

# PLANIFICACIÓN MULTINIVEL CON LIMITACIONES DE CAPACIDAD

S. LOZANO, J. LARRAÑETA, L. ONIEVA

Escuela Superior de Ingenieros Industriales de Sevilla

*Este trabajo estudia el problema de la planificación de la producción en sistemas de fabricación multinivel, con un cuello de botella. El problema se ha abordado mediante una aproximación heurística, resolviendo el problema resultante empleando el método primal dual. El trabajo incluye un algoritmo para la selección sucesiva de los precios de los recursos que garanticen una mejora monótona hacia la solución óptima.*

**Primal dual approach to the multilevel capacitated lot-sizing problem.**

**Keywords:** Multilevel production planning, concave cost, primal-dual, setup times, Lagrangean relaxation.

## 1. INTRODUCCIÓN

El problema estudiado es el de la planificación de las órdenes de producción en un sistema de fabricación multinivel de tipo general (se permite la existencia de componentes comunes a diferentes items) considerando limitaciones de capacidad en uno de los centros de trabajo. Este problema se presenta con gran frecuencia en la práctica.

---

-Article rebut el desembre de 1990.

Normalmente es sólo uno de los centros de trabajo (a veces un par de ellos) el que constituye tal cuello de botella. Su existencia puede deberse al elevado precio de ciertos equipos –que impide ampliar la capacidad de los mismos–, o a la ejecución de determinadas operaciones –secado, por ejemplo– en instalaciones cuya capacidad es limitada. Los cuellos de botella mencionados tienen una gran influencia en la planificación, ejecución y control de las operaciones del taller. Para reducir los tiempos muertos en dichos equipos críticos se fabrican series largas, lo que da lugar a un aumento de los inventarios intermedios y de los plazos de fabricación. Las perniciosas consecuencias de estos hechos han sido extensamente estudiadas en la literatura.

En este trabajo se ha reducido el número de programas admisibles de producción a los que satisfacen ciertas características naturales. El modelo resultante es una aproximación que se analiza mediante el método primal dual. Sin embargo, existen muy pocos métodos para resolver el problema. En Onieva *et al.* [11] y Lozano [8] se desarrolla un planteamiento análogo al de este trabajo para el caso más simple de un solo nivel.

El problema de selección de lotes de fabricación en estructuras multinivel con limitaciones de capacidad es NP-completo. En Billington *et al.* [2] se presenta un modelo general que incluye los tiempos de preparación y las relaciones multinivel, pero no se propone un método de resolución. Es uno de los pocos trabajos publicados que contemplan el problema general, pues la mayoría abordan estructuras especiales. Así, en Zahorik *et al.* [13] se estudian estructuras paralelas, cada una de ellas en serie. Gabbay [5] presentó un eficiente algoritmo de un solo paso, pero asumiendo procesado uniforme, ésto es, cada producto consume la misma cantidad relativa de los recursos en los que hay limitación de capacidad. Esta hipótesis no refleja la realidad en la mayoría de los casos.

Billington [1] estudia el problema que se analiza en este trabajo, denominado el problema del “cuello de botella”. Propone un algoritmo de exploración dirigida cuyas acotaciones son aproximadas mediante la solución de una secuencia de relajaciones de producto a producto y la actualización de los multiplicadores del dual.

Finalmente, merece citarse el método OPT de Goldratt [6] debido a su amplia difusión. Su principal característica es el énfasis en los cuellos de botella, que se identifican a partir de un plan maestro de producción previo. Se utiliza un algoritmo, no publicado, para programar los cuellos de botella y el resto de la planta se programa mediante un método tipo MRP, respondiendo a las necesidades señaladas por la programación de los cuellos de botella.

## 2. TERMINOLOGÍA, NOTACIÓN Y MODELO

La notación empleada es la siguiente:

$N$  el número de artículos en la planificación.

$i, k$  índices correspondientes a cada artículo ( $i, k = 1, 2, \dots, N$ ).

$L$  el número de períodos en el horizonte de planificación.

$t', t$  índices correspondientes a cada período ( $t', t = 1, 2, \dots, L$ ).

$X_{it}$  unidades producidas del artículo  $i$  en el período  $t$ .

$Y_{it}$  indicador de producción del artículo  $i$  en el período  $t$ .

$d_{it}$  demanda externa a la que está sometido el producto  $i$  en el período  $t$ .

$r_{ij}$  número de unidades del producto  $i$  que forman parte del producto  $j$ .

$S_i$  coste fijo en el que se incurre al iniciar un lote de fabricación del producto  $i$ .

$h_i$  coste de mantenimiento del stock (de sistema) por unidad del producto  $i$ .

$K_t$  capacidad disponible (en horas) en el período  $t$ .

$a_i$  consumo fijo de capacidad (en horas) debido al inicio de una serie de fabricación del producto  $i$ .

$b_i$  consumo variable de capacidad (en horas) por cada unidad fabricada del producto  $i$ .

