

UNIVERSIDAD DE SEVILLA



ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

TESIS DOCTORAL

**APLICACIÓN DE LA PRECODIFICACIÓN  
LINEAL EN LA MODULACIÓN  
MULTIPORTADORA**

**FRANCISCO JOSÉ SIMOIS TIRADO**

2005



UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
DEPARTAMENTO DE TEORÍA DE LA SEÑAL Y  
COMUNICACIONES  
ESCUELA SUPERIOR DE INGENIEROS

TESIS DOCTORAL

**APLICACIÓN DE LA PRECODIFICACIÓN  
LINEAL EN LA MODULACIÓN  
MULTIPORTADORA**

**Autor:**

**Francisco José Simois Tirado**

Ingeniero de Telecomunicación

**Director:**

**José Ignacio Acha Catalina**

Catedrático de Universidad

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2005



# Certificado del Director de la Tesis

**D. José Ignacio Acha Catalina, Catedrático de Universidad del Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones de la Universidad de Sevilla**

## HACE CONSTAR

Que el trabajo titulado “Aplicación de la precodificación lineal en la modulación multiportadora”, presentado por Francisco José Simois Tirado para optar al título de Doctor Ingeniero de Telecomunicación, ha sido realizado en el Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones de la Universidad de Sevilla bajo su dirección y que reúne todas las condiciones exigidas a los trabajos de doctorado.

Sevilla, a 1 de julio de 2005

**Firmado: Dr. José Ignacio Acha Catalina**



*A mi familia de ahora  
y a mi familia de siempre*





# Resumen

La modulación multiportadora (conocida comúnmente como OFDM) está siendo últimamente objeto de creciente interés en el mundo de las comunicaciones. Ello se debe a su gran versatilidad para adaptarse a condiciones muy adversas del canal, consiguiendo siempre muy buenas prestaciones en lo que se refiere a la tasa de bits transmitidos gracias a su empleo conjunto con el denominado algoritmo *water-filling*.

La modulación multiportadora se basa en la separación del mensaje a transmitir en varias cadenas de bits, las cuales se transmiten sobre portadoras (subcanales) distintas. Para que todo funcione correctamente, debe garantizarse la independencia de los subcanales, es decir, debe evitarse que exista interferencia entre dichos subcanales. Por otra parte, también debe impedirse que aparezca interferencia entre los distintos símbolos transmitidos. La forma clásica de resolver este problema es mediante la inclusión de lo que se denomina un prefijo cíclico, que es una repetición redundante de ciertas muestras de la señal.

La desventaja de dicho prefijo cíclico es que disminuye la eficiencia espectral de la señal, así como que aumenta el retraso del procesado. Es por ello por lo que existen en la literatura numerosas técnicas que tratan de eliminar en todo o en parte dicho prefijo cíclico. Dichas técnicas las podemos dividir en: igualadores lineales (en el tiempo y en la frecuencia); igualadores realimentados; y precodificadores no lineales.

En la presente tesis se presenta una técnica novedosa para la optimización de la eficiencia espectral en la modulación multiportadora a través de la completa eliminación de todas las interferencias sin necesidad de prefijo cíclico. Para ello se propone la utilización de una adecuada precodificación lineal que introduzca información sobre el canal en los propios símbolos a transmitir. De este modo el efecto del canal compensa dicha precodificación, resultando que la señal recibida es exactamente la misma que la que se tendría en un sistema OFDM clásico con prefijo cíclico.

La precodificación lineal propuesta tiene la ventaja, respecto de las otras técnicas mencionadas previamente, de que es la única que proporciona exactamente la misma señal en el receptor que la que se tendría en OFDM con prefijo cíclico, en conjunto con el algoritmo *water-filling*. Es por ello que es la única en la que la probabilidad de error no se ve modificada respecto de la obtenida con dicho prefijo cíclico.

Se va a proceder, pues, a un estudio analítico detallado de la precodificación lineal propuesta, complementado con varias simulaciones. Los puntos más destacados podrían resumirse en los siguientes:

- Se desarrollan dos versiones teóricamente idénticas: en el dominio del tiempo (TDP)

y en el de la frecuencia (FDP). Ambas se diferencian únicamente en su complejidad computacional.

- Se demuestra que la convergencia está garantizada si y sólo si el canal es de fase mínima.
- Se comprueba que, a diferencia de otros precodificadores, la potencia de los símbolos precodificados puede aumentar pero también disminuir respecto de los originales.
- Se propone un método de estimación del canal sin necesidad de utilizar un período de guarda.
- Se comprueba que los posibles errores cometidos en la estimación del canal no afectan al TDP/FDP apenas más de lo que lo hacen en un sistema OFDM con prefijo cíclico.
- Por último, se verifica que la precodificación propuesta es claramente aplicable a un sistema real como es ADSL (línea digital de abonado), obteniéndose muy buenos resultados en dicho entorno.

# Abstract

Multitone modulation (commonly known as OFDM) is being object of growing interest in the world of communications in the last years. This is due to its great versatility to be adapted to very adverse conditions of the channel, always obtaining very good benefits in which refers to the transmitted bit rate, thanks to the joint employment with the so-called water-filling algorithm.

Multitone modulation is based on the separation of the transmitted message in several chains of bits, which they are sent out on different subcarriers (subchannels). In order to all function correctly, it should be guaranteed the independence of the subchannels, that is to say, it should be avoided that interference exist among them. On the other hand, it should also be impeded that interference among the different transmitted symbols appear. The classical way to solve this problem is by means of the inclusion of what is called a cyclic prefix, that is, a redundant repetition of certain signal samples.

The disadvantage of the cyclic prefix is that it diminishes the spectral efficiency of the signal, as well as it enlarges the delay of the processing. Because of that, numerous techniques exist in order to try to fully or partially eliminate the cyclic prefix. We can divide these techniques into: linear equalizers (in both time and frequency); feedback equalizers; and non-linear precoders.

In this thesis a novel technique for the optimization of the spectral efficiency in the multitone modulation is presented, through the complete elimination of all the interferences without need of a cyclic prefix. For that purpose it has been proposed the use of an adequate linear precoding, which introduce information on the channel in the own symbols to transmit. In this way the effect of the channel compensates the precoding, so the received signal is exactly the same that the one that we would have in a classical OFDM system with cyclic prefix. The linear precoding proposed has the advantage, regarding the other techniques previously mentioned, that it is the unique one that provides exactly the same signal in the receiver that the one that we would have in OFDM with cyclic prefix and with the water-filling algorithm. It is because of it that it is the only technique in which the probability of error is not modified with respect to what it is obtained with the cyclic prefix.

Therefore, we are going to develop a detailed analytic study of the proposed linear precoding, complemented with several simulations. The most noticeable points would be the following:

- We develop two theoretically identical versions: in the time-domain (TDP) and in the frequency-domain (FDP). Both of them are differentiated only in their computational complexity.

- It is shown that the convergence is guaranteed if and only if the channel is minimum-phase.
- It is verified that, as opposed to other precoders, the power of the precoded symbols may enlarge but also diminish regarding the original ones.
- A method of channel estimation without need to utilize a guard time is also proposed.
- It is verified that the possible channel estimation errors do not affect the TDP/FDP barely more than what they do in an OFDM system with cyclic prefix.
- Finally, it is verified that the proposed precoding is clearly applicable to a real system as it is ADSL (Asymmetric Digital Subscriber Line), obtaining very good results in this environment.

## AGRADECIMIENTOS

Cuando uno llega hasta aquí no tiene más remedio que mirar atrás. Ve entonces muchos años de trabajo y de sacrificio, pero también descubre que justo en esos momentos es cuando entiende que hay mucha gente que le quiere y que le apoya incondicionalmente. No puedo entonces sino acordarme en primer lugar de mis padres y mi hermana, que siempre han estado conmigo y a los cuales les debo todo; y, por supuesto, de Nuria, que a lo largo de la realización de esta tesis fue mi novia y ahora es esposa. Ella es quien da sentido a mi trabajo y a toda mi vida.

También querría nombrar a mis compañeros de trabajo. Son tantos que no podría mencionarlos a todos, no fuera a ser que me olvidara de alguno. En cualquier caso, en el Departamento de Teoría de la Señal y Comunicaciones me han tratado siempre, más allá de una mera relación profesional, como un verdadero amigo.

Por último, desearía terminar agradeciendo a D. José Ignacio Acha su inestimable ayuda para solventar las dificultades que fueron surgiendo así como el interés que siempre ha demostrado a lo largo de estos años por la buena marcha de esta tesis. Él ha sido un indispensable apoyo para mi trabajo, que no habría sido posible jamás sin su colaboración.



# ÍNDICE DE CONTENIDOS

<b>Capítulo 1: Introducción</b> .....	<b>1</b>
1.1 Introducción.....	1
1.2 Motivación de la tesis.....	3
1.3 Estructura de la tesis .....	4
<b>Capítulo 2: Fundamentos de la modulación multiportadora</b> .....	<b>5</b>
2.1 Introducción.....	5
2.2 Multiplexación por división en frecuencia.....	5
2.2.1. FDM y modulación multiportadora .....	5
2.2.2. OFDM .....	9
2.3 Implementación discreta de OFDM.....	11
2.3.1. Motivación.....	11
2.3.2. Transmisor OFDM.....	12
2.3.3. El prefijo cíclico.....	16
2.3.3.1. La ISI y la ICI. ....	16
2.3.3.2. El prefijo cíclico y la ICI. ....	18
2.3.3.3. Inconvenientes del prefijo cíclico .....	22
2.3.3.4. Formulación matricial.....	22
2.3.4. Receptor OFDM.....	23
2.4 Asignación óptima de bits .....	27
2.4.1. Introducción.....	27
2.4.2. Medida de prestaciones de un sistema .....	28
2.4.2.1 Breve repaso de la modulación QAM.....	28
2.4.2.2. Análisis de un canal del sistema. El <i>gap</i> y el margen .....	30
2.4.3. La carga de los subcanales.....	31
2.4.3.1. Justificación.....	31
2.4.3.2. El algoritmo <i>water-filling</i> discreto .....	33
2.5 Resumen.....	35

<b>Capítulo 3: Revisión de algoritmos para la reducción o eliminación del prefijo cíclico .....</b>	<b>37</b>
3.1 Introducción .....	37
3.2 Igualador en el dominio del tiempo.....	38
3.3 Igualadores DFE.....	41
3.3.1. DFE con criterio ZF .....	41
3.3.2. DFE con criterio MMSE .....	44
3.4 Precodificación no lineal .....	45
3.5 Resumen .....	48
 <b>Capítulo 4: Precodificación lineal aplicada a la modulación multiportadora.....</b>	 <b>50</b>
4.1 Introducción .....	51
4.2 Precodificación en el dominio del tiempo .....	53
4.2.1. Motivación. Relación con el prefijo cíclico .....	53
4.2.2. Eliminación de la ICI .....	54
4.2.3. Eliminación de la ISI.....	56
4.3 Precodificador en el dominio de la frecuencia.....	59
4.3.1. Derivación directa.....	59
4.3.2. Simplificación computacional .....	60
4.4 Comparativa de precodificadores .....	62
4.5 Análisis de la convergencia .....	63
4.6 Potencia de la precodificación.....	65
4.7 Estimación del canal .....	68
4.7.1. Método de estimación .....	68
4.7.2. Errores en la estimación del canal .....	70
4.7.2.1. Sistema OFDM con prefijo cíclico .....	70
4.7.2.2. Precodificación.....	72
4.8 Resumen .....	73
Anexo 4.1: Derivación de la versión simplificada del FDP.....	75
Anexo 4.2: Autovalores y autovectores de la matriz de precodificación.....	82
Anexo 4.3: Símbolos recibidos con precodificación en presencia de errores en la estimación del canal.....	90



---

<b>Capítulo 5: Simulaciones .....</b>	<b>93</b>
5.1 Introducción.....	93
5.2 Validez del algoritmo .....	93
5.2.1. Efecto de la ICI y la ISI.....	93
5.2.2. Comportamiento frente al ruido .....	95
5.2.3. Comparativa con la precodificación no lineal (THP).....	98
5.3 Potencia de la precodificación .....	99
5.4 Errores en la estimación del canal.....	102
5.5 Aplicación a ADSL.....	106
5.5.1. Introducción a ADSL.....	106
5.5.2. Características de la red telefónica .....	107
5.5.3. Modelo de canal.....	109
5.5.4. Resultados de la precodificación .....	110
5.6 Resumen.....	112
<b>Capítulo 6: Conclusiones y líneas futuras de investigación .....</b>	<b>113</b>
6.1 Introducción.....	113
6.2 Conclusiones .....	113
6.3 Líneas futuras de investigación.....	114
6.3.1. Complementos al estudio realizado.....	114
6.3.2. Extensiones y proyecciones .....	115
<b>Bibliografía .....</b>	<b>117</b>



# ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

Fig. 2.1: Densidad espectral de potencia para un sistema FDM. ....	6
Fig. 2.2: Transmisor para la modulación multiportadora.....	7
Fig. 2.3: Receptor para la modulación multiportadora. ....	8
Fig. 2.4: Densidad espectral de potencia para un sistema OFDM. ....	9
Fig. 2.5: Solapamiento de espectros en OFDM.....	10
Fig. 2.6: Receptor para OFDM. ....	11
Fig. 2.7: Transmisor OFDM discreto.....	12
Fig. 2.8: Desarrollo del transmisor OFDM discreto.....	13
Fig. 2.9: Efecto de la ISI en OFDM.....	16
Fig. 2.10: Período de guarda para evitar la ISI. ....	17
Fig. 2.11: Receptor OFDM discreto. ....	23
Fig. 2.12: Desarrollo del receptor OFDM discreto. ....	24
Fig. 3.1: Receptor con TEQ. ....	39
Fig. 3.2: Detalle del TEQ. ....	39
Fig. 3.3: Receptor con DFE. ....	42
Fig. 3.4: Transmisor para el sistema DMT con precodificación de Cheong.....	46
Fig. 3.5: Operador módulo. ....	47
Fig. 3.6: Receptor para el sistema DMT con precodificación de Cheong. ....	48
Fig. 4.1: Transmisor DMT con precodificación en el dominio del tiempo. ....	57
Fig. 4.2: Receptor DMT cuando se usa precodificación en el transmisor. ....	58
Fig. 4.3: Transmisor DMT con precodificación en el dominio de la frecuencia.....	59
Fig. 4.4: Transmisor DMT con precodificación simplificada en el dominio de la frecuencia..	61
Fig. 5.1: Símbolos recibidos en presencia de ICI. ....	94
Fig. 5.2: Símbolos recibidos en presencia de ICI e ISI. ....	95
Fig. 5.3: Símbolos recibidos sin CP pero con precodificación. ....	96
Fig. 5.4: BER frente a la SNR en el canal.....	97
Fig. 5.5: Probabilidad de error obtenida frente a la deseada.....	97

---

Fig. 5.6: Probabilidad de error obtenida frente a la deseada.....	98
Fig. 5.7: Potencia frente a SNR. Ceros en $c_{1,2} = 0.2e^{\pm j\pi/4}$ .....	99
Fig. 5.8: Potencia frente a SNR. Ceros en $c_{1,2} = 0.5e^{\pm j\pi/4}$ .....	100
Fig. 5.9: Potencia frente a SNR. Ceros en $c_{1,2} = 0.9e^{\pm j\pi/4}$ .....	100
Fig. 5.10: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Ceros en $c_{1,2} = 0.2e^{\pm j\pi/4}$ .....	103
Fig. 5.11: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Ceros en $c_{1,2} = 0.5e^{\pm j\pi/4}$ .....	104
Fig. 5.12: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Ceros en $c_{1,2} = 0.9e^{\pm j\pi/4}$ .....	104
Fig. 5.13: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Ceros en $c_{1,2} = 0.99e^{\pm j\pi/4}$ .....	105
Fig. 5.14: BER frente a SNR en la estimación del canal. Ceros: $c_{1,2} = 0.9e^{\pm j\pi/4}$ (32 subcanales).....	105
Fig. 5.15: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Ceros en $c_{1,2} = \pm 0.9$ (32 subcanales).	106
Fig. 5.16: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Sistema ADSL.....	111
Tabla 5.1: Incrementos de potencia de símbolos transmitidos con y sin precodificación.....	101
Tabla 5.2: Valores de los parámetros en (5.7). .....	110
Tabla 5.3: Incrementos de potencia de símbolos transmitidos con y sin precodificación. Sistema ADSL. ....	111

# ÍNDICE DE ACRÓNIMOS

ADSL	Línea de Abonado Digital Asimétrica ( <i>Asymmetric Digital Subscriber Line</i> ).
BER	Tasa de error de bit ( <i>Bit Error Rate</i> ).
CIR	Respuesta impulsiva del canal ( <i>Channel Impulse Response</i> ).
CP	Prefijo cíclico ( <i>Cyclic Prefix</i> ).
DFE	Igualador de decisión realimentada ( <i>Decision Feedback Equalizer</i> ).
DFT	Transformada Discreta de Fourier ( <i>Discrete Fourier Transform</i> ).
DMT	Modulación multitono discreta ( <i>Discrete Multitone</i> ).
FDM	Multiplexación por división en frecuencia ( <i>Frequency Division Multiplexing</i> ).
FDP	Precodificador en el dominio de la frecuencia ( <i>Frequency-Domain Precoding</i> ).
FEQ	Igualador en el dominio de la frecuencia ( <i>Frequency-Domain Equalizer</i> ).
FEXT	Telediafonía ( <i>Far-End Crosstalk</i> ).
FFT	Transformada rápida de Fourier ( <i>Fast Fourier Transform</i> ).
FIR	Respuesta impulsiva finita ( <i>Finite Impulse Response</i> ).
IBI	Interferencia entre bloques ( <i>Interblock Interference</i> ).
ICI	Interferencia entre canales ( <i>Interchannel Interference</i> ).
IDFT	Transformada Discreta de Fourier inversa ( <i>Inverse Discrete Fourier Transform</i> ).
ISI	Interferencia entre símbolos ( <i>Intersymbol Interference</i> ).
LAN	Red de Área Local ( <i>Local Area Network</i> ).
ML	Máxima verosimilitud ( <i>Maximum Likelihood</i> ).
MLSE	Algoritmo de detección de máxima verosimilitud ( <i>Maximum Likelihood Sequence Estimation</i> ).
MMSE	Error cuadrático medio mínimo ( <i>Minimum Mean Square Error</i> ).
NEXT	Paradiafonía ( <i>Near-End Crosstalk</i> ).
OFDM	Multiplexación por división en frecuencia ortogonal ( <i>Orthogonal Frequency Division Multiplexing</i> ).
PLC	Comunicaciones sobre líneas de potencia ( <i>Power Line Communications</i> ).
PSD	Densidad espectral de potencia ( <i>Power Spectral Density</i> ).

---

PSK	Modulación por conmutación de fase ( <i>Phase Shift Keying</i> ).
QAM	Modulación de Amplitud en Cuadratura ( <i>Quadrature Amplitude Modulation</i> ).
SNR	Relación señal a ruido ( <i>Signal to Noise Ratio</i> ).
TDM	Multiplexación por división en el tiempo ( <i>Time-Division Multiplexing</i> ).
TDP	Precodificador en el dominio del tiempo ( <i>Time-Domain Precoder</i> ).
TEQ	Igualador en el dominio del tiempo ( <i>Time-Domain Equalizer</i> ).
THP	Precodificador de Tomlinson-Harashima ( <i>Tomlinson-Harashima Precoder</i> ).
TIR	Respuesta impulsiva objetivo ( <i>Target Impulse Response</i> ).
UTP	Par trenzado sin apantallar ( <i>Unshielded Twisted Pair</i> ).
ZF	Cero forzado ( <i>Zero-Forcing</i> ).

# Capítulo 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 INTRODUCCIÓN

El uso de la multiplexación por división en frecuencia o FDM (*Frequency Division Multiplexing*) data de más de un siglo cuando varias señales telegráficas eran conducidas a través de un canal de banda relativamente ancha utilizando portadoras diferentes para cada señal [Bahai02]. Para facilitar la separación de las señales en el receptor, las frecuencias portadoras estaban suficientemente alejadas de modo que los espectros no se solaparan entre sí y pudieran ser extraídos separadamente con filtros realizables fácilmente. Es por ello que la eficiencia espectral conseguida era bastante baja.

En lugar de transferir mensajes diferentes, las distintas frecuencias portadoras pueden emplearse también para transmitir diferentes bits de un único mensaje. Necesitaríamos en ese caso simplemente un convertidor serie-paralelo. Es a esto a lo que se le denomina transmisión multiportadora o multitono.

El sistema multitono, en un principio, no parece que pudiera ser demasiado eficiente en comparación con la transmisión de una sola portadora empleando el mismo canal, puesto que el utilizar múltiples portadoras en paralelo sería mucho más costoso de implementar. Además, la tasa binaria alcanzable sería menor en un sistema multitono, debido a los espacios no usados en el espectro por los motivos antes comentados. Sin embargo, el uso de múltiples portadoras tiene por otra parte sensibles ventajas: una única portadora es mucho más susceptible de sufrir interferencia entre símbolos (ISI, *Intersymbol Interference*), debido a que ocupa un ancho de banda mayor; además, la modulación multitono es menos sensible a la mayoría de formas de ruido impulsivo [Bahai02].

Es por estos motivos por lo que desde hace mucho se intentó solucionar el problema de la eficiencia espectral en la modulación multiportadora. Tal vez el primer sistema real que lo consiguió fue el *Kineplex* [Doelz57], desarrollado por Collins Radio Co. para la transmisión de datos sobre un canal de radio de alta frecuencia. En dicho sistema, se usaban 20 tonos modulados con 4-PSK (modulación por conmutación de fase, *Phase Shift Keying*) y sin filtrado, lo cual conllevaba un fuerte solapamiento entre los mismos; sin embargo, la separación entre los mismos es tal que los espectros se hacen cero en las frecuencias de todos los canales salvo el propio: esto es el inicio de lo que modernamente se conoce como OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*), es decir, FDM ortogonal.

Con el tiempo se fue depurando esta técnica, con la introducción de avances como la limitación en banda de los distintos tonos [Chang66] o el uso de modulación *Staggered QAM* (*Quadrature Amplitude Modulation* o modulación por amplitud en cuadratura) [Saltzberg67]. Sin embargo, tal vez la mayor contribución a OFDM fue la introducción de la Transformada Discreta de Fourier (DFT, *Discrete Fourier Transform*)<sup>1</sup> en los procesos de modulación y desmodulación [Weinstein71]. Esto ocurrió al mismo tiempo en que las técnicas de procesado de señal estaban siendo utilizadas en el diseño de los modems. En pocas palabras, esta nueva técnica consistía en la agrupación de la señal de información a transmitir en bloques de  $N$  números complejos, uno por cada subcanal. A continuación se efectuaba una IDFT (DFT inversa) y el resultado era la señal transmitida. El espectro resultante es el mismo que el de  $N$  señales QAM distintas, en  $N$  frecuencias separadas por la tasa de información. Luego, en el receptor se realiza la DFT para recuperar la señal transmitida.

Sin embargo, hay que tener cierto cuidado a la hora de introducir la DFT, ya que debe tenerse en cuenta que si no se hace nada se produce solapamiento entre los diferentes símbolos OFDM transmitidos, así como entre los distintos subcanales. Para evitar esto se introdujo el concepto de prefijo cíclico [Peled80], el cual introduce redundancia de manera controlada, eliminando de esta manera todas las interferencias.

El resultado de todo esto es que OFDM permite un tratamiento diferenciado de cada subportadora. Este hecho es, por otra parte, especialmente importante a la hora de optimizar el uso dado al canal. Concretamente, nos referimos a lo que se denomina una asignación óptima de bits. Este es un concepto que se refiere a que es posible asignar un número de bits diferente, así como una distinta energía, a cada uno de los mensajes que van a ser transmitidos por cada portadora. Como veremos, únicamente se requiere para ello que el sistema tenga un “transmisor informado”, es decir, que conozca las características del canal: su respuesta en frecuencia y la densidad espectral de potencia del ruido. Esto nos permitirá maximizar la tasa binaria transmitida, supuesto que han sido fijadas tanto la energía disponible como la probabilidad de error deseada.

Por todo lo referido, a día de hoy la modulación multiportadora en sus diversas variantes está siendo objeto de mucha atención en el mundo de las comunicaciones, ya que permite obtener altas tasas de bits sobre canales muy problemáticos, los cuales son difíciles de utilizar con sistemas de portadora única, bien porque introducen una gran cantidad de ISI o bien porque el ruido presente en el canal está fuertemente coloreado. Así, OFDM está siendo usado, por ejemplo, en las siguientes aplicaciones:

- Es el estándar en la Línea de Abonado Digital Asimétrica o ADSL (*Asymmetric Digital*

---

<sup>1</sup> Se aprovechó el hecho de que las técnicas denominadas como Transformada Rápida de Fourier o FFT (*Fast Fourier Transform*) ya eran conocidas y estaban siendo utilizadas con asiduidad.



*Subscriber Line*), que proporciona comunicaciones de alta tasa binaria sobre los cables de pares trenzados utilizados en los bucles de abonado.

- Se está utilizando profusamente también en comunicaciones sobre líneas de potencia (PLC, *Power Line Communications*), que consiste en la utilización del tendido eléctrico, tanto de baja, media como alta tensión, para la transmisión de datos.
- En aplicaciones *wireless*, OFDM ha sido seleccionado como el estándar para DAB (*Digital Audio Broadcasting*, es decir, Difusión de Audio Digital), que es una aplicación para la transmisión de información relacionada con emisoras de radio comerciales.
- Otra aplicación *wireless* donde se emplea OFDM es en redes inalámbricas de área local (LAN, *Local Area Network*), consiguiendo tasas de transmisión muy elevadas en rangos pequeños de distancia.

## 1.2 MOTIVACIÓN DE LA TESIS

Como tendremos oportunidad de comprobar en detalle más adelante, la presencia del prefijo cíclico, ya comentada previamente, tiene sin duda grandes ventajas pero también algún que otro inconveniente, principalmente la pérdida de eficiencia espectral y el aumento de la latencia. Es por ese motivo que desde hace mucho se investiga generosamente en técnicas que palien este problema, reduciendo o incluso eliminando por completo la necesidad del prefijo cíclico.

Pues bien, la presente tesis viene a contribuir en dicho campo, presentando un procedimiento novedoso para evitar la necesidad del prefijo cíclico, cual es el uso de una precodificación lineal. Es decir, se trata de un subsistema implementado en el transmisor, utilizado con el mismo fin que los clásicos igualadores empleados en recepción. Dicha precodificación admite diversas variantes (en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia, y esta a su vez en dos versiones) y tiene, como ya veremos, interesantes propiedades que la hacen atractiva. En particular, queremos destacar el hecho de que su comportamiento es en casi todo idéntico al que se consigue en un sistema con prefijo cíclico, y desde luego lo es en prestaciones en el receptor, el cual no debe ser modificado para nada.

Por este motivo, la precodificación propuesta podría ser una técnica aplicable en sistemas que dispongan de un “transmisor informado”. Esto implica, por supuesto, la práctica totalidad de sistemas bidireccionales *wireline*, como ADSL o PLC; pero también, en muchos casos, podría ser utilizado en sistemas bidireccionales *wireless* en los que el canal no varíe de forma demasiado rápida. Aquí podríamos incluir, por ejemplo, una LAN inalámbrica.

### 1.3 ESTRUCTURA DE LA TESIS

En este apartado vamos a describir de forma muy somera lo que desarrollaremos a lo largo de la presente tesis.

En el capítulo 2 expondremos de forma más o menos detallada los conceptos fundamentales en los que se basa la modulación multiportadora. Haremos especial hincapié, por su relevancia en el posterior desarrollo de la tesis, en lo que se denomina asignación de bits, así como en el concepto de prefijo cíclico.

Dentro del capítulo 3 nos detendremos en una exposición más o menos rápida de diferentes técnicas existentes en la literatura cuya misión es la reducción o eliminación del prefijo cíclico. Hablaremos aquí de igualadores en el dominio del tiempo o de la frecuencia, de igualadores de decisión realimentada y de precodificación no lineal.

Ya en el capítulo 4 nos dedicaremos al análisis detallado de la aportación fundamental de esta tesis: el uso de la precodificación lineal como solución al problema del prefijo cíclico. Estudiaremos en profundidad sus principales características desde un punto de vista teórico, exponiendo detenidamente aquellos aspectos de mayor interés.

En el capítulo 5 presentaremos los resultados de varias simulaciones efectuadas, analizando los datos obtenidos y tratando de justificarlos de acuerdo con la teoría.

Por último, en el capítulo 6 efectuaremos las conclusiones pertinentes y expondremos posibles líneas futuras de investigación que continúen el camino aquí iniciado.

## Capítulo 2

# FUNDAMENTOS DE LA MODULACIÓN MULTIPORTADORA

### 2.1 INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo vamos a abordar las características de la modulación multiportadora, puesto que es sobre ella donde se ha desarrollado toda la aportación de la presente tesis. De este modo, en este capítulo estudiaremos los diferentes tipos de modulación multiportadora que han ido surgiendo a lo largo del tiempo, haciendo especial hincapié en la implementación discreta de la misma a través de la DFT, por ser esa la OFDM moderna.

Tendremos ocasión así mismo de comentar en detalle el concepto del prefijo cíclico, puesto que va a ser clave a la hora de entender la precodificación lineal que constituye el núcleo de la presente tesis.

Por último, haremos un desarrollo más o menos amplio de lo que se conoce como asignación óptima de bits, que es una de las características más atractivas de OFDM.

### 2.2 MULTIPLEXACIÓN POR DIVISIÓN EN FRECUENCIA

#### 2.2.1. FDM y modulación multiportadora

Como es bien conocido, el proceso mediante el cual un conjunto de señales se combina en una sola para ser transmitidas a través de un canal común se denomina **multiplexación**. Los dos métodos clásicos de multiplexación son [Proakis94]:

- Multiplexación por división en el tiempo (TDM, *Time-Division Multiplexing*).
- Multiplexación por división en la frecuencia (FDM, *Frequency-Division Multiplexing*).

En el segundo de los casos, las diferentes señales ocupan distintas bandas de frecuencia. En la Fig. 2.1 se representa este hecho para un conjunto de  $N$  señales, con frecuencias centrales  $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ .

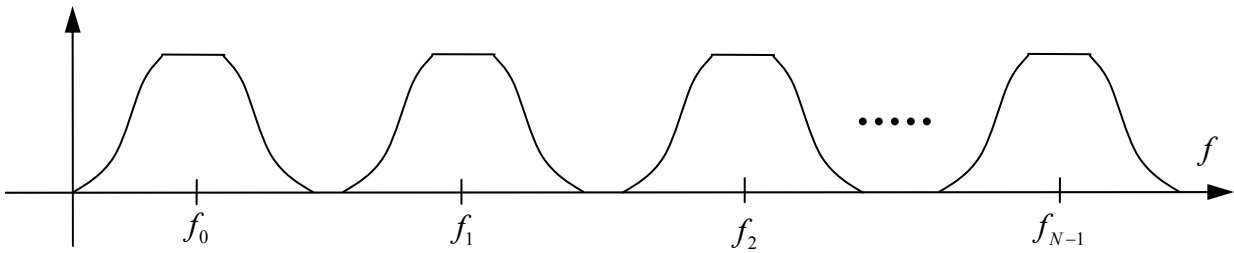


Fig. 2.1: Densidad espectral de potencia para un sistema FDM.

Evidentemente, esta técnica puede ser empleada para señales transmitidas desde una misma fuente. Es en ese caso cuando podemos hablar de **modulación multiportadora** o **modulación multitono** [Cioffi], la cual consiste entonces en la existencia de múltiples formas de onda superpuestas a distintas frecuencias para representar una única secuencia de bits de entrada. La densidad espectral de potencia será, evidentemente, la misma que en la Fig. 2.1. Cada una de las subseñales suele denominarse comúnmente **subcanal**. La elección del número de subcanales en que se va a dividir la secuencia de entrada no es arbitrario<sup>2</sup>. Por el contrario, el ancho de banda de cada uno (que se supone idéntico para todos ellos) debe ser mucho menor que el ancho de banda de coherencia del canal por el que se va a transmitir la señal [Goldsmith].

En sus orígenes, transmisor y receptor en una modulación multiportadora seguían los esquemas básicos de FDM [Bingham90]. En concreto, el transmisor sería el representado en la Fig. 2.2.

Sea entonces una secuencia binaria a transmitir, con tasa binaria  $R$  y ancho de banda  $B$ . Agrupamos los bits en bloques, y denominamos  $\{b(k)\}$  al  $k$ -ésimo bloque. Vamos a suponer que el ancho de banda de coherencia del canal es  $B_c < B$ , lo cual significa que el canal es selectivo en frecuencia en el rango de frecuencias de interés. Por ello, y siguiendo la premisa indicada previamente, debemos escoger un número de subcanales  $N$  tal que el ancho de banda de cada uno,  $B_N$ , cumpla que

$$B_N = B/N \ll B_c. \quad (2.1)$$

Una vez que se ha seleccionado un valor para  $N$ , la secuencia de bits de entrada pasa a través de un convertidor serie-paralelo, el cual proporciona  $N$  subsecuencias, denotadas como  $\{b_i(k)\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . Cada una de las subsecuencias es modulada (típicamente con modulación QAM o PSK) en torno a una frecuencia central  $f_n$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$  y ocupando un ancho de banda  $B_N$ . Es decir,

---

<sup>2</sup> Al menos no lo es en este punto. Más adelante veremos técnicas que sí permiten un número arbitrario de subcanales.

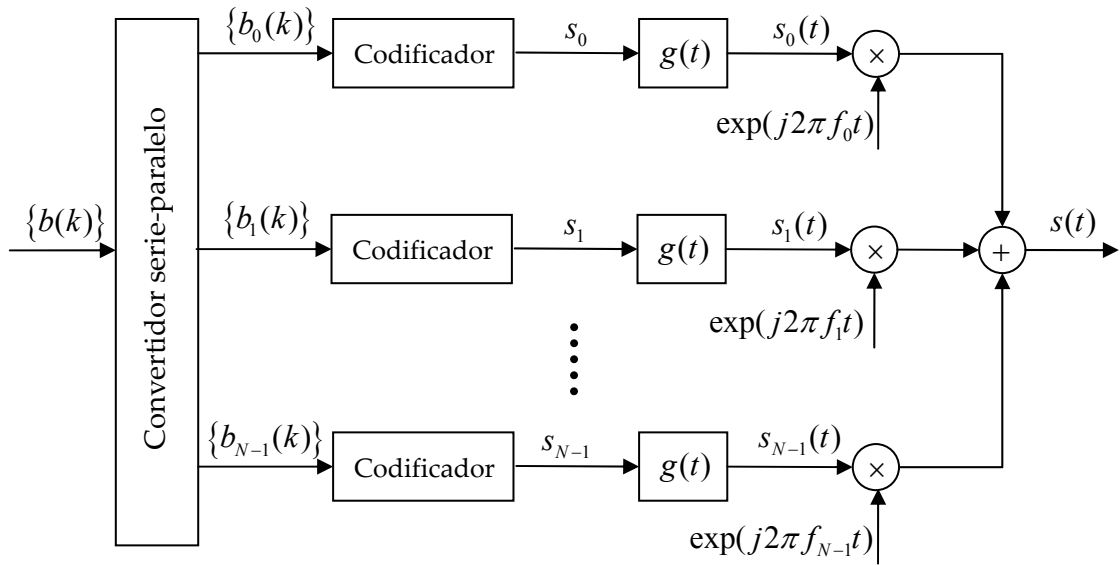


Fig. 2.2: Transmisor para la modulación multiportadora.

$$f_n = f_0 + nB_N, \quad n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (2.2)$$

En la Fig. 2.2 cada modulador ha sido sustituido por un codificador y un filtro con respuesta impulsiva igual al pulso conformado. El codificador es simplemente un bloque que “mapea” los bits a su entrada de acuerdo a cierta constelación predefinida. Hacemos notar este hecho pues de esta manera será más sencillo el paso de la figura mencionada a la modulación OFDM discreta, que veremos un poco más adelante.

En cualquier caso, la señal transmitida será

$$s(t) = \text{Re} \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} s_n g(t) e^{j2\pi f_n t} \right\}, \quad (2.3)$$

siendo  $s_n$  el símbolo complejo asociado al  $n$ -ésimo subcanal y  $g(t)$  el pulso conformado (por ejemplo, un coseno alzado) usado para la transmisión.

Por su parte, el receptor sería como el de la Fig. 2.3. En el caso del receptor, simplemente se pasa cada subcanal a través de un filtro de frecuencia central  $f_n$  y ancho de banda  $B_N$ , eliminando de esta manera la acción de los demás subcanales. Posteriormente se desmodula y los datos resultantes se combinan a través de un convertidor paralelo-serie. De esta manera se obtiene una estimación de la secuencia transmitida,  $\{\hat{b}(k)\}$ .

