

Proyecto Fin de Máster
Máster en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica

Estudio y Simulación de Estructura Offshore
Flotante

Autor: Daniel López Mendoza

Tutor: José Ángel González Pérez

Dep. Ingeniería de la Cosntrucción y Proyectos de Ingeniería
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla

Sevilla, 2014



*Departamento de
Ingeniería de la Construcción
y Proyectos de Ingeniería*

Proyecto Fin de Máster
Máster en Diseño Avanzado en Ingeniería Mecánica

Estudio y Simulación de Estructura Offshore Flotante

Autor:
Daniel López Mendoza

Tutor:
José Ángel González Pérez
Profesor titular

Dep. Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería
Escuela Técnica Superior de Ingeniería
Universidad de Sevilla
Sevilla, 2014

Proyecto Fin de Máster: Estudio y Simulación de Estructura Offshore Flotante

Autor: Daniel López Mendoza

Tutor: José Ángel González Pérez

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2014

El Secretario del Tribunal

A mi familia

A mis amigos

Agradecimientos

Quiero dedicar el presente trabajo a Zora, Darío y Estrella. Desde el primer día que comencé este Máster su ánimo, fuerza y vitalidad me han llevado de la mano a conseguir finalizarlo.

Agradecer también al profesor José Ángel González Pérez todo el apoyo, ayuda y tiempo prestados. Sin sus directrices y consejos, este trabajo hubiera resultado imposible.

Daniel López Mendoza

Sevilla, 2014

En este trabajo se presenta un modelo numérico en elementos finitos para un sistema multicuerpo flexible [1], bajo hipótesis de pequeñas deformaciones y largos desplazamientos. Como aplicación práctica del modelo numérico se ha resuelto una estructura offshore, un tramo de puente de carretera flotante.

El oleaje se ha representado mediante el espectro de Pierson-Mozkowitz. La estabilidad de la estructura ante el efecto del oleaje se logra mediante un sistema de cables de amarre, implementado según la formulación descrita en [2]. Para completar el estudio de la estructura flotante se ha evaluado el efecto provocado por el paso de un vehículo pesado.

Agradecimientos	ix
Resumen	xi
Índice	xiii
Índice de Figuras	xv
1 INTRODUCCIÓN	1
1.1 <i>Objetivos</i>	1
1.2 <i>Contenido</i>	2
2 TEORÍA Y FORMULACIÓN	3
2.1 <i>Modelo Numérico</i>	3
2.1.1 Matriz de rotación	3
2.1.2 Cinemática	5
2.1.3 Descomposición del desplazamiento total	6
2.1.4 Formulación variacional	8
2.1.5 Ecuaciones del movimiento	12
2.1.6 Integración de las ecuaciones del movimiento	13
2.1.7 Linealización de las ecuaciones de movimiento	18
2.2 <i>Sistema de cables de amarre</i>	19
2.2.1 Modelo	19
2.2.2 Formulación	19
2.3 <i>Teoría del oleaje</i>	23
2.3.1 Olas lineales. Teoría de Airy	25
2.3.2 Olas irregulares	26
2.3.3 Espectro de oleaje. Pierson-Moskowitz	28
3 RESOLUCIÓN CASO PRÁCTICO	31
3.1 <i>Introducción</i>	31
3.2 <i>Geometría y cargas</i>	32
3.2.1 Estructura	32
3.2.2 Oleaje	35
3.2.3 Carga de vehículo pesado	36
3.3 <i>Estudio del sistema de cableado</i>	38
3.3.1 Efecto del sistema de amarre	38
3.3.2 Longitud del cable	40
3.3.3 Distancia entre estructura y el amarre al fondo	41
3.3.4 Distribución geométrica del cableado	42
3.3.5 Rigidez del cable	43
3.4 <i>Efecto del oleaje</i>	45
3.4.1 Altura significativa de ola	45
3.4.2 Profundidad del fondo marino	46
3.5 <i>Vehículo pesado</i>	47
3.5.1 Efecto en la estructura	47
3.5.2 Comparativa en función del tonelaje	49

4	CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO	51
4.1	<i>Conclusiones</i>	51
4.2	<i>Trabajo futuro</i>	51
5	BIBLIOGRAFÍA	53

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2-1. Rotación del vector \mathbf{r} un ángulo ϕ alrededor del eje \mathbf{n} (izquierda) y descomposición en dos sucesivas semirotaciones (derecha)	3
Figura 2-2. Ejes globales y ejes locales	5
Figura 2-3. Descomposición del desplazamiento en movimiento del sólido rígido y desplazamiento deformacional	6
Figura 2-4. Subestructuras flexibles conectadas a un frame intermedio	11
Figura 2-5. Relación entre las ecuaciones del movimiento	13
Figura 2-6. Cable de amarre en sistema de coordenadas local	20
Figura 2-7. Características de una ola. (Fuente Baquerizo et. al [3])	24
Figura 2-8. Ola irregular. Superposición de olas. (Fuente Pierson [8])	26
Figura 2-9. Ejemplo de espectro de densidad $S(\omega)$ (fuente Ochi [6])	27
Figura 2-10. Ejemplo de diagrama	28
Figura 3-1. Sección principal (alzado) del puente de la SR-520 (Estado de Washington)	31
Figura 3-2. Vista en planta de un tramo del puente de la SR-520	31
Figura 3-3. Proceso constructivo del puente de la SR-520	32
Figura 3-4. Sección principal (planta) de la estructura	33
Figura 3-5. Sección principal (perfil) de la estructura	33
Figura 3-6. Representación de la estructura	34
Figura 3-7. Espectro de oleaje. $H_s=2\text{m}$ y $T_o=11\text{s}$.	35
Figura 3-8. Altura de ola. $H_s=2\text{m}$ y $T_o=11\text{s}$.	36
Figura 3-9. Nodos por los que circula el vehículo pesado.	36
Figura 3-10. Funciones de forma. Carga vehículo pesado.	37
Figura 3-11. Estructura inestable sin sistema de amarre.	38
Figura 3-12. Distribución del sistema de cableado. 16 cables perimetrales+8 cables interiores.	38
Figura 3-13. Desplazamiento horizontal. Efecto sistema de amarre.	39
Figura 3-14. Desplazamiento vertical. Efecto sistema de amarre.	40
Figura 3-15. Desplazamiento horizontal. Comparativa longitud de cable	41
Figura 3-16. Desplazamiento horizontal. Comparativa distancia horizontal	42
Figura 3-17. Desplazamiento horizontal. Comparativa distribución de cableado	43
Figura 3-18. Desplazamiento horizontal. Comparativa rigidez del cable	44
Figura 3-19. Desplazamiento vertical. Comparativa rigidez del cable	44
Figura 3-20. Desplazamiento horizontal. Comparativa altura de oleaje	45
Figura 3-21. Desplazamiento horizontal. Comparativa profundidad fondo marino	46
Figura 3-22. Circulación de vehículos pesados. Nodos	47
Figura 3-23. Desplazamiento horizontal. Efecto vehículo pesado	48

Figura 3-24. Desplazamiento vertical. Efecto vehículo pesado	48
Figura 3-25. Variación en la flecha. Efecto vehículo pesado	49
Figura 3-26. Desplazamiento horizontal. Comparativa peso del vehículo	50
Figura 3-27. Desplazamiento vertical. Comparativa peso del vehículo	50

1 INTRODUCCIÓN

La construcción de estructuras offshore constituye un campo amplio y dinámico, debido a la variedad de ellas y a la continua aparición de nuevas necesidades que llevan asociadas ideas actualizadas para su diseño.

Las estructuras offshore están muy ligadas al sector petrolífero, debido a que surgieron como necesidad para extraer el petróleo de las reservas situadas en el fondo marino. No obstante el aprovechamiento del mar no se limita a la extracción de crudo. La creciente falta de sitio en tierra para llevar a cabo múltiples aplicaciones ha generado una tendencia internacional hacia instalarlas en el mar. Ello conlleva en muchas ocasiones la implantación de estructuras offshore en zonas con grandes profundidades que inhabilitan la opción de cimentarlas al lecho marino por lo que se recurre a la estructura offshore flotante.

Dentro del propio sector energético que engloba al petróleo existen más aplicaciones de estructuras flotantes como diseños para aprovechamiento de la energía del oleaje y los parques eólicos offshore, estos últimos como fuente de energía renovable en gran expansión. En el campo de la ingeniería aeronáutica también se encuentran aeropuertos flotantes y plataformas para el lanzamiento de satélites desde el ecuador. Dentro de la ingeniería civil la aplicación de estructuras offshore no se centra sólo en la ingeniería de puertos y costas, sino que se amplía a parcelas como la ingeniería de carreteras con puentes flotantes para el tráfico rodado (objeto del presente trabajo). También existen aplicaciones fuera de la ingeniería como granjas marinas e incluso casinos.

Una característica común a casi todas las estructuras offshore flotantes es que son relativamente recientes o están aún en fase conceptual. La falta de experiencia previa, la importancia de la finalidad de las estructuras flotantes (energía, aeronáutica, construcción civil etc) y la complejidad técnico-económica de su diseño, llevan a este campo de la ingeniería a estar en continuo desarrollo y en contacto con la tecnología más avanzada.

1.1 Objetivos

El objeto del presente trabajo es realizar un estudio sobre una estructura offshore y más en concreto sobre un puente de carretera flotante.

El conocimiento del comportamiento del mar es básico para el diseño de estructuras flotantes y como consecuencia de la falta de experiencia empírica, resulta imprescindible recurrir a modelos numéricos. De ahí que en el presente trabajo se describa un modelo numérico que permita representar la interacción del mar con la estructura. El modelo numérico llevado a cabo mediante el método de los elementos finitos, es el formulado por *González, Abascal y Park* en [1]. La implementación en Matlab del modelo numérico supone una herramienta de cálculo con la que se puede aplicar unas hipótesis de carga a la estructura (oleaje, tráfico etc.) y que da como resultados los desplazamientos de la estructura.

Se realiza, por lo tanto, un estudio del puente de carretera consistente en un análisis de la respuesta de la estructura en diversas situaciones. Cada situación supone una variación de los parámetros de partida del modelo en las siguientes áreas:

- Sistema de cables de amarre
- Altura de oleaje y profundidad del fondo marino
- Carga de tráfico

Con ello se persigue validar la estructura en cuanto a estabilidad, establecer las cargas últimas que soporta la estructura (oleaje y tráfico) y optimizar la distribución del sistema de cableado.

1.2 Contenido

El presente trabajo fin de máster se reparte a lo largo de 4 puntos, donde se presenta el modelo numérico empleado para estudiar posteriormente la respuesta de una estructura offshore (puente flotante) ante la acción del oleaje y el paso de vehículos pesados.

En el punto 2 se desarrolla en primer lugar el modelo numérico en elementos finitos que supone el grueso principal de la metodología implementada para resolver el problema de la estructura offshore objeto del presente trabajo. La formulación del modelo numérico es presentada por González, Abascal y Park en [1] y se implementa en Matlab por el profesor José Ángel González Pérez, dando lugar al programa base de cálculo.

En la segunda parte de este epígrafe se describe la metodología seguida para simular las reacciones generadas en la estructura por las fuerzas de los cables de amarre. La formulación desemboca en un sistema de ecuaciones no-lineales, resuelto mediante el método Newton-Raphson. El proceso completo para la obtención de las reacciones generadas por el sistema de amarre queda integrado dentro del programa base de cálculo.

El punto 2 finaliza con un resumen de la teoría de oleaje necesaria para determinar la presión ejercida por las olas del mar sobre una estructura offshore. Se repasa por tanto los conceptos de ola lineal, ola irregular y el espectro de densidad de energía (espectro de Pierson-Moskowitz).

En el punto 3 se plantea inicialmente el problema del puente colgante a calcular, estableciendo geometría, propiedades mecánicas y cargas a aplicar.

Posteriormente se realizan una serie de simulaciones en las que se van modificando los parámetros de entrada. Se persigue estudiar el sistema de cableado desde varias ópticas (geometría del sistema de cableado y rigidez del cable), con objeto de optimizar el proceso de diseño del sistema de amarre. Además se analiza el efecto del oleaje en función de dos parámetros fundamentales como la altura significativa de ola y profundidad. El punto concluye con un estudio del efecto provocado por el paso de vehículos pesados.

Por último, en el punto 4 se presentan las conclusiones del estudio y los posibles desarrollos futuros que tiendan a paliar las carencias del presente trabajo y fomenten un mejor conocimiento de las estructuras offshore flotantes, de cara a su diseño.

2 TEORÍA Y FORMULACIÓN

2.1 Modelo Numérico

La resolución del problema planteado en el epígrafe 3 se lleva a cabo utilizando un programa implementado en Matlab por el profesor José Ángel González, profesor titular del Departamento Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería de la Universidad de Sevilla. La base teórica del modelo numérico implementado es presentador por *González, Abascal y Park* en [1] y se describe a lo largo del presente epígrafe 2.1.

El modelo presentado consiste en una formulación particionada en elementos finitos para un sistema multicuerpo flexible, basado en la formulación floating frame y bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y largos desplazamientos de los cuerpos.

La principal diferencia entre el presente modelo y una formulación clásica de floating frame, es la separación algebraica de los modos deformacionales puros de los movimientos de sólido rígido.

Seguidamente se desarrolla el modelo de *González, Abascal y Park* [1].

2.1.1 Matriz de rotación

Una rotación en el espacio puede ser descrita como una rotación de un cierto ángulo sobre un eje determinado.

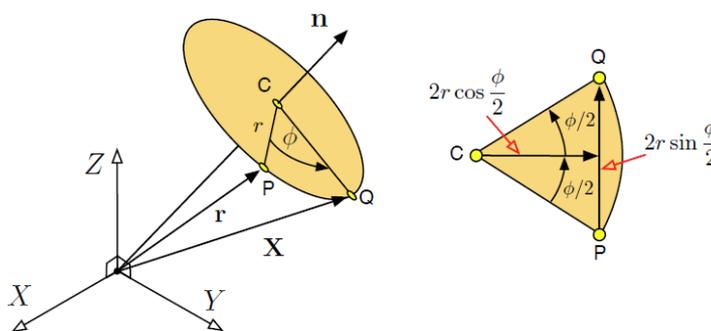


Figura 2-1. Rotación del vector \mathbf{r} un ángulo ϕ alrededor del eje \mathbf{n} (izquierda) y descomposición en dos sucesivas semirotaciones (derecha)

Siendo el vector unitario \mathbf{n} el eje y ϕ el ángulo de giro, la rotación del vector \mathbf{r} a \mathbf{X} se construye mediante la fórmula de rotación de *Rodrigues*.

$$\mathbf{X} = [\cos(\phi) \mathbf{I} + (1 - \cos(\phi)) \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \sin(\phi) \tilde{\mathbf{n}}] \mathbf{r} = \mathbf{A}(\phi, \mathbf{n}) \mathbf{r}$$

donde el producto cruzado $\tilde{\mathbf{v}}$ de un vector $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}^T$ se define con el operador lineal

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los parámetros de Euler se emplean ampliamente en la representación de rotaciones y se definen para una matriz de rotación \mathbf{A} como

$$\{q_0, q_1, q_2, q_3\} = \{q_0, \mathbf{q}^T\}$$

con

$$q_0 = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right), \quad \mathbf{q} = n \sin\left(\frac{\phi}{2}\right)$$

Los cuatro parámetros no son independientes entre sí, sino que cumplen la restricción

$$q_0^2 + \mathbf{q}^T \mathbf{q} = 1$$

Por lo tanto la matriz de rotación \mathbf{A} expresada en función de los parámetros de Euler, presenta la expresión

$$A(\mathbf{q}) = \left[(2q_0^2 - 1)I + 2\mathbf{q}^T \mathbf{q} + 2q_0 \tilde{\mathbf{q}} \right]$$

La rotación se puede descomponer en dos semirotaciones (figura 2-1), por lo que la matriz \mathbf{A} se puede reescribir como

$$A(\mathbf{q}) = Q(\mathbf{q})^2$$

con el operador de semirotaciones

$$Q(\mathbf{q}) = \left[q_0 I + \frac{1}{1+q_0} \mathbf{q} \mathbf{q}^T + \tilde{\mathbf{q}} \right]$$

Que satisface la condición de ortogonalidad $Q^T Q = I$, requerida a un operador rotacional.

Las sucesivas rotaciones pueden conectarse definiendo una completa rotación \mathbf{A}_n para el tiempo (n). La matriz de rotación para el siguiente paso (n+1) y para el punto intermedio (n+1/2) se escribe como

$$A_{n+1} = A_n Q_{n+\frac{1}{2}}^2, \quad A_{n+\frac{1}{2}} = A_n Q_{n+\frac{1}{2}} = A_{n+1} Q_{n+\frac{1}{2}}^T$$

La derivada del vector de rotación adopta la expresión

$$\dot{A} = A \tilde{\omega}$$

donde $\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}^T$ es el vector velocidad angular de rotación

2.1.2 Cinemática

Se considera un cuerpo flexible (figura 2-2) moviéndose libremente por el espacio.

