraciones de devanado la FEM no contiene algunos de los armónicos principales de la inducción. No obstante, aún en estos casos, si $B(\alpha)$ cumple ciertas condiciones, que por lo general son satisfechas en los motores de imanes permanentes superficiales, los armónicos principales del par de *cogging* pueden ser obtenidos sin disminución de la precisión.

Si se limita el análisis del sumatorio (5.10) a los valores de h múltiplos de 3, se verifica que todos los armónicos múltiplos de tres de $B(l)$ y de $B(h-l)$ se encuentran formando productos entre sí y por tanto pueden agruparse en un nuevo sumatorio, quedando (10)

$$\widehat{B}^2(h) = \sum_{h=0\pm3,\pm6,\dots} \underbrace{\widehat{B}(l)\widehat{B}(h-l)}_{\widehat{B}^2_{1/3}(h)} + \sum_{l\neq0\pm3,\pm6,\dots} \underbrace{\widehat{B}(l)\widehat{B}(h-l)}_{\widehat{B}^2_{2/3}(h)} \quad (\text{A5.2})$$

donde $\widehat{B}^2(h)$ contiene la información completa sobre el par de *cogging*, $\widehat{B}^2_{1/3}(h)$ la parte de dicha información que puede ser obtenida a partir de los armónicos múltiplos de tres y $\widehat{B}^2_{2/3}(h)$ la información de los armónicos no múltiplos de tres. En lo que sigue se demuestra que en la mayoría de los casos existe proporcionalidad entre $\widehat{B}^2_{1/3}(h)$ y $\widehat{B}^2(h)$ de valor 1/3 y que por tanto, la información contenida en $\widehat{B}^2(h)$ puede deducirse a partir de $\widehat{B}^2_{1/3}(h)$ y $\widehat{B}^2_{2/3}(h)$ sin merma.

Sea la onda de inducción mostrada en la figura A5.4, que se supondrá de forma trapezoidal, con simetría de media onda, formada por una zona central prácticamente plana en cada semiperíodo de anchura δ y por flancos de forma arbitraria.

Se comenzará representando la forma de onda formada solamente por los terceros armónicos de $B(\alpha)$, a la que se denominará $B_{1/3}(\alpha)$. Para ello, se realizará un muestreo en frecuencia sobre los armónicos múltiplos de tres del

espectro completo de $B(\alpha)$ y cuyo resultado en el dominio espacial equivale a sumar a la onda original dos réplicas de la misma, desplazadas $2\pi/3$ y $-2\pi/3$ y multiplicar el resultado por $1/3$.

$$B_{1/3}(\alpha) = \frac{1}{3} [B(\alpha) + B(\alpha - \pi/3) + B(\alpha + \pi/3)] \quad (\text{A5.3})$$

En la figura A5.4 se observa que una vez realizada la suma se mantiene la forma de los flancos de la onda primitiva, afectados por el factor $1/3$, pero si δ es menor de $2\pi/3$ se perderá la forma original debido al solape de los flancos entre sí.

