Programa de Doctorado "Matemáticas"

Tesis

MÉTRICAS EQUIVALENTES Y EXISTENCIA DE PUNTOS FIJOS PARA APLICACIONES DE TIPO NO-EXPANSIVO

Autor
Alfredo Barrera Cuevas

Directora
Prof. Dra. M. Ángeles Japón Pineda

24 de marzo de 2015

Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas
Departamento de Análisis Matemático

MÉTRICAS EQUIVALENTES Y EXISTENCIA DE PUNTOS FIJOS PARA APLICACIONES DE TIPO NO-EXPANSIVO

Memoria presentada por
Alfredo Barrera Cuevas
para optar al grado de
Doctor en Matemáticas
por la Universidad de Sevilla

Fdo. D. Alfredo Barrera Cuevas

Vo. Bo.: Directora del trabajo

Fdo. Dra. Dña. María Ángeles Japón Pineda
Profesora Titular del Departamento
de Análisis Matemático
de la Universidad de Sevilla

24 de marzo de 2015

Agradecimientos

En el año 2010 me aventuré a realizar el Máster Universitario en Matemática Avanzada en la Universidad de Sevilla en mi afán de no abandonar de manera activa las matemáticas, una de mis grandes pasiones.

Mientras rellenaba la matrícula, no me imaginaba dónde llegaría y la hipótesis de hacer un doctorado se antojaba más que utópica, debido a diversos factores que lo condicionaban.

Cuando llegó el momento de desarrollar el Trabajo de Fin de Máster, le propuse a un profesor relacionado con el área que me interesaba que me tutorizara, pero en esa época se encontraba enfrascado en un trabajo que absorbía gran parte de su tiempo y comprendió que su tutorización no sería la adecuada. No obstante, se preocupó enormemente por ello y se encargó, muy amablemente, de ponerme en contacto con alguien de su confianza, concretizando con sus propias palabras, que me dejaba en muy buenas manos. Me recomendó a la profesora Dª María de los Ángeles Japón Pineda, a la cual yo no conocía personalmente.

Mucho antes de terminar el Trabajo de Fin de Máster comprendí en todo su esplendor las palabras de seguridad en sí mismo de aquel profesor, porque era cierto que me dejó en las mejores manos.

Nunca podré agradecer a Mari Ángeles todo lo que ha hecho por mí desde que comenzamos aquel trabajo hasta la finalización de esta tesis. A parte de su gran labor como investigadora, tutora y directora de tesis, hechos objetivos y evidentes, yo destacaría su faceta humana. Ha sido sumamente paciente y comprensiva con mi situación laboral y personal, que quizás no sea tan favorable para llevar a cabo el desarrollo de una tesis como la de un alumno que puede dedicar a ello todo el tiempo que desee.

Además, me ha animado en momentos de bajón anímico y gracias a ella ha sido posible finalizar esta memoria. Quizás sea un tópico, pero en este caso es absolutamente cierto que sin ella, esta tesis no existiría a día de hoy,

por su ayuda y apoyo, hechos que son conocidos hasta la saciedad por mis familiares y amigos más cercanos. Ha sido un inmenso placer conocerla y poder trabajar con ella.

Desde que me decidí a estudiar Bachillerato y salir de mi pueblo para ello, los esfuerzos que han realizado mis padres para que, tanto mi hermano como yo, pudiésemos alcanzar nuestros propósitos académicos, han sido enormes. Ellos son dos personas cuya ilusión más grande en la vida es la de ver felices y realizados a sus hijos, a cualquier precio. Sacrificaron muchos momentos de diversión y placer para volcarse en nosotros. Fue duro porque hubo rachas económicas muy desfavorables, pero nos demostraron que con ilusión, amor, compromiso y dedicación todo es posible. Sus enseñanzas, que no están escritas en ningún libro, son los mejores conocimientos que me he llevado en la vida. Mi padre nunca pisó la escuela y mi madre lo hacía por cortas temporadas anuales y aunque, por desgracia, jamás comprenderán los conceptos que se exponen en esta tesis, sé que son, con total seguridad, los que más valor le van a dar.

A Anto la conocí a mediados de 2000 y a principios de 2001 comenzó la mejor etapa de mi vida. Ella ha estado desde entonces a mi lado en todos los acontecimientos. Me ha apoyado en momentos de debilidad, me ha ayudado en en momentos de dificultad y también ha disfrutado conmigo los instantes de esplendor. Fue ella la que más me animó y alentó para realizar esta tesis y siempre estuvo a mi lado sin pedir nada a cambio. Hubo incluso una ocasión donde estuve a punto de abandonar y ella se convirtió en mi psicóloga y consejera para convencerme que estaba muy cerca de conseguirlo, que debía hacerlo por mis padres y por ella, que se sentirían muy orgullosos de mí, por Mari Ángeles, por todo su trabajo y comprensión, y por mí mismo, por el hecho de que no hay satisfacción más grande que la de cumplir un sueño. De todo lo bueno que me ha ofrecido, destacaría su amistad y amor incondicionales, y le doy las gracias por haberme dado a Javier y Álvaro, los dos faros que iluminan mi vida cada día y me guían ante el reto más grande y hermoso al que me enfrentaré jamás, el de ser padre. Ella, junto a mis padres, es la persona que más orgullosa está de que esta tesis haya sido culminada.

Por último, también me gustaría acordarme de todos mis familiares y amigos que siempre me han apoyado y confiado en mí.

Sé que a todos, en un sentido u otro, les he robado algo irrecuperable, que es el tiempo de dedicación. A partir de ahora mi reto es ese, recompensarlos y recuperar parte de ese tiempo, llamémoslo no dedicado a ellos, porque no puedo decir que haya sido un tiempo perdido, sino invertido en cumplir un sueño.

Proverbios y Cantares

XXIX

Caminante, son tus huellas
el camino y nada más;
Caminante, no hay camino,
se hace camino al andar.
Al andar se hace el camino,
y al volver la vista atrás
se ve la senda que nunca
se ha de volver a pisar.
Caminante no hay camino
sino estelas en la mar.

XLIV

Todo pasa y todo queda,
pero lo nuestro es pasar,
pasar haciendo caminos,
caminos sobre la mar.

Antonio Machado.

A mis padres
y hermano.
A Anto.
A Javier y Álvaro.

Índice general

Introducción

La Teoría Métrica de Punto Fijo estudia la existencia de tales puntos bajo condiciones que dependen de la métrica considerada y que no son invariantes si cambiamos la métrica por otra equivalente. Esta teoría tiene sus orígenes en el Teorema de la Aplicación Contractiva de Banach, quien en 1922 probó que toda aplicación contractiva definida en un espacio métrico completo con imagen en sí mismo tiene un único punto fijo. Recordemos que dado un espacio métrico (C, d), una aplicación $T : C \to C$ se dice contractiva si existe una constante $K < 1$ tal que $d(Tx, Ty) \leq Kd(x, y)$ para todo $x, y \in C$. Este resultado tiene importantes aplicaciones en diferentes ramas de Matemáticas y en otras ciencias sociales.

Durante décadas, los avances sobre Teoría Métrica del Punto Fijo habían sido poco significativos, limitándose a pequeñas extensiones del Teorema de Banach, donde se relajaba débilmente la exigencia de contractividad, o se conseguía alguna generalización de dicho resultado para aplicaciones multivaluadas.

Si permitimos en la definición de contractividad que K sea igual a uno, un simple ejemplo como sería una traslación en $\mathbb{R}^n$ daría lugar a una aplicación que verifica $d(Tx, Ty) = d(x, y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y sin puntos fijos. Si consideramos el ejemplo $T : [1, +\infty) \to [1, +\infty)$ dado por $Tx = x + \frac{1}{x}$, conseguimos una aplicación que cumple $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ para todo $x, y \in [1, +\infty)$ y que de nuevo carece de puntos fijos.

La existencia de tales ejemplos quizás fue determinante para que muchos investigadores relegaran la posibilidad de rebajar la constante de contractividad al valor $K = 1$. Dado (C, d) un espacio métrico, vamos a decir que una aplicación $T : C \to C$ es no-expansiva si $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ para todo $x, y \in C$.

Los primeros resultados significativos de existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas llegaron en 1965 cuando F.E. Browder, D. Göhde y W.A. Kirk probaron la existencia de tales puntos en el entorno de espacios de Banach y bajo ciertas condiciones que dependen de la geometría del espacio. En concreto, D. Göhde y F. E. Browder probaron que si $T : C \to C$ es una aplicación no-expansiva, donde C es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach uniformemente convexo, entonces T tiene un punto fijo. Este resultado fue generalizado también en 1965 por W.A. Kirk, quién probó lo siguiente: Sea X un espacio de Banach con estructura normal débil (todo subconjunto convexo, débil compacto contiene un punto no diametral). Sea C un subconjunto convexo y débil compacto de X y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva. Entonces T tiene al menos un punto fijo.

Resulta que los espacios uniformemente convexos son una clase de espacios de Banach que tienen la propiedad geométrica de estructura normal.

Los resultados obtenidos dieron lugar a la siguiente nomenclatura:

- Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad de punto fijo (FPP) si para todo subconjunto convexo, cerrado y acotado y para toda aplicación $T : C \to C$ no-expansiva existe punto fijo.

- Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad débil de punto fijo (w-FPP) si para todo subconjunto convexo, débil compacto y para toda aplicación $T : C \to C$ no-expansiva existe punto fijo.

En espacios de Banach reflexivos ambas definiciones coinciden. Los resultados anteriores afirman que los espacios de Banach uniformemente convexos y más generalmente los espacios de Banach reflexivos con estructura normal (todo subconjunto convexo, cerrado y acotado contiene un punto no diametral) cumplen la FPP. También que los espacios de Banach con estructura normal débil satisfacen la w-FPP.

La propiedad de estructura normal no caracteriza ni mucho menos los espacios de Banach con la FPP o con la w-FPP. Tras el resultado de W.A. Kirk , se puede encontrar una extensa bibliografía donde se estudian nuevas propiedades geométricas no relacionadas con la estructura normal y que igualmente implican la w-FPP o la FPP en caso de espacios de Banach reflexivos.

De igual forma, no todos los espacios de Banach cumplen la w-FPP o la FPP. Por ejemplo los espacios de sucesiones ℓ_1 y c_0 no satisfacen la FPP mientras que en 1981, D.E. Alspach probó que el espacio de Banach $L_1[0,1]$ no cumple la w-FPP.

A lo largo de esta Memoria estaremos interesados principalmente en la propiedad de punto fijo FPP. En la última sección del Capítulo 4 y en la primera del Capítulo 5 estudiaremos propiedades relacionadas con la w-FPP y otras extensiones a diferentes topologías.

Debido a que todas las propiedades geométricas encontradas que implican la FPP necesitan suponer como hipótesis adicional la reflexividad, durante mucho tiempo se conjeturó que reflexividad y FPP podrían ser condiciones equivalentes para un espacio de Banach. A día de hoy, no conocemos si todo espacio reflexivo tiene la FPP, pero sí que existen espacios de Banach no reflexivos que verifican la FPP.

Quisiéramos hacer notar lo siguiente: la FPP es una condición que depende de la norma considerada en el espacio de Banach. Al cambiar la norma por otra equivalente el conjunto de aplicaciones no-expansivas puede variar. De hecho la FPP no se conserva por isomorfismos.

La Teoría de Renormamiento estudia si un espacio de Banach puede ser renormado o no para satisfacer una cierta condición. En esta línea podemos decir que la Teoría Métrica de Punto Fijo y la Teoría de Renormamiento conectan con la aparición de los siguientes resultados:

- T. Domínuez Benavides probó en 2009 que todo espacio de Banach reflexivo admite una norma equivalente que sí cumple la FPP.
- P.K. Lin probó en 2008 que el espacio de sucesiones ℓ_1 también admite una norma equivalente cumpliendo la FPP.

También se conocen resultados en un sentido negativo, es decir, existen espacios de Banach no reflexivos que no admiten una norma equivalente que pueda cumplir la FPP. Ejemplos de tales espacios son el espacio ℓ_∞, o los espacios $\ell_1(\Gamma)$ y $c_0(\Gamma)$ cuando Γ es un conjunto no numerable.

En la actualidad, no conocemos si todo espacio reflexivo cumple la FPP, pero sí que admite una norma equivalente con tal propiedad. Por otra parte, el renormamiento de ℓ_1 obtenido por P.K. Lin finalmente prueba que el recíproco de la conjetura anunciada es falso, es decir, existen espacios de Banach no reflexivos que sí cumplen la FPP

El artículo de P.K. Lin será nuestra base de partida. A partir de su publicación, han sido varios los artículos que estudian nuevos renormamientos en

ℓ_1 y en otros espacios de Banach particulares no reflexivos y que satisfacen la FPP.

La Memoria presentada está dividida en cinco capítulos. En el primer Capítulo se enuncian los resultados previos que son necesarios para el resto del manuscrito. Pasamos a comentar brevemente el contenido de cada uno de los capítulos siguientes:

- En el Capítulo 2 definimos un nuevo coeficiente geométrico $S(X, p)$, donde X es un espacio de Banach con una base de Schauder y p es una norma equivalente en X. Este coeficiente será llamado coeficiente de separación secuencial de (X, p) y diremos que la norma p es secuencialmente separadora si $S(X, p) = 1$. Estudiaremos diversas propiedades geométricas de tal coeficiente así como otras definiciones equivalentes.

- En el Capítulo 3 aplicaremos el concepto de normas secuencialmente separadoras a la teoría de renormamientos con la propiedad de punto fijo. Probaremos que todo espacio de Banach con base de Schauder acotadamente completa y que admita una norma equivalente premonótona y secuencialmente separadora, puede ser renormado para tener la FPP. Como caso particular se obtiene el resultado de P.K. Lin citado anteriormente y otros publicados con posterioridad. Sin embargo, nuestra técnica nos va a permitir obtener sucesiones de normas equivalentes cumpliendo la FPP y definidas por recurrencia a partir de una dada. Bajo estas condiciones, se estudian también propiedades de linealidad del conjunto de normas equivalentes en X que cumplen la FPP, probándose que contienen variedades afines n-dimensionales para todo $n \in \mathbb{N}$. Estos resultados son aplicados en diferentes clases de espacios de Banach y generalizan ampliamente otros conocidos para el caso de ℓ_1 y $n = 1$.

- El Capítulo 4 está dividido en dos secciones. En la primera estudiaremos propiedades geométricas de los espacios de Banach que admiten una norma equivalente secuencialmente separadora. En particular probaremos que tienen la propiedad de Schur y que son hereditariamente ℓ_1.

  En la segunda sección relacionaremos el coeficiente $S(X, p)$ con la τ-FPP donde τ es la topología débil o la topología débil estrella en un espacio dual. Definiremos el concepto de τ-FPP para una topología arbitraria como una extensión natural de la w-FPP cuando el dominio de la aplicación es compacto para otras topologías que pueden ser consideradas en un espacio de Banach.

- En el Capítulo 5 obtendremos propiedades relacionadas con la estabilidad de la propiedad de punto fijo. El concepto de estabilidad estudia si una norma próxima a otra dada verificando la τ-FPP conserva también dicha propiedad. El capítulo está dividido en dos secciones. En la primera definiremos el concepto de distancia entre normas equivalentes, veremos que toda norma secuencialmente separadora da lugar una constante de estabilidad igual a 2 para la w^*-FPP y además, probaremos que es la máxima cota posible en general. Es decir, no puede existir en ℓ_1 ninguna norma equivalente que tenga una cota de estabilidad estríctamente mayor que 2 para la w^*-FPP.

  En la última sección del capítulo estudiaremos resultados de estabilidad en el caso de renormamientos del espacio de sucesiones c_0. Concretamente probaremos que el conjunto de normas que no tienen la FPP y que carecen de copias asintóticamente isométricas de c_0 es denso en el conjunto de normas equivalentes de c_0. Este resultado extiende otros conocidos sobre estabilidad de la FPP en el espacio de sucesiones c_0.

1 Preliminares

Sean C un conjunto y $T : C \to C$ una aplicación. Diremos que $x \in C$ es un punto fijo de T si $Tx = x$.

La Teoría Métrica de Punto Fijo estudia la existencia de tales puntos bajo condiciones que dependen de la métrica considerada y que, por lo general, no se conservan si cambiamos la métrica por otra equivalente. Este no es el caso de otros resultados de punto fijo muy conocidos, como son el teorema de Brouwer o el Teorema de Schauder:

Teorema 1.1. *(Teorema del punto fijo de Brouwer, 1912). Sea $B^n \subset \mathbb{R}^n$ la bola unidad cerrada y sea $T : B^n \to B^n$ una aplicación continua. Entonces T tiene punto fijo.*

En 1930 Schauder [54] demuestra una generalización del resultado anterior para espacios de dimensión infinita.

Teorema 1.2. *(Teorema de Schauder) Sea X un espacio de Banach y $K \subset X$ convexo y compacto para la norma. Si $T : K \to K$ es continua, entonces existe $x \in K$ tal que $T(x) = x$.*

Finalmente, en 1935 el teorema de punto fijo de Schauder fue generalizado a espacios vectoriales localmente convexos por Tychonoff [55].

Obsérvese que la continuidad de la aplicación es un invariante topológico y no depende de la norma equivalente considerada.

La Teoría Métrica del Punto Fijo tiene sus orígenes con el Teorema la Aplicación Contractiva de Banach, probado por S. Banach en su tesis en 1922.

Recordemos que dado un espacio métrico (C, d), una aplicación $T : C \to C$ se dice que es contractiva si existe una constante $k < 1$ tal que $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ para todo $x, y \in C$.

Teorema 1.3. *(Principio de la Aplicación Contractiva). Sea (C, d) un espacio métrico completo. Si $T : C \to C$ es una aplicación contractiva entonces T tiene un único punto fijo. Además, la sucesión $(T^n x_0)$ converge a hacia el punto fijo, para cualquier $x_0 \in C$ fijado.*

Una simple traslación en $\mathbb{R}^n$ muestra que resultado anterior no es cierto si relajamos la condición de contractividad, permitiendo que la constante k sea igual a uno. Dado un espacio métrico (C, d) diremos que $T : C \to C$ es no-expansiva si $d(Tx, Ty) \leq d(x, y)$ para todo $x, y \in C$.

Los primeros resultados positivos de existencia de puntos fijos para aplicaciones no-expansivas aparecieron en 1965 en el entorno de subconjuntos convexos, cerrados y acotados de un espacio de Banach.

Definición 1.4. *Sea X es un espacio de Banach y $C \subset X$, se dice que:*

C es convexo si para todo $\lambda \in [0, 1]$ se tiene que $\lambda C + (1 - \lambda)C \subset C$.

C es acotado si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in C$ se tiene que $\|x\| \leq M$.

C es cerrado si lo es para la topología generada por la norma en el espacio X.

Recordemos a continuación algunos ejemplos de espacios de Banach de sucesiones clásicos:

Definición 1.5.

- *Se define el espacio c_0 como*

$$c_0 = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \right\},$$

  dotado de la norma $\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \max\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

- *Se define el espacio ℓ_p, para todo $1 \leq p < \infty$, como*

$$\ell_p = \left\{ \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\},$$

  dotado de la norma $\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$.

- *Se define el espacio* ℓ_∞ *como*

$$\ell_\infty = \{\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \textit{ está acotada}\},$$

dotado de la norma $\|\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup\{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}$.

Definición 1.6. *Un espacio de Banach X se dice que es uniformemente convexo si para todo $\varepsilon \in (0,2]$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in B_X$ con $\|x-y\| > \epsilon$ se cumple*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1-\delta.$$

Teorema 1.7. *(F.E. Browder, D. Göhde, 1965) Sea X un espacio de Banach uniformemente convexo, C un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva. Entonces T tiene punto fijo.*

Definición 1.8. *Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad del punto fijo (FPP) si para todo $C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y para toda aplicación $T : C \to C$ no-expansiva, existe $x \in C$ tal que $Tx = x$.*

Por tanto, el resultado anterior muestra que los espacios uniformemente convexos cumplen la FPP. Usando la igualdad del paralelogramo, no es difícil comprobar que los espacios de Hilbert son también uniformemente convexos y que por tanto verifican la FPP.

Por otra parte, estos resultados tampoco pueden generalizarse si la aplicación es Lipschitziana con constante $k > 1$, es decir, si $\|Tx - Ty\| \leq k\|x-y\|$ para todo $x, y \in C$ y para algún $k > 1$. En efecto, sea $H = \ell_2$, B_H la bola unidad cerrada, sea $\epsilon > 0$ y se considera la aaplicación $T_\epsilon : B_H \to B_H$ dada por:

$$T_\epsilon(x_1, x_2, \cdots) = (\epsilon(1 - \|x\|_2), x_1, x_2, ...).$$

Es fácil ver que T no tiene puntos fijos y es Lipschitziana con constante $k = (1+\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}$. Más generalmente, P.K. Lin e Y. Sternfeld demostraron [45] que si C es un subconjunto convexo y no compacto de un espacio de Banach X, entonces para todo $k > 1$ existe un operador $T : C \to C$ cuya constante de Lipschitz es igual a k y tal que T no posee puntos fijos.

Ejemplo 1.9. Los espacios de Hilbert, los espacios $(\ell_p, \|.\|_p)$ y los $(\mathrm{L}_p, \|.\|_p)$ con $1 < p < +\infty$ son uniformemente convexos y por tanto cumplen la FPP.

En el mismo año, el resultado de F.E. Browder y D. Göhde fue generalizado por W.A. Kirk [39] para espacios de Banach con estructura normal.

Definición 1.10. *Sean X un espacio de Banach y C un subconjunto de X acotado con $diam(C) > 0$. Decimos que $x_0 \in C$ es un punto diametral si*

$$\sup_{x \in C} \|x - x_0\| = diam(C).$$

El conjunto C se llama diametral si todos sus puntos son diametrales.

No es difícil comprobar que todo subconjunto C no trivial, convexo y compacto para la topología de la norma, contiene un punto que no es diametral, es decir, existe $x_0 \in C$ tal que $\sup\limits_{x \in C} \|x - x_0\| < diam(C)$.

Definición 1.11. *Un espacio de Banach X se dice que tiene estructura normal (NS) si todo subconjunto convexo, cerrado, acotado de X con diámetro positivo, contiene un punto no diametral.*

La estructura normal en un espacio de Banach fue definida por Brodskii y Milman [8] en 1948 relacionada con problemas de Análisis Lineal. Posteriormente adquirió gran importancia en Teoría Métrica de Punto Fijo con el siguiente resultado de W.A. Kirk que la relaciona con la propiedad del punto fijo.

Teorema 1.12. *(W.A. Kirk, 1965) Sea X un espacio de Banach reflexivo que con NS. Entonces X tiene la FPP.*

La implicación en sentido contrario no se cumple, ya que existen espacios reflexivos con la FPP que no tienen estructura normal. En 1976, L.A. Karlovitz dio un ejemplo en [38] de dichos espacios.

Ejemplo 1.13. Sea ℓ_2 dotado de la norma equivalente

$$\|x\| = \text{máx}\left\{\|x\|_\infty, \frac{\|x\|_2}{\sqrt{2}}\right\}$$

El espacio $(\ell_2, \|.\|)$ tiene la FPP, pero no tiene NS.

Existen otras propiedades geométricas que aseguran la FPP en espacios de Banach reflexivos. Algunos ejemplos son las siguientes:

- (D. van Dulst y B. Sims [23]) Sea X un espacio de Banach reflexivo que verifica la condición de Kadec Klee uniforme. Entonces X tiene la FPP.

- (J.P. Gossez y E. Lami Dozo [28]) Sea X un espacio de Banach reflexivo que verifica la condición de Opial uniforme. Entonces X tiene la FPP.
- (P.K. Lin [42]) Sea X un espacio de Banach reflexivo para el cual existe una base 1-incondicional. Entonces X tiene la FPP.

Para estos resultados y otros relacionados se puede consultar las referencias [3], [27], [40].

Hay que destacar que la no-expansividad de una aplicación depende fuertemente de la norma que estemos considerando. El conjunto de aplicaciones no-expansivas puede cambiar si cambiamos la norma por otra equivalente.

Dado un espacio de Banach $(X, \|.\|)$, se define el conjunto de las normas equivalentes como

$$\mathcal{P}(X) := \{p : X \to [0, +\infty) : p \text{ es norma equivalente a } \|.\|\}.$$

Recordemos que dos normas $\|.\|$ y $|.|$ son equivalentes si existen $m, M > 0$ tales que para todo $x \in X$ se tiene que $m\|x\| \leq |x| \leq M\|x\|$. En este caso decimos que $(X, |.|)$ es un renormamiento de $(X, \|.\|)$.

Hemos comprobado que ciertas clases de espacios de Banach tienen la FPP. También existen espacios de Banach que no verifican dicha propiedad: ejemplos clásicos son los espacios de sucesiones ℓ_1 y c_0 dotados de sus normas habituales.

Ejemplo 1.14.

1. El espacio $(\ell_1, \|.\|_1)$ no cumple la FPP.

   Sean

   $$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n : t_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} t_n = 1 \right\}$$

   el cual es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de ℓ_1. Se considera la aplicación $T : C \to C$ definida por

   $$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_{n+1}.$$

   T es no-expansiva y sin puntos fijos.

2. El espacio $(c_0, \|.\|_\infty)$ no tiene la FPP.

   Sea

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n : 0 \leq t_n \leq 1 \right\},$$

   que es convexo, cerrado y acotado. Se define $T : C \rightarrow$ dada por

$$T(x) = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n e_n \right) = e_1 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n e_{n+1},$$

   T es no-expansiva y sin puntos fijos.

Durante más de cuarenta años, se habían publicado numerosos resultados estudiando la conjetura "FPP$\Longleftrightarrow$ reflexividad", obteniéndose soluciones parciales pero sin llegar a resolver el problema. En dichos intentos, las copias asintóticamente isométricas de ℓ_1 y c_0 jugaron un papel fundamental. Antes de introducir las definiciones correspondientes vamos a recordar el Teorema de distorsión de James.

En el año 1964, R.C. James [35] demuestra el siguiente resultado:

Teorema 1.15. *(Teorema de distorsión de James). Sea p una norma equivalente en ℓ_1. Entonces para cada $\epsilon \in (0,1)$ existe una sucesión (x_n) en ℓ_1 tal que*

$$(1-\epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \leq p\left(\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|$$

para todo $(t_n) \in \ell_1$.

James obtiene un resultado similar para para el espacio c_0, con $p \in \mathcal{P}(c_0)$ y considerando la norma usual $\| \cdot \|_\infty$.

Analizando la demostración del Teorema de James, se consigue obtener una copia casi isométrica de ℓ_1, es decir una sucesión (x_n) que cumple

$$(1-\epsilon_m) \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \leq p\left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n x_n \right) \leq \sum_{n=m}^{\infty} |a_n|.$$

para una sucesión (ϵ_n) con $\lim_n \epsilon_n = 0$. Es decir, todo renormamiento de ℓ_1 contiene una copia casi isométrica de ℓ_1.

