XXI Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones
XI Congreso de Matemática Aplicada
Ciudad Real, 21-25 septiembre 2009
(pp. 1–8)

Estabilidad asintótica para modelos de Cristales Líquidos Nemáticos

B. Climent-Ezquerra[1], F. Guillén-González[1], M.A. Rodríguez-Bellido[1]

[1] *Dpto. E.D.A.N., Universidad de Sevilla, Aptdo. 1160, E-41080 Sevilla. E-mails:* bcliment@us.es, guillen@us.es, angeles@us.es.

Palabras clave: Cristales Líquidos Nemáticos, estabilidad asintótica, estabilidad

Resumen

En este trabajo estudiamos el comportamiento asintótico en tiempo infinito y la estabilidad de soluciones de un sistema de Cristales Líquidos Nemáticos con condiciones de contorno Dirichlet, homogéneas para $\mathbf{u}$ (velocidad) y no homogéneas para $\mathbf{d}$ (vector director). La dificultad radica en que, a diferencia de [6], el dato de contorno para $\mathbf{d}$ es dependiente del tiempo. Suponiendo que $\mathbf{d}(t)$ sobre la frontera es igual a un dato estacionario más una perturbación evolutiva pequeña en normas adecuadas, conseguimos demostrar resultados de estabilidad y estabilidad asintótica cuando el tiempo va a infinito.

1. Introducción

Los Cristales Líquidos Nemáticos (CLN) son fluidos incompresibles a nivel macroscópico, pero su estructura microscópica es anisotrópica debido a la facilidad de alineación de sus moléculas (propiedad de elasticidad). Un problema diferencial que modela este tipo de CLN se obtiene acoplando las ecuaciones de Navier-Stokes en velocidad-presión $(\mathbf{u}(t,\mathbf{x}), p(t,\mathbf{x}))$, con las ecuaciones para la dinámica del vector director $\mathbf{d}(t,\mathbf{x})$ de las moléculas del cristal líquido. El sistema que estudiamos se corresponde con una formulación de tipo Ericksen-Leslie, penalizada con un funcional de tipo Ginznburg-Landau, introducida por F. H. Lin en [5] y analizada por F. H. Lin & C. Liu en [6]. En este modelo penalizado, la restricción $|\mathbf{d}| \le 1$ aparece como consecuencia de un principio del máximo para el sistema con funcional de Ginzburg-Landau $\mathbf{f}_\delta(\mathbf{d}) = \dfrac{1}{\delta^2}\left(|\mathbf{d}|^2 - 1\right)\mathbf{d}$, siendo $|\mathbf{d}|$ la norma euclídea en $\mathbb{R}^3$ y $\delta > 0$ un parámetro de penalización. Si denotamos $Q = (0,T)\times\Omega$

y $\Sigma = (0,T)\times\Gamma$ (pudiendo ser $T=+\infty$), $\Gamma=\partial\Omega$, con $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ un dominio suficientemente regular de frontera Γ, el modelo se escribe:

$$(CLN)\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}-\nu\Delta\mathbf{u}+\nabla p &=& -\lambda(\nabla\mathbf{d})^t\,\Delta\mathbf{d} & \text{en } Q,\\ \nabla\cdot\mathbf{u} &=& 0 & \text{en } Q,\\ \partial_t\mathbf{d}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{d}+\gamma\,(-\Delta\mathbf{d}+\mathbf{f}_\delta(\mathbf{d})) &=& \mathbf{0} & \text{en } Q,\\ \mathbf{u}=\mathbf{0},\quad \mathbf{d} &=& \mathbf{h} & \text{sobre } \Sigma,\\ \mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{u}_0,\quad \mathbf{d}|_{t=0} &=& \mathbf{d}_0 & \text{en } \Omega, \end{array}\right.$$

siendo $\nu>0$ una constante característica de la viscosidad del fluido, $\lambda>0$ una constante de elasticidad y $\gamma>0$ una constante de relajación en tiempo.