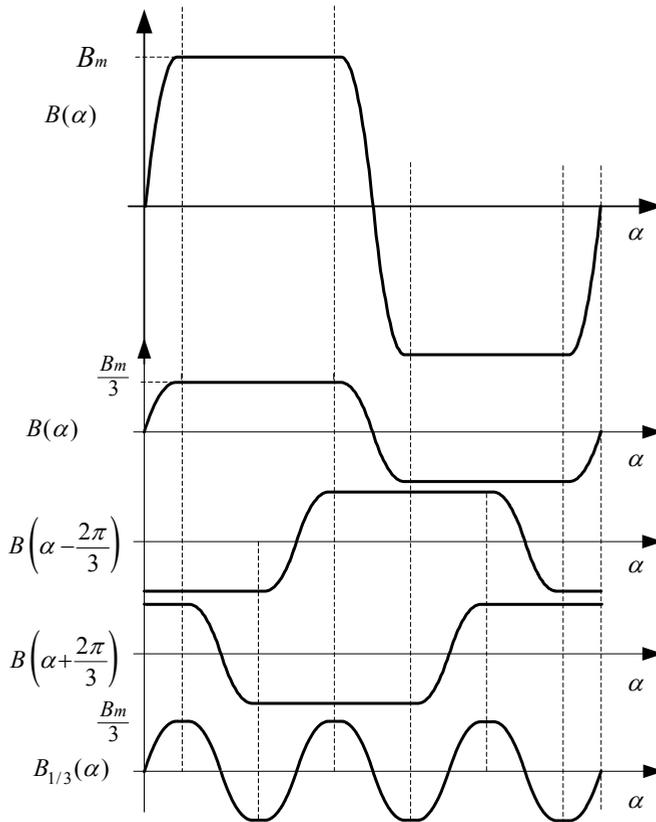


Figura A5.4. Obtención de $B_{1/3}(\alpha)$ a partir de $B(\alpha)$.

Para conocer el par de *cogging* debido a $B_{1/3}(\alpha)$ se debe obtener su espectro una vez elevada al cuadrado. Los armónicos de interés son los que coinciden con los principales del *cogging*, múltiplos del número de ranuras y

de imanes y que en los motores trifásicos son los múltiplos de seis. En la figura A5.5 se muestran $B_{1/3}^2(\alpha)$ para $\delta > 2\pi/3$ y la onda original al cuadrado, $B^2(\alpha)$ cuyos valores se van a comparar.

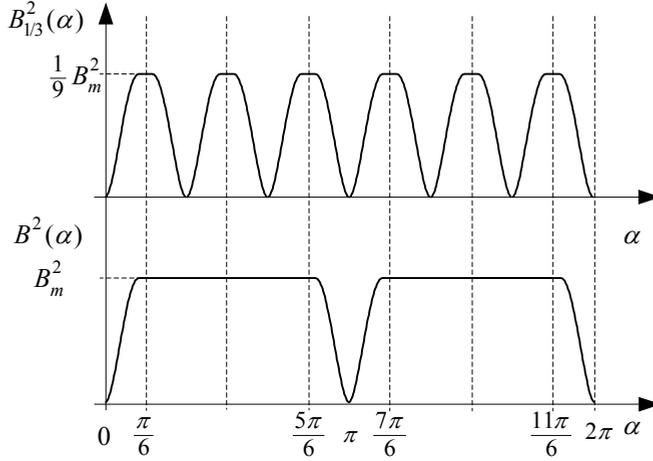


Figura A5.5. Evaluación de la integral de Fourier de $B_{1/3}^2(\alpha)$ y de $B^2(\alpha)$.

Los armónicos múltiplos de seis del espectro de $B_{1/3}^2(\alpha)$ pueden obtenerse evaluando la integral de Fourier sobre los seis periodos que la componen

$$\widehat{B}_{1/3}^2(6h) = \frac{6}{2\pi} \int_0^{\pi/3} B_{1/3}^2(\alpha) e^{-j6h\alpha} d\alpha \quad (\text{A5.4})$$

La evaluación de esta misma integral para $B^2(\alpha)$ se puede separar en dos partes, la correspondiente a las zonas planas, cuyo resultado es cero, y la que contiene a los flancos, cuyo valor es proporcional al obtenido en (A5.4) por ser los flancos de ambas ondas proporcionales.

$$\begin{aligned} \widehat{B}^2(6h) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B^2(\alpha) e^{-j6h\alpha} d\alpha \\ &= \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi/3} B_{1/3}^2(\alpha) e^{-j6h\alpha} d\alpha \end{aligned} \quad (\text{A5.5})$$

De (A5.4) y (A5.5) se obtiene,

$$\frac{\widehat{B}_{1/3}^2(6h)}{\widehat{B}^2(6h)} = \frac{1}{3} \quad (\text{A5.6})$$

siendo esta la proporcionalidad buscada.