El papel que juega la sucesión (ϵ_n) en la desigualdad anterior motivó a J. Hagler a introducir la siguiente definición:

Definición 1.16. *(J. Hagler, 1972) Un espacio de Banach X contiene una copia asintóticamente isométrica (c.a.i.) de ℓ_1 si existen una sucesión (x_n) en X y una sucesión (ϵ_n) en $(0,1)$ con $\epsilon_n \to_n 0$ tales que*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon_n)|t_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n|, \qquad \forall (t_n)\in \ell_1.$$

J. Hagler probó que un espacio de Banach tiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 si y solo si su dual contiene una copia isométrica de $L_1[0,1]$, generalizando así un resultado anterior de A. Pelczyński para copias isomorfas de ℓ_1.

Esta noción fue recuperada por P.N. Dowling y C.J. Lennard, los cuales definieron un concepto similar en el caso de c_0:

Definición 1.17. *(P.N. Dowling, C.J. Lennard, 1997) Se dice que un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ contiene una copia asintóticamente isométrica (c.a.i.) de c_0 si existen una sucesión (x_n) en X y una sucesión (ϵ_n) en $(0,1)$ con $\lim_n \epsilon_n = 0$ tales que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(1-\epsilon_n)|t_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}|t_n|, \qquad \forall (t_n)\in c_0.$$

Finalmente, estas definiciones se relacionan con la propiedad de punto fijo de la siguiente forma:

Teorema 1.18. *(P.N. Dowling, C.J. Lennard, 1997) Si un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ tiene una c.a.i. de ℓ_1 o de c_0, entonces $(X, \|\cdot\|)$ no cumple la FPP.*

Demostración: Vamos a mostrar la prueba en el caso de que el espacio X tenga una c.a.i. de ℓ_1. La demostración para el caso en que tuviera c.a.i. de c_0 es análoga tomando convenientemente el conjunto C donde se define la aplicación T que no tiene punto fijo.

La idea consiste en incluir de alguna forma el ejemplo anterior de una aplicación no-expansiva sin puntos fijos definida en un subconjunto convexo, cerrado y acotado de ℓ_1, al espacio de Banach X.

Tomemos una sucesión $\{x_n\} \subset X$ tal que para todo $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \in \ell_1$ se verifique:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\epsilon_n)|a_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|.$$

En primer lugar, notemos que esto implica que $\|x_n\| \leq 1$. Tomemos una sucesión estrictamente decreciente $\lambda_n \in (1, +\infty)$ con $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 1$. Sin pérdida de generalidad, tomando una subsucesión si fuese necesario, podemos suponer que $\lambda_{n+1} < (1-\epsilon_n)\lambda_n$.

Sea $C = \overline{co}\{\lambda_n x_n\}$, que es un subconjunto no vacío, cerrado, acotado y convexo. Sea $y_n = \lambda_n x_n$. Se puede probar que $x \in C$ si y solo si $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n y_n$, con $\gamma_n \geq 0$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n = 1$.

Se define $T : C \to C$ por $T\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n y_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n y_{n+1}$. T es una aplicación que no tiene puntos fijos. Queda probar que es no-expansiva. Tomemos $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n y_n$ e $y = \sum\limits_{n=1}^{\infty} s_n y_n$, entonces

$$\|Tx - Ty\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty}(t_n - s_n)y_{n+1}\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n - s_n|\|y_{n+1}\| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n - s_n|\lambda_{n+1} < \sum_{n=1}^{\infty}|t_n - s_n|(1-\epsilon_n)\lambda_n \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty}\|(t_n - s_n)y_n\| = \|x - y\|.$$

De hecho, en realidad de se prueba que $\|Tx - Ty\| < \|x - y\|$ para todo $x, y \in C$. ■

Tras la dificultad de encontrar ejemplos concretos de aplicaciones no-expansivas sin puntos fijos en un espacio de Banach en general, con el resultado anterior conocemos que todos los subespacios infinito dimensionales de $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$, todo subespacio no reflexivo de $(L_1[0,1], \|\cdot\|_1)$ o todo espacio de Orlicz no reflexivo dotado con la norma de Orlicz, no tienen la FPP porque estos espacios contienen una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 [17], [16].

Lo mismo ocurre por ejemplo para todos los subespacios infinito dimensionales de $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ o los espacios no reflexivos de $K(H)$ (los operadores lineales y compactos en un espacio de Hilbert con la norma usual). Estos espacios no cumplen la FPP porque contienen una copia asintótica de c_0 (ver [40], Capítulo 9).

Por otra parte, si Γ es no numerable, todo renormamiento de $\ell_1(\Gamma)$ y de $c_0(\Gamma)$ contienen una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 o de c_0 respectivamente. Este resultado muestra que $\ell_1(\Gamma)$ y $c_0(\Gamma)$ no pueden ser renormados para tener la FPP. Lo mismo ocurre para el espacio de sucesiones ℓ_∞, ya que este espacio contiene a un $\ell_1(\Gamma)$ para Γ no numerable (ver [40], Capítulo 9).

Surge entonces la cuestión de si todo renormamiento de ℓ_1 o de c_0 contiene una copia asintótica de ℓ_1 o c_0 respectivamente. La respuesta es negativa en ambos casos.

Consideremos el caso de renormamientos de ℓ_1:

Ejemplo 1.19. [17]
Sea (γ_k) una sucesión en $(0,1)$ tal que $\gamma_k \to 1$. Definimos la siguiente norma

$$|||(t_n)||| = \sup_k \gamma_k \sum_{n=k}^{\infty} |t_n|, \qquad \forall (t_n) \in \ell_1.$$

Se tiene que $(\ell_1, |||.|||)$ es un renormamiento de $(\ell_1, \|.\|_1)$ el cual no tiene c.a.i de ℓ_1.

Además es fácil comprobar que $\gamma_1\|x\|_1 \leq |||x||| \leq \|x\|_1$ para todo $x \in \ell_1$, por tanto se pueden conseguir renormamientos sin tales copias tan cerca como se quiera de la norma usual de ℓ_1.

Finalmente, P.K. Lin demostró [43] que este espacio sí cumple la FPP.

Teorema 1.20. *(P.K. Lin, 2008) El espacio* $(\ell_1, |||.|||)$ *tiene la FPP.*

Como conclusión, para un espacio de Banach tener la FPP no implica ser reflexivo, respondiendo de forma negativa a una de las implicaciones de la conjetura de W.A. Kirk.

Tras el artículo de P.K. Lin, varios autores han obtenido otras normas equivalentes en ℓ_1 con la FPP u otros espacios no-reflexivos que también pueden renormarse para cumplir la FPP (ver por ejemplo [25], [33], [34], [21], [44]). Los resultados obtenidos en estos artículos y relacionados con el contenido de la Tesis serán enunciados a lo largo de la Memoria.

Por el contrario, T. Domínguez Benavides probó en [12] que todo espacio de Banach reflexivo puede ser renormado para tener la FPP (aunque no se sabe si la FPP es cierta para la norma de partida).

Los resultados anteriores sugieren la siguiente pregunta: ¿Qué clase de espacios de Banach no reflexivos pueden ser renormados para tener la FPP?

En gran parte de los contenidos de la Memoria supondremos que X es un espacio de Banach con una base de Schauder. Recordamos a continuación los conceptos y notaciones habituales:

Definición 1.21. *Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach y sea (e_n) una sucesión de elementos del espacio X. Se dice que (e_n) es una base de Schauder de X si para todo $x \in X$ existe una única sucesión $(x_n) \subset \mathbb{R}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$, donde la convergencia se entiende bajo la topología de la norma, es decir, $\lim_{n\to\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| = 0$.*

Una base de Schauder (e_n) se dice que es normalizada si $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Una sucesión (e_n) se dice que es una sucesión básica si es una base de Schauder de la clausura del espacio lineal generado por ella misma, es decir, de $\overline{span}(\{e_n\})$.

Dado una base de Schauder (e_n) en un espacio de Banach X, diremos que una sucesión $(y_n) \subset X$ es una sucesión bloque de la base, si existen enteros positivos $p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 < ...$ tal que y_n pertenece al $span(\{e_{p_n}, \cdots, e_{q_n}\})$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es decir,

$$y_n = \sum_{k=p_n}^{q_n} x_k^n e_k.$$

El espacio dual de un espacio de Banach X se denota por X^*, y está formado por todos los funcionales lineales y acotados definidos en X. Dada una base de Schauder $\{e_n\}$ en X, se definen los funcionales coordenados $e_n^* \in X^*$ mediante $e_n^*(x) = x_n$.

Las proyecciones $P_n : X \to span(\{e_n\})$ se definen como sigue

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} e_k^*(x) e_k = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \text{ si } x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k.$$

Las proyecciones P_n y los funcionales coordenados e_n^* asociados a la base son continuos. Además, $\sup_n \|P_n\| < \infty$. El número $\sup_n \|P_n\|$ se denomina constante de la base $\{e_n\}$ y se dice que la base de Schauder es monótona si la constante básica es igual a uno.

Usaremos también la siguiente notación:

Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$, denotamos al soporte de x por

$$supp(x) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}.$$

Si $k \in \mathbb{N}$, denotaremos

$$Q_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} x_n e_n.$$

Si x e y son dos vectores en X, diremos que $x \ll y$ en el caso que $\max supp(x) < \min supp(y)$. De manera similar, dados $k, r \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, denotaremos por $k \ll x$ ($x \ll r$) cuando ocurra $e_k \ll x$ ($x \ll e_r$).

Definición 1.22. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder (e_n) y sea $p \in \mathcal{P}(X)$:*

Se dice que p es premonótona si $p(Q_k x) \leq p(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $x \in X$.

Se dice que p es monótona si $p(P_k x) \leq p(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y todo $x \in X$.

Se dice que p es bimonótona si es premonótona y monótona.

Diremos que una base de Schauder (e_n) es incondicional si para todo $x \in X$ su expresión en términos de la base $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$ converge incondicionalmente.

Diremos que una base de Schauder es acotadamente completa si para toda sucesión de escalares (a_n) tal que $\sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \right\| < +\infty$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge en el espacio de Banach. Por último, recordar que un espacio de Banach X con una base de Schauder acotadamente completa es isomorfo a un espacio de Banach dual. En caso de que la base sea monótona X es isométrico a un espacio de Banach dual [47].

2 Normas Secuencialmente Separadoras

La desigualdad triangular afirma que $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$ para todo x, y en cualquier espacio de Banach. Podríamos preguntarnos en qué condiciones podríamos asegurar si la desigualdad contraria es cierta al multiplicarla por alguna constante mayor que uno.

A lo largo de esta capítulo X será un espacio de Banach dotado con una base de Schauder $\{e_n\}$. Diremos que dos vectores $x, y \in X$ tienen soportes disjuntos si $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$.

En el espacio ℓ_1 dotado con la norma usual $\|\cdot\|_1$ es cierto que $\|x\|_1 + \|y\|_1 = \|x+y\|_1$ cuando los vectores $x, y \in \ell_1$ y tienen soportes disjuntos. En general para vectores de soportes disjuntos $x, y \in \ell_r$ dotado con la norma usual $\|\cdot\|_r$ $(1 \leq r < +\infty)$, se obtiene $\|x\|_r^r + \|y\|_r^r = \|x+y\|_r^r$ y por tanto $\|x\|_r + \|y\|_r \leq 2^{\frac{r-1}{r}} \|x+y\|_r$.

En este capítulo vamos a definir un nuevo coeficiente geométrico en espacios de Banach con base de Schauder que nos permita obtener un recíproco de la desigualdad triangular salvo múltiplo por una constante en un sentido secuencial y para vectores con soporte disjuntos. Además considerando vectores cuyos soportes comienzan en coordenadas lejanas al origen podremos estudiar el comportamiento asintótico de dichas constantes.

La idea original surge al intentar extender la siguientes definición dada en [33]:

Definición 2.1. *Sea X espacio de Banach con base de Schauder y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$. Se dice que $p(\cdot)$ cumple la condición $(*)$ si verifica que*

$$\limsup_n p(x_n + x) = \limsup_n p(x_n) + p(x)$$

para toda (x_n) *sucesión bloque acotada de la base y para todo* $x \in X$*.*

Esta propiedad fue aplicada en [33] para obtener renormamientos en ℓ_1 con la propiedad de punto fijo (FPP). Sin embargo, H. Fetter y B. Gamboa probaron en [25] que si un espacio de Banach X tiene la condición $(*)$ para una norma $p(\cdot)$, entonces (X,p) contiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 y por tanto (X,p) no puede tener la FPP. A pesar de este resultado negativo, la condición $(*)$ se aplica en [33] para obtener renormamientos de ℓ_1 con la FPP de la siguiente forma:

Teorema 2.2. *[33] Sea* $p(\cdot)$ *una norma en* ℓ_1 *equivalente a la usual cumpliendo la condición* $(*)$*. Entonces la norma*

$$\|\cdot\|_p = p(\cdot) + \lambda|||\cdot|||$$

tiene la FPP para todo $\lambda > 0$*.*

En el teorema anterior, $|||\cdot|||$ denota la norma equivalente en ℓ_1 de P.K. Lin, definida en Ejemplo 1.19 de la sección de Preliminares. Nótese que por el resultado anterior de Fetter y Gamboa, el Teorema 2.2 no se puede extender para $\lambda = 0$.

La norma $\|\cdot\|_1$ verifica la propiedad $(*)$ y por tanto por el Teorema 2.2 se deduce que el rayo de normas equivalentes en ℓ_1

$$\|\cdot\|_1 + \lambda|||\cdot|||$$

verifican la FPP para todo $\lambda > 0$.

Los coeficientes geométricos definidos en este capítulo serán aplicados a la teoría métrica de punto fijo para aplicaciones no-expansivas en los Capítulos III y IV de la Memoria. En particular generalizaremos y extenderemos los resultados de renormamientos de ℓ_1 con la FPP obtenidos en [33] en dos aspectos: podremos considerar nuevas normas en ℓ_1 cumpliendo la FPP y podremos considerar nuevos espacios no isomorfos a ℓ_1, que podrán ser renormados con múltiples normas equivalentes con la propiedad de punto fijo.

2.1. Primeras nociones y ejemplos

Definición 2.3. *Sea* X *un espacio de Banach con base de Schauder y sea* $p(\cdot)$ *una norma en* X*. Decimos que* $p(\cdot)$ *es secuencialmente separadora si para todo* $\epsilon > 0$ *existe algún* $k \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$p(x) + \limsup_n p(x_n) \leq (1+\epsilon) \limsup_n p(x + x_n)$$

siempre que $k \leq x$ *y* $(x_n)_n$ *sea una sucesión bloque acotada de la base de Schauder en* X*.*

Claramente, toda norma que cumple la condición $(*)$ es secuencialmente separadora. No obstante, la implicación contraria no va a ser cierta en general, propiedad que probaremos más adelante.

A continuación vamos a introducir unos coeficientes geométricos que miden lo cerca que una norma $p(\cdot)$ puede estar de ser secuencialmente separadora. Abusando de la notación, supondremos que las sucesiones bloque estás siempre acotadas en la norma del espacio de Banach.

Definición 2.4. *Para todo* $k \in \mathbb{N}$ *definimos*

$$S_k(X,p) = \sup \left\{ \frac{p(x) + \limsup_n p(x_n)}{\limsup_n p(x + x_n)} : k \leq x; (x_n) \text{ sucesión bloque} \right\}.$$

Con la definición dada podemos afirmar que

$$p(x) + \limsup_n p(x_n) \leq S_1(X,p) \limsup_n p(x + x_n)$$

para toda sucesión bloque de la base dada. Además

$$p(x) + \limsup_n p(x_n) \leq S_k(X,p) \limsup_n p(x + x_n)$$

para todo vector $x \in X$ cuyo soporte comience a partir de la coordenada k-ésima y toda sucesión bloque de la base.

Las primeras propiedades que se pueden obtener sobre estos coeficientes son las siguientes:

1. $S_k(X,p) \geq 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, debido a la desigualdad triangular.

2. $\{S_k(X,p)\}_k$ es una sucesión monótona decreciente en $[1,+\infty)$, debido a que vamos tomando supremo en conjuntos cada vez más pequeños.

A partir de aquí podemos estudiar el comportamiento de las constantes $S_k(X,p)$ con la siguiente definición:

Definición 2.5. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder y sea $p \in \mathcal{P}(X)$. Definimos el coeficiente de separación secuencial de la norma $p(\cdot)$ como*

$$S(X,p) := \lim_k S_k(X,p).$$

Este coeficiente se relaciona con la separación secuencial de la norma definida anteriormente de la siguiente forma:

Lema 2.6. *Sea $p(\cdot)$ una norma en un espacio de Banach X con base de Schauder. Entonces $p(\cdot)$ es secuencialmente separadora si y solo si*

$$S(X,p) = 1.$$

Demostración.
Supongamos primero que $S(X,p) = 1$ y tomemos $\epsilon > 0$. Como la sucesión $(S_k(X,p))_k$ decrece a 1, podemos escoger un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $S_{k_0}(X,p) \leq 1+\epsilon$, por tanto:

$$p(x) + \limsup_n p(x_n) \leq S_{k_0}(X,p) \limsup_n p(x+x_n) \leq (1+\epsilon) \limsup_n p(x+x_n)$$

siempre que $k_0 \leq x$ y (x_n) sea una sucesión bloque.

Supongamos ahora que $p(\cdot)$ es una norma secuencialmente separadora. Tomemos $\epsilon > 0$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p(x) + \limsup_n p(x_n) \leq (1+\epsilon) \limsup_n p(x+x_n)$$

siempre que $k_0 \leq x$ y (x_n) sea una sucesión bloque.

Por tanto, para todo $k \geq k_0$ se tiene que

$$1 \leq S_k(X,p) \leq S_{k_0}(X,p) \leq 1+\epsilon,$$

lo que implica que $S(X,p) = 1$. ∎

Vamos a dar los primeros ejemplos donde calcularemos los coeficientes de separación secuencial en algunos espacios clásicos.

Ejemplo 2.7. Sea $(\ell_1, \|.\|_1)$, dotado de la base de Schauder habitual $\{e_n\}$ de vectores unitarios. Se cumple que $S(\ell_1, \|.\|_1) = S_k(\ell_1, \|.\|_1) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

De hecho, para toda norma $p(\cdot)$ que verifique la condición $(*)$ en un espacio de Banach X con base de Schauder, se cumple $S(X,p) = S_k(X,p) = 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2.8. Consideremos la siguiente norma en el espacio ℓ_1:

$$\|x\|_{1,\infty} = \text{máx}\{\|x^+\|_1, \|x^-\|_1\}.$$

Esta norma satisface que $\frac{1}{2}\|x\|_1 \leq \|x\|_{1,+\infty} \leq \|x\|_1$, lo cual implica que $S_k(\ell_1, \|\cdot\|_{1,\infty}) \leq 2$, ya que si $k \leq x$ y (x_n) es una sucesión bloque, se tiene que

$$\frac{\|x\|_{1,\infty} + \text{lím sup}_n \|x_n\|_{1,\infty}}{\text{lím sup}_n \|x + x_n\|_{1,\infty}} \leq \frac{\|x\|_1 + \text{lím sup}_n \|x_n\|_1}{\frac{1}{2}\text{lím sup}_n \|x + x_n\|_1} = 2,$$

y tomando supremo en k ya se cumple. Tomando $x = e_k$ y $x_n = -e_n$, se tiene que $S_k(\ell_1, \|\cdot\|_{1,\infty}) = 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $S(\ell_1, \|\cdot\|_{1,\infty}) = 2$.

Ejemplo 2.9. Sea $(\ell_r, \|.\|_r)$, siendo $r > 1$, dotado de la base de Schauder habitual. Se cumple que $S(\ell_r, \|.\|_r) = S_k(\ell_r, \|.\|_r) = 2^{\frac{r-1}{r}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. En efecto. Veamos en primer lugar que si $x \ll y$ se cumple que

$$\|x\|_r + \|y\|_r \leq 2^{\frac{r-1}{r}} \|x + y\|_r.$$

Para ello basta probar que

$$a + b \leq 2^{\frac{r-1}{r}} (a^r + b^r)^{\frac{1}{r}}, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

después se toman $a = \|x\|_r$ y $b = \|y\|_r$ y ya estaría probado.

Tomemos la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^r (r > 1)$. Esta función es convexa, luego se cumple que

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}, \text{ es decir, } \left(\frac{a+b}{2}\right)^r \leq \frac{a^r + b^r}{2},$$

lo cual implica la desigualdad buscada.

Ya que (x_n) es una suceción bloque, existirá n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ los vectores x y x_n serán de soportes disjuntos. Por tanto, para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$\|x\|_r + \|x_n\|_r \leq 2^{\frac{r-1}{r}} \|x + x_n\|_r,$$

y tomando límite, se tiene que

$$\|x\|_r + \limsup_n \|x_n\|_r \leq 2^{\frac{r-1}{r}} \limsup_n \|x + x_n\|_r.$$

Por tanto

$$S_k(\ell_r, \|.\|_r) = \sup \left\{ \frac{\|x\|_r + \limsup_n \|x_n\|_r}{\limsup_n \|x + x_n\|_r} : k \leq x; (x_n) \text{ sucesión bloque} \right\} \leq$$

$$\leq \sup \left\{ \frac{2^{\frac{r-1}{r}} \limsup_n \|x + x_n\|_r}{\limsup_n \|x + x_n\|_r} : k \leq x; (x_n) \text{ sucesión bloque} \right\} = 2^{\frac{r-1}{r}}.$$

Veamos que se alcanza el valor $2^{\frac{r-1}{r}}$. Si tomamos los vectores $x = e_k$, $x_n = e_n$, siendo $n > k$ se cumple que

$$\frac{\|e_k\|_r + \|e_n\|_r}{\|e_k + e_n\|_r} = \frac{1+1}{2^{\frac{1}{r}}} = 2^{\frac{r-1}{r}}.$$

Ejemplo 2.10. Sea c_0, dotado de la base de Schauder de vectores unitarios habitual. Se cumple que $S(c_0, \|.\|_\infty) = S_k(c_0, \|.\|_\infty) = 2$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Veamos en primer lugar que si $k \leq x$ y (x_n) es una sucesión bloque, se cumple que

$$\|x\|_\infty + \limsup_n \|x_n\|_\infty \leq 2 \limsup_n \|x + x_n\|_\infty.$$

Sean

$$x = \sum_{i=k}^{m} x_i e_i, \qquad x_n = \sum_{i=p_n}^{q_n} x_i^n e_i.$$

Ya que (x_n) es una sucesión bloque, existirá n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ los vectores x y x_n serán de soportes disjuntos. Por tanto, para todo $n \geq n_0$ se cumple que

$$\|x\|_\infty + \|x_n\|_\infty = \sup_{k \leq i \leq m} \{|x_i|\} + \sup_{i \geq m+1} \{|x_i^n|\} \leq$$

$$\leq \sup_{i \geq k} \{|x_i + x_i^n|\} + \sup_{i \geq k} \{|x_i + x_i^n|\} = 2\|x + x_n\|_\infty.$$

Tomando límites se tiene la desigualdad buscada. Por tanto

$$S_k(c_0, \|.\|_\infty) = \sup \left\{ \frac{\|x\|_\infty + \limsup_n \|x_n\|_\infty}{\limsup_n \|x + x_n\|_\infty} : k \leq x, (x_n) \text{ sucesión bloque} \right\} \leq$$

$$\leq \sup \left\{ \frac{2 \limsup_n \|x + x_n\|_\infty}{\limsup_n \|x + x_n\|_\infty} : k \leq x, (x_n) \text{ sucesión bloque} \right\} = 2.$$

Veamos que se alcanza el valor 2. Si tomamos el vector $x = e_k$ y la sucesión $x_n = e_n$. Para todo $n > k$ se cumple que

$$\frac{\|e_k\|_\infty + \|e_n\|_\infty}{\|e_k + e_n\|_\infty} = \frac{1+1}{1} = 2.$$

Observación 2.11. El valor del coeficiente $S(X, p)$ puede depender de la base de Schauder que se tome en el espacio de Banach X. Por ejemplo, si tomamos en c_0 la base de Schauder sumante (s_n), donde $s_n = e_1 + \ldots + e_n$, entonces $S(c_0, \|.\|_\infty) = S_k(c_0, \|.\|_\infty) = 3$. En efecto, nótese que si $x = \displaystyle\sum_{k=p}^{q} x_n s_n$, entonces $\|x\|_\infty = \displaystyle\sup_{n \leq k \leq q} \left| \sum_{n=k}^{q} x_n \right|$.

Veamos en primer lugar que si $k \leq x$ y (x_n) es una sucesión bloque, se cumple que

$$\|x\|_\infty + \limsup_n \|x_n\|_\infty \leq 3 \limsup_n \|x + x_n\|_\infty.$$

Sean

$$x = \sum_{i=k}^{m} x_i s_i, \qquad x_n = \sum_{i=p_n}^{q_n} x_i^n s_i.$$

Ya que (x_n) es una sucesión bloque, existirá n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ los vectores x y x_n serán de soportes disjuntos. Por tanto, para todo $n \geq n_0$ se cumple lo siguiente:

Por una parte

$$\|x + x_n\|_\infty = \sup_{k \leq i \leq m; j \geq m+1} \left\{ \left| \sum_{r=i}^{m} x_r + \sum_{r=m+1}^{\infty} x_r^n \right| ; \left| \sum_{r=j}^{\infty} x_r^n \right| \right\}.$$

Por otra parte

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \leq i \leq m} \left\{ \left| \sum_{r=i}^{m} x_r \right| \right\} = \sup_{k \leq i \leq m} \left\{ \left| \sum_{r=i}^{m} x_r + \sum_{r=m+1}^{\infty} x_r^n - \sum_{r=m+1}^{\infty} x_r^n \right| \right\} \leq$$

$$\leq \sup_{k \leq i \leq m} \left\{ \left| \sum_{r=i}^{m} x_r + \sum_{r=m+1}^{\infty} x_r^n \right| + \left| \sum_{r=m+1}^{\infty} x_r^n \right| \right\} =$$

$$= \sup_{k \leq i \leq m} \left\{ \left| \sum_{r=i}^{m} x_r + \sum_{r=m+1}^{\infty} x_r^n \right| \right\} + \left| \sum_{r=m+1}^{\infty} x_r^n \right| \leq$$

$$\leq \|x+x_n\|_\infty + \|x+x_n\|_\infty = 2\|x+x_n\|_\infty.$$

Además

$$\|x_n\|_\infty = \sup_{i\geq m+1}\left\{\left|\sum_{r=i}^{\infty} x_r^n\right|\right\} \leq \|x+x_n\|_\infty,$$

con lo que

$$\|x\|_\infty + \|x_n\|_\infty \leq 3\|x+x_n\|_\infty,$$

y tomando límites

$$\|x\|_\infty + \limsup_n \|x_n\|_\infty \leq 3\limsup_n \|x+x_n\|_\infty.$$

Por tanto, con respecto a la base sumante, se tiene que

$$S_k(c_0, \|.\|_\infty) = \sup\left\{\frac{\|x\|_\infty + \limsup_n \|x_n\|_\infty}{\limsup_n \|x+x_n\|_\infty} : k \leq x, (x_n) \text{ sucesión bloque}\right\} \leq$$

$$\leq \sup\left\{\frac{3\limsup_n \|x+x_n\|_\infty}{\limsup_n \|x+x_n\|_\infty} : k \leq x, (x_n) \text{ sucesión bloque}\right\} = 3.$$

Veamos que se alcanza el valor 3. Si tomamos los vectores $x = -s_k$, $x_n = \frac{1}{2}s_n$, se cumple que

$$\frac{\|-s_k\|_\infty + \limsup_n \|\frac{1}{2}s_n\|_\infty}{\|-s_k + \frac{1}{2}s_n\|_\infty} = \frac{1+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 3.$$

A lo largo de la Memoria, la base de Schauder considerada en los diferentes espacios de Banach de sucesiones será la habitual $\{e_n\}$, donde e_n es el vector que tiene un uno en la coordenada n y cero en el resto.