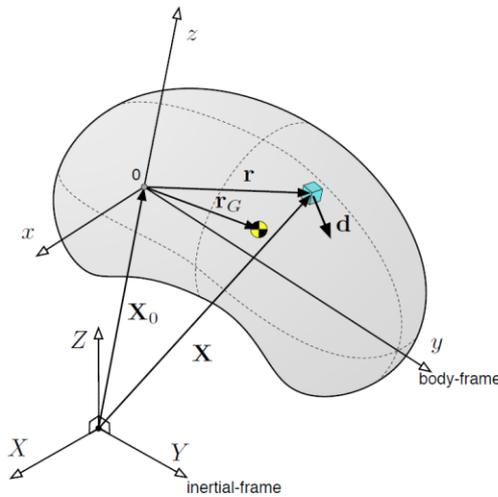


Figura 2-2. Ejes globales y ejes locales

Se establecen dos sistemas de referencia: en letras mayúsculas se define un sistema de referencia fijo (ejes globales) y en minúscula se presenta un sistema de referencia que se mueve solidariamente con el cuerpo (ejes locales). La posición de cualquier punto del cuerpo se expresa en coordenadas globales

$$X = X_0 + A(r + d)$$

donde

- X_0 : vector de posición (coordenadas globales) de un punto fijo 0 en la situación no-deformada
- A : Matriz de rotación
- r : vector de posición (coordenadas locales) del punto en su situación no-deformada
- d : es el vector desplazamiento deformacional

Derivando X con respecto al tiempo se obtiene sucesivamente la velocidad y la aceleración de la partícula

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \dot{X}_0 + A \tilde{\omega}(r + d) + A \dot{d} \\ \ddot{X} &= \ddot{X}_0 + A \tilde{\omega}^2(r + d) + A \dot{\tilde{\omega}}(r + d) + 2A \tilde{\omega} \dot{d} + A \ddot{d} \end{aligned}$$

No obstante con la hipótesis de pequeñas deformaciones las expresiones anteriores se pueden simplificar

$$X = X_0 + A(r + d)$$

$$\dot{X} = \dot{X}_0 + A\dot{d} - A\tilde{r}\omega$$

$$\ddot{X} = \ddot{X}_0 + A\ddot{d} - A\tilde{r}\dot{\omega} + A\tilde{\omega}^2 r + 2A\tilde{\omega}\dot{d}$$

Dado un desplazamiento virtual $(\delta X_0, \delta\theta, \delta d)$, se expresa el desplazamiento virtual total

$$\delta X = \delta X_0 - A\tilde{r}\delta\theta + A\delta d$$

donde θ es el vector de rotación en coordenadas locales

2.1.3 Descomposición del desplazamiento total

Se considera una subestructura (figura 2-3) en un espacio de dimensión $n_d = 2,3$, discretizada mediante una malla de $e = 1 \cdots n_e$ elementos finitos con $i = 1 \cdots n_n$ nodos.

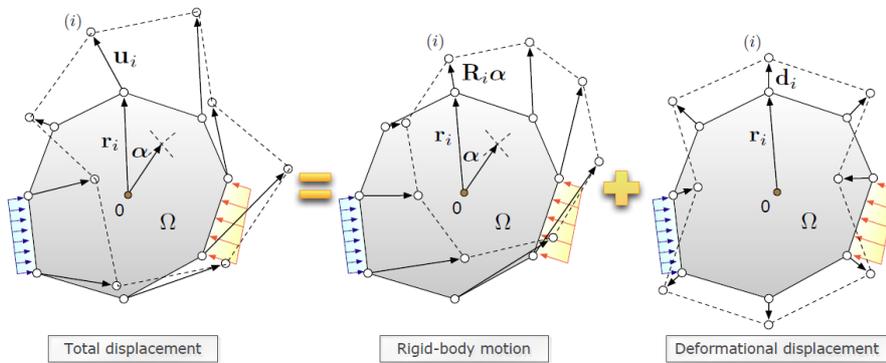


Figura 2-3. Descomposición del desplazamiento en movimiento del sólido rígido y desplazamiento deformacional

Un nodo i con vector de posición $r_i \in \mathbb{R}^{n_d}$ relativa al centro de rotación 0 , presentará un total desplazamiento $u_i \in \mathbb{R}^{n_d}$ que se expresa como suma de un desplazamiento deformacional d_i y de un movimiento como sólido rígido $\alpha_i = R_i \alpha$, definido por una submatriz nodal de modos de sólido rígido.

$$R_i = [R_{ii} - R_{ri}] = [I - \tilde{r}_i]$$

donde

- $R_{ti} = I \in R^{n_d \times n_d}$ son los n_d modos de traslación
- $R_{ri} = -\tilde{r}_i \in R^{n_d \times n_r}$ contiene los n_r modos de rotación ($n_r = 1$ en 2D y $n_r = 3$ en 3D).

Al agrupar todas las componentes nodales en un vector global, el desplazamiento total de la subestructura se expresa como una componente de deformación pura más otra de sólido rígido.

$$u = d + R \alpha$$

donde

- $u \in R^n$ con $n = n_n \cdot n_d$ son los desplazamientos nodales
- $d \in R^n$ representa el vector de desplazamiento deformacional
- $\alpha \in R^n$ vector que recoge las amplitudes de los movimientos $n_\alpha = n_r + n_d$ de sólido rígido
- $R \in R^{n \times n_\alpha}$ matriz de sólido rígido (*Felippa and Park*)

$$R^T = \begin{bmatrix} R_1^T & \dots & R_n^T \end{bmatrix}$$

Para separar del desplazamiento total la contribución de sólido rígido y la deformacional, se emplea el operador

$$P = I - M R M_\alpha^{-1} R^T$$

donde

- M es una matriz simétrica definida positiva
- $M_\alpha = R^T M R$ es la matriz de masa.

El operador presenta las propiedades

$$P^T R = 0, \quad P M R = 0$$

Permitiendo separar deformación pura y movimiento de sólido rígido con las siguientes expresiones

$$d = P^T u, \quad R \alpha = (I - P^T) u$$

Resulta útil separar, para la subestructura completa, la matriz R en sus componentes traslacional y rotacional

$$R = \begin{bmatrix} R_t & R_r \end{bmatrix}$$

con $R_t \in R^{n \times n_d}$ y $R_r \in R^{n \times n_r}$.

Discretizando mediante elementos finitos, se define la matriz de interpolación $N \in R^{n_d \times n}$, tal que

$$N R_t = I \quad N R_r = -\tilde{r}$$

2.1.4 Formulación variacional

El trabajo virtual total del sistema completo se obtiene sumando la contribución de cada subestructura y la contribución de las restricciones

$$\delta W_T = \delta W_i + \delta W_d + \delta W_f + \delta W_c$$

2.1.4.1 Trabajo virtual de las fuerzas de inercia

El trabajo virtual de las fuerzas de inercia se obtiene integrando la expresión

$$\delta W_i = \int_V \rho \ddot{X} \cdot \delta X \, dV$$

Introduciendo la discretización de elementos finitos se consigue

$$\delta W_i = \left\{ \begin{array}{c} \delta d \\ A^T \delta X_0 \\ \delta \theta \end{array} \right\}^T \left\{ \int_V \rho \begin{bmatrix} N^T N & N^T & -N^T \tilde{r} \\ N & I & -\tilde{r} \\ -\tilde{r}^T N & -\tilde{r}^T & \tilde{r}^T \tilde{r} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{d} \\ A^T \ddot{X}_0 \\ \dot{\omega} \end{array} \right\} dV + \int_V \rho \begin{bmatrix} N^T \\ I \\ -\tilde{r}^T \end{bmatrix} \left(\tilde{\omega}^2 r + 2 \tilde{\omega} N \dot{d} \right) dV \right\}$$

y reescribiendo

$$\delta W_i = \left\{ \begin{array}{c} \delta d \\ A^T \delta X_0 \\ \delta \theta \end{array} \right\}^T \left\{ \begin{bmatrix} M & S_t & S_r \\ S_t^T & M_t & M_c \\ S_r^T & M_c^T & M_r \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{d} \\ A^T \ddot{X}_0 \\ \dot{\omega} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} g_d^{cen}(\omega) \\ m \tilde{\omega}^2 r_G \\ \tilde{\omega} M_r \omega \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} g_d^{cor}(\omega, \dot{d}) \\ g_i^{cor}(\omega, \dot{d}) \\ g_r^{cor}(\omega, \dot{d}) \end{array} \right\} \right\}$$

donde

- m es la masa total del cuerpo
- r_G es el vector de posición del centro de gravedad del cuerpo en coordenadas locales
- $M_t = m I_3$ es la matriz (3x3) de masa traslacional

- M_r es el tensor (3x3) de inercia
- $M_c = -m \tilde{r}_G$ es la matriz (3x3) traslación-rotación
- $M = \int_V \rho N^T N dV$ es la matriz de masa del elemento finito

además están los términos

$$S_t = \int_V \rho N^T dV, \quad S_r = \int_V \rho N^T \tilde{r}^T dV$$

las componentes de velocidad debidas a la fuerza centrífuga y a Coriolis

$$g_d^{cen}(\omega) = \int_V \rho N^T \tilde{\omega}^2 r dV, \quad g_d^{cor}(\omega, \dot{d}) = 2 \int_V \rho N^T \tilde{\omega} N \dot{d} dV$$

y finalmente las contribuciones de la aceleración de Coriolis a la traslación y la rotación de sólido rígido

$$g_t^{cor}(\omega, \dot{d}) = 2 \tilde{\omega} S_t^T \dot{d}, \quad g_r^{cor}(\omega, \dot{d}) = 2 \int_V \rho \tilde{r} \tilde{\omega} N \dot{d} dV$$

Recordando que ($N R_t = I$) y ($N R_r = -\tilde{r}$) se establecen la relaciones

$$\begin{aligned} S_t &= M R_t & S_r &= M R_r \\ M_t &= R_t^T M R_t, & M_r &= R_r^T M R_r, & M_c &= R_t^T M R_r \end{aligned}$$

Empleando el operador $P = I - M R M_\alpha^{-1} R^T$, se llega a la expresión final del trabajo virtual de las fuerzas de inercia

$$\delta W_i = \begin{Bmatrix} \delta d \\ A^T \delta X_0 \\ \delta \theta \end{Bmatrix}^T \left\{ \begin{bmatrix} M_p & 0 & 0 \\ 0 & M_t & M_c \\ 0 & M_c^T & M_r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{d} \\ A^T \ddot{X}_0 \\ \dot{\omega} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P M \tilde{\Omega} R_r \omega \\ m \tilde{\omega}^2 r_G \\ \tilde{\omega} M_r \omega \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2 P \tilde{\Omega} M \dot{d} \\ 0 \\ 2 R_r^T \tilde{\Omega} M \dot{d} \end{Bmatrix} \right\}$$

con $M_p = P M P^T$, $\tilde{\Omega} = \text{diag}(\tilde{\omega})$

Si se asume que el sistema de referencia del cuerpo se encuentra en el centro de gravedad $r_G=0$ y la expresión anterior se reduce a

$$\delta W_i = \delta X_0^T \left\{ M_t \ddot{X}_0 \right\} + \delta \theta^T \left\{ M_r \dot{\omega} + \tilde{\omega} M_r \omega + 2 R_r^T \tilde{\Omega} M \dot{d} \right\} + \delta d^T \left\{ M_p \ddot{d} + P \left(M \tilde{\Omega} R_r \omega + 2 \tilde{\Omega} M \dot{d} \right) \right\}$$

2.1.4.2 Trabajo virtual de las deformaciones

El trabajo virtual debido a las deformaciones elásticas se describe asumiendo pequeños desplazamientos deformacionales, expresándose como

$$\delta W_d = \int_V \sigma : \delta \varepsilon dV$$

donde

- σ es el tensor de tensiones de Cauchy
- ε es el tensor de deformaciones

Discretizando mediante elementos finitos se llega la ecuación semidiscreta

$$\delta W_d = \delta u^T \{ K u \}$$

con \mathbf{K} matriz de rigidez del elemento finito lineal.

Introduciendo la relación $u = d + R \alpha$ y teniendo en cuenta que $K R = 0$, el trabajo virtual de las deformaciones puede ser expresado en términos de componentes deformacionales.

$$\delta W_d = \delta (P^T d)^T \{ K P^T d \} = \delta d^T \{ K d \}$$

usando la propiedad $P K P^T = K$

2.1.4.3 Trabajo virtual de las fuerzas externas

El trabajo virtual debido a las fuerzas de volumen y las tensiones en el contorno se calcula mediante

$$\delta W_f = - \int_V \rho A b \cdot \delta X dV - \int_A A t \cdot \delta X dA$$

donde

- \mathbf{b} es el vector de fuerzas de volumen por unidad de peso
- \mathbf{t} es el vector de tensiones en el contorno del cuerpo

Teniendo en cuenta que $\delta X = \delta X_0 - A \tilde{r} \delta \theta + A \delta d$

$$\delta W_f = \begin{Bmatrix} \delta d \\ A^T \delta X_0 \\ \delta \theta \end{Bmatrix}^T \left\{ - \int_V \begin{bmatrix} N^T \\ I \\ -\tilde{r}^T \end{bmatrix} \rho b dV - \int_A \begin{bmatrix} N^T \\ I \\ -\tilde{r}^T \end{bmatrix} t dA \right\}$$

Algunas fuerzas de volumen son constantes como la gravedad ($Ab = g$), en este caso, tras discretizar, la expresión anterior se pasa a la ecuación discreta

$$\delta W_f = -\delta d^T \{P f_t\} - \delta X_0^T \{M_t g + A R_t^T f_t\} - \delta \theta^T \{M_c^T A^T g + R_r^T f_t\}$$

Los vectores de fuerza nodales debidos a las fuerzas externas se calculan

$$f_b = \int_V \rho N^T b dV = M R_t b, \quad f_t = \int_A N^T t dA$$

de ahí que en la expresión discreta del trabajo virtual de las fuerzas externas desaparezca el vector constante $f_b = M R_t b$, debido a $P f_b = 0$

2.1.4.4 Trabajo virtual de las restricciones

Se considera el caso de la unión entre dos cuerpos flexibles (figura 2-4).

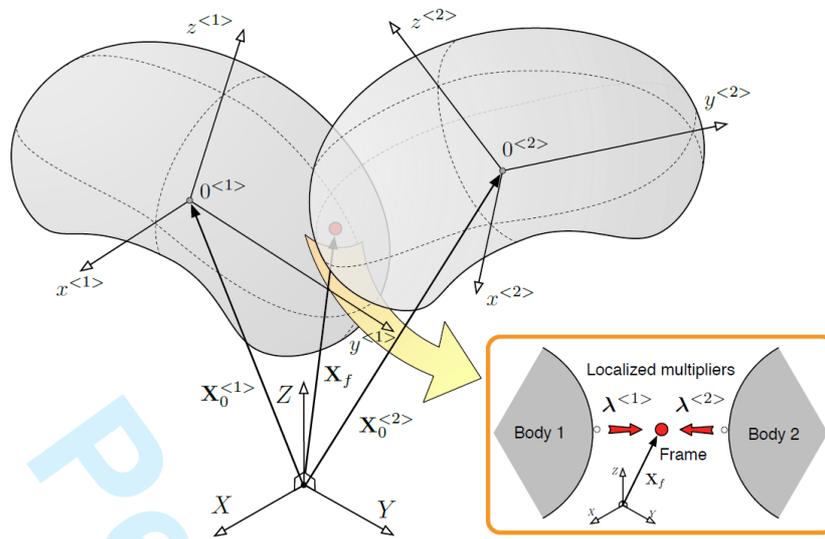


Figura 2-4. Subestructuras flexibles conectadas a un frame intermedio

Para obtener una formulación particionada del problema se trabaja la conexión mediante multiplicadores de Lagrange localizados, que genera multiplicadores independientes para cada subestructura. Se introduce una representación explícita de la interfaz, llamada *frame*, que conlleva añadir grados de libertad adicionales para representarla (figura 2-4).

El trabajo virtual de las restricciones se obtiene del producto de los multiplicadores por la condición de compatibilidad.

$$\delta W_c = \int_{\Gamma_c} \delta \{ (A \lambda) \cdot (X - X_f) \} dV$$

donde

- λ representa el multiplicador localizado de Lagrange de cada subestructura.
- \mathbf{X} es la posición del punto de conexión
- \mathbf{X}_f es la localización del frame

Tras la discretización la ecuación pasa a

$$\delta W_c = \delta \{ \tilde{\lambda}^T [B^T (R_i A^T X_0 + r + P^T d) - A^T L_f X_f] \}$$

donde

- \mathbf{B} es una matriz booleana usada para extraer los grados de libertad de los nodos del contorno del vector desplazamiento
- \mathbf{X}_f es una matriz booleana de correspondencia entre los grados de libertad del frame y los grados de libertad de la subestructura

Desarrollando la expresión anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \delta W_c = & \delta \tilde{\lambda}^T \{ B^T (R_i A^T X_0 + r + P^T d) - A^T L_f X_f \} + \delta X_0^T \{ A R_i^T B \lambda \} + \delta \theta^T \{ \tilde{\lambda} (B^T R_i A^T X_0 - A^T L_f X_f) \} \\ & + \delta d^T \{ B_p \lambda \} - \delta X_f^T \{ L_f^T A \lambda \} \end{aligned}$$

con $B_p = P B$. Finalmente el término no lineal asociado a $\delta \theta^T$ se simplifica usando la ecuación de la restricción y asumiendo pequeñas deformaciones

$$\begin{aligned} \delta W_c = & \delta \tilde{\lambda}^T \{ B^T (R_i A^T X_0 + r + P^T d) - A^T L_f X_f \} + \delta X_0^T \{ A R_i^T B \lambda \} + \delta \theta^T \{ R_i^T B \lambda \} \\ & + \delta d^T \{ B_p \lambda \} - \delta X_f^T \{ L_f^T A \lambda \} \end{aligned}$$

2.1.5 Ecuaciones del movimiento

El trabajo total de un sistema particionado de elementos finitos sujeto a grandes rotaciones y pequeñas deformaciones, responde a

$$\begin{aligned} \delta W_T = & \delta d^T \left\{ M_p \ddot{d} + K d + B_p \lambda + P M \tilde{\Omega} R_r \omega + 2 P \tilde{\Omega} M \dot{d} - P f_t \right\} \\ & + \delta \tilde{\lambda}^T \left\{ B^T (R_i A^T X_0 + r + P^T d) - A^T L_f X_f \right\} + \delta X_0^T \left\{ M_i \ddot{X}_0 + A R_i^T B \lambda - M_i g - A R_i^T f_t \right\} \\ & + \delta \theta^T \left\{ M_r \dot{\omega} + \tilde{\omega} M_r \omega + R_r^T B \lambda + 2 R_r^T \tilde{\Omega} M \dot{d} - R_i^T f_t \right\} - \delta X_f^T \{ L_f^T A \lambda \} \end{aligned}$$

con las correspondientes ecuaciones de movimiento

$$\begin{bmatrix} \left(M_p \frac{d^2}{dt^2} + K \right) & B_p & 0 & 0 & 0 \\ B_p^T & 0 & B^T R_t A^T & 0 & -A^T L_f \\ 0 & A R_t^T B & M_t \frac{d^2}{dt^2} & 0 & 0 \\ 0 & R_r^T B & 0 & M_r \frac{d}{dt} & 0 \\ 0 & -L_f^T A & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ \lambda \\ X_0 \\ \omega \\ X_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P \left(f_t - M \tilde{\Omega} R_r \dot{d} \right) \\ -B_r^T \\ M_t g + A R_t^T f_t \\ R_t^T f_t - \tilde{\omega} M_r \omega - 2 R_r^T \tilde{\Omega} M \dot{d} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Se recoge a modo de esquema las relaciones entre las ecuaciones de movimiento (figura 2-5).