2. Objetivos

El análisis teórico del modelo (CLN) fue hecho en [6], obteniendo existencia de solución débil global para todo $T>0$ con regularidad

$$\mathbf{u}\in L^\infty(0,T;\mathbf{L}^2(\Omega))\cap L^2(0,T;\mathbf{H}^1(\Omega)),\quad \mathbf{d}\in L^\infty(0,T;\mathbf{H}^2(\Omega))\cap L^2(0,T;\mathbf{H}^3(\Omega)),$$

y la existencia (y unicidad) de solución fuerte local en tiempo, con regularidad

$$\mathbf{u}\in L^\infty(0,T_*;\mathbf{H}^1(\Omega))\cap L^2(0,T_*;\mathbf{H}^2(\Omega)),\quad \mathbf{d}\in L^\infty(0,T_*;\mathbf{H}^2(\Omega))\cap L^2(0,T_*;\mathbf{H}^3(\Omega)),$$

donde $T_*\le T$ o bien es suficientemente pequeño o bien $T_*=T$ (para cada $T>0$) si el coeficiente de viscosidad ν es suficientemente grande o para el caso de dominios bidimensionales. Sin embargo, todos estos resultados fueron dados para condiciones de contorno de tipo Dirichlet independientes del tiempo:

$$\mathbf{u}=\mathbf{0},\quad \mathbf{d}=\mathbf{h}\quad\text{sobre }\Sigma,\quad (\mathbf{h}\neq\mathbf{h}(t)) \tag{1}$$

y para las condiciones iniciales:

$$\mathbf{u}|_{t=0}=\mathbf{u}_0,\quad \mathbf{d}|_{t=0}=\mathbf{d}_0\quad\text{en }\Omega. \tag{2}$$

En el caso en que se consideran datos dependientes del tiempo de tipo Dirichlet para $\mathbf{d}$ (es decir, $\mathbf{h}=\mathbf{h}(t)$ en (1)), la existencia de solución débil periódica en tiempo, es decir la solución obtenida cambiando (2) por $\mathbf{u}(0)=\mathbf{u}(T)$, $\mathbf{d}(\mathbf{0})=\mathbf{d}(T)$, fue obtenida en [3]. La regularidad fuerte hasta tiempo infinito considerando la viscosidad ν suficientemente grande junto con la regularidad fuerte para la solución periódica en tiempo fueron obtenidas en [1].

Los resultados correspondientes al problema de valores iniciales fueron extendidos en [7] a un modelo mucho más completo respecto del tensor disipativo, y que consideraba además los efectos de tipo stretching para el caso de moléculas en forma de disco. Recientemente, un modelo de cristales líquidos con un término de tipo stretching para el caso de moléculas con forma de barra (rod-like particles) y condiciones de contorno periódicas en espacio para $\mathbf{u}$ y $\mathbf{d}$ ha sido estudiado en [9], obteniendo solución global débil y solución local fuerte (que es global en el caso de que la viscosidad sea suficientemente grande). Dichos resultados fueron complementados en [2] con propiedades de estabilidad y estabilidad asintótica, respectivamente en el siguiente sentido:

- $\exists \lim_{t\to+\infty} E(t) = E_\infty \geq 0$, donde $E(t) = E_c(t) + E_e(t)$, siendo $E_c(t) = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$ la energía cinética, $E_e(t) = \frac{\lambda}{2}\left(\|\nabla\mathbf{d}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\int_\Omega F_\delta(\mathbf{d})\right)$ la energía elástica y $F_\delta(\mathbf{d}) = \frac{1}{4\delta^2}(|\mathbf{d}|^2-1)^2$ (de manera que $\nabla_{\mathbf{d}}F_\delta(\mathbf{d}) = \mathbf{f}_\delta(\mathbf{d})$).
- $\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0$, donde $F(t) = \nu\|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + \gamma\lambda\|\Delta\mathbf{d}(t) - f(\mathbf{d}(t))\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$.
- Si en un tiempo $t = t_0$ los datos iniciales son tales que $E(t_0)$ es suficientemente pequeño, entonces existe solución fuerte para el sistema $\forall t \geq t_0$, y satisface que $E(t)$ y $F(t)$ permanecen pequeñas $\forall t \geq t_0$.
- Para cada sucesión $t_j \to +\infty$, existe una subsucesión t_{j_k} tal que $\mathbf{d}(t_{j_k})$ converge en $\mathbf{H}^2(\Omega)$-débil cuando $k \to +\infty$ hacia un punto crítico, $\bar{\mathbf{d}}$, de la energía elástica E_e y $E_e(\bar{\mathbf{d}}) = E_\infty$.