$S(i)$  conjunto de productos sucesores inmediatos del  $i$  en el árbol de fabricación. Indica de qué productos forma parte  $i$  como componente en el nivel inmediatamente superior.

$P(i)$  conjunto de productos predecesores inmediatos del  $i$  en el árbol de fabricación. Indica qué productos forman parte de  $i$  como componentes en el nivel inmediatamente inferior.

En Billington [1] se muestra que el problema conocido como el del “cuello de botella” para obtener un programa óptimo de fabricación (que minimice los costes de producción e inventarios) puede modelarse como:

$$\begin{aligned}
(1) \quad & \text{Min} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^L [S_i Y_{it} + h_i (L - t + 1) X_{it}] \\
(2) \quad & \text{s.a.} \sum_{t'=1}^t \left( X_{it'} - \sum_{k \in S(i)} r_{ik} X_{kt'} \right) \geq \sum_{t'=1}^t d_{it'}; \quad \forall i \\
(3) \quad & \sum_{i=1}^N (a_i Y_{it} + b_i X_{it}) \leq K_t; \quad \forall t \\
(4) \quad & X_{it} \leq M Y_{it}; \quad \forall i, \forall t \\
(5) \quad & X_{it} \geq 0, Y_{it} = 0, 1; \quad \forall i, t
\end{aligned}$$

La función objetivo (1) minimiza la suma de los costes fijos de producción y los de mantenimiento del inventario en todo el horizonte. Las restricciones (2) garantizan que las necesidades brutas de cada producto se satisfacen en cada período, ya sea por fabricación inmediata o a través del stock. Las restricciones (3) obligan a que no se sobrepase la capacidad del cuello de botella. Finalmente (4) y (5) imponen relaciones de coherencia entre los indicadores  $Y_{it}$  y las producciones  $X_{it}$  para cada producto en cada periodo, siendo  $M$  un número suficientemente grande.

El gran número de variables enteras,  $N * L$ , imposibilita la resolución directa del modelo. Por ello, sólo se consideran los programas de fabricación compuestos por secuencias dominantes. Éstas se definen como las que satisfacen la propiedad, para cada artículo  $i$  y período  $t$ ,

$$(6) \quad X_{it} \sum_{t'=1}^{t-1} (X_{it'} - D_{it'}) = 0$$

donde

$$(7) \quad D_{it} = d_{it} + \sum_{j \in S(i)} r_{ij} D_{jt}$$

es la demanda total del producto  $i$  en el período  $t$ . Así pues, las secuencias dominantes son aquellas en las que sólo se produce en los períodos que se inician con stock nulo. Dado que existen  $L$  períodos, el número de secuencias dominantes para cada artículo es  $F = 2^{L-1}$ . Cada secuencia  $X_{ij} = (X_{ij1}, X_{ij2}, \dots, X_{ijL}) =$

$(X_{ijt})$  define un programa completo de producción para un artículo. Reescribiendo el modelo anterior con estos elementos resulta:

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad & \text{Min} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^F C_{ij} \theta_{ij} \\
 \text{s.a.} \quad & \sum_{j=1}^F \theta_{ij} \sum_{t'=1}^t X_{ijt'} - \sum_{k \in S(i)} \sum_{t'=1}^t \theta_{kl} \sum_{t'=1}^t X_{klt'} \geq \sum_{t'=1}^t d_{it'}; \quad \forall i, t \\
 & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^F m_{ijt} \theta_{ij} \leq K_t; \quad \forall t \\
 & \sum_{j=1}^F \theta_{ij} = 1; \quad \forall i
 \end{aligned}$$

Las nuevas variables indicadores son  $\theta_{ij}$ , que toman el valor 1 si se escoge la secuencia  $j$  para la producción del artículo  $i$  y 0 en caso contrario. Además,

$$(8) \quad C_{ij} = \sum_{t=1}^L [S_i \delta(X_{ijt}) + h_i (L - t + 1) X_{ijt}]$$

es el coste, en todo el horizonte, asociado a emplear la secuencia  $j$  para la producción del artículo  $i$ . Y,

$$(9) \quad m_{ijt} = a_i \delta(X_{ijt}) + b_i X_{ijt}$$

es el consumo de capacidad en el período  $t$  de la secuencia  $j$  para el artículo  $i$ .

La relajación continua del modelo anterior, con  $\theta_{ij} \geq 0$ , se analiza como la aproximación heurística a la solución del problema del cuello de botella. Es el problema primal (P) al que se le aplica para su análisis el método primal dual.