Si se cumple (2.1), el canal tendrá una respuesta en frecuencia aproximadamente plana en el rango de cada uno de los subcanales. Esto mismo puede también analizarse en el dominio del tiempo: la duración de cada subcanal,  $T_N$ , es proporcional a  $1/B_N$ . Por tanto,

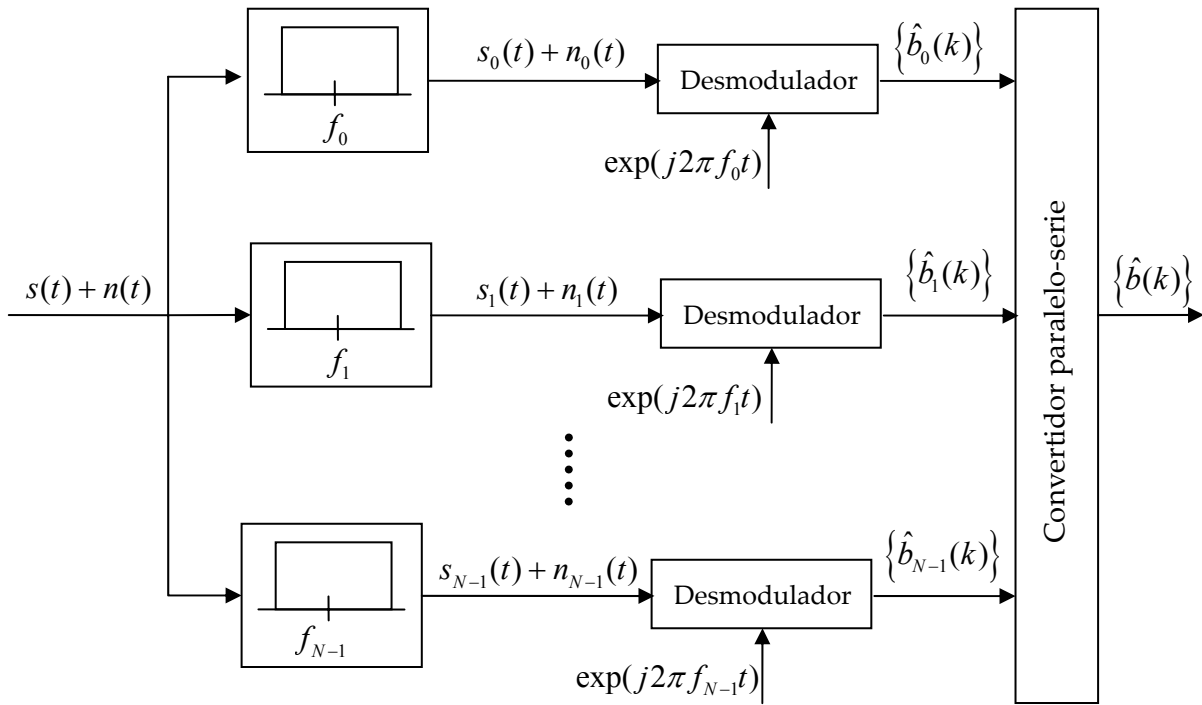


Fig. 2.3: Receptor para la modulación multiportadora.

$$T_N \gg 1/B_c \approx \sigma_T, \quad (2.4)$$

siendo  $\sigma_T$  el tiempo de coherencia del canal. Esto significa que los distintos subcanales sufren una interferencia entre símbolos (ISI) prácticamente despreciable [Goldsmith]. De este modo vemos que la modulación multiportadora no varía la tasa binaria o el ancho de banda de la señal completa, pero prácticamente elimina la ISI.

Aunque este sistema funciona adecuadamente tal como ha sido planteado, en una situación realista se dan una serie de circunstancias que reducen sus buenas prestaciones:

- Dado que los pulsos conformados deben ser limitados en el tiempo, no será posible un ancho de banda estrictamente ajustado a  $B_N$ . Por tanto, la eficiencia espectral disminuirá.
- Serán precisos unos filtros muy buenos en recepción para que la banda de guarda entre cada subcanal pueda ser despreciable, encareciendo el sistema final.
- Se requieren  $N$  moduladores y desmoduladores independientes, lo que también significa un gran costo.

### 2.2.2. OFDM

Para aumentar la eficiencia espectral del esquema anterior la mejor solución es hacer que exista solapamiento entre los subcanales. No obstante, este solapamiento no debe destruir la necesaria ortogonalidad entre ellos, para que así el proceso de recepción pueda realizarse de forma independiente para todos los subcanales. Es por ello que en este caso la modulación multiportadora la denominamos OFDM (*Orthogonal Frequency-Division Multiplexing*)<sup>3</sup>.

Pues bien, según [Goldsmith], dado un pulso conformado  $g(t)$  de energía unidad, podemos construir un conjunto de funciones base ortonormales dado por

$$\phi_k(t) = g(t) \cos[(2\pi f_0 + k/T_N)t], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.5)$$

Estas funciones base son ortonormales<sup>4</sup> sobre el intervalo  $(0, T_N)$ , esto es,

$$\frac{1}{T_N} \int_0^{T_N} \phi_k(t) \phi_j(t) dt = \begin{cases} 0.5, & k = j, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Además, se cumple que la separación de frecuencias entre estas funciones, es decir,  $1/T_N$ , es justamente la mínima separación exigible para tener la ortogonalidad pedida.

Supongamos entonces que escogemos un conjunto de funciones como el indicado. Esto significa que la Fig. 2.1 pasa a ser de la forma siguiente:

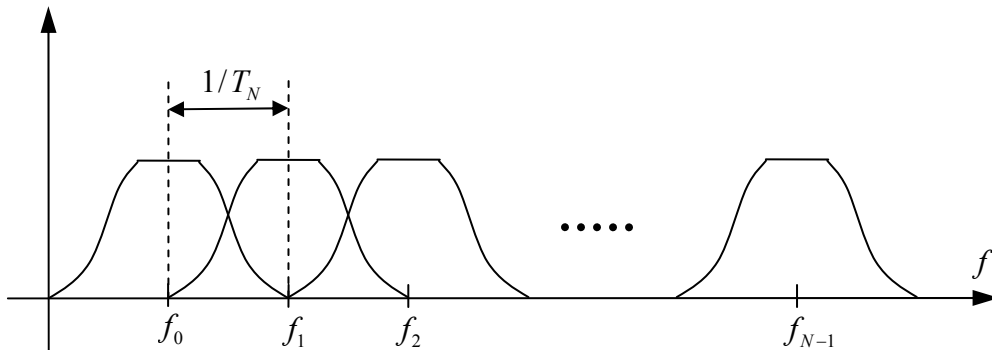


Fig. 2.4: Densidad espectral de potencia para un sistema OFDM.

<sup>3</sup> No hay un acuerdo del todo claro entre los autores. Aunque la mayoría (e.g., [Cioffi, Edfors96]) se inclinan por denominar OFDM a la modulación multiportadora con solapamiento, otros [Goldsmith] utilizan este término incluso cuando no existe solapamiento entre subcanales.

<sup>4</sup> Realmente lo son sólo de forma aproximada. Para que lo fueran completamente sería necesario que el intervalo fuera  $(-\infty, \infty)$ .

Vemos entonces en la figura previa que en la frecuencia portadora de cualquier canal el espectro de los demás canales se anula. Esto significa que podemos recuperar perfectamente el valor del espectro deseado de cada canal sin interferencias de los demás, gracias a esta ortogonalidad<sup>5</sup>.

Por otra parte, y a pesar de la figura anterior, no necesariamente los distintos subcanales deben estar limitados estrictamente en banda, como así aparece. Por el contrario, podemos tener la anchura que queramos, siempre y cuando se cumpla la premisa anterior de que el espectro se anule en la frecuencia de los subcanales distintos del propio. Podríamos así, por ejemplo, tener un espectro de la forma  $\sin(kf)/f$ , como el de la figura siguiente:

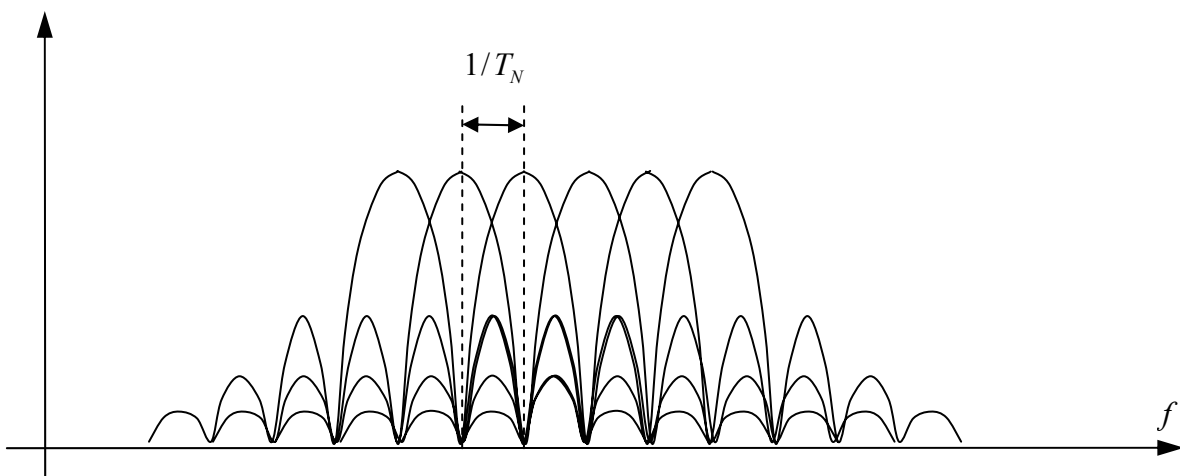


Fig. 2.5: Solapamiento de espectros en OFDM.

El transmisor OFDM no va a cambiar sustancialmente respecto de la Fig. 2.2. Sin embargo, para aprovecharnos de esta nueva situación donde existe solapamiento, pero también ortogonalidad entre los subcanales, el receptor pasaría a ser como el mostrado en la Fig. 2.6.

Como podemos comprobar, la principal diferencia respecto del receptor visto previamente estriba en el hecho de que ahora se están utilizando **receptores de correlación**, los cuales van a ser capaces de recuperar adecuadamente la señal de cada subcanal gracias a la ortogonalidad ya mencionada (p.ej., [Proakis95]). Por otra parte, existen unos descodificadores cuya misión es recuperar los bits transmitidos a partir de la constelación correspondiente de cada subcanal.

---

<sup>5</sup> Se está dando por supuesto que existe una sincronización perfecta entre transmisor y receptor. Evidentemente, esto es otro problema que habrá que solucionar en la práctica, pero no ha sido objeto de interés en la presente tesis.



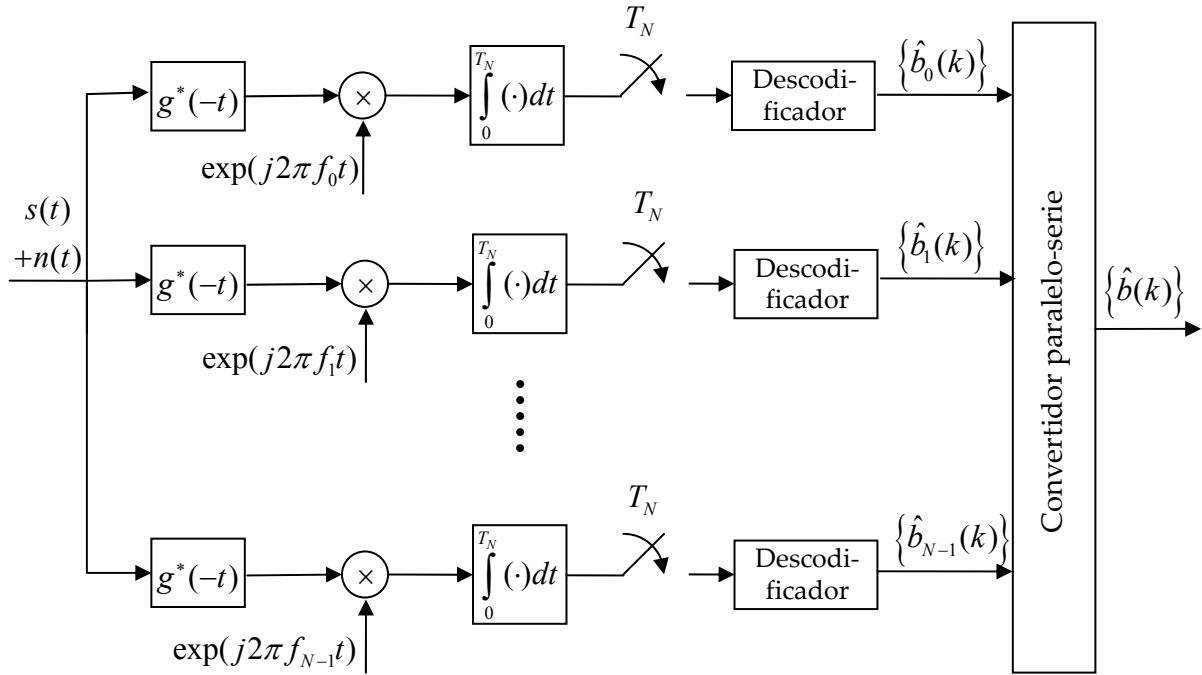


Fig. 2.6: Receptor para OFDM.

## 2.3 IMPLEMENTACIÓN DISCRETA DE OFDM

### 2.3.1. Motivación

Pese a las evidentes ventajas de OFDM respecto de la modulación multiportadora sin solapamiento, aún sigue existiendo un importante problema en la misma, la necesidad de múltiples moduladores y desmoduladores, uno por cada subcanal. Este hecho propició el que OFDM fuera objeto de muy poca atención durante décadas. Sin embargo, la aparición de algoritmos eficientes para el cálculo de la **Transformada Discreta de Fourier (DFT, Discrete Fourier Transform)** y la adaptación de dicha DFT a OFDM [Weinstein71] supuso el inicio de su utilización cada vez más frecuente.

En lo que sigue vamos a tratar de explicar lo más claramente posible el funcionamiento de un sistema OFDM moderno típico, es decir, con el empleo de la DFT<sup>6</sup>. Aprovecharemos así mismo para introducir una notación vectorial que esperamos sirva para facilitar la comprensión tanto de este apartado como de los siguientes capítulos.

---

<sup>6</sup> En lo que sigue, cada vez que hagamos mención de OFDM nos referiremos a la versión discreta que ahora vamos a analizar.

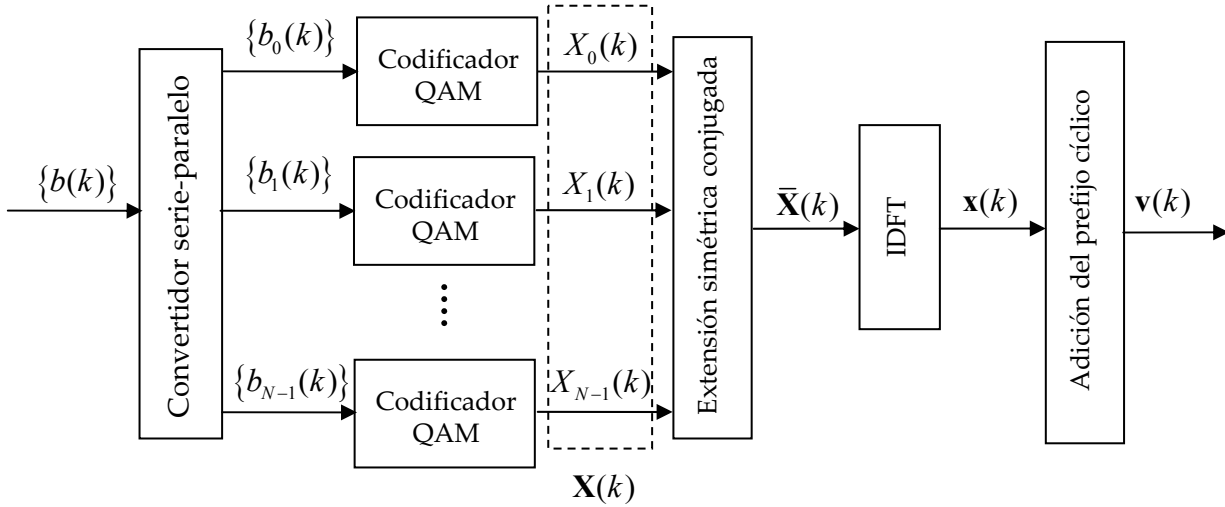


Fig. 2.7: Transmisor OFDM discreto.

### 2.3.2. Transmisor OFDM

El esquema resumido de un transmisor OFDM sería el representado en la Fig. 2.7 <sup>7</sup>. Como podemos comprobar, los primeros pasos son los mismos que ya veíamos en el apartado anterior: los bits de entrada del  $k$ -ésimo bloque,  $\{b(k)\}$ , se dividen en  $N$  subcanales y denominamos  $\{b_i(k)\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ , a los bits del  $i$ -ésimo subcanal. A continuación, cada uno de los  $\{b_i(k)\}$  pasa a través de su correspondiente codificador QAM<sup>8</sup>, obteniendo de ese modo símbolos complejos, los cuales denotamos como  $X_i(k)$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . Podemos ahora pasar a notación vectorial, según la cual el símbolo global a ser transmitido en dicho instante  $k$ , denotado como  $\mathbf{X}(k)$ , será

$$\mathbf{X}(k) = [X_0(k) \quad X_1(k) \quad \dots \quad X_{N-1}(k)]^T, \quad (2.7)$$

donde el superíndice  $T$  indica transposición. Así pues,  $\mathbf{X}(k)$  está formado por  $N$  subsímbolos, que en general podrán ser complejos. Cada uno de ellos indica aquello que debería ser transmitido por el correspondiente subcanal; es decir, el  $i$ -ésimo subsímbolo de  $\mathbf{X}(k)$  contiene la información a transmitir por el  $i$ -ésimo subcanal, o sea, la correspondiente a la  $i$ -ésima frecuencia central. No debemos perder de vista, pues, que nos encontramos operando en el dominio de la frecuencia.

Bien, hasta aquí, como hemos dicho, la situación es básicamente la misma que en la

<sup>7</sup> No está dibujado un convertidor paralelo-serie que estaría ubicado al final.

<sup>8</sup> El uso de QAM es ya prácticamente un estándar en OFDM, gracias a su buen compromiso entre potencia transmitida y probabilidad de error obtenida.

modulación multiportadora que veíamos en el apartado anterior, es decir, la representada en el transmisor de la Fig. 2.2. Es a partir de ahora donde vienen las diferencias. Es por ello que, para una mayor claridad, vamos a desarrollar un poco más el resto de la Fig. 2.7, obteniendo así la Fig. 2.8. Vamos a explicarlo en detalle.

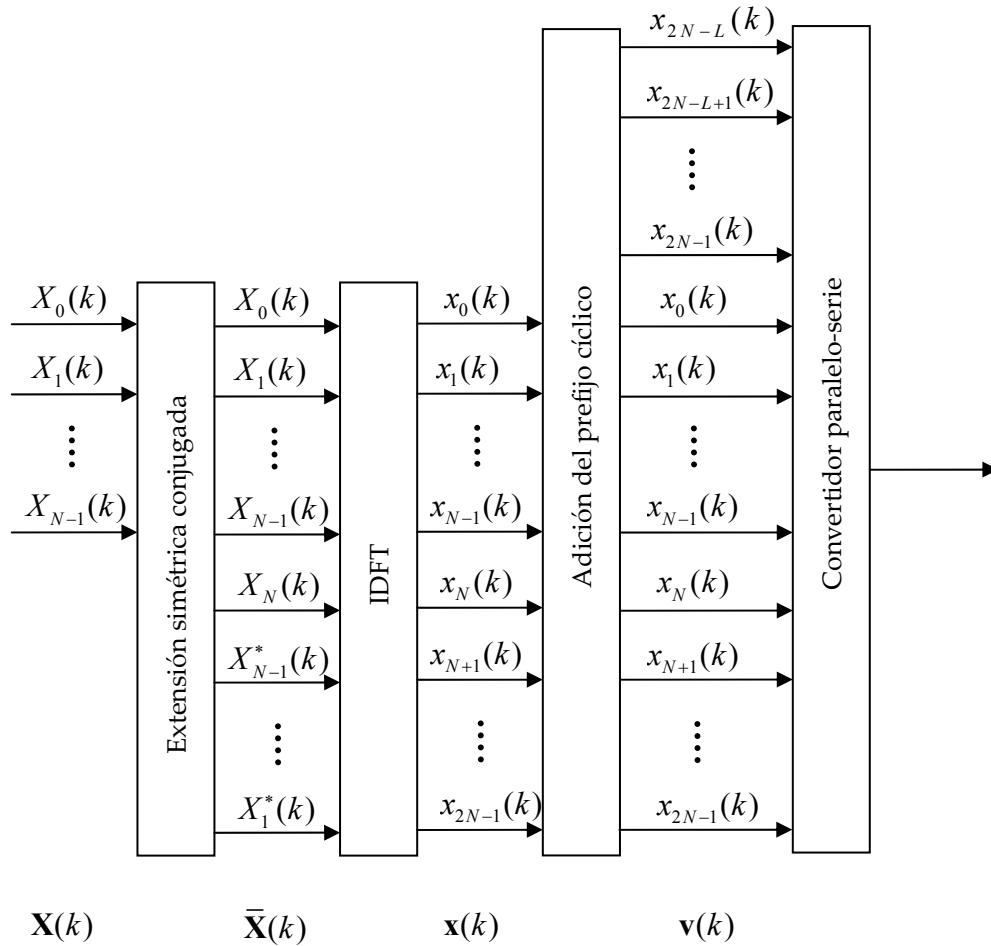


Fig. 2.8: Desarrollo del transmisor OFDM discreto.

Nuestra pretensión sería ahora pasar al dominio del tiempo, para poder así ya transmitir físicamente por el canal. Para ello nos bastaría en principio con realizar una IDFT. Con ella estaríamos efectuando la transformación del dominio de las frecuencias discretas al dominio del tiempo discreto. No obstante, si operáramos directamente así nos encontraríamos con un grave inconveniente, cual es que, en general, la señal temporal resultante sería compleja. Para solucionar este problema lo que se hace es extender previamente el símbolo  $\mathbf{X}(k)$  de forma simétrica conjugada.

Efectivamente, es de sobra conocido que una propiedad básica del par DFT-IDFT es que si una señal es real en el dominio del tiempo, entonces es simétrica conjugada en el do-

minio de la frecuencia, y viceversa. Analíticamente, supongamos que la señal  $x(n)$  es real; es ese caso, su DFT de  $2N$  puntos, que vamos a denotar como

$$\mathbf{X} = [X_0 \quad X_1 \quad \cdots \quad X_{N-1}]^T, \quad (2.8)$$

ha de cumplir que

$$\begin{aligned} X_0 &= X_0^*, \\ X_1 &= X_{N-1}^*, \\ X_2 &= X_{N-2}^*, \\ &\vdots \\ X_{N-1} &= X_1^*, \\ X_N &= X_N^*. \end{aligned} \quad (2.9)$$

(El que impongamos que el número total de puntos de la DFT sea par no supone ningún inconveniente, ya que todas las aplicaciones prácticas utilizan un número de puntos potencia de 2, con lo cual será par).

De manera análoga, si  $\mathbf{X}$  cumple las condiciones de simetría anteriores, tenemos garantizado que  $x(n)$  va a ser real. Pues bien, sabiendo esto lo que hemos de hacer es tomar el símbolo  $\mathbf{X}(k)$  que hemos obtenido a la salida de los codificadores QAM, y extenderlo hasta  $2N$  puntos de forma que cumpla las condiciones de simetría conjugada que acabamos de exponer. El símbolo resultante, que denotaremos como  $\bar{\mathbf{X}}(k)$ , será entonces

$$\bar{\mathbf{X}}(k) = [X_0(k) \quad X_1(k) \quad \cdots \quad X_{N-1}(k) \quad X_N(k) \quad X_{N-1}^*(k) \quad \cdots \quad X_1^*(k)]^T. \quad (2.10)$$

De este modo, como hemos dicho, podemos asegurar que la IDFT será real. Hacemos notar que, como se comprueba en la ecuación (2.9), el elemento  $X_N(k)$  no está definido. Esto implica que podemos insertar un valor cualquiera, siempre y cuando sea real, según las reglas de simetría (2.9)<sup>9</sup>.

Llegados a este punto podemos ya realizar la IDFT de  $2N$  puntos antes referida, de modo que

$$\mathbf{x}(k) = \text{IDFT}\{\bar{\mathbf{X}}(k)\} = [x_0(k) \quad x_1(k) \quad \cdots \quad x_{2N-1}(k)]^T. \quad (2.11)$$

---

<sup>9</sup> Estrictamente, el estándar OFDM define que el primer elemento de  $\bar{\mathbf{X}}(k)$  ha de tomarse como  $\text{Re}\{X_0(k)\}$ , mientras que el elemento  $N$ -ésimo ha de ser  $\text{Im}\{X_0(k)\}$ . Sin embargo, raramente se hace así si queremos aplicar lo que se conoce como asignación de bits, que explicaremos más adelante. Es por ello por lo que no haremos ninguna restricción sobre  $X_N(k)$ .

Así pues,  $\mathbf{x}(k)$  es el  $m$ -ésimo símbolo OFDM en el dominio del tiempo que deseamos transmitir.

El par DFT-IDFT se calcula como

$$\bar{\mathbf{X}}_i(k) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=0}^{2N-1} x_n(k) e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}, \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (2.12)$$

$$x_i(k) = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{n=0}^{2N-1} \bar{\mathbf{X}}_n(k) e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}, \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (2.13)$$

Vemos que existe un factor  $1/\sqrt{2N}$ . Esto es así para que la representación matricial de la DFT, que veremos a continuación, utilice matrices unitarias.

Efectivamente, es útil y conveniente utilizar la por otra parte bien conocida representación matricial del par DFT-IDFT. De esta manera, la relación entre  $\mathbf{x}(k)$  y  $\bar{\mathbf{X}}(k)$  puede expresarse también como

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k), \quad (2.14)$$

donde el superíndice  $H$  significa hermítico (es decir, trasposición y conjugación, todo a un tiempo) y  $\mathbf{F}$  es una matriz de tamaño  $2N \times 2N$  (ya que, como acabamos de explicar,  $\bar{\mathbf{X}}(k)$  tiene longitud  $2N$ ) definida como

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/(2N)} & e^{-j4\pi/(2N)} & \dots & e^{-j2\pi(2N-1)/(2N)} \\ 1 & e^{-j4\pi/(2N)} & e^{-j8\pi/(2N)} & \dots & e^{-j4\pi(2N-1)/(2N)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j2\pi(2N-1)/(2N)} & e^{-j4\pi(2N-1)/(2N)} & \dots & e^{-j2\pi(2N-1)^2/(2N)} \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Además,  $\mathbf{F}$  es una matriz unitaria, es decir,

$$\mathbf{F}\mathbf{F}^H = \mathbf{I}_{2N}, \quad (2.16)$$

siendo  $\mathbf{I}_{2N}$  una matriz identidad de tamaño  $2N$ . De acuerdo con esto, la relación inversa de la ecuación (2.14) sería

$$\bar{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k). \quad (2.17)$$

Una vez que tenemos ya la señal a transmitir en el dominio del tiempo, nos dispomos a abordar el último bloque del transmisor y el que tal vez sea el aspecto más complejo de los sistemas OFDM, cual es el del denominado **prefijo cíclico** o **CP** (Cyclic Prefix). Vamos a tratar de exponerlo con el mayor cuidado posible, por tanto. Como además su inclusión tiene mucho que ver con el canal y con el receptor, resulta conveniente utilizar un apartado independiente para introducirlo.

### 2.3.3. El prefijo cíclico

#### 2.3.3.1. LA ISI Y LA ICI

En sistemas de portadora única es bien conocido el fenómeno de la **interferencia entre símbolos** o **ISI** (*Intersymbol Interference*). Este consiste en que, por efecto de la dispersión introducida por canales no ideales, la duración temporal de cada símbolo es mayor a la salida que a la entrada; es decir, los símbolos recibidos tienen mayor longitud que los transmitidos. Esto implica que dichos símbolos se solapan entre ellos, produciendo una distorsión que es necesario eliminar de algún modo.

Este mismo efecto se produce también en el caso de OFDM<sup>10</sup>. Ciertamente, el problema de la ISI aparece cuando nos disponemos a transmitir varios símbolos consecutivos. Puesto que cada uno de dichos símbolos va a ser convolucionado con la respuesta impulsiva del canal, el resultado de dicha convolución será de mayor longitud.

Más concretamente (Fig. 2.7 y Fig. 2.8), si el  $k$ -ésimo símbolo transmitido,  $\mathbf{v}(k)$ , tiene longitud  $L_v$  y la respuesta impulsiva del canal tiene longitud  $L + 1$ , la salida correspondiente, denotada como  $\mathbf{y}(k)$ , tendrá longitud  $L_y$  dada por

$$L_y = L_v + (L + 1) - 1 = L_v + L. \quad (2.18)$$

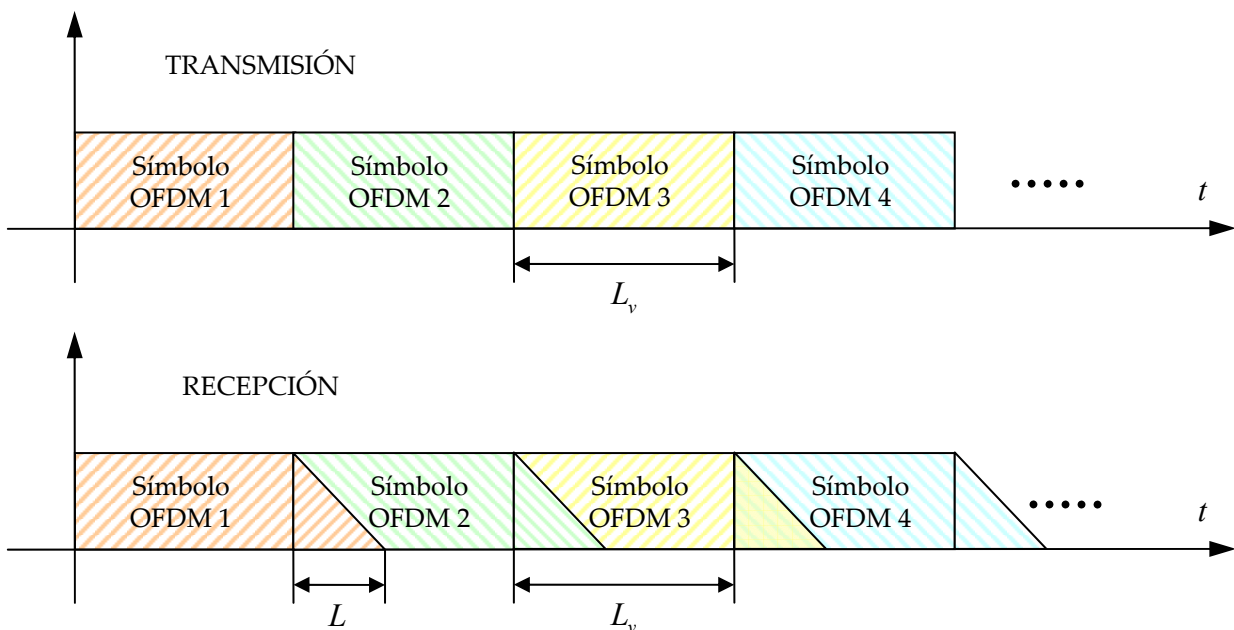


Fig. 2.9: Efecto de la ISI en OFDM.

<sup>10</sup> Algunos autores utilizan la nomenclatura de interferencia entre bloques o IBI (*Interblock Interference*) en lugar de ISI cuando se refiere a un sistema OFDM. Nosotros, sin embargo, mantendremos la notación de ISI.

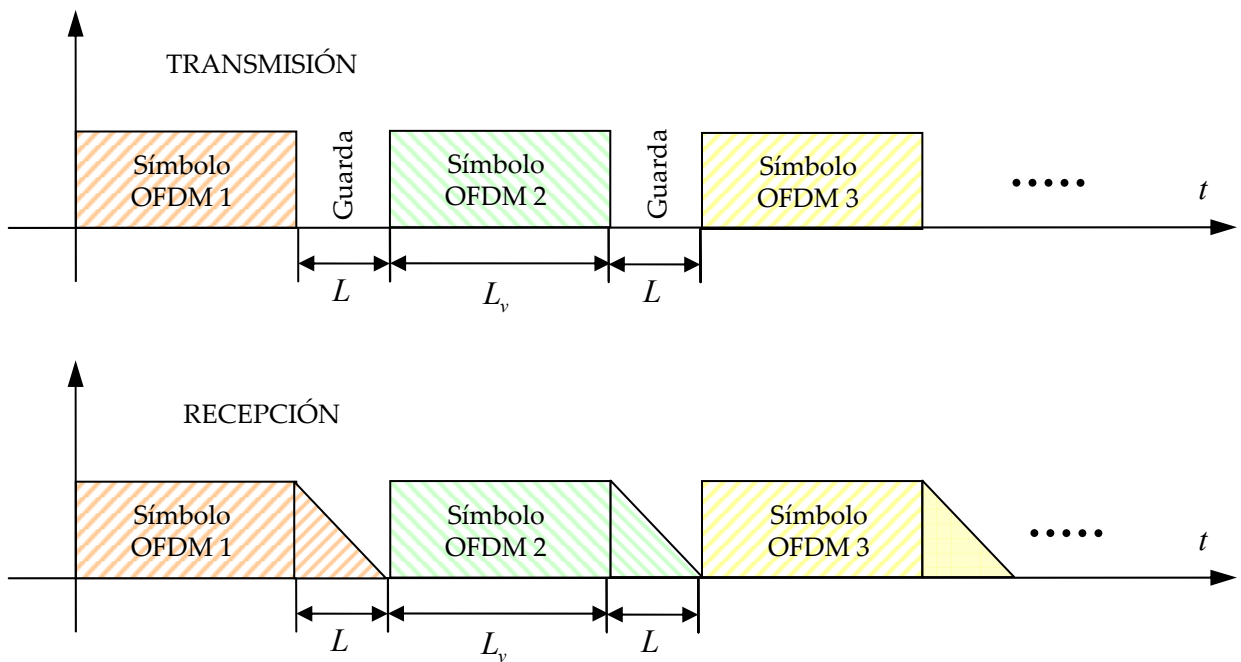


Fig. 2.10: Período de guarda para evitar la ISI.

Esto significa que las primeras  $L$  muestras del símbolo  $y(k + 1)$  se verán contaminadas por las  $L$  últimas de  $y(k)$ , según se indica en la Fig. 2.9. Para evitarlo, basta con colocar un período de guarda de longitud  $L$  entre símbolo y símbolo, de modo que entre  $v(k)$  y  $v(k + 1)$  existan  $L$  muestras sin información. De este modo (Fig. 2.10), la parte del símbolo  $y(k + 1)$  afectada por ISI no sería relevante y podría ser descartada. De igual manera, nos valdría que ese período de guarda estuviese formado por muestras que no fueran de información, ya que podrían sufrir distorsión y no nos preocuparía.

Pues bien, esta labor puede ser cumplida perfectamente por el propio CP, ya que su longitud es justamente  $L$  (recordemos la Fig. 2.8), de modo que dichas  $L$  muestras son redundantes y por lo tanto no contienen información, así que nos da exactamente igual que se vean contaminadas por la ISI.

Dicho esto, en un sistema OFDM no sólo existe ISI, sino que aparece también otro tipo de interferencia denominada **interferencia entre canales** o **ICI** (*Interchannel Interference*). Esta es la que se produce dentro de cada uno de los símbolos, debido al efecto que cada subcanal realiza sobre los demás. Veamos en qué consiste, y para ello vamos a suponer que se transmite un solo símbolo OFDM; es decir,  $\bar{X}(k)$  y por tanto su IDFT,  $x(k)$ , están definidas sólo para  $k = 1$ . En ese caso, obviamente, es imposible que existan interferencias entre distintos símbolos OFDM, con lo cual no habrá ISI y podremos centrarnos de manera exclusiva en la ICI.

Aún sin ISI, resulta evidente que la señal que llega al receptor es distinta en general de la que se transmitió, debido a la acción del canal. En efecto, si no incluyéramos el prefijo cí-

clico, después del convertidor paralelo-serie tendríamos que la señal transmitida sería

$$x(n) = \{x_0(1) \quad x_1(1) \quad \cdots \quad x_{2N-1}(1)\}. \quad (2.19)$$

La señal recibida, por otra parte, no será más que la **convolución lineal** entre  $x(n)$  y la **respuesta impulsiva del canal** o **CIR** (*Channel Impulse Response*),  $h(n)$ ,

$$y(n) = h(n) * x(n). \quad (2.20)$$

Supondremos, como hemos dicho antes, que  $h(n)$  tiene longitud  $L + 1$ . Es decir,

$$h(n) = \{h_0 \quad h_1 \quad \cdots \quad h_L\}. \quad (2.21)$$

Así pues es obvio que, a menos que dispongamos de un canal perfectamente ideal, es decir,  $h(n) = \delta(n)$ ,  $y(n)$  será distinta de  $x(n)$ . Esto significa, pues, que de algún modo las distintas componentes espectrales de  $x(n)$  han interferido entre sí al pasar por el canal. ¿Cómo podemos evitarlo?