2.2. Propiedades

En esta sección vamos a estudiar nuevas propiedades de los coeficientes de separación secuencial. Como una primera consecuencia deduciremos que siempre están bien definidos, es decir, para todo espacio de Banach con base de Schauder, $S_k(X,p) < +\infty$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $p \in \mathcal{P}(X)$.

Proposición 2.12. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder. Sea $p \in \mathcal{P}(X)$. Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Sea $q \in \mathcal{P}(X)$ tal que $ap(x) \leq q(x) \leq bp(x)$ $\forall x \in X$, siendo $a, b > 0$. Entonces*

$$\frac{a}{b} S_k(X,p) \leq S_k(X,q) \leq \frac{b}{a} S_k(X,p).$$

2. *Si $Y \subseteq X$ es un subespacio bloque, es decir, Y está generado por una sucesión bloque de la base de Schauder, entonces $S_k(Y,p) \leq S_k(X,p)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

3. *Sea $q \in \mathcal{P}(X)$ una norma bimonótona. Entonces $S_k(X,q) \leq 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración.

1. Observemos que $q(x) + \limsup\limits_n q(x_n) \leq b(p(x) + \limsup\limits_n p(x_n))$ y que $\limsup\limits_n q(x + x_n) \geq a \limsup\limits_n p(x + x_n), \forall x \in X$ y $\forall (x_n) \subseteq X$, por tanto

$$\begin{aligned} S_k(X,q) &= \sup\left\{\frac{q(x) + \limsup_n q(x_n)}{\limsup_n q(x + x_n)} : k \leq x; (x_n) \text{ sucesión bloque}\right\} \\ &\leq \sup\left\{\frac{b(p(x) + \limsup_n p(x_n))}{a \limsup_n p(x + x_n)} : k \leq x; (x_n) \text{ sucesión bloque}\right\} \\ &= \frac{b}{a} S_k(X,p). \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$q(x) + \limsup_n q(x_n) \geq a(p(x) + \limsup_n p(x_n))$$

y

$$\limsup_n q(x + x_n) \leq b \limsup_n p(x + x_n),$$

para todo $x \in X$ y toda $(x_n) \subseteq X$, por tanto

$$\begin{aligned} S_k(X,q) &= \sup\left\{\frac{q(x)+\operatorname{lím\,sup}_n q(x_n)}{\operatorname{lím\,sup}_n q(x+x_n)} : k\leq x; (x_n) \text{ sucesión bloque}\right\} \\ &\geq \sup\left\{\frac{a(p(x)+\operatorname{lím\,sup}_n p(x_n))}{b\operatorname{lím\,sup}_n p(x+x_n)} : k\leq x; (x_n) \text{ sucesión bloque}\right\} \\ &= \frac{a}{b}S_k(X,p). \end{aligned}$$

2. En primer lugar veremos que para todo $z \in Y$, podemos obtener $\overline{z} \in X$ a partir de z tal que $supp(z) \subset supp(\overline{z})$ con $\operatorname{mín} supp(z) = \operatorname{mín} supp(\overline{z})$, $\sup supp(z) = \sup supp(\overline{z})$.

   Al ser Y un subespacio bloque de X, existe una sucesión de escalares (a_i) y una sucesión de enteros (m_j), tales que para todo $j \in \mathbb{N}$ se define un vector $u_j = \sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} a_i e_i \neq 0$, donde la sucesión (u_j) es una base de Schauder de Y.

   Sea $z = \sum_{j=r}^{s} z_j u_j \in Y$, entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} z &= \sum_{j=r}^{s} z_j \sum_{i=m_j+1}^{m_{j+1}} a_i e_i \\ &= z_r \sum_{i=m_r+1}^{m_{r+1}} a_i e_i + z_{r+1} \sum_{i=m_{r+1}+1}^{m_{r+2}} a_i e_i + \ldots + z_s \sum_{i=m_s+1}^{m_{s+1}} a_i e_i \\ &= \sum_{i\in I} z_i a_i e_i = \sum_{i=m_r+1}^{m_{s+1}} \overline{z}_i e_i =: \overline{z}, \end{aligned}$$

   donde

$$I = \{m_r{+}1, m_r{+}2, \ldots, m_{r+1}, m_{r+1}{+}1, \ldots, m_{r+2}, \ldots m_s{+}1, \ldots m_{s+1}\}.$$

   Con lo cual, todo vector de Y con $k \leq x$ está en X con $k \leq x$. Además si (x_n) es una sucesión bloque en Y, es también una sucesión bloque en X, por tanto, $S_k(Y,p) \leq S_k(X,p)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

3. Por ser q una norma bimonótona, para todo $x \in X$ tal que $k \leq x$ y toda (x_n) sucesión bloque se cumple que $q(x) \leq \operatorname{lím\,sup}_n q(x+x_n)$, por

ser premonótona y $\limsup_n q(x_n) \leq \limsup_n q(x + x_n)$, por ser monótona. Por tanto,

$$S_k(X, q) = \sup \left\{ \frac{q(x) + \limsup_n q(x_n)}{\limsup_n q(x + x_n)} : k \leq x; (x_n) \text{ sucesión bloque} \right\} \leq$$

$$\leq \sup \left\{ \frac{\limsup_n q(x + x_n) + \limsup_n q(x + x_n)}{\limsup_n q(x + x_n)} : k \leq x; (x_n) \text{ sucesión bloque} \right\} =$$

$$= \sup \left\{ \frac{2 \limsup_n q(x + x_n)}{\limsup_n q(x + x_n)} : k \leq x; (x_n) \text{ sucesión bloque} \right\} = 2.$$

■

Como consecuencia podemos deducir:

Corolario 2.13. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder, entonces $S_k(X, p) < +\infty$, para toda $p \in \mathcal{P}(X)$.*

Demostración.

Esta propiedad es cierta debido al hecho de que siempre podemos encontrar una norma $q \in \mathcal{P}(X)$ la cual es bimonótona. En efecto, sea $p \in \mathcal{P}(X)$ y definimos

$$q(x) := \sup_{n<m;n,m\in\mathbb{N}} \left\{ p\left(\sum_{i=n}^{m} x_i e_i \right) \right\}.$$

Nótese que si la norma p es bimonótona, entonces $p(\cdot) = q(\cdot)$. También es fácil comprobar que $q \in \mathcal{P}(X)$, de hecho se cumple que

$$p(x) \leq q(x) \leq 2kp(x),$$

siendo k la constante básica de la base de Schauder para la norma p.

Veamos que es bimonótona:

Por una parte,

$$q(Q_k x) = \sup_{k \leq n < m} \left\{ p\left(\sum_{i=n}^{m} x_i e_i \right) \right\} \leq \sup_{n<m} \left\{ p\left(\sum_{i=n}^{m} x_i e_i \right) \right\} = q(x),$$

lo cual prueba que es premonótona. Por otra parte,

$$q(P_k x) = \sup_{n<m\leq k} \left\{ p\left(\sum_{i=n}^{m} x_i e_i \right) \right\} \leq \sup_{n<m} \left\{ p\left(\sum_{i=n}^{m} x_i e_i \right) \right\} = q(x),$$

lo cual prueba que es monótona.

Sea entonces $p \in \mathcal{P}(X)$, por el apartado 1. del resultado anterior se cumple que

$$S_k(X,p) \leq 2kS_k(X,q),$$

y aplicando el apartado 3. de la proposición anterior tenemos que

$$1 \leq S_k(X,p) \leq 4k < +\infty.$$

■

Lema 2.14. *Sean $p,q \in \mathcal{P}(X)$ tales que existen dos sucesiones de números reales $a_k \leq b_k$ para $k \in \mathbb{N}$ tales que*

$$a_k p(x) \leq q(x) \leq b_k p(x), \text{ siempre que } k \leq x.$$

Si $\liminf_k \dfrac{b_k}{a_k} = 1$, entonces p es una norma secuencialmente separadora si y solo si q tiene la misma propiedad.

Demostración.
Para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \geq k$, obtenemos las desigualdades siguientes:

$$S_k(X,q) \leq \frac{b_k}{a_k} S_k(X,p), S_k(X,p) \leq \frac{a_k}{b_k} S_k(X,q).$$

Tomando límite cuando k tiende a infinito, deducimos el lema. ■

Ejemplo 2.15. Siguiendo con la misma notación que en [15], sea $p = (p_n)_n$ una sucesión en $(1,+\infty)$. Sea

$$X := \mathbb{K} \oplus_{p_1} (\mathbb{K} \oplus_{p_2} (\mathbb{K} \oplus_{p_3} (\mathbb{K} \oplus_{p_4} \cdots)))$$

dotado con la norma $\nu_p(x) = \lim_n \nu_n(p,x)$ donde

$$\nu_1(p,x) := |x_1|, \qquad \nu_{n+1}(p,x) := \left(|x_1|^{p_1} + \nu_n(Sp,Sx)^{p_1}\right)^{1/p_1},$$

con $x = (x_1, x_2, ...)$ y $Sz := (z_2, z_3, ...)$ si $z = (z_1, z_2, ...)$.

Sea c_{00} el espacio de las sucesiones de escalares nulas a partir de un término en adelante. Ya que la sucesión $\{\nu_n(p,x)\}_n$ es creciente para todo $x \in c_{00}$ y $\nu_n(p,x) \leq \|x\|_1$, el límite $\nu_p(x) = \lim_n \nu_n(p,x)$ existe y define una norma en c_{00}. Denotamos por X el completado (la clausura) de c_{00} con la norma (respecto de la norma) $\nu_p(\cdot)$.

Sea $(q_n)_n$ satisfaciendo $\frac{1}{p_n}+\frac{1}{q_n}=1$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Asumamos en particular que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{q_n}<+\infty$ (por ejemplo con $p_n=\frac{2^n}{2^n-1}$) y sea $C_k:=\displaystyle\prod_{r=k}^{\infty}2^{-1+\frac{1}{p_r}}$. Siguiendo los mismos argumentos que en [15] se puede probar que

$$\|x\|_1\geq\nu_p(x)\geq\left(\prod_{r=k}^{\infty}2^{-1+\frac{1}{p_r}}\right)\|x\|_1,\ \text{ si } k\leq x.$$

En efecto, $\nu_n(p,x)\leq|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|$ para todo n. Así, $\nu_p(x)\leq\|x\|_1$ para todo $x\in\ell_1$.

Para la otra desigualdad, notemos primero que, ya que todos los espacios lineales y normados de dimensión 2 son equivalentes, lo son ℓ_q^2 y ℓ_1^2. De hecho, para $q\geq 1$, $\|(x_1,x_2)\|_q\geq 2^{-1+1/q}\|(x_1,x_2)\|_1$. Entonces, tomando $K_j=2^{-1+\frac{1}{p_j}}$, se tiene que

$$\nu_n(p,x)=\left(|x_k|^{p_k}+\nu_{n-1}(Sp,Sx)^{p_k}\right)^{\frac{1}{p_k}}\geq K_k\left(|x_k|+\nu_{n-1}(Sp,Sx)\right)=$$

$$=K_k\left(|x_k|+\left(|x_{k+1}|^{p_{k+1}}+\nu_{n-2}(S^2p,S^2x)^{p_{k+1}}\right)^{\frac{1}{p_{k+1}}}\right)\geq$$

$$\geq K_k\left(|x_k|+K_{k+1}\left(|x_{k+1}|+\nu_{n-2}(S^2p,S^2x)\right)\right)\geq$$

$$\geq K_kK_{k+1}\left(|x_k|+|x_{k+1}|+\nu_{n-2}(S^2p,S^2x)\right)\geq\ldots\geq K_kK_{k+1}\cdots K_n\sum_{j=1}^{n}|x_j|.$$

De lo anterior, si tomamos límite, se deduce que $\nu_p(\cdot)$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|_1$ in ℓ_1 y que $C_k\|x\|_1\leq\nu_p(x)\leq\|x\|_1$ siempre que $k\leq x$. Ya que $\lim_k C_k=1$, deducimos que $S(\ell_1,\nu_p(\cdot))=1$ y que $\nu_p(\cdot)$ es una norma asintóticamente separadora.

Es bien conocido que $(\ell_1,\nu_p(\cdot))$ no tiene copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 [15], pero todavía no se sabe si (ℓ_1,ν_p) tiene la FPP.

Ejemplo 2.16. Sea $(\gamma_k)_k$ una sucesión en $(0,1)$ con $\lim_k\gamma_k=1$ y consideremos la norma

$$|||x|||=\sup_k\gamma_k\|Q_kx\|_1,\qquad x\in\ell_1$$

usada por P.K. Lin para probar que ℓ_1 puede ser renormado con la FPP [43]. Ya que para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todos los vectores $k \leq x$ se tiene que

$$\gamma_k \|x\|_1 \leq |||x||| \leq \|x\|_1,$$

se sigue que $S_k(\ell_1, |||\cdot|||) \leq \frac{1}{\gamma_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando límite cuando k tiende a infinito, deducimos que $|||\cdot|||$ es una norma asintóticamente separadora.

Notemos que podemos obtener normas secuencialmente separadoras las cuales no estén "asintóticamente encajadas" a la norma $\|.\|_1$, en el sentido que no podremos encontrar dos sucesiones $a_k \leq b_k$ verificando las condiciones del Lema 2.14.

Ejemplo 2.17. Definimos la norma equivalente en ℓ_1 dada por

$$p(x) = \frac{1}{3}\left(\|x\|_1 + \sum_{i=1}^{\infty} |x_i - x_{i+1}|\right).$$

Esta norma es secuencialmente separadora. Además se cumple que

$$\frac{1}{3}\|x\|_1 \leq p(x) \leq \|x\|_1$$

y para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar una sucesión $(x_n^k)_n$ tal que $x_n^k \geq k$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n^k\|_1 = 1$ y $\lim_n p(x_n^k) = \dfrac{1}{3}$. En efecto, bastaría tomar la sucesión $x_n^k = \displaystyle\sum_{i=k}^{n+k-1} \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Partiendo de normas premonótonas y secuencialmente separadoras, vamos a poder definir sucesiones de normas equivalentes con las mismas propiedades.

Lema 2.18. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder y sea $p_0 \in \mathcal{P}(X)$ premonótona. Supongamos que $p_0(\cdot)$ es una norma secuencialmente separadora. Fijemos $(\gamma_k)_k \subset (0,1)$ con $\lim_k \gamma_k = 1$ y definamos la norma*

$$p_1(x) = \sup_k \gamma_k p_0(Q_k(x)).$$

Entonces $p_1(\cdot)$ es una norma equivalente a $p_0(\cdot)$ la cual es premonótona y secuencialmente separadora.

Demostración.

Es fácil probar que $\gamma_k p_0(x) \leq p_1(x) \leq p_0(x)$ para todos los vectores $x \in X$ con $k \leq x$. De la última desigualdad se deduce que $p_1(\cdot)$ es premonótona. Por lo tanto $S_k(X, p_1) \leq \frac{1}{\gamma_k} S_k(X, p_0)$ y tomando límite cuando k tiende a infinito, deducimos que $S(X, p_1) = 1$ y p_1 es una norma secuencialmente separadora. ■

Podemos obtener sucesiones de normas secuencialmente separadoras de forma recurrente usando el lema anterior:

Corolario 2.19. *Sea p_0 una norma premonótona y secuencialmente separadora. Definimos*

$$p_n(x) = \sup_k \gamma_k p_{n-1}(Q_k(x)), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Entonces p_n es premonótona y secuencialmente separadora, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración.

Aplicar el Lema 2.18 sucesivamente. ■

Según la notación anterior, tomando $p_0(\cdot) = \|\cdot\|_1$, se tiene que la norma de P.K. Lin, $|||\cdot|||$ es igual a la norma $p_1(\cdot)$. Empezando por la norma $\|\cdot\|_1$, podemos construir una sucesión de normas secuencialmente separadoras, $p_n(\cdot)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

La norma de P.K. Lin es una norma secuencialmente separadora la cual no verifica la condición $(*)$. En efecto, como $\lim_k \gamma_k = 1$, podemos considerar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_k > \frac{2}{3}$ para todo $k \geq k_0$. Considerando $x = e_{k_0}$ y $x_n = e_n$ para todo $n > k_0$ obtenemos: $\limsup_n |||x + x_n||| = 2\gamma_{k_0}$ mientras que $|||x||| + \limsup_n |||x_n||| = \gamma_{k_0} + 1$.

De igual forma podría comprobarse que la norma $\nu_p(\cdot)$ definida en el Ejemplo 2.15 tampoco cumple la condición $(*)$.

De hecho, podemos deducir las afirmaciones anteriores de lo siguiente: ni la norma $|||\cdot|||$ ni la norma $\nu_p(\cdot)$ contienen copias asintóticamente isométricas de ℓ_1, y la condición $(*)$ implica la existencia de una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 [25].

Comprobaremos que ninguna de las normas $p_n(\cdot)$ obtenidas a partir de la norma de P.K. Lin de forma recurrente verifican la condición $(*)$, ya que hacen que el espacio ℓ_1 tenga la FPP, lo cual será probado en el Capítulo III de la Memoria.

Finalizamos este capítulo obteniendo una condición equivalente para ser norma secuencialmente separadora. Dicha equivalencia nos será de gran utilidad en el próximo capítulo para probar que las normas de Orlicz y de Luxemburg son secuencialmente separadoras en ciertos espacios de sucesiones de Musielak-Orlicz.

Lema 2.20. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder y $p \in \mathcal{P}(X)$. Entonces p es secuencialmente separadora si y solo si*

$$\lim_k \inf\{\limsup_n p(x + x_n)\} = 2$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los vectores $k \leq x$ con $p(x) = 1$ y toda sucesión bloque normalizada (x_n).

Demostración.
Supongamos que el anterior límite es igual a 2. Tomemos $\epsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\inf\{\limsup_n p(x + x_n)\} > 2 - \epsilon$$

donde el ínfimo se toma sobre todos los vectores $k \leq x$ con $p(x) = 1$ y toda sucesión bloque normalizada.

Sea $k \leq z$ y (z_n) una sucesión bloque de la base. Usando el Teorema de Hahn-Banach, consideremos $f_n \in X^*$ tal que $p(\frac{z}{p(z)} + \frac{z_n}{p(z_n)}) = f_n(\frac{z}{p(z)} + \frac{z_n}{p(z_n)})$ donde $\|f_n\|_{X^*} = 1$. Por hipótesis, se tien que

$$\limsup_n p\left(\frac{z}{p(z)} + \frac{z_n}{p(z_n)}\right) > 2 - \epsilon,$$

por lo que tomando una subsucesión, si fuera necesario, podemos asumir que

$$2 \geq f_n\left(\frac{z}{p(z)}\right) + f_n\left(\frac{z_n}{p(z_n)}\right) = f_n\left(\frac{z}{p(z)} + \frac{z_n}{p(z_n)}\right) =$$
$$= p\left(\frac{z}{p(z)} + \frac{z_n}{p(z_n)}\right) > 2 - \epsilon$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que

$$f_n\left(\frac{z}{p(z)}\right) > 1 - \epsilon,\ f_n\left(\frac{z_n}{p(z_n)}\right) > 1 - \epsilon \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto

$$p(z+z_n) \geq f_n(z+z_n) =$$
$$= p(z) f_n\left(\frac{z}{p(z)}\right) + p(z_n) f_n\left(\frac{z_n}{p(z_n)}\right) > (1-\epsilon)(p(z)+p(z_n)).$$

Tomando limíte cuando n tiende a infinito deducimos que p es secuencialmente separadora, como queríamos probar.

La otra implicación se obtiene directamente. ■

3 Normas equivalentes con la FPP

3.1. Normas secuencialmente separadoras y la FPP

En este capítulo vamos a usar los conceptos definidos anteriormente para construir normas equivalentes que verifiquen la propiedad del punto fijo para aplicaciones no-expansivas. Aplicaremos los resultados obtenidos a diferentes clases de espacios de Banach no-reflexivos.

Recordemos el siguiente teorema de punto fijo que fue probado en [34]:

Sea X un espacio vectorial. Supongamos que X puede ser dotado con una topología $\mathcal{T}$ para la cual la convergencia es invariante por traslaciones, en el sentido de que $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} x$ si y solo si $x_n - x \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$.

Supongamos que existe una familia $\rho = \{\rho_k(\cdot) : k \in \mathbb{N}\}$ de seminormas en X la cual separa puntos y está acotada puntualmente. En ese caso, la función

$$|x|_\rho := \sup_k \rho_k(x)$$

define una norma en X. Supongamos que $(X, |\cdot|_\rho)$ es completo y que la familia de seminormas $\rho_k(\cdot)$ satisface las siguientes propiedades:

(I) Existe una sucesión de números positivos (δ_k) con $\lim_k \delta_k = 1$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\limsup_n \rho_k(x_n) + \rho_k(x) \leq \delta_k \limsup_n \rho_k(x_n + x)$$

siempre que $x \in X$ y $\{x_n\}$ sea una sucesión ρ_k-acotada con $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$.

(II) Existen dos sucesiones (α_k) y (β_k) satisfaciendo $0 \leq \alpha_k \leq \beta_k < 1$ con $\text{lím}_k\, \alpha_k = 1$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\alpha_k \limsup_n |x_n|_\rho \leq \limsup_n \rho_k(x_n) \leq \beta_k \limsup_n |x_n|_\rho,$$

siempre que $\{x_n\}$ sea una sucesión ρ_k-acotada con $x_n \xrightarrow{\mathcal{T}} 0$.

(III) Existe algún $\alpha > 1$ tal que para toda sucesión $\{x_n\}$ convergente a cero en la topología $\mathcal{T}$ se cumple

$$\limsup_k \rho_k(x_0) \leq \frac{\limsup_n |x_n|_\rho}{\alpha}$$

para algún $x_0 \in \overline{co}^{|\cdot|_\rho}(\{x_n\})$.

Teorema 3.1. *[34] Bajo las condiciones anteriores, se cumple lo siguiente: Sean C un subconjunto de X convexo, $|\cdot|_\rho$-cerrado, $|\cdot|_\rho$-acotado y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva. Entonces T tiene un punto fijo siempre que T tenga alguna sucesión aproximada de punto fijo $\mathcal{T}$-convergente en todo subconjunto de C, que sea $|\cdot|_\rho$-cerrado, convexo y T-invariante.*

Como consecuencia del teorema anterior deducimos el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder acotadamente completa y supongamos que existe alguna norma $p_0 \in \mathcal{P}(X)$ premonótona y secuencialmente separadora. Entonces X admite una norma equivalente con la FPP.*

Demostración.
Tomemos $(\gamma_k)_k$ cualquier sucesión en $(0, 1)$ con $\lim_k \gamma_k = 1$. Como antes, definimos

$$p_1(x) = \sup_k \gamma_k p_0(Q_k(x)),$$

la cual es una norma equivalente en X.
Consideremos las seminormas $\rho_k(x) = \gamma_k p_0(Q_k(x))$ y $p_1(x) = \sup_k \rho_k(x)$. Vamos a probar que esta familia de seminormas verifica las condiciones (I),

(II) y (III) cuando τ es la topología débil estrella definida como sigue: Al ser la base acotadamente completa, X es isomorfo al espacio dual de $Z = [e_n^*]$, siendo Z el subespacio de X^* generado por los funcionales coordenadas. Este isomorfismo es $j : X \to Z^*$ dado por $j(x)(e_n^*) = e_n^*(x)$ para $n \in \mathbb{N}$. Por tanto podemos considerar en X la topología $\tau = \sigma(Z, Z^*)$ tal que si (x_n) es una sucesión acotada, entonces $x_n \xrightarrow{\tau} x$ si y solo si $j(x_n) \xrightarrow{\tau} j(x)$, si y solo si $j(x_n)(e_k^*) \to j(x)(e_k^*)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, si y solo si $x_n \to x$ coordenada a coordenada [47].

(I) Definamos

$$\delta_k := \sup \left\{ \frac{\rho_k(x) + \limsup_n \rho_k(x_n)}{\limsup_n \rho_k(x + x_n)} : \ \tau\text{-}\lim_n x_n = 0, \ x \in X \right\}$$

Notemos que la sucesión $(\delta_k)_k$ satisface la desigualdad dada en (I). Vamos a probar que $\lim_k \delta_k = 1$.

Usando la definición de la seminorma $\rho_k(\cdot)$, la τ-convergencia a cero o convergencia a cero coordenada a coordenada, podemos escribir

$$\begin{aligned} \delta_k &= \sup \left\{ \frac{p_0(Q_k(x)) + \limsup_n p_0(Q_k(x_n))}{\limsup_n p_0(Q_k(x + x_n))} : \ \tau\text{-}\lim_n x_n = 0, \ x \in X \right\} \\ &= \sup \left\{ \frac{\limsup_n p_0(x_n) + p_0(x)}{\limsup_n p_0(x + x_n)} : \ \tau\text{-}\lim_n x_n = 0, \ k \le x \in X \right\} \\ &= S_k(X, p) \end{aligned}$$

Como $p_0(\cdot)$ es una norma secuencialmente separadora, $\lim_k \delta_k = 1$ y se cumple (I).

(II) Sea (x_n) una sucesión τ-convergente a cero. Para $k \in \mathbb{N}$ fijo, podemos asumir que $k \ll x_n$ para n suficientemente grande. Esto implica que $\limsup_n p_0(Q_k(x_n)) = \limsup_n p_0(x_n) = \limsup_n |x_n|_\rho$ (ya que $p_0(\cdot)$ es premonótona) y (II) se satisface tomando $\alpha_k = \beta_k = \gamma_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(III) Para todo $x \in X$, $\lim_k \gamma_k p_0(Q_k(x)) = 0$, por tanto se verifica (III). ∎

Corolario 3.3. *Sea p_0 es una norma premonótona y secuencialmente asintóticamente separadora en $\mathcal{P}(X)$. Definimos por inducción la sucesión de normas equivalentes:*

$$p_n(x) = \sup_k \gamma_k p_{n-1}(Q_k x), n \in \mathbb{N}.$$

Entonces (X, p_n) *cumple la FPP para todo* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geq 1$.

3.2. Demostración del Teorema de renormamiento con la FPP

El resto del contenido de este capítulo está basado en aplicaciones del Teorema 3.2. Por ello hemos decidido incluir en esta sección una demostración directa de tal resultado, basándonos exclusivamente en la definición del coeficiente $S(X, p)$.

Comenzamos recordando algunos conceptos importantes en teoría métrica de punto fijo para aplicaciones no-expansivas.