6

Conclusiones y líneas futuras

6.1 Conclusiones

Como conclusiones del trabajo desarrollado pueden mencionarse las siguientes:

El modelado desarrollado en el capítulo 2 utiliza herramientas de análisis poco habituales en la ingeniería eléctrica, pero permite cuantificar el efecto de geometrías más complejas que las tratadas en los métodos clásicos.

Por otra parte, este modelado, al estar basado en la conexión en cascada de varios bloques, permite interpretar los efectos de cada uno de los elementos que componen el sistema de forma individualizada.

Las posibilidades de esta técnica de modelado se extienden hasta el diseño de filtros espaciales. Se han desarrollado cuatro métodos de síntesis de filtrado: adición de ceros, modificación de los ceros existentes, conformación de los polos y filtrado no selectivo, que cubren buena parte de las necesidades de fabricación industrial. Al mismo tiempo se han sentado las bases para el desarrollo de nuevas técnicas de filtrado.

Las técnicas de filtrado desarrolladas en esta tesis se han orientado a la disminución del par de *cogging* y de los armónicos de FEM. Todas han sido verificadas experimentalmente, demostrándose su validez. Sin embargo, durante los ensayos se constató que la eficacia de los filtros podía disminuir al llevarse a la práctica, debido a las tolerancias y errores inherentes a la fabricación y al proceso de imantación.

En el capítulo 4 se aborda de forma estadística el problema de los errores debidos a la colocación de los imanes y a la magnetización de los mismos. En este capítulo se desarrolla un modelo para los errores que facilita el diseño de los filtros, haciéndolos menos sensibles a los errores mecánicos.

El contenido del capítulo 5 no estaba contemplado en el proyecto inicial de la tesis, no obstante, durante los ensayos experimentales correspondientes al modelado se observó la clara correspondencia entre los espectros de la

inducción al cuadrado y el del par de *cogging*, tal como se deducía del modelo.

La constatación experimental de esta relación ha permitido desarrollar un nuevo método para la medida del par de *cogging* sin emplear ningún tipo de transductor de par de uso en motores de imanes superficiales.

6.2 Líneas futuras

En esta tesis se han sentado las bases para el desarrollo de nuevas líneas de trabajo. Unas son la continuación lógica de las ya iniciadas y otras corresponden a configuraciones y geometrías no abordadas en este trabajo.

Entre las primeras se podrían mencionar las siguientes:

Diseño de la inclinación en pasos de los imanes

Una línea interesante es el diseño del posicionado óptimo de los imanes con inclinación por pasos. Esta configuración es muy utilizada en la actualidad y suele resolverse aproximando las posiciones de los módulos a la generatriz ideal. Cuando el número de módulos es elevado suele dar buenos resultados, pero en el caso contrario el procedimiento es poco efectivo.

Nuevas configuraciones de bobinado

Una línea que guarda mucha relación con la anterior es la del diseño del bobinado. La posición de los conductores en las ranuras puede ser optimizada haciendo uso de la función característica $D(\alpha)$ y el espectro de FEM buscado. En la tesis se obtiene esta función y se interpreta para los casos más frecuentes.

Diseño de filtros mediante la forma de los dientes

También sería interesante explorar las posibilidades de filtrado mediante la geometría de los dientes. En esta tesis se realiza un estudio a fondo de la función característica de ranura $G(\alpha)$ y de su efecto en los casos de uso más frecuente, pero sin entrar en su diseño.

Par motor en motores multifásicos

El análisis del par motor empleando el modelado mediante la convolución se ha limitado a motores trifásicos, si bien sería posible extender su uso a motores multifásicos que recientemente están siendo utilizados en automoción y en aplicaciones de alta fiabilidad.

Entre las líneas no abordadas en esta tesis, se mencionarán dos:

Modelado de motores de imanes interiores

En este tipo de motores la reluctancia entre estator y rotor cambia con la

posición del rotor. Esta característica impide aplicar directamente el método basado en la convolución desarrollado en esta tesis a todos los supuestos de análisis. No obstante, cuando una de las variables que intervienen en la operación convolución pertenece al plano x-y y la otra al eje z, si es de aplicación el método de la convolución. No obstante sería deseable ampliar el estudio para que cubra todos los supuestos, ya que el uso de este tipo de motores va en aumento debido a que los imanes son de más fácil fabricación, lo que abarata su producción.