### 2.3.3.2. EL PREFIJO CÍCLICO Y LA ICI

El problema que acabamos de comentar, planteado desde otro punto de vista pero con idéntica formulación, es ya clásico en el estudio de los sistemas de comunicaciones. Así, si por un momento consideramos que  $x(n)$  es una secuencia de símbolos individuales, lo que estamos abordando ahora es el estudio del efecto de un canal imperfecto que provoca ISI (interferencia entre cada uno de dichos símbolos individuales). La solución a este problema, bien conocida (p.ej., [Haykin88]), es el criterio de Nyquist para la transmisión sin ISI, que nos dice que en el dominio de la frecuencia continua ha de cumplirse que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(f + \frac{k}{T}\right) = T, \quad (2.22)$$

siendo  $T$  el período de símbolo. Es más, si esto no fuera así, y obviamente no tiene por qué serlo, siempre podemos añadir filtros en transmisión y/o recepción, de modo que tengamos

$$y(n) = g(n) * x(n) \quad (2.23)$$

con

$$g(n) = h_R(n) * h(n) * h_T(n), \quad (2.24)$$

y siendo  $h_R(n)$  y  $h_T(n)$  las respuestas impulsivas de dichos filtros de transmisión y recepción, respectivamente. De este modo, y escogiéndolos adecuadamente, siempre vamos a poder garantizar que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} G\left(f + \frac{k}{T}\right) = T, \quad (2.25)$$



y de este modo eliminaríamos la ISI.

Volvamos ahora al problema que realmente nos ocupa, el del sistema OFDM. Aquí la solución anterior no es aplicable, puesto que no nos interesa para nada el dominio de las frecuencias continuas. Efectivamente, según comentábamos en el apartado 1.1, la principal ventaja de la modulación multiportadora es su capacidad de adaptarse a las imperfecciones tanto de la respuesta en frecuencia del canal como del ruido presente en el mismo; y esa adaptación se debe a que nos permite trabajar directamente en el dominio de la frecuencia, de modo que podemos escoger los parámetros adecuados en dicho dominio para optimizar la transmisión. Y, claro está, a estas alturas del desarrollo tecnológico del campo de las comunicaciones, resulta poco o nada conveniente plantearse un sistema analógico, con el cual trabajaríamos en las frecuencias continuas. Justo al contrario, si queremos aprovechar toda la potencialidad que nos ofrecen los sistemas digitales, y en particular la enorme eficiencia en el cálculo del par DFT-IDFT, nos vemos obligados a trabajar con frecuencias discretas.

Es aquí donde nos encontramos con la principal diferencia a la hora de abordar la ICI respecto de la situación clásica que también acabamos de comentar. Y es que, según es bien sabido, para representar unívocamente en el dominio de la frecuencia una señal temporal discreta de longitud  $N$ , son necesarias al menos  $N$  muestras frecuenciales de la misma. ¿Qué significa esto en nuestro caso? Volvamos de nuevo a la ecuación que nos representa el efecto del canal, es decir,

$$y(n) = h(n) * x(n). \quad (2.26)$$

Sabemos que  $x(n)$  tiene longitud  $2N$ , con lo cual necesitamos  $2N$  muestras frecuenciales de la misma para que su representación espectral contenga exactamente la misma información que la propia señal temporal. Aquí no hay problema, puesto que  $\bar{X}(1)$  es justamente la DFT de  $x(n)$  (Fig. 2.8), y tiene precisamente longitud  $2N$  también. Sin embargo, no tenemos tanta suerte con  $y(n)$ .

Puesto que  $h(n)$  tiene longitud  $L+1$ ,  $y(n)$ , convolución lineal de la entrada y del canal, tendrá longitud  $2N+L$ , es decir,

$$y(n) = \{y_0(1) \quad y_1(1) \quad \cdots \quad y_{2N+L}(1)\}, \quad (2.27)$$

con lo cual necesitaríamos justamente al menos  $2N+L$  muestras frecuenciales de la misma para representarla unívocamente. Esto quiere decir, y es la conclusión importante, que no podemos encontrar ningún modo de relacionar las DFT's de  $2N$  muestras de  $x(n)$  e  $y(n)$ <sup>11</sup> a partir de la ecuación (2.26), ya que la segunda no tiene posibilidad de ser expresada con  $2N$  muestras frecuenciales. ¿Qué podemos hacer entonces?

---

<sup>11</sup> Por analogía, vamos a denominar  $\bar{Y}(1)$  a la DFT de  $y(n)$ .

La solución más obvia sería operar con las DFT's de  $2N + L$  puntos tanto de  $x(n)$  como de  $y(n)$ . Así pues, si entendemos ahora que tanto  $\bar{\mathbf{X}}(1)$  como  $\bar{\mathbf{Y}}(1)$  son DFT's de  $2N + L$  puntos, y puesto que el producto de dos DFT's equivale a la **convolución circular** de las correspondientes señales en el tiempo, entonces la convolución lineal representada en (2.26) es análoga a una convolución circular de  $2N + L$  puntos (p.ej., [Oppenheim89]). Es decir,

$$y(n) = h(n) * x(n) = h(n) \circlearrowleft_{2N+L} x(n), \quad (2.28)$$

donde  $\circlearrowleft_{2N+L}$  indica la convolución circular de  $2N + L$  puntos.

En este caso, (2.28) tiene un equivalente claro en el dominio de la frecuencia,

$$\bar{\mathbf{Y}}(1) = \mathbf{H}\bar{\mathbf{X}}(1), \quad (2.29)$$

siendo  $\mathbf{H}$  la DFT de  $2N + L$  puntos del canal.

Realmente aumentar el número de muestras frecuenciales no ofrece demasiada dificultad, ya que basta con rellenar adecuadamente con ceros la secuencia  $x(n)$  hasta completar la longitud deseada. Es decir, en lugar de la  $x(n)$  anterior, pasaríamos a tener

$$x(n) = \{ x_0(1) \quad x_1(1) \quad \cdots \quad x_{2N-1}(1) \quad \underbrace{0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0}_L \}, \quad (2.30)$$

y a partir de aquí sería sencillo obtener la DFT de  $2N + L$  puntos. Podría pensarse, no obstante, que esto vuelve a aumentar la longitud de la secuencia  $y(n)$ , ya que al convolucionar la nueva  $x(n)$  con  $h(n)$  la longitud total sería  $(2N + L) + L - 1 = 2N + 2L - 1$ ; pero realmente no hay ningún problema en ello, ya que las últimas  $L - 1$  muestras resultantes son cero, con lo cual pueden ser eliminadas, quedando  $y(n)$  con una longitud efectiva de  $2N + L$ .

El principal problema del rellenado con ceros es que verdaderamente no nos interesan las DFT's de  $2N + L$  puntos. En efecto, según ya sabemos del funcionamiento del sistema OFDM, la información a transmitir va insertada originalmente en las frecuencias centrales de cada subcanal, teniendo  $N$  subsímbolos que luego, con la extensión simétrica conjugada, se transforman en  $2N$ . Y son esas frecuencias centrales las que nos interesan, no otras. Siempre es posible interpolar, eso sí, de modo que a partir de las  $2N + L$  muestras frecuenciales disponibles podríamos obtener las  $2N$  que realmente nos importan. Sin embargo, esto obligaría a un procesamiento adicional que podemos evitar con la elegante alternativa que nos ofrece el prefijo cíclico<sup>12</sup>.

---

<sup>12</sup> No obstante, últimamente el rellenado con ceros está siendo muy utilizado en OFDM aplicada a sistemas *wireless* sin asignación óptima de bits [Wang00] pues tiene ciertas ventajas cuando no se usa dicha asignación. De todas maneras, como este no es el objeto de nuestra tesis, pasaremos por alto dicha posibilidad.

Dicho CP se basa en la mencionada propiedad que relaciona el producto de dos DFT's con la convolución circular de las señales en el tiempo. De esta manera, si retomamos la ecuación (2.29), pero entendiendo que ahora todas las DFT's son de  $2N$  puntos, el equivalente en el dominio del tiempo sería

$$y(n) = h(n) \circlearrowleft_{2N} x(n), \quad (2.31)$$

donde  $\circlearrowleft_{2N}$  indica la convolución circular de  $2N$  puntos. Esta no es, evidentemente, la operación que realiza el canal de forma, digamos, natural. Sin embargo, podemos forzarlo a que actúe de ese modo:

En la práctica, la convolución circular puede calcularse de hecho como una convolución lineal en el rango de interés, siempre y cuando hayamos extendido periódicamente alguna de las señales implicadas. Es decir, si tomamos por ejemplo

$$v(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n - 2mN), \quad (2.32)$$

entonces se cumplirá que

$$y(n) = h(n) * v(n), \quad 0 \leq n \leq 2N + L. \quad (2.33)$$

Esto quiere decir que si lo que introducimos en el canal es  $v(n)$  en lugar de  $x(n)$ , la convolución lineal que realiza dicho canal es completamente equivalente a como si se efectuara una convolución circular entre  $h(n)$  y  $x(n)$ , y por tanto se cumpliría la ecuación (2.29) con las DFT's de  $2N$  puntos, como es nuestro deseo.

Aún es más, si nos fijamos con atención descubriremos que no hace falta que la extensión periódica sea infinita, sino que nos vale con que se efectúe dentro del rango de la convolución. Más detalladamente, si  $y(n)$  tiene longitud  $2N + L$ , nos basta con que  $x(n)$  sea periódica en un rango de tamaño  $2N + L$  para así asegurarnos de que la convolución lineal es equivalente a la circular. Aquí es donde radica el secreto del CP, en la adición periódica de  $L$  muestras de  $x(n)$ , del siguiente modo:

$$v(n) = \{x_{2N-L}(1) \quad x_{2N-L+1}(1) \quad \cdots \quad x_{2N-1}(1) \quad x_0(1) \quad x_1(1) \quad \cdots \quad x_{2N-1}(1)\}. \quad (2.34)$$

Así pues, si lo que transmitimos al canal es  $v(n)$  en lugar de  $x(n)$ , la operación de convolución lineal es equivalente a la circular en el rango que nos interesa, y podremos utilizar las DFT's de  $2N$  puntos.

En definitiva, y como conclusión, podemos afirmar ya que el empleo del prefijo cíclico nos sirve tanto para eliminar la ISI, por su acción de período de guarda, como la ICI, por su efecto de transformar una convolución lineal en una circular.

### 2.3.3.3. INCONVENIENTES DEL PREFIJO CÍCLICO

Vistas ya las indudables ventajas del CP, también es claro que tiene al menos dos importantes dificultades:

- Por una parte, disminuye la **eficiencia espectral** del sistema. En efecto, puesto que se están introduciendo  $L$  muestras redundantes por cada  $2N$  muestras de información, dicha eficiencia espectral se ve reducida en un factor de  $2N/(2N+L)$ . Más concretamente, esto significa que, dado un ancho de banda ocupado originalmente  $B$ , tras la utilización del CP el nuevo ancho de banda  $B'$  se verá incrementado en el anterior factor, es decir,

$$B' = B \frac{2N+L}{2N}. \quad (2.35)$$

Por el contrario, si tenemos limitación estricta en el ancho de banda, la tasa binaria debe disminuir. De este modo, si la tasa inicial de información es  $R$ , tras la utilización del CP pasaríamos a conseguir una tasa binaria máxima de

$$R' = R \frac{2N}{2N+L}. \quad (2.36)$$

- Por otra parte, el CP aumenta la **latencia** del sistema, entendida esta como el retraso de procesado de dicho sistema, es decir, el tiempo transcurrido entre que se transmite y se recibe la información [Bingham00]. En algunos casos, sobre todo si la longitud del CP es muy grande, dicha latencia puede alcanzar límites inaceptables.

### 2.3.3.4. FORMULACIÓN MATRICIAL

Cuando empleamos un CP, y recordando la Fig. 2.8, el símbolo  $\mathbf{x}(k)$  se transforma en  $\mathbf{v}(k)$  mediante la relación matricial

$$\mathbf{v}(k) = \mathbf{P}\mathbf{x}(k), \quad (2.37)$$

donde  $\mathbf{P}$  es una matriz de tamaño  $(2N+L) \times 2N$  definida como

$$\mathbf{P} = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{L \times 2N} & \mathbf{I}_L \\ \hline & \mathbf{I}_{2N} \end{array} \right]. \quad (2.38)$$

En la ecuación anterior,  $\mathbf{0}_{(2N+L) \times 2N}$  es una matriz nula de tamaño  $(2N+L) \times 2N$ , mientras que  $\mathbf{I}_L$  y  $\mathbf{I}_{2N}$  representan matrices identidad de tamaños  $L$  y  $2N$ , respectivamente. (Recordemos que  $L+1$  es la longitud de la CIR).

Cuando este símbolo  $\mathbf{v}(k)$  se transmite sobre el canal, el símbolo recibido (en ausencia de ruido) consiste en la convolución de  $\mathbf{v}(k)$  con la CIR. Denominando  $\mathbf{y}_{ext}(k)$  al símbolo recibido en el instante  $k$ , podemos expresar matricialmente su relación con  $\mathbf{v}(k)$  como

$$\mathbf{y}_{ext}(k) = \mathbf{C}_{cl} \mathbf{v}(k) + \mathbf{n}_{ext}(k), \quad (2.39)$$

donde  $\mathbf{n}_{ext}(k)$  es un vector de ruido y

$$\mathbf{C}_{cl} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ h(L) & h(L-1) & \dots & h(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h(L) & \dots & h(1) & h(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & h(0) \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

es una matriz de tamaño  $(2N + L) \times (2N + L)$ .

### 2.3.4. Receptor OFDM

El esquema simplificado de un receptor OFDM es el presentado en la Fig. 2.11 <sup>13</sup>.

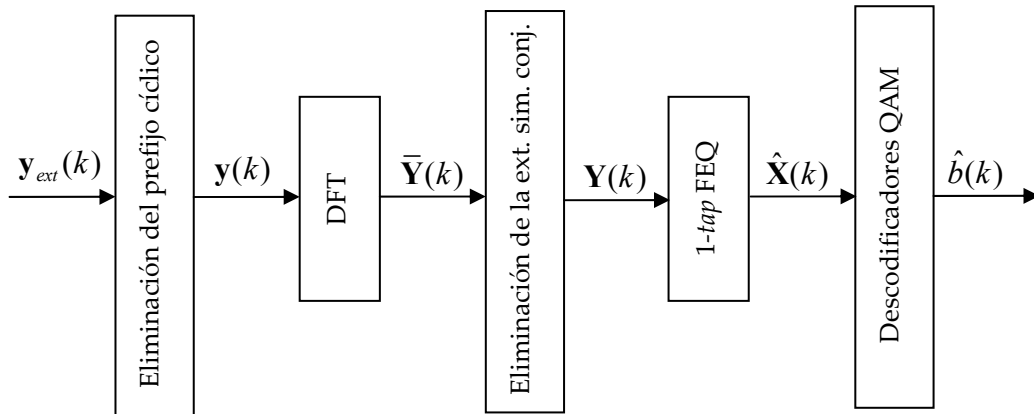


Fig. 2.11: Receptor OFDM discreto.

Como podemos comprobar, por lo general los pasos efectuados son los inversos que los que se tenían en el transmisor. Además, puesto que la última parte, es decir, el uso de un decodificador QAM por cada subcanal, es idéntica a la presentada en el apartado 2.1, no le prestaremos mayor atención. Respecto del resto de la figura, y para que se pueda seguir con mayor claridad la explicación, vamos a desarrollarla más detalladamente en la Fig. 2.12.

<sup>13</sup> Por simplicidad, se ha suprimido el convertidor serie-paralelo que iría al inicio del esquema y se ha sustituido la batería de decodificadores QAM por un solo bloque.

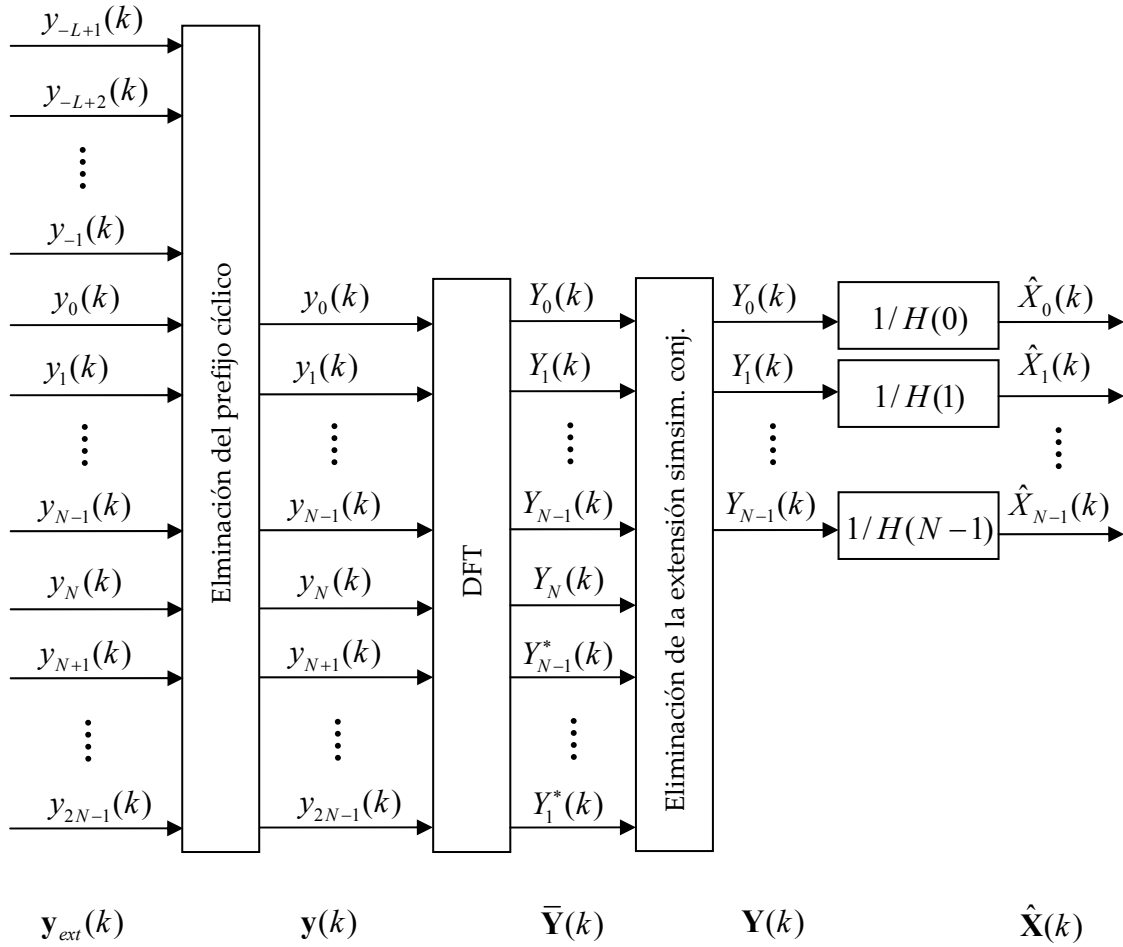


Fig. 2.12: Desarrollo del receptor OFDM discreto.

En primer lugar se elimina el CP o, más propiamente, las muestras de  $\mathbf{y}_{ext}(k)$  que se encuentran en las  $L$  primeras posiciones, que es donde se insertó dicho CP en el transmisor. El prefijo cíclico ya ha cumplido su función, que es la de suprimir las interferencias en los símbolos recibidos, pero ha sido corrompido por la ISI con lo cual debemos descartarlo. Todo esto conlleva que

$$\mathbf{y}(k) = [\mathbf{0}_{L \times 2N} \mid \mathbf{I}_{2N}] \mathbf{y}_{ext}(k) + \mathbf{n}(k), \quad (2.41)$$

siendo  $\mathbf{n}(k)$  el vector de ruido resultante de eliminar las primeras  $L$  muestras de  $\mathbf{n}_{ext}(k)$ .

Si ahora agrupamos las ecuaciones (2.39), (2.40) y (2.41),

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{v}(k), \quad (2.42)$$

donde  $\mathbf{C}$  tiene tamaño  $2N \times (2N + L)$ , y viene dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} h(L) & h(L-1) & \cdots & h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h(L) & \cdots & h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & h(0) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

El siguiente paso es obtener la relación entre  $\mathbf{y}(k)$  y  $\mathbf{x}(k)$ . Para ello combinamos adecuadamente (2.37), (2.38), (2.42) y (2.43). Más exactamente,

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} h(L) & h(L-1) & \cdots & h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h(L) & \cdots & h(1) & h(0) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{L \times 2N} & \mathbf{I}_L \\ \mathbf{I}_{2N} & \end{bmatrix} \mathbf{v}(k) + \mathbf{n}(k). \quad (2.44)$$

Tras simplificar la ecuación anterior resulta finalmente que

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}(k) + \mathbf{n}(k), \quad (2.45)$$

donde  $\mathbf{C}_p$  es una matriz de tamaño  $2N \times 2N$  dada por

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & h(3) & h(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h(L) & h(L-1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h(L) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h(L) & h(L-1) & \cdots & h(1) & h(0) \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Esta matriz, que como vemos tiene una estructura peculiar, recibe el nombre de **circulante**. Pues bien, puede ser demostrado [Bellman1960] que  $\mathbf{C}_p$  admite una descomposición en autovalores y autovectores donde:

- Sus autovalores son iguales a la respuesta en frecuencia del canal, evaluada en las frecuencias equiespaciadas

$$\omega_i = \frac{2\pi i}{2N}, \quad i = 1, 2, \dots, 2N. \quad (2.47)$$

Por tanto, y denominando  $H(i)$  a la respuesta en frecuencia medida en  $\omega_i$  podemos escribir entonces que

$$\lambda_i = H(i) = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi i}{2N}}, \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1. \quad (2.48)$$

Claramente, apreciamos que

$$H(2N-i) = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi(2N-i)}{2N}} = H(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = -\frac{2\pi i}{2N}} = H^*(i). \quad (2.49)$$

- Los correspondientes autovectores son las columnas de la matriz de la DFT de  $2N$  puntos  $\mathbf{F}$ , definida ya en (2.15).

Todo esto quiere decir que, analíticamente,

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}, \quad (2.50)$$

o, de forma análoga,

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{F} \mathbf{C}_p \mathbf{F}^H, \quad (2.51)$$

donde  $\bar{\mathbf{S}}$  es una matriz diagonal construida como

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{diag}\{H(0), H(1), \dots, H(N-1), H(N), H(N+1), \dots, H(2N)\}. \quad (2.52)$$

Utilizando las relaciones (2.49) podemos decir que

$$\bar{\mathbf{S}} = \text{diag}\{H(0), H(1), \dots, H(N-1), H(N), H^*(N-1), \dots, H^*(1)\}. \quad (2.53)$$

Esto nos permite decir que  $\bar{\mathbf{S}}$  es la matriz diagonal formada por la extensión simétrica conjugada de la respuesta en frecuencia de los  $N$  primeros subcanales.

Siguiendo con el esquema de las Fig. 2.11 y Fig. 2.12, el siguiente paso en el receptor es realizar la DFT. De este modo, y con (2.45),

$$\bar{\mathbf{Y}}(k) = \mathbf{F} \mathbf{y}(k) = \mathbf{F} \mathbf{C}_p \mathbf{x}(k) + \mathbf{F} \mathbf{n}(k). \quad (2.54)$$

Y ahora, sustituyendo (2.14) y (2.50) en (2.54) y recordando (2.16), es decir, que  $\mathbf{F} \mathbf{F}^H = \mathbf{I}_{2N}$  por ser  $\mathbf{F}$  una matriz unitaria,

$$\bar{\mathbf{Y}}(k) = \mathbf{F} \mathbf{C}_p \mathbf{x}(k) + \mathbf{N}(k) = \mathbf{F} \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{S}} \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k) + \mathbf{N}(k) = \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{X}}(k) + \bar{\mathbf{N}}(k), \quad (2.55)$$

donde  $\bar{\mathbf{N}}(k)$  es la DFT del vector de ruido  $\mathbf{n}(k)$ . Las características de ambos ruidos son idénticas por ser  $\mathbf{F}$  unitaria.

Puesto que tanto  $\bar{\mathbf{S}}$  como  $\bar{\mathbf{X}}(k)$  poseen simetría conjugada, también la tendrá  $\bar{\mathbf{Y}}(k)$ . Por tanto, no ocurre nada en absoluto, no estamos perdiendo información, por quedarnos con las  $N$  primeras filas de la ecuación anterior. De este modo,

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{S} \mathbf{X}(k) + \mathbf{N}(k), \quad (2.56)$$

donde

$$\mathbf{S} = \text{diag}\{H(1), \dots, H(N)\}. \quad (2.57)$$

La ecuación (2.56) nos está diciendo que existe un total desacoplo entre los distintos subcanales al llegar al receptor, ya que cada uno de ellos sólo depende del correspondiente subcanal en el transmisor. Es decir, se ha eliminado la ICI, como habíamos comentado desde



un principio<sup>14</sup>.

Por todo ello, lo único que nos faltaría por hacer para recuperar los símbolos transmitidos es deshacer la ganancia introducida por el canal para cada una de las frecuencias. Volviendo de nuevo a las Fig. 2.11 y Fig. 2.12, esto es lo que en el receptor se representa mediante la igualación de *1-tap* en el dominio de la frecuencia. De este modo, la estimación del vector transmitido sería

$$\hat{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}(k). \quad (2.58)$$

Hay que indicar además el importante hecho de que, gracias a la independencia entre los subcanales, el receptor simple anterior equivale a un **receptor de máxima verosimilitud** o **ML** (*Maximum Likelihood*), es decir, es el receptor óptimo que podemos lograr.

Podríamos pensar que la inversión anterior no funciona si algún  $H(i)$  vale cero. Sin embargo, si eso sucede el subcanal correspondiente no será usado en una modulación OFDM con asignación óptima de bits, como vamos a ver a continuación. Por tanto, en ese caso no se transmite ningún símbolo por dicho subcanal y por tanto la inversión no causa ningún problema.

## 2.4 ASIGNACIÓN ÓPTIMA DE BITS

### 2.4.1. Introducción

Según acabamos de ver, OFDM permite el tratamiento independiente y diferenciado de los diferentes subcanales transmitidos. Esto va a conllevar sin duda una importantísima ventaja: la de poder asignar los bits de forma óptima a cada uno de dichos subcanales.

Efectivamente, las diferentes subsecuencias  $\{b_i(k)\}$  presentes en la Fig. 2.7 no tienen por qué contener un número igual de bits, sino que por el contrario es posible asignar una cantidad diferente a cada uno de los subcanales con el fin de optimizar el funcionamiento del sistema.

Cuando se habla de la eficiencia para un sistema de transmisión de datos, esta se analiza y mide normalmente en términos de **probabilidad de error** para una determinada tasa de bits y un cierto valor de la **relación señal a ruido**  $SNR$  (*Signal to Noise Ratio*). No obstante, es más útil para nuestro propósito, y así se hace en OFDM, considerar el valor máximo que podemos alcanzar para la tasa binaria cuando tanto la probabilidad de error como la energía del transmisor están fijadas.

---

<sup>14</sup> Y la ISI, recordemos, tampoco va a existir en tanto en cuanto el CP sirve de período de guarda para evitar que símbolos contiguos se solapen entre sí.

Pues bien, lo que vamos a estudiar en este apartado es cómo efectuar dicha asignación óptima de bits. Aclaremos también que, aunque existe mucha confusión sobre este punto, cuando dicha asignación óptima se aplica sobre OFDM normalmente se habla de **modulación multitono discreta** o **DMT** (*Discrete Multitone*). Y decimos que existe sobre este punto, porque en muchas otras situaciones se utilizan OFDM y DMT independientemente de que, como hemos mencionado, haya algún tipo de asignación de bits, sino que se reserva OFDM para canales *wireless* y DMT para los *wireline*. Esta segunda posibilidad está relacionada con el hecho de que usualmente los sistemas *wireless* no aplican asignación óptima de bits y los *wireline* sí, aunque no siempre tiene por qué ser así. De hecho, lo único que se necesita para utilizar la asignación óptima es que el transmisor conozca la CIR, lo cual puede suceder siempre que el canal sea bidireccional, pero sin ninguna otra implicación.

## 2.4.2. Medida de prestaciones de un sistema

Antes de presentar la asignación óptima de bits propiamente dicha, es necesario realizar un breve estudio sobre qué necesitamos para realizar dicha optimización.

En el análisis que vamos a realizar en este apartado, vamos a suponer que se utiliza un codificador QAM para la transmisión de datos en cada subcanal. Se elige este tipo de codificación porque la QAM es una solución muy versátil, dado que se adapta muy bien a las transmisiones de un número variable de bits. A continuación vamos a realizar un breve resumen de sus características; para un estudio más pormenorizado puede acudirse por ejemplo a [Proakis95].

### 2.4.2.1. BREVE REPASO DE LA MODULACIÓN QAM

La modulación de amplitud en cuadratura es un método de modulación muy empleado para codificar un número variable de bits, en una señal que está modulada tanto en fase como en amplitud. Para la misma frecuencia, se emiten dos portadoras en cuadratura (ortogonales), por lo que se nos permite transmitir símbolos complejos, proyectando la parte real sobre la componente en fase y la parte imaginaria sobre la componente en cuadratura. Como sabemos, el conjunto de todos los símbolos complejos posibles se denomina constelación del codificador QAM.

Uno de los parámetros que hay que tener en cuenta en la implementación de un codificador QAM es la energía media disponible que vamos a tener para realizar las transmisiones. Esta energía promedio transmitida está íntimamente relacionada con la distancia entre los puntos de la constelación. Por ejemplo, si nos fijamos en un canal que opera a una frecuencia  $\omega_0$ , y llamando  $X_i = (I_i, Q_i)$  al símbolo complejo a transmitir, la señal que genera el codificador será de la forma

$$s(t) = kI_i \cos(\omega_0 t) + kQ_i \sin(\omega_0 t), \quad (2.59)$$

donde el factor  $k$  se utiliza para ajustar la distancia entre los puntos de la constelación,  $d$ . Este parámetro se relaciona con la energía promedio transmitida,  $\varepsilon$ , según

$$d^2 = \frac{6\varepsilon}{M-1}, \quad (2.60)$$

donde el término

$$M = 2^b \quad (2.61)$$

se corresponde con el número total de símbolos en la constelación, necesarios para transmitir  $b$  bits por símbolo. También asumiremos que todos los  $M$  símbolos de la constelación son igualmente probables.

Para un canal bidimensional de ganancia compleja  $H(i)$  (nótese que estamos trabajando con ganancias discretas en el dominio de la frecuencia, de modo que  $H(i)$  representa la ganancia compleja en el subcanal  $i$ ), y con una densidad espectral de potencia de ruido por dimensión igual a  $\sigma_i^2$ , tenemos la siguiente expresión (válida si la SNR es elevada),

$$SNR_i = \frac{\varepsilon |H_i|^2}{2\sigma_i^2}. \quad (2.62)$$

La probabilidad de error de símbolo QAM en el  $i$ -ésimo subcanal viene dada por

$$P_{e,i} = K_b Q \left[ \frac{|H_i|d}{2\sigma_i} \right]. \quad (2.63)$$

donde  $K_b$  es un factor regulador de la tasa de error en función de  $b$ . Un estudio realizado en [Kalet89] sugiere  $K_b = 4$  para las aplicaciones que trabajen con un número de bits mayor que 2. Este perfil de hipótesis se adaptará perfectamente a nuestro caso.

En la situación en la que nos encontramos ahora podemos calcular el número máximo de bits por símbolo que puede ser transmitido por un canal, cuando la probabilidad de error del sistema y la energía disponible del transmisor están fijadas. Combinando adecuadamente las cuatro últimas ecuaciones y admitiendo que la probabilidad de error es la misma para todos los subcanales se obtiene que

$$b_i = \log_2 \left( 1 + \frac{3 \cdot SNR_i}{[Q^{-1}(P_e/K_b)]^2} \right). \quad (2.64)$$

Como vemos, cuanto mayor  $SNR$  tengamos o mayor probabilidad de error permitamos, mayor número de bits podremos transmitir con la misma energía en el transmisor. La tasa de bits en cada subcanal vendrá dada por la relación

$$R_b = \frac{b_i}{T_s}, \quad (2.65)$$

donde  $T_s$  es el tiempo de duración del símbolo QAM.

#### 2.4.2.2. ANÁLISIS DE UN CANAL DEL SISTEMA. EL *GAP* Y EL MARGEN

Supongamos que tenemos un subcanal de ganancia compleja  $H_i$  y caracterizado por una densidad espectral de potencia de ruido de  $\sigma_i^2$ . Según el teorema de Shannon, la capacidad por dimensión de un canal (o máxima información que el canal es capaz de transmitir, es decir, la información mutua entre la entrada y la salida, medida en bits), viene dada por

$$\bar{C}_i = \frac{1}{2} \log_2(1 + SNR_i). \quad (2.66)$$

Cualquier sistema realizable tiene que funcionar transmitiendo una cantidad de información inferior a su capacidad. Esta diferencia es la que nos lleva a definir el *gap*,  $\Gamma$ , de un sistema, el cual viene dado por

$$\Gamma = \frac{2^{2\bar{C}} - 1}{2^{2\bar{b}} - 1} = \frac{SNR}{2^{2\bar{b}} - 1}. \quad (2.67)$$

La existencia de un *gap* de  $X$  dB en un sistema equivale a pensar que está transmitiendo una cantidad de información igual a la capacidad que tendría un sistema con una  $SNR$   $X$  dB menor.

En general, podemos afirmar que el *gap* de un sistema depende sólo del método de codificación empleado, y no del número de bits por símbolo. Así, cuando empleamos codificaciones mejores, lo que hacemos es reducir el *gap* del sistema por un factor que denominamos **ganancia del código**. Cuanto menor sea el *gap*, mejor es el sistema, ya que nos acercamos a su capacidad de transmisión máxima teórica. Por tanto, si se emplea un código con ganancia  $\gamma_c$  dB, el *gap* pasa ser  $(\Gamma - \gamma_c)$  dB. Esta interpretación del *gap* se ve claramente al reescribir la expresión anterior en la forma

$$\bar{b} = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{SNR}{\Gamma} \right). \quad (2.68)$$

Para calcular el *gap* con nuestro sistema de codificación QAM, basta con combinar (2.64) y (2.66), teniendo en cuenta que al ser un canal bidimensional,

$$b = 2\bar{b}. \quad (2.69)$$

Por tanto,

$$\log_2 \left( 1 + \frac{3 \cdot SNR}{[Q^{-1}(P_e/K_b)]^2} \right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{SNR}{\Gamma} \right), \quad (2.70)$$

de donde podemos deducir que la expresión para el *gap* es:

$$\Gamma = \frac{1}{3} \left[ Q^{-1} \left( \frac{P_e}{K_b} \right) \right]^2. \quad (2.71)$$

Podemos apreciar claramente cómo una vez que hemos seleccionado la probabilidad de error para el sistema, el *gap* se mantiene constante para todos los valores de  $b$ . Esto resulta particularmente útil para los sistemas de transmisión multicanal, que tienen que enviar un número de bits diferente por cada subcanal pero que emplean el mismo esquema de codificación y la misma probabilidad de error deseada.

Ahora vamos a hablar del **margen**, que es otro parámetro importante a tener en cuenta. Si el *gap* era una medida de lo que nuestro esquema de codificación nos separaba del máximo teórico, el margen va a ser un parámetro que introduzca a propósito el transmisor para proteger el mensaje frente a ruido inesperado. Vamos a definir el margen como la cantidad en la que puede ser reducida la  $SNR$  y aun así, mantener la probabilidad de error dentro del límite fijado. En un sistema con margen, podemos escribir que

$$\bar{b} = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{SNR}{\gamma_m} \right), \quad (2.72)$$

donde  $\gamma_m$  es el margen utilizado. Nótese que un margen negativo (en dB) indicaría que la  $SNR$  en el sistema debe ser aumentada para poder cumplir con los requisitos de probabilidad de error. Con el *gap* y el margen expresados en dB, tenemos en conjunto que

$$\bar{b} = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{SNR}{\Gamma \gamma_m} \right). \quad (2.73)$$

El margen también se puede entender como una medida de la calidad del sistema. En efecto, si forzamos que nuestro sistema trabaje con una tasa binaria fija (impuesta de antemano), el margen mediría la cantidad en que puede ser empeorada la  $SNR$  para seguir teniendo la probabilidad de error dentro del límite prefijado.

### 2.4.3. La carga de los subcanales

#### 2.4.3.1. JUSTIFICACIÓN

En este apartado vamos a estudiar cómo se lleva a cabo el proceso de asignación de bits a los diferentes subcanales. Por supuesto, existen muchas formas de llevar a cabo este proce-

so, pero sólo una será la óptima para cumplir un determinado objetivo. En nuestro caso, el objetivo que se debe cumplir es el siguiente: maximizar la tasa binaria en el sistema manteniendo la probabilidad de error de bit inferior a un cierto valor fijado de antemano. Además, para llegar a una solución coherente, también debemos limitar la energía máxima disponible en el transmisor (para cada símbolo) a  $\varepsilon_{\max}$ .

Para algunos sistemas de comunicación que utilizan modulación multiportadora en su implementación, es posible calcular la carga de los subcanales en función de las características del canal. Esta situación es la que se va a dar, por ejemplo, en los sistemas ADSL, en los que se realiza una fase de entrenamiento antes de cada transmisión para determinar con precisión la capacidad que puede ser transportada en cada subcanal. Para que esto sea posible, debe poder habilitarse un camino de realimentación desde el receptor al transmisor, con el fin de poner en conocimiento de este último los parámetros medidos durante la fase de entrenamiento (que serán la atenuación que presenta el medio de transmisión en cada frecuencia y la potencia de ruido y su distribución en el espectro). Sin embargo, para otras aplicaciones (como las de radiodifusión) no es posible habilitar este canal de realimentación, por lo que no podemos utilizar un algoritmo de carga adaptativo. En estos casos, la estrategia consistiría en configurar la transmisión de una forma suficientemente robusta frente al ruido y las interferencias por propagación multitrayecto que pudieran generarse.