Sea C un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva. Consideremos $z_0 \in C$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ definimos el operador $T_n : C \to C$ dado por

$$T_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) T(x) + \frac{1}{n} z_0.$$

Nótese que T_n está bien definido por ser C un subconjunto convexo. Por otro lado T_n es una aplicación contractiva y por el Teorema de Banach podemos encontrar $x_n \in C$ tal que $T_n(x_n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. No es difícil comprobar que para la sucesión $(x_n) \subset C$ se cumple

$$\lim_n \|x_n - Tx_n\| = 0.$$

A las sucesiones cumpliendo la igualdad anterior se les llama sucesiones de puntos fijos aproximados (a.f.p.s.) y por tanto, toda aplicación no-expansiva definida en un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio de Banach con imagen en sí mismo contiene sucesiones de puntos fijos aproximados.

En las condiciones anteriores, sea $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva y $(x_n) \subset C$ una a.f.p.s. Sea $\lambda > 0$ y consideremos el conjunto

$$C(\lambda) = \left\{ z \in C : \limsup_n \|x_n - z\| \leq \lambda \right\}.$$

$C(\lambda)$ es de nuevo un subconjunto convexo, cerrado y acotado. Supongamos que $C(\lambda)$ es distinto del conjunto vacío. Vamos a demostrar que $C(\lambda)$ es también T-invariante. En efecto, sea $z \in C(\lambda)$. Entonces:

$$\begin{aligned} \limsup_n \|x_n - Tz_n\| &\leq \limsup_n \|x_n - Tx_n\| + \limsup_n \|Tx_n - Tz\| \\ &\leq \limsup_n \|x_n - z\| \leq \lambda. \end{aligned}$$

Por tanto, podemos considerar que $C(\lambda)$ contiene de nuevo sucesiones de puntos fijos aproximados para T.

En el siguiente resultado buscamos un subconjunto T-invariante que sea minimal en cierto sentido:

Lema 3.4. *Sea $C \subset X$ un subconjunto convexo, cerrado y acotado y sea $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva. Si T no tiene puntos fijos, existe $a > 0$ y un subconjunto $D \subset C$ convexo, cerrado y T-invariante tal que para toda sucesión de puntos fijos aproximados (x_n) contenida en D y para todo $z \in D$ se cumple:*

$$\limsup_n \|x_n - z\| \geq a.$$

La prueba del lema anterior es la siguiente:

Si el resultado fuese falso, existiría una a.f.p.s. (x_n^1) en C y $z_1 \in C$ tal que

$$\limsup_n \|x_n^1 - z_1\| < \frac{1}{2}.$$

Por tanto

$$D_1 = \left\{ z \in C : \limsup_n \|x_n^1 - z\| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

sería de nuevo un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y T-invariante de C.

Con los mismos argumentos, deduciríamos que existe una a.f.p.s. $(x_n^2) \subset D_1$ y $z_2 \in D_1$ tal que

$$\limsup_n \|x_n^2 - z_2\| < \frac{1}{2^2}.$$

Por tanto:

$$D_2 = \left\{ z \in D_1 : \limsup_n \|x_n^2 - z\| \leq \frac{1}{2^2} \right\}$$

es un subconjunto T-invariante de D_1 el cual es no vacío, convexo, cerrado.

De esta forma, podríamos construir una sucesión decreciente (D_n) de subconjuntos de C convexos, cerrados, T-invariantes y tal que $\operatorname{diam}(D_n) \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Por el Teorema de Intersección de Cantor, $\bigcap_n D_n = \{z_0\}$. Como cada

D_n es T-invariante, $T(z_0) = z_0$, lo cual contradice el hecho de que T no tenga puntos fijos.

Demostración completa del Teorema 3.2

Sea $p_0 \in \mathcal{P}(X)$ una norma premonótona y secuencialmente separadora. Tomemos $(\gamma_k)_k$ cualquier sucesión en $(0,1)$ con $\lim_k \gamma_k = 1$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $(\gamma_k)_k$ es una sucesión creciente. Definimos

$$p_1(x) = \sup_k \gamma_k p_0(Q_k(x)),$$

la cual es una norma equivalente en X. De hecho $\gamma_1 p_0(x) \leq p_1(x) \leq p_0(x)$ para todo $x \in X$. Sea τ la topología débil estrella heredada por X al ser isomorfo al dual de $Z = [e_n^*]$, y cuya convergencia es equivalente a la convergencia coordenada a coordenada para sucesiones acotadas.

Probamos en primer lugar los siguientes resultados técnicos relacionando propiedades de ambas normas:

1) Para toda sucesión w^*-convergente a zero

$$\limsup_n p_0(x_n) = \limsup_n p_1(x_n).$$

En efecto, por ser $p_0(\cdot)$ premonótona obtenemos que $p_1(x) \leq p_0(x)$ para todo $x \in X$. Por otra parte, $\limsup_n p_0(x_n) = \limsup_n p_0(Q_k(x_n))$ para toda sucesión que converga a cero débil estrella. Si consideramos $k \in \mathbb{N}$,

$$\limsup_n p_0(x_n) = \frac{1}{\gamma_k}\gamma_k \limsup_n p_0(Q_k(x_n)) \leq \frac{1}{\gamma_k} \limsup_n p_1(x_n)$$

Tomando límites en k, finalmente obtenemos la igualdad buscada.

2) Sean (x_n), (y_n) dos sucesiones que convergen a x e y respectivamente con respecto a la topología débil estrella. Para simplificar la notación, denotemos $S_k = S_k(X, p_0)$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple:

$$\begin{aligned}
\limsup_m \limsup_n p_1(x_n - y_m) \quad \geq \quad & \frac{\gamma_k}{S_k} \limsup_n p_1(x_n - x) \\
+ \quad & \frac{\gamma_k}{S_k^2} \limsup_m p_1(y_m - y) \\
+ \quad & \frac{\gamma_k}{S_k^2} p_0(Q_k(y - x)).
\end{aligned}$$

En efecto, fijemos $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\limsup_m \limsup_n p_1(x_n - y_m) \geq \\
&\limsup_m \limsup_n \gamma_k p_0(Q_k(x_n - y_m)) = \\
&\limsup_m \limsup_n \gamma_k p_0(Q_k(x_n - x + x - y_m)) \geq \\
&\gamma_k \limsup_m \frac{1}{S_k}\left[\limsup_n p_0(Q_k(x_n - x)) + p_0(Q_k(x - y_m))\right] = \\
&\gamma_k \frac{1}{S_k}\left[\limsup_n p_0(Q_k(x_n - x)) + \limsup_m p_0(Q_k(x - y + y - y_m))\right] \geq \\
&\gamma_k \frac{1}{S_k}\left[\limsup_n p_0(Q_k(x_n - x)) + \frac{1}{S_k}\left(\limsup_m p_0(Q_k(y_m - y)) + p_0(Q_k(x - y))\right)\right] \\
&= \gamma_k \frac{1}{S_k} \limsup_n p_1(x_n - x) + \frac{\gamma_k}{S_k^2} \limsup_m p_1(y_m - y) + \frac{\gamma_k}{S_k^2} p_0(Q_k(x - y)).
\end{aligned}$$

Sea C un subconjunto convexo, cerrado y acotado de X y $T : C \to C$ una aplicación no-expansiva para la norma $p_1(\cdot)$. Supongamos que T no tiene puntos fijos. Nótese que C está acotado y por tanto es un subconjunto w^*-relativamente secuencialmente compacto. Por tanto, toda sucesión de C tiene una subsucesión débil estrella convergente, aunque el límite puede no estar en C.

Aplicando el Lema 3.4 encontramos $D \subset C$ convexo, cerrado, T-invariante y tal que

$$a := \inf \left\{ \limsup_n p_1(x_n - z) : z \in D \right\} > 0,$$

cuando el ínfimo es tomado sobre todas las sucesiones de puntos fijos aproximados $(x_n) \subset D$ que son w^*-convergentes.

Sea

$$c = \inf \left\{ \limsup_n p_1(x_n - x) : (x_n) \text{ es una a.f.p.s. en D } w^*\text{-}\lim_n x_n = x \right\}.$$

Veamos en primer lugar que $c > 0$. En efecto, si $(x_n) \subset D$ con w^*-$\lim_n x_n = x$,

$$a \leq \limsup_m \limsup_n p_1(x_n - x_m) \leq 2 \limsup p_1(x_n - x),$$

y por tanto $c \geq a/2 > 0$.

Sea $\epsilon_1 \in (0, c/4)$ y tomemos $(x_n) \subset D$ una a.f.p.s. con w^*-$\lim_n x_n = x$ y tal que

$$\limsup_n p_1(x_n - x) < c + \epsilon_1.$$

Mediante una traslación del problema y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $x = 0$. Por tanto $\limsup_n p_1(x_n) < c + \epsilon_1$ y utilizando la desigualdad triangular

$$\limsup_m \limsup_n p_1(x_n - x_m) < 2c + 2\epsilon_1.$$

Por tanto podemos suponer que el conjunto

$$K = \left\{ z \in D : \limsup_n p_1(x_n - z) \leq 2c + 2\epsilon_1 : z \in D \right\}$$

es no vacío, convexo, cerrado, acotado y T invariante por ser (x_n) una sucesión de puntos fijos aproximados. Además, a partir de un cierto término en adelante, la sucesión (x_n) también está en K.

Definimos

$$r := \inf \left\{ \limsup_n p_1(y_n - y) : (y_n) \subset K, \text{ a.f.p.s. } w^*\text{-} \lim_n y_n = y \right\}$$

Notar que $c \leq r \leq c + \epsilon_1$, ya que $(x_n) \subset K$.

Por la desigualdad anterior 2), siempre que (y_n) sea una a.f.p.s. en K w^*-convergente a algún vector $y \in X$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
&2c + 2\epsilon_1 \geq \limsup_m \limsup_n p_0(x_n - y_m) \geq \\
&\gamma_k \frac{1}{S_k} \limsup_n p_1(x_n) + \frac{\gamma_k}{S_k^2} \limsup_m p_1(y_m - y) + \frac{\gamma_k}{S_k^2} p_0(Q_k(y)) \geq \\
&\gamma_k \frac{1}{S_k} r + \frac{\gamma_k}{S_k^2} r + \frac{\gamma_k}{S_k^2} p_0(Q_k(y)),
\end{aligned}$$

lo cual implica que

$$p_0(Q_k(y)) \leq d_k := \frac{S_k^2}{\gamma_k} \left[2r + 2\epsilon_1 - \frac{\gamma_k}{S_k} c - \frac{\gamma_k}{S_k^2} c \right].$$

Hemos probado que para todo límite débil estrella y de una a.f.p.s. $(y_n) \subset D$ se cumple

$$p_0(Q_k(y)) \leq d_k \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tomando límites cuando k tiende a infinito:

$$0 \leq \lim_k d_k = 2c - 2r + 2\epsilon_1 \leq 2\epsilon_1.$$

Sea $w_0 \in K$. Como $\lim_k p_0(Q_k(w_0)) = 0$, podemos encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_0(Q_k(w_0)) < \epsilon_1; \qquad d_k < 3\epsilon_1$$

para todo $k \geq k_0$.

Como el conjunto K es acotado podemos suponer que existe una constante $P > 0$ tal que

$$p_0(Q_k(w_0 - y)) \leq P_0(Q_k(w_0)) + p_0(Q_k(y)) \leq P$$

para todo y límite débil estrella de una a.f.p.s. $(y_n) \subset K$. Esto podemos conseguirlo porque la sucesión (d_k) anterior está acotada.

Nótese que $\lim_{\lambda \to 0^+} \gamma_{k_0}(2 - \lambda)r + \lambda P = 2\gamma_{k_0} r < 2r$, luego podemos encontrar $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$\gamma_{k_0}(2 - \lambda)r + \lambda P < 2r$$

y $\epsilon_2 > 0$ tal que

$$\gamma_{k_0}(2 - \lambda)(r + \epsilon_2) + \lambda P < 2r. \qquad (*)$$

Además

$$2r - \lambda(r + \epsilon_2 - 4\epsilon_1) < 2r. \qquad (**)$$

Por definición de ínfimo, podemos encontrar $(y_n) \subset K$ una a.f.p.s. tal que $w^*\text{-}\lim_n y_n = y$ verificando

$$\limsup_n p_1(y_n - y) < r + \epsilon_2$$

y $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $p_1(y_n - y) < r + \epsilon_2$ para todo $n \geq n_1$.

Definimos el vector $z = \lambda w_0 + (1 - \lambda)y_{n_1} \in K$ ya que K es convexo.

Vamos a acotar superiormente $\limsup_n p_1(y_n - z)$.

Notar que

$$y_n - z = y_n - y - (1 - \lambda)(y_{n_1} - y) - \lambda(w_0 - y)$$

Fijamos $n \geq n_1$ y recordemos que $p_1(x) = \sup_k p_0(Q_k(x))$ para todo $x \in X$. Separamos ahora dos casos:

Caso 1. Supongamos que $k \leq k_0$. Entonces

$$\begin{aligned}&\gamma_k p_0(Q_k(y_n - z) \leq \\ &\gamma_{k_0}\left[p_0(Q_k(y_n - y)) + (1-\lambda)p_0(Q_k(y_{n_1} - y)) + \lambda p_0(Q_k(w_0 - y))\right] \leq \\ &\gamma_{k_0}(2-\lambda)(r+\epsilon_2) + \lambda P\end{aligned}$$

Caso 2. Supongamos que $k > k_0$. Entonces:

$$\begin{aligned}&\gamma_k p_0(Q_k(y_n - z) \leq \\ &p_0(Q_k(y_n - y)) + (1-\lambda)p_0(Q_k(y_{n_1} - y)) + \lambda p_0(Q_k(w_0 - y)) \leq \\ &(2-\lambda)(r+\epsilon_2) + \lambda\left(p_0(Q_k(w_0)) + p_0(Q_k(y))\right) \leq \\ &(2-\lambda)(r+\epsilon_2) + \lambda 4\epsilon_1 = \\ &2r - \lambda(r + \epsilon_2 - 4\epsilon_1)\end{aligned}$$

Hemos probado entonces que para todo $n \geq n_1$

$$p_1(y_n - z) < M < 2r$$

donde $M = \text{máx}\{\gamma_{k_0}(2-\lambda)(r+\epsilon_2) + \lambda P, 2r - \lambda(r+\epsilon_2 - 4\epsilon_1)\} < 2r$ por las desigualdades $(*)$ y $(**)$.

Tomando límites cuando n tiende a infinito conseguimos que

$$\limsup_n p_1(y_n - z) \leq M < 2r.$$

Sea ahora

$$H := \left\{ z \in K : \limsup_n p_1(y_n - z) \leq M \right\},$$

el cual es no vacío, convexo, cerrado y T-invariante. Por tanto podemos encontrar en H una sucesión de puntos fijos aproximados $(z_n) \subset H$ y tal que $w^*\text{-}\lim_n z_n = z$. En este caso

$$\limsup_m \limsup_n p_1(y_n - z_m) \leq M.$$

Por otro lado, aplicando la desigualdad obtenida en 2) a las sucesiones (y_n), (z_n), tomando límites cuando k tiende a infinito y teniendo en cuenta que $\lim_k S_k = 1$, por ser $p_0(\cdot)$ una norma secuencialmente separadora, obtenemos:

$$\begin{aligned}M &\geq \limsup_m \limsup_n p_1(y_n - z_m) \\ &\geq \limsup_n p_1(y_n - y) + \limsup_m p_1(z_m - z) \\ &\geq r + r = 2r\end{aligned}$$

lo cual es una contradicción porque $M < 2r$. Por tanto T tiene punto fijo, como queríamos probar. ∎

3.3. Aplicaciones a algunos espacios de sucesiones de Musielak-Orlicz

Una función $\phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ se dice que es una función de Orlicz si ϕ es convexa, continua por la izquierda, $\phi(0) = 0$ y no idénticamente nula.

Una sucesión $\Phi := \{\phi_n\}_n$ de funciones de Orlicz se llama función de Musielak-Orlicz.

Dada una función de Musielak-Orlicz $\Phi = \{\phi_n\}_n$, se define un modular convexo I_ϕ, en el conjunto de todas las sucesiones reales, de la siguiente forma

$$I_\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(|x(n)|).$$

Un espacio de sucesiones de Musielak-Orlicz generado por Φ se define por

$$\ell_\Phi := \{x = (x_n) : I_\Phi(\lambda x) < +\infty \text{ for some } \lambda > 0\}$$

Consideramos ℓ_Φ dotado con la norma de Luxemburg

$$\|x\| = \text{ínf}\{k > 0 : \; I_\Phi(x/k) \leq 1\}$$

bajo la cual es un espacio de Banach ([50]). En el caso que $\Phi = \phi_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ simplemente diremos que ℓ_Φ es un espacio de sucesiones de Orlicz.

Se dice que una función de Musielak-Orlicz Φ satisface la condición δ_2 si existen constantes positivas a y K y una sucesión con coordenadas mayores o iguales que cero $(c_n) \in \ell_1$ tal que

$$\phi_n(2t) \leq K\phi_n(t) + c_n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{R}_+$ satisfaciendo $\phi_n(t) \leq a$. En este caso, los vectores unitarios forman una base acotadamente completa, normalizada, incondicional de ℓ_Φ.

Notemos que en caso de que la función de Musielak-Orlicz no satisfaga la condición δ_2, el espacio ℓ_Φ contendrá una copia isomorfa de ℓ_∞ y por tanto, no admitiría una norma equivalente con la FPP.

Además:

Lema 3.5. *[36] Sea Φ una función de Musielak-Orlicz. Entonces Φ satisface la condición δ_2 es equivalente al hecho de que $\|x\| = 1$ si y solo si $I_\Phi(x) = 1$.*

Sin pérdida de generalidad, salvo isometría, podemos suponer que $\phi_n(1) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada una función de Musielak-Orlicz y una sucesión de espacios de Banach $\{X_n\}_n$, podemos considerar el correspondiente espacio vectorial $\ell_\Phi(\{X_n\}_n)$ como el espacio de elementos (x_n) en $\prod_n X_n$ tales que la sucesión $(\|x_n\|_n)_n$ pertenece a ℓ_Φ, dotado de la norma del vector $(\|x_n\|_n)_n$ en ℓ_Φ. El espacio $\ell_\Phi(\{X_n\}_n)$ es un espacio de Banach, el cual coincide con ℓ_Φ en el caso de que $X_n = \mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dada una función de Orlicz ϕ, denotemos por

$$s_\phi := \text{ínf}\left\{ s > 1 : \exists t \in (0,1] \text{ tal que } \phi\left(\frac{t}{s}\right) \leq \frac{1}{2}\phi(t) \right\}.$$

Notemos que, por convexidad, $1 \leq s_\phi \leq 2$ y que $s < s_\phi$ implica que $\phi\left(\frac{t}{s}\right) \geq \frac{1}{2}\phi(t)$ para todo $t \in (0,1]$. ■

Ahora podemos deducir el siguiente resultado de renormamiento:

Teorema 3.6. *Sea $\{X_n\}_n$ una sucesión de espacios de Banach de dimensión finita cuyas constantes de Schauder están uniformemente acotadas. Sea $\Phi = \{\phi_n\}_n$ una función de Musielak-Orlicz satisfaciendo la condición δ_2 y definamos*

$$s_\Phi := \liminf_n s_{\phi_n}.$$

Si $s_\Phi = 2$, entonces la norma de Luxemburg es secuencialmente separadora y el espacio de Musielak-Orlicz $\ell_\Phi(\{X_n\}_n)$ puede ser renormado con la FPP.

Demostración.

En primer lugar, notemos que el espacio $\ell_\Phi(\{X_n\}_n)$ tiene una base de Schauder la cual es la unión de las bases de Schauder de cada X_n, ya que las constantes de Schauder están uniformemente acotadas.

Vamos a probar que $s_\Phi = 2$ implica que la norma es secuencialmente separadora. Con el fin de hacer eso, usamos la definición equivalente obtenida en el Lema 2.20.

Tomemos $\epsilon > 0$. Podemos considerar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_\Phi - \epsilon < s_{\phi_k} - \frac{\epsilon}{2}$ para todo $k \geq k_0$.

Tomemos (x_n) una sucesión bloque normalizada de la base de Schauder y un vector normalizado x tal que x pertenezca al espacio generado por $\{X_i, i \geq k_0\}$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que x es de soporte finito, por lo que existe algún k_x tal que x pertenece al espacio generado por $\{X_i : k_0 \leq i \leq k_x\}$. También podemos asumir que $x_n \in span\{X_i : i > k_x\}$ con $k_x < p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 < \cdots$. Por tanto

$$\begin{aligned}
I_\phi\left(\frac{x+x_n}{s_\Phi - \epsilon}\right) &= \sum_{i=k_0}^{k_x} \phi_i\left(\frac{\|x(i)\|_i}{s_\Phi - \epsilon}\right) + \sum_{i=p_n}^{q_n} \phi_i\left(\frac{\|x_n(i)\|_i}{s_\Phi - \epsilon}\right) \geq \\
&\geq \sum_{i=k_0}^{k_x} \phi_i\left(\frac{\|x(i)\|_i}{s_{\phi_i} - \frac{\epsilon}{2}}\right) + \sum_{i=p_n}^{q_n} \phi_i\left(\frac{\|x_n(i)\|_i}{s_{\phi_i} - \frac{\epsilon}{2}}\right) \geq \\
&\geq \frac{1}{2}\sum_{i=k_0}^{k_x} \phi_i\left(\|x(i)\|_i\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=p_n}^{q_n} \phi_i\left(\|x_n(i)\|_i\right) = 1,
\end{aligned}$$

lo cual implica que $\limsup_n \|x + x_n\| \geq s_\Phi - \epsilon$ y ya que ϵ es arbitrario, obtenemos deducimos que la norma de Luxemburg es secuencialmente separadora y por tanto $\ell_\Phi(\{X_n\}_n)$ se puede renormar con la FPP. ∎

Tomemos cualquier sucesión $p_n \geq 1$ tal que $\lim_n p_n = 1$. Consideremos las funciones de Orlicz $\phi_n(x) = (1 + x^{p_n})^{\frac{1}{p_n}} - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es fácil comprobar que $s_{\phi_n} = 2^{1/p_n}$, lo cual implica que $s_\Phi = 2$, donde $\Phi = (\phi_n)_n$. Por tanto, para toda sucesión de espacios de Banach de dimensión finita con constantes de Schauder uniformemente acotadas, el espacio de Musielak-Orlicz $\ell_\Phi(\{X_n\}_n)$ se puede renormar con la FPP.

Si consideramos $X_n = \mathbb{R}$ y $\phi_n(t) = |t|^{p_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ con $\{p_n\}_n \subset [1, +\infty)$, obtenemos los clásicos espacios de Nakano [51].

Sea $\{p_n\}_n \subset [1, +\infty)$. El espacio de Nakano $\ell^{(p_n)}$ es el espacio de Musielak-Orlicz ℓ_Φ with $\Phi = \{\phi_n\}$ y $\phi_n(t) = |t|^{p_n}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$. En este caso, la función de Musielak-Orlicz $\Phi = \{\phi_n\}$ satisface la condición δ_2 si y solo si $\limsup_n p_n < +\infty$. Además, $\ell^{(p_n)}$ es reflexivo si y solo si $1 < \liminf_n p_n \leq \limsup_n p_n < +\infty$.

Por otra parte, $s_{\phi_n} = 2^{1/p_n}$ y $s_\phi = 2^{1/p}$, donde $p = \limsup_n p_n$.

Notemos que si $\lim_n p_n = 1$, el espacio de Nakano dotado de la norma de Luxemburg no tiene la FPP ya que contiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1 [57].

Corolario 3.7. *Si $\lim_n p_n = 1$, el correspondiente espacio de Nakano $\ell^{(p_n)}$ se puede renormar con la FPP.*

Notemos que, de acuerdo con el Teorema 1 en [51], dos espacios de Nakano $\ell^{(p_n)}$, $\ell^{(q_n)}$ coinciden como conjuntos con normas equivalentes si y solo si existe algún $\alpha > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^{\frac{p_n q_n}{|p_n - q_n|}} < +\infty \qquad .$$

Aplicando el anterior resultado con $q_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar sucesiones $(p_n)_n \subset [1, +\infty)$ con $\lim_n p_n = 1$ y tales que el espacio de Nakano $\ell^{(p_n)}$ no sea isomorfo a ℓ_1. En efecto, consideremos, por ejemplo (ver ejemplo en [51]),

$$p_n = 1 + \frac{1}{\log(\log(n+4))}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En este caso, la anterior serie es divergente, lo cual implica que las normas en ℓ_1 y $\ell^{(p_n)}$ no son equivalentes. Ya que la base es incondicional y usando que ℓ_1 tiene una única base normalizada e incondicional, salvo equivalencias [47], deducimos que el espacio de Nakano $\ell^{(p_n)}$ no es isomorfo a ℓ_1.

Por otra parte, el Corolario 2.1 de [7] da condiciones equivalentes para que dos espacios vectoriales de Nakano $\ell(\{p_n\}, \{X_n\})$ y $\ell(\{q_n\}, \{Y_n\})$ coincidan. Supongamos que $\{X_n\}$, $\{Y_n\}$ son dos sucesiones distintas de espacios de Banach de dimensión finita y $(p_n)_n, (q_n)_n$ son dos sucesiones con $\lim_n p_n = \lim_n q_n = 1$, entonces si para ambas existe algún n tal que X_n e Y_n no son isomorfos o las sucesiones $(p_n)_n$ y (q_n) no satisfacen la condición (1) de convergencia, los correspondientes espacios $\ell(\{p_n\}, \{X_n\})$ y $\ell(\{q_n\}, \{Y_n\})$ son diferentes y sus normas son secuencialmente separadoras.

3.4. Construcción de espacios de Banach no reflexivos renormables con la FPP

Sea c_{00} el espacio vectorial de todas las sucesiones de escalares que son eventualmente cero. Denotemos por $[\mathbb{N}]^{<w}$ los conjuntos de $\mathbb{N}$ con cardinal finito. Para $A \subset \mathbb{N}$, denotamos por P_A la correspondiente proyección, esto es, si $x = (x(n))_n \in c_{00}$, $P_A(x)$ es el vector cuyas coordenadas son $x(n)$ si $n \in A$ y cero en caso contrario.

Sea $\mathcal{S} \subset [\mathbb{N}]^{<w}$, para todo $S \in \mathcal{S}$ escojamos alguna seminorma en c_{00} y denotémosla por $|\cdot|_S$. Vamos a introducir la siguiente definición:

Definición 3.8. *Decimos que el par $\{\mathcal{S}, \{|\cdot|_S\}_{S\in\mathcal{S}}\}$ es admisible si se satisfacen las siguientes condiciones:*

i) La expresión

$$|x|_0 := \sup_{S\in\mathcal{S}} |P_S(x)|_S$$

define una norma premonótona en c_{00} con $\sup_{S\in\mathcal{S};n\in\mathbb{N}} |P_{[1,n]}|_S < +\infty$.

ii) Para todo $S \in \mathcal{S}$ existe algún $n_S \in \mathbb{N}$ ($n_S > \max S$) tal que si $T \in \mathcal{S}$ y $n_S < \min T$ entonces $S \cup T \in \mathcal{S}$ y $|P_{S\cup T}(x)|_{S\cup T} \geq |P_S(x)|_S + |P_T(x)|_T$ para todo $x \in c_{00}$.

iii) Para todo $n \in \mathbb{N}$ existe algún $k_n \in \mathbb{N}$ tal que si $x > k_n$, entonces $|x|_0 = \sup_{S\in\mathcal{S};n<\min(S)} |P_S(x)|_S$.