### 3. MODELOS PRIMAL DUAL

A partir de la relajación del modelo anterior, llamando  $\lambda_t$ ,  $t = 1, 2, \dots, L$  a las variables asociadas a las restricciones de capacidad en el cuello de botella, y  $\pi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  a las correspondientes a la imposición de que las variables del primal sumen la unidad para cada artículo y  $\gamma_{it}$  a las que corresponden a la relación multinivel de la estructura de fabricación, resulta el problema:

$$(D) \quad \begin{aligned} & \text{Max} \sum_{i=1}^N \pi_i - \sum_{t=1}^L K_t \lambda_t + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^L \gamma_{it} \sum_{t'=1}^t d_{it'} \\ & \text{s.a.} \pi_i - \sum_{t=1}^L m_{ijt} \lambda_t + \sum_{t=1}^L \left( \gamma_{it} - \sum_{k \in P(i)} r_{ki} \gamma_{kt} \right) \sum_{t'=1}^t X_{ijt'} \leq C_{ij}; \quad \forall i, j \\ & \lambda_t \geq 0, \gamma_{it} \geq 0; \quad \forall i, t \end{aligned}$$

Nótese que tanto en el problema primal (P) como en el dual (D) el término  $X_{ijt}$  no se refiere a una variable, sino a la cantidad a fabricar asignada en la secuencia  $j$  del producto  $i$  al período  $t$ . Es decir, las variables que regulan la producción son las  $\theta_{ij}$  y no las  $X_{ijt}$ .

Una solución admisible del problema dual,  $(\pi, \lambda, \gamma)$  permite definir los conjuntos de índices:

$$\begin{aligned} \Lambda^+(\lambda) &= \{t : \lambda_t > 0\} \\ \Gamma_i^+(\gamma) &= \{t : \gamma_{it} > 0\} \\ \Omega_i(\lambda, \gamma) &= \left\{ j : \pi_i = C_{ij} + \sum_{t=1}^L m_{ijt} \lambda_t + \sum_{t=1}^L \left( \gamma_{it} - \sum_{k \in P(i)} r_{ki} \gamma_{kt} \right) \sum_{t'=1}^t X_{ijt'} \right\} \end{aligned}$$

A partir de estos índices se define el primal reducido,

$$(PR) \quad \begin{aligned} & \text{Min} \sum_{t=1}^L W_t + \sum_{t \in \Lambda^+} Z_t + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^L U_{it} + \sum_{i=1}^N \sum_{t \in \Gamma_i^+} V_{it} \\ & \text{s.a.} \sum_{j \in \Omega_i} \theta_{ij} \sum_{t'=1}^t X_{ijt'} - \sum_{k \in S(i)} \sum_{i \in \Omega_k} \theta_{ki} r_{ik} \sum_{t'=1}^t X_{klt'} + U_{it} - V_{it} = \sum_{t'=1}^t d_{it'}; \quad \forall i, t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N \sum_{j \in \Omega_i} m_{ij} \theta_{ij} + Z_t - W_t = K_t; \quad \forall t \\
& \sum_{j \in \Omega_i} \theta_{ij} = 1; \quad \forall i \\
& \theta_{ij}, W_t, Z_t, U_{it}, V_{it} \geq 0; \quad \forall i, j, t
\end{aligned}$$

La estructura del primal reducido es análoga a la del primal, pero interviniendo un menor número de variables. Además, relaja las restricciones sobre el uso de la capacidad y el cumplimiento de las relaciones multinivel. Como es bien conocido (Larrañeta [7]) si la función objetivo del primal reducido se anula, se ha alcanzado la solución óptima del problema primal. Si no es así, se modifican los precios  $(\pi, \lambda, \gamma)$  en base a la solución óptima del dual reducido (DR). Éste es:

$$\begin{aligned}
\text{(DR)} \quad & \text{Max} \sum_{i=1}^N \alpha_i - \sum_{t=1}^L K_t \beta_t + \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^L \rho_{it} \sum_{t'=1}^t d_{it'} \\
& \text{s.a.} \alpha_i \leq \sum_{t=1}^L m_{ijt} \beta_t - \sum_{t=1}^L \left( \rho_{it} - \sum_{k \in P(i)} r_{ki} \rho_{kt} \right) \sum_{t'=1}^t X_{ijt'}; \quad \forall i, j \\
& -1 \leq \beta_t \leq 1; \quad t \in \Lambda^+ \\
& 0 \leq \beta_t \leq 1; \quad t \notin \Lambda^+ \\
& -1 \leq \rho_{it} \leq 1; \quad t \in \Gamma_i^+ \\
& 0 \leq \rho_{it} \leq 1; \quad t \notin \Gamma_i^+
\end{aligned}$$

Las condiciones de complementariedad entre el primal y el dual reducidos (PR y DR) tienen una interpretación económica intuitiva:

- a) Las variables  $W_t$  y  $Z_t$  del primal reducido y  $\beta_t$  del dual reducido indican que para aquellos períodos en los que se sobrepasa la capacidad disponible deben incrementarse los precios internos del dual. En caso contrario deben disminuirse, salvo que ya sean cero (ya que no pueden ser negativos).
- b) Las variables  $U_{it}$  y  $V_{it}$  del primal reducido y  $\rho_{it}$  del dual reducido indican que los precios internos del dual deben incrementarse en aquellos períodos en los que hay inventario. Y disminuirse cuando hay retrasos en la fabricación.