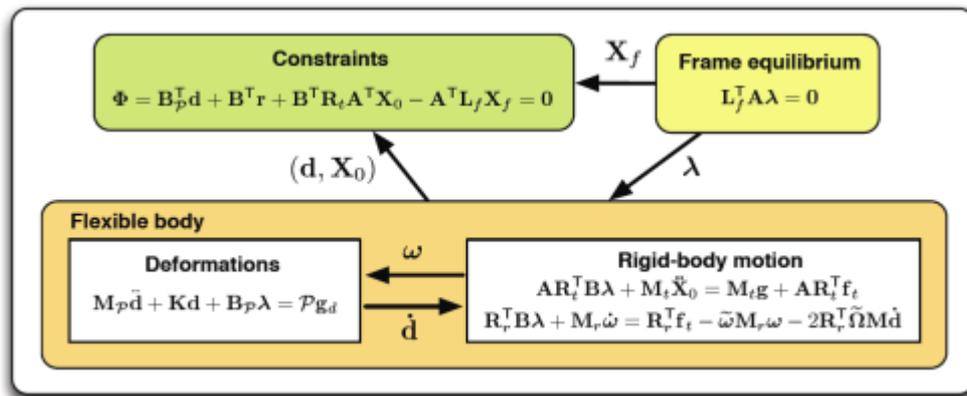


Figura 2-5. Relación entre las ecuaciones del movimiento

2.1.6 Integración de las ecuaciones del movimiento

Se propone un método híbrido (trapezoidal-punto medio) de integración. Empleando el mismo paso de tiempo para ambos métodos, las variables dependientes de la deformación en $(n + \frac{1}{2})$ serán función de los valores conocidos en el paso anterior $(n - \frac{1}{2})$. Por otra parte las variables dependientes del sólido rígido en el punto medio se expresan como función de las variables no conocidas en $(n + 1)$ y las conocidas en $(n - 1)$.

2.1.6.1 Integración de los desplazamientos deformacionales (trapezoidal rule)

La primera ecuación del movimiento representa las ecuaciones de deformación del movimiento.

$$M_p \ddot{d} + Kd + B_p \lambda = P g_d$$

$$g_d = f_t - M \tilde{\Omega} R_r \omega - 2 \tilde{\Omega} M \dot{d}$$

Empleando el método Newmark particularizado para el instante $(n + \frac{1}{2})$ para integrar los desplazamientos deformacionales de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{d}^{n+\frac{1}{2}} &= \dot{d}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \left[(1-\gamma) \ddot{d}^{n-\frac{1}{2}} + \gamma \ddot{d}^{n+\frac{1}{2}} \right] \\ d^{n+\frac{1}{2}} &= d^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \dot{d}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{d}^{n-\frac{1}{2}} + \beta \ddot{d}^{n+\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

donde

- $\left(\gamma = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{4} \right)$ son los parámetros del tiempo de integración
- Δt es el paso de tiempo

Resulta por lo tanto la siguiente ecuación discretizada

$$\begin{aligned} \bar{K}_P d^{n+\frac{1}{2}} + B_P \lambda^{n+\frac{1}{2}} &= P g_d^{n+\frac{1}{2}} \\ \bar{K}_P &= P K_d P^T, \quad K_d = \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} M + K \right] \\ \frac{-n+\frac{1}{2}}{g_d} &= g_d^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} M P^T \left\{ d^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \dot{d}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^2 \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{d}^{n-\frac{1}{2}} \right\} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $P K_d P^T = K_d P^T$ y la propiedad del operador $P P = I$, los desplazamientos deformacionales adoptan la forma

$$P^T d^{n+\frac{1}{2}} = \bar{F} \left(\frac{-n+\frac{1}{2}}{g_d} - B \lambda^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

con $\bar{F} = P^T K_d^{-1} P = K_d^{-1} - \beta \Delta t^2 R M_\alpha^{-1} R^T$, como matriz dinámica de flexibilidad.

2.1.6.2 Integración de los desplazamientos de sólido rígido (midpoint rule)

Los desplazamientos de sólido rígido se integran con

$$X_0^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(X_0^{n+1} + X_0^n)$$

$$\dot{X}_0^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}(X_0^{n+1} - X_0^n)$$

$$\ddot{X}_0^{n+\frac{1}{2}} = \frac{2}{\Delta t^2}(X_0^{n+1} - X_0^n) - \frac{2}{\Delta t}\dot{X}_0^n$$

y sustituyendo en la tercera ecuación del movimiento $A R_t^T B \lambda + M_t \ddot{X}_0 = M_t g + A R_t^T f_t$ se obtiene

$$\frac{2}{\Delta t^2} M_t X_0^{n+1} + A_{n+\frac{1}{2}} R_t^T B \lambda^{n+\frac{1}{2}} = b_t^{n+\frac{1}{2}}$$

$$b_t^{n+\frac{1}{2}} = M_t g + A_{n+\frac{1}{2}} R_t^T f_t^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\Delta t^2} M_t \left(X_0^n + \Delta t \dot{X}_0^n \right)$$

2.1.6.3 Integración de las rotaciones (midpoint rule)

Se sigue un proceso análogo del epígrafe anterior, empleando el método del punto medio para derivar la matriz de rotación

$$\dot{A}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}(A_{n+1} - A_n)$$

Usando $\dot{A} = A \tilde{\omega}$ para conseguir la aproximación de la velocidad de rotación

$$\tilde{\omega}^{n+\frac{1}{2}} = A_{n+\frac{1}{2}}^T \dot{A}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t} \left(Q_{n+\frac{1}{2}} - Q_{n+\frac{1}{2}}^T \right) = \frac{2}{\Delta t} \tilde{q}^{n+\frac{1}{2}}$$

La velocidad y la aceleración de rotación se aproximan por

$$\omega^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\omega^{n+1} + \omega^n) = \frac{2}{\Delta t} q^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\dot{\omega}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta t}(\omega^{n+1} - \omega^n) = \frac{4}{\Delta t^2}q^{n+\frac{1}{2}} - \frac{2}{\Delta t}\omega^n$$

Y sustituyendo en la cuarta ecuación del movimiento $R_t^T B \lambda + M_r \ddot{\omega} = R_t^T f_t - \tilde{\omega} M_r \omega - 2R_t^T \tilde{\Omega} M \dot{d}$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{4}{\Delta t^2} M_r q^{n+\frac{1}{2}} + R_r^T B \lambda^{n+\frac{1}{2}} &= b_r^{n+\frac{1}{2}} \\ b_r^{n+\frac{1}{2}} &= R_r^T f_t^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{\Delta t} M_r \omega^n - \frac{4}{\Delta t^2} \tilde{q}^{n+\frac{1}{2}} M_r q^{n+\frac{1}{2}} - 2R_r^T \tilde{\Omega}^{n+\frac{1}{2}} M \dot{d}^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

2.1.6.4 Imposición de las restricciones

Las ecuaciones de restricciones vienen de la segunda ecuación de movimiento

$$\Phi = B_p^T d + B^T r + B^T R_t A^T X_0 - A^T L_f X_f = 0$$

derivando

$$\dot{\Phi} = B_p^T \dot{d} + B^T R_t A^T \dot{X}_0 + B^T R_r \omega + B^T \tilde{\Omega} d - L_f A^T \dot{X}_f = 0$$

y teniendo los desarrollos de $\dot{d}^{n+\frac{1}{2}}$, $d^{n+\frac{1}{2}}$, $\ddot{X}_0^{n+\frac{1}{2}}$ y $\omega^{n+\frac{1}{2}}$ calculados anteriormente se alcanza la ecuación de restricción discretizada en $(n + \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} B_p^T d^{n+\frac{1}{2}} + B^T R_t A_{n+\frac{1}{2}}^T X_0^{n+1} + 2B^T R_r q^{n+\frac{1}{2}} - L_f A_{n+\frac{1}{2}}^T X_f^{n+1} &= g_\Phi^{n+\frac{1}{2}} \\ g_\Phi^{n+\frac{1}{2}} &= B^T \left\{ \frac{\gamma}{\beta} d^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{\beta} \right) \dot{d}^{n-\frac{1}{2}} - \Delta t^2 \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{d}^{n-\frac{1}{2}} \right\} - \Delta t B^T \tilde{\Omega}^{n+\frac{1}{2}} d^{n+\frac{1}{2}} \\ &+ B^T R_r A_{n+\frac{1}{2}}^T X_0^n - L_f A_{n+\frac{1}{2}}^T X_f^n \end{aligned}$$

2.1.6.5 Ecuación de la flexibilidad particionada

Finalmente se suprimen los desplazamientos deformacionales de la ecuación $B_p^T d^{n+\frac{1}{2}} + B^T R_t A_{n+\frac{1}{2}}^T X_0^{n+1} + 2 B^T R_r q^{n+\frac{1}{2}} - L_f A_{n+\frac{1}{2}}^T X_f^{n+1} = g_\Phi^{n+\frac{1}{2}}$ usando la relación de flexibilidad

$$P^T d^{n+\frac{1}{2}} = \bar{F} \left(\bar{g}_d^{n+\frac{1}{2}} - B \lambda^{n+\frac{1}{2}} \right) \text{ y reescribiendo queda}$$

$$-\bar{F}_{bb} \lambda^{n+\frac{1}{2}} + B^T R_t A_{n+\frac{1}{2}}^T X_0^{n+1} + 2 B^T R_r q^{n+\frac{1}{2}} - A_{n+\frac{1}{2}}^T L_f X_f^{n+1} = b_\lambda^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\bar{F}_{bb} = B^T \bar{F} B, \quad b_\lambda^{n+\frac{1}{2}} = g_\Phi^{n+\frac{1}{2}} - B^T \bar{F} \bar{g}_d^{n+\frac{1}{2}}$$

Tras discretizar las ecuaciones de movimiento se vuelven a mostrar en forma de matriz

$$\begin{bmatrix} -\bar{F}_{bb} & B^T R_t A_{n+\frac{1}{2}}^T & B^T R_r & -A_{n+\frac{1}{2}}^T L_f \\ A_{n+\frac{1}{2}} R_t^T B & \frac{2}{\Delta t^2} M_t & 0 & 0 \\ R_r^T B & 0 & \frac{2}{\Delta t^2} M_r & 0 \\ -L_f^T A_{n+\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda^{n+\frac{1}{2}} \\ X_0^{n+1} \\ 2 q^{n+\frac{1}{2}} \\ X_f^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_\lambda \\ b_t \\ b_r \\ 0 \end{Bmatrix}^{n+\frac{1}{2}}$$

De cara a cerrar el proceso de solución, tras resolver las ecuaciones particionada de movimiento para $(\lambda^{n+\frac{1}{2}}, X_0^{n+1}, q^{n+\frac{1}{2}}, X_f^{n+1})$, las deformaciones de las subestructuras para $(n + \frac{1}{2})$ se calculan mediante

$P^T d^{n+\frac{1}{2}} = \bar{F} \left(\bar{g}_d^{n+\frac{1}{2}} - B \lambda^{n+\frac{1}{2}} \right)$. Las velocidades y aceleraciones deformacionales son obtenidas con

$$\dot{d}^{n+\frac{1}{2}} = \dot{d}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \left[(1-\gamma) \ddot{d}^{n-\frac{1}{2}} + \gamma \ddot{d}^{n+\frac{1}{2}} \right] \text{ y } d^{n+\frac{1}{2}} = d^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t \dot{d}^{n-\frac{1}{2}} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{d}^{n-\frac{1}{2}} + \beta \ddot{d}^{n+\frac{1}{2}} \right]$$

Para finalizar y así obtener una solución completa para el instante $(n + 1)$ en desplazamientos, rotaciones y velocidades, se integran las ecuaciones de momento mediante el método del punto medio, dando las velocidades de sólido rígido

$$\dot{X}_0^{n+1} = \dot{X}_0^n + \Delta t g + \Delta t M_t^{-1} A_{n+\frac{1}{2}} R_t^T \left(f_t^{n+\frac{1}{2}} - B \lambda^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\omega^{n+1} = \omega^n + \Delta t M_r^{-1} \left\{ R_r^T \left(f_t^{n+\frac{1}{2}} - B \lambda^{n+\frac{1}{2}} \right) - \bar{\omega}^{n+\frac{1}{2}} M_r \omega^{n+\frac{1}{2}} - 2 R_r^T \bar{\Omega}^{n+\frac{1}{2}} M \dot{d}^{n+\frac{1}{2}} \right\}$$

2.1.7 Linealización de las ecuaciones de movimiento

El residuo de la ecuación no lineal discretizada

$$\begin{bmatrix} -\bar{F}_{bb} & B^T R_t A^T_{n+\frac{1}{2}} & B^T R_r & -A^T_{n+\frac{1}{2}} L_f \\ A_{n+\frac{1}{2}} R_t^T B & \frac{2}{\Delta t^2} M_t & 0 & 0 \\ R_r^T B & 0 & \frac{2}{\Delta t^2} M_r & 0 \\ -L_f^T A_{n+\frac{1}{2}} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda^{n+\frac{1}{2}} \\ X_0^{n+1} \\ 2q^{n+\frac{1}{2}} \\ X_f^{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_\lambda \\ b_t \\ b_r \\ 0 \end{Bmatrix}^{n+\frac{1}{2}}$$

se expresa en función del vector de incógnitas $\Lambda = (\lambda, X_0, 2q, X_f)^T$ como sigue

$$r(\Lambda) = \begin{Bmatrix} b_\lambda + \bar{F}_{bb} \lambda - B^T R_t A^T X_0 + A^T L_f X_f - 2 B^T R_r q \\ b_t - A R_t^T B \lambda - \frac{2}{\Delta t^2} M_t X_0 \\ b_r - R_r^T B \lambda - \frac{4}{\Delta t^2} M_r q \\ L_f^T A \lambda \end{Bmatrix}$$

Se recurre al método de Newton-Raphson para resolver el sistema no lineal.

$$r(\Lambda) = r(\Lambda_{(i)}) + \frac{\partial r(\Lambda_{(i)})}{\partial \Lambda} \Delta \Lambda_{(i)} + O(\Delta \Lambda^2)$$

La solución de la ecuación $r(\Lambda) = 0$ para el incremento $\Delta \Lambda_{(i)} = \Lambda_{(i+1)} - \Lambda_{(i)}$ emplea el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{bb} & -B^T R_t A^T & -B^T R_r + \Delta_{\lambda q} & A^T L_f \\ -A R_t^T B & -\frac{2}{\Delta t^2} M_t & \Delta_{0q} & 0 \\ -R_r^T B & 0 & -\frac{2}{\Delta t^2} M_r + \Delta_{qq} & 0 \\ L_f^T A & 0 & \Delta_{fq} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \lambda \\ \Delta X_0 \\ 2\Delta q \\ \Delta X_f \end{Bmatrix}_{(i)} = -r(\Lambda_{(i)})$$

con los términos rotacionales

$$\Delta_{\lambda q} = -B^T R_t^T \tilde{v}_1 + L_f \tilde{v}_2, \quad \Delta_{0q} = -A \tilde{v}_3, \quad \Delta_{qq} = \frac{2}{\Delta t^2} (\tilde{v}_4 - \tilde{q} M_r), \quad A_f^q = -L_f^T A \tilde{\lambda}$$

$$v_1 = A^T X_0, \quad v_2 = A^T X_f, \quad v_3 = R_t^T (f_t - B), \quad v_4 = M_r q \lambda$$

2.2 Sistema de cables de amarre

2.2.1 Modelo

Los sistemas de cables de amarre se emplean para mantener en equilibrio estable estructuras flotantes frente a la acción del viento, las olas del mar y las corrientes marinas. Los cables que componen el sistema de amarre pueden estar constituidos de cadenas, cables de acero e incluso fibras sintéticas.

La tensión que reciben los cables depende de:

- Desplazamiento horizontal de la estructura flotante
- Peso del cable
- Rigidez del cable
- Disposición geométrica del sistema de cableado

Cuando la estructura flotante se mueve debido a una sollicitación no estática (viento, mar etc), el sistema de amarre ejerce una reacción que conlleva una variación en la tensión de los cables. Esta respuesta de los cables es generalmente no lineal.

Para resolver esta respuesta del sistema de amarre se usa una aproximación cuasi-estática. En cada paso del proceso de cálculo, una vez que los desplazamientos de la estructura flotante son conocidos, se calcula las tensiones y las configuraciones geométricas de cada cable, asumiendo que cada cable está en equilibrio estático en cada instante. Las fuerzas de reacción resultantes de los amarres son añadidas al total de las cargas que actúan sobre la estructura flotante, volviendo a resolverse el problema hasta alcanzar la convergencia.

En cada paso de tiempo se usa el método de Newton-Raphson para resolver el sistema no lineal de ecuaciones que describe la respuesta del sistema de amarre. A continuación se presenta la formulación que gobierna el proceso de respuesta de los cables de amarre.

2.2.2 Formulación

La formulación elástica de la catenaria que se desarrolla seguidamente es similar a la presentada por *Jonkman* en [2].

Cada cable de amarre se analiza en un sistema de coordenadas local con origen en el anclaje del cable al lecho marino (figura 2-6). El eje local z es vertical, mientras que el eje local x recorre horizontalmente la dirección que une el anclaje del cable al lecho marino (anchor) con el punto de sujeción del cable a la estructura (fairlead). Por lo tanto la posición relativa del punto de la estructura donde está sujeto el cable viene determinada por la coordenadas locales x_F y z_F .