Definimos el espacio de Banach X como la completación de c_{00} con la norma $|\cdot|_0$ para el cual, los vectores unitarios $\{e_n\}_n$ forman una base de Schauder.

Vamos a probar que X dotado con la norma $|\cdot|_0$ satisface la condición $(*)$. Sea x un vector en X con soporte finito y $(x_i)_i$ una sucesión bloque de la base de Schauder. Tomemos $\epsilon > 0$. Existe algún conjunto admisible $S_x \in \mathcal{S}$ tal que

$$|x|_0 \leq |P_{S_x}(x)|_{S_x} + \epsilon.$$

Consideremos n_{S_x} de *ii*) y fijemos $n = \max\{\max(supp(x)), n_{S_x}\}$. Tomemos el correspondiente k_n verificando *iii*). Ya que $(x_i)_i$ es una sucesión bloque de la base, podemos suponer que $\max\{\max(S_x), k_n\} < \min(supp(x_i))$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, para todo $i \in \mathbb{N}$ podemos escoger $T_{x_i} \in \mathcal{S}$ con $n < \min(T_{x_i})$ verificando

$$|x_i|_0 \leq |P_{T_{x_i}}(x_i)|_{T_{x_i}} + \epsilon.$$

De *ii*) podemos asumir que $S_x \cup T_{x_i}$ pertenece a $\mathcal{S}$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |x + x_i|_0 &\geq |P_{S_x\cup T_{x_i}}(x + x_i)|_{S_x\cup T_{x_i}} \geq \\ &\geq |P_{S_x}(x + x_i)|_{S_x} + |P_{T_{x_i}}(x + x_i)|_{T_{x_i}} \\ &= |P_{S_x}(x)|_{S_x} + |P_{T_{x_i}}(x_i)|_{T_{x_i}} \geq |x|_0 + |x_i|_0 - 2\epsilon. \end{aligned}$$

Tomando límites cuando n tiende a infinito, deducimos que

$$\limsup_n |x + x_n|_0 \geq |x|_0 + \limsup_n |x_n|_0 - 2\epsilon,$$

y ya que $\epsilon > 0$ es arbitrario, deducimos que se cumple la condición $(*)$.

Como consecuencia, podemos deducir: En primer lugar, que $(X, |\cdot|_0)$ es un espacio de Banach no reflexivo el cual no tiene la FPP ya que contiene una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1. En segundo lugar, que $(X, |\cdot|_0)$ es renormable con la FPP, de acuerdo con el Teorema 3.2.

El anterior esquema puede proporcionar muchos ejemplos diferentes de espacios de Banach no reflexivos que son renormables con la FPP. Para ello solo necesitamos encontrar pares admisibles siguiendo la Definición 3.8. A continuación vamos a dar unos ejemplos particulares, los cuales siguen el esquema general anterior:

Ejemplo 3.9. Definamos la familia $\mathcal{S} \subset [\mathbb{N}]^{<w}$ como

$$\mathcal{S} := \{S = (n_1, \cdots, n_k) \in [\mathbb{N}]^{<w} : n_{i+1} \geq 2n_i;\ i = 1, ..., k-1\}.$$

Supongamos que $|x|_S = \|P_S x\|_1$ para todo $S \in \mathcal{S}$. En este caso

$$|x|_0 = \sup_{S \in \mathcal{S}} \|P_S(x)\|_1.$$

y el par $\{\mathcal{S}, \{\|P_S x\|_1\}_{S \in \mathcal{S}}\}$ es admisible. Ya que la base es incondicional, es también acotadamente completa, de acuerdo con el Corolario 4.6 que probaremos en el siguiente Capítulo.

Vamos a probar que el espacio de Banach X, obtenido por la anterior norma, no es isomorfo a ℓ_1. Con este fin, vamos a utilizar que ℓ_1 tiene, salvo equivalencias, una única base incondicional normalizada [47]. Por tanto, si ℓ_1 y X fueran espacios de Banach isomorfos, las correspondientes bases de Schauder deberían ser equivalentes.

Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos los vectores $x_n = \sum_{i=1}^{2^n} e_i$. Es evidente que $\|x_n\|_1 = 2^n$. Por otra parte, la norma $|x_n|_0$ se alcanza para el conjunto admisible $S = \{1, 2, 2^2, \cdots, 2^n\}$, lo cual implica que $|x_n|_0 = n + 1$. Ya que n es arbitrario, esto muestra que las bases de Schauder no pueden ser equivalentes y así X y ℓ_1 no son espacios de Banach isomorfos.

Podemos generalizar el ejemplo anterior con la siguiente idea:

Ejemplo 3.10. Para todo $l > 1$ fijemos alguna norma bimonótona en c_{00} y la denotamos por $\nu_l(\cdot)$. Dado $A \in [\mathbb{N}]^{<w}$ definimos $l(A) = 0$ si ocurre alguna de las dos condiciones siguientes: A es unitario o $A = (n_1, \cdots, n_k)$ y no existe ningún $l > 1$ tal que $n_{i+1} \geq l n_i$ para todo $i = 1, \cdots, k-1$. En otro caso definimos $l(A) := \text{máx}\{l > 1 : n_{i+1} \geq l n_i, \ \forall i = 1, ..., k-1\}$. Denotemos por $|A|$ al cardinal del conjunto A. Consideremos

$$\begin{aligned}\mathcal{S} := \ & \{\bigcup_{i=1}^{n} A_i : A_i \in [\mathbb{N}]^{<w}, \ l(A_i) > 1, \text{mín}(A_i) = |A_i| \ \forall i, \\ & 2\,\text{máx}(A_i) \leq \text{mín}(A_{i+1}) \ i = 1, \cdots, n-1\}\end{aligned}$$

y para $S = \cup_{i=1}^{n} A_i$ definimos la norma

$$|x|_S := \sum_{i=1}^{n} \nu_{l(A_i)}(P_{A_i} x).$$

Es fácil probar que el par $\{\mathcal{S}, \{|\cdot|_{S \in \mathcal{S}}\}\}$ es admisible, de acuerdo con la Definición 3.8.

Fijemos algún $p \in [1, +\infty]$. En el caso particular en que tomemos $\nu_l(x) = \|x\|_p$ para todo $l > 1$, no es difícil comprobar que las normas en los correspondientes espacios X_p, $X_{p'}$ no son equivalentes para $p, p' \in [1, +\infty]$ con $p \neq p'$.

3.5. La FPP en algunos espacios de Banach definidos como suma directa de espacios de dimensión infinita

Se puede comprobar que la norma usual de una 1-suma directa de una sucesión de espacios de Banach de dimensión infinita con normas secuencialmente separadora no es, en general, una norma secuencialmente separadora. Por ejemplo, considerando un número infinito de copias de ℓ_1 dotados de normas del estilo de P.K. Lin.

En esta sección vamos a probar que la condición $(*)$ sí se conserva en este caso.

Lema 3.11. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, denotemos por $(X_n, \|\cdot\|_n)$ una sucesión de espacios de Banach con base de Schauder tal que las constantes básicas sean uniformemente acotadas. Supongamos que todo $(X_n, \|\cdot\|_n)$ verifica la condición $(*)$.*

Entonces el espacio

$$X := \oplus_1 \sum_{n=1}^{\infty} (X_n, \|\cdot\|)$$

tiene una base de Schauder y satisface la condición $(*)$.

Demostración.

Denotemos por $\{e_k^n\}_k$ la base de Schauder en X_n para todo $n \in \mathbb{N}$ y definamos $\widetilde{e}_k^n$ al elemento en X, el cual tiene el vector nulo en toda coordenada $j \neq n$ y e_k^n en la coordenada n-ésima para todo $k \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{\widetilde{e}_1^1, \widetilde{e}_2^1, \widetilde{e}_1^2, \widetilde{e}_3^1, \widetilde{e}_2^2, \widetilde{e}_1^3, ...\}$ forma una base de Schauder para el espacio de Banach X.

Denotemos por $P_n : X \to X_n$ a la proyección natural tal que $P_n(x) = x_n$ siempre que $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$ con $x_n \in X_n$.

Sea $(x_k)_k$ una sucesión bloque acotada de la base de Schauder en X y $x \in X$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que x es de soporte finito y que existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que x pertenece al espacio generado por $\{\widetilde{e}_i^j : 1 \leq i, j \leq n_0\}$. Por lo tanto, $x = \sum_{n=1}^{n_0} P_n(x)$ y $P_n(x)$ pertenece al espacio generado por $\{e_k^n : k \leq n_0\}$ para todos $k, n \in \mathbb{N}$.

Notemos que podemos extraer una subsucesión $(x_{k_s})_s$ de (x_k) tal que $\limsup_k \|x_k\| = \lim_s \|x_{k_s}\|$ y los siguientes límites existen:

$$\lim_s \|x_{k_s}+x\|; \lim_s \|P_n(x_{k_s}+x)\|_n, \lim_s \|P_n(x_{k_s})\|_n \forall n \in \mathbb{N}; \lim_s \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|P_n(x_{k_s})\|_n.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}
\limsup_k \|x_k + x\| &\geq \lim_s \|x_{k_s} + x\| = \lim_s \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n(x_{k_s} + x)\|_n \\
&= \lim_s \left(\sum_{n=1}^{n_0} \|P_n(x_{k_s} + x)\|_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|P_n(x_{k_s} + x)\|_n \right) \\
&= \lim_s \sum_{n=1}^{n_0} \|P_n(x_{k_s} + x)\|_n + \lim_s \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|P_n(x_{k_s})\|_n \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \lim_s \|P_n(x_{k_s} + x)\|_n + \lim_s \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|P_n(x_{k_s})\|_n \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \Big(\|P_n(x)\|_n + \lim_s \|P_n(x_{k_s})\|_n \Big) + \lim_s \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|P_n(x_{k_s})\|_n \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \|P_n(x)\|_n + \lim_s \sum_{n=1}^{n_0} \|P_n(x_{k_s})\|_n + \lim_s \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|P_n(x_{k_s})\|_n \\
&= \sum_{n=1}^{n_0} \|P_n(x)\|_n + \lim_s \left(\sum_{n=1}^{n_0} \|P_n(x_{k_s})\|_n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \|P_n(x_{k_s})\|_n \right) \\
&= \|x\| + \lim_s \|x_{k_s}\| = \|x\| + \limsup_k \|x_k\|.
\end{aligned}$$

Finalmente, usando la desigualdad triangular deducimos que X, dotado de la norma usual, cumple la condición $(*)$. ■

Como consecuencia del Teorema 3.2 deducimos:

Corolario 3.12. *Denotemos por* $\{(X_n, \|\cdot\|_n)\}_n$ *a una sucesión de espacios de Banach con base de Schauder acotadamente completa, tal que las constantes básicas son uniformemente acotadas. Supongamos que todo* $(X_n, \|\cdot\|_n)$ *satisface la condición* $(*)$*. Entonces el espacio*

$$X := \oplus_1 \sum_{n=1}^{\infty} (X_n, \|\cdot\|)$$

puede ser renormado para tener la FPP.

Este resultado se puede aplicar, por ejemplo, a los espacios de Banach con la condición $(*)$ obtenidos en la sección anterior y otra vez obtenemos nuevas familias de espacios de Banach no reflexivos que pueden ser renormados con la FPP.

3.6. Algunas propiedades lineales de las normas en $\mathcal{P}(X)$ con la FPP

Por medio del concepto de normas secuencialmente separadoras, también podemos mejorar el Teorema 1.1 de [33] enunciado en esta Memoria como Teorema 2.2 en el Capítulo II, en el siguiente sentido: podemos considerar espacios de Banach más generales que el espacio ℓ_1 y podemos obtener nuevos conjuntos de normas equivalentes con la FPP.

En efecto, podemos sustituir la condición $(*)$ en el Teorema 2.2 por la condición de ser secuencialmente separadora y deducir lo siguiente:

Corolario 3.13. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder acotadamente completa. Supongamos que existe alguna norma $p, q_0 \in \mathcal{P}(X)$ secuencialmente separadoras. Supongamos que $q_0(\cdot)$ es premonótona y definamos $q_1(x) := \sup_k \gamma_k q_0(Q_k(x))$ con $(\gamma_k) \subset (0,1)$ y $\lim_k \gamma_k = 1$. Entonces la norma equivalente*

$$p(\cdot) + \lambda q_1(\cdot)$$

verifica la FPP para todo $\lambda > 0$.

Demostración.
Para probar el Corolario 3.13 usaremos el Teorema 3.1:
Definimos en X las seminormas:

$$\rho_k(x) := p(x) + \lambda \gamma_k q_0(Q_k(x))$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Nótese que en este caso

$$p(x) + \lambda q_1(x) = \sup_k \rho_k(x)$$

para todo $x \in X$. Nuestro objetivo será probar que en conjunto de seminormas $\{\rho_k(\cdot)\}$ verifican las condiciones (I), (II) y (III) definidas al comienzo de este capítulo y por tanto aplicando el Teorema 3.1 podremos afirmar que la norma dada verifica la FPP.

(I) Es fácil comprobar que la composición $p(\cdot) + \lambda q_1(\cdot)$ es de nuevo secuencialmente separadora. Por tanto, aplicando el mismo razonamiento que en la demostración de la condición (I) en el Teorema 3.2, se obtiene para la nueva familia de seminormas asociadas a $p(\cdot) + \lambda q_1(\cdot)$.

(II) Sea (x_n) una sucesión acotada que converja a cero para la topología débil estrella. Tomando una subsucesión apropiada y sin pérdida de generalidad podemos suponer que los límites que usamos a continuación existen. Sea $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \text{lím}_n\, \rho_k(x_n) &= \text{lím}_n\, p(x_n) + \lambda\gamma_k \,\text{lím}_n\, q_0(Q_k(x_n)) \\ &= \text{lím}_n\, p(x_n) + \lambda\gamma_k \,\text{lím}_n\, q_1(x_n) \\ &\geq \gamma_k \,\text{lím}_n [p(x_n) + \lambda q_1(x_n)], \end{aligned}$$

y se obtiene la desigualdad izquierda de (II) con $\alpha_k = \gamma_k$.

Para probar la otra desigualdad definimos $a = \text{ínf}\{q_1(x) : p(x) = 1\}$. Como son normas equivalentes podemos asegurar que $a > 0$. Además $ap(x) \leq q_1(x)$ para todo $x \in X$. En este caso:

$$\begin{aligned} \text{lím}_n\, \rho_k(x_n) &= \text{lím}_n\, p(x_n) + \lambda\gamma_k \,\text{lím}_n\, q_0(Q_k(x_n)) \\ &= \text{lím}_n\, p(x_n) + \lambda\gamma_k \,\text{lím}_n\, q_1(x_n) \\ &= \gamma_k \,\text{lím}_n [p(x_n) + \lambda q_1(x_n)] + (1-\gamma_k)\,\text{lím}_n\, p(x_n) \\ &\leq \gamma_k \,\text{lím}_n [p(x_n) + \lambda q_1(x_n)] + (1-\gamma_k)\tfrac{1}{1+\lambda a}\,\text{lím}_n [p(x_n) + \lambda q_1(x_n)] \\ &= \left[\gamma_k + (1-\gamma_k)\tfrac{1}{1+\lambda a}\right] \text{lím}_n [p(x_n) + \lambda q_1(x_n)]. \end{aligned}$$

Definiendo

$$\beta_k := \left[\gamma_k + (1-\gamma_k)\frac{1}{1+\lambda a}\right] < 1,$$

obtenemos finalmente la condición (II).

(III) Consideremos cualquier vector $x_0 \in C$.

Sea de nuevo $a = \text{ínf}\{q_1(x) : p(x) = 1\}$.

$$\begin{aligned} \text{lím}_k\, \rho_k(x_0) &= \text{lím}_k \left[p(x_0) + \lambda\gamma_k q_0(Q_k(x_0))\right] = p(x_0) \\ &\leq \tfrac{1}{1+\lambda a}\left[p(x_0) + \lambda q_1(x_0)\right] \end{aligned}$$

Sea (x_n) una sucesión que converja a cero para la topología débil estrella y sea $\epsilon > 0$ tal que $\frac{1+\epsilon}{1+a} < 1$.

Notemos $m := \text{lím sup}[p(x_n) + \lambda q_1(x_n)]$ y sea n_0 tal que

$$p(x_{n_0}) + \lambda q_1(x_{n_0}) < (1+\epsilon)m.$$

Teniendo en cuenta las desigualdades anteriores para el vector x_{n_0} se obtiene:

$$\text{lím}_k\, \rho_k(x_{n_0}) \leq \frac{1}{1+\lambda a}\left[p(x_0) + \lambda q_1(x_0)\right] \leq \frac{1+\epsilon}{1+a} m,$$

y se obtiene entonces la condición (III) como queriamos probar.

Aplicando el Teorema 3.1 se obtiene el corolario. ■

Por otra parte, el hecho de ser secuencialmente separadora es una propiedad lineal en el sentido de que

$$\lambda p(\cdot) + \mu q(\cdot)$$

es una norma secuencialmente separadora si $\lambda, \mu \geq 0$ ($\text{máx}\{\lambda, \mu\} > 0$) y $p(\cdot)$, $q(\cdot)$ verifican la misma propiedad.

Notemos que el conjunto $\mathcal{P}(X)$ es un cono en el sentido que $\lambda p_1 + \mu p_2 \in \mathcal{P}(X)$ si $p_1, p_2 \in \mathcal{P}(X)$ y $\lambda, \mu \geq 0$. Dadas $p_1, p_2 \in \mathcal{P}(X)$, el subconjunto $\{p_1 + \lambda p_2 : \lambda \geq 0\}$ se denomina rayo (lineal) cerrado contenido en $\mathcal{P}(X)$, siendo p_1 su punto inicial. De manera similar se definen los rayos abiertos cuando $\lambda > 0$.

Dado $L \subset \mathcal{P}(X)$, se dice que L es una variedad n-dimensional si existen $q_1, q_2, \ldots, q_n \in \mathcal{P}(X)\ldots$ tal que $L = \{q + \lambda_1 q_1 + \cdots + \lambda_n q_n, \lambda_i \geq 0, \max\limits_{1 \leq i \leq n} \lambda_i > 0\}$.

Mediante el Teorema 2.2 probado en [33] podíamos obtener en ℓ_1 la existencia de rayos abiertos de normas con la FPP.

Con los resultados obtenidos en esta sección y usando el método inductivo para generar normas secuencialmente separadoras podemos extender ampliamente el Teorema 2.2 y deducir lo siguiente:

Corolario 3.14. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder acotadamente completa. Supongamos que existe alguna norma $p_0 \in \mathcal{P}(X)$ premonótona y secuencialmente separadora. Entonces el conjunto de normas de $\mathcal{P}(X)$ que verifican la FPP contiene variedades afines n-dimensionales para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Dada p_0 con las hipótesis del corolario y $n \in \mathbb{N}$, para todo $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ números mayores o iguales que cero (con algún $\lambda_i \neq 0$), la norma

$$p_0(\cdot) + \lambda_1 p_1(\cdot) + \cdots + \lambda_{n-1} p_{n-1}(\cdot) + \lambda_n p_n(\cdot)$$

verifica la FPP ya que cumple las hipótesis del Corolario 3.13. Nótese que incluso podemos elegir $p_0(\cdot)$ para que sea una norma que también verifique la FPP. ■

3.7. Extensión a operadores de tipo (L)

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y C un subconjunto de X. Una aplicación $T : C \to C$ se dice que satisface la condición (L) si se cumple las siguientes dos propiedades:

(i) Cada subconjunto $D \subset C$ convexo, cerrado y acotado, que sea T-invariante contiene una sucesión de puntos fijos aproximados.

(ii) Para cualquier sucesión de puntos fijos aproximados $\{x_n\} \subset C$ y para todo $x \in C$ se cumple

$$\limsup_n \|x_n - Tx\| \leq \limsup_n \|x_n - x\|.$$

Las aplicaciones con la condición (L) fueron definidas por E. Moreno y E. Llorens-Fuster en [49] como una generalización natural de las aplicaciones no-expansivas. Sin embargo, existen en la literatura diversas clases de aplicaciones más generales que las no-expansivas, pero que verifican la condición (L) (ver [49] para nuevas definiciones y ejemplos).

Si observamos las demostraciones de renormamientos de punto fijo realizadas en este capítulo, pueden extenderse al caso de aplicaciones tipo (L) ya que las propiedades (i) y (ii) son las condiciones usadas de la no-expansividad. Esto significa que todos los resultados sobre renormamientos con la propiedad del punto fijo dados en este capítulo pueden ser enunciados para aplicaciones de tipo (L) en general.

4 Relaciones con la Geometría del espacio de Banach

Este capítulo está dividido en dos secciones donde estudiaremos algunas relaciones de los conceptos definidos en el Capítulo II con la geometría del espacio de Banach.

Una vez que hemos probado que las normas secuencialmente separadoras dan origen a un renormamiento con la propiedad de punto fijo, sería interesante saber si el espacio de Banach c_0, o un espacio de Banach reflexivo, podrían ser renormados con una norma equivalente cumpliendo dicha propiedad. La primera sección de este capítulo responde a este problema ya que estudiaremos qué tipo de espacios de Banach pueden admitir una norma equivalente que sea secuencialmente separadora.

A continuación relacionaremos el coeficiente $S(X, p)$ definido en el Capítulo II con otros coeficientes geométricos conocidos y relacionados con la teoría métrica de punto fijo para aplicaciones no-expansivas. Tales coeficientes serán el módulo de Opial uniforme y el coeficiente $\tau CS(X)$ cuyas definiciones y aplicaciones a la propiedad de punto fijo con respecto a una topología τ recordaremos al iniciar la sección.

4.1. Geometría de los espacios de Banach con norma secuencialmente separadora

En esta sección vamos a estudiar algunas propiedades geométricas de los espacios de Banach que admiten una norma secuencialmente separadora. Comprobamos que para la base de Schauder usual, $S(c_0, \|\cdot\|_\infty) = 2$ y $S(\ell_r, \|\cdot\|_r) = 2^{\frac{r-1}{r}}$ para $1 < r < +\infty$. Nos podríamos preguntar si el espacio de Banach c_0 o si algún espacio de Banach reflexivo podría admitir una norma equivalente la cual sea secuencialmente separadora.

En este capítulo vamos a probar que todo espacio de Banach con una base de Schauder que admite una norma secuencialmente separadora, debe contener una copia isomorfa de ℓ_1 y, por tanto, ni c_0 ni ningún espacio de Banach reflexivo puede ser renormado con normas secuencialmente separadoras. En realidad, probaremos un resultado más fuerte.

Vamos a usar conceptos de teoría de Ramsey. Para ello, necesitamos introducir la siguiente notación: Denotemos por $[\mathbb{N}]$ a todas las subsucesiones infinitas de $\mathbb{N}$. Para $k \in \mathbb{N}$, $[\mathbb{N}]^k$ denota todas las subsucesiones finitas de $\mathbb{N}$ de longitud k. Si $M \in [\mathbb{N}]$, usamos una notación similar, $[M]$ y $[M]^k$, para denotar a todas las subsucesiones (o todas las subsucesiones de longitud k) de M. El conjunto $[\mathbb{N}]$ está dotado con la topología producto; así una base de conjuntos abiertos en $[\mathbb{N}]$ es de la forma

$$\mathcal{O}(n_1, \cdots, n_k) = \{M = (m_i) \in [\mathbb{N}] : \; m_i = n_i \text{ for } i \leq k\}$$

donde $n_1 < \cdots < n_k$ son arbitrarios.

Recordemos a continuación el resultado clave que vamos a utilizar, que fue probado por F. Galvin y K. Prikry en 1973.

Teorema 4.1. *[26] Sea $\mathcal{A} \subset [\mathbb{N}]$ un conjunto de Borel para la topología descrita anteriormente. Entonces para todo $M \in [\mathbb{N}]$ existe $L \in [M]$ de manera que $[L] \subset \mathcal{A}$ o $[L] \subset [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{A}$.*

Para saber más sobre teoremas de tipo Ramsey y sus aplicaciones a la geometría de espacios de Banach, se puede consultar [29] y las referencias allí incluidas.

Dado $L \in [\mathbb{N}]$ y una sucesión $\{x_n : n \in L\}$ en un espacio de Banach, decimos que un vector $y \in span\{x_n : n \in L\}$ si existe un número finito $\{n_1, \cdots, n_s\} \subset L$ y números reales $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_s\}$ con $\lambda_s \neq 0$ tal que $y = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i x_{n_i}$.

Vamos a probar el siguiente lema técnico:

Lema 4.2. *Sea X un espacio de Banach y $p \in \mathcal{P}(X)$ tal que $S(X,p) = 1$. Dado cualquier $\epsilon > 0$ y $M \in [\mathbb{N}]$, existe algún $L \in [M]$ tal que*

$$p(e_k) + p(y) \leq (1+\epsilon)p(e_k + y)$$

si $k \in L$ e $y \in span\{e_n : n \in L, n > k\}$.

Demostración.
Fijemos un $\epsilon > 0$ y definamos

$$\mathcal{A}_\epsilon := \{(n_i)_{i\geq 1} \in [\mathbb{N}] : \; p(e_{n_1}) + p(y) \leq (1+\epsilon)p(e_{n_1} + y), \forall y \in span\{e_{n_i} : i \geq 2\}\}$$

Vamos a probar que $\mathcal{A}_\epsilon$ es un subconjunto cerrado en la topología de $[\mathbb{N}]$. Para ello vamos a probar que $[\mathbb{N}] \setminus \mathcal{A}_\epsilon$ es abierto. Sea $L = (m_i)_i \in [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{A}_\epsilon$, esto significa que existe algún $y \in span\{e_{m_i} : i > 1\}$ tal que

$$p(e_{m_1}) + p(y) > (1+\epsilon)p(e_{m_1} + y).$$

Supongamos que $y \in span\{e_{m_2}, \cdots, e_{m_s}\}$. Entonces $\mathcal{O}(m_1, \cdots, m_s) \subset [\mathbb{N}] \setminus \mathcal{A}_\epsilon$, lo cual prueba que $[\mathbb{N}] \setminus \mathcal{A}_\epsilon$ es abierto y que $\mathcal{A}_\epsilon$ es cerrado.