En este trabajo pretendemos extender dichas propiedades de estabilidad al caso de un modelo más simple, (CLN), pero con condiciones de contorno de tipo Dirichlet y dependientes del tiempo (recordemos que este estudio para condiciones Dirichlet independientes del tiempo fue hecho en [6]). Concretamente, consideraremos que $\mathbf{h} = \mathbf{h}_s + \mathbf{h}_e$, siendo $\mathbf{h}_s$ la parte estacionaria y del orden de la unidad (independiente del tiempo) del dato de contorno asociado a $\mathbf{d}$, y $\mathbf{h}_e$ la parte evolutiva (dependiente del tiempo) y pequeña, de hecho impondremos la condición de que $\|\mathbf{h}_e(t)\|_{\mathbf{H}^{3/2}(\Gamma)} \to 0$ cuando $t \to +\infty$.

3. Marco general

Supongamos que nos encontramos en la siguiente situación. Para $t \in (0,+\infty)$:

$$E(t),\, F(t) \geq 0, \quad E'(t) + F(t) \leq a(t)\,E(t) + b(t), \quad a,\, b \in L^1(0,+\infty). \tag{3}$$

Demostramos primero que existe el límite para la función $E(t)$ cuando $t \to +\infty$.

Lema 1 *Se verifican:*

$$E(t) + \int_0^t F(s)\,ds \leq e^A\,(E(0)+B) := M, \quad \forall\, t > 0, \tag{4}$$

$$\exists \lim_{t\to+\infty} E(t) := E_\infty \geq 0, \tag{5}$$

donde $A = \int_0^{+\infty} a(s)\,ds$ *y* $B = \int_0^{+\infty} b(s)\,ds$.

Demostración. De (3), aplicando el Lema de Gronwall, podemos deducir que:

$$E(t) + \int_0^t e^{A(t)-A(s)}\,F(s)\,ds \leq E(0)\,e^{A(t)} + \int_0^t e^{A(t)-A(s)}\,b(s)\,ds.$$

De modo que:

$$0 \leq E(t) + \int_0^t F(s)\,ds \leq e^A\left(E(0) + \int_0^t b(s)\,ds\right) \leq e^A\,(E(0)+B) := M, \quad \forall t \geq 0,$$

de donde se tiene (4). En particular, podemos definir los límites inferior, $E^- \geq 0$ y superior, $E^+ \leq M$, para la función $E(t)$. Será suficiente probar que ambos límites coinciden. Razonamos entonces por reducción al absurdo: Supongamos que $\alpha = E^+ - E^- > 0$ (es un número estrictamente positivo). Sea $T > 0$, $T >>$ tal que $\displaystyle\int_T^{+\infty} a(s)\,ds \leq \delta_1(\alpha)$, donde $\delta_1(\alpha)$ se elegirá más adelante. Entonces:

- Sea $t_0 \geq T$, $t_0 >>$ tal que $|E(t_0) - E^-| < \alpha/4$.
- Sea $t_1 \geq T$, $t_1 > t_0$ tal que $|E(t_1) - E^+| < \alpha/4$.
  En particular, $E(t_1) > E(t_0)$.
- Estimamos $E(t_1) - E(t_0)$: De (3), deducimos que:

$$E(t_1) - E(t_0) \leq E(t_0)\left(e^{A(t_1)-A(t_0)} - 1\right) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1)-A(s)}\, b(s)\,ds.$$