Modelado de las máquinas de flujo axial

Otra línea no explorada en esta tesis es la de los motores de flujo axial. En este caso, tampoco es posible aplicar el método de la convolución directamente a la geometría de estos motores. La razón radica en la dependencia de la velocidad lineal del estator respecto del estator en función del radio. Este tipo de motores permiten configuraciones geométricas muy diferentes a las permitidas por los motores de flujo radial, lo que los hace imprescindibles en ciertas aplicaciones.

BIBLIOGRAFÍA

Libros

- [1] Rudolf Richter; Devanados de Inducido Para Máquinas de Corriente Continua y Alterna; Ed. Calpe, Madrid, 1923.
- [2] Franz Moeller-Werr; Electrotecnia General y Aplicada; Editorial Labor, S.A.; Barcelona, 1949
- [3] Kostenko, M. and Piotrovsky, L., Electrical Machines, Vol. 2, Moscow, Russia: Mir Publishers, 1969.
- [4] Liwshitz-Garik, M.; Whipple, C.C. Máquinas de corriente alterna. México D.F., CECSA, 1976.
- [5] A. Ivanov-Smolensky; Electrical Machines; Vol. 1,2 and 3; Ed. MIR; Moscow; 1980.
- [6] Cortés Cherta, M. “Curso Moderno de Máquinas Eléctricas Rotativas”. Tomos 1 a 5; Editores Técnicos Asociados. Barcelona. 1970.
- [7] Luis serrano Iribarnegaray; “Teoría de los Fasores Espaciales: Introducción y Aplicaciones Industriales”; Ed. Marcombo; Barcelona; 2001.
- [8] Jesús Fraile Mora; “Máquinas Eléctricas”; 5ª Ed. McGraw-Hill; Madrid 2003.
- [9] T.J.E. Miller, Brushless Permanent-Magnet and Reluctance Motor Drives, Oxford University Press, Oxford, England, 1989, ISBN 0-19-859369.
- [10] J. R. Hendershot Jr., T. J. E. Miller, Design of Brushless Permanent-Magnet Motors, Magna Physics. Publications – Oxford Science Publications, 1994.
- [11] D. Hanselman, “Brushless Permanent Magnet Motor Design”, McGraw-Hill, Inc 1994.
- [12] D. Hanselman, “Brushless Permanent Magnet Motor Design” Second Edition, The Writers´ Collective, 2003.
- [13] R. Krishnan, “Permanent Magnet Synchronous and Brushless DC Motor Drives”; CRC Press 2009.

Artículos en revistas

- [14] Carlson, R.; Tavares, A.A.; Bastos, J.P.; Lajoie-Mazenc, Michel, "Torque ripple attenuation in permanent magnet synchronous motors," *Industry Applications Society Annual Meeting, 1989., Conference Record of the 1989 IEEE*, vol., no., pp.57, 62 vol.1, 1-5 Oct. 1989.