Las conclusiones a las que llegamos en el apartado anterior nos permiten deducir que en un sistema DMT son dos los parámetros con los que tenemos que jugar para llevar a cabo el proceso de asignación de bits: por un lado, elegir los coeficientes  $m_i$  (número de bits por símbolo que se transmiten por cada subcanal); y por otro, elegir los coeficientes  $\gamma_i$  correspondientes a las fracciones de la  $\varepsilon_{\max}$  que se utilizan para transmitir en cada subcanal. Puede demostrarse [Cioffi] que la tasa de bits del sistema DMT se maximiza cuando las variables  $(m_i, \gamma_i)$  se escogen de tal forma que las probabilidades de error de bit en cada subcanal sean iguales.

Por otra parte, la probabilidad de error de bit en un subcanal depende tanto de la  $SNR$  presente en el subcanal como del número de símbolos (y la energía media con la que son transmitidos) disponibles para la transmisión. Por tanto, en un canal con menor  $SNR$ , tenemos que aumentar el coeficiente  $\gamma_i$  (enviar los símbolos con una mayor energía promedio) o bien disminuir  $m_i$  (enviar menos bits por símbolo en el subcanal). De todas formas, nosotros no podemos conocer las  $SNR$  en los subcanales a priori, ya que su valor dependerá de los coeficientes  $\gamma_i$ ; por tanto, tenemos que trabajar con un parámetro llamado  $SNR$  normalizada, que viene dado por

$$SNR_{i-norm} = \frac{|H_i|^2}{\sigma_i^2}. \quad (2.74)$$

En la ecuación (2.74),  $H_i$  representa la ganancia compleja del canal en el subcanal  $i$ , y

$\sigma_i$  es la densidad espectral de potencia de ruido en ese subcanal.

Teniendo en cuenta la *SNR* normalizada existente en cada subcanal, se generan dos conjuntos de valores: por un lado, los bits por símbolo que se van a transmitir por el mismo; y por otro, la energía media que se va a emplear en la transmisión por dicho subcanal. En cada uno de ellos podemos imponer una probabilidad de error deseada. Cuando concluye el algoritmo, podemos conocer la tasa binaria alcanzable en el sistema, el coste en energía que dicho proceso supone y la probabilidad de error teórica del sistema multiportadora, que puede definirse como la media de las probabilidades de error alcanzadas en cada subcanal.

La asignación óptima de energías en el caso analógico es un problema resuelto desde Shannon, que introduce la interpretación denominada *water-filling* [Proakis95]<sup>15</sup>. Sin embargo, su aplicación para el caso discreto se dilató mucho más, debido sobre todo al problema de que los resultados del número de bits asignados a cada subcanal no necesariamente tienen que salir enteros si no se imponen restricciones adicionales.

Fue en [Hughes-Hartogs87] cuando se introdujo por primera vez el algoritmo *water-filling* con asignación discreta de bits. Este algoritmo fue refinado, entre otros, por [Chow95]. En lo que sigue vamos a explicarlo de forma más o menos sencilla, de acuerdo a [Bingham00] pero un poco simplificado.

#### 2.4.3.2. EL ALGORITMO WATER-FILLING DISCRETO

Definamos para un sistema multicanal de  $N$  canales el vector de asignación de bits como

$$\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_N], \quad (2.75)$$

siendo cada  $b_i$  el número de bits por símbolo que transporta el subcanal  $i$ . Es obvio que la suma de todos los elementos de bits es igual al número de bits que se transmiten en cada símbolo DMT.

Para una determinada probabilidad de error, la energía promedio que hay que transmitir por un subcanal es una función monótona creciente con el número de bits por símbolo que se transmiten por ese subcanal. Es decir, cuantos más bits por símbolo queramos transmitir, mayor energía necesitaremos en el proceso. Podemos pues, expresar

$$\varepsilon_i = \varepsilon_i(b_i), \quad (2.76)$$

donde  $\varepsilon_i$  es la energía empleada en el subcanal  $i$ .

Definamos ahora otra función: el incremento de energía. Para un determinado subca-

---

<sup>15</sup> No vamos a entrar en los pormenores de esta solución. Remitimos a la referencia para más detalles.

nal, el incremento de energía para transportar  $b_i$  bits es la cantidad de energía adicional necesaria para transportar esos  $b_i$  bits, con respecto a la energía necesaria para transportar  $b_i - 1$  bits. Podemos pues, expresar dicho incremento como

$$\Delta\varepsilon_i(b_i) = \varepsilon_i(b_i) - \varepsilon_i(b_i - 1). \quad (2.77)$$

Recordando la expresión (2.74) para la  $SNR$  normalizada, podemos construir ya una  $SNR$  (sin normalizar), multiplicándola por la energía transmitida. Así pues, para cada subcanal podemos escribir,

$$SNR_i = \frac{e_i |H_i|^2}{2\sigma_i^2} = \frac{e_i g_i}{2}, \quad (2.78)$$

donde  $g_i$  es la  $SNR$  normalizada. El factor 2 en el denominador se debe a que estamos considerando ahora un canal de transmisión bidimensional. El número máximo de bits que pueden transmitirse por ese subcanal complejo, para una probabilidad de error y una  $SNR$  determinadas, viene dado por la expresión (2.64). Con esta expresión y (2.71), combinadas con (2.78), obtenemos que

$$\varepsilon(b_i) = 2 \frac{\Gamma}{g_i} (2^{b_i} - 1). \quad (2.79)$$

Nótese que si el valor de  $b_i$  es elevado, para transportar un bit más por el subcanal tenemos que duplicar la energía invertida en el proceso<sup>16</sup>. En cuanto a los incrementos de energía, podemos afirmar que

$$\Delta\varepsilon_i(b_i) = \frac{\Gamma}{g_i} 2^{b_i} = 2\Delta\varepsilon_i(b_i - 1), \quad (2.80)$$

es decir, que la transmisión de un bit más por un subcanal exige un aumento de 3 dB en la energía empleada.

Una vez que se ha escogido el sistema de codificación y se ha fijado la probabilidad de error deseada para cada uno de los subcanales, se procede a calcular los incrementos de energía para todos los subcanales y para todos los números de bits posibles. Dichos incrementos se tabularán para su uso en el algoritmo de asignación. Los bits se van asignando de uno en uno, escogiendo en cada momento el subcanal que requiera un menor incremento de energía para transportarlo. La asignación finaliza cuando se acaba la energía disponible en el transmisor, parámetro que debe estar fijado de antemano. Veamos cómo se desarrolla una iteración del algoritmo:

---

<sup>16</sup> Cuando no es un valor alto, existen tablas que nos indican las proporcionalidades correctas [Bingham00].



- Si aún se dispone de energía en el transmisor, se acude a las tablas de incrementos de energía, y se busca el subcanal que requiera un menor incremento de energía para transportar un bit más de los que ya transporta. Supongamos que es el subcanal  $n$ .
- Si el incremento de energía requerido en el subcanal  $n$  es inferior a la energía disponible en el transmisor, se asigna un bit más a ese subcanal y se actualiza el valor de la energía disponible en transmisión. Se regresa de nuevo al paso 1.
- Si, por el contrario, en el transmisor no tenemos energía suficiente para cubrir el incremento necesario, se da por finalizado el proceso de asignación.

Como vemos, este algoritmo garantiza la asignación de un número entero de bits a todos los subcanales. Aunque este algoritmo no es el óptimo, es cierto que la restricción de transmitir en cada subsímbolo un número entero de bits no supone una degradación importante en las prestaciones del sistema.

## 2.5 RESUMEN

En el presente capítulo se ha hecho un repaso detallado de la modulación multiportadora en sus diferentes versiones, siguiendo un desarrollo más o menos histórico hasta acabar en la OFDM tal como se conoce hoy en día. Hemos hecho especial hincapié, por su relevancia en el resto de la tesis, en el concepto de prefijo cíclico, el cual nos sirve para evitar las interferencias en el sistema, tanto la ISI como la ICI. Vimos así sus ventajas pero también sus inconvenientes, que son la disminución de la eficiencia espectral y el aumento de la latencia. Por último, hemos dedicado un apartado a la asignación óptima de bits, esto es, a como distribuir los bits en cada subcanal para optimizar el funcionamiento del sistema.



## Capítulo 3

# REVISIÓN DE ALGORITMOS PARA LA REDUCCIÓN O ELIMINACIÓN DEL PREFIJO CÍCLICO

### 3.1 INTRODUCCIÓN

Como hemos visto en el capítulo anterior, la utilización de un prefijo cíclico en un sistema DMT tiene importantísimas ventajas, que podemos resumir en que se consigue una eliminación completa de todas las interferencias, es decir, tanto la interferencia entre subcanales (ICI) como entre símbolos (ISI).

Por desgracia, también existen inconvenientes, principalmente dos: disminuye la eficiencia espectral y aumenta la latencia. Estos impedimentos son tanto más graves cuanto mayor sea la longitud del prefijo cíclico, evidentemente, pudiendo ser en algunos casos completamente inaceptables. Es por este motivo por lo que desde prácticamente la aparición de OFDM se ha intentado eliminar el prefijo cíclico sin por ello introducir interferencia o, al menos, reducir su longitud.

Evidentemente, la opción más elemental es la de aumentar el número de subcanales del sistema. De esta manera, la proporción entre la longitud del CP y la del símbolo OFDM será menor, lo cual implica una mayor eficiencia espectral y una menor latencia. Claro que esto conlleva varios problemas, como una mayor complejidad computacional o una mayor sensibilidad ante desviaciones de frecuencia en el proceso de sincronización o en errores de estimación del canal [Xu03]. Por tanto, debemos descartar esta posibilidad.

En este punto, es fundamental entender previamente que en la literatura existen multitud de trabajos que, en un primer momento, podría pensarse que están enfocados a la eliminación del prefijo cíclico, pero realmente se ocupan sólo de la interferencia entre subcanales. Es decir, en estos trabajos se introducen todo tipo de técnicas que, suponiendo que no existe la redundancia del prefijo cíclico, eliminan la ICI mediante otros medios. No obstante, estas técnicas se aplican exclusivamente símbolo a símbolo, lo cual significa que no tienen ningún efecto sobre la ISI, por lo que siguen necesitando la existencia de un período de guarda. Es por ello por lo que no les vamos a prestar interés.

Aclarada esta cuestión podemos decir que, en general, los métodos que realmente tratan de eliminar o disminuir la necesidad de un período de guarda (llámese prefijo cíclico o cualquier otra cosa), pueden dividirse en los siguientes grandes grupos:

- Una primera opción es la de un **igualador en el dominio del tiempo** o **TEQ** (*Time-Domain Equalizer*). Esta fue la primera en ser utilizada [Chow92, Chow93], y por tanto la primera en ser desarrollada, existiendo muchísimas publicaciones en la literatura sobre el tema (p.ej., [Melsa96, Al-Dhahir96, Pal98, Zhang02]).
- La segunda posibilidad es la de utilizar un **igualador en el dominio de la frecuencia** o **FEQ** (*Frequency-Domain Equalizer*). En este grupo encontramos también algunos trabajos, aunque menos numerosos ([Acker99, Acker01, Chen03]).
- Por otra parte, nos encontramos con el **igualador de decisión realimentada** o **DFE** (*Decision Feedback Equalizer*). En este grupo encontramos los trabajos de [Xu03, Xuejun03, Wang04, Parsaee04]. Una técnica muy similar a la del DFE y que podemos incluir en este mismo grupo es la cancelación de ISI residual [Wang04].
- Otra posibilidad es la de usar una **precodificación no lineal** con la intención de compensar las interferencias antes del paso por el canal. En este punto nos encontramos la aportación de [Cheong98].
- Por último, podemos hablar de otras técnicas como por ejemplo la de emplear redundancia sobre subcanales, empleando para ello los subcanales no usados que a menudo existen en las aplicaciones prácticas [Trautmann02, Trautmann02b, Park04].

Dentro de estos grupos de técnicas, en el presente capítulo vamos a desarrollar en detalle el tercero y el cuarto, esto es, los DFE y la precodificación, ya que tienen la ventaja de que eliminan por completo el prefijo cíclico, mientras que las demás técnicas sólo reducen en parte la necesidad de redundancia que conlleva dicho CP. (No obstante, por su interés histórico, mencionaremos también el primer TEQ aparecido en la literatura). Haremos hincapié en las indudables ventajas de cada uno de los métodos indicados, pero también en sus inconvenientes.

## 3.2 IGUALADOR EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Los primeros trabajos sobre igualación en sistemas DMT se los debemos a Chow [Chow92, Chow93]. En ellos se propone un igualador en el dominio del tiempo o TEQ con el objetivo de acortar explícitamente la longitud de la respuesta impulsiva efectiva del canal. De este modo la longitud del prefijo cíclico podrá ser menor, mejorando sustancialmente las prestaciones del sistema.

Consideremos entonces el esquema de la Fig. 3.1, en el cual se ha insertado un TEQ en el receptor del sistema DMT.

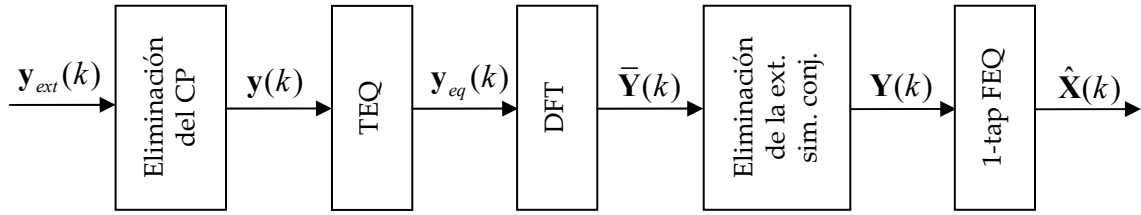


Fig. 3.1: Receptor con TEQ.

El TEQ será un sistema FIR (*Finite Impulse Response*, esto es, con respuesta impulsiva finita), cuya respuesta impulsiva denotamos como  $w(n)$  y suponemos de longitud  $M$ . En notación vectorial,

$$\mathbf{w} = [w_0 \quad w_1 \quad \dots \quad w_{M-1}]. \quad (3.1)$$

El objetivo del TEQ es el de acortar la respuesta impulsiva del canal,

$$\mathbf{h} = [h(0) \quad h(1) \quad \dots \quad h(L)], \quad (3.2)$$

transformándola en una mucho más corta, denominada **respuesta impulsiva objetivo** o **TIR** (*Target Impulse Response*) y que denotamos como

$$\mathbf{b} = [b(0) \quad b(1) \quad \dots \quad b(L_2)], \quad (3.3)$$

donde  $L_2 < L$ . Para ello, los autores proponen el diagrama de bloques de la Fig. 3.2..

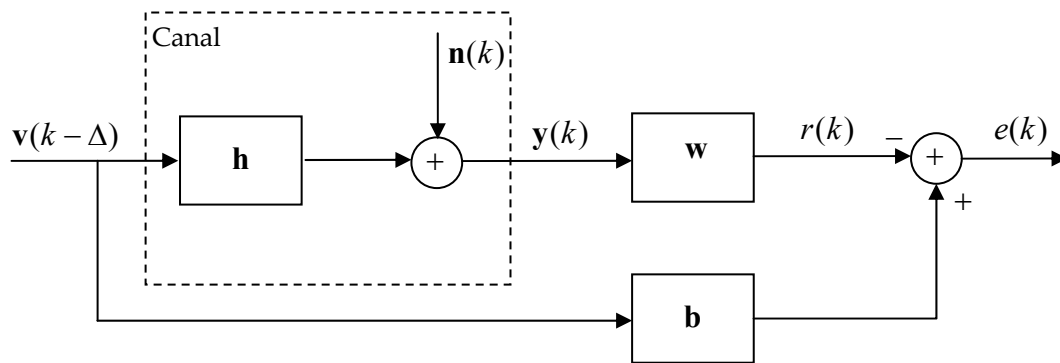


Fig. 3.2: Detalle del TEQ.

En la figura anterior,  $\Delta$  es un parámetro que indica un retraso (o adelanto) en muestras. Este parámetro será optimizado junto con el resto del igualador. Para ello se fijan  $M$  y  $L_2$  y se procede del siguiente modo:

En primer lugar, se computa el error según se muestra en la Fig. 3.2, y por tanto

$$e(k) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}(k - \Delta) - \mathbf{w} \cdot \mathbf{y}(k), \quad (3.4)$$

donde

$$\mathbf{v}(k - \Delta) = \begin{bmatrix} v_{k-\Delta} & v_{k-\Delta-1} & \cdots & v_{k-\Delta-L_2} \end{bmatrix}^T. \quad (3.5)$$

A continuación se realiza un bucle para  $i = 0, 1, \dots, L_2$ , durante el cual se va fijando  $b(i) = 1$ . Entonces, (3.4) se convierte en

$$e(k) = v_{k-\Delta-i} - \mathbf{z} \cdot \mathbf{u}(k), \quad (3.6)$$

ecuación en la cual

$$\mathbf{u}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}(k) \\ \mathbf{v}(k - \Delta)_i \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

y

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} & \mathbf{b}_i \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

A su vez, en las ecuaciones anteriores se han utilizado

$$\mathbf{v}(k - \Delta)_i = \begin{bmatrix} v_{k-\Delta} & \cdots & v_{k-\Delta-i+1} & v_{k-\Delta-i+1} & \cdots & v_{k-\Delta-L_2} \end{bmatrix}^T, \quad (3.9)$$

y

$$\mathbf{b}_i = \begin{bmatrix} -b_0 & \cdots & -b_{i-1} & -b_{i+1} & \cdots & -b_{L_2} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

A continuación se utiliza el criterio MMSE (*Minimum Mean Square Error* o error cuadrático medio mínimo) [Kay93] para obtener la solución óptima para  $\mathbf{z}$ , la cual es [Chow92]

$$\mathbf{z} = \mathbf{R}_{x_{k-\Delta-i}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{R}_{uu}^{-1}. \quad (3.11)$$

De aquí, obviamente, la obtención de  $\mathbf{w}$  sería inmediata.

Además, la varianza del ruido será

$$\sigma_{MSE,i}^2 = \varepsilon_x - \mathbf{v} \cdot \mathbf{R}_{ux_{k-\Delta-i}}. \quad (3.12)$$

Esta es la solución para cada  $i$ . Evidentemente, variando  $i$  podremos encontrar el óptimo, aunque a su vez esto es sólo para un cierto valor de  $\Delta$ . Después de ejecutar el algoritmo para todas las posibles  $\Delta$  podremos determinar el valor mínimo de  $\sigma_{MSE,i}^2$ .

### 3.3 IGUALADORES DFE

#### 3.3.1. DFE con criterio ZF

El igualador de decisión realimentada o DFE (*Decision Feedback Equalizer*) fue utilizado en sistemas OFDM por primera vez en [Zhu00]. Este primer DFE es implementado en el dominio de la frecuencia y elimina de forma separada la ISI y la ICI.

El esquema del transmisor no cambia respecto del de un sistema DMT con CP, es decir, se seguiría la Fig. 2.7. La única diferencia es que el CP ya no debe tener una longitud mínima, sino que incluso puede ser suprimido por completo sin que por ello deje de funcionar el DFE. Sin embargo, Zhu incluye en su formulación la posibilidad de incluir un cierto CP para de esa manera disminuir en cierta medida la complejidad computacional del igualador.

Pues bien, suponiendo que el CP tenga longitud incompleta, la señal recibida tendrá distorsión producida tanto por la ISI como por la ICI. Más concretamente, si la longitud del CP es  $M$ , donde  $0 \leq M \leq L$ , dicha señal recibida será [Zhu00]

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}(k) - \mathbf{C}_c \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}_h \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{n}(k), \quad (3.13)$$

donde  $\mathbf{C}_p$ , ya definida en (2.46), era de la forma

$$\mathbf{C}_p = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & h(3) & h(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h(L) & h(L-1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & h(L) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h(L) & h(L-1) & \cdots & h(1) & h(0) \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

Las otras dos matrices que aparecen en (3.13) son

$$\mathbf{C}_c = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & h(L) & h(L-1) & \cdots & h(M+1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & h(L) & \cdots & h(M+2) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & h(L) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{C}_h = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & h(L) & h(L-1) & \cdots & h(1) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & h(L) & \cdots & h(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & h(L) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Las matrices  $\mathbf{C}_c$  y  $\mathbf{C}_h$  tienen ambas tamaño  $2N \times 2N$ . Como podemos comprobar además de las ecuaciones anteriores, existen numerosas columnas que valen cero para estas matrices. En concreto,  $\mathbf{C}_c$  tiene  $2N - L$  columnas al inicio y  $M$  columnas al final que son idénticamente cero, mientras que las  $2N - L$  primeras columnas de  $\mathbf{C}_h$  son igualmente nulas.

Si comparamos (3.13) con (2.45), comprobamos que existen dos términos añadidos respecto de los existentes en el caso de que el CP tenga longitud completa. Resulta, pues, que  $\mathbf{C}_c$  representa la ICI, ya que es un término que viene condicionado por el símbolo actual  $\mathbf{x}(k)$ , mientras que  $\mathbf{C}_h$  nos sirve para incluir la ISI, ya que dicho sumando representa la influencia del símbolo previo  $\mathbf{x}(k-1)$ .

Dicho esto, veamos ahora qué sucede con el receptor. El mismo sí que va a variar respecto de un sistema OFDM clásico, lógicamente, siendo el presentado en la Fig. 3.3.

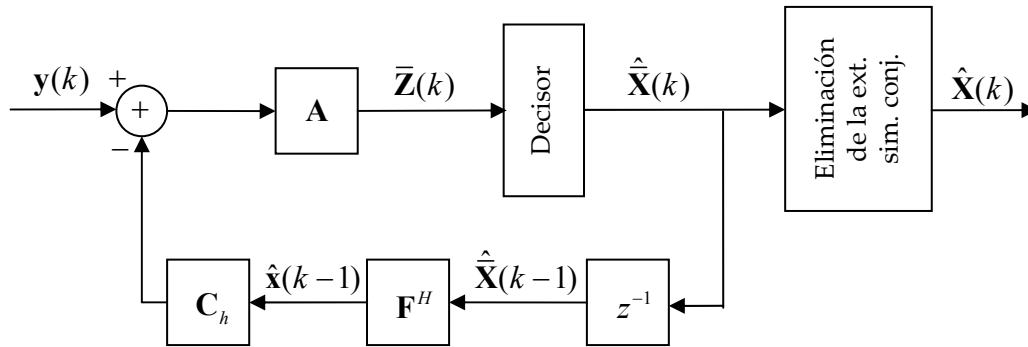


Fig. 3.3: Receptor con DFE.

Vemos en esta figura que, por tratarse de un DFE, se utilizan los símbolos previamente detectados para eliminar las interferencias producidas por el canal, tanto la ISI como la ICI. Más concretamente, la rama de realimentación, es decir, la matriz  $\mathbf{C}_h$ , se utiliza para cancelar la ISI de los símbolos previos, mientras que la matriz  $\mathbf{A}$  se emplea para eliminar la ICI. Para ello, y según se justifica en [Zhu00], dicha matriz debe ser

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}(\mathbf{C}_p - \mathbf{C}_i)^{-1}. \quad (3.17)$$

Vamos a sustituir este valor en (3.13),

$$\bar{\mathbf{Z}}(k) = \mathbf{A}[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}_h \mathbf{F}^H \hat{\mathbf{x}}(k-1)]. \quad (3.18)$$

Suponiendo que la estimación del símbolo previo está libre de errores,  $\hat{\mathbf{x}}(k-1) = \mathbf{x}(k-1)$ . Por consiguiente,



$$\begin{aligned}
\bar{\mathbf{Z}}(k) &= \mathbf{A} \left[ \mathbf{C}_p \mathbf{x}(k) - \mathbf{C}_c \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}_h \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{n}(k) - \mathbf{C}_h \mathbf{F}^H \hat{\mathbf{X}}(k-1) \right] \\
&= \mathbf{A} \left[ \mathbf{C}_p \mathbf{x}(k) - \mathbf{C}_c \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}_h \mathbf{x}(k-1) + \mathbf{n}(k) - \mathbf{C}_h \hat{\mathbf{x}}(k-1) \right] \\
&= \mathbf{A} \left[ (\mathbf{C}_p - \mathbf{C}_c) \mathbf{x}(k) + \mathbf{n}(k) \right].
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Suponiendo que no existe ruido, y utilizando (3.17),

$$\bar{\mathbf{Z}}(k) = \mathbf{F} \mathbf{x}(k) = \bar{\mathbf{X}}(k). \tag{3.20}$$

Esto quiere decir, finalmente, que se ha conseguido eliminar por completo tanto la ISI como la ICI. Por este motivo, evidentemente, este igualador consigue unas prestaciones mucho mejores que las vistas anteriormente para los igualadores lineales, ya sea en el dominio del tiempo o en el de la frecuencia, puesto que funciona incluso si no existe ningún CP. En esto sucede lo mismo que ya ocurre en las comunicaciones tradicionales de una sola portadora [Proakis95], es decir, las prestaciones de los DFE's son superiores.

Pese a ello, también existen ciertas dificultades con este método, que podemos resumir en lo siguiente:

- Por una parte, como hemos visto en el desarrollo anterior, es necesario suponer que los símbolos previos se han detectado sin error. Sin embargo, si eso no es así, es posible que aparezca lo que se denomina **propagación de errores**. Esto consiste en el hecho de que, al existir una realimentación de los símbolos detectados, un error en los mismos puede provocar la aparición de nuevos errores en el símbolo actual (incluso sin necesidad de que exista ruido). En condiciones particularmente malas, esta propagación de errores puede llevar a una tasa de error mucho mayor de la prevista.
- También relacionado con el punto anterior está el hecho de que los DFE's no son fácilmente implementables [Forney91] junto con una **codificación trellis** o una **modulación trellis codificada** [Proakis95]. Esto es, puesto que un trellis, usado de la forma que sea, necesita un algoritmo de **detección de máxima verosimilitud** (MLSE, *Maximum Likelihood Sequence Estimation*), como el de Viterbi [Haykin88], en recepción, una detección fiable sólo es posible tras aplicar dicho algoritmo MLSE; pero, claro, esto entra en contradicción con el hecho de que en un DFE necesitamos que el símbolo detectado previamente sea correcto, lo cual conlleva que necesitamos esperar un cierto tiempo a que acabe el algoritmo MLSE para poder aplicar el DFE.
- Por otra parte, en la obtención del DFE se ha despreciado la existencia del ruido aditivo  $\mathbf{n}(k)$ . Esto implica que estamos hablando de un **igualador de cero forzado**, **ZF** (*zero-forcing*). Pero, evidentemente, la presencia de dicho ruido puede afectar sensiblemente las prestaciones del igualador.

### 3.3.2. DFE con criterio MMSE

Como acabamos de indicar, el DFE presentado por [Zhu00] es del tipo ZF, es decir, no tiene en cuenta el ruido presente en el canal. Para mejorar las prestaciones de dicho algoritmo puede emplearse el **error cuadrático medio mínimo** o **MMSE**. Dicho criterio consiste, en breves palabras, en la minimización del error existente entre la señal igualada con el DFE y la señal deseada, teniendo en cuenta de forma simultánea tanto la interferencia como el ruido.

Este criterio fue aplicado a OFDM en primer lugar por Sun [Sun98]<sup>17</sup>, y posteriormente analizado en otros muchos artículos tanto por el propio Sun [Sun99, Sun99b, Sun01] como por otros autores (p.ej., [Xu03, Xuejun03, Wang04]). En cualquier caso, aquí nos vamos a limitar a exponer las guías comunes de este igualador. Además, por simplicidad, vamos a tomar el caso en el que no existe ningún CP, que, por otra parte, es precisamente la situación que más nos ha de interesar.

Tanto el esquema del transmisor como el del receptor podrían tomarse iguales a los ya expuestos en el caso del DFE con criterio ZF, es decir, las Fig. 2.7 y Fig. 3.3. De esta manera podemos decir que la manera de eliminar la ISI no cambia, es decir, se sigue suponiendo que la estimación de los símbolos anteriores es correcta. Lo que sí varía es la matriz  $\mathbf{A}$ .

Más concretamente, sea  $\bar{\mathbf{Z}}(k)$  la señal intermedia representada en la Fig. 3.3. Como hemos visto en (3.20), en condiciones ideales, esto es, sin ruido,  $\bar{\mathbf{Z}}(k) = \bar{\mathbf{X}}(k)$ . Si, en cambio, consideramos el ruido presente en el canal, y de acuerdo con (3.19),

$$\bar{\mathbf{Z}}(k) = \mathbf{A} \left[ (\mathbf{C}_p - \mathbf{C}_c) \mathbf{x}(k) + \mathbf{n}(k) \right]. \quad (3.21)$$

Pues bien, lo que se busca con el criterio MMSE es minimizar el error cuadrático medio entre  $\bar{\mathbf{Z}}(k)$  y  $\bar{\mathbf{X}}(k)$ . Es decir,

$$\min |e(k)|^2 = \min \left| \left[ \bar{\mathbf{X}}(k) - \bar{\mathbf{Z}}(k) \right] \left[ \bar{\mathbf{X}}(k) - \bar{\mathbf{Z}}(k) \right]^H \right|. \quad (3.22)$$

Puede demostrarse (e.g., [Wang04]) que, en su forma más simplificada, dicha matriz debe ser de la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{F}^H \mathbf{C}_p^H (\mathbf{C}_p \mathbf{C}_p^H + \lambda \mathbf{I}_{2N})^{-1}, \quad (3.23)$$

donde

$$\lambda = \frac{1}{SNR}. \quad (3.24)$$

---

<sup>17</sup> A pesar de lo comentado anteriormente, vemos que el criterio MMSE fue estudiado previamente al ZF.

Sin embargo, este nuevo DFE sigue teniendo algunos importantes problemas:

- Continúa dependiendo de la exactitud de las estimaciones previas, lo cual quiere decir que puede seguir existiendo propagación de errores. Aunque el mejor empleo de la información acerca del ruido disminuye esa posibilidad, no queda eliminada por completo.
- También sigue siendo aplicable el hecho de que este DFE tampoco es fácilmente combinable con una codificación *trellis* o una modulación *trellis* codificada.
- Quizá incluso más importante es el hecho de que la formulación del MMSE-DFE existente en la literatura se aplica para sistemas OFDM sin asignación de bits y además se toma como hipótesis que el ruido aditivo es blanco, es decir, su potencia es constante para todos los subcanales del sistema. Esto claramente queda muy lejos de aplicaciones concretas como pueda ser el caso de ADSL, donde la asignación de bits es parte fundamental de las altas prestaciones conseguidas en la tasa binaria de transmisión, y donde el ruido dista mucho de poder considerarse blanco. Aunque algún estudio un tanto somero [Wang04] ha sido realizado para el caso en que el transmisor pueda disponer de una potencia diferente para cada subcanal y con un ruido coloreado, sigue estando pendiente el problema de que la asignación de bits ya no puede realizarse de forma tan sencilla como en el caso de un sistema DMT con prefijo cíclico, ya que el tratamiento del ruido que se hace en el receptor ya no es el mismo que con dicho prefijo cíclico.

### 3.4 PRECODIFICACIÓN NO LINEAL

El uso de la precodificación para eliminar la posibilidad de ICI e ISI fue inicialmente introducida por Cheong [Cheong98]<sup>18</sup>. Dicho autor propone un precodificador basado en la idea clásica de Tomlinson-Harashima [Tomlinson71, Harashima72].

El precodificador de Tomlinson-Harashima (THP, *Tomlinson-Harashima Precoder*), empleado en comunicaciones de portadora única, no es más que un igualador ZF pero trasladado al transmisor. De esta manera, en lugar de compensar la ISI introducida por el canal en el receptor, se hace previamente, en el mismo transmisor, suponiendo que dicho transmisor conoce la CIR. Esto conlleva una importante ventaja: en el receptor existe cierta cantidad de ruido añadida, la cual dificulta el proceso de igualación; por el contrario, la compensación en el receptor es perfecta, puesto que no existe dicho ruido añadido. Más concretamente, y en comparación con lo dicho anteriormente para los DFE's:

---

<sup>18</sup> Existe otro artículo sobre el tema, el de [Wenxiao00]. Sin embargo, se trata de una mera copia del de Cheong, no aportando ninguna novedad.

- No existe propagación de errores, ya que en recepción no hay necesidad de utilizar los símbolos previos.
- Por el mismo motivo, el THP es fácilmente combinable con un *trellis*.

No obstante, no vamos a abundar más en el precodificador de Tomlinson-Harashima en modulaciones de portadora única, ya que lo que nos interesa verdaderamente es su extensión a sistemas DMT, que es el trabajo realizado por Cheong<sup>19</sup>. En él, el transmisor del sistema DMT se ve modificado sustancialmente, tal como se observa en la Fig. 3.4.

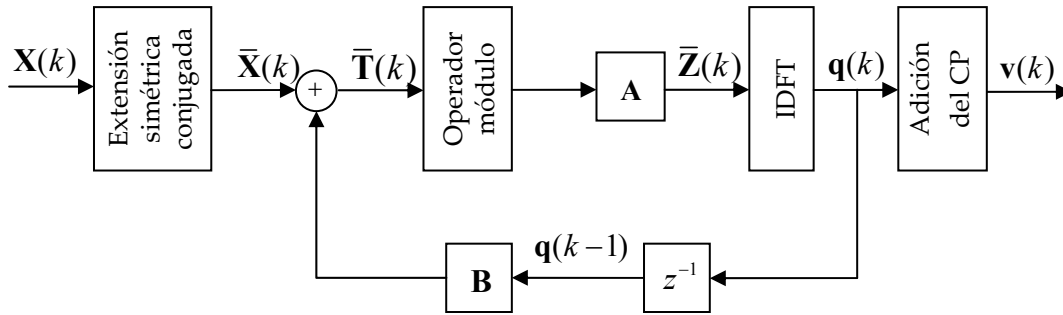


Fig. 3.4: Transmisor para el sistema DMT con precodificación de Cheong.

El **operador módulo** se denota como  $\Gamma_M \{ \cdot \}$  y es diferente para cada uno de los subcanales. En concreto, para el  $i$ -ésimo subcanal se define de la siguiente forma:

$$\Gamma_M \{ T_i(k) \} = T_i(k) - m_i d_i \left\lfloor \frac{T_i(k)}{m_i d_i} + \frac{1}{2} \right\rfloor, \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (3.25)$$

donde:

- $T_i(k)$  es el  $i$ -ésimo elemento de  $\bar{\mathbf{T}}(k)$ .
- $m_i$  es el número de bits asignados al  $i$ -ésimo subcanal.
- $d_i$  es la mínima distancia entre los puntos de la constelación del  $i$ -ésimo subcanal.

Gráficamente, podemos representar la operación realizada por el operador módulo como en la Fig. 3.5. Como puede comprobarse,

$$-m_i d_i / 2 \leq \Gamma_M \{ T_i(k) \} \leq m_i d_i / 2, \quad i = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad (3.26)$$

lo cual implica que los símbolos precodificados tienen siempre energía finita, independientemente de la realimentación existente en la Fig. 3.4. Sin embargo, el que se trate de una

<sup>19</sup> No obstante, y por comodidad de notación, en lo que sigue utilizaremos a menudo la notación THP para referirnos al caso de modulación multiportadora.

codificación no lineal tendrá inconvenientes, como vamos a ver más tarde.

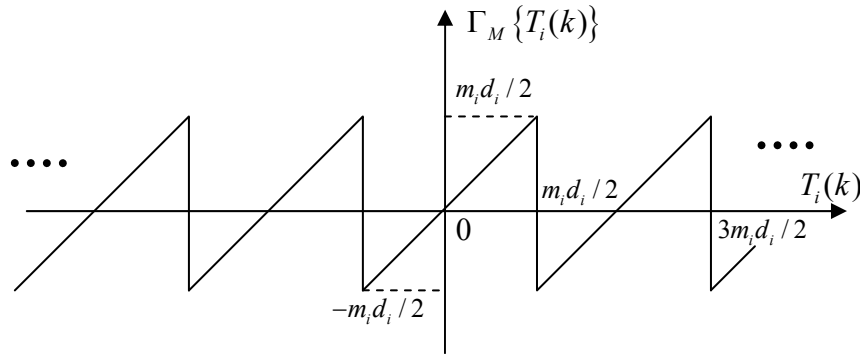


Fig. 3.5: Operador módulo.

En notación matricial,

$$\Gamma_{\mathbf{M}} \{\bar{\mathbf{T}}(k)\} = \bar{\mathbf{T}}(k) - \mathbf{MD} \left[ (\mathbf{MD})^{-1} \bar{\mathbf{T}}(k) + \mathbf{e}/2 \right], \quad (3.27)$$

donde:

- $\mathbf{M}$  es una matriz diagonal de tamaño  $2N \times 2N$  cuyos elementos son el número de bits asignados a cada subcanal.
- $\mathbf{D}$  es otra matriz diagonal de tamaño  $2N \times 2N$  que contiene las distancias mínimas entre los elementos de la constelación de cada subcanal.
- $\mathbf{e}$  es un vector columna cuyos  $2N$  elementos son unos.