Según el Teorema 4.1, existe algún $L \in [M]$ tal que ocurre que $[L] \subset \mathcal{A}_\epsilon$ o $[L] \cap \mathcal{A}_\epsilon = \emptyset$. Vamos a ver que la segunda opción no es posible en caso de que $S(X,p) = 1$:

Fijemos $L = (m_i)_i$ y consideremos algún $i_0 \in \mathbb{N}$.
Si $[L] \cap \mathcal{A}_\epsilon = \emptyset$, $L_1 = \{m_i : i \geq i_0\} \notin \mathcal{A}_\epsilon$ por lo que existe algún $y_1 \in span\{e_{m_i} : i > i_0\}$ tal que

$$p(e_{m_{i_0}}) + p(y_1) > (1+\epsilon)p(e_{m_{i_0}} + y_1).$$

Tomemos $s_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m_{s_2} > \max\{supp(y_1)\}$ y consideremos $L_2 = \{m_{i_0}\} \cup \{m_i : i \geq s_2\}$. De nuevo, $L_2 \notin \mathcal{A}_\epsilon$, así podemos definir $y_2 \in span\{e_{m_i} : i \geq s_2\}$ tal que

$$p(e_{m_{i_0}}) + p(y_2) > (1+\epsilon)p(e_{m_{i_0}} + y_2).$$

Tomemos $s_3 \in \mathbb{N}$ tal que $m_{s_3} > \max\{supp(y_2)\}$ y consideremos $L_3 = \{m_{i_0}\} \cup \{m_i : i \geq s_3\}$. Reiterando el proceso, construimos una sucesión (y_n) bloque de la base de Schauder tal que

$$p(e_{m_{i_0}}) + p(y_n) > (1+\epsilon)p(e_{m_{i_0}} + y_n)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando límite cuando n tiende a infinito,

$$S_{m_{i_0}}(X,p) \geq \frac{p(e_{m_{i_0}}) + \limsup p(y_n)}{\limsup_n p(e_{m_{i_0}} + y_n)} \geq 1 + \epsilon.$$

Ya que $i_0 \in \mathbb{N}$ era arbitrario, deducimos que $S(X,p) \geq 1+\epsilon$, lo cual contradice el hecho de que $p(\cdot)$ sea una norma secuencialmente separadora.
Lo anterior muestra que $[L] \subset \mathcal{A}_\epsilon$ y por tanto, el lema se cumple. ■

Teorema 4.3. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_n$. Supongamos que X puede ser renormado con una norma secuencialmente separadora $p(\cdot)$. Entonces toda subsucesión de $\{e_n\}_n$ contiene otra subsucesión $\{e_{n_k}\}_k$ tal que $\{\frac{e_{n_k}}{p(e_{n_k})}\}_k$ genera una copia casi isométrica de ℓ_1.*

Demostración.

Tomemos $L_0 \in [\mathbb{N}]$ y consideremos la subsucesión de la base de Schauder $\{e_n\}_{n\in L_0}$. En primer lugar, supongamos que $p(e_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $(\delta_n) \subset (0,1)$ una sucesión decreciente con $\lim_n \delta_n = 0$ y tomemos (ϵ_n) una sucesión de números reales positivos tales que

$$\prod_{i=k}^{\infty}(1+\epsilon_i) < \frac{1}{1-\delta_k}.$$

Usando los argumentos del Lema 4.2 repetidamente, definiendo el correspondiente conjunto $\mathcal{A}_{\epsilon_n}$, podemos construir, por inducción, una sucesión $(L_s)_s$ de elementos en $[\mathbb{N}]$ tales que $L_s \subset L_{s-1} \subset \cdots \subset L_1 \subset L_0$ y tal que

$$p(e_k) + p(y) \leq (1+\epsilon_s)p(e_k + y)$$

si $k \in L_s$ y $y \in span\{e_n : n \in L_s, n > k\}$ para todo $s \geq 1$.

Tomemos $n_1 \in L_1$, $n_2 \in L_2 \setminus \{n_1\}$,...,$n_s \in L_s \setminus \{n_1, \cdots, n_{s-1}\}$ para todo $s \in \mathbb{N}$. Vamos a probar que la subsucesión $\{e_{n_s}\}_s$ genera una copia casi isométrica de ℓ_1.

Fijemos $s \in \mathbb{N}$ y $\{a_i : i = 1, \cdots, s\}$ números reales. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a_i \neq 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, s\}$. En otro caso, omitimos los índices i con $a_i = 0$. Usando la desigualdad previa repetidamente, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
p\left(\sum_{i=1}^{s} a_i e_{n_i}\right) &= |a_1| p\left(e_{n_1} + \sum_{i=2}^{s} \frac{a_i}{|a_1|} e_{n_i}\right) \\
&\geq |a_1| \tfrac{1}{1+\epsilon_1} \left[p(e_{n_1}) + p\left(\sum_{i=2}^{s} \frac{a_i}{|a_1|} e_{n_i}\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{1+\epsilon_1} \left[|a_1| p(e_{n_1}) + p\left(\sum_{i=2}^{s} a_i e_{n_i}\right)\right] \\
&= \tfrac{1}{1+\epsilon_1} \left[|a_1| p(e_{n_1}) + |a_2| p\left(e_{n_2} + \sum_{i=3}^{s} \frac{a_i}{|a_2|} e_{n_i}\right)\right] \\
&\geq \tfrac{1}{1+\epsilon_1} \left[|a_1| p(e_{n_1}) + |a_2| \tfrac{1}{1+\epsilon_2} \left[p(e_{n_2}) + p\left(\sum_{i=3}^{s} \frac{a_i}{|a_2|} e_{n_i}\right)\right]\right] \\
&\geq \tfrac{1}{1+\epsilon_1} \tfrac{1}{1+\epsilon_2} \left[|a_1| p(e_{n_1}) + |a_2| p(e_{n_2}) + p\left(\sum_{i=3}^{s} a_i e_{n_i}\right)\right] \\
&\geq ... \\
&\geq \frac{1}{(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)\cdots(1+\epsilon_{s-1})} \sum_{i=1}^{s} |a_i| p(e_{n_i}) \\
&\geq \frac{1}{\prod_{i=1}^{\infty}(1+\epsilon_i)} \sum_{i=1}^{s} |a_i| p(e_{n_i}) \geq (1-\delta_1) \sum_{i=1}^{s} |a_i|
\end{aligned}
$$

De manera similar, podemos comprobar que para todo $k \in \{1, ..., s\}$,

$$
p\left(\sum_{i=k}^{s} a_i e_{n_i}\right) \geq \frac{1}{\prod_{i=k}^{\infty}(1+\epsilon_i)} \sum_{i=k}^{s} |a_i| p(e_{n_i}) \geq (1-\delta_k) \sum_{i=k}^{s} |a_i|
$$

Ya que $s \in \mathbb{N}$ es arbitrario, deducimos para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$
p\left(\sum_{i=k}^{\infty} a_i e_{n_i}\right) \geq (1-\delta_k) \sum_{i=k}^{\infty} |a_i|
$$

Por otra parte, por la desigualdad triangular

$$
p\left(\sum_{i=k}^{\infty} a_i e_{n_i}\right) \leq \sum_{i=k}^{\infty} |a_i|.
$$

Por tanto, la sucesión $\{e_{n_s}\}_s$ genera una copia casi isométrica de ℓ_1, como queríamos probar. En caso de que la base de Schauder no estuviera normalizada para la norma $p(\cdot)$, consideramos la sucesión básica $z_n = e_n / p(e_n)$

y tomamos Y el subespacio cerrado generado por $\{z_n\}_n$. Es fácil probar que $S(Y,p)=1$ con respecto a la base $\{z_n\}_n$ y podemos aplicar los mismos argumentos. ■

Notemos que el teorema anterior no puede ser extendido en el sentido de que sea posible obtener una copia asintóticamente isométrica de ℓ_1. Recordemos que la norma de P.K. Lin $|||\cdot|||$ introducida en el Ejemplo 1.19 es una norma secuencialmente separadora, pero no contiene copias asintóticamente isométricas de ℓ_1 ([40], Ejemplo 2.8 en Capítulo 9).

Recordemos aquí el siguiente resultado probado por Rosenthal en 1974 (ver por ejemplo [1], Theorem 10.2.1):

Teorema 4.4. *Sea $(x_n)_{n=1}^\infty$ una sucesión acotada en un espacio de Banach X de dimensión infinita. Entonces se verifica una de las siguientes afirmaciones:*

- *$(x_n)_{n=1}^\infty$ contiene una subsucesión débil de Cauchy o*
- *$(x_n)_{n=1}^\infty$ contiene una subsucesión básica y equivalente a la base canónica de ℓ_1.*

Recordemos que la base canónica de ℓ_1 no tiene subsucesiones débiles de Cauchy.

Se dice que un espacio de Banach X tiene la propiedad de Schur si toda sucesión débil convergente también converge en norma. Por ejemplo, el espacio ℓ_1 tiene dicha propiedad. Se dice que un espacio de Banach X es hereditariamente ℓ_1 si cada subespacio cerrado de dimensión infinita X_0 de X contiene un subespacio $Y_0 \subset X_0$ el cual es isomorfo a ℓ_1.

Notemos que todo espacio de Banach que cumple la propiedad de Schur es hereditariamente ℓ_1. Esta afirmación puede ser deducida del teorema de Rosenthal en ℓ_1. En efecto, sea X_0 un subespacio cerrado de dimensión infinita de X. Tomemos (x_n) una sucesión acotada en X_0 sin subsucesiones convergentes en norma, es decir, dada cualquier subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) no existirá ningún $x \in X_0$ tal que $\lim_k \|x_{n_k} - x\| = 0$. Por el lema de Rosenthal, $(x_n)_n$ tiene una subsucesión la cual es equivalente a la base canónica de ℓ_1 y por tanto, X_0 contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1, o (x_n) tiene una subsucesión la cual es débilmente de Cauchy. Esto no es posible por la propiedad de Schur. Como consecuencia, todo espacio con la propiedad de Schur es hereditariamente ℓ_1.

Por otra parte, existen espacios de Banach con una base de Schauder, los cuales son hereditariamente ℓ_1 y no tienen la propiedad de Schur [53].

Con todo lo expuesto anteriormente podemos deducir:

Teorema 4.5. *Si un espacio de Banach X con una base de Schauder $\{e_n\}_n$ puede ser renormado con una norma secuencialmente separadora, entonces X satisface la propiedad de Schur y por tanto, X es hereditariamente ℓ_1.*

Demostración.
Sea $p \in \mathcal{P}(X)$ tal que $S(X,p) = 1$. Sea $(x_n)_n$ una sucesión que converge débilmente a cero. Supongamos que $\lim_n \|x_n\| \neq 0$. Entonces, de acuerdo con [47] (Proposition 1.a.12), existe alguna sucesión $(x_{n_k})_k$ la cual es equivalente a una sucesión bloque de la base de Schauder $\{e_n\}_n$. Denotemos por $(y_n)_n$ a esa sucesión bloque y definamos Y como el subespacio cerrado generado por $(y_n)_n$, dotado con la norma $p(\cdot)$. Ya que Y es un subespacio bloque de X, por la Proposición 2.12.2), $S(Y,p) \leq S(X,p) = 1$. De acuerdo con el Teorema 4.3 , existe una subsucesión $(y_{n_k})_k$ que genera una copia de ℓ_1. De esta forma, la subsucesión $(x_{n_k})_k$ es equivalente a la sucesión básica en ℓ_1, lo cual es una contradicción ya que converge débilmente a cero. Por tanto, $\lim_n \|x_n\| = 0$ y X satisface la propiedad de Schur. ■

Nótese que la propiedad de Schur es un invariante isomorfo y no depende de la norma equivalente escogida.

Bajo las condiciones anteriores, el espacio X no puede contener ningún subespacio isomorfo a c_0. Usando el Teorema 3.3.2 en [1] también podemos deducir:

Corolario 4.6. *Sea X un espacio de Banach con base de Schauder incondicional tal que existe alguna norma $p \in \mathcal{P}(X)$ secuencialmente separadora. Entonces la base es acotadamente completa.*

Nos gustaría finalizar esta sección con la siguiente observación:
Como consecuencia del Teorema 3.6 del Capítulo III, para una función de Orlicz ϕ que cumpla $s_\phi = 2$, se cumple que la correspondiente norma $\|\cdot\|_\phi$ es secuencialmente separadora y por tanto que el espacio de Banach ℓ_ϕ tiene la propiedad de Schur según el Teorema 4.5. En [37] (Proposition 4) los autores prueban que un espacio de Orlicz ℓ_ϕ es isomorfo a ℓ_1 si y sólo si tiene la propiedad de Schur. Por tanto, para espacios de sucesiones de Orlicz podemos concluir las siguientes equivalencias:

Corolario 4.7. *Sea ϕ una función de Orlicz cumpliendo la condición δ_2. Son equivalentes:*

a) *ℓ_ϕ puede ser renormado con una norma secuencialmente separadora.*

b) *ℓ_ϕ tiene la propiedad de Schur.*

c) ℓ_ϕ *es isomorfo a* ℓ_1.

Demostración.
Notar que la la condición $a)$ implica $b)$ es consecuencia del Teorema 4.5. La condición $b)$ implica $c)$ es la Proposición 4 en [37] y $c)$ implica $a)$ es consecuencia de trasladar la norma de ℓ_1 al espacio ℓ_ϕ en caso de que sean isomorfos. ■

Hemos visto que existen espacios con norma equivalente secuencialmente separadora que no son isomorfos a ℓ_1. Luego las equivalencias $a)$ y $c)$ del resultado anterior no sin ciertas en general. Sin embargo podríamos plantearnos si las condiciones $a)$ y $b)$ podrían ser equivalentes. Hasta ahora hemos probado que todo espacio de Banach que admita una norma equivalente secuencialmente separadora tiene en realidad la propiedad de Schur. Sin embargo podríamos plantear el siguiente problema: ¿Todo espacio de Banach con base de Schauder que tenga la propiedad de Schur, puede ser renormado con una norma secuencialmente separadora? No sabemos si esto es cierto o no. Volveremos a insistir en este problema al final de este capítulo.

4.2. Relación del coeficiente $S(X,p)$ con otros coeficientes geométricos conocidos

En esa sección vamos a relacionar el coeficiente $S(X,p)$ definido en el Capítulo II con otros coeficientes geométricos relacionados con la propiedad de punto fijo.

En el capítulo de Preliminares definimos el concepto de estructura normal y recordamos que dicha propiedad implica la propiedad de punto fijo en espacios de Banach reflexivos.

Más concretamente, W.A. Kirk probó que la estructura normal débil implica la propiedad débil de punto fijo. Dicho resultado puede generalizarse a otras topologías definidas en un espacio de Banach. Introducimos a continuación las definiciones y resultados que necesitaremos en esta sección:

Definición 4.8. *Sea X un espacio de Banach dotado con una topología τ lineal y consideremos $p \in \mathcal{P}(X)$.*

i) Se dice que (X,p) tiene estructura normal con respecto a la topología τ (τ-NS), si para todo subconjunto $C \subset X$ τ-secuencialmente compacto, *acotado y convexo con diam$(C) > 0$, existe algún $x \in C$ el cual no es diametral, es decir,* $\sup\{p(x-y) : y \in C\} < \sup\{p(z-y) : z, y \in C\}$.

ii) Se dice que (X,p) tiene la propiedad del punto fijo con respecto a τ (τ-FPP) si toda aplicación p-noexpansiva definida de un subconjunto de X τ-secuencialmente compacto, acotado y convexo en sí mismo tiene punto fijo.

Si τ es la topología débil, es conocido que w-NS implica la w-FPP [39]. De igual forma si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach dual y consideramos la correspondiente topología débil estrella, w^*, w^*-NS implica w^*-FPP.

Recordemos que si τ es una topología en X y $p \in \mathcal{P}(X)$, se dice que p es τ-secuencialmente semicontinua inferiormente (τ-slsc) si $p(x) \leq \liminf_n p(x_n)$ siempre que $\tau\text{-}\lim x_n = x$. Este hecho es equivalente a decir que la bola unidad $\{x \in X : p(x) \leq 1\}$ es τ-secuencialmente cerrada. Para un espacio de Banach dual, se pueden encontrar ejemplos de normas equivalentes las cuales no son w^*-slsc (ver Ejemplo 6 en [14]). De hecho, una norma equivalente $p \in \mathcal{P}(X)$ en un espacio dual es también una norma dual si y solo si p es w^*-slsc (ver [56]).

En un contexto general se verifica lo siguiente:

Teorema 4.9. *[14] Sea X un espacio de Banach dotado de una topología τ y sea $p \in \mathcal{P}(X)$. Si p es τ-slsc y (X,p) tiene τ-NS, entonces (X,p) verifica la τ-FPP.*

Es decir, para un espacio de Banach dual X con $E^* = X$, podemos asegurar que una norma equivalente $p \in \mathcal{P}$ tiene la $\sigma(X,E)$-FPP si p es $\sigma(X,E)$-slsc y cumple la $\sigma(X,E)$-NS.

Nótese que la propiedad de punto fijo no se conserva al cambiar una norma por otra equivalente, ya que el conjunto de aplicaciones no-expansivas depende fuertemente de la norma considerada. Cuando una norma q es "próxima" a otra norma equivalente p con la τ-FPP, se podrían obtener resultados de estabilidad para deducir si (X,q) tiene la τ-FPP. Explicaremos el concepto de estabilidad y daremos resultados relacionados en el último capítulo de esta Memoria.

Relacionado con la estructura normal y la propiedad del punto fijo respecto a alguna topología τ, se considera el siguiente coeficiente geométrico (ver [14], [40], Capítulo 4):

$$\tau CS(X,p) := \text{ínf}\left\{\frac{\text{lím sup}_{n,m;n\neq m}\, p(x_n - x_m)}{\text{lím}_n\, p(x_n)}\right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las sucesiones acotadas en norma las cuales converjan a 0 en τ, ambos límites existan y $\text{lím}_n\, p(x_n) \neq 0$. Nótese que de toda sucesión acotada puede obtenerse una subsucesión tal que existe el límite $\displaystyle\limsup_{n,m;n\neq m} p(x_n - x_m)$ (Theorem III.1.5 en [3])

Se cumple que $1 \leq \tau CS(X,p) \leq 2$ para todo espacio de Banach X y toda $p \in \mathcal{P}(X)$ que sea τ-slsc. Nótese que este coeficiente sólo tiene sentido en el caso de que existan sucesiones convergentes en τ que no sean convergentes en norma (por ejemplo la definición no tiene sentido para la topología débil en espacios de Banach con la propiedad de Schur).

Cuando el espacio de Banach X es separable, (X,p) tiene τ-NS siempre que $\tau CS(X,p) > 1$ [14]. Por tanto se puede deducir:

Teorema 4.10. *Sea X un espacio de Banach separable y τ una topología lineal definida en X. Sea $p \in \mathcal{P}(X)$ una norma τ-slsc tal que $\tau CS(X,p) > 1$. Entonces (X,p) cumple la τ-FPP.*

Nótese que en el caso de que se considere la topología débil, la separabilidad del espacio no es necesaria.

Otro coeficiente geométrico muy utilizado en teoría métrica de punto fijo es el módulo uniforme de Opial cuya definición es la siguiente:

Definición 4.11. *El módulo de Opial uniforme asociado a un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ y una topología τ se define como*

$$r_{X,\tau}(c) = \text{ínf}\left\{\liminf_n \|x + x_n\| - 1\right\}; \qquad c \geq 0,$$

cuando el ínfimo se toma sobre todos los $x \in X$ con $\|x\| \geq c$ y todas las sucesiones (x_n) con $\text{lím inf}_n \|x_n\| \geq 1$ y τ-$\text{lím}_n\, x_n = 0$.

Se dice que un espacio de Banach satisface la condición uniforme de Opial uniforme con respecto a τ si $r_{X,\tau}(c) > 0$ para todo $c > 0$.

Es conocido que $\tau CS(X) \geq 1 + r_{X,\tau}(1)$ y por tanto $r_{X,\tau}(1) > 1$ implica la τ-FPP para espacios de Banach separables y normas τ-slsc [14].

Recordemos el siguiente lema técnico conocido como el "sliding hump method", que permite relacionar la convergencia coordenada a coordenada en un espacio de Banach con base de Schauder con las sucesiones bloques con respecto a la base:

Lema 4.12. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ consideremos $x_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(n)e_k \in X$. Si para todo $k \in \mathbb{N}$ se cumple que $\lim_n a_k(n) = 0$ entonces existe una sucesión $(x_{n_k})_k$ y una sucesión bloque $(y_k)_k$ de la base de Schauder tal que $\lim_k \|x_{n_k} - y_k\| = 0$.*

Demostración.

Sea $(\epsilon_n) \subset (0,1)$ una sucesión con $\lim_n \epsilon_n = 0$. Sea $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\sum_{i>k_1}^{\infty} a_k(1)e_i\right\| < \epsilon$ y definimos $y_1 = \sum_{k=1}^{k_1} a_i(1)e_i$ con lo que $\|x_1 - y_1\| < \epsilon_1$. Podemos encontrar $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\|\sum_{i=1}^{k_1} a_i(n)e_n\right\| < \frac{\epsilon_2}{2}$$

para todo $n \geq n_2$ y $k_2 > k_1$ tal que $\left\|\sum_{i>k_2} a_i(n_2)e_i\right\| < \epsilon/2$. Definimos $y_2 = \sum_{i>k_1}^{k_2} a_i(n_2)e_i$ y por tanto $\|y_2 - x_{n_2}\| < \epsilon_2$. Reiterando el proceso conseguimos una subsucesión (x_{n_k}) y unos intervalos disjuntos $I_i = [k_{i-1}, k_i]$ (con $k_0 = 1$) tal que la sucesión bloque $y_k = P_{I_k}x_{n_k}$ verifica

$$\|x_{n_k} - y_k\| < \epsilon_k.$$

Tomando límites cuando k tiende a infinito obtenemos el resultado. ∎

Finalmente vamos a relacionar el coeficiente de separación secuencial $S(X,p)$ con el módulo uniforme de Opial y el coeficiente $\tau CS(X)$ cuando τ es la topología débil o la topología débil estrella. Por tanto, podremos deducir resultados propiedad débil y propiedad débil estrella de punto fijo a través de dichos coeficientes:

Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}$ y sea $\{e_n^*\}$ la sucesión de los correspondientes funcionales ortogonales. Recordemos que si la base $\{e_n\}$ es acotadamente completa, entonces X es isomorfo a un espacio dual de Z, donde Z es el subespacio de X^* generado por los vectores $\{e_n^*\}$ (Teorema 3.2.10 en [1]). En este caso se puede definir la topología dual $w^* = \sigma(X,Z)$, donde $w^*\text{-}\lim x_n = x$ si y sólo si $\lim_n e_k^*(x_n) = e^*(x)$ para sucesiones acotadas en norma. Es decir una sucesión acotada converge débil estrella si y sólo si converge coordenada a coordenada. Además cuando la base es monótona en la demostración del Teorema 3.2.10 de [1] se prueba que X es de hecho isométrico a Z.

Lema 4.13. *Para $k = 1$ y (X, p) un espacio de Banach con base de Schauder se cumple lo siguiente:*

i)

$$\frac{1+c}{1+r_{X,w}(c)} \leq S_1(X,p).$$

ii) En caso de que la base sea acotadamente completa

$$\frac{1+c}{1+r_{X,w*}(c)} \leq S_1(X,p).$$

Demostración.

La demostración es idéntica en ambos casos, luego denotemos por τ a la topología débil o débil estrella. Nótese que en las hipótesis de *ii)* $1 + r_{X,w^*}(c) \leq 1 + r_{X,w}(c)$ para todo $c \geq 0$.

Sea $c > 0$, (x_n) una sucesión con $\tau\text{-}\lim_n x_n = 0$ y $\liminf_n p(x_n) \geq 1$. Sea $x \in X$ con $p(x) \geq c$. Como en ambos casos la convergencia con respecto a la topología implica la convergencia coordenada a coordenada, aplicando el Lema 4.12, podemos considerar una sucesión bloque (y_n) de la base de Schauder tal que el límite $\lim_n p(y_n+x) = \lim_n p(x_y+x) = \liminf_n p(x_n+x)$ y $\lim_n p(y_n) = \liminf_n p(x_n)$. Se cumple entonces:

$$\frac{c+1}{\lim_n p(x_n+x)} \leq \frac{p(x) + \limsup_n p(x_n)}{\lim_n p(x_n+x)} \leq \frac{p(x) + \limsup_n p(y_n)}{\lim_n p(y_n+x)} \leq S_1(X,p).$$

Por tanto

$$\frac{c+1}{S_1(X,p)} \leq \liminf_n p(x_n+x).$$

Tomando ínfimos

$$\frac{c+1}{S_1(X,p)} \leq r_{X,\tau}(c) + 1,$$

como queríamos probar. ■

El lema anterior prueba que si para $k = 1$ se obtiene $S_1(X,p) < 2$ entonces $r_{X,\tau}(1) > 0$ y (X,p) cumple la propiedad débil de punto fijo. Cuando la base es acotadamente completa y p es w^*-slsc se deduce que (X,p) cumple la propiedad estrella de punto fijo.

En el próximo resultado veremos que utilizando el coeficiente $S(X,p)$ podemos exigir menos al espacio para cumplir propiedad débil o débil estrella de punto fijo.

Lema 4.14. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder y sea $p \in \mathcal{P}(X)$. Entonces*
$$\tau CS(X,p) \geq \frac{2}{S(X,p)}$$
donde τ es la topología débil. En caso de que la base sea acotadamente completa podemos suponer $\tau = w^*$ siendo ésta la topología débil estrella definida anteriormente.

Demostración.
Denotemos por τ la topología débil o débil estrella según el caso. Sea $\delta > 0$ y sea (x_n) una sucesión que converge a cero en τ y tal que $\lim_n p(x_n) \neq 0$ tal que los límites $l_1 := \lim\limits_{n,m;n\neq m} p(x_n - x_m)$, $l_2 := \lim\limits_n p(x_n)$ existen y

$$\frac{l_1}{l_2} \leq w^*CS(X,p) + \delta.$$

De igual forma, por el Lema 4.12, sin pérdida de generalidad podemos asumir que (x_n) es una sucesión bloque de la base.

Tomemos $k \in \mathbb{N}$, $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $l_1 - \epsilon \leq p(x_n - x_m) \leq l_1 + \epsilon$, $l_2 - \epsilon \leq p(x_n) \leq l_2 + \epsilon$ and $k \ll x_n$ para todo $n, m \geq n_0$. Entonces

$$\frac{2l_2 - \epsilon}{l_1 + \epsilon} \leq \frac{p(x_{n_0}) + \lim_m p(x_m)}{\lim_m p(x_{n_0} - x_m)} \leq S_k(X,p)$$

Haciendo que ϵ se vaya a cero, deducimos que

$$\frac{2}{S_k(X,p)} \leq \frac{l_1}{l_2} \leq \tau CS(X,p) + \delta$$

Tomando límites cuando k tiende a infinito,

$$\frac{2}{S(X,p)} \leq \tau CS(X,p) + \delta$$

y como $\delta > 0$ es arbitrario, deducimos las desigualdades deseadas. ∎

Corolario 4.15. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con base de Schauder tal que $S(X, \|\cdot\|) < 2$, entonces $(X, \|\cdot\|)$ tiene w-NS y la w-FPP.*

Corolario 4.16. *Si X es un espacio de Banach con base de Schauder acotadamente completa y $p \in \mathcal{P}(X)$ con $S(X,p) < 2$, entonces X tiene w^*-$NS(p)$. En particular, si p es una norma secuencialmente separadora, $w^*CS(X,p) = 2$.*

Aplicaremos el resultado anterior a la estabilidad de la propiedad débil estrella de punto fijo en el siguiente capítulo.