  Observemos que si consideramos $T >>$ y $t \leq t_0 < t_1$, de la integrabilidad de las funciones $a(t)$ y $b(t)$ para $t \in (0, +\infty)$ se puede deducir la existencia de $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ suficientemente pequeños tales que:

$$A(t_1) - A(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} a(s)\,ds \leq \int_T^{+\infty} a(s)\,ds < \delta_1,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1)-A(s)}\, b(s)\,ds \leq e^{\delta_1} \int_{t_0}^{t_1} b(s)\,ds \leq \delta_2\, e^{\delta_1}.$$

  Y así,

$$E(t_1) - E(t_0) \leq E(t_0)\left(e^{\delta_1} - 1\right) + e^{\delta_1}\,\delta_2 < \alpha/4.$$

Ahora bien:

$$\alpha = E^+ - E^- = E^+ - E(t_1) + E(t_1) - E(t_0) + E(t_0) - E^- < \frac{3}{4}\alpha,$$

con lo que llegamos a contradicción, quedando probado (5). ∎

En segundo lugar, integrando (3) en $(0, t)$ se tiene que $F \in L^1(0, +\infty)$. En efecto,

$$\int_0^t F(t)\,dt \leq E(0) + M \int_0^t a(s)\,ds + \int_0^t b(s)\,ds \leq C < +\infty,$$

luego $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(t)\,dt < +\infty$. Usando esto último, podemos deducir que para cualquier $\delta > 0$, existe un tiempo $t_1^* = t_1^*(\delta) \geq 0$ suficientemente grande tal que:

$$\int_{t_1^*}^{+\infty} F(t)\,dt \leq \delta. \tag{6}$$

En particular, podemos decir que para cada $\delta > 0$ existe un tiempo $t_1^*(\delta) \geq 0$ suficientemente grande tal que:

$$\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} F(t)\,dt \leq \frac{\delta}{\tau}, \quad \forall\, \tau > 0,\ \forall\, t \geq t_1^*(\delta). \tag{7}$$

La prueba de los dos próximos lemas la podemos encontrar en [2].

Lema 2 *Sea $F \in L^1(0,+\infty)$, $F \geq 0$ en $(0,+\infty)$, verificando (7). Entonces, $\forall\, \delta > 0$, $\forall\, t \geq t_1^*(\delta)$ y $\forall\, \tau > 0$ existe un tiempo $\bar{t} \in [t, t+\tau]$ tal que:*

$$F(\bar{t}) \leq \frac{2\delta}{\tau}. \tag{8}$$

De hecho, el conjunto de puntos $\bar{t} \in [t, t+\tau]$ que verifican (8) tiene medida $\geq \tau/2$.

Para el siguiente resultado, suponemos que $F(t)$ verifica la desigualdad diferencial:

$$F'(t) \leq C_2(F(t)^3 + 1). \tag{9}$$

Lema 3 *Sea $F \in L^1(t_0,+\infty)$ una función verificando (9). Para cualquier $\varepsilon < 1$, si $F(t_0) \leq \varepsilon/3$, entonces $F(t) \leq \varepsilon\ \forall t \in [t_0, t_0 + T_*(\varepsilon)]$, siendo $T_*(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{3C_2}$.*

3.1. Estabilidad asintótica.

Teorema 4 *(ver [2]) Sea $\varepsilon < 1$, y $F \in L^1(0,+\infty)$, $F \geq 0$, tal que se verifican las desigualdades (7) y (9) para $\delta = \dfrac{\varepsilon^2}{36C_2}$, $t_1^* = t_1^*(\delta)$ y $\tau = \dfrac{T_*(\varepsilon)}{2}$. Entonces,*

$$F(t) \leq \varepsilon,\ \forall\, t \geq t_2^* = t_1^* + \frac{T_*(\varepsilon)}{2} = t_1^*(\delta) + \frac{\varepsilon}{6C_2}.$$