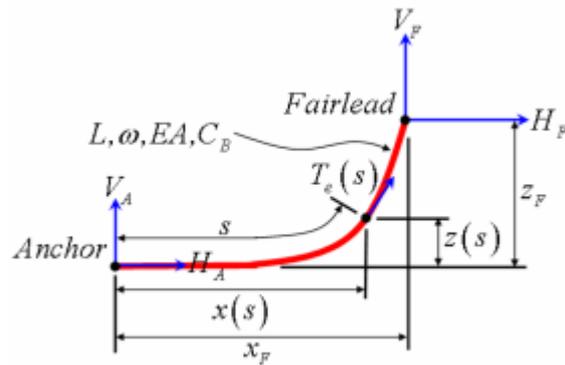


Figura 2-6. Cable de amarre en sistema de coordenadas local

La formulación analítica del proceso de amarre viene dado por dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas. Las incógnitas son las componentes horizontal y vertical de la tensión del cable en el punto de sujeción con la estructura, H_F y V_F .

$$x_F(H_F, V_F) = \frac{H_F}{\omega} \left(\ln \left[\frac{V_F}{H_F} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_F}{H_F} \right)^2} \right] - \ln \left[\frac{V_F - \omega L}{H_F} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_F - \omega L}{H_F} \right)^2} \right] \right) + \frac{H_F L}{EA}$$

$$z_F(H_F, V_F) = \frac{H_F}{\omega} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_F}{H_F} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_F - \omega L}{H_F} \right)^2} \right) + \frac{V_F L - \frac{\omega L^2}{2}}{EA}$$

donde

- ω peso del cable en el agua por unidad de longitud
- L longitud de cable
- EA rigidez del cable

Cuando parte del cable descansa sobre el lecho marino, las dos ecuaciones no lineales se modifican, adoptando la expresión que sigue

$$x_F(H_F, V_F) = L - \frac{V_F}{\omega} + \frac{H_F}{\omega} \ln \left[\frac{V_F}{H_F} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_F}{H_F} \right)^2} \right] + \frac{H_F L}{EA} + \frac{C_B \omega}{2 EA} \left[- \left(L - \frac{V_F}{\omega} \right)^2 + \left(L - \frac{V_F}{\omega} - \frac{H_F}{C_B \omega} \right) \text{MAX} \left(L - \frac{V_F}{\omega} - \frac{H_F}{C_B \omega}, 0 \right) \right]$$

$$z_F(H_F, V_F) = \frac{H_F}{\omega} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_F}{H_F} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_F - \omega L}{H_F} \right)^2} \right) + \frac{V_F L - \frac{\omega L^2}{2}}{EA}$$

$$L_B = L - \frac{V_F}{\omega}$$

donde

- L_B es la longitud de cable que descansa sobre el lecho marino
- C_B representa la proporción de L_B que sufre fricción estática

La fricción estática del lecho marino se modela como una fuerza de rozamiento por unidad de longitud.

El sistema no lineal de ecuaciones en H_F y V_F se resuelve mediante Newton-Raphson, partiendo de las propiedades del cable (L , ω , EA y C_B) y la posición del *fairlead* (x_F y z_F). Al inicio de cada paso se toma como valores de partida de H_F y V_F los del paso anterior. En el paso inicial se parte de los valores H_F^0 y V_F^0 siguientes

$$H_F^0 = \left| \frac{\omega x_F}{2 \lambda_0} \right|$$

$$V_F^0 = \frac{\omega}{2} \left| \frac{z_F}{\tanh(\lambda_0)} + L \right|$$

donde el parámetro adimensional λ_0 depende de la configuración inicial del cable

$$\lambda_0 = \begin{cases} 1000000 & \text{para } x_F = 0 \\ 0.2 & \text{para } \sqrt{x_F^2 + z_F^2} \geq L \\ \sqrt{3 \left(\frac{L^2 - z_F^2}{x_F^2} - 1 \right)} & \text{el resto de casos} \end{cases}$$

Una vez calculada la tensión en el extremo de cable sujeto a la estructura (H_F y V_F), obtener la tensión en el anclaje del cable al lecho marino (H_A y V_A) es directo mediante equilibrio de fuerzas externas. En el caso de que el cable no descansa sobre el lecho marino la expresión es

$$H_A = H_F$$

$$V_A = V_F - \omega L$$

mientras que para el caso de que sí haya rozamiento cable-lecho marino.

$$H_A = \text{MAX} (H_F - C_B \omega L_B, 0)$$

$$V_A = 0$$

En cuanto a la tensión efectiva ($T(s)$) y a las coordenadas ($x(s)$ y $z(s)$) de un punto cualquiera del cable situado a una distancia s del anclaje en el lecho marino se deducen las siguientes ecuaciones. En primer lugar para la situación de que el cable no descansa sobre el lecho marino.

$$x(s) = \frac{H_F}{\omega} \left(\ln \left[\frac{V_A + \omega s}{H_F} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_A + \omega s}{H_F} \right)^2} \right] - \ln \left[\frac{V_A}{H_F} + \sqrt{1 + \left(\frac{V_A}{H_F} \right)^2} \right] \right) + \frac{H_F s}{EA}$$

$$z(s) = \frac{H_F}{\omega} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{V_A + \omega s}{H_F} \right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{V_A}{H_F} \right)^2} \right) + \frac{V_A s + \frac{\omega s^2}{2}}{EA}$$

$$T(s) = \sqrt{H_F^2 + (V_A + \omega s)^2}$$

Seguidamente las expresiones análogas para la situación en la que sí hay rozamiento del cable de amarre con el lecho marino.

$$x(s) = \begin{cases} s & \text{para } 0 \leq s \leq L_B - \frac{H_F}{C_B \omega} \\ s + \frac{C_B \omega}{2 EA} \left[s^2 - 2 \left(L_B - \frac{H_F}{C_B \omega} \right) s + \left(L_B - \frac{H_F}{C_B \omega} \right) \text{MAX} \left(L_B - \frac{H_F}{C_B \omega}, 0 \right) \right] & \text{para } L_B - \frac{H_F}{C_B \omega} \leq s \leq L_B \\ L_B + \frac{H_F}{\omega} \ln \left[\frac{\omega (s - L_B)}{H_F} + \sqrt{1 + \left(\frac{\omega (s - L_B)}{H_F} \right)^2} \right] + \frac{H_F s}{EA} \\ + \frac{C_B \omega}{2 EA} \left[-L_B^2 + \left(L_B - \frac{H_F}{C_B \omega} \right) \text{MAX} \left(L_B - \frac{H_F}{C_B \omega}, 0 \right) \right] & \text{para } L_B \leq s \leq L \end{cases}$$

$$z(s) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq s \leq L_B \\ \frac{H_F}{\omega} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega (s - L_B)}{H_F} \right)^2} - 1 \right) + \frac{\omega (s - L_B)^2}{2 EA} & \text{para } L_B \leq s \leq L \end{cases}$$

$$T(s) = \begin{cases} \text{MAX} (H_F + C_B \omega (s - L_B), 0) & \text{para } 0 \leq s \leq L_B \\ \sqrt{H_F^2 + (\omega (s - L_B))^2} & \text{para } L_B \leq s \leq L \end{cases}$$

2.3 Teoría del oleaje

El oleaje es un agente fundamental a la hora de diseñar cualquier obra marítima y en concreto una estructura offshore. Se presenta a continuación una pequeña síntesis de teoría de olas.

El mecanismo que genera el oleaje es el viento, que al superar un valor crítico genera olas de pequeña altura, longitud y periodo en mar abierto. El oleaje en la zona de generación se denomina mar de viento.

Con la acción continua del viento las olas crecen en altura, longitud y periodo, hasta alcanzar la situación de oleaje totalmente desarrollado.

Al abandonar el área de generación las olas de mayor periodo viajan más deprisa y se caracterizan por su mayor simetría. Su forma se aproxima bastante a una sinusoidal y recibe el nombre de mar de fondo.

Partiendo de la forma sinusoidal del mar de fondo representado con bastante exactitud por la expresión $\eta = a \cos(kx - \omega t)$, se presentan a continuación conceptos y definiciones básicas de teoría de oleaje.

Las características básicas que definen una ola son la longitud de onda λ , la altura de ola H y la profundidad h .

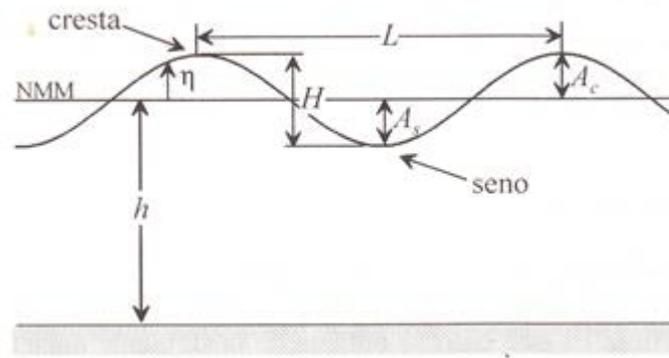


Figura 2-7. Características de una ola. (Fuente Baquerizo et. al [3])

además en el perfil se distinguen las siguientes magnitudes:

- η : elevación de la superficie libre
- A_c : amplitud de cresta
- A_s : amplitud de seno
- H : altura de ola. Si es simétrica $H=2a$
- L : longitud de onda, distancia horizontal entre dos crestas o dos senos contiguos.
- T : periodo, tiempo que transcurre entre el paso de dos crestas o dos senos contiguos por un punto fijo.

Con las magnitudes anteriores se define:

- k : número de onda $k = \frac{2\pi}{L}$
- ω : frecuencia angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$
- c : celeridad de la propagación de onda $c = \frac{\omega}{k}$
- $\frac{h}{L}$: profundidad relativa. Parámetro adimensional que indica el grado de influencia del fondo del mar en el oleaje.
 - $\frac{h}{L} > \frac{1}{2}$ *aguas profundas*. El fondo no afecta a la ola.
 - $\frac{h}{L} < \frac{1}{2}$ *aguas someras*. El fondo influye en la propagación del oleaje.

2.3.1 Olas lineales. Teoría de Airy

Para abordar el análisis del movimiento oscilatorio de las olas del mar en dos dimensiones (x, z) y conocer así sus características cinemáticas y dinámicas, se parte de las siguientes hipótesis:

- Fluido incompresible
- Flujo irrotacional
- Fluido no viscoso
- Ola de pequeña amplitud

Una vez establecidas estas hipótesis se puede definir el potencial de velocidades Φ en función de la posición (x, z) y del instante de tiempo t.

$$\Phi = \frac{a \omega}{k} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$$

El número de ola k se determina mediante la relación no lineal

$$\omega^2 = g k \tanh(kh)$$

Estas dos expresiones se emplean en aguas someras ($\frac{h}{L} < \frac{1}{2}$), ya que en el caso de aguas profundas la profundidad (h) ejerce un efecto despreciable, $\tanh(kh)$ tiende a 1.

A partir del potencial de velocidades Φ se derivan las cinemáticas que caracterizan el oleaje. El siguiente cuadro recoge las citadas propiedades tanto para el caso de *aguas someras* como para *aguas profundas*.

PROPIEDADES DE LA OLA. TEORÍA LINEAL DE OLAS (AIRY)		
Propiedad de la ola	Aguas someras $\frac{h}{L} < \frac{1}{2}$	Aguas profundas $\frac{h}{L} > \frac{1}{2}$
Elevación de la superficie	$\eta = a \cos(kx - \omega t)$	$\eta = a \cos(kx - \omega t)$
Relación de dispersión	$\omega^2 = g k \tanh(kh)$	$\omega^2 = g k$
Potencial de velocidades	$\Phi = \frac{a \omega}{k} \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$	$\Phi = \frac{a \omega}{k} e^{kz} \sin(kx - \omega t)$
Velocidad horizontal	$u = a \omega \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t)$	$u = a \omega e^{kz} \cos(kx - \omega t)$

Velocidad vertical	$w = a \omega \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$	$w = a \omega e^{kz} \sin(kx - \omega t)$
Aceleración horizontal	$a_x = a \omega^2 \frac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \sin(kx - \omega t)$	$a_x = a \omega^2 e^{kz} \sin(kx - \omega t)$
Aceleración vertical	$a_z = -a \omega^2 \frac{\sinh[k(z+h)]}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t)$	$a_z = -a \omega^2 e^{kz} \cos(kx - \omega t)$

Junto con las propiedades del oleaje ya descritas es necesario para el diseño de estructuras offshore determinar el campo de presiones generado por la ola.

El campo de presiones en un punto (x, z) , es suma de dos componentes, una parte hidrostática (p_h) debida a la columna de agua en reposo y una parte dinámica (p_d) debida al movimiento oscilatorio.

$$p = -\rho g z + \rho g \eta \frac{\cosh[k(z+h)]}{\cosh(kh)} = p_h + p_d$$

2.3.2 Olas irregulares

La teoría lineal de olas presenta una ola regular de frecuencia constante, no obstante el oleaje natural del mar es totalmente irregular. A pesar de que resulte raro que el mar muestre un perfil de ola unidireccional y sinusoidal regular, sí se aprecia en el mar una superposición de olas de diferentes longitudes, alturas y direcciones.

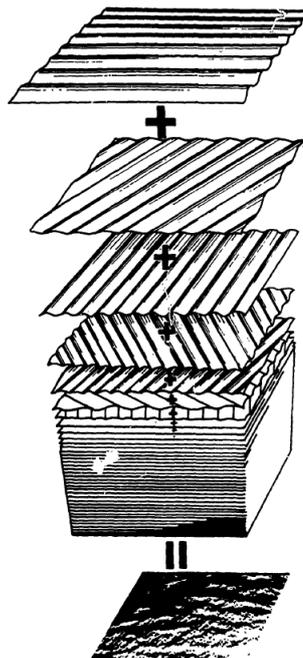


Figura 2-8. Ola irregular. Superposición de olas. (Fuente Pierson [8])

Realizar un enfoque espectral del problema como suma de olas parciales supone una solución válida a la hora de modelizar el mar. El perfil de ola irregular presenta la siguiente forma

$$\eta(t, x) = \sum_{i=1}^N a_i \cos(k_i x - \omega_i t - \varphi_i)$$

donde

- N: número total de olas superpuestas
- a_i : amplitud de la ola i -ésima
- k_i : número de onda de la ola i -ésima
- ω_i : frecuencia de la ola i -ésima
- φ_i : fase de la ola i -ésima uniformemente distribuida en el rango $(0, 2\pi)$

A la hora de calcular la amplitud a_i se emplea un espectro de densidad en frecuencia $S_{\eta\eta}(\omega)$, que representa la energía asociada a cada una de las frecuencias del oleaje irregular.

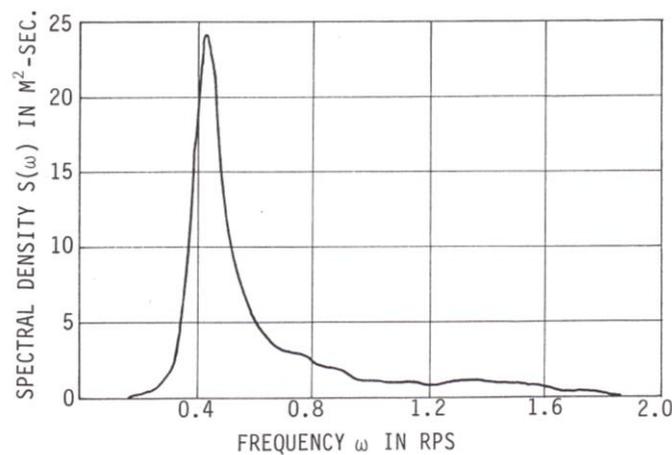


Figura 2-9. Ejemplo de espectro de densidad $S(\omega)$ (fuente Ochi [6])

La relación entre la amplitud a_i y el espectro de densidad $S_{\eta\eta}(\omega)$ es

$$2S_{\eta\eta}(\omega_i) = \frac{a_i^2}{d\omega_i} \Rightarrow a_i = \sqrt{2S_{\eta\eta}(\omega_i)d\omega_i}$$

Por lo tanto la energía total del oleaje m_0 (momento de orden 0) se determina integrando el espectro $S_{\eta\eta}(\omega)$ en todo el dominio.

$$m_0 = \int_0^{\infty} S_{\eta\eta} d\omega$$

En relación al número total de olas N, indicar que el criterio tomado para determinar N exige que el área integrada de espectro se por lo menos el 95% de todo el espectro ($A_s > 95\% m_0$).

Los números de ola k_i correspondientes a cada frecuencia ω_i se calculan con la relación de dispersión

$$\omega^2 = g k \tanh(kh)$$

2.3.3 Espectro de oleaje. Pierson-Moskowitz

Desde principios de 1950 se han formulado diversos modelos espectrales de oleaje con múltiples aplicaciones en ingeniería naval, oceánica y civil.

La elevación de la superficie libre $\eta(t)$ es un proceso aleatorio que se obtiene en función del espectro de densidad en frecuencia $S_{\eta\eta}(\omega)$. Para estimar el espectro $S_{\eta\eta}(\omega)$ se emplean dos parámetros estadísticos obtenidos a partir de medidas experimentales de oleaje:

- Hs: Altura significativa de ola. Equivale aproximadamente la altura media del tercio de olas más altas.
- To: Periodo medio. Periodo medio de todas las ondas que constituyen el oleaje

Para una determinada localización los datos medidos se registran en un *diagrama de dispersión*, a partir del cual obtenemos los valores de Hs y To durante un periodo de tiempo, por ejemplo un año.