A continuación vamos a comprobar que la desigualdad dada el Lema 4.14 puede ser estricta, es decir, existen espacios de Banach tal que $w^*CS(X,p) > 2/S(X,p)$:

Ejemplo 4.17. Para $s \in \mathbb{N}$, consideramos $X_s = (\mathbb{R}^s, \|\cdot\|_1) \oplus_\infty (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ con la norma

$$\|(x,y)\|_s = \max\{\|x\|_1, \|y\|_1\}$$

para $x \in \mathbb{R}^s$, $y \in \ell_1$.

Definimos el espacio de Banach

$$X := \oplus_1 \sum_{s=1}^{\infty} X_s := \left\{ z = (z_s) : \ z_n \in X_s, \ |z|_1 = \sum_{s=1}^{\infty} \|z_s\|_s < +\infty \right\}$$

dotado con la norma uno de la suma $|\cdot|_1$ definida. Notar que X es un espacio de Banach dual con base de Schauder.

Denotemos por $\{e_i^s\}_i$ la base de Schauder en X_s para todo $s \in \mathbb{N}$ y definamos $\widetilde{e}_i^s$ al elemento en X, el cual tiene el vector nulo en toda coordenada $j \neq s$ y e_i^s en la coordenada s-ésima para todo $i \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{\widetilde{e}_1^1, \widetilde{e}_2^1, \widetilde{e}_1^2, \widetilde{e}_3^1, \widetilde{e}_2^2, \widetilde{e}_1^3, ...\}$ forma una base de Schauder para el espacio de Banach X.

En primer lugar vamos a comprobar que $S(X, |\cdot|_1) \geq 2$:

Consideramos una numeración de la base de Schauder en el orden anterior establecido y fijamos $k \in \mathbb{N}$.

Para $s \in \mathbb{N}$ consideramos en el subespacio X_s el vector $x_s = (x(n))$ con $x(n) = 0$ si $n \neq s$ y $x(s) = 1$ y la sucesión de vectores básicos $\{e_n^s\}_n$. En el espacio X_s podemos comprobar que

$$\frac{\|x^s\|_s + \limsup \|e_n^s\|_s}{\limsup_n \|x^s + e_n^s\|_s} = 2.$$

Además, fijado el índice $k \in \mathbb{N}$, podemos encontrar s lo suficientemente grande para que el vector en $x = (x_s) \in X$ definido como $x_n = 0$ si $n \neq s$ y $x_s = x^s$ verifique que $k \leq x$. Consideramos la sucesión bloque $(y_n) \subset X$ donde $y_n = (y_n(s))_s$ y $y_n(s) = 0$ si $n \neq s$ y $y_n(s) = e_s^s$ si $s = n$. Para estos vectores

$$\frac{|x|_1 + \limsup |y_n|_1}{\limsup_n |x + x_n|_1} = \frac{\|x^s\|_s + \limsup \|e_n^s\|_s}{\limsup_n \|x^s + e_n^s\|_s} = 2.$$

Por tanto $S_k(X, |\cdot|_1) \geq 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $S(X, |\cdot|_1) \geq 2$. Como la norma es bimonótona, finalmente deducimos que $S(X, |\cdot|_1) = 2$.

Por otra parte, X es un espacio con base Schauder monótona acotadamente completa y por tanto un espacio de Banach dual. Vamos a comprobar que $w^*CS(X_k) = 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. En efecto, sea $(x_n)_n$ una sucesión débil estrella nula en X_k tal que los límites $\lim_n \|x_n\|_k$ y $\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|_k$ existen y $\lim_n \|x_n\|_k \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, ya que la convergencia débil estrella implica que puedo considerar las primeras k-coordenadas tan pequeñas como queramos, podemos suponer que x_n es en realidad un vector de ℓ_1 para todo n y por tanto $\lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|_k = \lim_{n,m;n\neq m} \|x_n - x_m\|_1 = 2\lim_n \|x_n\|_1 = 2\lim_n \|x_n\|_k$ y por tanto $w^*CS(X_k) = 2$.

Por otra parte, razonando de igual forma que en el Teorema 5.2 del Capítulo V de [3] (ver también [11]) se puede probar que

$$w^*CS(X) = \inf\{w^*CS(X_k), 2 : \ k \in \mathbb{N}\} = 2$$

y por tanto la igualdad en el Lema 4.14 no se cumple como queríamos comprobar.

Nótese que la propiedad de Schur es estable al considerar una 1-suma directa de espacios de Banach con la propiedad de Schur. En el ejemplo anterior cada X_s tiene la propiedad de Schur ya que es isomorfo a ℓ_1. De hecho las constantes de equivalencia entre X_s y ℓ_1 se mantienen para todo $s \in \mathbb{N}$ y por tanto $X = \oplus_1 \sum_s X_s$ es isomorfo a $\oplus_1 \sum_s \ell_1$ y este último espacio es isométrico a ℓ_1. Es decir, el espacio $(X, |\cdot|_1)$ introducido en el Ejemplo 4.17 admite una norma equivalente secuencialmente separadora. Sin embargo de forma similar podemos definir el siguiente espacio de Banach:

$$Y = \oplus_1 \sum_{s=1}^{\infty} Y_s$$

donde $Y_s = (\mathbb{R}^s, \|\cdot\|_p) \oplus_\infty (\ell_1, \|\cdot\|_1)$ para alguna norma $p \in (1, +\infty]$. En este caso, el espacio de Banach Y también tendría la propiedad de Schur, $S(Y, |\cdot|_1) = 2$, pero Y no es isomorfo a ℓ_1 ya que contendría copias isométricas de ℓ_p^n (ó c_0^n) donde la dimensión n es finita pero tan grande como queramos. De acuerdo con el problema planteado al final de la primera sección de esta capítulo: ¿Podría ser renormado Y con una norma equivalente secuencialmente separadora?

5 Resultados de estabilidad para renormamientos de los espacios ℓ_1 y c_0

5.1. Nociones previas

Como hemos comprobado a lo largo de la Memoria, la propiedad de punto fijo para aplicaciones no-expansivas es una propiedad isométrica, pero no es invariante por isomorfismos. Es decir, un espacio de Banach X puede cumplir la FPP para un cierto subconjunto de normas de $\mathcal{P}(X)$ y no cumplirlas para otras.

Sería interesante conocer algunas propiedades del conjunto de normas de $\mathcal{P}(X)$ que verifican la FPP para un espacio de Banach dado. A lo largo de esta capítulo vamos a denotar

$$\mathcal{P}_{FPP}(X) := \{p \in \mathcal{P}(X) : \ (X, p) \text{ cumple la FPP } \}.$$

En el Capítulo III estudiamos ciertas propiedades de linealidad del conjunto $\mathcal{P}_{FPP}(X)$ para algunos espacios de Banach concretos. En particular, probamos que $\mathcal{P}_{FPP}(X)$ contiene variedades afines de dimensión finita arbitraria siempre que el espacio de Banach admita una norma equivalente secuencialmente separadora. Este sería el caso de $\mathcal{P}_{FPP}(\ell_1)$. Cuando consideramos X como el espacio de sucesiones c_0, es todavía un problema abierto saber si $\mathcal{P}_{FPP}(c_0)$ contiene algún elemento, es decir, si c_0 puede ser reformado para tener la FPP.

Para hablar de propiedades topológicas del subconjunto $\mathcal{P}_{FPP}(X)$, tendremos que definir en $\mathcal{P}(X)$ una topología. Hay varias formar de hacerlo, sin embargo vamos a tener en cuenta lo siguiente: como la propiedad de punto fijo es isométrica, definimos en $\mathcal{P}(X)$ la siguiente relación: $p \cong q$ si existe un constante $\lambda > 0$ tal que $p = \lambda q$. Es muy fácil comprobar que $\cong$

es una relación de equivalencia y, al considerar las clases de equivalencia asociadas, estamos unificando todas las normas que son múltiplos de una dada.

Sin pérdida de generalidad, si $p \in \mathcal{P}(X)$ seguiremos denotando por $p(\cdot)$ la clase de equivalencia de todas las normas que son múltiplo de p. Nótese que si p, q son normas equivalentes, entonces existen $a, b > 0$ tal que

$$ap(x) \leq q(x) \leq bp(x)$$

para todo $x \in X$, o equivalentemente

$$p(x) \leq aq(x) \leq \frac{b}{a}p(x)$$

para todo $x \in X$. Si consideramos como $p(\cdot)$ y $q(\cdot)$ los representantes de la clase de equivalencia que verifican

$$p(x) \leq q(x) \leq c\, p(x)$$

para todo $x \in X$ y para algún $c \geq 1$, podemos definir

$$d(p, q) := \operatorname{ínf}\{c \geq 1 : \; p(x) \leq q(x) \leq cp(x) \;\; \text{para } x \in X \;\}.$$

Si queremos ser estríctamente formales, tendríamos que usar como definición $\log d(p, q)$, pero la función $\log x$ es continua y estríctamente creciente, por tanto, abusando de la notación, usaremos $d(p, q)$ definida como anteriormente para medir la distancia entre dos normas de $\mathcal{P}(X)$. Además, en caso de que $p(x) \leq q(x) \leq cp(x)$ para algún $c > 0$, $d(p, q) = 1$ si y sólo si $p(x) = q(x)$ para todo $x \in X$.

Dotado $\mathcal{P}(X)$ con una métrica, podemos considerar propiedades topológicas de $\mathcal{P}_{FPP}(X)$ como subconjunto de $\mathcal{P}(X)$. Por ejemplo, si consideramos $X = \ell_1$ es conocido que $\mathcal{P}_{FPP}(\ell_1)$ no es ni abierto ni cerrado en $\mathcal{P}(\ell_1)$: la norma de P.K. Lin $|||\cdot||| \in \mathcal{P}_{FPP}(\ell_1)$ pero tan cerca de ella como queramos podemos encontrar una norma equivalente sin la FPP [33]. Por el contrario, la norma usual $\|\cdot\|_1$ no cumple la FPP pero de igual forma tan cerca de ella como queramos podemos encontrar una equivalente en $\mathcal{P}_{FPP}(\ell_1)$.

Más generalmente, T. Domímguez Benavides [13] probó lo siguiente:

Teorema 5.1. *Sea X un espacio de Banach que contenga una copia isomorfa de ℓ_1 o de c_0. Entonces el conjunto de normas que no cumplen la FPP es denso en $\mathcal{P}(X)$.*

Con la notación anterior, $\mathcal{P}(X) \setminus \mathcal{P}_{FPP}(X)$ es denso en $\mathcal{P}(X)$ en el caso particular de que X sea c_0 o ℓ_1. Esto quiere decir que no existe ninguna norma equivalente en ℓ_1 y c_0 que puedan tener estabilidad de la propiedad de punto fijo, es decir, para cualquier norma equivalente en c_0 o ℓ_1 existe otra tan cerca a la primera como queramos sin la FPP.

En general, dado τ una topología en un espacio de Banach y $p \in \mathcal{P}(X)$ cumpliendo la τ-FPP, el problema general de la estabilidad de punto fijo se plantea como sigue:

> ¿existe una constante $K = K_\tau(X, p) > 1$ tal que si $q \in \mathcal{P}(X)$ y $d(p, q) < K$, podemos asegurar también que q satisface la τ-FPP?

Para τ la topología débil, el problema de la estabilidad ha sido ampliamente estudiado y se han podido encontrar resultados positivos de estabilidad para numerosas familias de espacios de Banach (ver por ejemplo [3], [40] y las referencias que allí se encuentran). También para la topología débil estrella se encuentran resultados positivos cuando suponemos que la norma equivalente q es w^*-slsc [14].

Este último capítulo de la Memoria está dividido en dos secciones. En la primera de ellas vamos a estudiar algunos resultados de estabilidad de la w^*-FPP en el espacio ℓ_1 con relación a distintas normas equivalente en $\mathcal{P}(\ell_1)$. Comprobaremos que dichos resultados generalizan y amplían otros conocidos.

En la segunda sección extenderemos el resultado enunciado en Teorema 5.1 en el caso del espacio de sucesiones c_0, ya que probaremos que el conjunto de normas equivalentes en c_0 que no cumplen la FPP ni tienen copias asintóticas de c_0 es también denso en $\mathcal{P}(c_0)$, estando este conjunto estríctamente contenido en $\mathcal{P}(c_0) \setminus \mathcal{P}_{FPP}(c_0)$.

5.2. Estabilidad de la w^*-FPP para normas equivalentes en ℓ_1

Recordemos el siguiente resultado obtenido en [14] en el caso de ℓ_1 y la topología débil estrella $\sigma(\ell_1, c_0)$:

Teorema 5.2. *Supongamos que p es una norma definida en ℓ_1 tal que*

$$q(x) \leq \|x\|_1 \leq cq(x)$$

para todo $x \in \ell_1$. Entonces (ℓ_1, q) tiene la w^*-FPP si q es una función w^*-slsc y $c < w^*CS(\ell_1, \|\cdot\|_1) = 2$.

Teniendo en cuenta el resultado anterior y el problema de la estabilidad de la w^*-FPP planteado en caso de normas w^*-slsc, podemos afirmar que $K_{w^*}(\ell_1, \|\cdot\|_1) \leq 2$. De hecho se conoce que $K_{w^*}(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ es exactamente 2, es decir, existe una norma equivalente $\|\cdot\|_{1,\infty}$ en ℓ_1 con

$$\|x\|_{1,\infty} \leq \|x\|_1 \leq 2\|x\|_{1,\infty}$$

para todo $x \in \ell_1$ y tal que $(\ell_1, \|\cdot\|_{1,\infty})$ no tiene la $\sigma(\ell_1, c_0)$-FPP [41]. Recordemos que $\|x\|_{1,\infty} = \text{máx}\{\|x^+\|_1, \|x^-\|_1\}$.

Teniendo en cuenta que en Capítulo III probamos que toda norma secuencialmente separadora $p(\cdot)$ en un espacio de Banach dual con base de Schauder acotadamente completa verifica $w^*CS(X, p) = 2$, podemos extender el Teorema 5.2 de la siguiente forma:

Teorema 5.3. *Supongamos que $p(\cdot)$ es una norma secuencialmente separadora definida en un espacio de Banach con base de Schauder acotadamente completa. Entonces*

$$K_{w^*}(X, p) \leq 2,$$

es decir, si $q \in \mathcal{P}(X)$ es w^*-slsc y

$$q(x) \leq p(x) \leq cq(x) \qquad \forall x \in X,$$

con $c < 2$, entonces q cumple la w^*-FPP.

Como acabamos de comprobar, cualquier norma equivalente de ℓ_1 que sea secuencialmente separadora tiene también cota de estabilidad de la w^*-FPP de al menos 2. Podríamos preguntarnos si se podría alcanzar un mayor valor, o más generalmente, si pudiera existir una norma equivalente en ℓ_1 con cota de estabilidad estríctamente mayor que 2.

En esta sección vamos a comprobar que la respuesta es negativa, es decir, no existe ningún renormamiento de ℓ_1 con cota de estabilidad mayor que 2 para la $\sigma(\ell_1, c_0)$-FPP.

Para ello vamos a utilizar la siguiente generalización del lema de extensión de normas probado en [13]:

Lema 5.4. *Sean $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach e Y un subespacio de X. Supongamos que para algún $\lambda \leq 1$ existe una norma p en Y tal que*

$$\lambda\|y\| \leq p(y) \leq \|y\| \qquad \forall y \in Y.$$

Entonces existe una norma q en X tal que:

$$q(y) = p(y) \qquad \forall y \in Y,$$

$$\lambda\|x\| \leq q(x) \leq \|x\|, \qquad \forall x \in X.$$

Demostración.

Razonamos de forma similar como en la prueba del Lema 2.2 en [13].

Para un espacio de Banach Z arbitrario y $p \in \mathcal{P}(Z)$ denotamos $B_Z(p)$ la bola cerrada de centro el origen y radio 1 para la norma p.

En primer lugar vamos a observar lo siguiente: Sean p, q dos normas equivalentes en Z y $a > 0$. Entonces $ap(z) \leq q(z)$ para todo $z \in Z$ si y sólo si $B_Z(q) \subset \frac{1}{a}B_Z(p)$. En efecto, si se cumple la primera condición y $z \in B_Z(q)$, entonces podemos escribir $z = \frac{1}{a}az$ donde $az \in B_Z(p)$ ya que $p(az) = ap(z) \leq q(z) \leq 1$. Supongamos ahora la relación de contención entre las bolas y que existe algún $z_0 \in Z$ tal que $q(z_0) < ap(z_0)$. Nótese que $az_0/q(z_0)$ debe de pertenecer a $B_Z(p)$ ya que $z_0/q(z_0) \in B_Z(q)$. Sin embargo, $p(az_0/q(z_0)) = ap(z_0)/q(z_0) > 1$. Por tanto debe de cumplirse que $ap(z) \leq q(z)$ para todo $z \in Z$.

Vamos a demostrar ahora la tesis del lema. La condición $p(y) \leq \|y\|$ para todo $y \in Y$ implica que $B_Y(\|\cdot\|) \subset B_Y(p)$. Sea $B = \overline{co}(B_X(\|\cdot\|) \cup B_Y(p))$. Es fácil comprobar que B es un subconjunto de X equilibrado, convexo, cerrado y absorbente. Por tanto B es la bola unidad cerrada de una norma q en X, es decir $B = B_X(q)$. Veamos que q cumple las condiciones requeridas:

- Si consideramos la restricción de q al subespacio Y, nótese que $B \cap Y = B_Y(p)$ y por tanto $p(y) = q(y)$ para todo $y \in Y$.
- Como $B_X(\|\cdot\|) \subset B_X(q)$ por construcción, obtenemos por la observación anterior que $q(x) \leq \|x\|$ para todo $x \in X$. Por otra parte $B_X(\|\cdot\|) \subset \frac{1}{\lambda}B_X(\|\cdot\|)$ ya que $0 < \lambda \leq 1$. Por las hipótesis sobre la norma p en el espacio Y, $B_Y(p) \subset \frac{1}{\lambda}B_Y(\|\cdot\|) \subset \frac{1}{\lambda}B_X(\|\cdot\|)$, por tanto, $B_X(\|\cdot\|) \cup B_Y(p) \subset \frac{1}{\lambda}B_X(\|\cdot\|)$ y $B_X(q) \subset \frac{1}{\lambda}B_X(\|\cdot\|)$. Por la observación anterior, esto implica que $\lambda\|x\| \leq q(x)$ para todo $x \in X$ y la prueba queda concluida. ∎

Podemos ahora probar lo siguiente:

Teorema 5.5. *Para toda norma equivalente $p(\cdot)$ en ℓ_1 y $\delta > 0$ existe otra norma $|\cdot|_{1,\infty}$ con*

$$|x|_{1,\infty} \leq p(x) \leq \frac{2}{1-\delta}|\cdot|_{1,\infty}$$

para todo $x \in \ell_1$ *y tal que* $(\ell_1, |\cdot|_{1,\infty})$ *no satisface la* $\sigma(\ell_1, c_0)$*-FPP.*

Como consecuencia $K_{w^*}(\ell_1, p) \leq 2$ *para todo* $p \in \mathcal{P}(\ell_1)$.

Demostración.

Sea $\epsilon > 0$ y $p(\cdot)$ una norma equivalente en ℓ_1. Por el teorema de James existe una sucesión bloque (y_n) con respecto a la base de Schauder de ℓ_1 tal que

$$(1-\delta)\sum_{n=1}^{\infty}|t_n| < p\left(\sum_{n=1}^{\infty}t_ny_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n|$$

Sea Y el subespacio cerrado generado por la sucesión (y_n). Como (y_n) es una sucesión básica, (y_n) es una base de Schauder para Y. Definimos en Y la siguiente norma

$$q\left(\sum_{n=1}^{\infty}t_ny_n\right) := \sum_{n=1}^{\infty}|t_n|$$

para todo $y = \sum_{n=1}^{\infty}t_ny_n \in Y$. En este caso tenemos una norma equivalente en Y a la norma heredada de (ℓ_1, p), ya que

$$(1-\delta)q(y) \leq p(y) \leq q(y) \qquad \forall y \in Y.$$

Definimos en Y una nueva norma equivalente dada por

$$|y| := \text{máx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|t_n^+|, \sum_{n=1}^{\infty}|t_n^-|\right\}$$

donde $y = \sum_{n=1}^{\infty}t_ny_n \in Y$, $t_n^+ = \text{máx}\{t_n, 0\}$ y $t_n^- = \text{mín}\{t_n, 0\}$.

Fijemos $y = \sum_{n=1}^{\infty}t_ny_n \in Y$. Observar que:

$$|y| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n| = q(y) \leq \frac{1}{1-\delta}p(y).$$

Por otro lado,

$$p(y) \leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n| = q(y) \leq 2|y|.$$

Por tanto
$$\frac{1}{2}p(y) \leq |y| \leq \frac{1}{1-\delta}p(y) \qquad \forall y \in Y.$$
Equivalentemente
$$\frac{1-\delta}{2}p(y) \leq (1-\delta)|y| \leq p(y) \qquad \forall y \in Y.$$

Aplicando el Lema 5.4 a la norma de partida p y a la norma en Y dada por $(1-\delta)|\cdot|$, podemos encontrar una norma equivalente en todo el espacio ℓ_1, que denotamos por $|\cdot|_{1,\infty}$ y tal que:
$$|y|_{1,\infty} = (1-\delta)|y|, \qquad \forall y \in Y,$$
$$\frac{1-\delta}{2}p(x) \leq |x|_{1,\infty} \leq p(x) \qquad \forall x \in \ell_1.$$

Vamos a comprobar que $(\ell_1, |\cdot|_{1,\infty})$ no cumple la $\sigma(\ell_1, c_0)$-FPP. En efecto, definimos $x_n = y_n/(1-\delta)$ y consideremos el conjunto de ℓ_1
$$C := \left\{ y = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n : \ t_n \geq 0, \sum_{n=1}^{\infty} t_n \leq 1 \right\},$$
el cual es convexo, cerrado, acotado y $\sigma(\ell_1, c_0)$-compact, ya que la sucesión (y_n) es una sucesión bloque la base de ℓ_1. Además, C es un subconjunto del subespacio Y. Definimos la aplicación $T : C \to C$ dada por
$$T(y) = \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} t_n\right) x_1 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_{n+1}$$
para todo $y = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \in C$. Nótese que la aplicación T está bien definida y que no tiene puntos fijos. En efecto, si $T(y) = y$ entonces todas las coordenadas de vector y serían iguales y como $y \in \ell_1$, esto implica que $y = 0$. Pero el vector $y = 0$ no puede ser punto fijo para T ya que $T(0) = x_1$.

Vamos a comprobar a continuación que T es no-expansiva para la norma $|\cdot|_{1,\infty}$:
Sean $x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x_n$, $y = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$ dos vectores de C. Denotamos por $A = \{n \in \mathbb{N} : s_n - t_n \geq 0\}$ y $B = \{n \in \mathbb{N} : s_n - t_n < 0\}$. Entonces:
$$\begin{aligned} |x-y|_{1,\infty} &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}(s_n - t_n)x_n\right|_{1,\infty} = (1-\delta)\left|\sum_{n=1}^{\infty}(s_n - t_n)x_n\right| \\ &= \left|\sum_{n=1}^{\infty}(s_n - t_n)y_n\right| = \text{máx}\left\{\sum_{n\in A}(s_n - t_n), \sum_{n\in B}(t_n - s_n)\right\} \end{aligned}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}|Tx - Ty|_{1,\infty} &= \left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}(t_n - s_n)\right) x_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(s_n - t_n)x_{n+1}\right|_{1,\infty} \\ &= \left|\left(\sum_{n=1}^{\infty}(t_n - s_n)\right) y_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(s_n - t_n)y_{n+1}\right|\end{aligned}$$

Supongamos en primer lugar que $\sum_{n=1}^{\infty}(t_n - s_n) \geq 0$. En este caso:

$$\begin{aligned}|Tx - Ty|_{1,\infty} &= \text{máx}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(t_n - s_n) + \sum_{n\in A}(s_n - t_n), \sum_{n\in B}(t_n - s_n)\right\} \\ &= \text{máx}\left\{\sum_{n\in B}(s_n - t_n), \sum_{n\in B}(t_n - s_n)\right\} \\ &\leq |x - y|_{1,\infty}.\end{aligned}$$

En el caso de que $\sum_{n=1}^{\infty}(t_n - s_n) < 0$, entonces:

$$\begin{aligned}|Tx - Ty|_{1,\infty} &= \text{máx}\left\{\sum_{n\in A}(s_n - t_n), \sum_{n=1}^{\infty}(t_n - s_n) + \sum_{n\in B}(t_n - s_n)\right\} \\ &= \text{máx}\left\{\sum_{n\in A}(s_n - t_n), \sum_{n\in A}(s_n - t_n)\right\} \\ &\leq |x - y|_{1,\infty}.\end{aligned}$$

Por tanto la aplicación T es no-expansiva como queríamos probar.
Por último, se cumple lo siguiente:

$$|x|_{1,\infty} \leq p(x) \leq \frac{2}{1-\delta}|x|_{1,\infty}$$

para todo $x \in \ell_1$.

Razonemos ahora por reducción al absurdo. Supongamos que $K_{w^*}(\ell_1, p) > 2$. Tomamos $\delta > 0$ tal que $2/(1-\delta) < K_{w^*}(\ell_1, p)$ y según la demostración anterior, encontramos $|\cdot|_{1,\infty} \in \mathcal{P}(\ell_1)$ tal que $|\cdot|_{1,\infty}$ no cumple la FPP y además $d(p, |\cdot|_{1,\infty}) \leq \frac{2}{1-\delta} < K_{w^*}(\ell_1, p)$, por tanto $K_{w^*}(\ell_1, p) \leq 2$ para todo $p \in \mathcal{P}(\ell_1)$, como queríamos demostrar.

Nótese que usando el Teorema de James y los mismos razonamientos, el teorema anterior puede ser extendido a todo espacio de Banach dual que contenga una copia isomorfa de ℓ_1 y tal que la convergencia débil estrella en X implique la convergencia coordenada a coordenada en el subespacio isomorfo a ℓ_1. Un ejemplo de tal espacio podría ser el Ejemplo 3.9.

5.3. Propiedades de estabilidad de la FPP en espacios de Banach que contengan una copia isomorfa de c_0

Recordemos la siguiente definición:

Definición 5.6. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, se dice X que tiene una copia asintóticamente isométrica de c_0 si existen una sucesión $(\varepsilon_n)_n$ en $(0,1)$ tendiendo a 0 y una sucesión $(x_n)_n$ en X tales que*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}(1-\varepsilon_n)|t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |t_n|,$$

para toda $(t_n) \in c_0$. En este caso, se dice que X contiene una copia c_0-a.i.

Consideremos el espacio de Banach c_0 dotado con la norma usual dada por $\|x\|_\infty = \sup_n |t_n|$ siempre que $x = (t_n)_n \in c_0$.

