ESTADÍSTICA ESPAÑOLA
Núms. 112-113, 1986, págs. 21 a 29

Oportunidad de la política de rectificación en producción continua

por MIGUEL GUTIERREZ,
SEBASTIAN LOZANO,
LUIS ONIEVA
Escuela Superior de Ingenieros Industriales
Universidad de Sevilla

RESUMEN

El presente trabajo analiza las políticas posibles para tratar los defectos no críticos presentes en lotes de producción continua como modelo lineal de costes en función de la tasa de rectificación de errores. Se adjunta el resultado de una aplicación en el supuesto de que la calidad del lote se distribuya según la ley gamma-Poisson.

Palabras clave: Control estadístico de calidad, Ingeniería de producción.

1. INTRODUCCION

La estimación de la calidad de un producto cuando un fabricante entrega un conjunto de lotes a un consumidor es uno de los problemas de decisión que con más frecuencia se presentan en la industria.

Cuando el producto final de un proceso industrial tiene lugar en forma continua (como ocurre, por ejemplo en la fabricación de textiles, alambres o linoleum) es difícil definir la «unidad de producción». En tales casos parece más natural contar el número de defectos por «unidad de producción continua» (longitud, área, volumen, peso, tiempo, etc...). La calidad del lote en estos casos se suele medir mediante el número de defectos por unidad. Lo mismo puede decirse de los equipos industriales complejos, compuestos por un gran número de componentes, tales como aparatos de radio y televisión, refrigeradores, etc...

El modelo de Poisson se utiliza frecuentemente cuando se considera el número de defectos por unidad de fabricación.

Nuestro interés se centra en el problema de controlar el *número de defectos* por «unidad de fabricación». Supongamos que tenemos un lote constituido por N unidades y que la unidad i tiene x_i defectos, $x_i=0, 1, ...;$ $i=1, 2, ..., N$. Al tomar una muestra aleatoria de n unidades podemos preguntarnos cuál es la probabilidad de que el número total de defectos presentes en la muestra no exceda a una cantidad predeterminada c. Restringiremos nuestra atención al caso en que una serie de lotes procedentes de un proceso industrial en el que el número de defectos por cada unidad de fabricación es una variable aleatoria que se distribuye según una ley Poisson con parámetro λ (es decir, la media del número de defectos por unidad es λ) y en el que el número de defectos de una unidad determinada es independiente del número de defectos de cualquier otra unidad distinta a la considerada.

2. ANTECEDENTES

El problema preliminar de la determinación del tamaño muestral y del número de aceptación en los planes de muestreo bayesianos ha sido abordado básicamente desde tres aproximaciones diferentes. En primer lugar cabe citar [8] la construcción de árboles de decisión bayesianos con lo que se pretende determinar una solución óptima exacta mediante la enumeración exhaustiva de todas las soluciones posibles, lo cual tiene evidentemente el inconveniente de la laboriosidad del cálculo necesario ya que se requiere evaluar todas las ramas del árbol decisional. En segundo lugar, se han utilizado [1], [2], [3], [8], [12] y [10] métodos analíticos cuando la distribución de la fracción defectuosa del lote es suceptible de ser aproximada bien mediante una función de probabilidad o bien mediante una función de densidad tal como la beta. Aunque este procedimiento reduce la labor de cálculo, tal como ha demostrado Smith [11] este procedimiento puede conducir a soluciones no-óptimas como consecuencia de las aproximaciones empleadas. La tercera de las aproximaciones mencionadas utiliza técnicas de localización directa también con la finalidad de reducir el cálculo necesario aunque no necesariamente se logra así [9] la convergencia a una solución óptima. En vista de la no optimalidad de las dos últimas aproximaciones mencionadas, algunos autores [5] han propuesto una versión modificada de la primera aproximación consistente en la eliminación de algunas ramas del árbol de decisión bayesiano con anterioridad a la realización de los cálculos.

La solución asintótica del problema ha sido abordada en [7], encontrándose interesantes ejemplos numéricos de una aproximación secuencial en [6]. La consideración de la aversión al riesgo por parte del decisor ha sido estudiada en [4].