- [15] De La Ree, J.; Boules, N., "Torque production in permanent-magnet synchronous motors," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol.25, no.1, pp.107,112, Jan.-Feb. 1989.
- [16] De La Ree, J.; Boules, N., "Magnet shaping to reduce induced voltage harmonics in PM machines with surface mounted magnets," *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, vol.6, no.1, pp.155, 161, Mar 1991.
- [17] De La Ree, J.; Boules, N., "Induced voltage harmonic reduction of PM cylindrical machines," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol.28, no.3, pp.619,624, May/Jun 1992.
- [18] Islam, M.S.; Mir, S.; Sebastian, T., "Issues in reducing the cogging torque of mass-produced permanent-magnet brushless DC motor," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol.40, no.3, pp.813,820, May-June 2004.
- [19] Islam, R.; Husain, I; Fardoun, A; McLaughlin, K., "Permanent-Magnet Synchronous Motor Magnet Designs With Skewing for Torque Ripple and Cogging Torque Reduction," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol.45, no.1, pp.152,160, Jan.-feb. 2009.
- [20] Lijian Wu; Zi-Qiang Zhu, "Analytical Modeling of Surface-Mounted PM Machines Accounting for Magnet Shaping and Varied Magnet Property Distribution," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.50, no.7, pp.1,11, July 2014.
- [21] Shah, S.Q.A.; Lipo, T.A.; Byung-II Kwon, "Modeling of Novel Permanent Magnet Pole Shape SPM Motor for Reducing Torque Pulsation," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.48, no.11, pp.4626,4629, Nov. 2012
doi: 10.1109/TMAG.2012.2197188.
- [22] Hwang, Kyu-Yun; Sang-Bong Rhee; Yang, Byoung-Yull; Byung-II Kwon, "Rotor Pole Design in Spoke-Type Brushless DC Motor by Response Surface Method," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.43, no.4, pp.1833,1836, April 2007.
- [23] Hanselman, D.C.; "Effect of skew, pole count and slot count on brushless motor radial force, cogging torque and back EMF," *Electric Power Applications, IEE Proceedings*, vol.144, no.5, pp.325-330, Sep 1997.
- [24] Borghi, C.A.; Casadei, D.; Fabbri, M.; Serra, G., "Reduction of the torque ripple in permanent magnet actuators by a multi-objective minimization technique," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.34, no.5, pp.2869, 2872, Sep 1998.
- [25] Chaithongsuk, S.; Takorabet, N.; Meibody-Tabar, F., "On the Use of Pulse Width Modulation Method for the Elimination of Flux Density

- Harmonics in the Air-Gap of Surface PM Motors," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.45, no.3, pp.1736-1739, March 2009.
- [26] Touzhu Li; Slemon, G., "Reduction of cogging torque in permanent magnet motors," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.24, no.6, pp.2901,2903, Nov 1988.
- [27] Kwang-Heon Kim; Dong-Joon Sim; Won, J.-S., "Analysis of skew effects on cogging torque and BEMF for BLDCM," *Industry Applications Society Annual Meeting, 1991., Conference Record of the 1991 IEEE* , vol., no., pp.191,197 vol.1, Sept. 28 1991-Oct. 4 1991.
- [28] Zhu, Z.Q.; Howe, D., "Analytical prediction of the cogging torque in radial-field permanent magnet brushless motors," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.28, no.2, pp.1371,1374, Mar 1992.
- [29] Zhu, Z.Q.; Howe, D., "Influence of design parameters on cogging torque in permanent magnet machines," *Energy Conversion, IEEE Transactions on*, vol.15, no.4, pp.407,412, Dec 2000.
- [30] Zhu, Z.Q.; Chen, J.T.; Wu, L. J.; Howe, D., "Influence of Stator Asymmetry on Cogging Torque of Permanent Magnet Brushless Machines," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.44, no.11, pp.3851,3854, Nov. 2008.
- [31] Zhu, Z.Q., "A simple method for measuring cogging torque in permanent magnet machines," *Power & Energy Society General Meeting, 2009. PES '09. IEEE* , vol., no., pp.1,4, 26-30 July 2009.
- [32] Ackermann, B.; Janssen, J. H. H., Sottek, R. and Van Steen, R. I.; "New technique for reducing cogging torque in class of brushless motors," *Proc. Inst. Elect. Eng.—Electr. Power Appl.*, vol. 139, no. 4, pp. 315–320, Jul. 1992.
- [33] Chang-seop Koh; Hee-Soo Yoon; Ki Woong Nam; Hong-Soon Choi, "Magnetic pole shape optimization of permanent magnet motor for reduction of cogging torque," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.33, no.2, pp.1822,1827, Mar 1997
- [34] Chang-seop Koh; Jin-Soo Seol, "New cogging-torque reduction method for brushless permanent-magnet motors," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.39, no.6, pp.3503,3506, Nov. 2003.
- [35] Saravanan, S.; Doss, M.AN.; Jeevananthan, S.; Vidyasagar, S., "Reduction of cogging torque by adopting semi circled permanent magnet," *Electrical Energy Systems (ICEES), 2011 1st International Conference on* , vol., no., pp.149,153, 3-5 Jan. 2011.
- [36] Chabchoub, M.; Ben Salah, I.; Krebs, G.; Neji, R.; Marchand, C., "PMSM cogging torque reduction: Comparison between different shapes of