De esta forma, la actualización de la solución admisible para el dual

$$(\pi, \lambda, \gamma)^{\text{nueva}} = (\pi, \lambda, \gamma)^{\text{antigua}} + \epsilon (\alpha^*, \beta^*, \rho^*)$$

garantiza la convergencia hacia el óptimo, eligiendo el mayor tamaño del paso  $\epsilon$  que mantenga la admisibilidad en el dual (D) (Fisher *et al.* [4]).

#### 4. ALGORITMO PRIMAL DUAL

La figura 1 muestra el diagrama de bloques del algoritmo primal dual.

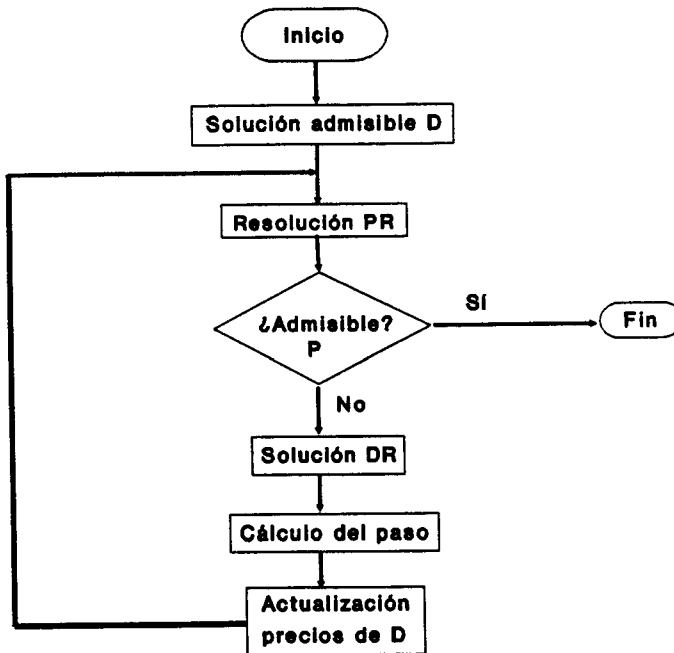


Figura 1. Diagrama de bloques del algoritmo primal dual.



#### 4.1 Soluciones admisibles para el problema dual (D)

Se inicializan los valores de los precios internos  $\lambda_t$  y  $\gamma_{it}$  asociados a las limitaciones de capacidad y al stock respectivamente. Se resuelve para  $\pi_i$  :

$$\pi_i = \min_j \left\{ C_{ij} + \sum_{t=1}^L m_{ijt} \lambda_t - \sum_{t=1}^L \left( \gamma_{it} - \sum_{k \in P(i)} r_{ki} \gamma_{kt} \right) \sum_{t'=1}^t X_{ijt'} \right\}$$

Esto es,

$$\pi_i = \min_j \sum_{t=1}^L \left\{ (S_i + a_i \lambda_t) \delta(X_{ijt}) + b_i \lambda_t X_{ijt} - \left( \gamma_{it} - \sum_{k \in P(i)} r_{ki} \gamma_{kt} \right) \cdot \sum_{t'=1}^t X_{ijt'} + h_i (L - t + 1) X_{ijt} \right\}$$

satisfaciéndose para las secuencias consideradas:

$$\sum_{t'=1}^t X_{ijt'} \geq \sum_{t'=1}^t D_{it'}$$

Una vez fijados los precios de los recursos  $\lambda_t$  y  $\gamma_{it}$  se seleccionan, independientemente para cada artículo, programas de producción sin limitaciones de recursos. La aplicación del método de programación dinámica de Wagner-Whitin [12], en una implementación tal como la propuesta por Evans [3], es suficiente. Son necesarias todas las soluciones óptimas alternativas para la formulación del primal reducido.

#### 4.2 Soluciones del problema reducido (PR)

El número de restricciones multinivel del problema (PR) es  $N * L$ , sin reducción con respecto al problema primal (P). Para su resolución se emplea el método simplex. En las sucesivas iteraciones del algoritmo primal dual, se aprovecha el óptimo de la iteración anterior como solución inicial para la siguiente (Fisher *et al.* [4]).

#### 4.3 Solución del problema dual reducido (DR)

La solución del problema (PR) proporciona, de forma inmediata, la del problema (DR) a través de las condiciones de complementariedad. Esta fase del

algoritmo se alcanza cuando la función objetivo en el óptimo de (PR) es positiva. Si fuese nula, se habría obtenido la solución óptima del problema (P) original, ya que la función objetivo de (PR) es la inadmisibilidad del plan de producción de esa iteración.