Aclarado este punto, la Fig. 3.4 nos dice que los símbolos precodificados tienen la forma

$$\mathbf{q}(k) = \mathbf{F}^H \mathbf{A} \cdot \Gamma_{\mathbf{M}} \{ \bar{\mathbf{X}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{q}(k-1) \}. \quad (3.28)$$

A estos símbolos se les añade, en general, un prefijo cíclico, aunque este método funciona adecuadamente incluso sin él.

Ya en el receptor, la situación es la representada en la Fig. 3.6. Por consiguiente,

$$\bar{\mathbf{Y}}_m(k) = \Gamma_{\mathbf{M}} \{ \bar{\mathbf{Y}}(k) \} = \Gamma_{\mathbf{M}} \{ \mathbf{F}\mathbf{y}(k) \}. \quad (3.29)$$

Pues bien, según se detalla en [Cheong98], las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  deben ser de la forma

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{F}\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_1\mathbf{F}^H)^{-1} \quad (3.30)$$

y

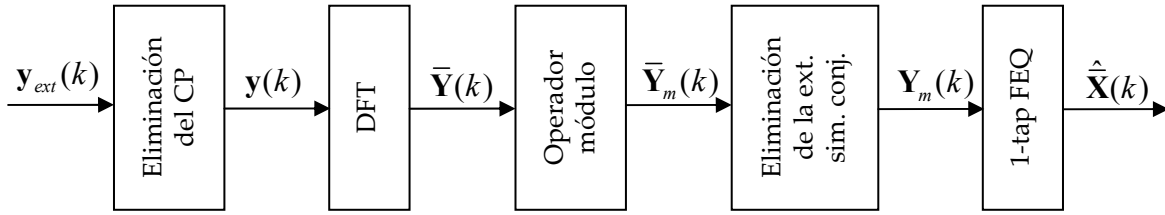


Fig. 3.6: Receptor para el sistema DMT con precodificación de Cheong.

$$\mathbf{B} = -\mathbf{F}\mathbf{C}_p^{-1}\mathbf{C}_h. \quad (3.31)$$

De esta manera, en ausencia de ruido se consigue que

$$\mathbf{Y}_m(k) = \mathbf{S}\mathbf{X}(k), \quad (3.32)$$

ecuación que es idéntica que (2.56). Es decir, la señal recibida es exactamente la misma que en un sistema con CP completo, con lo cual la señal queda perfectamente reconstruida eliminando tanto la ISI como la ICI.

Sin embargo, este precodificador tiene dos problemas:

- Por una parte, aunque el uso del operador módulo garantiza que la potencia transmitida tiene una cota máxima, existe un incremento de dicha potencia transmitida respecto del sistema con CP. Esto sucede porque la distribución estadística de los símbolos precodificados deja de ser uniforme, como sí que sucedía con los símbolos originales [Cheong98].
- Por otra parte, el que la precodificación sea no lineal implica que el comportamiento en presencia de ruido sí va a ser diferente del sistema con CP. Más concretamente, la SNR en cada subcanal va a cambiar, lo cual implica que el algoritmo *water-filling* no va a producir un resultado óptimo. Esto quiere decir que la probabilidad de error va a aumentar para una misma tasa binaria respecto del sistema con CP.

### 3.5 RESUMEN

En este capítulo hemos hecho un breve repaso acerca de los distintos métodos existentes en la literatura previa para abordar el problema planteado por la eliminación del prefijo cíclico. Como puntos importantes, destacamos los siguientes:

- Los igualadores lineales clásicos, bien en el dominio del tiempo o bien en el de la frecuencia, padecen el grave problema de que no son capaces de eliminar por completo la necesidad del prefijo cíclico, sino que tan sólo consiguen reducir la longitud del

mismo.

- Los igualadores de la familia DFE sí que consiguen suprimir íntegramente el CP. Sin embargo, puede aparecer en ellos propagación de errores, aumentando de este modo la tasa de error total. Además, en general, no están pensados para su utilización con el algoritmo de asignación óptima de bits, lo cual conlleva que su empleo esté centrado fundamentalmente en el caso de OFDM en entornos *wireless*, donde dicha asignación de bits es rara.
- Por último, la precodificación no lineal no tiene el problema de la propagación de errores, aunque sí el de la imposibilidad de emplear el algoritmo *water-filling* (o, mejor dicho, el que su empleo no garantice que se alcance el óptimo en la tasa binaria). Además, existe la circunstancia añadida de que la potencia de la transmisión aumenta respecto del caso de un sistema con CP.





## Capítulo 4

# PRECODIFICACIÓN LINEAL APLICADA A LA MODULACIÓN MULTIPORTADORA

### 4.1 INTRODUCCIÓN

Según hemos visto ya en el capítulo 2, el empleo del prefijo cíclico soluciona los problemas de interferencia existentes en un sistema DMT, tanto ISI como ICI. Pero hemos comprobado también que, al añadir muestras temporales redundantes, dicho CP supone un perjuicio en lo que respecta a la tasa de transmisión o el ancho de banda ocupado. En el capítulo anterior hemos revisado diferentes alternativas existentes en la literatura para eliminar o, al menos, disminuir este problema, aunque todas ellas tienen a su vez diferentes inconvenientes. En lo que sigue recordamos brevemente los mismos:

- Por una parte, los igualadores TEQ o FEQ no eliminan por completo en ningún caso la necesidad de un CP, sino que simplemente se limitan a acortarlo en la medida de lo posible.
- Por otro lado, están los igualadores DFE's. De entre ellos existen dos grandes grupos: los que utilizan el criterio ZF y los que se basan en el criterio MMSE. Tanto uno como otro tienen el inconveniente de que puede aparecer propagación de errores, especialmente para canales con distorsión severa. Este hecho, que puede ser grave en el criterio ZF, está bastante más suavizado para el MMSE. Por desgracia, el criterio MMSE modifica la SNR de cada subcanal en el receptor y por tanto el algoritmo *water-filling* deja de ser óptimo.
- Existe también la posibilidad de usar el precodificador no lineal de Cheong. Sin embargo, nos encontramos con el mismo problema que acabamos de mencionar: debido en este caso a la no linealidad, el algoritmo *water-filling* realmente ya no maximiza la tasa binaria todo lo que podría hacerlo.

En el presente capítulo vamos a presentar una idea novedosa para abordar el problema de la eliminación del CP, que trata de tomar lo mejor de las dos últimas propuestas anteriores. Dicha idea es la utilización de una **precodificación lineal**. De este modo:

- Por tratarse de un método de precodificación, no sufre de propagación de errores así

que no tiene ningún perjuicio en ese sentido.

- Al ser una precodificación lineal, puede diseñarse y así se ha hecho, de modo que no se modifiquen las SNR's de cada subcanal en el receptor. Esto significa que puede seguir aplicándose el algoritmo *water-filling* con prestaciones óptimas.
- Como ventaja adicional, aunque quizás más secundaria, se ha utilizado una formulación más racional que la empleada en los DFE's o en el THP. Con esto queremos decir que la precodificación lineal propuesta se desarrolla exclusivamente bien en el dominio del tiempo, bien en el de la frecuencia, en contraposición a los DFE's o THP, cuya formulación combina ambos dominios. Este hecho podría facilitar una implementación real de los algoritmos propuestos en el presente capítulo.

En definitiva, la precodificación lineal que vamos a presentar consigue una eficiencia perfecta con unas prestaciones completamente equivalentes a las de un sistema con CP. Claro que el método propuesto tiene también ciertos inconvenientes, puesto que su aplicación requiere de tres premisas:

- El transmisor debe conocer la respuesta impulsiva o respuesta en frecuencia del canal. Esto implica que debe existir alguna vía de comunicación en sentido inverso, es decir, debe tratarse de una comunicación bidireccional. Esto elimina la posibilidad de utilizar esta técnica en sistemas de difusión, pero en muchas de las aplicaciones que hoy día usan OFDM (p.ej., ADSL, PLC o *Wireless LAN*) sería completamente aplicable. Más concretamente, podría usarse en cualquier sistema DMT que intente maximizar la tasa binaria, puesto que el algoritmo *water-filling* trata de hacer justamente eso. Y puesto que nuestra precodificación está pensada con el objetivo, entre otros, de permitir dicha maximización, la necesidad de que el transmisor conozca las características del canal no supondría ningún requisito adicional que no se cumpliera ya previamente.
- El canal debe variar lentamente con el tiempo. Si el transmisor debe conocer la información sobre la respuesta del canal, no podemos permitir que este cambie rápidamente, pues en ese caso el receptor debería estar comunicando constantemente al receptor las estimaciones hechas sobre dicho canal. Esto, no obstante, no imposibilita el uso de esta técnica sobre canales *wireline*, como por ejemplo ADSL o PLC, donde las condiciones no varían durante un período más o menos prolongado de tiempo. Es más, incluso podría ser aplicable en entornos *wireless* cuando los terminales no se encuentran en condiciones de excesiva movilidad espacial. En efecto, otros autores (p.ej., [Ohno02, Windpassinger04, Debbah04]) han utilizado previamente información del canal en el transmisor de sistemas *wireless*.
- Debemos trabajar con un sistema de fase mínima. Esta es quizás la más importante limitación del método propuesto. (No obstante, más adelante explicaremos cómo podrá ser relajada esta condición).

La forma en la que se ha diseñado el presente capítulo ha sido la siguiente:

- En primer lugar se presenta el método de precodificación lineal propuesto, y ello se hace además en dos versiones diferentes: en el dominio del tiempo y en el de la frecuencia. Se muestra así mismo un análisis comparativo entre ambas versiones.
- A continuación se realiza un exhaustivo análisis sobre la convergencia de la precodificación lineal presentada.
- En siguiente lugar se comentan los requisitos de potencia.
- A continuación se analizan las prestaciones del método en lo que se refiere a la estimación del canal: cómo realizarla y en qué medida influye una estimación incorrecta de las características de dicho canal.
- Por último, repasaremos los aspectos más relevantes del capítulo en un resumen.

## 4.2 PRECODIFICACIÓN EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

### 4.2.1. Motivación. Relación con el prefijo cíclico

La precodificación que vamos a presentar a continuación presenta cierta similitud con el prefijo cíclico, en el sentido de que trata de convertir la convolución lineal que lleva a cabo el canal en una convolución circular, resultando de este modo en una sencilla relación entre las DFT's de  $2N$  puntos de las señales implicadas. Pero los parecidos acaban ahí, ya que existe una diferencia fundamental: en lugar de extender de forma periódica la señal transmitida se va a utilizar la información disponible del canal para modificar adecuadamente las muestras de dicha señal de modo que el efecto de dicho canal deshaga los cambios introducidos, resultando finalmente "como si" se hubiese efectuado una convolución circular exactamente idéntica a la llevada a cabo mediante el empleo del CP.

Para justificar esta idea un poco más vamos a emplear un pequeño botón de muestra. Fijémonos ahora únicamente en la primera muestra válida cuando usamos CP; según las ecuaciones (2.45) y (2.46),

$$\mathbf{y}(1) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}(1) + \mathbf{n}(1) = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(1) \\ h(1) & h(0) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & h(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(L) & h(L-1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h(L) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h(L) & h(L-1) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \mathbf{x}(1) + \mathbf{n}(1), \quad (4.1)$$

siendo  $\mathbf{n}(1)$  un vector de ruido.

De esta manera es fácil ver que

$$y_0(1) = h_0 x_0(1) + h_L x_{2N-L}(1) + h_{L-1} x_{2N-L+1}(1) + \dots + h_2 x_{2N-2}(1) + h_1 x_{2N-1}(1) + n_0(1). \quad (4.2)$$

En la anterior relación, el primer sumando sería el único que aparecería en una convolución lineal, mientras que todos los demás vienen forzados por la inclusión del CP. Podemos ahora operar sobre (4.2) del siguiente modo:

$$y_0(1) = h_0 \left[ x_0(1) + \frac{h_L}{h_0} x_{2N-L}(1) + \dots + \frac{h_2}{h_0} x_{2N-2}(1) + \frac{h_1}{h_0} x_{2N-1}(1) \right] + n_0(1) = h_0 q_0(1) + n_0(1). \quad (4.3)$$

Es claro entonces que si en lugar del vector  $\mathbf{x}(1)$  empleamos  $\mathbf{q}(1) = [q_0(1) \ 0 \ \dots \ 0]^T$  y lo pasamos al canal, éste, al efectuar una convolución lineal, producirá un resultado idéntico al obtenido mediante el prefijo cíclico.

Pues bien, en lo que sigue vamos a comprobar que la idea anterior es realizable no sólo para la primera muestra de la salida del canal, sino para cualquier otra, y además de forma sencilla. Puesto que la convolución circular es una operación lineal y estamos tratando de imitarla, la implementación de la precodificación propuesta puede llevarse a cabo exclusivamente con combinaciones lineales de las muestras de la señal transmitida. Además, esto se hará inicialmente en el dominio del tiempo, de ahí que denominemos a nuestro sistema **precodificador en el dominio del tiempo** o, abreviadamente, **TDP** (*Time-Domain Precoder*).

#### 4.2.2. Eliminación de la ICI

Para una mayor claridad en la explicación, vamos a suponer inicialmente que se envía un solo símbolo DMT,  $\mathbf{x}(1)$ . Utilicemos, pues, una precodificación lineal, de modo que vamos a transformar  $\mathbf{x}(1)$  en un vector  $\mathbf{q}(1)$  dado por

$$\mathbf{q}(1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(1), \quad (4.4)$$

donde  $\mathbf{A}$  es una cierta matriz que será necesario determinar. Cuando enviemos esta señal precodificada a través del canal, el resultado será, según lo ya dicho en el apartado 3.3,

$$\mathbf{y}(1) = \mathbf{C}_t \mathbf{q}(1) + \mathbf{n}(1) = \mathbf{C}_t \mathbf{A}\mathbf{x}(1) + \mathbf{n}(1), \quad (4.5)$$

donde  $\mathbf{C}_t$  es una matriz de tamaño  $2N \times 2N$  dada por

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ h(L) & h(L-1) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h(L) & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & h(L-1) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & h(L) & \dots & h(0) \end{bmatrix}. \quad (4.6)$$

Igualando las ecuaciones (4.1) y (4.5) obtenemos que

$$\mathbf{C}_t \mathbf{A} \mathbf{x}(1) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}(1). \quad (4.7)$$

Está claro entonces que, si esto debe cumplirse para cualquier valor de  $\mathbf{x}(1)$ , la única solución posible es que

$$\mathbf{C}_t \mathbf{A} = \mathbf{C}_p \quad (4.8)$$

o, equivalentemente,

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{C}_p. \quad (4.9)$$

Hacemos notar ahora que la solución obtenida para  $\mathbf{A}$  es única, y existe siempre con la sola condición de que  $h(0)$  sea distinta de cero, por ser  $\mathbf{C}_t$  una matriz triangular, según veíamos en (4.6).

Para entender un poco mejor qué es lo que se está haciendo al precodificar con la matriz  $\mathbf{A}$  obtenida, tengamos en cuenta ahora que, recordando de (3.16) que

$$\mathbf{C}_h = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & h(L) & h(L-1) & \cdots & h(1) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & h(L) & \cdots & h(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & h(L) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

y teniendo en cuenta (4.1) y (4.6),

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{C}_t + \mathbf{C}_h. \quad (4.11)$$

De este modo, (4.9) se convierte en

$$\mathbf{A} = \mathbf{C}_t^{-1} (\mathbf{C}_t + \mathbf{C}_h) = \mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t, \quad (4.12)$$

donde  $\mathbf{I}_{2N}$  es la matriz identidad de tamaño  $2N$  y  $\mathbf{E}_t$  es una **matriz de precodificación en el dominio del tiempo**, definida como

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{C}_h. \quad (4.13)$$

Esta matriz contiene un gran número de ceros. Debido a la configuración de  $\mathbf{C}_h$  tendremos que

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{C}_t^{-1} \left[ \mathbf{0}_{2N \times (2N-L)} \mid \mathbf{C}_{h_2} \right] = \left[ \mathbf{0}_{2N \times (2N-L)} \mid \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{C}_{h_2} \right], \quad (4.14)$$

siendo  $\mathbf{0}_{2N \times (2N-L)}$  una matriz nula de dimensiones  $2N \times (2N-L)$ .

Sustituyendo (4.12) en (4.4),

$$\mathbf{q}(l) = \mathbf{x}(l) + \mathbf{E}_l \mathbf{x}(l). \quad (4.15)$$

Pues bien, vamos a separar ahora  $\mathbf{x}(l)$  como

$$\mathbf{x}(l) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_h(l) \\ \mathbf{x}_l(l) \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

de modo que  $\mathbf{x}_h(l)$  contiene las primeras  $2N-L$  muestras de  $\mathbf{x}(l)$  y  $\mathbf{x}_l(l)$  las  $L$  muestras restantes. De este modo, combinando (4.15) y (4.16),

$$\mathbf{q}(l) = \mathbf{x}(l) + \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{C}_{h_2} \mathbf{x}_l(l). \quad (4.17)$$

Esto significa ni más ni menos que  $\mathbf{q}(l)$  está formada por  $\mathbf{x}(l)$  más una combinación lineal de las  $L$  últimas muestras de  $\mathbf{x}(l)$ , justamente las mismas que se empleaban originalmente para formar el CP. Así pues, descubrimos que, como entonces, se está introduciendo la misma información adicional, sólo que se hace de manera distinta y, desde luego, más eficiente.

### 4.2.3. Eliminación de la ISI

Una vez que hemos descubierto la potencialidad de esta precodificación lineal para eliminar la ICI, vamos a comprobar que resulta igualmente efectiva contra la ISI. Como sabemos, la ISI es un efecto producido sobre el símbolo actual,  $\mathbf{q}(k)$ , por el símbolo transmitido anteriormente,  $\mathbf{q}(k-1)$ . Entonces, si queremos introducir redundancia de modo que al transmitir los símbolos por el canal se compense el efecto del símbolo anterior, será obviamente necesario que dicha redundancia provenga de  $\mathbf{q}(k-1)$ . En definitiva, la precodificación efectuada sobre el  $k$ -ésimo símbolo DMT deberá ser de la forma

$$\mathbf{q}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{q}(k-1), \quad (4.18)$$

donde  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son dos matrices que habremos de determinar. La matriz  $\mathbf{A}$  incluye la redundancia necesaria para eliminar la ICI, como ya vimos anteriormente, mientras que la matriz  $\mathbf{B}$  va a introducir la información necesaria para compensar la ISI. La ecuación (4.18) nos está diciendo así mismo que es necesaria una cierta realimentación, la cual es puesta de manifiesto en la Fig. 4.1.

Para averiguar cómo deben ser  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  vamos a tener en cuenta que, si utilizamos un CP, la señal recibida es, según (2.45),

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}(k) + \mathbf{n}(k), \quad (4.19)$$

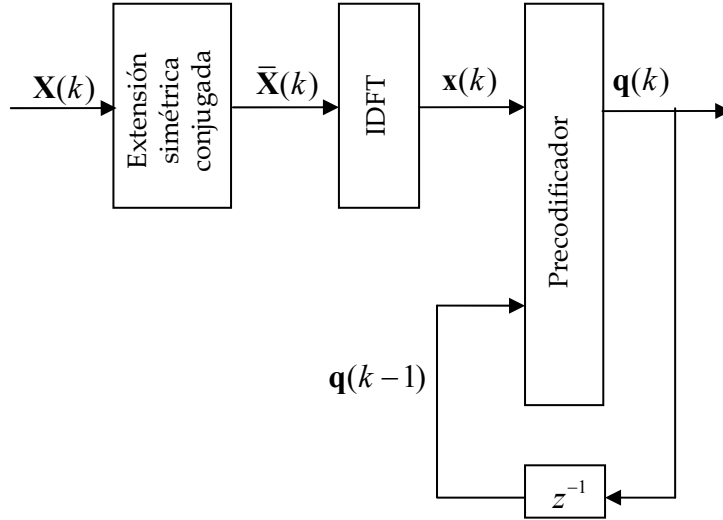


Fig. 4.1: Transmisor DMT con precodificación en el dominio del tiempo.

mientras que, con la precodificación, y sustituyendo  $\mathbf{x}(k)$  por  $\mathbf{q}(k)$  en (3.13) (con  $M = 0$ ),

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_t \mathbf{q}(k) + \mathbf{C}_h \mathbf{q}(k-1) + \mathbf{n}(k). \quad (4.20)$$

Sustituyendo ahora (4.18) en (4.20),

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(k) &= \mathbf{C}_t \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{C}_t \mathbf{B} \mathbf{q}(k-1) + \mathbf{C}_h \mathbf{q}(k-1) + \mathbf{n}(k) \\ &= \mathbf{C}_t \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + (\mathbf{C}_t \mathbf{B} + \mathbf{C}_h) \mathbf{q}(k-1) + \mathbf{n}(k). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Comparando (4.19) y (4.21),

$$\mathbf{C}_t \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + (\mathbf{C}_t \mathbf{B} + \mathbf{C}_h) \mathbf{q}(k-1) = \mathbf{C}_p \mathbf{x}(k). \quad (4.22)$$

Como esto debe cumplirse para cualquier valor de la señal  $\mathbf{x}(k)$ , tendremos que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_t \mathbf{A} &= \mathbf{C}_p, \\ \mathbf{C}_t \mathbf{B} + \mathbf{C}_h &= \mathbf{O}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Por tanto, la solución al problema planteado será

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{C}_p, \\ \mathbf{B} &= -\mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{C}_h. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Vemos así que, por una parte, la matriz  $\mathbf{A}$  obtenida coincide, como era de esperar, con la que ya calculábamos en (4.7), y por lo tanto podemos decir, como en (4.12), que

$$\mathbf{A} = \mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t. \quad (4.25)$$

Pero, por otra parte, usando (4.14) tendremos que

$$\mathbf{B} = -\mathbf{C}_t^{-1} \left[ \mathbf{0}_{2N \times (2N-L)} \mid \mathbf{C}_{h_2} \right] = - \left[ \mathbf{0}_{2N \times (2N-L)} \mid \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{C}_{h_2} \right] = -\mathbf{E}_t. \quad (4.26)$$

Por tanto, volviendo a (4.18), resolvemos que

$$\mathbf{q}(k) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_t [\mathbf{x}(k) - \mathbf{q}(k-1)]. \quad (4.27)$$

Esta última expresión nos viene a decir dos cosas:

- El efecto de la ICI puede ser cancelado completamente utilizando las  $L$  últimas muestras de  $\mathbf{x}(k)$ , pues son las que se utilizaban para el prefijo cíclico y por tanto para lograr la convolución circular, como ya habíamos justificado previamente.
- El efecto de la ISI puede ser compensado empleando adecuadamente las  $L$  últimas muestras de  $\mathbf{q}(k-1)$ , ya que son dichas muestras las que afectan al símbolo transmitido justo a continuación.

En cualquier caso, lo verdaderamente relevante es que el comportamiento de la precodificación propuesta será exactamente el mismo que si tuviéramos un CP, sólo que sin ninguna necesidad de incrementar el número de muestras transmitidas. Es decir:

- El receptor no cambia respecto del que teníamos en el caso del CP, o sea, sería el representado en la Fig. 4.2, que es la misma que la Fig. 2.11.

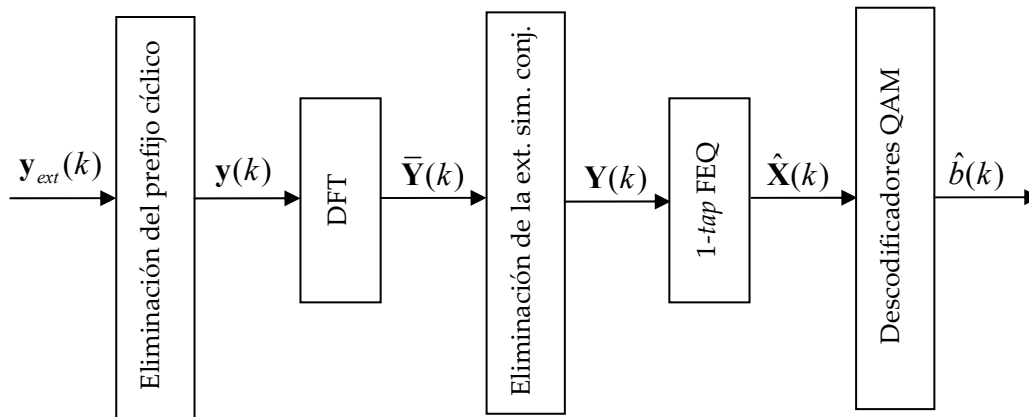


Fig. 4.2: Receptor DMT cuando se usa precodificación en el transmisor.

- En ausencia de ruido, vamos a poder conseguir una reconstrucción perfecta de la señal en el receptor.
- En presencia de ruido aditivo, el efecto del mismo será el mismo que con CP, puesto que la señal en el receptor es idéntica. Esto significa que el algoritmo de carga de bits seguirá siendo igualmente válido con la precodificación propuesta.



Podemos decir entonces, como conclusión, que el algoritmo de precodificación en el dominio del tiempo quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(1) &= \mathbf{x}(1) + \mathbf{E}_t \mathbf{x}(1), \\ \mathbf{q}(k) &= \mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_t [\mathbf{x}(k) - \mathbf{q}(k-1)], \quad k > 1, \end{aligned} \tag{4.28}$$

con  $\mathbf{E}_t$  definida en (4.13). Hacemos notar aquí que, aunque el cálculo de la matriz de precodificación puede resultar medianamente complicado, tan sólo hay que llevarlo a cabo una vez, al comenzar la transmisión, o en todo caso cuando se suponga que ha podido producirse un cambio sustancial en los parámetros que definen el canal.

### 4.3 PRECODIFICADOR EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

#### 4.3.1. Derivación directa

Como ha podido comprobarse, la precodificación comentada ha sido llevada a cabo en el dominio del tiempo. Es posible, empero, reescribirla en el dominio de la frecuencia, y es lo que vamos a hacer a continuación. Llegaremos así a un **precodificador en el dominio de la frecuencia** o **FDP** (*Frequency-Domain Precoding*).

En este caso lo que se busca es una precodificación como la representada en la Fig. 4.3.

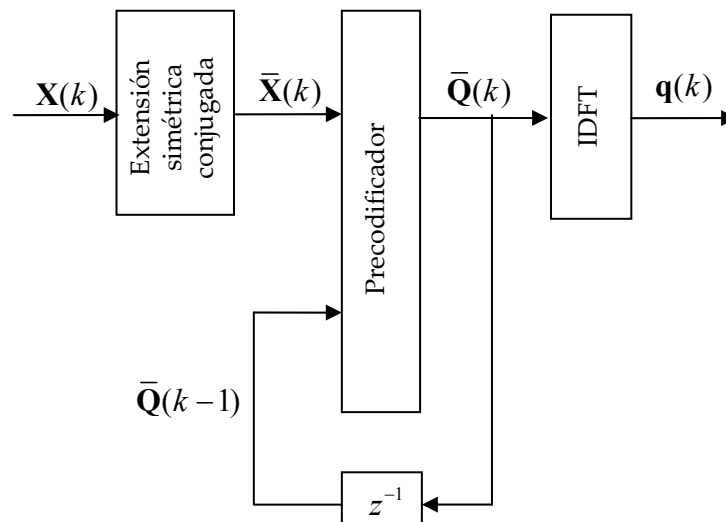


Fig. 4.3: Transmisor DMT con precodificación en el dominio de la frecuencia.

Vamos a partir de la ecuación (4.27) y vamos a trasladarla al dominio de la frecuencia.

Recordando que  $\mathbf{F}$  representa la matriz de la DFT de  $2N$  puntos, tendremos que

$$\bar{\mathbf{Q}}(k) = \mathbf{F}\mathbf{q}(k) = \mathbf{F}\mathbf{x}(k) + \mathbf{F}\mathbf{E}_t [\mathbf{x}(k) - \mathbf{q}(k-1)]. \quad (4.29)$$

Aplicando ahora las ecuaciones del par DFT-IDFT, es decir, (2.14) y (2.17), resulta

$$\bar{\mathbf{Q}}(k) = \bar{\mathbf{X}}(k) + \mathbf{F}\mathbf{E}_t [\mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k) - \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{Q}}(k-1)] = \bar{\mathbf{X}}(k) + \mathbf{F}\mathbf{E}_t \mathbf{F}^H [\bar{\mathbf{X}}(k) - \bar{\mathbf{Q}}(k-1)]. \quad (4.30)$$

Si ahora definimos la matriz de precodificación en la frecuencia como

$$\bar{\mathbf{E}}_f = \mathbf{F}\mathbf{E}_t \mathbf{F}^H, \quad (4.31)$$

nos queda finalmente que

$$\bar{\mathbf{Q}}(k) = \bar{\mathbf{X}}(k) + \bar{\mathbf{E}}_f [\bar{\mathbf{X}}(k) - \bar{\mathbf{Q}}(k-1)], \quad (4.32)$$

ecuación que es formalmente idéntica a la (4.27).

Incluyendo finalmente el caso particular del primer símbolo, obtendríamos que el algoritmo final en el dominio de la frecuencia es

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}(1) &= \bar{\mathbf{X}}(1) + \bar{\mathbf{E}}_f \bar{\mathbf{X}}(1), \\ \bar{\mathbf{Q}}(k) &= \bar{\mathbf{X}}(k) + \bar{\mathbf{E}}_f [\bar{\mathbf{X}}(k) - \bar{\mathbf{Q}}(k-1)], \quad k > 1. \end{aligned} \quad (4.33)$$

### 4.3.2. Simplificación computacional

El algoritmo anterior se realiza, como acabamos de comprobar, después de la extensión simétrica conjugada. Esto conlleva el problema de que la complejidad computacional es considerable, puesto que la matriz  $\bar{\mathbf{E}}_f$  contiene  $(2N)^2$  elementos complejos, es decir,  $16N^2$  elementos reales, aproximadamente<sup>20</sup>. Para mejorar esto, es evidente que una buena solución sería emplear la precodificación antes de la extensión simétrica conjugada, según se indica en la Fig. 4.4. Aunque este paso no es tan evidente como la transformación de la precodificación temporal en el algoritmo de (4.33), es posible realizarlo, según se demuestra en el anexo 4.1. Aquí nos vamos a limitar a exponer el resultado.

Definamos el vector extendido  $\mathbf{X}_e(k)$  como

$$\mathbf{X}_e(k) = \begin{bmatrix} X_0(k) & \text{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} & \text{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} & X_N(k) \end{bmatrix}^T, \quad (4.34)$$

---

<sup>20</sup> Por simplicidad, no hemos considerado el hecho de que algunos de los elementos de  $\bar{\mathbf{E}}_f$  son reales.

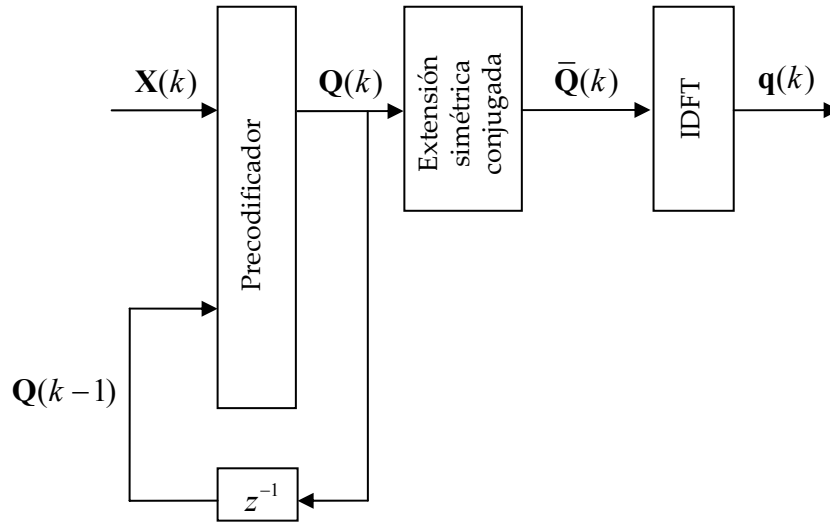


Fig. 4.4: Transmisor DMT con precodificación simplificada en el dominio de la frecuencia.

donde

- $X_0(k)$  es la muestra de  $\mathbf{X}(k)$  correspondiente al subcanal 0,
- $\mathbf{X}_{1,N-1}(k)$  es un vector columna con las muestras de  $\mathbf{X}(k)$  pertenecientes a los subcanales 1 a  $N-1$ ,
- $X_N(k)$  es la muestra correspondiente al subcanal  $N$ -ésimo, no contenida en  $\mathbf{X}(k)$ .

De forma parecida, denotemos  $\mathbf{Q}_e(k)$  como

$$\mathbf{Q}_e(k) = \left[ Q_0(k) \quad \text{Re}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} \quad \text{Im}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} \quad Q_N(k) \right]^T, \quad (4.35)$$

donde  $Q_0(k)$ ,  $\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)$  y  $Q_N(k)$  se definen de manera análoga a  $X_0(k)$ ,  $\mathbf{X}_{1,N-1}(k)$  y  $X_N(k)$ .

Por otra parte, vamos a descomponer la matriz de precodificación en el dominio de la frecuencia de la forma

$$\bar{\mathbf{E}}_f = \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & e_{f_{1,3}} & \mathbf{e}_{f_{1,4}} \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \\ e_{f_{3,1}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & e_{f_{3,3}} & \mathbf{e}_{f_{3,4}} \\ \mathbf{e}'_{f_{4,1}} & \mathbf{E}_{f_{4,2}} & \mathbf{e}'_{f_{4,3}} & \mathbf{E}_{f_{4,4}} \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

donde

- los elementos de la forma  $e_{f_{i,j}}$  son escalares,

- los  $\mathbf{e}_{f_{i,j}}$  son vectores fila, de tamaño  $1 \times (N-1)$ ,
- los  $\mathbf{e}'_{f_{i,j}}$  son vectores columna, de tamaño  $(N-1) \times 1$ ,
- los elementos  $\mathbf{E}_{f_{i,j}}$  son matrices de tamaño  $(N-1) \times (N-1)$ .

Teniendo en cuenta esta notación y según se deriva en el anexo 4.1, el algoritmo de precodificación frecuencial simplificado sería de la forma

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_e(1) &= \mathbf{X}_e(1) + \mathbf{E}_f \mathbf{X}_e(1), \\ \mathbf{Q}_e(k) &= \mathbf{X}_e(k) + \mathbf{E}_f [\mathbf{X}_e(k) - \mathbf{Q}_e(k-1)], \quad k > 1,\end{aligned}\tag{4.37}$$

siendo  $\mathbf{E}_f$  la nueva matriz de precodificación, dada por

$$\mathbf{E}_f = \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{e}_{f_{1,2}}\} & -2 \operatorname{Im}\{\mathbf{e}_{f_{1,2}}\} & e_{f_{1,3}} \\ \operatorname{Re}\{\mathbf{e}'_{f_{2,1}}\} & \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} + \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & -\operatorname{Im}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} - \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \operatorname{Re}\{\mathbf{e}'_{f_{2,3}}\} \\ \operatorname{Im}\{\mathbf{e}'_{f_{2,1}}\} & \operatorname{Im}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} + \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} - \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \operatorname{Im}\{\mathbf{e}'_{f_{2,3}}\} \\ e_{f_{3,1}} & 2 \operatorname{Re}\{\mathbf{e}_{f_{3,2}}\} & -2 \operatorname{Im}\{\mathbf{e}_{f_{3,2}}\} & e_{f_{3,3}} \end{bmatrix}.\tag{4.38}$$

En la ecuación anterior se ha utilizado  $\tilde{\mathbf{I}}_{N-1}$ , que es una matriz cuadrada de tamaño  $(N-1) \times (N-1)$  con unos en su antidiagonal y cero en el resto de elementos, es decir,

$$\tilde{\mathbf{I}}_{N-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.\tag{4.39}$$

De esta manera, como habíamos dicho, conseguimos trasladar el algoritmo de precodificación antes de la extensión simétrica conjugada. Bien es cierto que lo que se actualiza en cada iteración no es exactamente el símbolo  $\mathbf{Q}(k)$ , sino su versión extendida, que incluye la muestra contenida en el subcanal  $N$ -ésimo. Además, hay que tener en cuenta el pequeño matiz de que es necesario conocer los valores de los  $X_N(k)$ , lo cual no significa mayor problema.

En cualquier caso, lo verdaderamente importante es que la complejidad computacional del algoritmo en el dominio de la frecuencia ha sido reducida sustancialmente, como vamos a ver más exactamente en el apartado siguiente.

#### 4.4 COMPARATIVA DE PRECODIFICADORES

Idealmente, el algoritmo en el dominio del tiempo tiene un comportamiento idéntico al

del dominio de la frecuencia (tanto en su versión original como en la reducida), ya que el segundo fue derivado para que su formulación fuera equivalente al del primero. Sin embargo, su complejidad computacional será diferente, según vamos a ver a continuación<sup>21</sup>:

- Concretamente, en el caso de la precodificación temporal debemos multiplicar una matriz,  $\mathbf{E}_t$ , de tamaño  $2N \times 2N$ , por un vector de longitud  $2N$ . Esto significaría en principio un total de  $4N^2$  multiplicaciones y  $4N^2$  sumas reales. Sin embargo, debemos recordar que, según se desprende de (4.14), sólo las últimas  $L$  columnas de  $\mathbf{E}_t$  son distintas de cero. Esto significa que el número de operaciones necesarias se reduce a  $2LN$  multiplicaciones y  $2LN$  sumas reales.
- En el caso de la precodificación frecuencial vamos a tomar, evidentemente, la versión simplificada (antes de la operación de extensión simétrica conjugada), para así disminuir la carga computacional. En este caso la matriz de precodificación,  $\mathbf{E}_f$ , tiene tamaño  $2N \times 2N$ . Por tanto, necesitaríamos  $4N^2$  multiplicaciones y  $4N^2$  sumas reales.