- magnet," *Renewable Energies and Vehicular Technology (REVET), 2012 First International Conference on* , vol., no., pp.206,211, 26-28 March 2012.
- [37] Pan Seok Shin; Woo, S.H.; Chang-seop Koh, "An Optimal Design of Large Scale Permanent Magnet Pole Shape Using Adaptive Response Surface Method With Latin Hypercube Sampling Strategy," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.45, no.3, pp.1214,1217, March 2009.
- [38] Ningning Chen; Ho, S.L.; Fu, W.N., "Optimization of Permanent Magnet Surface Shapes of Electric Motors for Minimization of Cogging Torque Using FEM," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.46, no.6, pp.2478,2481, June 2010.
- [39] Bianchi, N.; Bolognani, S.; "Design techniques for reducing the cogging torque in surface-mounted PM motors," *Industry Applications, IEEE Transactions on* , vol.38, no.5, pp. 1259- 1265, Sep/Oct 2002.
- [40] Daohan Wang; Xiuhe Wang; Yubo Yang; Ran Zhang, "Optimization of Magnetic Pole Shifting to Reduce Cogging Torque in Solid-Rotor Permanent-Magnet Synchronous Motors," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.46, no.5, pp.1228,1234, May 2010.
- [41] Li Zhu; Jiang, S. Z.; Zhu, Z. Q.; Chan, C. C., "Analytical Methods for Minimizing Cogging Torque in Permanent-Magnet Machines," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.45, no.4, pp.203,2031, April 2009.
- [42] W. Fei; P.C.K. Luk; "A New Technique of Cogging Torque Suppression in Direct-Drive Permanent-Magnet Brushless Machines", *IEEE Transactions on Industry Application*, vol.46, n° 4, pp. 1332-1340, July/August 2010.
- [43] Boukais, B.; Zeroug, H.; "Magnet Segmentation for Commutation Torque Ripple Reduction in a Brushless DC Motor Drive," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.46, no.11, pp.3909-3919, Nov. 2010.
- [44] Ashabani, M.; Mohamed, Y.A.-R.I.; "Multiobjective Shape Optimization of Segmented Pole Permanent-Magnet Synchronous Machines With Improved Torque Characteristics," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.47, no.4, pp.795-804, April 2011.
- [45] Alhamadi, M.A; Demerdash, N. A O, "Optimization of the skew angle of rotor poles in permanent magnet machines based on the inverse problem method," *Energy Conversion, IEEE Transactions on* , vol.14, no.4, pp.1496,1501, Dec. 1999.
- [46] Sung-Il Kim; Ji-Young Lee; Young-Kyoun Kim; Jung-Pyo Hong; Hur, Y.; Yeon-Hwan Jung, "Optimization for reduction of torque ripple in