La mayoría de los trabajos citados que se han ocupado de planes de muestreo bayesianos lo han hecho en relación con productos propios de una fabricación diferenciada, en la que el principal objetivo consiste en controlar la fracción defectuosa. Por el contrario, nuestro principal interés se centra en la denominada «producción continua».

3. CURVA OC RESPECTO A LA CALIDAD DEL PROCESO

Rechazamos el lote cuando se observen demasiados defectos en la muestra. Más concretamente, si se observa una muestra aleatoria simple de n unidades de fabricación entonces dispondremos de los correspondientes números de defectos $x_1, x_2, \ldots, x_n$. El número total $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$. Parece razonable aceptar el lote si se verifica $y \leqslant c$, rechazándolo en caso contrario.

Puesto que cada X_i sigue una distribución de Poisson con media λ, debido a la propiedad reproductiva de dicha distribución, podemos decir que el número de defectos de una muestra de n de tales unidades es una variable aleatoria y que distribuye según una ley Poisson de media $n\lambda$. Por tanto

$$\Pr[X = x_i/\lambda] = \frac{e^{-\lambda_{\lambda}} x_i}{x_i!}$$

$$\Pr[Y = y/\lambda] = g(y/n) = \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^y}{y!}$$

La probabilidad de aceptación del lote (condicionada por la calidad del proceso, λ) es

$$P(\lambda) = G(c/n\lambda) = \sum_{y=0}^{c} g(y/n\lambda) = \sum_{y=0}^{c} \frac{e^{-n\lambda}(n\lambda)^y}{y}$$

ecuación que representa la curva OC respecto a la calidad del proceso.

Si λ representa el número medio de defectos por unidad, supondremos que λ varía de lote según la ley gamma

$$\pi\ (\lambda)=\frac{e^{-\tau\lambda}(\tau\lambda)^{s-1}\cdot\tau}{\Gamma(s)}$$

$$E(\lambda)=s/t \qquad\qquad \mathrm{Var}(\lambda)=s/\tau^2$$

Por tanto, la calidad de lote (expresada como el número de defectos de sus N unidades) se distribuye según la ley gamma-Poisson (binomial negativa)

$$g(z)=\frac{\Gamma(s+z)}{y!\ (s)}\ \theta^s(1-\theta)^z=\binom{s-1+z}{s-1}^s(1-\theta)^z$$

$$E(\lambda)=s/\tau;\quad \theta=\frac{x}{s+NE(\lambda)}=\frac{s}{s+Ns/\tau}=\frac{\tau}{\tau+N}$$

y por tanto, la función de probabilidad del número de defectos presentes en muestras aleatorias de n unidades de fabricación es:

$$g(y)=\frac{\Gamma(s+y)}{y!(s)}\ \delta^s(1-\delta)^y=\binom{s-1+y}{s-1}\left(\frac{\tau}{\tau+n}\right)^s\left(\frac{n}{\tau+n}\right)^y$$

siendo $\delta=\frac{s}{s+nE(\lambda)}=\frac{s}{s+ns/\tau}=\frac{\tau}{\tau+n}$.

Por tanto la probabilidad media de aceptación del lote es:

$$P=\int_0^\infty G(c/n\lambda)\ \pi(\lambda)d\lambda=\sum_{y=0}^{c}\binom{s-1+y}{s-1}\left(\frac{\tau}{\tau+n}\right)^s\left(\frac{n}{\tau+n}\right)^y$$

4. ANALISIS DE LAS POLITICAS A SEGUIR

Nos planteamos ahora la cuestión de qué hacer con los lotes rechazados, es decir, con aquéllos en los que el número de defectos encontrados de las n unidades de producción de la muestra sea superior al valor c. Y más concretamente, queremos ver cómo influye en la decisión de si rectificar o no los lotes rechazados, la «tasa de rectificación de errores» (TRE) entendiendo por rectificación del lote la inspección al 100 %. Dicha tasa se puede definir como el número de defectos presentes en un lote rectificado (bien por que se hayan pasado sin corregir o bien porque se hayan introducido durante la rectificación) dividido por el número de defectos en el lote antes de la rectificación. La TRE es una medida de la eficiencia del proceso de rectificación. Así, una TRE nula corresponde al caso ideal de rectificación perfecta mientras que si la TRE es la unidad entonces no tiene sentido rectificar los lotes rechazados porque con ello no disminuimos el números de defectos.