La comparación en la complejidad de ambos métodos es entonces clara: puesto que  $L$  debe ser menor que  $2N$  (en caso contrario las matrices que definen el precodificador no tendrían sentido) la precodificación temporal es preferible respecto de la frecuencial. No obstante, es posible que, debido a consideraciones particulares (que no nos interesan en nuestro estudio) en el diseño de los dispositivos reales que efectúen la implementación real en hardware o software, una de las dos soluciones sea más conveniente que la otra.

## 4.5 ANÁLISIS DE LA CONVERGENCIA

Un hecho importante que hemos de analizar son las condiciones de convergencia de los algoritmos recursivos que definen cada una de las versiones de la precodificación. Es decir, queremos conocer bajo qué circunstancias los símbolos precodificados se mantienen acotados.

Antes que nada reseñamos el hecho de que, como hemos tenido oportunidad de comprobar, el algoritmo en el dominio del tiempo tiene un comportamiento idéntico al del dominio de la frecuencia (tanto en su versión original como en la reducida), ya que el segundo fue derivado para que su formulación fuera equivalente al del primero. Por consiguiente, todo lo que digamos acerca de uno será aplicable al otro.

---

<sup>21</sup> Aunque ambos algoritmos requieren una multiplicación matricial y dos sumas de vectores, la carga de esta segunda operación puede ser despreciada respecto de la primera, así que no la consideraremos en nuestra comparativa.

Dicho esto, nos vamos a centrar en el estudio de la convergencia para el caso de la precodificación en el tiempo, debido a su mayor simplicidad en la formulación.

Tomemos, pues, las ecuaciones (4.28) y vayamos iterando explícitamente,

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}(1) &= (\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(1), \\
\mathbf{q}(2) &= (\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(2) - \mathbf{E}_t\mathbf{q}(1) = (\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(2) - \mathbf{E}_t(\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(1), \\
\mathbf{q}(3) &= (\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(3) - \mathbf{E}_t\mathbf{q}(2) = (\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(3) - \mathbf{E}_t(\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(2) + \mathbf{E}_t^2(\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(1), \\
\mathbf{q}(4) &= (\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(4) - \mathbf{E}_t\mathbf{q}(3) \\
&= (\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(4) - \mathbf{E}_t(\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(3) + \mathbf{E}_t^2(\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(2) + \mathbf{E}_t^3(\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(1). \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Llegamos así a la conclusión de que

$$\mathbf{q}(k) = \sum_{i=0}^{k-1} (-\mathbf{E}_t)^i (\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(k-i), \quad k \geq 1. \tag{4.41}$$

Para analizar si  $\mathbf{q}(k)$  converge o no, es decir, si lo hacen cada uno de sus elementos  $q_i(k)$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$ , vamos a empezar por tomar esperanzas en la expresión anterior. Suponiendo que los  $\mathbf{x}(k)$  forman una variable aleatoria estacionaria,  $E\{\mathbf{x}(k)\} = E\{\mathbf{x}\} \quad \forall k$ . Por tanto,

$$E\{\mathbf{q}(k)\} = \sum_{i=0}^{k-1} (-\mathbf{E}_t)^i (\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)E\{\mathbf{x}(k-i)\} = \sum_{i=0}^{k-1} (-\mathbf{E}_t)^i (\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)E\{\mathbf{x}\}, \quad k \geq 1. \tag{4.42}$$

Cuando hacemos que  $k$  tienda a infinito,

$$E\{\mathbf{q}(\infty)\} = \sum_{i=0}^{\infty} (-\mathbf{E}_t)^i (\mathbf{I} + \mathbf{E}_t)E\{\mathbf{x}\}. \tag{4.43}$$

Utilizamos ahora [Datta95] el hecho de que, para cualquier matriz cuadrada  $\mathbf{A}$ ,

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \tag{4.44}$$

si y sólo si todos los autovalores de  $\mathbf{A}$  tienen módulo menor que la unidad. Entonces, habrá que pedir que nuestra matriz de precodificación,  $\mathbf{E}_t$ , cumpla efectivamente dicha condición sobre sus autovalores<sup>22</sup>. En ese caso, se cumpliría que

$$E\{\mathbf{q}(\infty)\} = (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t)^{-1} (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t)E\{\mathbf{x}\} = E\{\mathbf{x}\}. \tag{4.45}$$

Nuestro objetivo debe a ser entonces determinar los autovalores de  $\mathbf{E}_t = \mathbf{C}_t^{-1}\mathbf{C}_h$ . Pues bien, como se demuestra en el anexo 4.2, dichos autovalores vienen dados por

<sup>22</sup> Obviamente, el signo menos no altera esta circunstancia.

$$\lambda_i = \begin{cases} -c_i^{2N}, & i = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & i = n+1, L+2, \dots, 2N. \end{cases} \quad (4.46)$$

Con este resultado es entonces evidente que, para **sistemas de fase mínima**, es decir, con  $|c_i| < 1$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$ , los autovalores también van a tener módulo menor que uno, y por tanto la precodificación, bien en el dominio del tiempo bien en el de la frecuencia, converge.

Podemos argumentar, llegados a este punto, que esta restricción del método de precodificación propuesto puede ser importante. Es por ello que esbozamos<sup>23</sup> a continuación una idea que podría paliar este inconveniente: en tanto en cuanto la dificultad se halla en el hecho de que el canal ha de ser de fase mínima, la precodificación propuesta podría combinarse con un **igualador de fase** en el receptor. Dicho igualador habría de ser diseñado con el único requisito de que la respuesta impulsiva del filtro total debe ser de fase mínima. Siendo esto así, dicho igualador no tiene por qué suponer ninguna variación en la respuesta en magnitud, es decir, podría aproximarse a un sistema pasa-todo. De este modo nos aseguramos de que no cambia la SNR de cada subcanal, y el algoritmo *water-filling* podría seguir siendo aplicado.

El inconveniente de esta idea, evidentemente, sería que necesitaríamos aumentar la complejidad computacional y que de alguna manera estaríamos necesitando la actuación conjunta de transmisor y receptor para combatir las interferencias en el canal. Este hecho, no obstante, no difiere grandemente de la situación actual en aplicaciones prácticas como ADSL: la eliminación de la ISI y la ICI se confiere por una parte al transmisor, que debe añadir el CP; y por otra parte al receptor, que debe implementar algún igualador TEQ o FEQ para reducir la longitud de la respuesta impulsiva del canal.

## 4.6 POTENCIA DE LA PRECODIFICACIÓN

Como ya se comentó en su momento en el apartado 3.4, una de las mayores desventajas de la precodificación propuesta por Cheong es que supone un incremento notable de la potencia de los símbolos transmitidos.

A este respecto, resulta interesante analizar qué sucede con la precodificación presentada en el presente capítulo. Un estudio riguroso de cuál es la potencia de los símbolos precodificados resulta complejo y no ha sido llevado a cabo aún en su totalidad. Sin embargo, sí que es posible adelantar algunos resultados cualitativos relevantes, resultados que serán puestos de manifiesto en el capítulo de simulaciones.

---

<sup>23</sup> Evidentemente, un desarrollo exhaustivo de la misma es una futura línea de investigación que continúe el trabajo desarrollado en la presente tesis.

Previamente, no obstante, vamos a formular analíticamente el problema que nos ocupa. Para ello vamos a considerar solamente el TDP. Hacemos esto porque, según se explicaba ya al abordar la convergencia de los precodificadores, la versión en el dominio del tiempo y las de la frecuencia son equivalentes entre sí, en el sentido de que la señal transmitida al canal es la misma en todos los casos, por derivarse todas imponiendo precisamente dicha condición. Por lo tanto, también será igual la potencia transmitida en cada símbolo en todos los casos. En definitiva, nos basta con estudiar una sola versión del precodificador, y escogemos la del dominio del tiempo por su mayor simplicidad analítica.

Partamos entonces de (4.27) que, recordemos, era de la forma

$$\mathbf{q}(k) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_t [\mathbf{x}(k) - \mathbf{q}(k-1)] = (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}_t\mathbf{q}(k-1). \quad (4.47)$$

Definamos ahora la matriz de correlaciones de los símbolos precodificados, que es [Haykin96]

$$\mathbf{R}_{qq}(k) = E \left\{ \mathbf{q}(k)\mathbf{q}^T(k) \right\}, \quad (4.48)$$

donde  $E \{ \cdot \}$  representa el operador esperanza. Esta matriz de correlaciones depende en general del índice  $k$ , aunque, según lo estudiado en el apartado anterior, sabemos que para un canal de fase mínima va a acabar convergiendo a un valor finito.

Sustituyendo (4.47) en (4.48) y desarrollando,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{qq}(k) &= E \left\{ [(\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}_t\mathbf{q}(k-1)][(\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(k) - \mathbf{E}_t\mathbf{q}(k-1)]^T \right\} \\ &= E \left\{ (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)(\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t^T) \right\} + E \left\{ \mathbf{E}_t\mathbf{q}(k-1)\mathbf{q}^T(k-1)\mathbf{E}_t^T \right\} \\ &\quad - E \left\{ (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t)\mathbf{x}(k)\mathbf{q}^T(k-1)\mathbf{E}_t^T \right\} - E \left\{ \mathbf{E}_t\mathbf{q}(k)\mathbf{x}^T(k-1)(\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t^T) \right\}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

Tenemos ahora en cuenta que símbolos  $\mathbf{x}(k)$  se consideran independientes para distinta  $k$ , es decir,

$$E \left\{ \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(r) \right\} = \mathbf{0}, \quad k \neq r. \quad (4.50)$$

Por tanto, y recordando que  $\mathbf{q}(k-1)$  no depende de  $\mathbf{x}(k)$ ,

$$\mathbf{R}_{qq}(k) = (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t)E \left\{ \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k) \right\}(\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t^T) + \mathbf{E}_t E \left\{ \mathbf{q}(k-1)\mathbf{q}^T(k-1) \right\} \mathbf{E}_t^T, \quad (4.51)$$

expresión en la que se ha tenido en cuenta también que  $\mathbf{E}_t$  tiene carácter determinista y por tanto puede ser sacada fuera del operador esperanza.

Podemos ahora definir la matriz de correlaciones de  $\mathbf{x}(k)$  de forma análoga a  $\mathbf{R}_{qq}(k)$ . Sin embargo, en este caso hemos de tener en cuenta que el proceso aleatorio que constituyen los símbolos  $\mathbf{x}(k)$  es estacionario. Esto significa que su matriz de correlaciones no dependerá del índice  $k$ , así que diremos que



$$\mathbf{R}_{xx} = E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \} \quad \forall k. \quad (4.52)$$

Sustituyendo ahora (4.48) y (4.52) en (4.51),

$$\mathbf{R}_{qq}(k) = (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t) \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t^T) + \mathbf{E}_t \mathbf{R}_{qq}(k-1) \mathbf{E}_t^T. \quad (4.53)$$

De todos modos, realmente nosotros no estamos interesados en conocer la matriz de correlaciones de los símbolos precodificados para cualquier instante  $k$ . Más bien lo que pretendemos es conocer su valor en régimen estacionario. Por ello vamos a tomar límites en la ecuación anterior,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{R}_{qq}(k) = (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t) \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t^T) + \lim_{k \rightarrow \infty} [\mathbf{E}_t \mathbf{R}_{qq}(k-1) \mathbf{E}_t^T]. \quad (4.54)$$

Si definimos ahora

$$\mathbf{R}_{qq} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{R}_{qq}(k), \quad (4.55)$$

resulta finalmente que

$$\mathbf{R}_{qq} = (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t) \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t^T) + \mathbf{E}_t \mathbf{R}_{qq} \mathbf{E}_t^T. \quad (4.56)$$

Esta ecuación recursiva nos permitiría calcular la matriz de correlaciones de los símbolos precodificados, dadas  $\mathbf{R}_{xx}$  y la matriz de precodificación  $\mathbf{E}_t$  o, lo que es lo mismo, la respuesta impulsiva del canal.

Una vez obtenida la matriz  $\mathbf{R}_{qq}$  resulta muy sencillo calcular la potencia promedio de los símbolos precodificados,  $p_q$ , que será

$$p_q = \frac{1}{2N} \text{tr}(\mathbf{R}_{qq}), \quad (4.57)$$

donde  $\text{tr}(\mathbf{A})$  es la traza de cierta matriz genérica  $\mathbf{A}$ , es decir, la suma de los elementos de la diagonal principal de  $\mathbf{A}$ .

Una vez expuesto el proceso general mediante el cual calcularíamos la potencia de los símbolos precodificados, resulta pertinente un breve estudio cualitativo de los resultados obtenidos, resultados que se ofrecerán en detalle en el apartado de simulaciones, como ya se mencionó previamente:

- Por una parte, y al contrario que la precodificación no lineal de Cheong, el TDP y el FDP no suponen necesariamente un incremento en la potencia de los símbolos transmitidos al canal. Bien es cierto que dicho aumento puede existir, pero también puede suceder que la potencia puede permanecer constante o incluso puede disminuir.
- Ese aumento o disminución de la potencia parece que puede darse para cualquier ca-

nal<sup>24</sup>. Es decir, sea cual sea la matriz  $\mathbf{E}_l$  (que sólo depende del canal) es posible encontrar una matriz de correlaciones  $\mathbf{R}_{xx}$  tal que la potencia de los símbolos precodificados sea menor que la de los originales.

La matriz  $\mathbf{R}_{xx}$  depende de la asignación de bits a cada subcanal. Esta asignación no es arbitraria para el caso de la modulación DMT, sino que es optimizada para maximizar la tasa binaria, como sabemos del capítulo 2. Recordemos además que esa asignación óptima de bits depende tanto de la respuesta en frecuencia del canal como de la densidad espectral de potencia del ruido. Esto significa que si optamos por una tasa binaria óptima,  $\mathbf{R}_{xx}$  está fijada; y como  $\mathbf{E}_l$  también está determinada y además lo está de forma independiente de  $\mathbf{R}_{xx}$ , no tenemos control sobre si la potencia aumenta o disminuye. Ello quiere decir que la combinación de la asignación de bits con la precodificación propuesta admitiría una doble vertiente:

- Optar por una asignación de bits que maximice la tasa binaria. Esto se hace, como ya sabemos, independientemente de que se vaya a utilizar precodificación, y luego aplicaríamos el TDP o el FDP para maximizar la eficiencia espectral, aun a costa de un posible incremento en la potencia transmitida. (Insistimos, no obstante, en que puede ocurrir igualmente que la potencia necesaria disminuya).
- Buscar una asignación de bits que, en combinación con la precodificación, minimice la potencia transmitida, aunque ello signifique una disminución en la tasa binaria. Esta posibilidad, aún no desarrollada, es bastante más compleja que la anterior puesto que implica un análisis conjunto del proceso de asignación y del precodificador, no siendo posible desacoplar ambos elementos como sucede en el punto anterior.

## 4.7 ESTIMACIÓN DEL CANAL

### 4.7.1. Método de estimación

Una vez evaluadas las bondades de la precodificación, podemos objetar que esta debe superar aún una importante dificultad, cual es la de estimar adecuadamente el valor de la respuesta en frecuencia del canal antes de empezar a transmitir.

Este problema es muy fácil de solventar cuando se trabaja con un CP. En efecto, puesto que con la ayuda del mismo la operación que realiza el canal es en todo caso una convolución circular, podemos afirmar con seguridad que

$$\mathbf{Y}(k) = \mathbf{S}\mathbf{X}(k) \quad (4.58)$$

para cualquier valor de  $k$ . Esto es equivalente, según veíamos en el capítulo 2, a decir que

---

<sup>24</sup> Este hecho no ha podido ser probado teóricamente, pero las simulaciones parecen confirmar tal extremo.

$$Y_i(k) = H_i X_i(k), \quad 0 \leq i \leq N-1. \quad (4.59)$$

Por tanto, la solución más simple consiste en enviar un símbolo DMT conocido, de modo que

$$H_i = \frac{Y_i(k)}{X_i(k)}, \quad 0 \leq i \leq N-1. \quad (4.60)$$

Sin embargo, si eliminamos el prefijo cíclico pero aún no conocemos la respuesta en frecuencia del canal, no podemos realizar una precodificación correcta que nos asegure que dicho canal va a actuar como si realizara una convolución circular. O, para ser más precisos, y esa va a ser nuestra ocasión para abordar el problema, sólo se va a efectuar una convolución circular para ciertos símbolos DMT concretos. Para saber cuáles, vamos a recordar ahora la ecuación (4.15),

$$\mathbf{q}(l) = \mathbf{x}(l) + \mathbf{E}_l \mathbf{x}(l), \quad (4.61)$$

donde

$$\mathbf{E}_l = \left[ \mathbf{O} \mid \mathbf{C}_l^{-1} \mathbf{C}_{h_2} \right]. \quad (4.62)$$

Ya decíamos en su momento que lo que significa esto es que la precodificación temporal toma las  $L$  últimas muestras de  $\mathbf{x}(l)$  y las distribuye adecuadamente en todo el vector  $\mathbf{q}(l)$ , para así compensar la ICI que posteriormente introduce el canal. Pues bien, si no conocemos aún la matriz de precodificación  $\mathbf{E}_l$ , una alternativa válida sería transmitir un vector  $\mathbf{x}(l)$  tal que al menos sus  $L$  últimas muestras sean nulas. En ese caso, obviamente,  $\mathbf{q}(l) = \mathbf{x}(l)$  sería el vector precodificado correcto, independientemente de cuál sea el canal. Y, por tanto, la ecuación (4.60) seguiría siendo perfectamente aplicable. El único pero estaría en que necesitamos conocer la longitud de la respuesta impulsiva del canal, aunque este mismo problema lo tenemos con el CP, ya que su longitud mínima está íntimamente ligada a la de dicha respuesta impulsiva.

Pese a todo, está claro que una estimación adecuada necesita una cantidad de símbolos más o menos elevada, no podemos conformarnos ni mucho menos con uno solo. Es por ello que debemos considerar así mismo qué sucede para los símbolos precodificados posteriores. En ese caso la ecuación que define la precodificación sería

$$\mathbf{q}(k) = \mathbf{x}(k) + \mathbf{E}_l [\mathbf{x}(k) - \mathbf{q}(k-1)], \quad (4.63)$$

con lo cual vemos que nos está afectando el símbolo transmitido anteriormente, el cual no podemos modificar a nuestro antojo. Ahora bien, siempre nos es posible tomar una  $\mathbf{x}(k)$  tal que sus  $L$  últimas muestras coincidan con las  $L$  últimas de  $\mathbf{q}(k-1)$ . En ese caso se conseguirá que  $\mathbf{q}(k) = \mathbf{x}(k)$  independientemente de cómo sea el canal. Así pues, la técnica a seguir es similar a la usada al principio de la transmisión, sólo que ahora, en lugar de colocar ceros

en las últimas posiciones, añadiríamos las últimas muestras de  $\mathbf{q}(k-1)$ . Esto no supone ningún inconveniente, puesto que los símbolos DMT a transmitir en el proceso de estimación son completamente arbitrarios con tal de que lo conozcan tanto transmisor como receptor.

### 4.7.2. Errores en la estimación del canal

Una vez comprobado que es posible estimar la respuesta del canal sin necesidad de utilizar el CP, aún nos queda un punto por abordar. Y este es: ¿qué sucede cuando se considera que la estimación de la respuesta del canal (se haya hecho como se haya hecho) no es perfecta? Es decir, ¿cuál es el comportamiento de la precodificación propuesta respecto de los posibles errores cometidos en la estimación del canal?

En este estudio vamos a asumir que no existe ruido aditivo en el canal, para de esta manera desacoplar en cierto modo los errores provenientes de dicho ruido, que no nos interesan en este momento, de los producidos por el uso de una estimación imperfecta del canal.

Antes de comenzar, no obstante, vamos a realizar una pequeña aclaración respecto de la notación empleada. Así, como es común en la literatura, vamos a utilizar el acento circunflejo para indicar una estimación de alguna variable. Por ejemplo, la estimación de la variable  $\bar{\mathbf{X}}(k)$  se denotaría como  $\hat{\bar{\mathbf{X}}}(k)$ .

#### 4.7.2.1. SISTEMA OFDM CON PREFIJO CÍCLICO

Para poder contestar con objetividad a la cuestión planteada es preciso previamente analizar cuál es la dependencia respecto de la respuesta del canal de un sistema OFDM con CP, para luego poder establecer la comparación adecuada con el TDP/FDP.

Recordemos entonces que, según (2.55), la señal recibida en el dominio de la frecuencia, y considerando la extensión simétrica conjugada<sup>25</sup>, es de la forma

$$\bar{\mathbf{Y}}_{\text{CP}}(k) = \mathbf{F}\mathbf{C}_p\mathbf{F}^H\bar{\mathbf{X}}(k) = \bar{\mathbf{S}}\bar{\mathbf{X}}(k), \quad (4.64)$$

donde el subíndice CP indica que se está utilizando prefijo cíclico y

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{F}\mathbf{C}_p\mathbf{F}^H. \quad (4.65)$$

El siguiente paso, como sabemos, es utilizar un igualador de 1 *tap* para invertir la ma-

---

<sup>25</sup> El análisis de la dependencia buscada es bastante más complejo si se evalúa sin considerar esta extensión simétrica conjugada, y no aporta ninguna información relevante. En efecto, puesto que lo que nos interesa es comparar el comportamiento del sistema OFDM con prefijo cíclico y con precodificador, lo único necesario es que en ambos casos se evalúe el error en el mismo punto.

triz  $\bar{\mathbf{S}}$ . Claro que, considerando que la información que se tiene sobre el canal es imperfecta, lo que verdaderamente se va a utilizar es la matriz estimada  $\hat{\mathbf{S}}$ . Por consiguiente, el símbolo estimado para el caso del CP será

$$\hat{\mathbf{X}}_{\text{CP}}(k) = \hat{\mathbf{S}}^{-1} \bar{\mathbf{Y}}_{\text{CP}}(k) = \hat{\mathbf{S}}^{-1} \bar{\mathbf{S}} \bar{\mathbf{X}}(k). \quad (4.66)$$

Vamos a escribir esta ecuación en una forma más conveniente para nuestros intereses. Para ello, de manera análoga a (4.65),

$$\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{F}^H. \quad (4.67)$$

Si invertimos esta expresión resulta<sup>26</sup>

$$\hat{\mathbf{S}}^{-1} = \mathbf{F}^H \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \mathbf{F}. \quad (4.68)$$

Sustituyendo (4.67) y (4.68) en (4.66) y recordando que la matriz  $\mathbf{F}$  es ortogonal

$$\hat{\mathbf{X}}_{\text{CP}}(k) = \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{F} \mathbf{C}_p \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \mathbf{C}_p \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k). \quad (4.69)$$

Escribamos ahora la matriz estimada  $\hat{\mathbf{C}}_p$  como

$$\hat{\mathbf{C}}_p = \mathbf{C}_p + \Delta \mathbf{C}_p, \quad (4.70)$$

siendo  $\Delta \mathbf{C}_p$ , evidentemente, el error cometido en la estimación. En ese caso, (4.69) queda como

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_{\text{CP}}(k) &= \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} (\hat{\mathbf{C}}_p - \Delta \mathbf{C}_p) \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k) = \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k) - \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_p \cdot \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k) \\ &= \bar{\mathbf{X}}(k) - \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_p \cdot \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Con esto podemos calcular finalmente el error de estimación en los símbolos recibidos, definido como

$$\Delta \bar{\mathbf{X}}_{\text{CP}}(k) = \hat{\mathbf{X}}_{\text{CP}}(k) - \bar{\mathbf{X}}(k). \quad (4.72)$$

Sustituyendo (4.71) en (4.72),

$$\Delta \bar{\mathbf{X}}_{\text{CP}}(k) = -\mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_p \cdot \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k). \quad (4.73)$$

Por conveniencia, vamos a escribir la ecuación anterior como

---

<sup>26</sup> Vamos a utilizar  $\hat{\mathbf{A}}^{-1}$  para expresar la inversa de la matriz estimada  $\hat{\mathbf{A}}$ , que no la estimación de la matriz inversa.

$$\Delta \bar{\mathbf{X}}_{\text{CP}}(k) = -\mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot (\Delta \mathbf{C}_p \cdot \hat{\mathbf{C}}_p^{-1}) \cdot \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k). \quad (4.74)$$

#### 4.7.2.2. PRECODIFICACIÓN

Para analizar la dependencia de la precodificación respecto de la estimación de la respuesta del canal, vamos a considerar solamente la versión en el dominio del tiempo. Hacemos esto porque, según se explicaba ya al abordar la convergencia de los precodificadores, la versión en el dominio del tiempo y las de la frecuencia son equivalentes entre sí, en el sentido de que la señal transmitida al canal es la misma en todos los casos, por derivarse todas imponiendo precisamente dicha condición. Por lo tanto, también será igual la señal transmitida cuando se utilice una estimación imperfecta de la respuesta del canal, lo cual conllevará que los símbolos estimados serán también iguales, por ser idéntico el receptor en todos los casos. En definitiva, nos basta con estudiar una sola versión del precodificador, y escogemos la del dominio del tiempo por su mayor simplicidad analítica.

En este caso hemos de partir de la ecuación (4.27) y sustituir la matriz de precodificación exacta por su estimación, utilizando la información imperfecta del canal. Entonces, la señal transmitida sería

$$\mathbf{q}(k) = (\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t) \mathbf{x}(k) - \hat{\mathbf{E}}_t \mathbf{q}(k-1), \quad (4.75)$$

siendo  $\hat{\mathbf{E}}_t$  la matriz de precodificación estimada, dada por

$$\hat{\mathbf{E}}_t = \hat{\mathbf{C}}_t^{-1} \hat{\mathbf{C}}_h. \quad (4.76)$$

Recordando (4.20), la señal recibida en el dominio del tiempo es ahora de la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\text{TDP}}(k) &= \mathbf{C}_t \mathbf{q}(k) + \mathbf{C}_h \mathbf{q}(k-1) = \mathbf{C}_t (\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t) \mathbf{x}(k) - \mathbf{C}_t \hat{\mathbf{E}}_t \mathbf{q}(k-1) + \mathbf{C}_h \mathbf{q}(k-1) \\ &= \mathbf{C}_t (\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t) \mathbf{x}(k) + (\mathbf{C}_h - \mathbf{C}_t \hat{\mathbf{E}}_t) \mathbf{q}(k-1), \end{aligned} \quad (4.77)$$

donde el subíndice TDP significa que estamos empleando precodificación en el dominio del tiempo (aunque, recordemos, cualquier otra versión del precodificador nos daría el mismo resultado).

Como se demuestra en el anexo 4.3, la ecuación anterior puede aproximarse como

$$\mathbf{y}_{\text{TDP}}(k) \simeq (\mathbf{I}_{2N} - \Delta \mathbf{C}_t \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}) \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{x}(k), \quad (4.78)$$

siendo  $\Delta \mathbf{C}_t$  el error en la estimación de  $\mathbf{C}_t$ .

Pasemos ahora al dominio de la frecuencia,

$$\bar{\mathbf{Y}}_{\text{TDP}}(k) = \mathbf{F} \mathbf{y}_{\text{TDP}}(k). \quad (4.79)$$

Por tanto, después del igualador de 1 tap, el símbolo estimado será

$$\hat{\mathbf{X}}_{\text{TDP}}(k) = \hat{\mathbf{S}}^{-1} \bar{\mathbf{Y}}_{\text{TDP}}(k) = \hat{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{F} \mathbf{y}_{\text{TDP}}(k). \quad (4.80)$$

Sustituyamos ahora (4.68) y (4.78) en (4.80). Queda así que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_{\text{TDP}}(k) &= \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \mathbf{F}^H \mathbf{F} (\mathbf{I}_{2N} - \Delta \mathbf{C}_t \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}) \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{x}(k) = \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} (\mathbf{I}_{2N} - \Delta \mathbf{C}_t \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}) \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{x}(k) \\ &= \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{x}(k) - \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1} \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{x}(k) = \mathbf{F} \mathbf{x}(k) - \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1} \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{x}(k). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Utilizando ahora los símbolos transmitidos en el dominio de la frecuencia,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{X}}_{\text{TDP}}(k) &= \mathbf{F} \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k) - \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1} \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k) \\ &= \bar{\mathbf{X}}(k) - \mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot \Delta \mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1} \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k). \end{aligned} \quad (4.82)$$

Por tanto, definiendo el error de estimación en los símbolos recibidos como

$$\Delta \bar{\mathbf{X}}_{\text{TDP}}(k) = \hat{\mathbf{X}}_{\text{TDP}}(k) - \bar{\mathbf{X}}(k). \quad (4.83)$$

queda finalmente que

$$\Delta \bar{\mathbf{X}}_{\text{TDP}}(k) = -\mathbf{F} \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \cdot (\Delta \mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}) \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{X}}(k). \quad (4.84)$$

Comparando (4.74) y (4.84), comprobamos que el error de estimación tiene expresiones similares tanto para el sistema DMT con CP como con precodificación. Esto significa, como más adelante tendremos tiempo de comprobar en el capítulo de simulaciones, que el comportamiento de ambos sistemas es prácticamente idéntico en presencia de errores en la estimación del canal.

## 4.8 RESUMEN

En este capítulo hemos presentado la contribución fundamental de nuestra tesis, que es la introducción de un precodificador lineal para eliminar las interferencias en un sistema DMT evitando la necesidad de utilizar un prefijo cíclico. A modo de resumen, podemos recordar los siguientes puntos relevantes en el estudio:

- La precodificación lineal permite convertir la convolución lineal realizada por el canal en una convolución circular, exactamente igual a como lo hace el CP pero sin necesidad de utilizar muestras redundantes.
- La señal recibida no cambia respecto de la que se tiene cuando se usa el CP. Por tanto, el diseño del receptor es el mismo.
- Puesto que, debido a lo comentado en el punto anterior, las SNR's de cada subcanal se mantienen respecto de las que se tenían con el CP, sigue siendo válida la utilización del algoritmo *water-filling*, es decir, dicho algoritmo maximiza realmente la tasa

binaria transmitida en el canal.

- Además, puesto que en recepción todo se mantiene igual que con el CP, la probabilidad de error va a ser exactamente la misma, no existiendo ningún incremento en ella por el hecho de no emplearse ninguna igualación en el receptor.
- Se han presentado dos versiones diferentes del precodificador: en el dominio del tiempo (TDP) y en el de la frecuencia (FDP), esta última además en una forma simplificada. Ambas son completamente equivalentes entre sí, difiriendo únicamente en la carga computacional que requieren.
- Se ha comprobado que la convergencia del algoritmo de precodificación está garantizada para los canales de fase mínima. Además, se han calculado explícitamente los autovalores de la matriz de precodificación.
- Se ha argumentado que la potencia de los símbolos transmitidos no crece necesariamente respecto de los que se tienen con CP, pudiendo incluso disminuir, lo cual abre las puertas a un método de optimización de la potencia transmitida.
- Se ha planteado un método de estimación de la respuesta del canal sin necesidad de emplear el CP, para garantizar la unicidad del proceso de transmisión pudiendo eliminar dicho CP también en la fase de estimación.
- Se ha comprobado que la precodificación lineal presentada es robusta frente a errores en la estimación del canal, presentando también en este punto un comportamiento prácticamente idéntico al de un sistema DMT con CP.



## Anexo 4.1

### DERIVACIÓN DE LA VERSIÓN SIMPLIFICADA DEL FDP

En lo que sigue, usando su simetría conjugada vamos a descomponer el símbolo extendido simétricamente  $\bar{\mathbf{X}}(k)$  como

$$\bar{\mathbf{X}}(k) = \begin{bmatrix} X_0(k) & \mathbf{X}_{1,N-1}(k) & X_N(k) & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{X}_{1,N-1}^*(k) \end{bmatrix}^T, \quad (4.85)$$

donde

- $X_0(k)$  es la muestra de  $\bar{\mathbf{X}}(k)$  correspondiente al subcanal 0.
- $\mathbf{X}_{1,N-1}(k)$  es un vector columna con las muestras de  $\bar{\mathbf{X}}(k)$  pertenecientes a los subcanales 1 a  $N-1$ .
- $X_N(k)$  es la muestra correspondiente al subcanal  $N$ -ésimo.
- $\tilde{\mathbf{I}}_{N-1}$  es una matriz cuadrada de tamaño  $(N-1) \times (N-1)$  con unos en su antidiagonal y cero en el resto de elementos, es decir,

$$\tilde{\mathbf{I}}_{N-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.86)$$

Esto significa que  $\tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{X}_{1,N-1}^*(k)$  toma  $\mathbf{X}_{1,N-1}(k)$ , invierte el orden de sus elementos y conjuga el resultado, es decir, es la transformación simétrica conjugada de  $\mathbf{X}_{1,N-1}(k)$ .

Hacemos notar ahora que  $\bar{\mathbf{Q}}(k)$ , al igual que  $\bar{\mathbf{X}}(k)$ , va a tener simetría conjugada para cualquier valor de  $k$ , debido a que ha sido calculada como IDFT de  $\mathbf{q}(k)$ , que es puramente real. Esto nos va a permitir decir que

$$\bar{\mathbf{Q}}(k) = \begin{bmatrix} Q_0(k) & \mathbf{Q}_{1,N-1}(k) & Q_N(k) & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{Q}_{1,N-1}^*(k) \end{bmatrix}^T, \quad (4.87)$$

donde  $Q_0(k)$ ,  $\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)$  y  $Q_N(k)$  se definen de manera análoga a las componentes de  $\bar{\mathbf{X}}(k)$ .

Recordemos ahora la ecuación (4.32), donde definíamos la precodificación original en el dominio de la frecuencia,

$$\bar{\mathbf{Q}}(k) = \bar{\mathbf{X}}(k) + \bar{\mathbf{E}}_f \left[ \bar{\mathbf{X}}(k) - \bar{\mathbf{Q}}(k-1) \right]. \quad (4.88)$$

Por consiguiente, usando las definiciones anteriores,

$$\begin{bmatrix} Q_0(k) \\ \mathbf{Q}_{1,N-1}(k) \\ Q_N(k) \\ \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{Q}_{1,N-1}^*(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0(k) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) \\ X_N(k) \\ \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{X}_{1,N-1}^*(k) \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{E}}_f \begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1) \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \\ \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{X}_{1,N-1}^* - \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{Q}_{1,N-1}^*(k-1) \end{bmatrix}. \quad (4.89)$$

De acuerdo con esta ecuación, digamos ahora que

$$\bar{\mathbf{E}}_f = \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & e_{f_{1,3}} & \mathbf{e}_{f_{1,4}} \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \\ e_{f_{3,1}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & e_{f_{3,3}} & \mathbf{e}_{f_{3,4}} \\ \mathbf{e}'_{f_{4,1}} & \mathbf{E}_{f_{4,2}} & \mathbf{e}'_{f_{4,3}} & \mathbf{E}_{f_{4,4}} \end{bmatrix}. \quad (4.90)$$

En la notación utilizada se ha distinguido, para una mayor claridad, entre las diferentes dimensiones de cada elemento. Así, en general, podemos afirmar que:

- los elementos de la forma  $e_{f_{i,j}}$  son escalares,
- los  $\mathbf{e}_{f_{i,j}}$  son vectores fila, de tamaño  $1 \times (N-1)$ ,
- los  $\mathbf{e}'_{f_{i,j}}$  son vectores columna, de tamaño  $(N-1) \times 1$ ,
- los elementos  $\mathbf{E}_{f_{i,j}}$  son matrices de tamaño  $(N-1) \times (N-1)$ .