- interior permanent magnet motor by using the Taguchi method," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.41, no.5, pp.1796,1799, May 2005.
- [47] Lukaniszyn, M.; JagieLa, M.; Wrobel, R., "Optimization of permanent magnet shape for minimum cogging torque using a genetic algorithm," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.40, no.2, pp.1228,1231, March 2004.
- [48] Hartman, A.; Lorimer, W.; "Undriven vibrations in brushless DC motors," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.37, no.2, pp.789-792, Mar 2001.
- [49] Hartman, A and W. Lorimer, "Cogging torque control in brushless dc motors," in *Incremental Motion Control Syst. and Devices 29th Annu. Symp. Proc.*, July 2000, pp. 237–243.
- [50] Wang, K.; Zhu, Z.Q.; Ombach, G., "Torque Enhancement of Surface-Mounted Permanent Magnet Machine Using Third-Order Harmonic," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.50, no.3, pp.104,113, March 2014.
- [51] Zhu, Z.Q.; Howe, D., "Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet DC motors. III. Effect of stator slotting," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.29, no.1, pp.143,151, Jan 1993.
- [52] Zhu, Z.Q.; Howe, D.; Bolte, E.; Ackermann, B., "Instantaneous magnetic field distribution in brushless permanent magnet DC motors. I. Open-circuit field," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.29, no.1, pp.124,135, Jan 1993.
- [53] Zhu, Z.Q.; Howe, D.; Chan, C.C., "Improved analytical model for predicting the magnetic field distribution in brushless permanent-magnet machines," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.38, no.1, pp.229,238, Jan 2002.
- [54] Xiuhe Wang, Yubo Yang, Dajin Fu, "Study of cogging torque in surface-mounted permanent magnet motors with energy method", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, Volume 267, Issue 1, November 2003, Pages 80-85, ISSN 0304-8853.
- [55] Zarko, D.; Ban, D.; Lipo, T.A, "Analytical calculation of magnetic field distribution in the slotted air gap of a surface permanent-magnet motor using complex relative air-gap permeance," *Magnetics, IEEE Transactions on* , vol.42, no.7, pp.1828,1837, July 2006.
- [56] Proca, AB.; Keyhani, A; El-Antably, A; Wenzhe Lu; Min Dai, "Analytical model for permanent magnet motors with surface mounted magnets," *Energy Conversion, IEEE Transactions on* , vol.18, no.3,

- pp.386,391, Sept. 2003.
- [57] Shoudao Huang; Jinping Zhang; Jian Gao; Keyuan Huang, "Optimization the Electromagnetic Torque Ripple of Permanent Magnet Synchronous Motor," *Electrical and Control Engineering (ICECE), 2010 International Conference on*, vol., no., pp.3969,3972, 25-27 June 2010.
- [58] Hung, J.Y.; Zhi Ding, "Minimization of torque ripple in permanent magnet motors: a closed form solution," *Industrial Electronics, Control, Instrumentation, and Automation, 1992. Power Electronics and Motion Control., Proceedings of the 1992 International Conference on*, vol., no., pp.459,463 vol.1, 9-13 Nov 1992.
- [59] Min-Fu Hsieh; Hsu, Yu-Sheng, "An investigation on influence of magnet arc shaping upon back electromotive force waveforms for design of permanent-magnet brushless motors," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.41, no.10, pp.3949,3951, Oct. 2005
- [60] Chunting Mi; Slemon, G.R.; Bonert, Richard, "Minimization of iron losses of permanent magnet synchronous machines," *Electrical Machines and Systems, 2001. ICEMS 2001. Proceedings of the Fifth International Conference on*, vol.2, no., pp.818,823 vol.2, Aug 2001
- [61] Gyu-Hong Kang; Young-Dae Son; Gyu-Tak Kim; Jin Hur, "A Novel Cogging Torque Reduction Method for Interior-Type Permanent-Magnet Motor," *Industry Applications, IEEE Transactions on*, vol.45, no.1, pp.161,167, Jan.-feb. 2009.
- [62] Lee, C.J.; Lee, C. I; Jang, G.H., "Source and Reduction of Uneven Magnetization of the Permanent Magnet of a HDD Spindle Motor," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.47, no.7, pp.1929,1932, July 2011.
- [63] Lee, C.J.; Jang, G.H., "Development of a New Magnetizing Fixture for the Permanent Magnet Brushless DC Motors to Reduce the Cogging Torque," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.47, no.10, pp.2410,2413, Oct. 2011.
- [64] Simon-Sempere, V.; Burgos-Payan, M.; Cerquides-Bueno, J.-R., "Influence of Manufacturing Tolerances on the Electromotive Force in Permanent-Magnet Motors," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.49, no.11, pp.5522,5532, Nov. 2013.
- [65] Taeyong Yoon; Lieu, D.K., "A Method to Verify Accuracy of Predicted Magnetic Orientation of a Permanent Ring Magnet in a Brushless DC Motor," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.43, no.9, pp.3638,3644, Sept. 2007.
- [66] J. Brown, E.V.D. Glazier; "Telecommunications", J.Brown, 1974.