Supuestos conocidos los costes de inspección preliminar de una unidad (C_i), el coste de inspeccionar una unidad durante la rectificación (C_r), así como el asociado a la presencia de un defecto en un lote aceptado (C_d) podemos establecer los costes de las posibles políticas suponiendo un modelo lineal de costes.

1.º) Inspección sin ánimo de rectificar

$$C_0(\lambda)=nC_i+\lambda \cdot N \cdot C_d$$

2.º) Inspección con intención de rectificar:

a) Si el lote es aceptado:

$$C_1(\lambda)=n \cdot C_i+\lambda NC_d$$

b) Si el lote es rechazado (y rectificado):

$$C_2(\lambda)=n \ C_i+N \cdot C_r+N\lambda r \cdot C_d$$

donde $r \equiv$TRE.

Como suponemos conocida a priori la distribución del número medio de defectos en cada unidad de fabricación y hemos calculado antes la probabilidad condicionada de aceptación del lote $P(\lambda)$, podemos evaluar los valores incondicionales de estos costes.

Así, tenemos:

1.º) Inspección sin rectificación:

$$C'_0=\int_0^{\infty} C_0(\lambda) \ \pi(\lambda)d\lambda=n \cdot C_i+NC_d \cdot E(\lambda)$$

2.º) Inspección con rectificación (si es necesaria):

$$C'_3=\int_0^{\infty} [C_1(\lambda) \cdot P(\lambda)+C_2(\lambda) \cdot (1-P(\lambda))] \ \pi(\lambda)d\lambda=$$

$$=n \cdot C_i+N \cdot C_d \cdot (1-r)\int_0^{\infty} \lambda P(\lambda) \ \pi(\lambda)d\lambda+N \cdot C_r(1-P)$$
$$+N \cdot C_d \cdot r \cdot E(\lambda)$$

habiendo denominado:

$$E(\lambda)=\int_0^{\infty} \lambda\pi(\lambda)d\lambda \qquad P=\int_0^{\infty} P(\lambda)\ \pi(\lambda)d\lambda$$

El punto de indiferencia de las dos políticas se obtiene al igualar ambos costes medios y nos permite calcular el valor límite del coste C_d^*, asociado a facturar lotes con defectos (pérdida de imagen, etc.). Para valores de $C_d > C_d^*$ es aconsejable la política de rectificación de lotes rechazados mientras que para $C_d < C_d^*$ es preferible la política no rectificativa. Por eso a C_d^* podemos llamarlo coste unitario crítico de aceptación

$$C_d^* = \frac{C_r}{1-r}\ \frac{1-P}{E(\lambda)-\int_0^{\infty} \lambda \cdot P(\lambda)\cdot \pi(\lambda)d\lambda} = \frac{1}{1-r} K\, C_r$$