Tengamos ahora en cuenta que  $\tilde{\mathbf{I}}_{N-1}^{-1} = \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}$ . Por tanto, premultiplicando por  $\tilde{\mathbf{I}}_{N-1}^{-1}$  la última fila de (4.89),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_0(k) \\ \mathbf{Q}_{1,N-1}(k) \\ Q_N(k) \\ \mathbf{Q}_{1,N-1}^*(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_0(k) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) \\ X_N(k) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}^*(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & e_{f_{1,3}} & \mathbf{e}_{f_{1,4}} \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \\ e_{f_{3,1}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & e_{f_{3,3}} & \mathbf{e}_{f_{3,4}} \\ \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}'_{f_{4,1}} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{4,2}} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}'_{f_{4,3}} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{4,4}} \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1) \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \\ \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{X}_{1,N-1}^*(k-1) - \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{Q}_{1,N-1}^*(k-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} X_0(k) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) \\ X_N(k) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}^*(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & e_{f_{1,3}} & \mathbf{e}_{f_{1,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ e_{f_{3,1}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & e_{f_{3,3}} & \mathbf{e}_{f_{3,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}'_{f_{4,1}} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{4,2}} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}'_{f_{4,3}} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{4,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1) \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}^*(k-1) - \mathbf{Q}_{1,N-1}^*(k-1) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Conjugando la última fila,

$$\begin{bmatrix} Q_0(k) \\ \mathbf{Q}_{1,N-1}(k) \\ Q_N(k) \\ \mathbf{Q}_{1,N-1}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0(k) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) \\ X_N(k) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & e_{f_{1,3}} & \mathbf{e}_{f_{1,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ e_{f_{3,1}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & e_{f_{3,3}} & \mathbf{e}_{f_{3,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}'_{f_{4,1}} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{4,4}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}'_{f_{4,3}} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{4,2}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1) \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}^*(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}^*(k-1) \end{bmatrix} \quad (4.92)$$

$$\begin{bmatrix} Q_0(k) \\ \mathbf{Q}_{1,N-1}(k) \\ Q_N(k) \\ \mathbf{Q}_{1,N-1}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0(k) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) \\ X_N(k) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & e_{f_{1,3}} & \mathbf{e}_{f_{1,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ e_{f_{3,1}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & e_{f_{3,3}} & \mathbf{e}_{f_{3,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}'_{f_{4,1}} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{4,4}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}'_{f_{4,3}} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{4,2}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1) \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}^*(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}^*(k-1) \end{bmatrix} \quad (4.93)$$

Comprobamos así que las filas 2 y 4 de la ecuación matricial anterior son redundantes entre sí. Comparándolas obtenemos así fácilmente que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_{f_{4,1}} &= \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}'_{f_{2,1}}^*, \\ \mathbf{E}_{f_{4,2}} &= \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{2,4}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}, \\ \mathbf{e}'_{f_{4,3}} &= \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}'_{f_{2,3}}^*, \\ \mathbf{E}_{f_{4,4}} &= \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{2,2}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Eliminando la redundancia comentada, escribamos (4.90) como

$$\begin{bmatrix} Q_0(k) \\ \mathbf{Q}_{1,N-1}(k) \\ Q_N(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0(k) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) \\ X_N(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & e_{f_{1,3}} & \mathbf{e}_{f_{1,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ e_{f_{3,1}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & e_{f_{3,3}} & \mathbf{e}_{f_{3,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1) \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}^*(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}^*(k-1) \end{bmatrix} \quad (4.95)$$

A continuación vamos a conjugar las filas 1 y 3 de la ecuación anterior. Teniendo en cuenta que, por la simetría conjugada de  $\bar{\mathbf{Q}}(k)$  y  $\bar{\mathbf{X}}(k)$ ,  $Q_0(k)$ ,  $Q_N(k)$ ,  $X_0(k)$  y  $X_N(k)$  son reales,

$$\begin{bmatrix} Q_0(k) \\ \mathbf{Q}_{1,N-1}(k) \\ Q_N(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0(k) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) \\ X_N(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{f_{1,1}}^* & \mathbf{e}_{f_{1,4}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} & \mathbf{e}_{f_{1,3}}^* & \mathbf{e}_{f_{1,2}}^* \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ \mathbf{e}_{f_{3,1}}^* & \mathbf{e}_{f_{3,4}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} & \mathbf{e}_{f_{3,3}}^* & \mathbf{e}_{f_{3,2}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1) \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \\ \mathbf{X}_{1,N-1}^*(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}^*(k-1) \end{bmatrix}. \quad (4.96)$$

Entonces, comparando (4.95) y (4.96), concluimos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{f_{1,1}} &= \mathbf{e}'_{f_{1,1}}, & \mathbf{e}_{f_{1,3}} &= \mathbf{e}'_{f_{1,3}}, & \mathbf{e}_{f_{1,4}} &= \mathbf{e}_{f_{1,2}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}, \\ \mathbf{e}_{f_{3,1}} &= \mathbf{e}'_{f_{3,1}}, & \mathbf{e}_{f_{3,3}} &= \mathbf{e}'_{f_{3,3}}, & \mathbf{e}_{f_{3,4}} &= \mathbf{e}_{f_{3,2}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}. \end{aligned} \quad (4.97)$$

Si ahora sustituimos en (4.90) las relaciones halladas en (4.94) y (4.97), la matriz de precodificación frecuencial queda como

$$\bar{\mathbf{E}}_f = \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & e_{f_{1,3}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \\ e_{f_{3,1}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & e_{f_{3,3}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}_{f_{2,1}}^* & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{2,4}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{e}_{f_{2,3}}^* & \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \mathbf{E}_{f_{2,2}}^* \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \end{bmatrix}. \quad (4.98)$$

Este es un resultado interesante pues expresa todas las relaciones redundantes que aparecen en dicha matriz de precodificación. No obstante, sigamos con nuestro objetivo de reducir los cálculos en el FDP. Para ello, vamos a tomar ahora las partes real e imaginaria de (4.95). Teniendo en cuenta las relaciones expresadas en (4.97), y recordando que  $Q_0(k)$ ,  $Q_N(k)$ ,  $X_0(k)$  y  $X_N(k)$  son reales,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Q_0(k) \\ \operatorname{Re}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} \\ Q_N(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_0(k) \\ \operatorname{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} \\ X_N(k) \end{bmatrix} \\ &+ \operatorname{Re} \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & e_{f_{1,3}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}}^* \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ e_{f_{3,1}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & e_{f_{3,3}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \operatorname{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \\ \operatorname{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \end{bmatrix} \\ &- \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & 0 & \mathbf{e}_{f_{1,2}}^* \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ 0 & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & 0 & \mathbf{e}_{f_{3,2}}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \operatorname{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ 0 \\ -\operatorname{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} 0 \\ \text{Im}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \text{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 + \text{Re} \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & e_{f_{1,3}} & \mathbf{e}_{f_{1,2}}^* \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ e_{f_{3,1}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & e_{f_{3,3}} & \mathbf{e}_{f_{3,2}}^* \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} 0 \\ \text{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ 0 \\ -\text{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \end{bmatrix} \\
 + \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_{f_{1,2}} & 0 & \mathbf{e}_{f_{1,2}}^* \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & \mathbf{E}_{f_{2,2}} & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} & \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1} \\ 0 & \mathbf{e}_{f_{3,2}} & 0 & \mathbf{e}_{f_{3,2}}^* \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \text{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \\ \text{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

Combinando adecuadamente los elementos de las expresiones anteriores, y eliminando las filas 1 y 3 de la ecuación matricial (4.100), pues son idénticamente cero,

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} Q_0(k) \\ \text{Re}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} \\ Q_N(k) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} X_0(k) \\ \text{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} \\ X_N(k) \end{bmatrix} \\
 + \text{Re} \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & 2\mathbf{e}_{f_{1,2}} & e_{f_{1,3}} \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & (\mathbf{E}_{f_{2,2}} + \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}) & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} \\ e_{f_{3,1}} & 2\mathbf{e}_{f_{3,2}} & e_{f_{3,3}} \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \text{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \end{bmatrix} \\
 - \text{Im} \begin{bmatrix} 0 & 2\mathbf{e}_{f_{1,2}} & 0 \\ \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & (\mathbf{E}_{f_{2,2}} - \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}) & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} \\ 0 & 2\mathbf{e}_{f_{3,2}} & 0 \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} 0 \\ \text{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ 0 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.101}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Im}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} &= \text{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} \\
 + \text{Re} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & (\mathbf{E}_{f_{2,2}} - \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}) & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} 0 \\ \text{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ 0 \end{bmatrix} \\
 + \text{Im} \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_{f_{2,1}} & (\mathbf{E}_{f_{2,2}} + \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}) & \mathbf{e}'_{f_{2,3}} \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \text{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

Fusionamos (4.101) y (4.102),

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} Q_0(k) \\ \text{Re}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} \\ \text{Im}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} \\ Q_N(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0(k) \\ \text{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} \\ \text{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} \\ X_N(k) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & 2 \text{Re}\{\mathbf{e}_{f_{1,2}}\} & e_{f_{1,3}} \\ \text{Re}\{\mathbf{e}'_{f_{2,1}}\} & \text{Re}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} + \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \text{Re}\{\mathbf{e}'_{f_{2,3}}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{e}'_{f_{2,1}}\} & \text{Im}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} + \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \text{Im}\{\mathbf{e}'_{f_{2,3}}\} \\ e_{f_{3,1}} & 2 \text{Re}\{\mathbf{e}_{f_{3,2}}\} & e_{f_{3,3}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \text{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0 & -2 \text{Im}\{\mathbf{e}_{f_{1,2}}\} & 0 \\ -\text{Im}\{\mathbf{e}'_{f_{2,1}}\} & -\text{Im}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} - \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & -\text{Im}\{\mathbf{e}'_{f_{2,3}}\} \\ \text{Re}\{\mathbf{e}'_{f_{2,1}}\} & \text{Re}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} - \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \text{Re}\{\mathbf{e}'_{f_{2,3}}\} \\ 0 & -2 \text{Im}\{\mathbf{e}_{f_{3,2}}\} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \text{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.103}
\end{aligned}$$

Finalmente, esto se puede escribir como

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} Q_0(k) \\ \text{Re}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} \\ \text{Im}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} \\ Q_N(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_0(k) \\ \text{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} \\ \text{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} \\ X_N(k) \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & 2 \text{Re}\{\mathbf{e}_{f_{1,2}}\} & -2 \text{Im}\{\mathbf{e}_{f_{1,2}}\} & e_{f_{1,3}} \\ \text{Re}\{\mathbf{e}'_{f_{2,1}}\} & \text{Re}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} + \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & -\text{Im}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} - \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \text{Re}\{\mathbf{e}'_{f_{2,3}}\} \\ \text{Im}\{\mathbf{e}'_{f_{2,1}}\} & \text{Im}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} + \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \text{Re}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} - \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \text{Im}\{\mathbf{e}'_{f_{2,3}}\} \\ e_{f_{3,1}} & 2 \text{Re}\{\mathbf{e}_{f_{3,2}}\} & -2 \text{Im}\{\mathbf{e}_{f_{3,2}}\} & e_{f_{3,3}} \end{bmatrix} \\
& \cdot \begin{bmatrix} X_0(k) - Q_0(k-1) \\ \text{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ \text{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k) - \mathbf{Q}_{1,N-1}(k-1)\} \\ X_N(k) - Q_N(k-1) \end{bmatrix}. \tag{4.104}
\end{aligned}$$

De forma abreviada,

$$\mathbf{Q}_e(k) = \mathbf{X}_e(k) + \mathbf{E}_f [\mathbf{X}_e(k) - \mathbf{Q}_e(k-1)], \tag{4.105}$$

donde  $\mathbf{Q}_e(k)$  y  $\mathbf{X}_e(k)$  son los vectores extendidos dados por

$$\mathbf{Q}_e(k) = \begin{bmatrix} Q_0(k) & \operatorname{Re}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} & \operatorname{Im}\{\mathbf{Q}_{1,N-1}(k)\} & Q_N(k) \end{bmatrix}^T \quad (4.106)$$

y

$$\mathbf{X}_e(k) = \begin{bmatrix} X_0(k) & \operatorname{Re}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} & \operatorname{Im}\{\mathbf{X}_{1,N-1}(k)\} & X_N(k) \end{bmatrix}^T, \quad (4.107)$$

mientras que  $\mathbf{E}_f$  es la nueva matriz de precodificación frecuencial,

$$\mathbf{E}_f = \begin{bmatrix} e_{f_{1,1}} & 2\operatorname{Re}\{\mathbf{e}_{f_{1,2}}\} & -2\operatorname{Im}\{\mathbf{e}_{f_{1,2}}\} & e_{f_{1,3}} \\ \operatorname{Re}\{\mathbf{e}'_{f_{2,1}}\} & \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} + \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & -\operatorname{Im}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} - \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \operatorname{Re}\{\mathbf{e}'_{f_{2,3}}\} \\ \operatorname{Im}\{\mathbf{e}'_{f_{2,1}}\} & \operatorname{Im}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} + \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \operatorname{Re}\{\mathbf{E}_{f_{2,2}} - \mathbf{E}_{f_{2,4}} \tilde{\mathbf{I}}_{N-1}\} & \operatorname{Im}\{\mathbf{e}'_{f_{2,3}}\} \\ e_{f_{3,1}} & 2\operatorname{Re}\{\mathbf{e}_{f_{3,2}}\} & -2\operatorname{Im}\{\mathbf{e}_{f_{3,2}}\} & e_{f_{3,3}} \end{bmatrix}. \quad (4.108)$$

## Anexo 4.2

### AUTOVALORES Y AUTOVECTORES DE LA MATRIZ DE PRECODIFICACIÓN

Sea un canal que suponemos FIR, con función de transferencia

$$H(z) = h(0) + h(1)z^{-1} + h(2)z^{-2} + \dots + h(L)z^{-L}, \quad (4.109)$$

(es decir, la longitud de su respuesta impulsiva es  $L+1$ ), y denominemos  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_L$  a los ceros de  $H(z)$ . A partir de este canal podemos construir dos matrices  $\mathbf{C}_t$  y  $\mathbf{C}_h$  de tamaño  $2N \times 2N$  ya definidas previamente, pero que repetimos aquí en aras de una mejor comprensión del texto:

$$\mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ h(L) & h(L-1) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & h(L) & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & h(L-1) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & h(L) & \dots & h(0) \end{bmatrix}, \quad (4.110)$$

$$\mathbf{C}_h = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & h(L) & h(L-1) & \dots & h(1) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & h(L) & \dots & h(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & h(L) \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.111)$$

Entonces la matriz de precodificación temporal viene definida por

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{C}_h. \quad (4.112)$$

Pretendemos calcular los autovalores de  $\mathbf{E}_t$ . Vamos a denominar  $\lambda_i, i=1, 2, \dots, 2N$  a dichos autovalores, y  $\mathbf{t}_i, i=1, 2, \dots, 2N$  a los correspondientes autovectores asociados. Entonces,

$$\mathbf{E}_t \mathbf{t}_i = \mathbf{C}_t^{-1} \mathbf{C}_h \mathbf{t}_i = \lambda_i \mathbf{t}_i. \quad (4.113)$$

La ecuación anterior puede reescribirse como

$$\mathbf{C}_h \mathbf{t}_i = \lambda_i \mathbf{C}_t \mathbf{t}_i. \quad (4.114)$$



De esta manera, nuestro cálculo de autovalores se transforma en un problema de autovalores generalizados<sup>27</sup> [Datta95]. Es decir, los  $\lambda_i$  buscados son también los autovalores del par  $(\mathbf{C}_h, \mathbf{C}_t)$  o, lo que es lo mismo, las raíces de la ecuación característica

$$\det(\mathbf{C}_h - \lambda \mathbf{C}_t) = 0. \quad (4.115)$$

Construyamos entonces el lápiz matricial<sup>28</sup>  $\mathbf{C}_h - \lambda \mathbf{C}_t$ ,

$$\mathbf{C}_h - \lambda \mathbf{C}_t = \begin{bmatrix} -\lambda h(0) & 0 & \cdots & h(L) & h(L-1) & \cdots & h(1) \\ -\lambda h(1) & -\lambda h(0) & \cdots & 0 & h(L) & \cdots & h(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda h(L) & -\lambda h(L-1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & h(L) \\ 0 & -\lambda h(L) & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & -\lambda h(L-1) & -\lambda h(L-2) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda h(L) & -\lambda h(L-1) & \cdots & -\lambda h(0) \end{bmatrix}. \quad (4.116)$$

Pues bien, vamos a demostrar que los autovalores de dicho lápiz son

$$\lambda_i = \begin{cases} -c_i^{2N}, & i = 1, 2, \dots, L, \\ 0, & i = L+1, L+2, \dots, 2N. \end{cases} \quad (4.117)$$

Es decir, existe una relación sencilla e inmediata entre los autovalores y los ceros de la función de transferencia del canal.

Por una parte, está claro que deben existir al menos  $2N - L$  autovalores nulos. Ciertamente, puesto que las  $2N - L$  primeras columnas de la matriz de precodificación  $\mathbf{E}_t$  son ceros, el rango de  $\mathbf{E}_t$  no podrá exceder de  $L$ , y por tanto tampoco el número de autovalores no nulos [Searle82].

Por otra parte, para demostrar que el resto de autovalores son  $-c_i^{2N}$  vamos a proceder por inducción. (Y, de paso, quedarán probados también los autovalores nulos). De esta manera, empecemos por definir una familia de funciones de transferencia dadas por

$$H_n(z) = h_n(0) + h_n(1)z^{-1} + h_n(2)z^{-2} + \cdots + h_n(n)z^{-n}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, L. \quad (4.118)$$

La forma de construir las  $H_n(z)$  sería la siguiente:

<sup>27</sup> Este problema aparece en otros aspectos del procesado de señal, como por ejemplo en el algoritmo SPRIT de estimación espectral [Proakis97].

<sup>28</sup> En terminología inglesa, *matrix pencil*.

$$\begin{aligned}
H_0(z) &= h(0), \\
H_1(z) &= h(0)(1 - c_1 z^{-1}), \\
H_2(z) &= h(0)(1 - c_1 z^{-1})(1 - c_2 z^{-1}), \\
&\vdots \\
H_n(z) &= h(0)(1 - c_1 z^{-1})(1 - c_2 z^{-1}) \cdots (1 - c_n z^{-1}).
\end{aligned} \tag{4.119}$$

Está claro entonces que, para  $n = L$ ,

$$H_L(z) = H(z), \tag{4.120}$$

siendo  $H(z)$  la función de transferencia de nuestro canal, dada por (4.109).

De acuerdo con todo lo expuesto, nuestra demostración por inducción deberá constar de dos pasos:

- Probar que, si tomáramos un canal con función de transferencia  $H_1(z)$ , el único autovalor no nulo sería  $-c_1^{2N}$ .
- Probar que, dando por válido que para un canal con función de transferencia  $H_n(z)$  los autovalores no nulos son  $-c_1^{2N}$ ,  $-c_2^{2N}$ , ...,  $-c_n^{2N}$ , al tomar  $H_{n+1}(z)$  los nuevos autovalores no nulos pasarían a ser  $-c_1^{2N}$ ,  $-c_2^{2N}$ , ...,  $-c_n^{2N}$ ,  $-c_{n+1}^{2N}$ .

Veamos el primero de los pasos. Si tomamos  $H_1(z)$ , y denominando  $\mathbf{C}_{h,1}$  y  $\mathbf{C}_{t,1}$  a las correspondientes matrices del canal para este caso, el lápiz matricial de (4.116) sería

$$\mathbf{C}_{h,1} - \lambda \mathbf{C}_{t,1} = \begin{bmatrix} -\lambda h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_1(1) \\ -\lambda h_1(1) & -\lambda h(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda h_1(1) & -\lambda h(0) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda h(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda h_1(1) & -\lambda h(0) \end{bmatrix}. \tag{4.121}$$

Su determinante, sencillo de obtener en este caso, es

$$\det(\mathbf{C}_{h,1} - \lambda \mathbf{C}_{t,1}) = \lambda^{2N-1} [h^{2N}(0) + \lambda h_1^{2N}(1)]. \tag{4.122}$$

Por tanto, igualando a cero,

$$\lambda_i = \begin{cases} -[h_1(1)/h(0)]^{2N}, & i = 1, \\ 0, & i = 2, L+2, \dots, 2N. \end{cases} \tag{4.123}$$

Claro que, por otra parte, y de acuerdo con (4.118) y (4.119),

$$H_1(z) = h(0) - h(0)c_1 z^{-1} = h(0) + h_1(1)z^{-1}. \tag{4.124}$$

Es decir,

$$c_1 = -\frac{h_1(1)}{h(0)}. \quad (4.125)$$

Sustituyendo (4.125) en (4.123) tendríamos completada la demostración para el caso  $n = 1$ .

Para la segunda parte de nuestra demostración por inducción, vamos a asumir que, dado el lápiz matricial

$$\mathbf{C}_{h,n} - \lambda \mathbf{C}_{t,n} = \begin{bmatrix} -\lambda h(0) & 0 & 0 & \cdots & 0 & h_n(n) & \cdots & h_n(2) & h_n(1) \\ -\lambda h_n(1) & -\lambda h(0) & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & h_n(3) & h_n(2) \\ -\lambda h_n(2) & -\lambda h_n(1) & -\lambda h(0) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & h_n(4) & h_n(3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\lambda h_n(n) & -\lambda h_n(n-1) & -\lambda h_n(n-2) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda h_n(n) & -\lambda h_n(n-1) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda h_n(n-1) & -\lambda h_n(n-2) & \cdots & -\lambda h(0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\lambda h_n(n) & -\lambda h_n(n-1) & \cdots & -\lambda h_n(1) & -\lambda h(0) \end{bmatrix}, \quad (4.126)$$

los autovalores del par  $(\mathbf{C}_{h,n}, \mathbf{C}_{t,n})$  son

$$\lambda_i = \begin{cases} -c_i^{2N}, & i = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & i = n+1, L+2, \dots, 2N. \end{cases} \quad (4.127)$$

A partir de ellos, vamos a calcular los autovalores del nuevo par  $(\mathbf{C}_{h,n+1}, \mathbf{C}_{t,n+1})$ . Para ello, tengamos en cuenta en primer lugar que, de acuerdo con (4.118) y (4.119),

$$\begin{aligned} H_{n+1}(z) &= H_n(z)(1 - c_{n+1}z^{-1}) = [h(0) + h_n(1)z^{-1} + h_n(2)z^{-2} + \cdots + h_n(n)z^{-n}](1 - c_{n+1}z^{-1}) \\ &= h(0) + [h_n(1) - c_{n+1}h(0)]z^{-1} + [h_n(2) - c_{n+1}h_n(1)]z^{-2} + \cdots + [h_n(n) - c_{n+1}h_n(n-1)]z^{-n} \\ &\quad - c_{n+1}h_n(n)z^{-(n+1)}. \end{aligned} \quad (4.128)$$

Por tanto, el nuevo lápiz matricial del par  $(\mathbf{C}_{h,n+1}, \mathbf{C}_{t,n+1})$  será (lo escribimos en dos partes para una mejor visualización del mismo)

$$\mathbf{C}_{h,n+1} - \lambda \mathbf{C}_{t,n+1} = [\mathbf{P}_{1,n+1} \mid \mathbf{P}_{2,n+1}], \quad (4.129)$$

donde

$$\mathbf{P}_{1,n+1} = \begin{bmatrix} -\lambda h(0) & 0 & \cdots & 0 \\ -\lambda [h_n(1) - c_{n+1}h(0)] & -\lambda h(0) & \cdots & 0 \\ -\lambda [h_n(2) - c_{n+1}h_n(1)] & -\lambda [h_n(1) - c_{n+1}h(0)] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda c_{n+1}h_n(n) & -\lambda [h_n(n) - c_{n+1}h_n(n-1)] & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda c_{n+1}h_n(n) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda [h_n(n) - c_{n+1}h_n(n-1)] \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda c_{n+1}h_n(n) \end{bmatrix}, \quad (4.130)$$

y

$$\mathbf{P}_{2,n+1} = \begin{bmatrix} c_{n+1}h_n(n-1) & \cdots & h_n(2) - c_{n+1}h_n(1) & h_n(1) - c_{n+1}h(0) \\ 0 & \cdots & h_n(3) - c_{n+1}h_n(2) & h_n(2) - c_{n+1}h_n(1) \\ 0 & \cdots & h_n(4) - c_{n+1}h_n(3) & h_n(3) - c_{n+1}h_n(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\lambda[h_n(n-1) - c_{n+1}h_n(n-2)] & \cdots & -\lambda h(0) & 0 \\ -\lambda[h_n(n) - c_{n+1}h_n(n-1)] & \cdots & -\lambda[h_n(1) - c_{n+1}h(0)] & -\lambda h(0) \end{bmatrix}. \quad (4.131)$$

Comparando ahora los lápices  $\mathbf{C}_{h,n} - \lambda\mathbf{C}_{t,n}$  y  $\mathbf{C}_{h,n+1} - \lambda\mathbf{C}_{t,n+1}$  puede comprobarse que están relacionados a través de una nueva matriz de tamaño  $2N \times 2N$  de la forma

$$\mathbf{C}_{h,n+1} - \lambda\mathbf{C}_{t,n+1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_{n+1}/\lambda \\ -c_{n+1} & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_{n+1} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_{n+1} & 1 \end{bmatrix} \cdot (\mathbf{C}_{h,n} - \lambda\mathbf{C}_{t,n}). \quad (4.132)$$

Tomemos ahora determinantes en la ecuación anterior, y tengamos en cuenta que [Golub83], dadas dos matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  cualesquiera,

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}). \quad (4.133)$$

Por consiguiente,

$$\det(\mathbf{C}_{h,n+1} - \lambda\mathbf{C}_{t,n+1}) = \frac{\lambda + c_{n+1}^{2N}}{\lambda} \cdot \det(\mathbf{C}_{h,n} - \lambda\mathbf{C}_{t,n}). \quad (4.134)$$

Esto quiere decir, igualando (4.134) a cero, que los autovalores de  $\mathbf{C}_{h,n+1} - \lambda\mathbf{C}_{t,n+1}$  serán los mismos que los de  $\mathbf{C}_{h,n} - \lambda\mathbf{C}_{t,n}$  excepto por el hecho de que un autovalor nulo es cancelado por el  $\lambda$  del denominador y sustituido por  $\lambda = -c_{n+1}^{2N}$ , que es justamente lo que queríamos demostrar.

Conocidos ya los autovalores de  $\mathbf{E}_t$ , y en aras de una mayor completitud del estudio, vamos a obtener también sus autovectores, aunque realmente no tengan demasiado interés en lo que se refiere a la convergencia del algoritmo de precodificación.

A este respecto, hemos de señalar que la descomposición que vamos a proponer no es aplicable si existen autovalores con multiplicidad mayor que uno<sup>29</sup>. Si eso sucediera, sería necesario acudir a una forma de Jordan o una descomposición de Cholesky [Datta95], cuya

---

<sup>29</sup> Esto no afecta, sin embargo, a la derivación de dichos autovalores efectuada anteriormente, puesto que no depende para nada de su multiplicidad.

excesiva complejidad unida al hecho de que, como hemos dicho anteriormente, este estudio no tiene relevancia en la convergencia, hace completamente desaconsejable su análisis. No obstante, debemos tener en cuenta, a propósito de todo esto, que en un caso real es lógicamente muy improbable que existan autovalores repetidos.

Aclarado todo esto, vamos a denominar  $\mathbf{D}$  a la matriz diagonal formada por los autovalores de  $\mathbf{E}_t$ , es decir,

$$\mathbf{D} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2N}\}. \quad (4.135)$$

Si tenemos en cuenta (4.115), resulta que

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & -c_1^{2N} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -c_2^{2N} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -c_{L-1}^{2N} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -c_L^{2N} \end{bmatrix}. \quad (4.136)$$

Por otra parte, sea  $\mathbf{T}$  la matriz formada por los autovectores de  $\mathbf{E}_t$ . Con todo ello, la descomposición buscada será [Datta95]

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{T}\mathbf{D}\mathbf{T}^{-1}. \quad (4.137)$$

Pues bien, vamos a comprobar que  $\mathbf{T}$  viene dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1^0 & c_2^0 & \dots & c_L^0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & c_1^1 & c_2^1 & \dots & c_L^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & c_1^{2N-L} & c_2^{2N-L} & \dots & c_L^{2N-L} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_1^{2N-L+1} & c_2^{2N-L+1} & \ddots & c_L^{2N-L+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_1^{2N-1} & c_2^{2N-1} & \dots & c_L^{2N-1} \end{bmatrix}. \quad (4.138)$$

Para demostrar esto, empezamos reordenando (4.137) como

$$\mathbf{C}_h \mathbf{T} = \mathbf{C}_t \mathbf{T} \mathbf{D}. \quad (4.139)$$

La  $i$ -ésima columna de la ecuación anterior (con  $i = 2N - L + 1, 2N - L + 2, \dots, 2N - 1$ , suponiendo que empezamos a contar por  $i = 1$ ), de acuerdo con las expresiones de las matrices propuestas, se corresponde con

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & h(L) & h(L-1) & \cdots & h(1) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & h(L) & \cdots & h(2) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & h(L) \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i^0 \\ c_i^1 \\ \vdots \\ c_i^{2N-L} \\ c_i^{2N-L+1} \\ \vdots \\ c_i^{2N-1} \end{bmatrix} \\
= & - \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ h(1) & h(0) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & 0 \\ h(L) & h(L-1) & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h(L) & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & h(L-1) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & h(L) & \cdots & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_i^{2N} \\ c_i^{2N+1} \\ \vdots \\ c_i^{4N-L} \\ c_i^{4N-L+1} \\ \vdots \\ c_i^{4N-1} \end{bmatrix}. \tag{4.140}
\end{aligned}$$

Desarrollando,

$$\begin{bmatrix} h(1)c_i^{2N-1} + h(2)c_i^{2N-2} + \cdots + h(L)c_i^{2N-L} \\ h(2)c_i^{2N-1} + h(3)c_i^{2N-2} + \cdots + h(L)c_i^{2N-L+1} \\ \vdots \\ h(L)c_i^{2N-1} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} h(0)c_i^{2N} \\ h(0)c_i^{2N+1} + h(1)c_i^{2N} \\ \vdots \\ h(0)c_i^{2N+L-1} + h(1)c_i^{2N+L-1} + \cdots + h(L-1)c_i^{2N} \\ h(0)c_i^{2N+L} + h(1)c_i^{2N+L-1} + \cdots + h(L)c_i^{2N} \\ h(0)c_i^{2N+L+1} + h(1)c_i^{2N+L} + \cdots + h(L)c_i^{2N+1} \\ \vdots \\ h(0)c_i^{4N-1} + h(1)c_i^{4N-2} + \cdots + h(L)c_i^{4N-L-1} \end{bmatrix}. \tag{4.141}$$

Reordenando,

$$\begin{bmatrix} h(0)c_i^{2N} + h(1)c_i^{2N-1} + h(2)c_i^{2N-2} + \cdots + h(L)c_i^{2N-L} \\ h(0)c_i^{2N+1} + h(1)c_i^{2N} + h(2)c_i^{2N-1} + h(3)c_i^{2N-2} + \cdots + h(L)c_i^{2N-L+1} \\ \vdots \\ h(0)c_i^{2N+L-1} + h(1)c_i^{2N+L-1} + \cdots + h(L-1)c_i^{2N} + h(L)c_i^{2N-1} \\ h(0)c_i^{2N+L} + h(1)c_i^{2N+L-1} + \cdots + h(L)c_i^{2N} \\ h(0)c_i^{2N+L+1} + h(1)c_i^{2N+L} + \cdots + h(L)c_i^{2N+1} \\ \vdots \\ h(0)c_i^{4N-L-1} + h(1)c_i^{4N-L} + \cdots + h(L)c_i^{4N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.142}$$

Ahora bien, la ecuación anterior es perfectamente correcta. En efecto, extrayendo factor común,

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c}
 h(0)c_i^{2N} + h(1)c_i^{2N-1} + h(2)c_i^{2N-2} + \dots + h(L)c_i^{2N-L} \\
 h(0)c_i^{2N+1} + h(1)c_i^{2N} + h(2)c_i^{2N-1} + h(3)c_i^{2N-2} + \dots + h(L)c_i^{2N-L+1} \\
 \vdots \\
 h(0)c_i^{2N+L-1} + h(1)c_i^{2N+L-1} + \dots + h(L-1)c_i^{2N} + h(L)c_i^{2N-1} \\
 h(0)c_i^{2N+L} + h(1)c_i^{2N+L-1} + \dots + h(L)c_i^{2N} \\
 h(0)c_i^{2N+L+1} + h(1)c_i^{2N+L} + \dots + h(L)c_i^{2N+1} \\
 \vdots \\
 h(0)c_i^{4N-L-1} + h(1)c_i^{4N-L} + \dots + h(L)c_i^{4N-1}
 \end{array} \right] \\
 = & \left[ \begin{array}{c}
 c_i^{2N} (h(0) + h(1)c_i^{-1} + h(2)c_i^{-2} + \dots + h(L)c_i^{-L}) \\
 c_i^{2N+1} (h(0) + h(1)c_i^{-1} + h(2)c_i^{-2} + h(3)c_i^{-3} + \dots + h(L)c_i^{-L}) \\
 \vdots \\
 c_i^{2N+L-1} (h(0) + h(1)c_i^{-1} + h(2)c_i^{-2} + \dots + h(L)c_i^{-L}) \\
 c_i^{2N+L} (h(0) + h(1)c_i^{-1} + h(2)c_i^{-2} + \dots + h(L)c_i^{-L}) \\
 c_i^{2N+L+1} (h(0) + h(1)c_i^{-1} + h(2)c_i^{-2} + \dots + h(L)c_i^{-L}) \\
 \vdots \\
 c_i^{4N-1} (h(0) + h(1)c_i^{-1} + h(2)c_i^{-2} + \dots + h(L)c_i^{-L})
 \end{array} \right] \tag{4.143} \\
 = & (h(0) + h(1)c_i^{-1} + h(2)c_i^{-2} + \dots + h(L)c_i^{-L}) \begin{bmatrix} c_i^{2N} \\ c_i^{2N+1} \\ \vdots \\ c_i^{2N+L-1} \\ c_i^{2N+L} \\ c_i^{2N+L+1} \\ \vdots \\ c_i^{4N-1} \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Pero, como  $c_i$  es un cero de  $H(z)$ , a partir de (4.108),

$$H(z)|_{z=c_i} = h(0) + h(1)c_i^{-1} + h(2)c_i^{-2} + \dots + h(L)c_i^{-L} = 0, \tag{4.144}$$

completando la demostración.

### Anexo 4.3

#### SÍMBOLOS RECIBIDOS CON PRECODIFICACIÓN EN PRESENCIA DE ERRORES EN LA ESTIMACIÓN DEL CANAL

Vamos a partir de la ecuación (4.77), que repetimos ahora por comodidad,

$$\mathbf{y}_{\text{TDP}}(k) = \mathbf{C}_t(\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t)\mathbf{x}(k) + (\mathbf{C}_h - \mathbf{C}_t\hat{\mathbf{E}}_t)\mathbf{q}(k-1). \quad (4.145)$$

Vamos a simplificarla en lo posible. Para ello empezamos por escribir que

$$\mathbf{C}_h - \mathbf{C}_t\hat{\mathbf{E}}_t = (\mathbf{C}_p - \mathbf{C}_t) - \mathbf{C}_t\hat{\mathbf{E}}_t = \mathbf{C}_p - \mathbf{C}_t(\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t). \quad (4.146)$$

Por tanto, queda como

$$\mathbf{y}_{\text{TDP}}(k) = \mathbf{C}_t(\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t)\mathbf{x}(k) + [\mathbf{C}_p - \mathbf{C}_t(\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t)]\mathbf{q}(k-1). \quad (4.147)$$

Veamos qué sucede con cada término de la ecuación anterior. Para ello tengamos en cuenta que, por analogía con (4.11),

$$\hat{\mathbf{C}}_p = \hat{\mathbf{C}}_t + \hat{\mathbf{C}}_h. \quad (4.148)$$

Por tanto,

$$\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t = \mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}\hat{\mathbf{C}}_h = \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}(\hat{\mathbf{C}}_t + \hat{\mathbf{C}}_h) = \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}\hat{\mathbf{C}}_p. \quad (4.149)$$

Considerando también que, siendo  $\Delta\mathbf{C}_t$  el error en la estimación de  $\mathbf{C}_t$ ,

$$\hat{\mathbf{C}}_t = \mathbf{C}_t + \Delta\mathbf{C}_t, \quad (4.150)$$

nos queda que

$$\mathbf{C}_t(\mathbf{I} + \hat{\mathbf{E}}_t) = \mathbf{C}_t\hat{\mathbf{C}}_t^{-1}\hat{\mathbf{C}}_p = (\hat{\mathbf{C}}_t - \Delta\mathbf{C}_t)\hat{\mathbf{C}}_t^{-1}\hat{\mathbf{C}}_p = \hat{\mathbf{C}}_p - \Delta\mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}\hat{\mathbf{C}}_p. \quad (4.151)$$

Sustituyendo (4.151) en (4.147),

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{\text{TDP}}(k) &= (\hat{\mathbf{C}}_p - \Delta\mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}\hat{\mathbf{C}}_p)\mathbf{x}(k) + [\mathbf{C}_p - (\hat{\mathbf{C}}_p - \Delta\mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}\hat{\mathbf{C}}_p)] \\ &= (\hat{\mathbf{C}}_p - \Delta\mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}\hat{\mathbf{C}}_p)\mathbf{x}(k) + (\Delta\mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}\hat{\mathbf{C}}_p - \Delta\mathbf{C}_p)\mathbf{q}(k-1), \end{aligned} \quad (4.152)$$

donde, llamando  $\Delta\mathbf{C}_p$  el error en la estimación de  $\mathbf{C}_p$ ,

$$\hat{\mathbf{C}}_p = \mathbf{C}_p + \Delta\mathbf{C}_p. \quad (4.153)$$

Podemos escribir entonces que



$$\mathbf{y}_{\text{TDP}}(k) = (\mathbf{I}_{2N} - \Delta\mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1})\hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{x}(k) + (\Delta\mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1} - \Delta\mathbf{C}_p \cdot \hat{\mathbf{C}}_p^{-1})\hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{q}(k-1). \quad (4.154)$$

Para poder comparar fielmente los dos sumandos anteriores vamos a calcular la matriz de covarianzas de los símbolos  $\mathbf{y}_{\text{TDP}}(k)$ . Por simplicidad, vamos a denotar

$$\mathbf{M}_x = \mathbf{I}_{2N} - \Delta\mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1} \quad (4.155)$$

y

$$\mathbf{M}_q = \Delta\mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1} - \Delta\mathbf{C}_p \cdot \hat{\mathbf{C}}_p^{-1}. \quad (4.156)$$

De este modo,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy} &= E \left\{ \mathbf{y}_{\text{TDP}}(k) \mathbf{y}_{\text{TDP}}^T(k) \right\} \\ &= E \left\{ \left[ \mathbf{M}_x \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{x}(k) + \mathbf{M}_q \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{q}(k-1) \right] \left[ \mathbf{M}_x \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{x}(k) + \mathbf{M}_q \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{q}(k-1) \right]^T \right\} \\ &= \mathbf{M}_x \hat{\mathbf{C}}_p E \left\{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^T(k) \right\} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_x^T + \mathbf{M}_x \hat{\mathbf{C}}_p E \left\{ \mathbf{x}(k) \mathbf{q}^T(k-1) \right\} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_q^T \\ &\quad + \mathbf{M}_q \hat{\mathbf{C}}_p E \left\{ \mathbf{q}(k-1) \mathbf{x}^T(k) \right\} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_x^T + \mathbf{M}_q \hat{\mathbf{C}}_p E \left\{ \mathbf{q}(k-1) \mathbf{q}^T(k-1) \right\} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_q^T. \end{aligned} \quad (4.157)$$

Recordando que  $\mathbf{x}(k)$  y  $\mathbf{q}(k-1)$  son independientes, lo anterior queda como

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{M}_x \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{R}_{xx} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_x^T + \mathbf{M}_q \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_q^T. \quad (4.158)$$

Tengamos ahora presente la ecuación (4.56),

$$\mathbf{R}_{qq} = (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t) \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{I}_{2N} + \mathbf{E}_t^T) + \mathbf{E}_t \mathbf{R}_{qq} \mathbf{E}_t^T. \quad (4.159)$$

Según la misma, y teniendo en cuenta que ahora tenemos una estimación imperfecta del canal,

$$\mathbf{R}_{qq} = (\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t) \mathbf{R}_{xx} (\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t^T) + \hat{\mathbf{E}}_t \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{E}}_t^T. \quad (4.160)$$

Despejando  $\mathbf{R}_{xx}$ ,

$$\mathbf{R}_{xx} = (\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t)^{-1} \mathbf{R}_{qq} (\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t^T)^{-1} - (\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t)^{-1} \hat{\mathbf{E}}_t \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{E}}_t^T (\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t^T)^{-1}. \quad (4.161)$$

Vamos a simplificar la ecuación anterior. Para ello, utilizando (4.9) y (4.12) vemos que

$$(\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t)^{-1} = (\hat{\mathbf{C}}_t^{-1} \hat{\mathbf{C}}_p)^{-1} = \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \hat{\mathbf{C}}_t \quad (4.162)$$

y

$$(\mathbf{I}_{2N} + \hat{\mathbf{E}}_t)^{-1} \hat{\mathbf{E}}_t = \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \hat{\mathbf{C}}_t \hat{\mathbf{C}}_t^{-1} \hat{\mathbf{C}}_h = \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \hat{\mathbf{C}}_h. \quad (4.163)$$

Por tanto, escribimos (4.161) de la forma

$$\mathbf{R}_{xx} = \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \hat{\mathbf{C}}_t \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_t^T \hat{\mathbf{C}}_p^{-T} - \hat{\mathbf{C}}_p^{-1} \hat{\mathbf{C}}_h \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_h^T \hat{\mathbf{C}}_p^{-T}, \quad (4.164)$$

donde el superíndice  $-T$  indica inversión y transposición conjuntas.