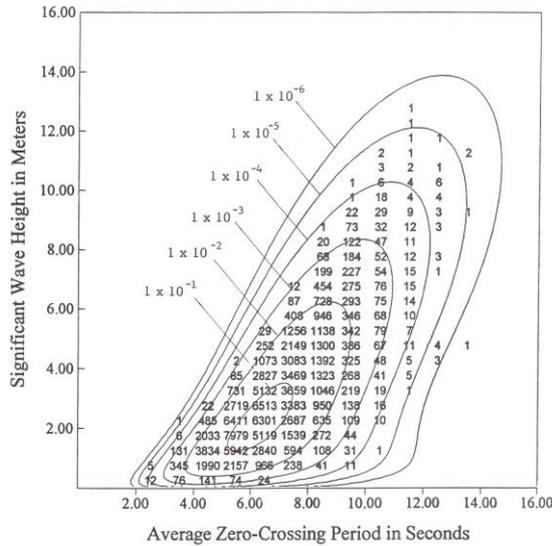


Figura 2-10. Ejemplo de diagrama

Uno de los más usados es el espectro de Pierson-Moskowitz (Pierson y Moskowitz 1964), desarrollado a partir de estudios llevados a cabo en el Mar del Norte. Su expresión matemática es

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{A g^2}{\omega^5} \exp \left[-B \left(\frac{g}{\omega U_{19.5}} \right)^4 \right]$$

donde

- ω : frecuencia angular
- $U_{19.5}$: velocidad principal del viento a 19.5m sobre el nivel del mar
- g : gravedad
- A y B : dos parámetros adimensionales dependientes de H_s y T_0 .

$$A = 4\pi^3 \left(\frac{H_s}{gT_0^2} \right)^2 \quad B = 16\pi^3 \left(\frac{U_{19.5}}{gT_0} \right)^4$$

El espectro de Pierson-Moskowitz puede expresarse directamente en función de H_s y T_0 .

$$S_{\eta}(\omega) = \frac{4\pi^3 H_s^2}{T_0^4 \omega^5} \exp \left[-\frac{1}{\pi} \left(\frac{2\pi}{\omega T_0} \right)^4 \right]$$

3 RESOLUCIÓN CASO PRÁCTICO

3.1 Introducción

El presente epígrafe presenta como objetivo principal aplicar a un caso práctico el modelo numérico, desarrollado anteriormente e implementado en Matlab por el profesor de la Universidad de Sevilla José Ángel González Pérez. Se ha recurrido a un proyecto real de puente flotante ejecutado en Estados Unidos. Se trata de un puente de carretera perteneciente a la SR-520, carretera que une la ciudad de Seattle con las localidades de Bellevue y Redmond. El puente se sitúa en el Estado de Washington y pasa sobre el Lago Washington.

La estabilidad del puente recae en unos pontones flotantes sobre los que se apoyan las pilas del puente. En las siguientes figuras se muestra de manera esquemática la sección principal y la planta del puente.

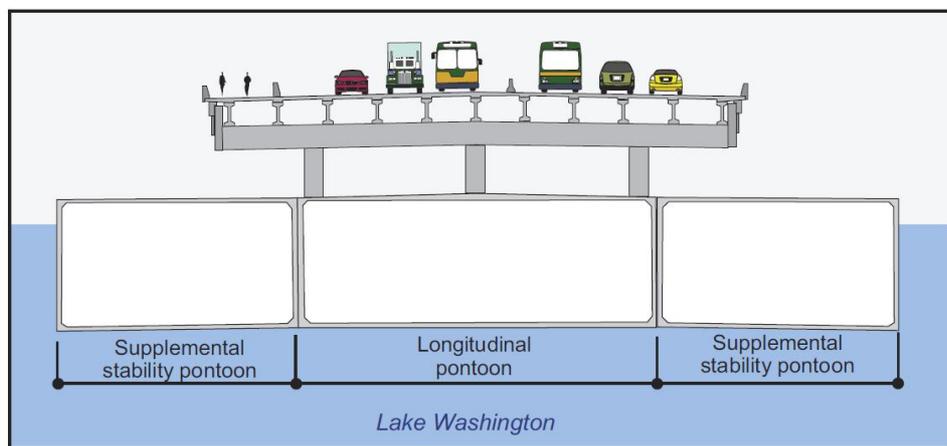


Figura 3-1. Sección principal (alzado) del puente de la SR-520 (Estado de Washington)

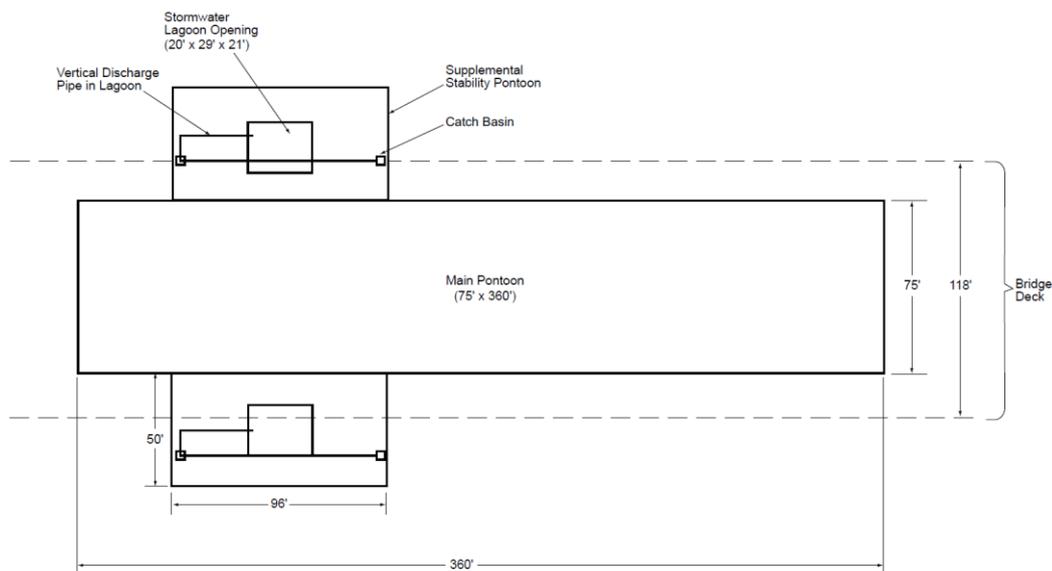


Figura 3-2. Vista en planta de un tramo del puente de la SR-520

Existe por lo tanto un *pontón longitudinal* continuo a lo largo de toda la traza flanqueado de manera discontinua (cada 30 m aprox.) por *pontones de estabilidad*. La siguiente instantánea refleja el proceso constructivo donde los barcos van encajando los diversos pontones (zona de la izquierda), dotando así al puente de una base flotante sobre la que apoyarse. En la zona de la derecha se observa el puente existente, también flotante.



Figura 3-3. Proceso constructivo del puente de la SR-520

En el presente trabajo se modelizará una estructura con una geometría basada en la sección del puente de la SR-520. Constará por lo tanto de dos pontones de estabilidad enlazados a un pontón principal (longitudinal) sobre el que descansarán las pilas y el tablero del puente.

3.2 Geometría y cargas

3.2.1 Estructura

Siguiendo la geometría del puente de la carretera SR-520 (Estado de Washington), la estructura a estudiar consiste en un tramo de puente de 55 m de largo y 23 m de ancho cuyas cargas se transmiten a un pontón longitudinal de las mismas dimensiones mediante 5 filas de pilas. Las siguientes figuras muestran el alzado y el perfil de la estructura a analizar.

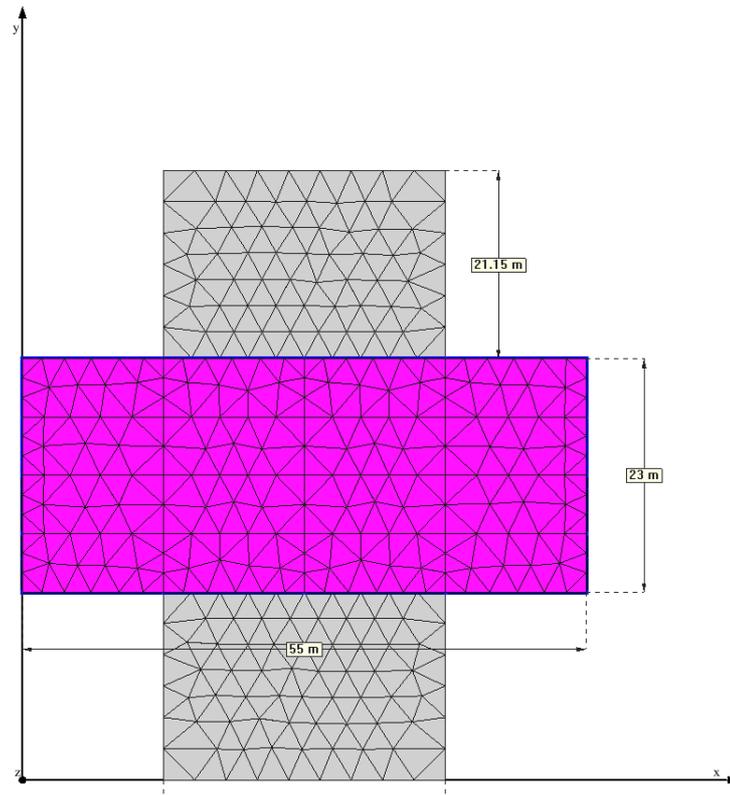


Figura 3-4. Sección principal (planta) de la estructura

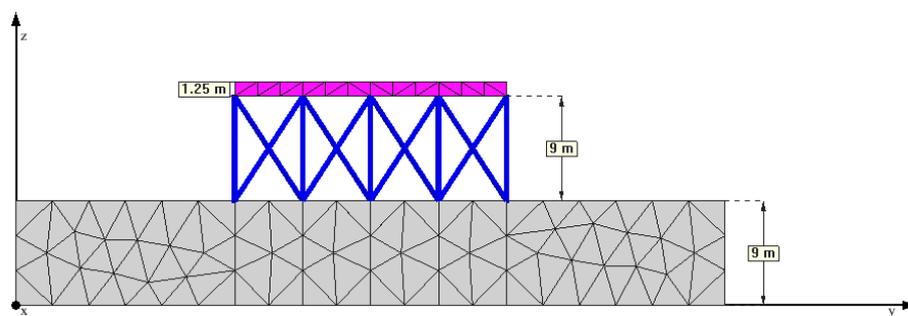


Figura 3-5. Sección principal (perfil) de la estructura

Para introducir la geometría de la estructura se ha utilizado el software GID, preprocesador/postprocesador perteneciente al CIMNE (Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería).

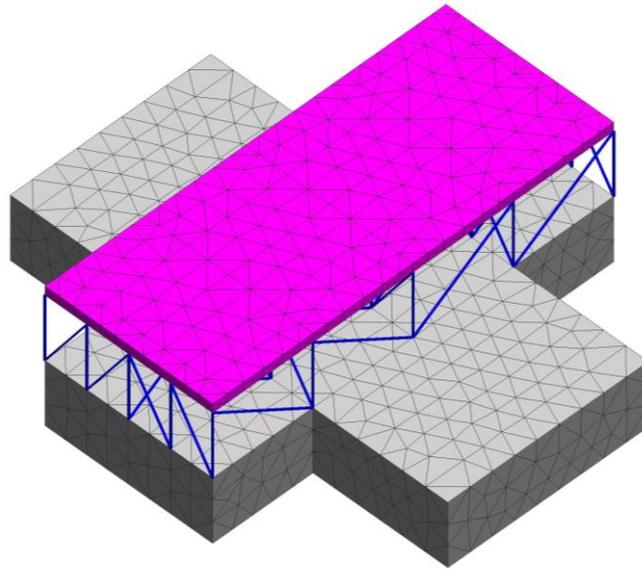


Figura 3-6. Representación de la estructura

La estructura modelizada se compone de tres subestructuras (bodies). Los dos pontones de estabilidad junto con el pontón longitudinal forman la subestructura 1 (coloreada en gris). La subestructura 2, compuesta por el entramado de pilas del puente (color azul), se une mediante frames situados en las bases de las pilas a la subestructura 1. Finalmente la subestructura 3 representa el tablero del puente (color rosa) y se une a las pilas de la subestructura 2 a través de frames localizados en las cabezas de las pilas. Tanto los pontones como el tablero se han discretizado con elementos planos (shell) triangulares de tres nodos, mientras que las pilas se discretizan con elementos lineales (beam).

En lo referente a propiedades mecánicas de la estructura, decir que para las pilas y el tablero se ha utilizado un hormigón pretensado de características similares al HP-40 ($E=30$ GPA; $\rho=2350$ Kg/m³; $\nu=0.2$), mientras que los pontones se constituyen de placas de acero ($E=210$ GPA; $\rho=7850$ Kg/m³; $\nu=0.3$) de espesor=225 mm

Con esta geometría, dimensiones y propiedades mecánicas la estructura flota, quedando sumergidos bajo el agua 7,5 m de la altura de los pontones.

Para el sistema de amarre se han empleado cables de acero galvanizado de rigidez $EA=5.39e7$ N y peso por unidad de longitud $\omega=28.3$ Kg/m, siguiendo el proyecto real de la carretera SR-520 [7].

En el siguiente cuadro se resume la geometría y las propiedades mecánicas de la estructura y su sistema de amarre.

GEOMETRÍA Y PROPIEDADES MECÁNICAS DE LA ESTRUCTURA						
		Pontón longitudinal	Pontón de estabilidad	Pilas	Tablero	Cables
Geometría	Largo (m)	55	27.5	-	55	-
	Ancho (m)	23	21.15	-	23	-
	Alto (m)	9	9	9	1.25	-
	Espesor (m)	0.225	0.225	-	0.125	-
	Sección (m ²)	-	-	2.25 (1.5x1.5)	-	-
Propiedades mecánicas	E (GPa)	210	210	30	30	-
	ρ (Kg/m ³)	7850	7850	2350	2350	-
	ν	0.3	0.3	0.2	0.2	-
	EA (N)	-	-	-	-	5.39e7
	ω (Kg/m)	-	-	-	-	28.3

3.2.2 Oleaje

El efecto del oleaje sobre la estructura se ha llevado a cabo implementando en Matlab las subrutinas necesarias para generar el espectro de oleaje de Pierson-Moskowitz, la altura de ola y presión dinámica.

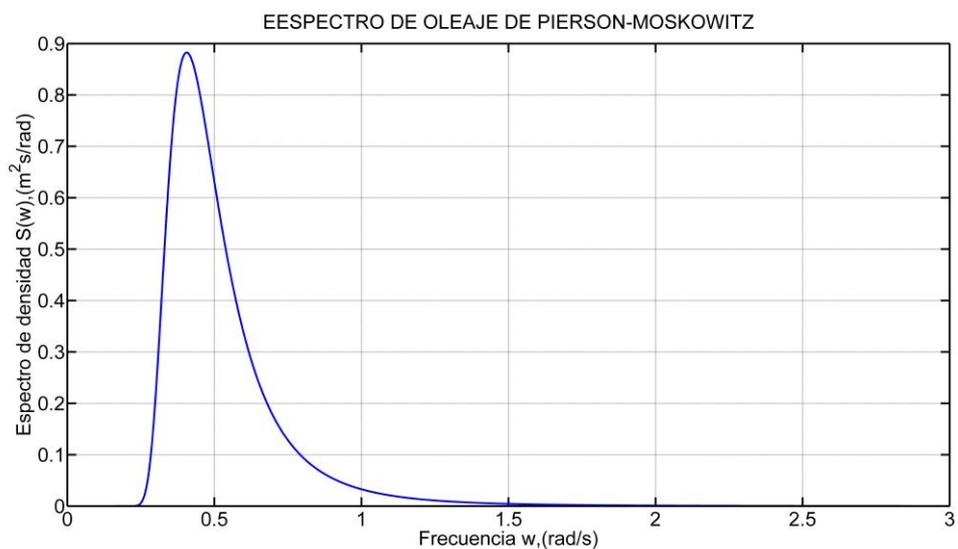


Figura 3-7. Espectro de oleaje. $H_s=2\text{m}$ y $T_o=11\text{s}$.

Estas subrutinas se acoplan al programa base de cálculo del profesor José Ángel González Pérez, pudiendo así generar las fuerzas nodales debidas al oleaje. De las diversas simulaciones de cálculo que se han realizado con la estructura, la gran mayoría han sido para una ola de altura significativa $H_s=2\text{m}$ y periodo medio $T_o=11\text{s}$, con una profundidad de fondo marino de $h=50\text{m}$.

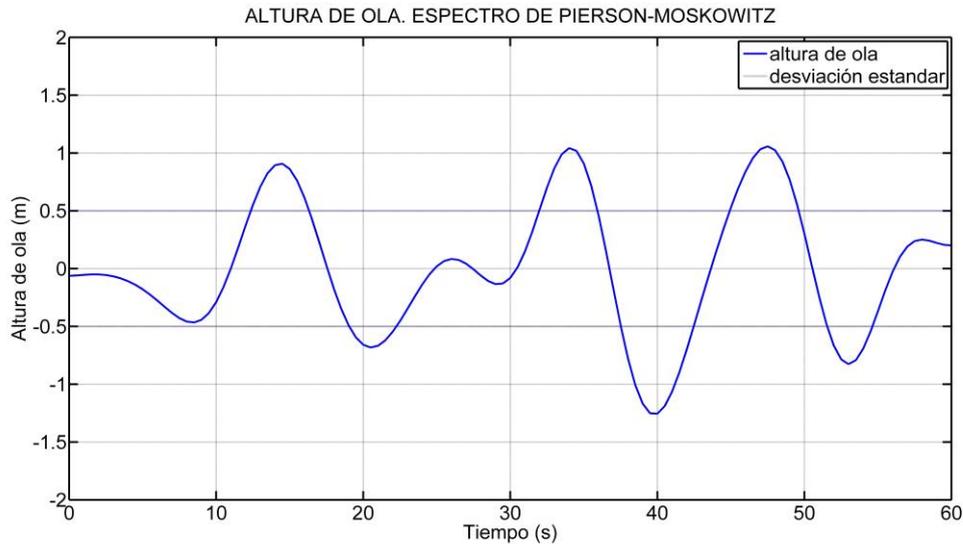


Figura 3-8. Altura de ola. $H_s=2\text{m}$ y $T_o=11\text{s}$.

3.2.3 Carga de vehículo pesado

La inclusión de una carga transitoria dependiente del tiempo completaría el modelo de cálculo objeto del presente trabajo. Se ha elegido la carga ejercida por el paso de vehículo pesado por el puente. Siguiendo las indicaciones de la instrucción de puentes IAP-11 [4], se emplea un tren de carga de 60 Tn. No obstante la carga no se distribuye en cuatro puntos recibiendo cada uno 15 Tn como indica la instrucción, sino que se ha optado por simplificar aplicando toda la carga (60 Tn) de manera puntual en 5 nodos situados en el eje del carril derecho del puente (figura 3-9).