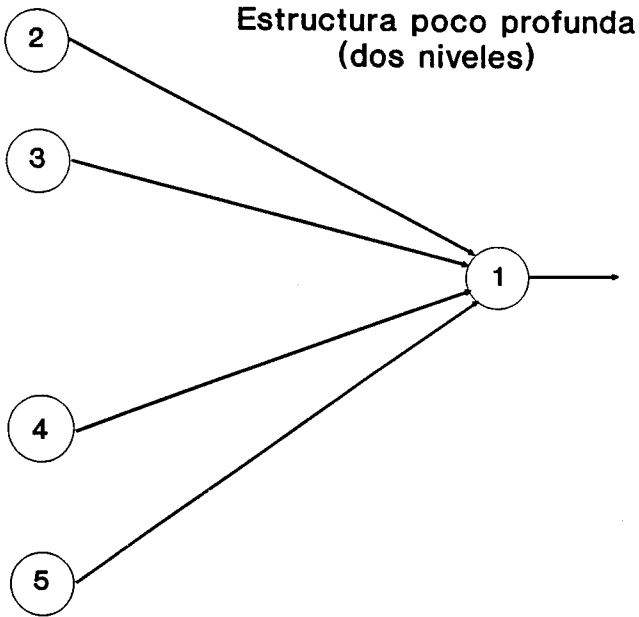
#### **4.4 Generación de nuevas soluciones admisibles del dual (D). Tamaño del paso**

En los métodos de máximo ascenso conviene que el tamaño del paso sea el mayor posible que mantenga la admisibilidad (ningún precio interno  $\lambda_i$  o  $\gamma_{it}$ , se haga negativo). En el método primal dual, el tamaño del paso está también limitado por el hecho de que al variar los precios se modifiquen las secuencias dominantes activas (los conjuntos  $\Omega_i(\lambda, \gamma)$ ). En este caso la dirección de máximo descenso varía, lo que implica una nueva iteración. Por tanto, ha de escogerse el menor de los valores  $\epsilon$  para el cual un precio interno positivo se anule o una secuencia dominante inactiva pase a ser activa (lo que ocurra antes).

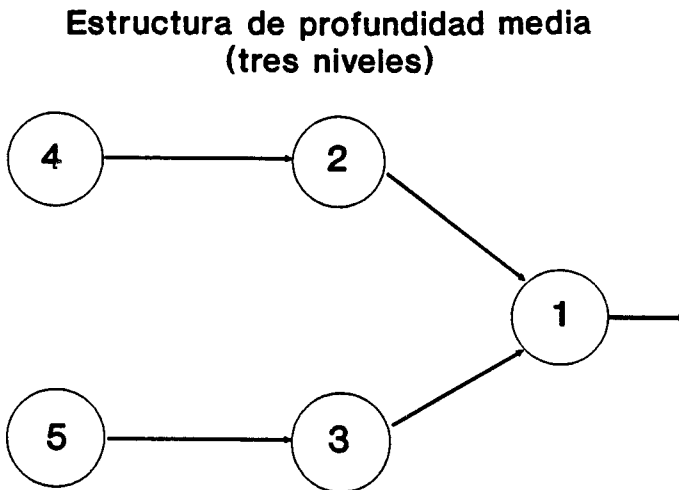
La solución del dual se actualiza con este paso  $\epsilon$ . El incremento en la función objetivo del problema (D) es igual al tamaño del paso multiplicado por el valor óptimo de la función objetivo del problema (PR), es decir, el tamaño del paso multiplicado por el grado de inadmisibilidad de la última solución disponible.

## **5. EXPERIENCIAS COMPUTACIONALES**

Las experiencias computacionales realizadas con el método primal dual son de dos tipos. En primer lugar, y a efectos de comparación, se han resuelto 135 problemas de 5 artículos y 12 períodos correspondientes a estructuras multinivel pero sin restricciones de capacidad. Los datos exactos de dichos problemas pueden consultarse en Billington [1]. Se consideran tres tipos de estructuras: de dos, tres y cinco niveles (véanse las figuras 2.1, 2.2 y 2.3). El coeficiente de variación de la demanda puede ser pequeño ( $C_v < 0,15$ ), medio ( $0,15 < C_v < 0,3$ ) o alto ( $C_v > 0,3$ ).



**Figura 2.1** Problema sin limitaciones de capacidad.



**Figura 2.2** Problema sin limitaciones de capacidad.

## Estructura profunda (cinco niveles)

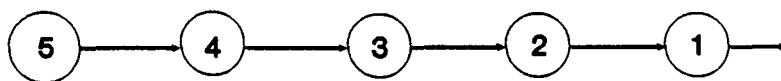


Figura 2.3 Problema sin limitaciones de capacidad.

Estos problemas han sido resueltos mediante el algoritmo primal dual y también mediante la heurística MWW (Modified Wagner Whitin) propuesta por McLaren [10]. En la tabla I se presentan los resultados para dichos problemas respecto a dos ratios:

- a)  $MWW/LB$  es el cociente entre el coste de la solución MWW y el óptimo lagrangiano proporcionado por el método primal dual.
- b)  $LB/LBO$  es el cociente entre el óptimo lagrangiano y la solución relajada del problema sin considerar restricciones multinivel.

Se observa que, obviamente, la cota inferior proporcionada por el método primal dual es mayor que la solución relajada y menor que cualquier solución admisible (en particular que la MWW). Nótese que el objetivo de este primer grupo de problemas es comprobar el comportamiento del primal dual frente a las restricciones multinivel. Lo que se deduce de los resultados es que:

- 1) Cuanto más profunda es la estructura de fabricación, tanto mayor es la estimación del “gap” entre la solución óptima y el óptimo lagrangiano; y también la diferencia entre el óptimo lagrangiano y la solución relajada.