Nota. En particular, $F \in W^{1,1}(t_2^*,+\infty) \hookrightarrow C[t_2^*,+\infty)$. ■

Corolario 5 *Sea $F \in L^1(t_0,+\infty)$ una función que satisface la desigualdad (9). Entonces, $F(t)$ es una función* **asintóticamente estable hacia** 0*, es decir,*

$$\lim_{t\to+\infty} F(t) = 0.$$

3.2. Estabilidad desde un tiempo $\mathbf{t_0}$.

Sea $t_0 \geq 0$. Dado $\varepsilon > 0$ cualquiera, definimos $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon^2}{36\, C_2}$. Si suponemos que:

$$(H1) \qquad E(t_0) + \int_{t_0}^{+\infty} b(t)\, dt \leq \frac{\delta(\varepsilon)}{e^A},$$

entonces, de (4) obtenemos: $\forall\, t_1 > t_0$

$$E(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} F(t)\, dt \quad \leq \quad e^A \left(E(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} b(s)\, ds \right) \leq \delta(\varepsilon).$$

En efecto, tenemos (6) para $t_1^* = t_0$. Entonces, aplicando el Teorema 4, obtenemos:

$$F(t) \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0 + \frac{\varepsilon}{6C_2} \left(= t_0 + \frac{T_*(\varepsilon)}{2} \right)$$

Si, además,

$$(H2) \qquad F(t_0) \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

entonces aplicando el Lema 3, obtenemos: $F(t) \leq \varepsilon\ \forall t \in [t_0, t_0 + T_*(\varepsilon)]$. En resumen, bajo las hipótesis $(H1)$ y $(H2)$, llegamos a que:

$$E(t) \leq \delta(\varepsilon), \quad F(t) \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq t_0.$$

4. El modelo de cristales líquidos nemáticos (CLN)

Supongamos que $\mathbf{h}_s \in \mathbf{H}^{3/2}(\Gamma)$. Para obtener las estimaciones para (CLN), hacemos un levantamiento de la parte evolutiva del dato de contorno para $\mathbf{d}$. Para ello, utilizamos como problema auxiliar (ver [1]):

$$\partial_t \widetilde{\mathbf{d}} - \Delta \widetilde{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad \text{en } Q, \qquad \widetilde{\mathbf{d}} = \mathbf{h}_e \quad \text{sobre } \Sigma,$$

siendo $\mathbf{h}_e \in L^\infty(0,+\infty;\mathbf{H}^{3/2}(\Gamma)) \cap L^2(0,+\infty);\mathbf{W}^{5/3,3}(\Gamma))$. Además, supondremos que $\mathbf{h}_e$ tiene un comportamiento en tiempo infinito tal que:

$$\widetilde{\mathbf{d}}(t) \to 0 \quad \text{en } \mathbf{H}^2(\Omega) \text{ cuando } t \to +\infty. \tag{10}$$

Deducimos entonces que $\widetilde{\mathbf{d}}$ es una función con la siguiente regularidad:

$$\partial_t \widetilde{\mathbf{d}} \in L^2(0,+\infty;\mathbf{L}^3(\Omega)), \quad \widetilde{\mathbf{d}} \in L^\infty(0,+\infty;\mathbf{H}^1(\Omega)) \cap L^2(0,+\infty;\mathbf{W}^{2,3}(\Omega)) \tag{11}$$

$$\widetilde{\mathbf{d}} \in L^\infty(0,+\infty;\mathbf{H}^2(\Omega)). \tag{12}$$