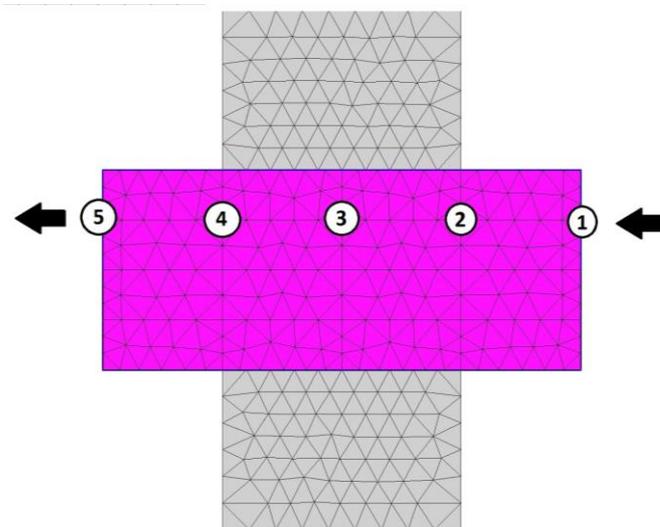


Figura 3-9. Nodos por los que circula el vehículo pesado.

Para modelizar el paso del vehículo pesado por el carril del puente y su distribución de cargas, se recurre al uso de unas funciones de formas $N_i(t)$ similares a las utilizadas en elementos finitos (figura 3-10).

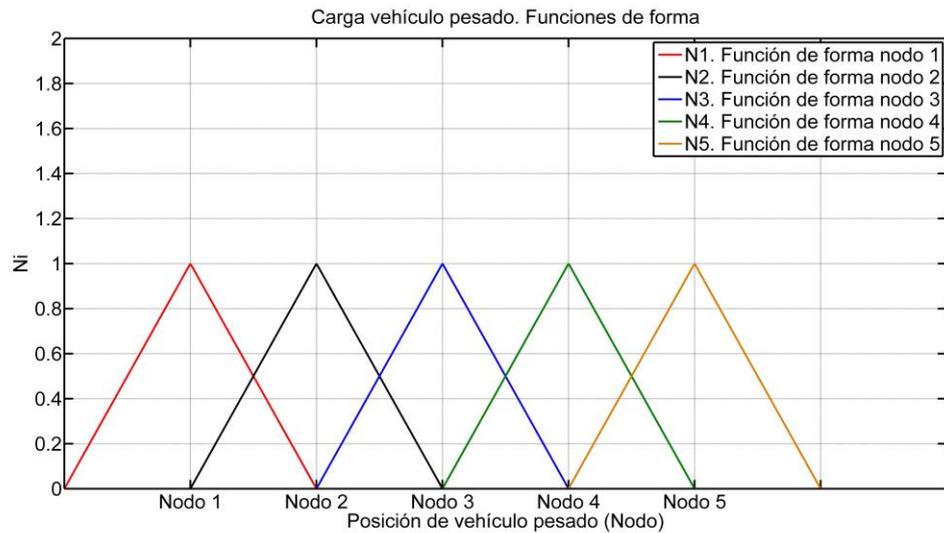


Figura 3-10. Funciones de forma. Carga vehículo pesado.

Cuando en el instante t_1 el vehículo pasa por el nodo i , este nodo recibe toda la carga de 60 Tn. En otro instante t_n que el vehículo se encuentre entre dos nodos, la carga se reparte entre esos nodos. Por lo tanto la carga aplicada en cada nodo por el que pasa el vehículo se expresa con la fórmula

$$F_i = 60 \cdot N_i(t)$$

donde

- F_i es la fuerza aplicada en el nodo i
- $N_i(t)$ es la función de forma del nodo i

De cara a integrar la carga del vehículo pesado en el programa base de cálculo, se han implementado en Matlab las subrutinas necesarias que transforman el paso del vehículo pesado en carga nodales.

3.3 Estudio del sistema de cableado

3.3.1 Efecto del sistema de amarre

Inicialmente se realiza una simulación de la estructura sin el paso del vehículo pesado ni sujeción alguna mediante sistema de amarre. El objeto de la simulación inicial es observar la respuesta de la estructura a la acción del oleaje para poder valorar la efectividad del sistema de amarre en posteriores simulaciones. Las simulaciones se realizan para un periodo de tiempo de 60 s.

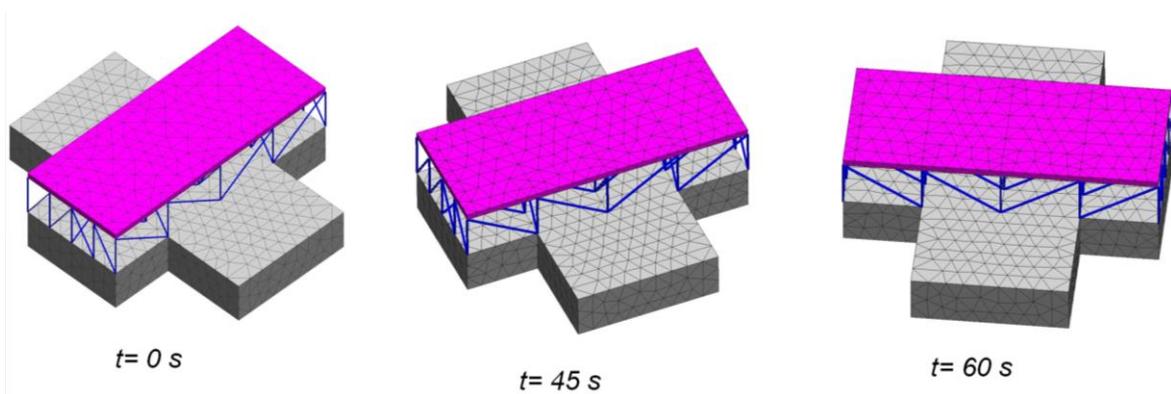


Figura 3-11. Estructura inestable sin sistema de amarre.

Como se observa (figura 3-11) la estructura se desestabiliza, sufriendo grandes desplazamientos y rotaciones que la llevan a la inestabilidad. Para paliar los efectos desestabilizadores del oleaje se proyecta un sistema de amarre de la estructura al lecho marino.

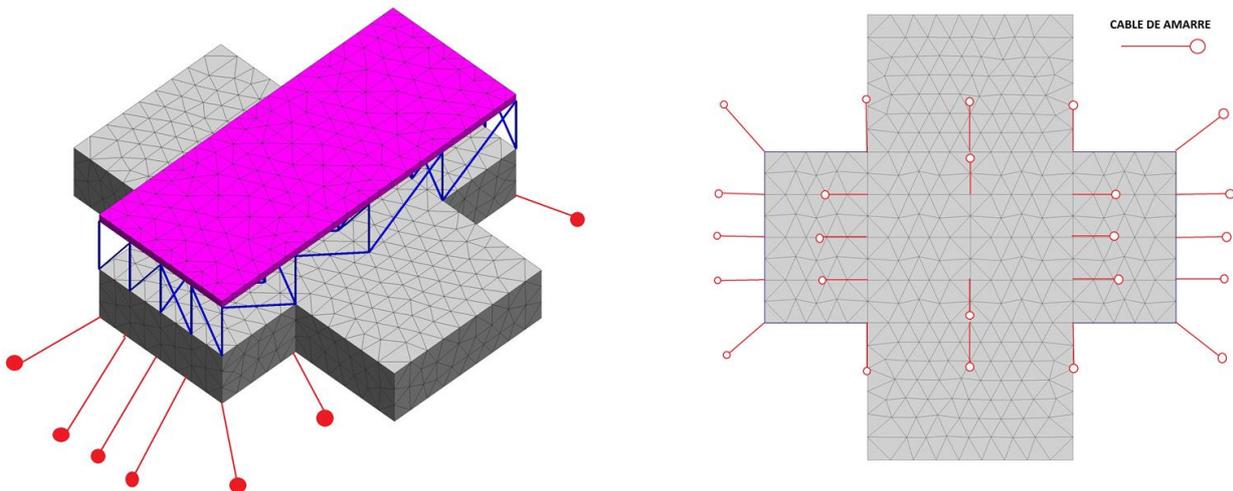


Figura 3-12. Distribución del sistema de cableado. 16 cables perimetrales+8 cables interiores.

Los cables de amarre se anclan al lecho marino en un extremo y con el otro extremo sujetan de los pontones, distribuyéndose a lo largo de toda la base de los pontones (figura 3-12).

El siguiente cuadro tipo se emplea para resumir las variables de entrada para cada una de las simulaciones realizadas.

PROCESO DE CÁLCULO. VARIABLES DE ENTRADA	
Altura significativa de ola H_s	2 m
Distribución del sistema de amarre	24 cables (16 perimetrales + 8 interiores)
Distancia horizontal estructura-amarre al fondo marino	20
Longitud del cable L	47 m
Rigidez del cable EA	$5.39e7$ N
Profundidad lecho marino h	50 m
Peso del vehículo pesado	Sin vehículo pesado

Todos los resultados que se extraen a lo largo de este estudio hacen referencia al nodo 4 (figura 3-9) perteneciente al eje del carril derecho.

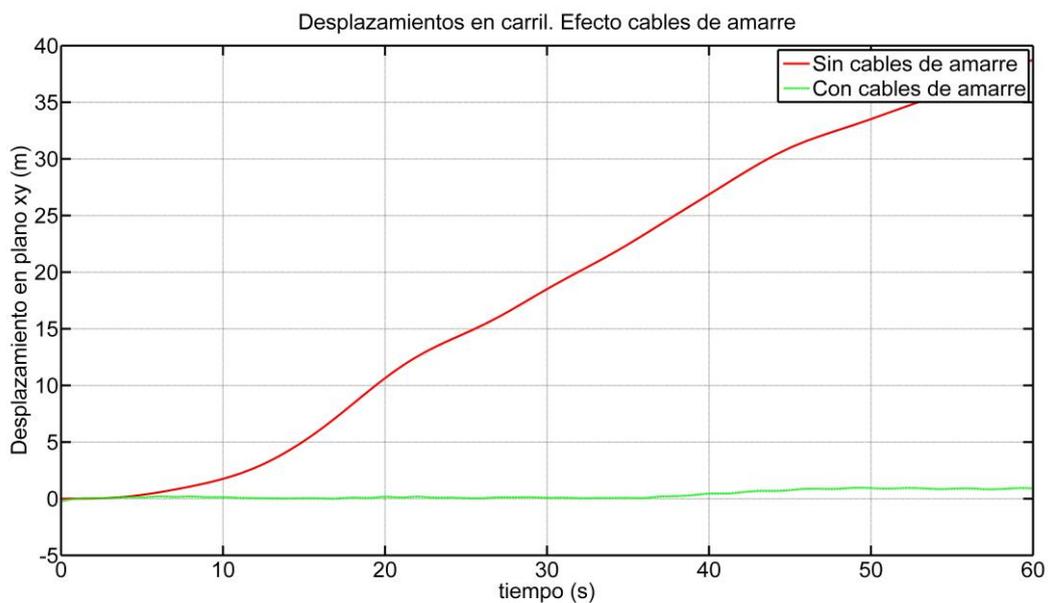


Figura 3-13. Desplazamiento horizontal. Efecto sistema de amarre.

Con el sistema de cableado se elimina la inestabilidad de la estructura en el plano (figura 3-13). La magnitud de los desplazamientos horizontales que se producen en la estructura se sitúa dentro de un rango de valores controlable, por debajo de 1 m.

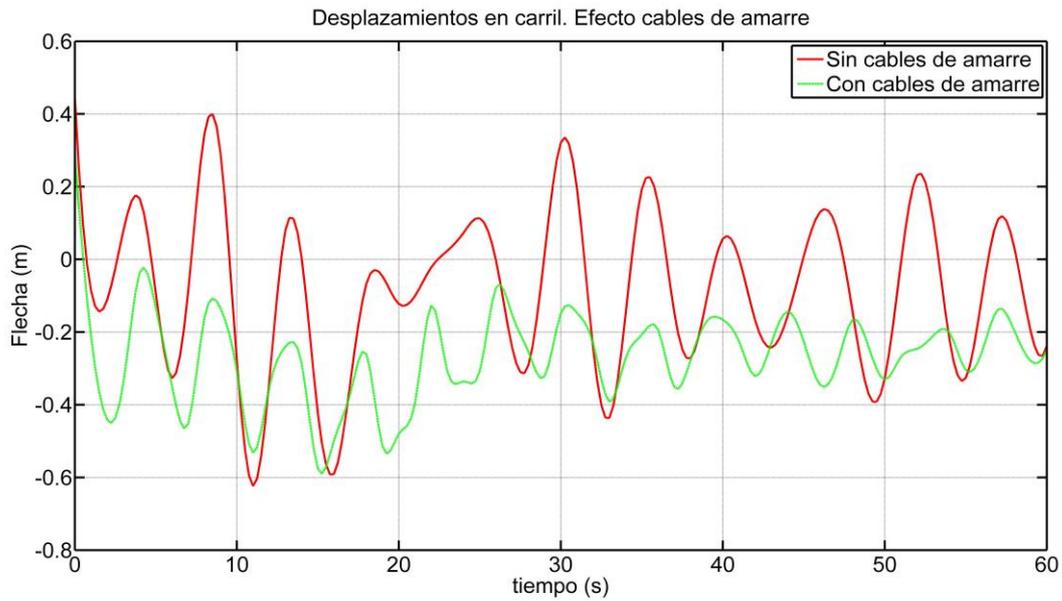


Figura 3-14. Desplazamiento vertical. Efecto sistema de amarre.

Sin embargo a lo largo del estudio se aprecia que el sistema de amarre no se proyecta para controlar las flechas de las estructura (figura 3-14), sólo produce ligeras mejoras en los desplazamientos verticales.

3.3.2 Longitud del cable

A la hora de proyectar el sistema de cableado para sujetar una estructura flotante es imprescindible determinar la longitud de los cables a emplear y así determinar la proporción de cable que descansa sobre el fondo marino.

PROCESO DE CÁLCULO. VARIABLES DE ENTRADA	
Altura significativa de ola H_s	2 m
Distribución del sistema de amarre	24 cables (16 perimetrales + 8 interiores)
Distancia horizontal estructura -amarre al fondo marino	20 m
Longitud del cable L	Variable
Rigidez del cable EA	$5.39e7$ N
Profundidad lecho marino h	50 m
Peso del vehículo pesado	Sin vehículo pesado

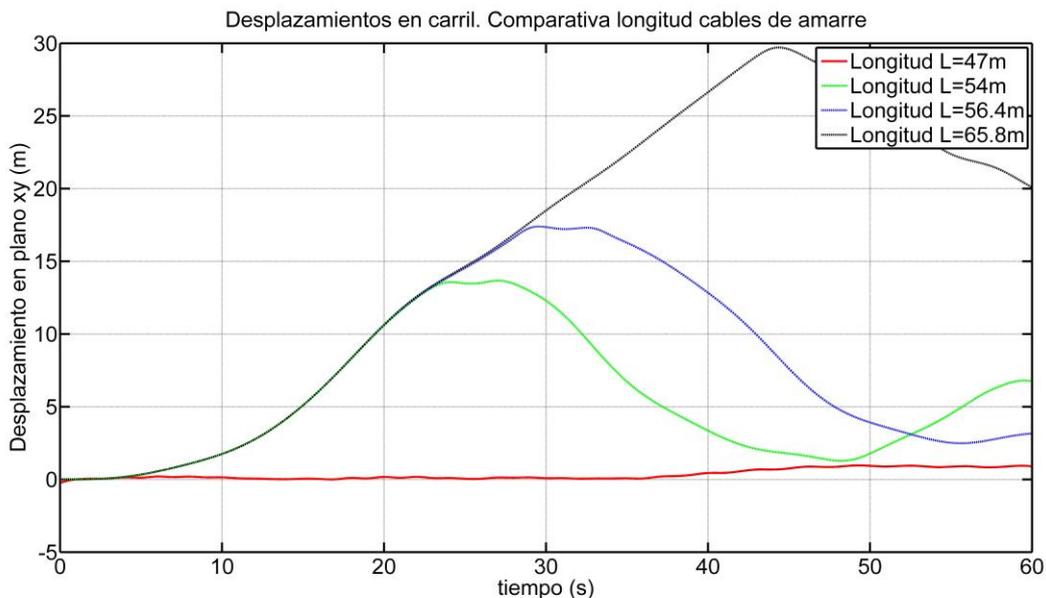


Figura 3-15. Desplazamiento horizontal. Comparativa longitud de cable

Como era de esperar (figura 3-15) el cable trabaja mejor cuanto menos proporción de él descansa sobre el lecho, es decir cuanto más tirante esté. En cables más largos, el efecto del rozamiento con el fondo marino no es suficiente para estabilizar la estructura, ofreciendo una respuesta tardía.

3.3.3 Distancia entre estructura y el amarre al fondo

Al hilo de la anterior simulación decir que otro importante factor en el diseño del sistema de amarre, es establecer a qué distancia horizontal de la estructura se anclan los cables.

PROCESO DE CÁLCULO. VARIABLES DE ENTRADA	
Altura significativa de ola Hs	2 m
Distribución del sistema de amarre	24 cables (16 perimetrales + 8 interiores)
Distancia horizontal estructura -amarre al fondo marino	Variable
Longitud del cable L	-
Rigidez del cable EA	5.39e7 N
Profundidad lecho marino h	50 m
Peso del vehículo pesado	Sin vehículo pesado

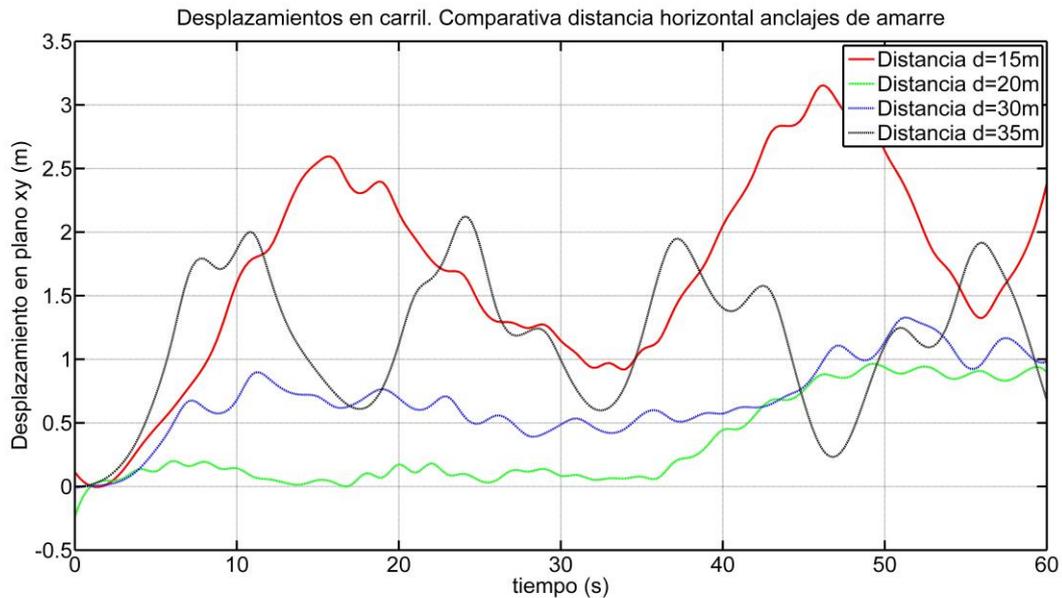


Figura 3-16. Desplazamiento horizontal. Comparativa distancia horizontal

La peor respuesta viene dada por el cable situado a 15 m (figura 3-16) al estar demasiado vertical. El cable anclado a 30 m trabaja bastante bien, mientras que el cable distante 20 m presenta la respuesta más homogénea. Por encima de los 30 m se observa, en el cable localizado a 35 m, que el efecto positivo de estar más tendido empieza a verse contrarrestado con el efecto negativo de una mayor longitud de cable (figura 3-15), ofreciendo una peor respuesta.