- 2) La influencia del coeficiente de variación de la demanda  $C_v$  sobre la estimación del gap no es significativa, mientras que sí influye sobre LB/LBO. Puesto que el gap real y LB/LBO están relacionados, puede inferirse un peor comportamiento de la heurística MWW para  $C_v$  altos.

Tabla I  
Método primal dual *versus* MWW (costes)

		Número de niveles			Total
		Dos	Tres	Cinco	
$C_v$ Bajo	MWW/LB	1.011	1.018	1.054	1.027
	LB/LBO	1.032	1.063	1.069	1.055
	Nº Prob	15	15	15	45
$C_v$ Medio	MWW/LB	1.018	1.021	1.038	1.026
	LB/LBO	1.034	1.058	1.065	1.052
	Nº Prob	10	10	10	30
$C_v$ Alto	MWW/LB	1.010	1.022	1.052	1.028
	LB/LBO	1.026	1.051	1.057	1.045
	Nº Prob	20	20	20	60
Total	MWW/LB	1.012	1.020	1.050	1.027
	LB/LBO	1.030	1.057	1.063	1.050
	Nº Prob	45	45	45	135

En la tabla II están reflejados, para estos mismos problemas, los tiempos de ejecución (en segundos de CPU de un IBM PC XT) de los dos algoritmos así como el número de iteraciones del primal dual. Se observa que:

- 1) La heurística MWW tiene un tiempo de ejecución constante ya que su complejidad sólo depende del número de items y del número de períodos.
- 2) El algoritmo primal dual requiere más iteraciones y más tiempo de ejecución cuanto más profunda es la estructura y menor el coeficiente de variación de la demanda final.

Tabla II  
Método primal dual *versus* MWW (tiempos de CPU)

		Número de niveles			Total
		Dos	Tres	Cinco	
$C_v$ Bajo	cpu-MWW	0.12	0.13	0.11	0.12
	cpu-PD	47.50	71.40	64.40	61.10
	Nº Iter	24	35	32	30
$C_v$ Medio	cpu-MWW	0.11	0.12	0.10	0.11
	cpu-PD	44.50	47.50	60.00	50.70
	Nº Iter	21	23	29	24
$C_v$ Alto	cpu-MWW	0.12	0.11	0.12	0.11
	cpu-PD	20.90	32.00	32.10	28.30
	Nº Iter	13	18	19	16
Total	cpu-MWW	0.12	0.12	0.11	0.11
	cpu-PD	35.00	48.50	49.00	44.20
	Nº Iter	18	25	25	23

Tiempos de CPU en segundos de IBM PC (8088)

De los resultados obtenidos puede decirse que la dificultad del problema, al menos desde el punto de vista primal dual, aumenta con el número de niveles de la estructura de fabricación y con la uniformidad de la demanda.

La segunda parte de las experiencias computacionales corresponde a la resolución de 162 problemas multinivel con limitaciones de capacidad generados con los siguientes parámetros de diseño:

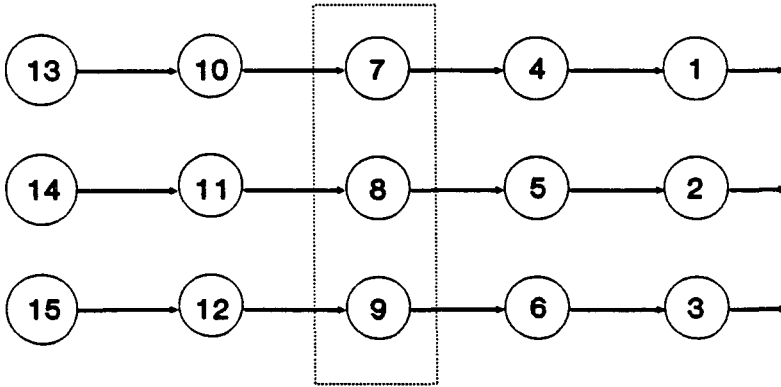
EI: Número de ítems finales. Se han considerado tres y cinco ítems finales.

$C_v$ : Coeficiente de variación de la demanda. Bajo, medio y alto, como en el caso anterior.

CU: Nivel de utilización de la capacidad. Del 50, 75 y 95 por ciento.