De ese modo, para $\widehat{\mathbf{d}} = \mathbf{d} - \widetilde{\mathbf{d}}$ el sistema (CLN) se transforma en:

$$(\widetilde{CLN}) \left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &=& -\lambda(\nabla\mathbf{d})^t\,\Delta\mathbf{d} & \text{en } Q, \\ \nabla\cdot\mathbf{u} &=& 0 & \text{en } Q, \\ \partial_t \widehat{\mathbf{d}} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{d} + \gamma\left(\mathbf{f}_\delta(\mathbf{d}) - \Delta\widehat{\mathbf{d}}\right) &=& \mathbf{0} & \text{en } Q, \\ \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \widehat{\mathbf{d}} &=& \mathbf{h}_s & \text{sobre } \Sigma, \\ \mathbf{u}|_{t=0} \ = \ \mathbf{u}_0, \quad \widehat{\mathbf{d}}|_{t=0} = \widehat{\mathbf{d}}_0 &:=& \mathbf{d}_0 - \widetilde{\mathbf{d}}(0) & \text{en } \Omega. \end{array} \right.$$

4.1. Estimaciones débiles

Tomando $\mathbf{u}$ como función test en la ecuación para la velocidad y $\lambda(-\Delta\widehat{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_\delta(\mathbf{d}))$ como función test en la ecuación para $\widehat{\mathbf{d}}$, obtenemos la igualdad de energía:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}E(t) + F(t) = -\lambda(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{d}, \Delta\widetilde{\mathbf{d}}) + \lambda(\partial_t\widetilde{\mathbf{d}}, \mathbf{f}_\delta(\mathbf{d})), \tag{13}$$

donde

$$\left\{ \begin{array}{rcl} E(t) &=& \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\lambda \displaystyle\int_\Omega F_\delta(\mathbf{d}) + \lambda\|\nabla\widehat{\mathbf{d}}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \\ F(t) &=& \nu\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \gamma\lambda\| - \Delta\widehat{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_\delta(\mathbf{d})\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{array} \right.$$

Acotando los dos términos a la derecha de (13), y en las hipótesis de regularidad (11) para $\widetilde{\mathbf{d}}$, obtenemos la ecuación diferencial general:

$$E'(t) + F(t) \le a(t)\,E(t) + b(t) \tag{14}$$

para a, $b \in L^1(0,+\infty)$ con:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a(t) &=& \dfrac{C_\varepsilon\lambda^2}{\nu}\|\Delta\widetilde{\mathbf{d}}\|^2_{\mathbf{L}^3(\Omega)} + C\lambda^2\|\partial_t\widetilde{\mathbf{d}}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}, \\ b(t) &=& \left(\dfrac{C_\varepsilon\lambda^2}{\nu}\|\Delta\widetilde{\mathbf{d}}\|^2_{\mathbf{L}^3(\Omega)} + C\lambda\|\partial_t\widetilde{\mathbf{d}}\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)}\right)\|\widetilde{\mathbf{d}}\|^2_{\mathbf{H}^1(\Omega)} + C\lambda^2\|\partial_t\widetilde{\mathbf{d}}\|^2_{\mathbf{L}^3(\Omega)}\|\mathbf{h}_s\|^2_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)}. \end{array} \right.$$

4.2. Estimaciones fuertes

Para facilitar la notación reescribimos $\mathbf{w} = -\Delta\widehat{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_\delta(\mathbf{d})$, de manera que la ecuación para $\widehat{\mathbf{d}}$ se escribe de la forma:

$$\partial_t \widehat{\mathbf{d}} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{d} + \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \text{en } Q, \qquad \widehat{\mathbf{d}}|_\Sigma = \mathbf{0} \tag{15}$$

Como $\partial_t\widehat{\mathbf{d}}|_\Sigma = \mathbf{0}$ y $\mathbf{u}|_\Sigma = \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{w}|_\Sigma = \mathbf{0}$. Tomando $-\Delta\mathbf{w}$ como función test en (15) e integrando por partes, obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\mathbf{w}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \gamma\|\nabla\mathbf{w}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = -(\nabla(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{d}),\nabla\mathbf{w}) + (\mathbf{f}'_\delta(\mathbf{d})\partial_t\mathbf{d},\mathbf{w}). \tag{16}$$