3.3.4 Distribución geométrica del cableado

Dentro de la geometría del sistema de amarre cobra un papel importante la elección del número de cables a emplear y su disposición a lo largo de la estructura flotante a estabilizar. Se ha estudiado la opción de repartir los cables sólo por el perímetro de la estructura y se ha comparado con una distribución mixta de cables perimetrales e interiores (figura 3-12).

PROCESO DE CÁLCULO. VARIABLES DE ENTRADA	
Altura significativa de ola H_s	2 m
Distribución del sistema de amarre	Variable
Distancia horizontal estructura -amarre al fondo marino	20 m
Longitud del cable L	47 m
Rigidez del cable EA	$5.39e7$ N
Profundidad lecho marino h	50 m
Peso del vehículo pesado	Sin vehículo pesado

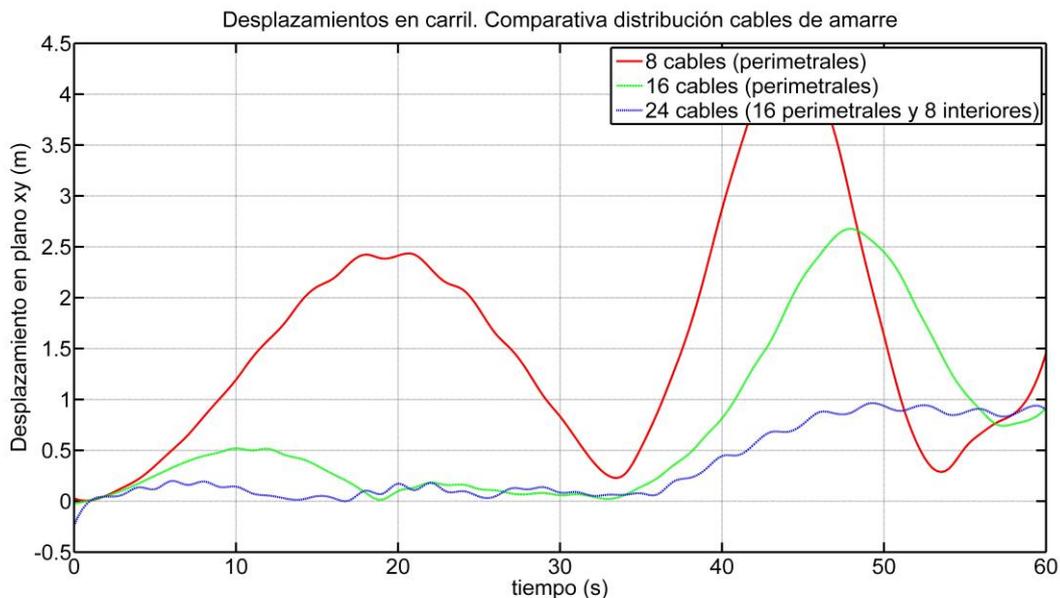


Figura 3-17. Desplazamiento horizontal. Comparativa distribución de cableado

Una distribución con pocos cables, como la de 8 cables, resulta insuficiente. Con el incremento a 16 cables perimetrales la respuesta cobra una notable mejoría y al añadir los 8 cables interiores se alcanza una situación más estable aun.

3.3.5 Rigidez del cable

Para finalizar el estudio de optimización del sistema de cableado no hay que pasar por alto las propiedades mecánicas del cable. Siguiendo el proyecto real de la carretera SR-520 se ha elegido un cable de acero galvanizado de rigidez $EA=5.39e7$ N [7]. En torno a esta rigidez se ha fluctuado para ver la respuesta de la estructura ante diversas rigideces.

PROCESO DE CÁLCULO. VARIABLES DE ENTRADA	
Altura significativa de ola H_s	2 m
Distribución del sistema de amarre	24 cables (16 perimetrales + 8 interiores)
Distancia horizontal estructura -amarre al fondo marino	20 m
Longitud del cable L	47 m
Rigidez del cable EA	Variable
Profundidad lecho marino h	50 m
Peso del vehículo pesado	Sin vehículo pesado

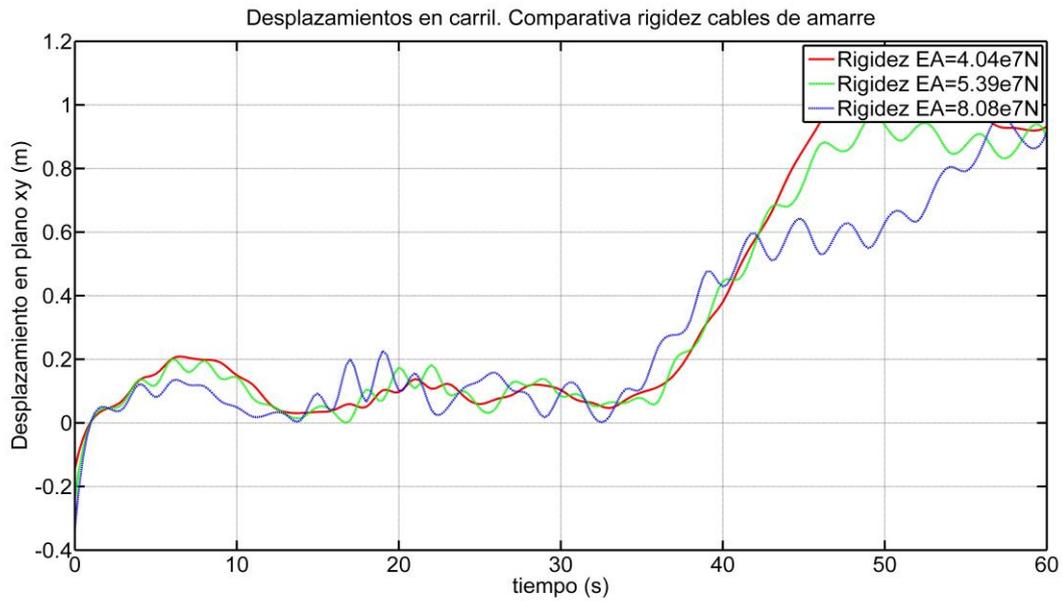


Figura 3-18. Desplazamiento horizontal. Comparativa rigidez del cable

Dentro de lo esperable se confirma que con el incremento de rigidez se reducen ligeramente los desplazamientos horizontales (figura 3-18).

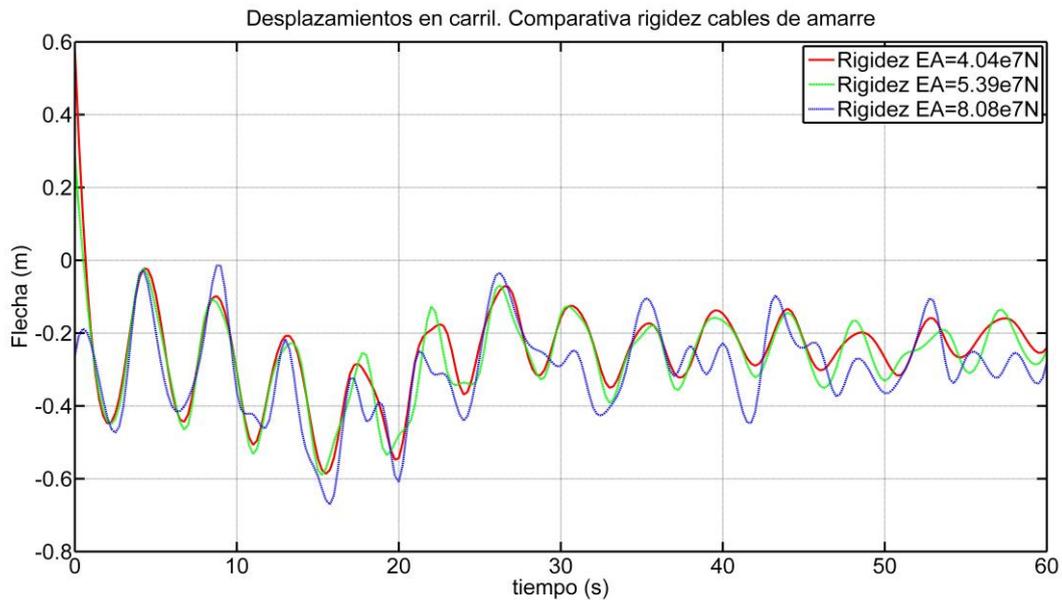


Figura 3-19. Desplazamiento vertical. Comparativa rigidez del cable

En cuanto al desplazamiento vertical (figura 3-19) se aprecia una diferencia casi inexistente entre las tres respuestas. Se reafirma por lo tanto la concepción del cableado de amarre como un sistema para contener los desplazamientos horizontales de la estructura, pero no para controlar los desplazamientos verticales.

3.4 Efecto del oleaje

3.4.1 Altura significativa de ola

En relación al efecto del oleaje se han realizado simulaciones con distintas alturas de ola para determinar orientativamente el valor de altura para el que la respuesta de la estructura es admisible.

PROCESO DE CÁLCULO. VARIABLES DE ENTRADA	
Altura significativa de ola H_s	Variable
Distribución del sistema de amarre	24 cables (16 perimetrales + 8 interiores)
Distancia horizontal estructura -amarre al fondo marino	20 m
Longitud del cable L	47 m
Rigidez del cable EA	$5.39e7$ N
Profundidad lecho marino h	50 m
Peso del vehículo pesado	Sin vehículo pesado

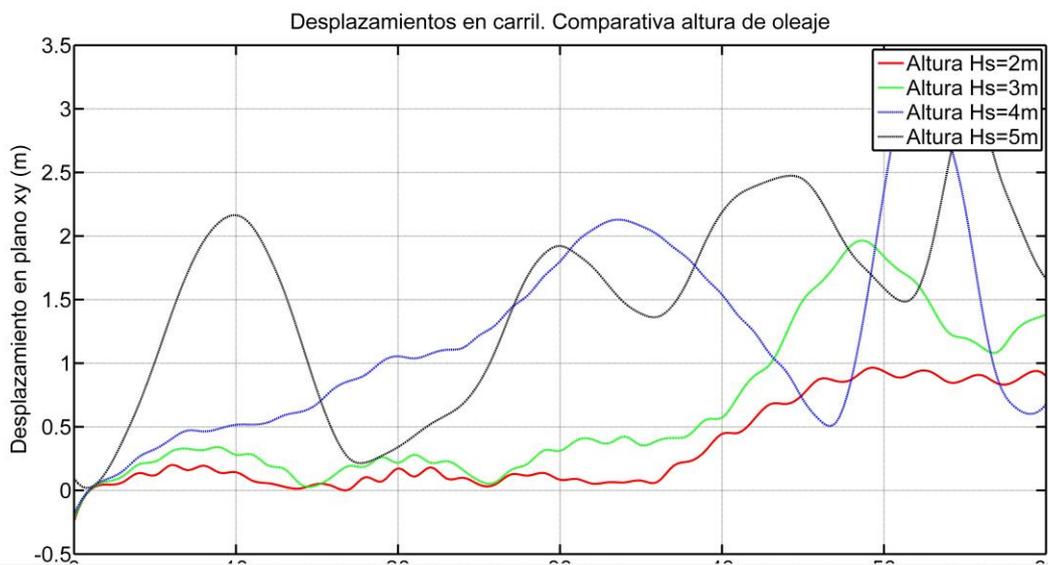


Figura 3-20. Desplazamiento horizontal. Comparativa altura de oleaje

Fijando un desplazamiento horizontal máximo admisible inferior a 1 m se observa (figura 3-20) que la estructura sólo permitiría una ola de $H_s=2$ m.

3.4.2 Profundidad del fondo marino

Las estructuras flotantes constituyen una solución para solventar grandes profundidades marinas, de ahí que se analice el efecto de la profundidad del lecho marino en la respuesta del puente flotante.

PROCESO DE CÁLCULO. VARIABLES DE ENTRADA	
Altura significativa de ola H_s	2 m
Distribución del sistema de amarre	24 cables (16 perimetrales + 8 interiores)
Distancia horizontal estructura -amarre al fondo marino	20 m
Longitud del cable L	-
Rigidez del cable EA	$5.39e7$ N
Profundidad lecho marino h	Variable
Peso del vehículo pesado	Sin vehículo pesado

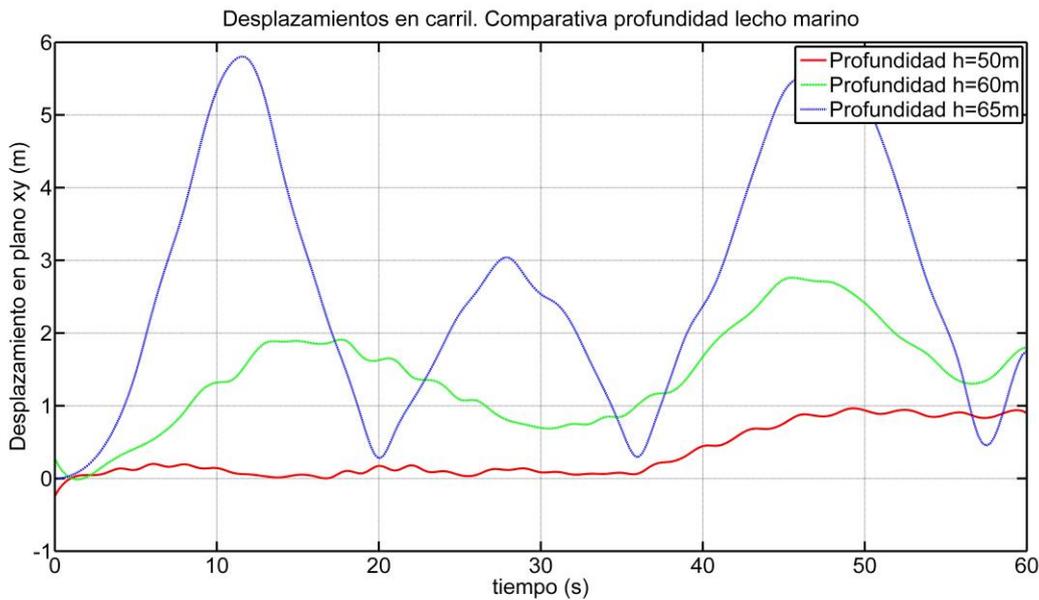


Figura 3-21. Desplazamiento horizontal. Comparativa profundidad fondo marino

El incremento de la profundidad del fondo supone un incremento de longitud de cable, por lo tanto conlleva una peor respuesta de la estructura, aumentando los desplazamientos horizontales. Como consecuencia, a la hora de proyectar una estructura flotante habrá que prestar especial atención a su viabilidad en función de la profundidad del lecho marino.

3.5 Vehículo pesado

Para finalizar los cálculos realizados en el presente estudio, la atención pasa ahora al paso del vehículo pesado por el carril del puente. En primer lugar se analiza el efecto en la estructura del propio paso en sí y posteriormente se valora las distintas respuestas de la estructura ante distintos tonelajes del vehículo pesado.

3.5.1 Efecto en la estructura

Debido a que el tramo de puente analizado es muy corto 55 m, el paso de un solo vehículo pesado supone una respuesta demasiado fugaz para analizar, ya que el vehículo atraviesa el puente en 2 s. Se opta por lo tanto simular el paso continuo de vehículos pesados fijando una frecuencia de paso cada 10s.

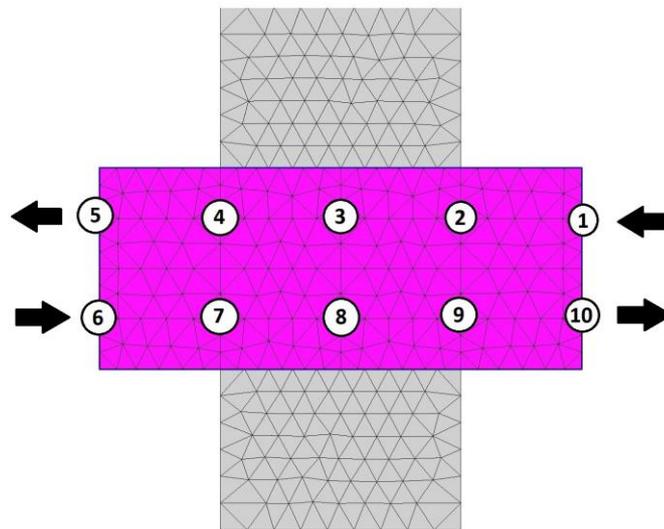


Figura 3-22. Circulación de vehículos pesados. Nodos

El paso de vehículos pesados se realiza de manera simultánea en las dos direcciones, es decir carril derecho e izquierdo (figura 3-22).