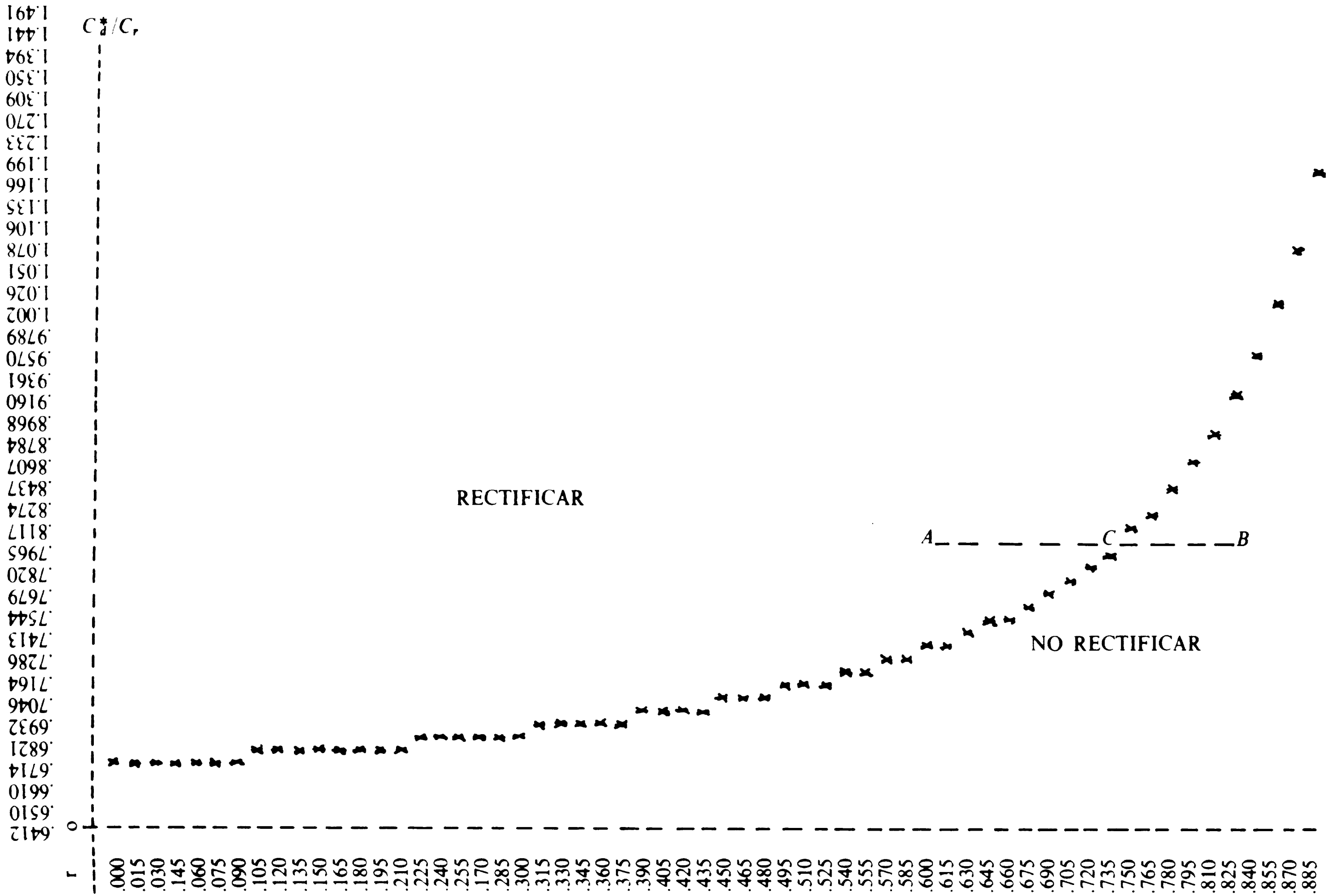
siendo $K = \dfrac{1-P}{E(\lambda)-\int_0^{\infty} \lambda P(\lambda)\ \pi(\lambda)d\lambda}$.

Obsérvese que el coste unitario de indiferencia C_d^* es independiente del tamaño del lote (N) así como del coste unitario de inspección (C_i). En cambio, sí depende de la calidad del proceso (K), de la eficiencia de la rectificación (TRE) y del coste unitario de rectificación (C_r).

5. APLICACION

A continuación se presenta un resultado ilustrativo del programa que calcula y representa C_d^*/C_r en función de la TRE para el caso en que la calidad del lote se distribuya según una ley gamma - Poisson.