- [67] Coenen, I; Van der Giet, M.; Hameyer, K., "Manufacturing Tolerances: Estimation and Prediction of Cogging Torque Influenced by Magnetization Faults," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.48, no.5, pp.1932,1936, May 2012.
- [68] Sung, S. J.; Park, S.J.; Jang, G.H., "Cogging Torque of Brushless DC Motors Due to the Interaction Between the Uneven Magnetization of a Permanent Magnet and Teeth Curvature," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.47, no.7, pp.1923,1928, July 2011.
- [69] Heins, G.; Brown, T.; Thiele, M., "Statistical Analysis of the Effect of Magnet Placement on Cogging Torque in Fractional Pitch Permanent Magnet Motors," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.47, no.8, pp.2142,2148, Aug. 2011.
- [70] Gasparin, L.; Cernigoj, A; Markic, S.; Fiser, R., "Additional Cogging Torque Components in Permanent-Magnet Motors Due to Manufacturing Imperfections," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.45, no.3, pp.1210,1213, March 2009.
- [71] Li, J.T.; Liu, Z.J.; Nay, L.H.A., "Effect of Radial Magnetic Forces in Permanent Magnet Motors With Rotor Eccentricity," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.43, no.6, pp.2525,2527, June 2007
- [72] Miller, T. J E; Rabinovici, R., "Back-EMF waveforms and core losses in brushless DC motors," *Electric Power Applications, IEE Proceedings -*, vol.141, no.3, pp.144,154, May 1994.
- [73] Simon Sempere, V.; Burgos Payan, M.; Cerquides Bueno, J., "Spatial Filtering: A Tool for Selective Harmonics Elimination in the Design of Permanent-Magnet Synchronous Motors," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.48, no.6, pp.2056, 2067, June 2012.
- [74] Simon Sempere, V.; Burgos Payan, M.; Cerquides Bueno, R., "Cogging Torque Measurement Using the Electromotive Force in Surface-Mounted Permanent-Magnet Motors," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol.PP, no.99, pp.1,1doi: 10.1109/TMAG.2015.2394477.

FILTRADO EN EL DOMINIO ESPACIAL APLICADO AL DISEÑO DE MÁQUINAS DE IMÁN PERMANENTE

La aparición en las últimas décadas de imanes permanentes de elevadas prestaciones ha permitido el desarrollo de nuevos tipos de máquinas eléctricas rotativas, con densidades de potencia, geometrías y posibilidades de control antes inviabilizadas. Estas nuevas máquinas requieren de técnicas de diseño específicas, entre las que destacan las medidas contra el rizado de par y el par de *cogging*, fenómenos no deseados, pero unidos al principio de funcionamiento de la máquina.

Esta tesis se enmarca en los trabajos destinados a reducir el rizado de par y el *cogging* en los motores de imanes superficiales, siendo su objetivo el desarrollo de métodos de diseño de la geometría de la máquina a partir de especificaciones en el dominio de la frecuencia, es decir, el diseño de filtros en el dominio espacial.

El filtrado espacial se basa en la convolución de una de las ondas espaciales de la máquina, caracterizada por parámetros geométricos, con una función espacial que hace las veces de filtro, dando como resultado una nueva onda espacial y una geometría asociada. Este procedimiento constituye una aportación original y abre el camino a nuevas soluciones de filtrado, dando fundamento a muchas de las existentes.

Aunque el filtrado espacial constituye el núcleo principal de la tesis, ha sido necesario desarrollar previamente el modelado completo de la máquina en el dominio espacial, donde, de forma natural, aparece la operación de convolución como vínculo entre las distintas ondas espaciales de la máquina.

En cada uno de los capítulos se incluye un apartado de verificación experimental con el fin de validar los resultados teóricos obtenidos.