WC: Profundidad a la que se encuentra el cuello de botella en la estructura de fabricación. Puede ser: en los ítems finales, en los intermedios o en las materias primas (véanse las figuras 3.1 y 3.2)

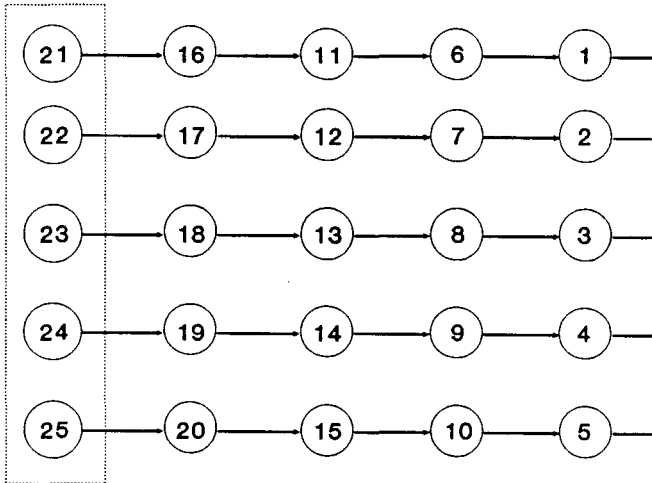
**Tres artículos finales  
(cuello de botella intermedio)**



**Cuello de botella**

Figura 3.1 Problema con limitaciones de capacidad.

**Cinco artículos finales  
(cuello de botella en materias primas)**



**Cuello de botella**

Figura 3.2 Problema con limitaciones de capacidad.

Nótese que el nivel de utilización de CU hace referencia a los consumos de capacidad que son proporcionales a los lotes a fabricar. El nivel de utilización real es mayor debido a la existencia de tiempos de puesta a punto al inicio de las series.

Los datos concretos utilizados para estos problemas pueden consultarse en Billington [1]. Los problemas han sido resueltos mediante el método primal dual, comparando los resultados con los obtenidos por la heurística LR de Billington [1]. En las tablas III y IV se presentan los resultados respecto a los siguientes ratios:

- a) LR/LBPD es el cociente entre la solución de la heurística LR y la mejor cota inferior proporcionada por el primal dual.
- b) LBPD/LBLR es el cociente entre la mejor cota inferior suministrada por el primal dual y la solución óptima del correspondiente problema multinivel sin limitaciones de capacidad.
- c) LBLR/LBO es el cociente entre la solución óptima del problema multinivel sin limitaciones de capacidad y el problema relajado sin ni siquiera restricciones multinivel.

Tabla III  
Método primal dual *versus* LR  
tres items finales

		Cuello Botella Nivel 5			Cuello Botella Nivel 3			Cuello Botella Nivel 1		
		CU			CU			CU		
		Bajo	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto
$C_v$	LR/LBPD	1.065	1.206	1.593	1.053	1.183	1.407	1.036	1.064	1.144
Bajo	LBPD/LBLR	1.052	1.066	1.060	1.035	1.069	1.045	1.023	1.037	1.056
	LBLR/LBO	1.047	1.047	1.047	1.047	1.047	1.047	1.047	1.047	1.047
$C_v$	LR/LBPD	1.133	1.138	—	1.079	1.272	—	1.047	1.154	—
Medio	LBPD/LBLR	1.078	1.129	1.311	1.053	1.094	1.177	1.029	1.045	1.166
	LBLR/LBO	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045	1.045
$C_v$	LR/LBPD	1.048	1.228	1.404	1.037	1.139	1.454	1.039	1.165	1.216
Alto	LBPD/LBLR	1.027	1.041	1.093	1.028	1.044	1.051	1.023	1.026	1.053
	LBLR/LBO	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039	1.039

Cada entrada corresponde a la media de tres problemas



Tabla IV  
Método primal dual *versus* LR  
cinco items finales

		Cuello Botella Nivel 5			Cuello Botella Nivel 3			Cuello Botella Nivel 1		
		CU			CU			CU		
		Bajo	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto	Bajo	Medio	Alto
$C_v$	LR/LBPD	1.241	1.418	2.050	1.079	1.504	1.724	1.075	1.377	1.279
Bajo	LBPD/LBLR	1.044	1.065	1.031	1.027	1.029	1.011	1.008	1.004	1.010
	LBLR/LBO	1.109	1.109	1.109	1.109	1.109	1.109	1.109	1.109	1.109
$C_v$	LR/LBPD	1.095	1.404	—	1.067	1.483	—	1.050	1.380	—
Medio	LBPD/LBLR	1.034	1.058	1.124	1.021	1.039	1.020	1.006	1.017	1.109
	LBLR/LBO	1.112	1.112	1.112	1.112	1.112	1.112	1.112	1.112	1.112
$C_v$	LR/LBPD	1.130	1.159	1.253	1.107	1.163	1.546	1.059	1.146	1.242
Alto	LBPD/LBLR	0.984	1.029	1.077	0.988	1.017	1.074	0.976	0.988	1.035
	LBLR/LBO	1.132	1.132	1.132	1.132	1.132	1.132	1.132	1.132	1.132

Cada entrada corresponde a la media de tres problemas

Se observa que:

- 1) Cuando el nivel de ocupación de la capacidad es alto y el coeficiente de variación es medio, el algoritmo LR no tiene solución. Esto no es sorprendente, ya que debido a la existencia de tiempos de puesta a punto es muy probable que dichos problemas no tengan solución admisible.
- 2) LBPD es consistentemente mejor que LBLR, especialmente cuando el nivel de utilización de la capacidad es alto y el cuello de botella está aguas arriba en la estructura de fabricación. Esto es razonable puesto que LBLR no tiene en cuenta las restricciones de capacidad, siendo en dichos problemas donde el efecto de las limitaciones de capacidad sobre el conjunto del sistema es mayor.
- 3) LBPD/LBLR disminuye al aumentar el número de items finales, lo cual se debe a que cuanto mayor es el número de éstos menor es la influencia de las restricciones de capacidad y más apropiado es obviarlas como hace LBLR.
- 4) LR/LBPD, que es una estimación del gap existente entre la solución óptima del problema y el óptimo lagrangiano, aumenta con el nivel de utilización de la capacidad, con lo aguas arriba que esté el cuello de botella y con la uniformidad de la demanda.

- 5) LBLR/LBO es insensible al nivel de utilización de la capacidad y a la posición del cuello de botella (lo cual resulta lógico, ya que tanto LBLR como LB no tienen en cuenta las limitaciones de capacidad) y aumenta con el número de ítems finales (debido a que en ese caso es menos apropiado despreciar las restricciones multinivel como hace LBO).

No se presentan los tiempos de ejecución correspondientes a estos problemas ya que no se disponía de los del algoritmo LR. Por lo que respecta al método primal dual, éstos y el número de iteraciones son máximos cuando la capacidad está muy ajustada, el cuello de botella está aguas arriba y la demanda es uniforme.

## 6. CONCLUSIONES

Se ha presentado una forma de resolución del problema de planificación multinivel con limitaciones de capacidad la cual se basa en la relajación lagrangiana de las restricciones del problema (tanto multinivel como de capacidad). El algoritmo de optimización que se propone es el método primal dual.

Las experiencias computacionales realizadas confirman la viabilidad del enfoque utilizado, el cual permite obtener cotas inferiores mejores que las propuestas por otros métodos alternativos. También han permitido identificar cuáles son los parámetros que confieren mayor dificultad al problema: la saturación del cuello de botella, la amplificación de su efecto a través de la estructura de fabricación y la uniformidad de la demanda de los productos finales.

Finalmente, y como continuación a este trabajo de investigación, al método presentado se le puede añadir una heurística primal que permita obtener una solución admisible lo suficientemente buena en cada iteración.

## 7. AGRADECIMIENTOS

Se agradece al profesor P. Billington la gentileza de suministrar los resultados de su algoritmo.

Los autores también agradecen a Arthur Andersen & Cía la ayuda financiera que permitió la realización de este trabajo de investigación.

## 8. REFERENCIAS

- [1] **Billington, P.** (1983). "Multilevel Lot Sizing with a Bottleneck Work Center". Ph. D. Dissertation. Cornell University.
- [2] **Billington, P., McLain, J. y Thomas, L.** (1983). "Mathematical Programming Approaches to Capacity-Constrained MRP Systems: Review, Formulation and Problem Reduction". *Management Science*, Vol. 29, 1126-1141.
- [3] **Evans, J.** (1985). "An Efficient Implementation of the Wagner-Whitin Algorithm form Dynamic Lot Sizing". *J. of Operations Management*, Vol. 5, 229-233.
- [4] **Fisher, M., Northup, W. y Shapiro, J.** (1975). "Using Duality to Solve Discrete Optimization Problems: Theory and Computational Experience". *Mathematical Programming Studies*, n° 3, 56-94.
- [5] **Gabbay, H.** (1979). "Multistage Production Planning". *Management Science*, Vol. 25, 1138-1148.
- [6] **Goldratt, E.** (1980). "Optimized Production Timetable: A Revolutionary Programm for Industry". APICS Conference Proceedings, 172-176.
- [7] **Larrañeta, J.** (1987). Programación Lineal y Grafos. Publicaciones Universidad de Sevilla.
- [8] **Lozano, S.** (1987). "Planificación de la Producción de Costes Fijos. Soluciones Heurísticas de Tipo Primal-Dual". Tesis Doctoral. Universidad de Sevilla.
- [9] **Lozano, S.** (1988). "Multilevel Lot Sizing with One Bottleneck Work Center". Unpublished Master Tesis, Katholieke Universiteit Leuven.
- [10] **McLaren, B.** (1975). "A Study of Multiple Level Lot Sizing Procedures for Material Requirements Planning". Ph. D. Dissertation, Purdue University.
- [11] **Onieva, L., Lozano, S. y Larrañeta, J.** (1987). "Método Primal Dual para Modelos de Planificación con Costes Cóncavos y Limitaciones de Capacidad". *Qüestió*, Vol. 11, n° 2, 117-133.
- [12] **Wagner, H. y Whitin, T.** (1958). "A Dynamic Version of the Economic Lot Size Model". *Management Science*, Vol. 5, 89-96.
- [13] **Zahorik, A., Thomas, L. y Trigueiro, W.** (1984). "Network Programming Models for Production.Scheduling in Multistage, Multi item Capacitated System". *Management Science*, Vol. 30, 308-325.