La aplicación se refiere al caso particular en que los parámetros de la ley a priori gamma valen $s=3$, $\tau=60$, para un plan en el que $N=100$, $n=25$, $c=5$. Como puede observarse, la figura ilustra lo que ya indicaba la expresión de C_d^*: cuanto mayor es la TRE, mayor es la razón C_d^*/C_r, que nos proporciona el punto de indiferencia entre las políticas alternativas de rectificar o no rectificar. Más concretamente, puesto que la curva de la figura delimita las zonas de RECTIFICACION y NO RECTIFICACION, para dos puntos A y B de ordenada (C_d^*/C_r) constante el deterioro de la función de rectificación (es decir, el aumento del TRE) nos puede hacer preferible adoptar la decisión de no rectificar el lote siendo indiferente tal decisión en el punto C, intersección de la recta AB con la curva mencionada.



C_d^*/C_r
r
o
.6412
.6510
.6610
.6714
.6821
.6932
.7046
.7164
.7286
.7413
.7544
.7679
.7820
.7965
.8117
.8274
.8437
.8607
.8784
.8968
.9160
.9361
.9570
.9789
1.002
1.026
1.051
1.078
1.106
1.135
1.166
1.199
1.233
1.270
1.309
1.350
1.394
1.441
1.491
.000
.015
.030
.145
.060
.075
.090
.105
.120
.135
.150
.165
.180
.195
.210
.225
.240
.255
.170
.285
.300
.315
.330
.345
.360
.375
.390
.405
.420
.435
.450
.465
.480
.495
.510
.525
.540
.555
.570
.585
.600
.615
.630
.645
.660
.675
.690
.705
.720
.735
.750
.765
.780
.795
.810
.825
.840
.855
.870
.885
RECTIFICAR
A
C
B
NO RECTIFICAR

BIBLIOGRAFIA

[1] GUENTHER, W. C. «On the Determination of Single Sampling Attribute Plans Based upon a Linear Cost Model and a Prior Distribution, Technometrics, 13, p. 483-498, 1971.

[2] HALD, A. «Oh the theory of Single Sampling Inspection by Attributes Based on Two Quality Levels», Review of the International Statistical Institute, 35, p. 1-29, 1967.

[3] JENNEY, B. W. y JUSSEIN, S. «Acceptance Sampling by Attributes: The Bayesian Approach» University of Birmingham, England (1973).

[4] MOSKOWITZ, H. y PLANTE, R. «Effect of Risk Aversion on Single Sample Attribute Inspection Plans», Managemente Science, vol. 30, núm. 10, octubre 1984.

[5] MOSKOWITZ, H. y BERRY, W. L. «A Bayesian Algorithm for Determining Optimal Single Sample Acceptance Plans for Producto Attributes», Managemente Science, vol. 22, núm. 11, 1976.

[6] PFANZAGL, J. y SCHÜLLER, W. «The efficiency of sequential sampling plans based on prior distribution and costs», Technometrics, 12, p. 299-310.

[7] STACY, HUSINGER y PRICE «Determining economic sampling plans», IBM Systems Journal, 18, p. 220-244, 1979.

[8] RAIFFA, H. y SCHLAIFER, R. «Applied Statistical Decision Theory», Division of Research, Graduate School of Business Administration, Harvard University, Boston, 1961.

[9] SMITH, J. W., y BENNET, G. K. «Economic Multiattribute Acceptance Sampling», AIIE Transactions, vol. 4, núm. 3 p. 214-22, 1973.

[10] SMITH, B. E. «The Economic of Sampling Inspection», Industrial Quality Control, 17, p. 433-458, 1975.

[11] SMITH,B. E. «Some Economic Aspects of Quality Control» Technical Report n. 76-53, Applied Mathematics and Statistics Laboratories, Stanford University (1976).

[12] WETHERILL, G. B., y CAMPLING, G. E. G. «The Decision Theory Approach to Sampling Inspection» Journal of the Royal Statistical Society, Serie B, núm. 28, p. 381-416, 1966.

SUMMARY

ADVISABILITY OF A RECTIFICATION POLICY IN CONTINUOS PRODUCTION

The present analyzes the policies liable to treat the noncritical deficiencies which exists in portions of continuous production with a linear model of costs in terms of the rate of rectification of errors. The paper encloses the result of an application for the case in wich the quality of the portion is distributed according to the gamma-Poisson law.

Key words: Statistical Quality Control, Production Engineering.

AMS 1980 Subject classification 62 N 05.