Tomando ahora $A\mathbf{u}$ como función test en la ecuación de la velocidad (siendo A el operador de Stokes), obtenemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|A\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = -(\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}, A\mathbf{u}) - \lambda((\nabla\mathbf{d})^t(\Delta\widehat{\mathbf{d}} + \Delta\widetilde{\mathbf{d}}), A\mathbf{u}). \tag{17}$$

Acotando la parte derecha de (16) y (17), usando las acotaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} \|\mathbf{f}_\delta(\mathbf{d}(t))\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)},\, \|\mathbf{f}'_\delta(\mathbf{d}(t))\|_{\mathbf{L}^3(\Omega)} & \le & C \\ \|\mathbf{d}(t)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)},\, \|\widehat{\mathbf{d}}(t)\|_{\mathbf{H}^2(\Omega)} & \le & C\left(\|\mathbf{w}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 1\right) \\ \|\mathbf{d}(t)\|_{\mathbf{H}^3(\Omega)},\, \|\widehat{\mathbf{d}}(t)\|_{\mathbf{H}^3(\Omega)} & \le & C\left(\|\nabla\mathbf{w}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 1\right) \end{array}\right.$$

llegamos a una desigualdad diferencial del tipo (9), ya que:

$$F'(t) + G(t) \le C\left(1 + F(t) + F(t)^3\right) \le C\left(1 + F(t)^3\right)$$

para:

$$\left\{\begin{array}{rcl} F(t) & = & \nu\|\nabla\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \gamma\lambda\| - \Delta\widehat{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_\delta(\mathbf{d})\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}, \\ G(t) & = & \|A\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \|\nabla(-\Delta\widehat{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_\delta(\mathbf{d}))\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)}. \end{array}\right.$$

5. Aplicación del marco general al modelo (CLN).

5.1. Estabilidad asintótica.

Sean $(\mathbf{u}_0, \widehat{\mathbf{d}}_0) \in \mathbf{L}^2(\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)$ dos funciones dadas y $(\mathbf{u}(t), \widehat{\mathbf{d}}(t))$ una solución débil en $[0,+\infty)$ del sistema $\widetilde{(CLN)}$. Como (3) y (9) se verifican, aplicando los resultados de la Sección 3, obtenemos que $(\mathbf{u}(t), \widehat{\mathbf{d}}(t))$ es de hecho una solución fuerte en $[t_1^*, +\infty)$ para t_1^* suficientemente grande con $(\mathbf{u}, \widehat{\mathbf{d}}) \in L^\infty(t_1^*, +\infty; \mathbf{H}^1(\Omega)\times\mathbf{H}^2(\Omega))$, y:

$$E(t) \to E_\infty\,(\ge 0), \quad F(t) \to 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \text{ cuando } t\uparrow +\infty,$$

luego $\mathbf{u}(t) \to 0$ en $\mathbf{H}^1_0(\Omega)$ y $\mathbf{w}(t) \to 0$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ cuando $t \uparrow +\infty$. Además, como $\widehat{\mathbf{d}} \in L^\infty(t_1^*, +\infty; \mathbf{H}^2(\Omega))$ para cada sucesión $t_j \uparrow +\infty$, existe una subsucesión $(t_{j_k}) \subset (t_j)$ tal que $\widehat{\mathbf{d}}(t_{jk}) \rightharpoonup \bar{\mathbf{d}}$ en $\mathbf{H}^2(\Omega)$-débil para $k \uparrow +\infty$. Usando (10), se tiene que $\mathbf{d}(t_{j_k}) \rightharpoonup \bar{\mathbf{d}}$ en

$\mathbf{H}^2(\Omega)$-débil y $\mathbf{f}_\delta(\mathbf{d}(t_{j_k})) \to \mathbf{f}_\delta(\bar{\mathbf{d}})$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ para $k \to +\infty$, luego podemos deducir que $\bar{\mathbf{d}}$ es un punto crítico de la energía elástica $E_e(\mathbf{d})$ sujeto a $\mathbf{d}|_\Gamma = \mathbf{h}_s$, es decir, una solución del problema estacionario:

$$-\Delta\bar{\mathbf{d}} + \mathbf{f}_\delta(\bar{\mathbf{d}}) = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega, \quad \bar{\mathbf{d}}|_\Gamma = \mathbf{h}_s. \tag{18}$$