PROCESO DE CÁLCULO. VARIABLES DE ENTRADA	
Altura significativa de ola H_s	2 m
Distribución del sistema de amarre	24 cables (16 perimetrales + 8 interiores)
Distancia horizontal estructura-amarre al fondo marino	20 m
Longitud del cable L	47 m
Rigidez del cable EA	$5.39e7$ N
Profundidad lecho marino h	50 m
Peso del vehículo pesado	60 Tn

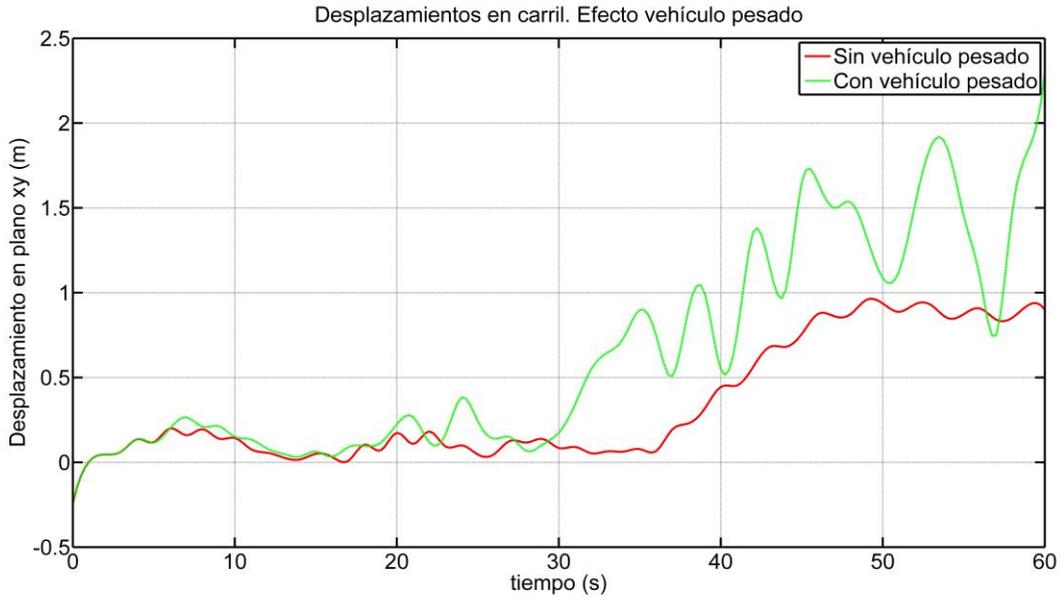


Figura 3-23. Desplazamiento horizontal. Efecto vehículo pesado

Se produce una importante perturbación en el desplazamiento horizontal (figura 3-23), pasando de desplazamientos inferiores a 1 m sin vehículo pesado a valores cercanos a los 2 m con vehículo pesado.

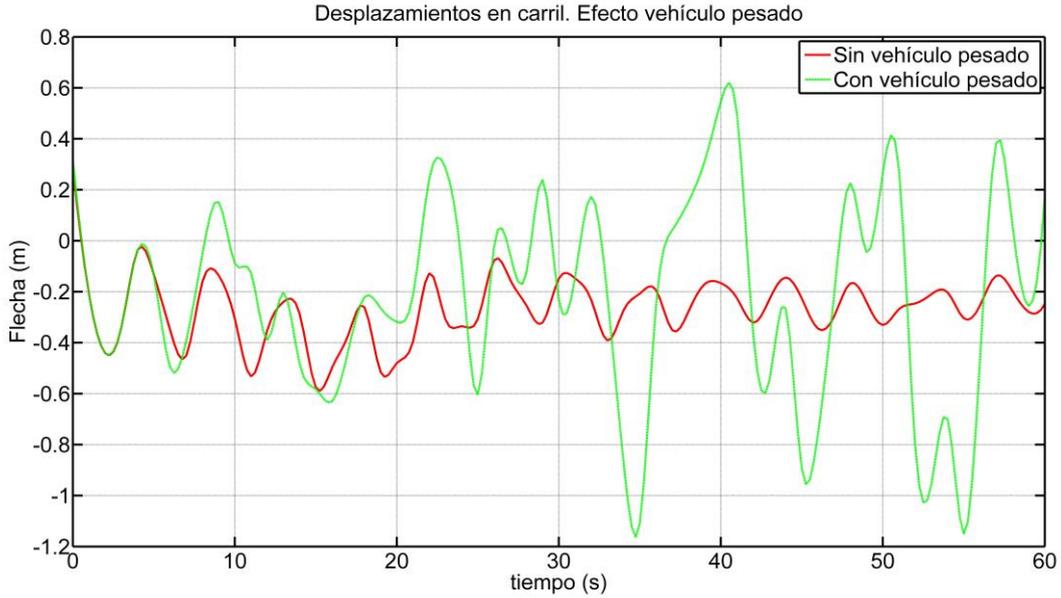


Figura 3-24. Desplazamiento vertical. Efecto vehículo pesado

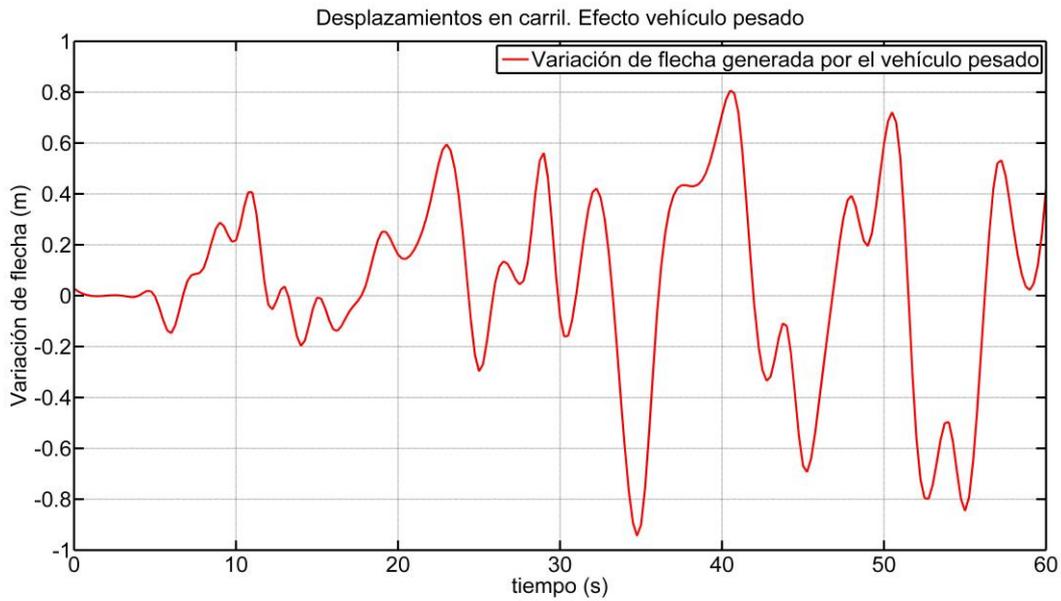


Figura 3-25. Variación en la flecha. Efecto vehículo pesado

También cobra un efecto importante el paso del vehículo, como era de esperar, sobre los desplazamientos verticales del puente (figura 3-24). Se generan flechas netas, debido sólo al vehículo pesado, próximas a 1m (figura 3-25). El carácter puntiagudo de la gráfica se debe que la fuerza puntual que simula el paso del vehículo actúa en un corto instante de tiempo, realizando el efecto propio de un impulso.

3.5.2 Comparativa en función del tonelaje

Se concluye realizando una comparativa de la respuesta de la estructura en función del tonelaje del vehículo.

PROCESO DE CÁLCULO. VARIABLES DE ENTRADA	
Altura significativa de ola H_s	2 m
Distribución del sistema de amarre	24 cables (16 perimetrales + 8 interiores)
Distancia horizontal estructura -amarre al fondo marino	20 m
Longitud del cable L	47 m
Rigidez del cable EA	5.39e7 N
Profundidad lecho marino h	50 m
Peso del vehículo pesado	Variable

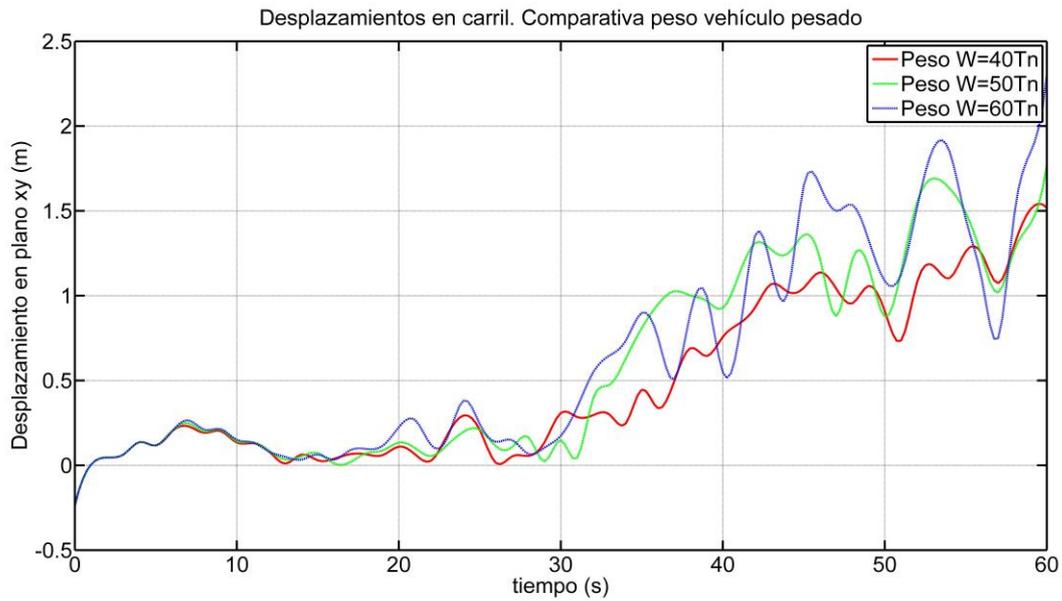


Figura 3-26. Desplazamiento horizontal. Comparativa peso del vehículo

En el caso del vehículo de 40 Tn, que es el empleado por la instrucción IAP-11 [4] para determinar el *Estado Límite de Vibraciones*, se obtiene una reducción considerable de los desplazamientos horizontales, siendo estos inferiores a 1.5 m.

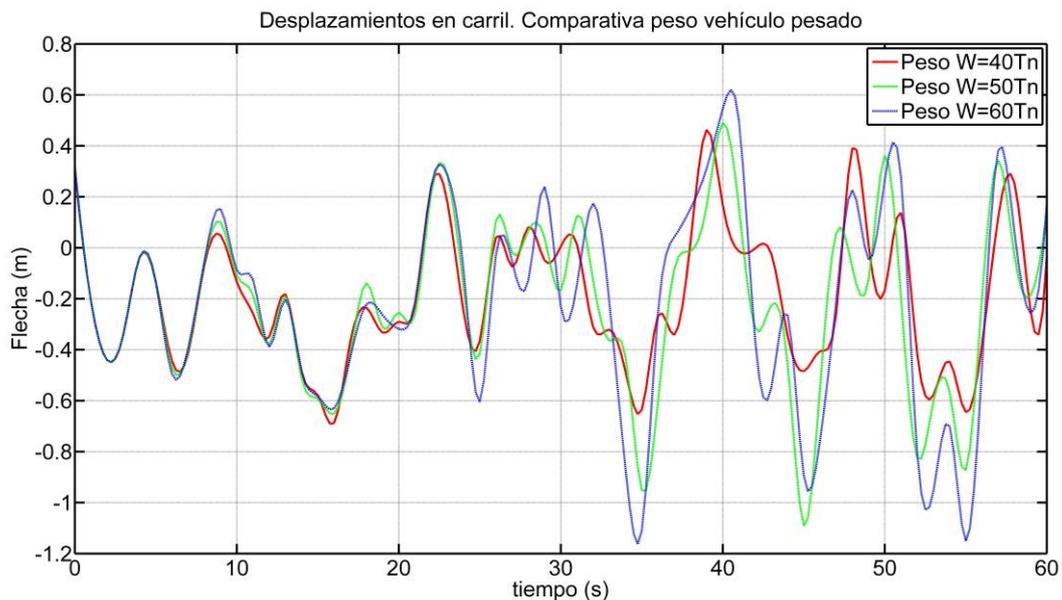


Figura 3-27. Desplazamiento vertical. Comparativa peso del vehículo

Al igual que con los desplazamientos horizontales, las flechas generadas sufren un considerable descenso conforme disminuye la carga de vehículo pesado, situándose en el caso del vehículo de 40 Tn alrededor de los 0.6 m.

4 CONCLUSIONES Y TRABAJO FUTURO

4.1 Conclusiones

En este trabajo se presenta un modelo numérico en elementos finitos para un sistema multicuerpo bajo las hipótesis de pequeñas deformaciones y grandes desplazamientos-rotaciones. Como caso práctico, para utilizar el modelo numérico, se ha resuelto una estructura flotante consistente en un tramo de puente de carretera offshore. Dentro del estudio de la estructura flotante se realizan diversas modelizaciones con objeto de analizar la respuesta de la estructura en función de parámetros de diseño (sistema de cableado, oleaje y carga de vehículo pesado).

La ausencia de registros experimentales impide una validación del estudio por esta vía. Se puede establecer una validación cualitativa del trabajo en relación a la obtención de resultados coherentes y previsibles en algunas ocasiones.

El análisis del sistema de amarre se ha realizado en función de 4 parámetros básicos: longitud de cable, distancia horizontal estructura-amarre al fondo marino, distribución geométrica del cableado y rigidez del cable. De él se puede concluir:

- Emplear un sistema de cableado de amarre es una solución válida para acotar los desplazamientos horizontales generados por el oleaje y que la estructura flotante sea estable. No obstante, como es lógico, el sistema de amarre no controla los desplazamientos verticales. Por lo tanto para lograr la estabilidad vertical y el control de flechas, la estructura cuenta con su geometría y sus propiedades mecánicas, de ahí que resulte imprescindible diseñar con detalle estos aspectos.
- Al diseñar un sistema de amarre se persiguen cables lo más tendidos posibles para desarrollar bien la reacción horizontal que estabiliza la estructura en el plano horizontal. Sin embargo hay un límite para el que tender el cable supone un aumento excesivo de su longitud, ofreciendo una peor respuesta.
- Hay que optimizar la distribución geométrica del sistema de cableado, ya que la respuesta de la estructura difiere bastante en función de esta.
- Como se prevé, conforme aumenta la rigidez del cable se minimizan los desplazamientos horizontales de la estructura.

En relación a los parámetros de oleaje se analiza la respuesta ante diversas alturas significativas de ola (H_s) y antes distintas profundidades (h). De este análisis se puede determinar para qué altura límite de ola la estructura sigue siendo estable y para qué profundidad máxima de fondo marino se obtiene una respuesta aceptable.

Concluir que a la hora de diseñar una estructura y su sistema de amarre se debe buscar la solución más óptima posible, en relación a todos los parámetros descritos (geometría y propiedades mecánicas de la estructura y del sistema de cableado). No obstante no hay que olvidar que el proyecto sea viable técnicamente, según las condiciones de oleaje (altura de ola y profundidad de fondo marino) y económicamente, comparando la estructura flotante con la solución de estructura cimentada al lecho marino.

4.2 Trabajo futuro

Como se indicó en la introducción del presente trabajo, las estructuras offshore flotantes son relativamente recientes, por lo que no existe un amplio bagaje de experiencia previa para su diseño. Conocer su comportamiento en el mar resulta indispensable para su diseño y la falta de experiencia empírica obliga a recurrir a modelos numéricos y físicos.

Los modelos numéricos resultan muy útiles en la fase inicial del diseño para realizar comparaciones cualitativas entre diversas alternativas de diseño (geometría, materiales etc). Una carencia que suelen arrastrar los modelos numéricos es que su validación para un tipo de estructuras no tiene por que cumplirse en otras estructuras. Centrando la atención en el modelo del presente estudio, un futuro trabajo a realizar sería precisamente aplicarlo a otras estructuras offshore flotantes, como aerogeneradores. Además dentro de los futuros desarrollos estarían las siguientes mejoras en cuanto a la implementación del modelo en un programa de cálculo:

- Complementar las cargas sobre la estructura, incluyendo las cargas dinámicas del viento.
- Incluir un modelo de oleaje menos simplificado, añadiendo la perturbación de la estructura en el oleaje mediante radiación y refracción. Completar también con el efecto de masa añadida (added mass).
- Ampliar los elementos implementados (beam y shell de 3 nodos) en el programa base de cálculo, con elementos shell de 4 nodos y elementos volumétricos.
- Modelizar el tráfico de vehículo pesado de un modo más complejo y realista, para evitar el carácter puntual (impulso) de la carga de vehículo que se aprecia en el presente trabajo.
- Implementar el programa base de cálculo en otro lenguaje de programación que permita trabajar con mallas de mayor número de elementos.

Un siguiente paso sería la validación del modelo numérico con los correspondientes ensayos experimentales, como los realizados en el *Canal de Experiencias Hidrodinámicas del el Pardo* [5]. Para ello son necesarios los modelos físicos, que aportan además los parámetros necesarios para el diseño. Por lo tanto el diseño final debe basarse en los resultados de los modelos físicos.

5 BIBLIOGRAFÍA

- [1]. González J, Abascal R y Park KC. Partitioned analysis of flexible multibody systems using filtered linear finite element deformational modes. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 00:1-27, 2013.
- [2]. Jonkman JM. Dynamic modelling and loads analysis of an offshore floating wind turbine. *Technical report NREL/TP-500-41958*, 2007
- [3]. Baquerizo A, Losada MA y López M. *Fundamentos del movimiento oscilatorio*. Editorial Universidad de Granada, 2005
- [4]. *Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera (IAP-11)*. Ministerio de Fomento *FOM/2842/2011*.
- [5]. Marón A. Ensayos de estructuras Offshore y otras estructuras singulares. *Canal de experiencias hidrodinámicas, el Pardo. Publicación num 156. Ministerio de defensa*. 2000
- [6]. Ochi MK. *Ocean waves. The stochastic approach*. Cambridge Ocean Technology Series. Cambridge University Press, 1998
- [7]. SR 520 Replacement Floating Bridge Washington. Wind and waves loads analysis, Vol 5. *State Department of Transportation Federal Highway Administration*, 2010
- [8]. Pierson WJ, Neumann G y James RW. Observing and forecasting ocean waves. H. O. Pub. No. 603. U.S. Naval Oceanographic Office, 1960