Análogamente a [32], denotamos

$$\mathcal{P}_0(c_0) := \{p \in \mathcal{P}(c_0) : (c_0, p) \text{ no tiene copias } c_0\text{-a.i.}\}.$$

Es conocido que si un espacio de Banach X contiene una copia asintóticamente isométrica de c_0 entonces no cumple la FPP [17]. Por tanto, $\mathcal{P}_{FPP}(c_0) \subset \mathcal{P}_0(c_0)$. Por otra parte, en el caso de c_0 es conocido que existen normas equivalentes sin la FPP y sin copias asintóticamente isométricas de punto fijo, es decir, $\mathcal{P}_0(c_0) \setminus \mathcal{P}_{FPP}(c_0) \neq \emptyset$. En efecto:

Ejemplo 5.7. *[20]* Consideremos la siguiente norma equivalente en c_0

$$|x|_\infty := \sup_n |t_n| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|t_n|}{2^n}$$

si $x = (t_n)_n \in c_0$.

El espacio $(c_0, |\cdot|_\infty)$ no cumple la FPP. Para ello basta dar un subconjunto C cerrado, convexo y acotado y una aplicación, $T : C \to C$, noexpansiva para la norma $|\cdot|_\infty$ que no tenga punto fijo.

Definamos el conjunto

$$C := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_k e_k : 0 \leq t_k \leq 1 \right\},$$

el cual es un subconjunto cerrado, convexo y acotado de c_0. Vamos a considerar la aplicación $T : C \to C$ dada por

$$T\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k e_k\right) = e_1 + \sum_{k=1}^{\infty} t_n e_{n+1}.$$

Esta aplicación no tiene punto fijo, ya que si lo tuviera tendría que ser el $(1, 1, 1, \ldots)$ que no pertenece a c_0. Además, es fácil comprobar que es noexpansiva para la norma $|\cdot|_\infty$. Por tanto el espacio $(c_0, |\cdot|_\infty)$ no tiene la FPP.

Se puede probar también que $(c_0, |\cdot|_\infty)$ no tiene copia asintóticamente isométrica de c_0 (ver [17]).

Nuestro objetivo en esta sección es extender el Teorema 5.1 para el espacio de Banach c_0, ya que probaremos que un conjunto estríctamente contenido en $\mathcal{P}(c_0) \setminus \mathcal{P}_{FPP}(c_0)$ es denso en $\mathcal{P}(c_0)$.

Para ello, vamos a necesitar el Lema de James en el caso de c_0 y algunos aspectos que se deducen de su prueba:

Lema 5.8. *[35] Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach el cual contiene a un subespacio isomorfo a c_0. Entonces para cualquier $\delta > 0$ existe una sucesión (y_n) en X tal que*

$$(1-\delta)\sup_n |t_n| < \left\|\sum_n t_n y_n\right\| \leq \sup_n |t_n|$$

para toda sucesión $(t_n) \in c_0$.

Observación 5.9. En la demostración del Teorema de James (ver [35], Lema 2.2) se observa que es posible conseguir que la sucesión $(y_n)_n$ sea de soportes finitos y disjuntos, es decir, que *supp*$(y_n) \cap$ *supp*$(y_m) = \emptyset$ si $n \neq m$, donde por *supp*(y) denotamos al soporte del vector y. Además, de la demostración también podemos deducir que $\|y_n\|_\infty = \|y_m\|_\infty$ si $n, m \in \mathbb{N}$.

También aplicaremos el siguiente lema probado en [32]:

Lema 5.10. *Sean p una norma en c_0 equivalente a la usual y $|.|_\infty$ la norma definida anteriormente. Entonces $(c_0, p + \lambda|.|_\infty)$ no tiene copias asintóticamente isométricas de c_0, para todo $\lambda > 0$.*

A continuación enunciamos el principal resultado de esta sección:

Teorema 5.11. *El conjunto $\mathcal{P}_0(c_0) \setminus \mathcal{P}_{FPP}(c_0)$ es denso en $\mathcal{P}(c_0)$.*

Demostración.

Consideremos el espacio de Banach (c_0, p) donde la norma p es equivalente a la usual en el espacio c_0. Queremos probar que para todo $\epsilon > 0$ existe una norma q' equivalente a la usual tal que (c_0, q') no tiene copia asintóticamente isométrica de c_0, no tiene la propiedad del punto fijo y además, $d(p, q') < 1 + \epsilon$.

Sea $\delta > 0$ arbitrario. Usando el Lema 5.8 obtenemos una sucesión (y_n) en c_0 tal que

$$(1-\delta) \sup_n |t_n| \leq p\left(\sum_n t_n y_n\right) \leq \sup_n |t_n|$$

para toda $(t_n) \in c_0$.

Recordemos que mediante los argumentos en la prueba del Teorema de James, se puede conseguir que la sucesión $(y_n)_n$ sea de soportes disjuntos y que $\|y_n\|_\infty = \|y_m\|_\infty$ si $n, m \in \mathbb{N}$.

Vamos a definir $Y := \overline{span\langle y_n \rangle}$, el cual es un subespacio de c_0. Definimos en el subespacio Y la norma equivalente $|y| := \sup_n |t_n|$, siempre que $y = \sum_n t_n y_n$. De acuerdo con las desigualdades anteriores tenemos que

$$(1-\delta)|y| \leq p(y) \leq |y|$$

para todo $y \in Y$.

Ya que Y es un subespacio cerrado de c_0, aplicando el Lema 5.4, podemos extender la norma $|\cdot|$ a la totalidad del espacio de Banach c_0 manteniendo las mismas constantes de equivalencia, es decir, existe una norma q en c_0 tal que $q(y) = |y|$ siempre que $y \in Y$ y

$$(1-\delta) q(x) \leq p(x) \leq q(x),$$

para todo $x \in c_0$.

Pretendemos encontrar una norma q' tal que $d(q, q')$ sea próxima a uno, por tanto también lo será $d(p, q')$, y tal que (c_0, q') no tenga copia asintóticamente isométrica de c_0 ni la propiedad del punto fijo.

Usando el Teorema 4.1 de [32], para todo $\lambda > 0$, la norma $q' := q + \lambda|\cdot|_\infty$ no tiene copias asintóticamente isométricas de c_0, donde $|\cdot|_\infty$ es la norma dada en el Ejemplo 5.7. Vamos a probar que $(c_0, q + \lambda|\cdot|_\infty)$ tampoco cumple la FPP para todo $\lambda > 0$:

Para $x = \sum_n t_n e_n \in c_0$, establecemos

$$\eta(x) := \sum_n \frac{|t_n|}{2^n}.$$

Observemos lo siguiente:

1. Con esta notación $|x|_\infty = \|x\|_\infty + \eta(x)$ para todo $x \in c_0$. Notemos que $\eta(ax+by) = |a|\eta(x) + |b|\eta(y)$ si x, y son dos vectores en c_0 con soportes disjuntos y $a, b \in \mathbb{R}$. Ya que la sucesión (y_n) es acotada y de soportes disjuntos, podemos podemos probar que $\lim_n \eta(y_n) = 0$. En efecto:

2. Tomemos la sucesión $(\eta(y_n))$. Como la sucesión (y_n) es de soportes disjuntos y finitos, es decir,

$$y_n = \sum_{k=p_n}^{q_n} \xi_k e_k, \forall n, \text{ siendo } p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 < \ldots < p_n \leq q_n < \ldots,$$

entonces se tiene que

$$\eta(y_n) = \frac{|\xi_{p_n}|}{2^{p_n}} + \ldots + \frac{|\xi_{q_n}|}{2^{q_n}}$$

Se sabe que (ξ_n) está acotada, entonces existe $M > 0$ tal que $\sup_n |\xi_n| \leq M$, por lo tanto

$$\eta(y_n) = \frac{|\xi_{p_n}|}{2^{p_n}} + \ldots + \frac{|\xi_{q_n}|}{2^{q_n}} \leq M \sum_{k=p_n}^{q_n} \frac{1}{2^k} \to 0, \text{ cuando } n \to \infty,$$

es decir, $\lim\limits_n \eta(y_n) = 0$.

Por lo tanto, existe una subsucesión (y_{n_k}) tal que $(\eta(y_{n_k}))$ es decreciente.

Definamos el conjunto

$$C := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} t_k y_{n_k} : 0 \leq t_k \leq 1 \right\},$$

el cual es un subconjunto cerrado, convexo y acotado de c_0 y está contenido en Y. Vamos a considerar la aplicación $T : C \to C$ dada por

$$T\left(\sum_{k=1}^{\infty} t_k y_{n_k}\right) = y_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} t_n y_{n_{(k+1)}}$$

La aplicación T no tiene punto fijo. En efecto, supongamos que si lo tuviera, entonces $t_{n_k} = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, por ser $(y_{n_k})_k$ una sucesión básica. El posible punto fijo de la aplicación sería una sucesión con un 1 en la posición $n_k, \forall k$ y ese punto no pertenece a c_0.

Vamos a probar que T es noexpansiva para la norma $q' = q + \lambda|\cdot|_\infty$. Bastaría probar que T es q-noexpansiva y $|.|_\infty$-noexpansiva, con lo cual también sería q'-noexpansiva.

En primer lugar, veamos que T es no-expansiva para la norma q. Hay que probar que $q(Tx - Ty) \leq q(x-y), \forall x, y \in C$. Fijemos $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} t_k y_{n_k}$, $y = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} s_k y_{n_k}$ dos vectores en C.

En ese caso, $Tx = y_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} t_k y_{n_{k+1}}, Ty = y_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} s_k y_{n_{k+1}}$.

$$q(Tx - Ty) = |Tx - Ty| = \sup_k |t_k - s_k| = |x - y| = q(x - y)$$

Veamos ahora que T también es no-expansiva para la norma $|\cdot|_\infty$. Habría que probar que $|Tx - Ty|_\infty \leq |x - y|_\infty, \forall x, y \in C$.

En primer lugar, observemos que

$$\|x - y\|_\infty = \sup\{|t_1 - s_1| \cdot \|y_{n_1}\|_\infty, |t_2 - s_2| \cdot \|y_{n_2}\|_\infty, |t_3 - s_3| \cdot \|y_{n_3}\|_\infty, \ldots\},$$

donde la igualdad se tiene por ser los (y_n) de soportes disjuntos. También sabemos que $\|y_n\|_\infty = \alpha, \forall n$, donde α es una constante, por lo tanto

$$\|x - y\|_\infty = \alpha \cdot \sup_k |t_k - s_k|.$$

Igualmente se tiene que $\|Tx - Ty\|_\infty = \alpha \cdot \sup_k |t_k - s_k|$.

Por otra parte, como $y_{n_k} = \sum_{j=p_{n_k}}^{q_{n_k}} \xi_j e_j$, se tiene que

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} t_k \left(\sum_{j=p_{n_k}}^{q_{n_k}} \xi_j e_j\right) = t_1 \sum_{j=p_{n_1}}^{q_{n_1}} \xi_j e_j + t_2 \sum_{j=p_{n_2}}^{q_{n_2}} \xi_j e_j + t_3 \sum_{j=p_{n_3}}^{q_{n_3}} \xi_j e_j + \ldots =$$

$$= t_1\xi_{p_{n_1}} e_{p_{n_1}} + \dots t_1\xi_{q_{n_1}} e_{q_{n_1}} +$$

$$+t_2\xi_{p_{n_2}} e_{p_{n_2}} + \dots t_2\xi_{q_{n_2}} e_{q_{n_2}} +$$

$$+t_3\xi_{p_{n_3}} e_{p_{n_3}} + \dots t_3\xi_{q_{n_3}} e_{q_{n_3}} + \dots$$

Con un razonamiento análogo obtenemos que

$$y = s_1\xi_{p_{n_1}} e_{p_{n_1}} + \dots s_1\xi_{q_{n_1}} e_{q_{n_1}} +$$

$$+s_2\xi_{p_{n_2}} e_{p_{n_2}} + \dots s_2\xi_{q_{n_2}} e_{q_{n_2}} +$$

$$+s_3\xi_{p_{n_3}} e_{p_{n_3}} + \dots s_3\xi_{q_{n_3}} e_{q_{n_3}} + \dots$$

$$\text{Como } Tx = y_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} t_k y_{n_{k+1}}, \text{ entonces}$$

$$Tx = \xi_{p_{n_1}} e_{p_{n_1}} + \dots \xi_{q_{n_1}} e_{q_{n_1}} +$$

$$+t_1\xi_{p_{n_2}} e_{p_{n_2}} + \dots t_1\xi_{q_{n_2}} e_{q_{n_2}} +$$

$$+t_2\xi_{p_{n_3}} e_{p_{n_3}} + \dots t_2\xi_{q_{n_3}} e_{q_{n_3}} +$$

$$+t_3\xi_{p_{n_4}} e_{p_{n_4}} + \dots t_3\xi_{q_{n_4}} e_{q_{n_4}} + \dots$$

$$\text{Como } Ty = y_{n_1} + \sum_{k=1}^{\infty} s_k x_{n_{k+1}}, \text{ entonces}$$

$$Ty = \xi_{p_{n_1}} e_{p_{n_1}} + \dots \xi_{q_{n_1}} e_{q_{n_1}} +$$

$$+s_1\xi_{p_{n_2}} e_{p_{n_2}} + \dots s_1\xi_{q_{n_2}} e_{q_{n_2}} +$$

$$+s_2\xi_{p_{n_3}} e_{p_{n_3}} + \dots s_2\xi_{q_{n_3}} e_{q_{n_3}} +$$

$$+s_3\xi_{p_{n_4}} e_{p_{n_4}} + \dots s_3\xi_{q_{n_4}} e_{q_{n_4}} + \dots$$

Observemos que

$$x - y = (t_1 - s_1)\xi_{p_{n_1}} e_{p_{n_1}} + \ldots + (t_1 - s_1)\xi_{q_{n_1}} e_{q_{n_1}} +$$

$$+(t_2 - s_2)\xi_{p_{n_2}} e_{p_{n_2}} + \ldots + (t_2 - s_2)\xi_{q_{n_2}} e_{q_{n_2}} +$$

$$+(t_3 - s_3)\xi_{p_{n_3}} e_{p_{n_3}} + \ldots + (t_3 - s_3)\xi_{q_{n_3}} e_{q_{n_3}} + \ldots$$

$$Tx - Ty = (t_1 - s_1)\xi_{p_{n_2}} e_{p_{n_2}} + \ldots + (t_1 - s_1)\xi_{q_{n_2}} e_{q_{n_2}} +$$

$$+(t_2 - s_2)\xi_{p_{n_3}} e_{p_{n_3}} + \ldots + (t_2 - s_2)\xi_{q_{n_3}} e_{q_{n_3}} +$$

$$+(t_3 - s_3)\xi_{p_{n_4}} e_{p_{n_4}} + \ldots + (t_3 - s_3)\xi_{q_{n_4}} e_{q_{n_4}} + \ldots$$

Por lo tanto

$$|Tx - Ty| = \alpha \cdot \sup_k |t_k - s_k| + \frac{|t_1 - s_1| \cdot |\xi_{p_{n_2}}|}{2^{p_{n_2}}} + \ldots + \frac{|t_1 - s_1| \cdot |\xi_{q_{n_2}}|}{2^{q_{n_2}}} +$$

$$+ \frac{|t_2 - s_2| \cdot |\xi_{p_{n_3}}|}{2^{p_{n_3}}} + \ldots + \frac{|t_2 - s_2| \cdot |\xi_{q_{n_3}}|}{2^{q_{n_3}}} + \frac{|t_3 - s_3| \cdot |\xi_{p_{n_4}}|}{2^{p_{n_4}}} + \ldots + \frac{|t_3 - s_3| \cdot |\xi_{q_{n_4}}|}{2^{q_{n_4}}} + \ldots =$$

$$= \alpha \cdot \sup_k |t_k - s_k| + |t_1 - s_1| \cdot \eta(y_{n_2}) + |t_2 - s_2| \cdot \eta(y_{n_3}) + |t_3 - s_3| \cdot \eta(y_{n_4}) + \ldots$$

$$|x - y| = \alpha \cdot \sup_k |t_k - s_k| + \frac{|t_1 - s_1| \cdot |\xi_{p_{n_1}}|}{2^{p_{n_1}}} + \ldots + \frac{|t_1 - s_1| \cdot |\xi_{q_{n_1}}|}{2^{q_{n_1}}} +$$

$$+ \frac{|t_2 - s_2| \cdot |\xi_{p_{n_2}}|}{2^{p_{n_2}}} + \ldots + \frac{|t_2 - s_2| \cdot |\xi_{q_{n_2}}|}{2^{q_{n_2}}} + \frac{|t_3 - s_3| \cdot |\xi_{p_{n_3}}|}{2^{p_{n_3}}} + \ldots + \frac{|t_3 - s_3| \cdot |\xi_{q_{n_3}}|}{2^{q_{n_3}}} + \ldots =$$

$$= \alpha \cdot \sup_k |t_k - s_k| + |t_1 - s_1| \cdot \eta(y_{n_1}) + |t_2 - s_2| \cdot \eta(y_{n_2}) + |t_3 - s_3| \cdot \eta(y_{n_3}) + \ldots$$

Para demostrar que $|Tx - Ty| \leq |x - y|$ sería suficiente comprobar que $\eta(y_{n_{k+1}}) \leq \eta(y_{n_k}), \forall k$, lo cual es cierto, ya que $(\eta(y_{n_k}))_k$ es una sucesión decreciente.

Luego T es $|.|_\infty$-noexpansiva.

Lo anterior muestra que T es no-expansiva para la norma $q + \lambda |\cdot|_\infty$ para todo $\lambda > 0$.

Tomando $\lambda > 0$ lo suficientemente próximo a cero, conseguimos una norma tan cerca como queramos de la original, sin la FPP y sin copias asintóticamente isométricas de c_0, como queríamos demostrar. $\blacksquare$

Bibliografía

[1] F. Albiac, N.J. Kalton. Topics in Banach Space Theory. Graduate Texs in Mathematics, Springer, 2006.

[2] Alspach, D.E. A fixed point free nonexpansive map. Proc. Amer. Math. Soc. 82 (1981), no. 3, 423-424.

[3] Ayerbe Toledano, J. M.; Domínguez Benavides, T.; López Acedo, G. Measures of noncompactness in metric fixed point theory. Operator Theory: Advances and Applications, 99. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[4] S. Banach. *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications*. Fund. Math. 3 (1922) 133-181.

[5] A. Barrera-Cuevas, M. Japón, *Density of the set of renormings in c_0 without asymptotically isometric copies of c_0 and failing to have the fixed point property.* Fixed Point Theory, 2013. Vol. 14 (1), (2013), 53-57.

[6] A. Barrera-Cuevas, M. Japón, *New families of nonreflexive Banach spaces with the fixed point property*, J. Math. Anal. Appl., 425(1), 2015, 349-363.

[7] O. Blasco, P. Gregori. *Type and Cotype in Vector-valued Nakano Sequence Spaces*, J. Math. Anal. and App. 264, (2001), 657-672.

[8] M.S. Brodskii, D.P. Milman. *On the center of a convex set.* Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.), 59:837-840, 1948.

[9] F.E. Browder, *Nonexpansive linear operators in Banach spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 54, 1965, 1041-1044.

[10] L.E.J. Brouwer. *Über Abbildungen von Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. 71 (1912), 97-115.

[11] T. Domínguez-Benavides, *Weak uniform normal structure coefficients in direct sums*, Studia Math. 103(3), 1992, 283-290.

[12] T. Domínguez Benavides. *A renorming of some nonseparable Banach spaces with the fixed point property.* J. Math. Anal. Appl., 350(2):525-530, 2009.

[13] T. Domínguez Benavides, *Distortion and stability of the fixed point property for non-expansive mappings*, Nonlinear Anal. **75**(6), 2012, 3229-3234.

[14] T. Domínguez-Benavides, J. García-Falset, M.A. Japón. *The τ-fixed point property for nonexpansive mappings.* Abstract and Applied Analysis, vol 3 (3-4), (1998), 343-362.

[15] P.N. Dowling, W.B. Johnson, C.L. Lennard, B. Turett. *The optimality of Jame's distortion theorems.* Proc. Amer. Math. Soc. 124 (1), (1997), 167-174.

[16] P. N. Dowling, C. J. Lennard and B. Turett. *Reflexivity and the fixed point property for nonexpansive maps.* J. Math. Anal. Appl., 200, 1996, 653-662.

[17] P. N. Dowling, C. J. Lennard and B. Turett,*Asymptotically perturbed norms of classical sequence spaces with applications to fixed point theory.* Proceedings of Workshop on Fixed Point Theory (Kazimierz Dolny, 1997). Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska Sect. A 51 (1997), no. 2, 67–98.

[18] P. N. Dowling and C. J. Lennard, *Every nonreflexive subspace of $L_1[0,1]$ fails the fixed point property*, Proc. Amer. Math. Soc. **125**, (1997), 443-446.

[19] P. N. Dowling, C. J. Lennard and B. Turett, *Asymptotically Isometric Copies of c_0 in Banach Spaces*, J. Math. Anal. Appl., **219**, (1998), 377-391.

[20] P. N. Dowling, P. K. Lin and B. Turett, *Failure of the FPP inside an asymptotically isometric-free copy of c_0.* Nonlinear Anal. **73**, (2010), 1175-1179.

[21] Dowling, P. N.; Lin, Pei-Kee; Turett, B. *Direct sums of renormings of l1 and the fixed point property.* Nonlinear Anal. 73 (2010), no. 3, 591-599.

[22] P. N. Dowling, N. Randrianantoanina, *Spaces of compact operators on a Hilbert space with the fixed point property*, J. Funct. Anal., 168 (1), 1999, 111-120.

[23] D. van Dulst, B, Sims. *Fixed points of nonexpansive mappings and Chebyshev centers in Banach spaces with norms of type (KK). In Banach space theory and its applications (Bucarest, 1981)*, volume 991 of *Lecture Notes in Math.*, pages 35-43. Springer, Berlin, 1983.

[24] M. Fabian, L. Zajicek and V. Zizler, *On residuality of the Set of Rotund Norms on a Banach Space*, Math. Ann. **258**, (1982), 349-351.

[25] H. Fetter, B. Gamboa de Buen, *Banach spaces with a basis that are hereditarily asymptotically isometric to ℓ_1 and the fixed point property.* Nonlinear Anal., vol. 71 (2009), 4598-4608.

[26] F. Galvin, K. Prikry. *Borel sets and Ramsey's theorem.* J. Symbolic Logic, **38**, (1973), 193-198.

[27] K. Goebel, W.A. Kirk. Topics in metric fixed point theory. Cambridge university press, 1990.

[28] J.P. Gossez, E. Lami Dozo. *Some geometric properties related to the fixed point theory for nonexpansive mappings.* Pacific J. Math., 40, (1972), 565-573.

[29] W.T. Gowers. *Ramsey methods in Banch spaces.* Handbook of the Geometry of Banach spaces, Volume 2, Edited by W.B. Johnson, J. Lindenstrauss, North-Holland, 2003, 1071-1097.

[30] D. Göhde, *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, Math. Nach. 30, 1964, 251-258.

[31] J. Hagler. *Embeddings of L_1 into conjugate Banach spaces.* PhD thesis, University of California, Berkeley, Calif., 1972.

[32] C. Hernández-Linares, M. Japón, C. Lennard, *Renormings failing to have asymptotically isometric copies of ℓ_1 or c_0.* Nonlinear Anal., 77, (2013), 112-117.

[33] C. A. Hernández-Linares, M. A. Japón, E. Llorens-Fuster. *On the structure of the set of equivalent norms on ℓ_1 with the fixed point property.* J. Math. Anal. App. 387 (2012), 645-54.

[34] C. A. Hernández-Linares, M. A. Japón. *Rays of equivalent norms with the fixed point property in some nonreflexive Banach spaces.* J. Nonlinear Convex Anal. 15, n. 2, (2014), 355-377.

[35] R.C. James, *Uniformly non-square Banach spaces.* Ann. of Math. (2) 80, (1964), 542-550.

[36] A. Kaminska. *Rotundity of Orlicz-Musielak sequence spaces.* Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom Phys. **29**, (1981), 137-144.

[37] A. Kaminska, H.J. Lee. *Banach-Saks properties of Musielak-Orlicz and Nakano sequence spaces.* Proc. Amer. Math. Soc., 142(2), (2013), 547-558.

[38] L.A. Karlovitz. *Existence of fixed points of nonexpansive mappings in a space without normal structure.* Pacific Journal of Mathematics, 66 (1), (1976), 153-159.

[39] W. A. Kirk. *A fixed point for mappings which do not increase distances*, Amer. Math. Monthly, 72, (1965), 1004-1006.

[40] W.A. Kirk, B. Sims. Handbook of Metric Fixed Point Theory. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[41] T.C. Lim. *Asymptotic centers and nonexpansive mappings in conjugate Banach spaces.* Pacific J. Math. 90 (1980), no. 1, 135-143.

[42] P.K. Lin, *Unconditional basis and fixed points of nonexpansive mappigs*, Pacific J. Math., 116, 1985, 69-76.

[43] P.K. Lin, *There is an equivalent norm on ℓ_1 that has the fixed point property.* Nonlinear Anal., 68 (8) (2008), 2303-2308.

[44] P.K. Lin, *Renorming of ℓ_1 and the fixed point property*, J. Math. Anal. Appl. 362 (2010), no. 2, 534-541.

[45] P.K. Lin, Y. Sternfeld. *Convex sets with the Lipschitz fixed point property are compact.* Proc. Amer. Math. Soc., 93(4):, (1985), 633-639.

[46] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. *Classical Banach Spaces I.* Springer Verlag, 1977.

[47] J. Lindenstrausss, L. Tzafriri. Classical Banach spaces I, Springer-Verlag, 1979.

[48] J. Lindenstrausss, L. Tzafriri. Classical Banach spaces II, Springer-Verlag, 1979.

[49] E. Llorens-Fuster, E. Moreno-Gálvez. *The Fixed Point Theory for some generalized nonexpansive mappings*. Abstract and Applied Analysis, vol. 2011, Article ID 435686, 15 pages, 2011. doi:10.1155/2011/435686.

[50] J. Musielak. Orlicz Spaces and Modular Spaces. Lecture Notes in Mathematics, vol. 1034, Springer, Berlin, 1983.

[51] H. Nakano. *Modulared sequence Spaces*. Proc. Japan Acad. Volume 27, Number 9 (1951), 508-512.

[52] H. Pfitzner, *A note on asymptotically isometric copies of ℓ_1 and c_0*, Proc. Amer. Math. Soc. 129 (5), 2001, 1367-1373.

[53] M.M. Popov. *A hereditarily ℓ_1 subspace of L_1 without the Schur property*. Proc. Amer. Math. Soc., vol. 133, n. 7, (2005), 2023-2028.

[54] J. Schauder. *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*. Studia Math. 2, (1930), 171-180.

[55] A. Tychonoff. *Ein Fixpunktsatz*. Mathematische Annalen 111, 1, (1935), 767-776.

[56] J.P. Williams. *A metric characterization of reflexivity*. Proc. Amer. Math. Soc., 18 (1), (1967), 163-165.

[57] B. Zlatanov, *On Musielak-Orlicz Sequence Spaces with an Asymptotic ℓ_∞ dual*. Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Inform. 99 (2009) 203.214.