Notemos que $E_\infty = \dfrac{\lambda}{2}\left(\|\nabla\bar{\mathbf{d}}\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + 2\displaystyle\int_\Omega F(\bar{\mathbf{d}})\right) = E_e(\bar{\mathbf{d}})$, es decir, cada posible límite del campo de direcciones, $\bar{\mathbf{d}}$, cuando $t \uparrow +\infty$ es un punto crítico de la energía elástica y todos sus posibles límites tiene la misma energía elástica E_∞.

Aunque el problema estacionario (18) no tiene unicidad, un problema abierto interesante es saber si la dinámica del problema evolutivo converge hacia un único punto crítico (un resultado afirmativo se puede ver en [8] para el problema con condiciones de contorno periódicas).

5.2. Estabilidad desde un instante t_0.

Si $(\mathbf{u}(t_0), \mathbf{d}(t_0))$ son tales que se verifican las hipótesis $(H1)$ y $(H2)$ de la Subsección 3.2, entonces para cada $t \geq t_0$, aplicando los resultados de la Sección 3 obtenemos que:

$$E(t) := \frac{1}{2}\|\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2}\|\nabla\widehat{\mathbf{d}}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \lambda\int_\Omega F_\delta(\mathbf{d}(t)) \leq \delta(\varepsilon),$$
$$F(t) := \nu\|\nabla\mathbf{u}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} + \gamma\lambda\|\mathbf{w}(t)\|^2_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \varepsilon,$$

lo que permite concluir el resultado de estabilidad de $E(t)$ y $F(t)$ desde el instante $t = t_0$.

Agradecimientos

Los autores han sido parcialmente financiados por los proyectos MTM2006-07932 del Ministerio de Educación y Ciencia Español y P06-FQM-02373 de la Junta de Andalucía.

Referencias

[1] B. Climent-Ezquerra, F. Guillén-González, M. J. Moreno-Iraberte. *Regularity and Time-periodicity for a Nematic Liquid Crystal model.* Nonlinear Analysis 71 (2009), 539-549. http://dx.doi.org/10.1016/j.na.2008.10.092

[2] B. Climent-Ezquerra, F. Guillén-González, M. A. Rodríguez-Bellido. *Stability for nematic liquid crystals with stretching terms.* Sometido.

[3] B. Climent-Ezquerra, F. Guillén-González, & M.A. Rojas-Medar. *Reproductivity for a nematic liquid crystal model* Z. Angew. Math. Phys. 576, No. 6 (2006), 984-998.

[4] F. Guillén-González and M. A. Rojas-Medar, Global solution of nematic liquid crystals models, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **335-12**, 1085–1090 (2002).

[5] F. H. Lin, *Nonlinear theory of defects in nematic liquid crystals: phase transition and flow phenomena.* Comm. Pure Appl. Math., **42**, 789–814 (1989).

[6] F. H. Lin and C. Liu. *Nonparabolic Dissipative Systems Modeling the Flow of Liquid Crystals.* Comm. Pure Appl. Math., **48**, 501–537 (1995).

[7] F. H. Lin & C. Liu. *Existence of Solutions for the Ericksen-Leslie System* Arch. Rational Mech. Anal. **154** (2000), 135–156.

[8] C. Liu, H. Wu & X. Xu. *Asymptotic behavior of a hydrodynamic system in the nematic liquid crystal flows.* Preprint No. 1401 WIAS (2009).

[9] H. Sun & C. Liu. *On Energetic Variational Approaches in Modeling the Nematic Liquid Crystal Flows.* Discrete and Continuous Dynamical Systems, 23-No.1&2, 455-475 (2009).