Sustituyendo ahora (4.164) en (4.158),

$$\mathbf{R}_{yy} = \mathbf{M}_x \hat{\mathbf{C}}_t \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_t^T \mathbf{M}_x^T - \mathbf{M}_x \hat{\mathbf{C}}_h \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_h^T \mathbf{M}_x^T + \mathbf{M}_q \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_q^T. \quad (4.165)$$

Como  $\hat{\mathbf{C}}_p = \hat{\mathbf{C}}_t + \hat{\mathbf{C}}_h$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{yy} &= \mathbf{M}_x (\hat{\mathbf{C}}_p - \hat{\mathbf{C}}_h) \mathbf{R}_{qq} (\hat{\mathbf{C}}_p - \hat{\mathbf{C}}_h)^T \mathbf{M}_x^T - \mathbf{M}_x \hat{\mathbf{C}}_h \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_h^T \mathbf{M}_x^T + \mathbf{M}_q \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_q^T \\ &= \mathbf{M}_x \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_x^T + \mathbf{M}_q \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_q^T + f(\mathbf{M}_x, \mathbf{R}_{qq}), \end{aligned} \quad (4.166)$$

donde con  $f(\mathbf{M}_x, \mathbf{R}_{qq})$  hemos expresado una función de  $\mathbf{M}_x$  y  $\mathbf{R}_{qq}$  que representa el resto de sumandos de  $\mathbf{R}_{yy}$ .

Vemos claramente entonces que según (4.155) y (4.156), para errores de estimación pequeños el término  $\mathbf{M}_q \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_q^T$  va a ser despreciable respecto de  $\mathbf{M}_x \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{R}_{qq} \hat{\mathbf{C}}_p^T \mathbf{M}_x^T$ . Esto significa que  $\mathbf{R}_{yy}$  no dependería de  $\mathbf{R}_{qq}$  o, lo que es lo mismo, el segundo sumando de  $\mathbf{y}_{\text{TDP}}(k)$  en (4.154) es despreciable respecto del primero. Queda así finalmente que

$$\mathbf{y}_{\text{TDP}}(k) = (\mathbf{I}_{2N} - \Delta \mathbf{C}_t \cdot \hat{\mathbf{C}}_t^{-1}) \hat{\mathbf{C}}_p \mathbf{x}(k). \quad (4.167)$$

# Capítulo 5

## SIMULACIONES

### 5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo vamos a presentar un buen número de simulaciones<sup>30</sup> que atestigüen el buen comportamiento de la precodificación lineal que ha sido base de la presente tesis. Estas simulaciones se van a estructurar según el siguiente esquema:

En primer lugar, se comprobará la validez del algoritmo propuesto, verificando que se comporta de acuerdo a la teoría tanto en ausencia de ruido como en presencia del mismo. También se efectuará una comparativa respecto de la precodificación no lineal.

A continuación se realizará un estudio más o menos pormenorizado de lo que podemos esperar en cuanto a la potencia de la señal transmitida en presencia del precodificador propuesto.

En el siguiente apartado se analizará el comportamiento del precodificador en presencia de errores en la estimación del canal, comprobando de nuevo la validez del estudio teórico presentado en el capítulo anterior.

Por último, y como caso particular, se mostrará que dicha precodificación funciona de forma muy adecuada en un sistema real, como es ADSL.

### 5.2 VALIDEZ DEL ALGORITMO

#### 5.2.1. Efecto de la ICI y la ISI

En este primer apartado vamos a verificar simplemente que el algoritmo de precodificación lineal propuesto funciona adecuadamente. Para ello vamos a tomar un canal muy simple de longitud  $L + 1 = 3$ , dado por

$$H(z) = 1 - 0.2z^{-1} - 0.63z^{-2}. \quad (5.1)$$

Como es inmediato comprobar, los dos ceros de este canal están situados en 0.9 y

---

<sup>30</sup> El entorno de simulación empleado ha sido el paquete Matlab 6.5.

-0.7. El número de subcanales va a ser tan sólo 8, aunque el primero (el correspondiente a frecuencia 0) no lo vamos a emplear.

Veamos en primer lugar qué sucede si eliminamos el prefijo cíclico y no incluimos ningún tipo de igualación ni de precodificación. En estas condiciones, sabemos que va a surgir una importante interferencia tanto debida al solapamiento entre los subcanales de cada símbolo (ICI) como entre los distintos símbolos entre sí (ISI). Vamos a mostrar este hecho paso a paso, para que se vea más claramente. Además, para no mezclar el efecto del ruido con el de las interferencias, en estas primeras simulaciones vamos a considerar que no existe ningún tipo de ruido en el canal.

Así, en primer lugar, vamos a suponer que dejamos un período de guarda entre los distintos símbolos de valor  $L = 2$ . De este modo sabemos que no va a existir ISI. Sin embargo, y a diferencia de lo que ocurriría en una comunicación tradicional de una sola portadora, sigue existiendo interferencia. En efecto, en la Fig. 5.1 podemos ver la distribución de los símbolos recibidos para un subcanal con constelación 64-QAM (normalizada), comprobando de esta manera que aparece una fuerte distorsión.

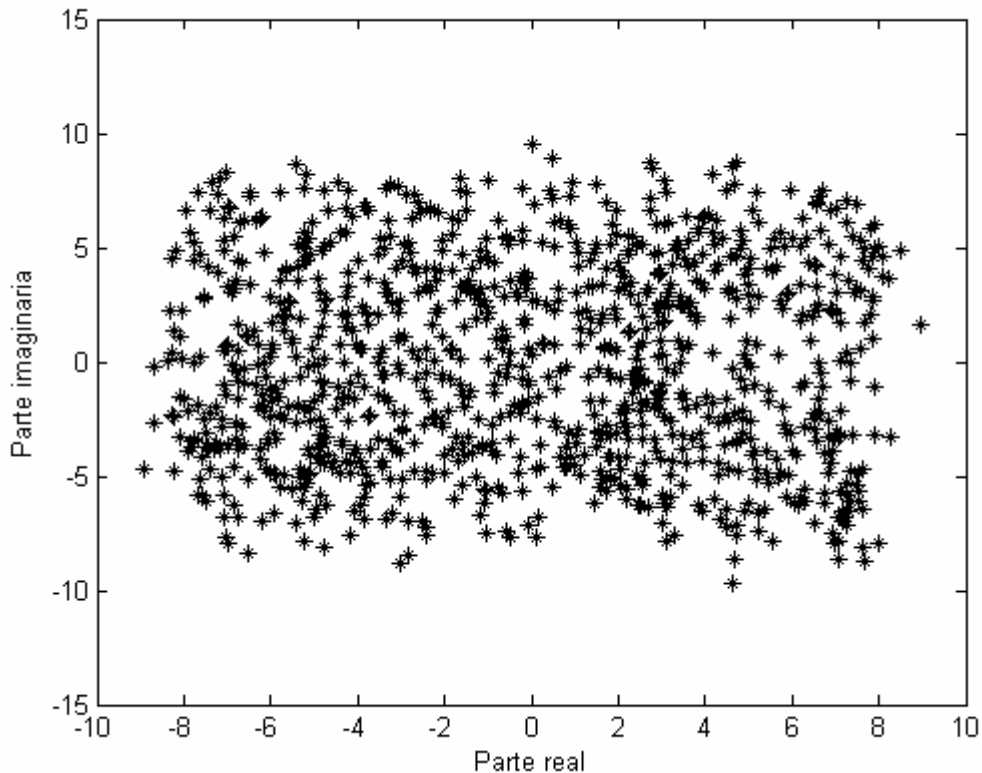


Fig. 5.1: Símbolos recibidos en presencia de ICI.

El problema se agudiza cuando eliminamos el período de guarda, puesto que en este caso va a surgir también el problema de la ISI. Los resultados los podemos observar en la Fig. 5.2, en la que apreciamos que hay símbolos que están incluso más desviados que en la figura anterior.

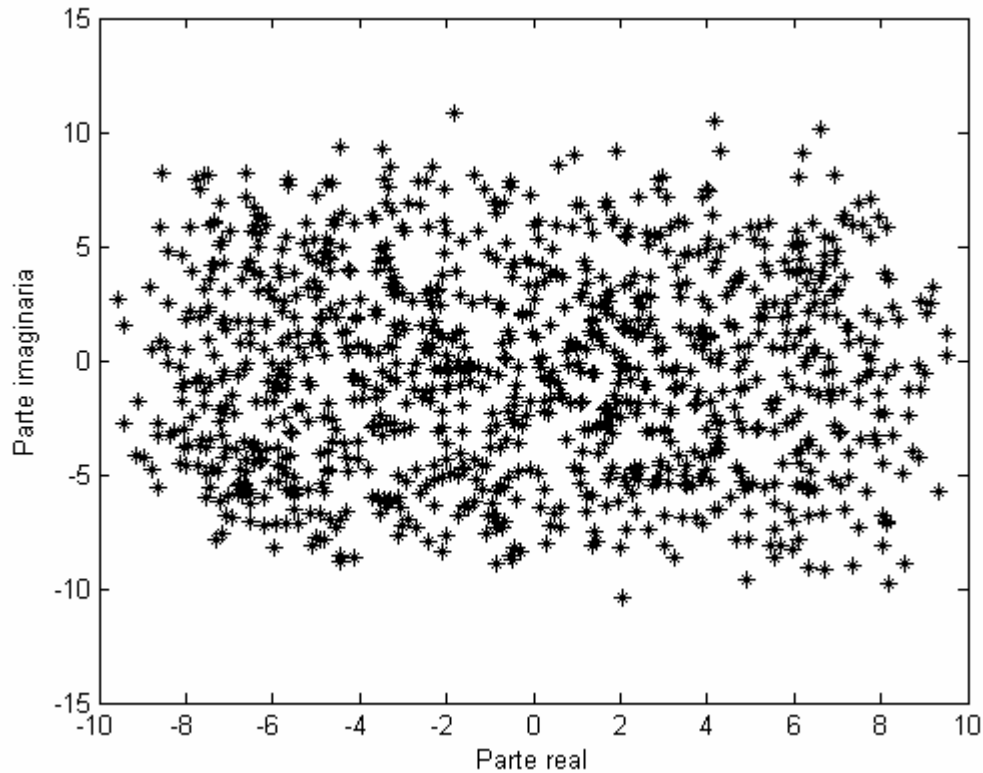


Fig. 5.2: Símbolos recibidos en presencia de ICI e ISI.

En cambio, veamos qué sucede cuando empleamos la precodificación lineal presentada en esta tesis, en cualquiera de sus versiones (temporal o frecuencial). En este caso comprobamos que los símbolos recibidos se encuentran perfectamente distribuidos en la constelación 64-QAM (Fig. 5.3).

### 5.2.2. Comportamiento frente al ruido

Habiendo ya verificado que la precodificación lineal propuesta nos sirve para eliminar toda clase de interferencias, vamos a comprobar que su comportamiento en presencia de ruido es también el esperado, esto es, el mismo que en un sistema DMT con CP.

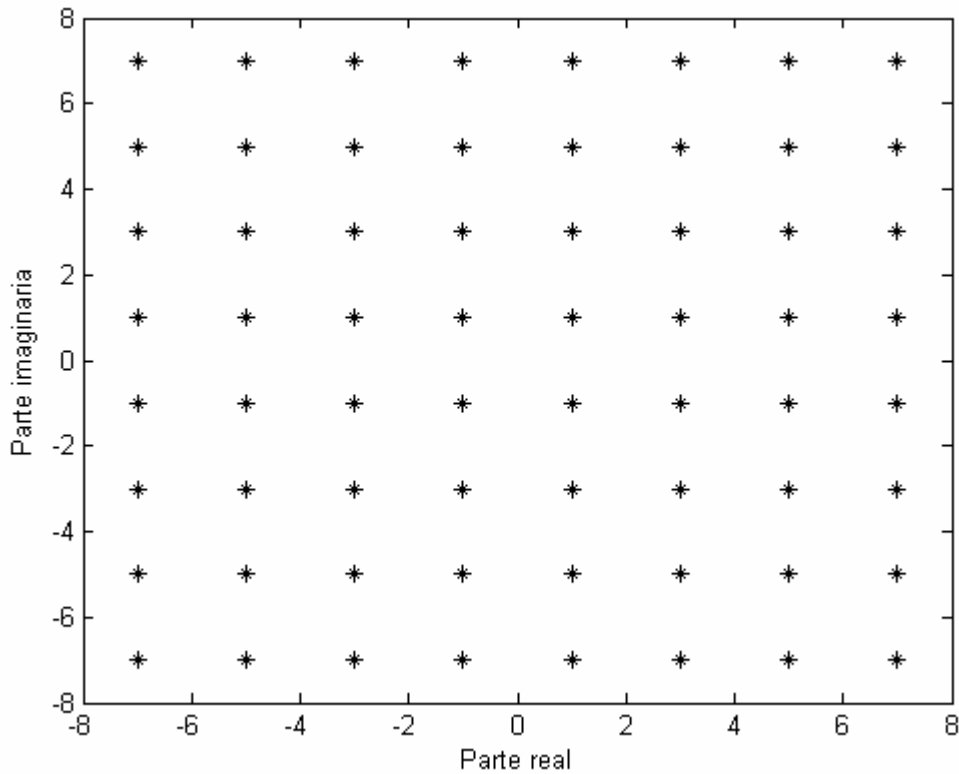


Fig. 5.3: Símbolos recibidos sin CP pero con precodificación.

Para ello vamos a tomar el mismo canal que en el apartado anterior y vamos a añadir un ruido gaussiano, constante en cada subcanal. A continuación vamos a ir utilizando diferentes potencias de transmisión, de tal manera que la SNR total, coincidente con la de cada subcanal en este caso sencillo, vaya cambiando. No utilizaremos de momento el algoritmo *water-filling*. En la Fig. 5.4 vemos los resultados obtenidos en la tasa de error de bit (BER, *Bit Error Rate*), tanto para el caso de un sistema DMT con CP como con precodificación lineal, ya sea en el tiempo (TDP) como en la frecuencia (FDP), observando que todas las curvas son totalmente coincidentes. (La SNR se encuentra siempre expresada en dB).

Aún vamos a mostrar una simulación más que atestigüe el buen comportamiento de la precodificación propuesta. En este caso vamos a tomar un ruido gaussiano aditivo de densidad espectral de potencia 0.01 W/Hz por cada subcanal. Utilizamos ahora el algoritmo *water-filling* para imponer una cierta probabilidad de error deseada, y comparamos los resultados en la Fig. 5.5. En ella comprobamos que, efectivamente, la precodificación se comporta de igual manera que el CP, esto es, la probabilidad de error obtenida es la misma en ambos casos, y es por supuesto la misma que la probabilidad de error deseada cuando utilizamos el algoritmo *water-filling*. También atestiguamos el hecho de que TDP y FDP tienen exactamente el mismo comportamiento; es por ello que de aquí en adelante sólo emplearemos uno de ellos (básicamente el TDP, que tiene una menor complejidad computacional).

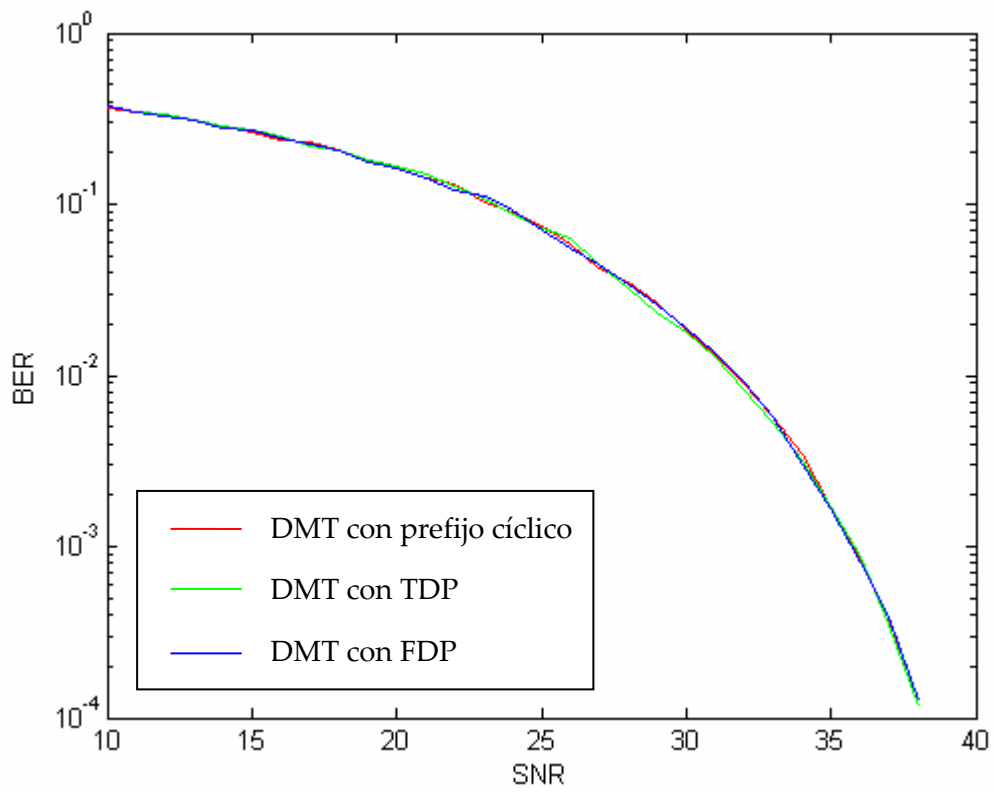


Fig. 5.4: BER frente a la SNR en el canal.

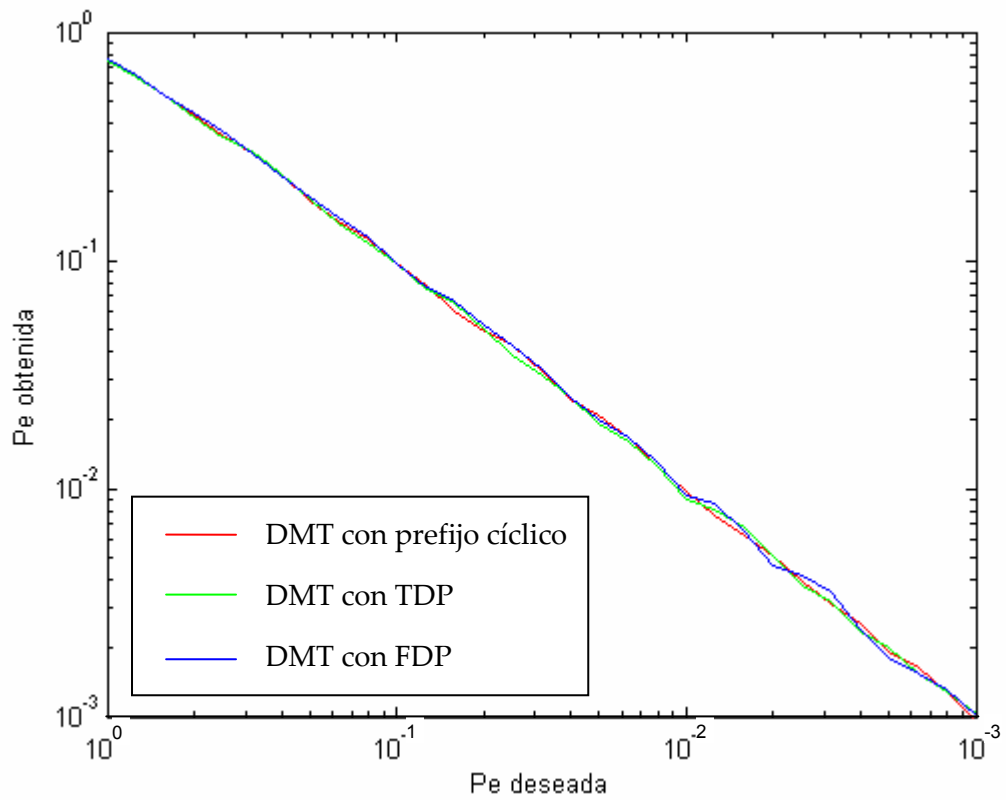


Fig. 5.5: Probabilidad de error obtenida frente a la deseada.

### 5.2.3. Comparativa con la precodificación no lineal (THP)

En el apartado 3.4 comentábamos las ventajas e inconvenientes del precodificador no lineal introducido por Cheong. Decíamos entonces, a grandes rasgos, que dicho precodificador funciona perfectamente en ausencia de ruido, es decir, que elimina por completo tanto la ISI como la ICI, pero que al introducir ruido aditivo sus prestaciones disminuyen respecto de las proporcionadas por un sistema DMT con CP.

Mediante simulaciones puede comprobarse que este hecho es tanto más acusado cuanto más cerca estén de la circunferencia unidad los ceros del sistema. Es por ello que para apreciar más claramente los efectos del ruido vamos a plantear en este caso un canal también muy sencillo, con únicamente dos ceros, pero ahora situados en  $0.99e^{j\pi/4}$  y  $0.99e^{-j\pi/4}$ , es decir, con una función de transferencia de la forma

$$H(z) = 1 - 0.99\sqrt{2}z^{-1} + 0.99^2 z^{-2}. \quad (5.2)$$

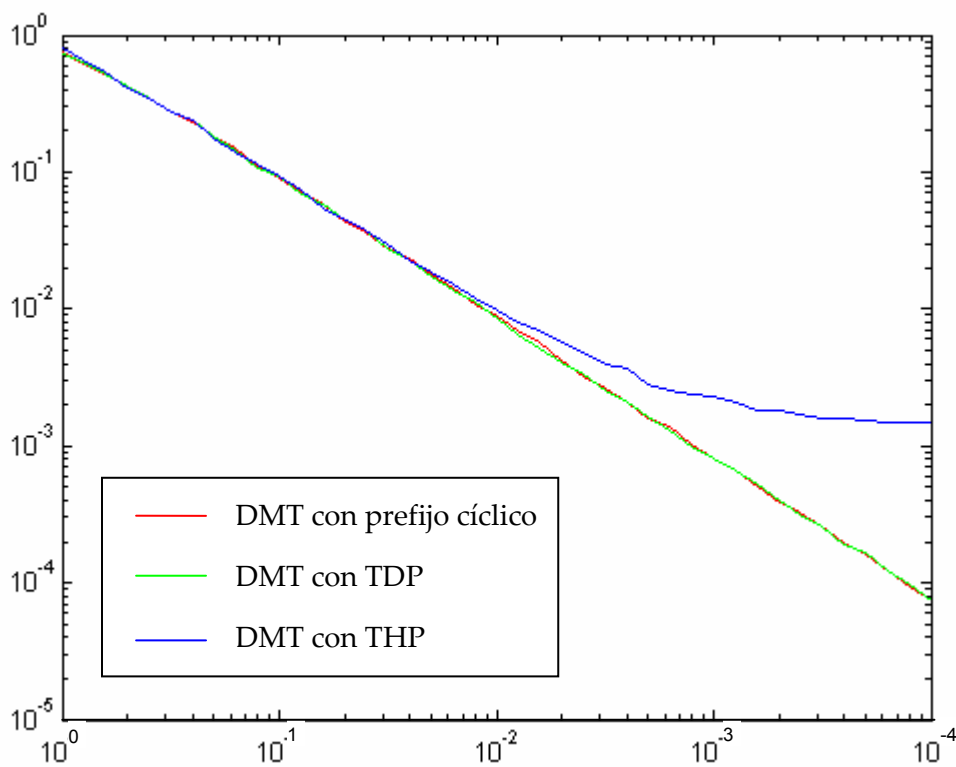


Fig. 5.6: Probabilidad de error obtenida frente a la deseada.

Sobre este canal vamos a aplicar un sistema DMT con algoritmo *water-filling* de asignación de bits para un total de 8 subcanales, y, como antes, vamos a representar la probabilidad de error obtenida frente a la deseada para los diferentes casos: sistema con CP, con TDP y con THP. Los resultados, presentados en la Fig. 5.6, son muy claros: mientras que la precodi-



ficación lineal propuesta funciona de forma idéntica al sistema DMT con CP, la precodificación no lineal no es capaz de seguir dichas prestaciones. La diferencia, además, es tanto más acusada cuanto menor es la probabilidad de error deseada, lo cual es un importante inconveniente en la mayoría de aplicaciones prácticas, en las que la probabilidad de error buscada suele tener un orden de magnitud muy bajo.

Esta última figura, además, nos sirve para confirmar lo que ya se decía en el apartado 4.5, en el sentido de que el precodificador lineal converge adecuadamente siempre y cuando el sistema sea de fase mínima. Estamos muy cerca de dejar de serlo, pero como los ceros están dentro de la circunferencia unidad, los símbolos precodificados no llegan a divergir.

### 5.3 POTENCIA DE LA PRECODIFICACIÓN

En lo que sigue vamos a analizar el comportamiento del TDP/FDP en lo que se refiere a la potencia de los símbolos transmitidos.

Para ello vamos a comenzar con un sistema simple, con dos únicos ceros, los cuales vamos a ir variando (aunque siempre dentro de la circunferencia unidad, para mantener la convergencia del algoritmo). Los resultados son los ofrecidos en las Fig. 5.7-5.9.

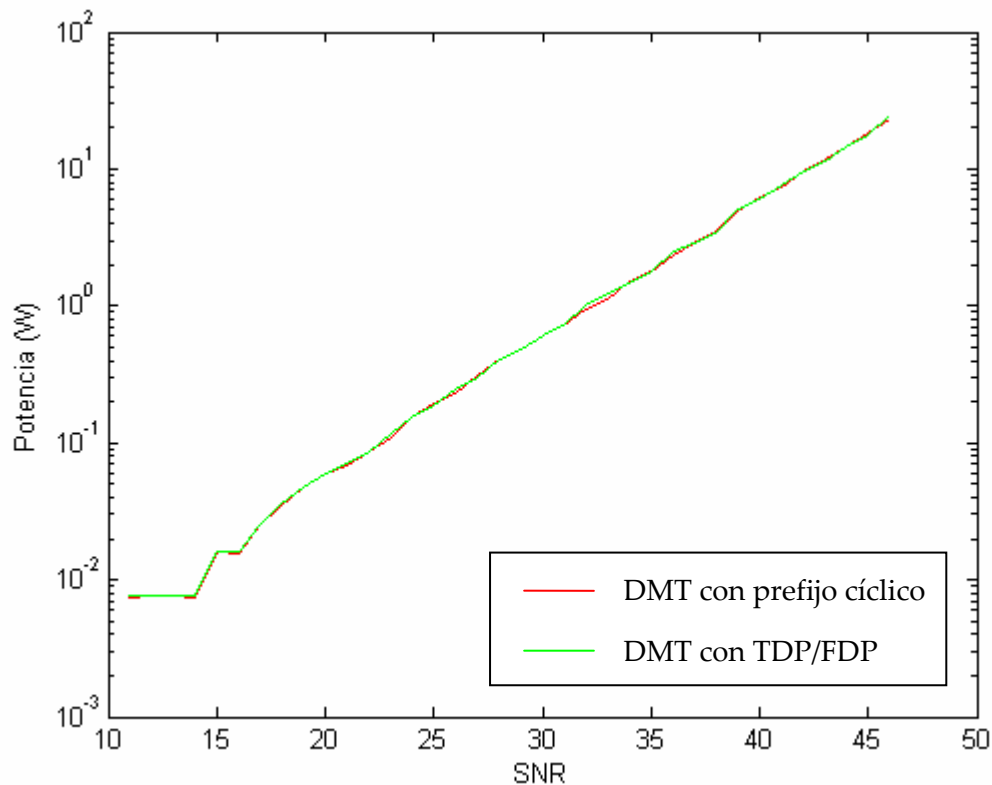


Fig. 5.7: Potencia frente a SNR. Ceros en  $c_{1,2} = 0.2e^{\pm j\pi/4}$ .

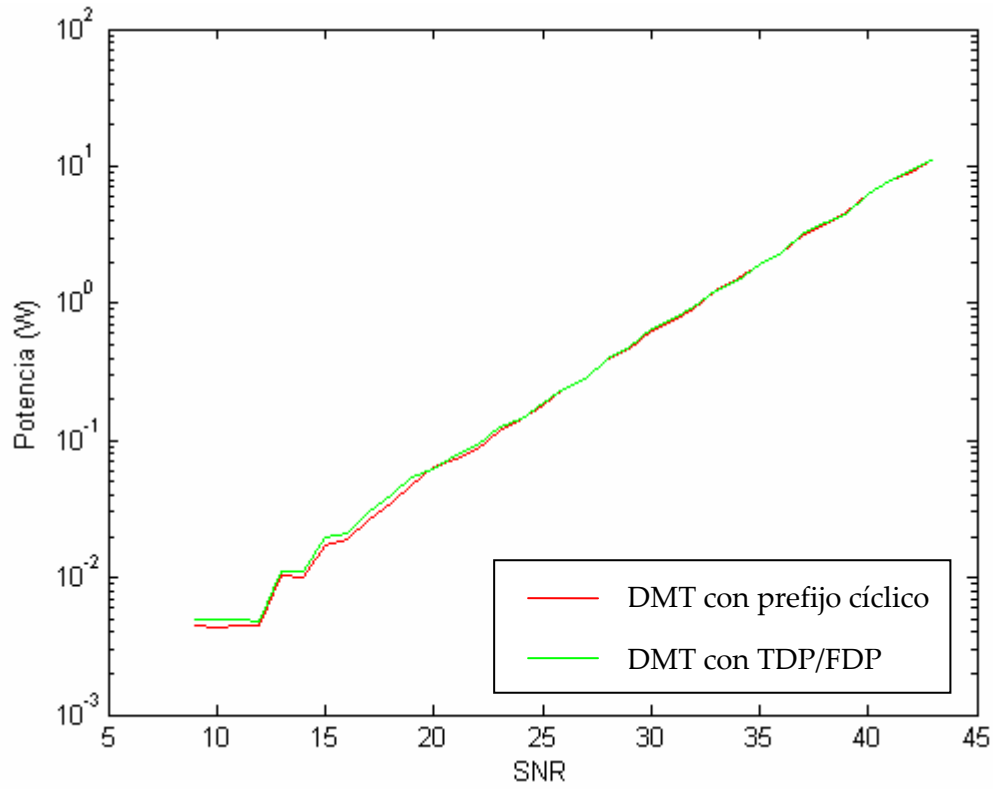


Fig. 5.8: Potencia frente a SNR. Ceros en  $c_{1,2} = 0.5e^{\pm j\pi/4}$ .

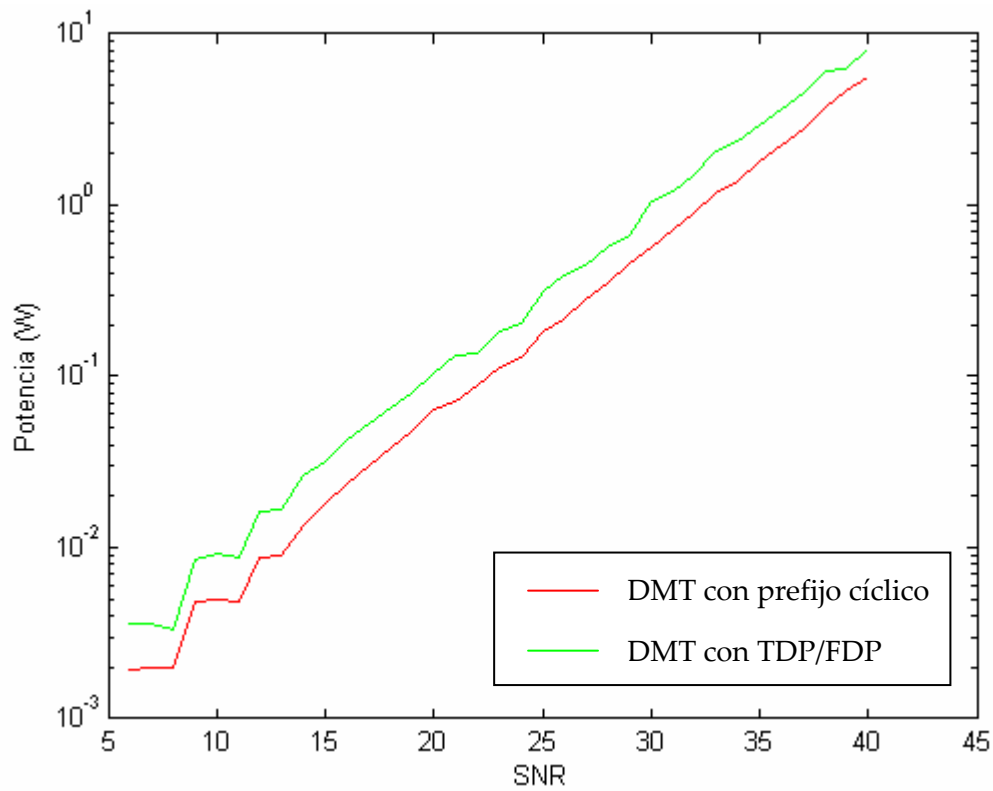


Fig. 5.9: Potencia frente a SNR. Ceros en  $c_{1,2} = 0.9e^{\pm j\pi/4}$ .

Vemos en estas figuras que, en principio, el TDP/FDP implica siempre un incremento en la potencia transmitida, incremento que es tanto mayor cuanto más cerca están los ceros de la circunferencia unidad. Sin embargo, esto no es realmente así, sino que sucede sólo porque estamos imponiendo un ruido blanco en el canal.

Recordemos que la asignación de bits en cada subcanal depende tanto de la CIR como del ruido existente, de modo que para una misma CIR la asignación puede cambiar si variamos el ruido. Bien, sabiendo esto vamos a presentar el siguiente resultado cualitativo:

Para un ruido blanco, la matriz de correlaciones de los símbolos  $\mathbf{X}(k)$ , es decir, la  $\mathbf{R}_{xx}$  definida en (4.52) es una matriz diagonal cuyos elementos van a resultar, por mor de la asignación óptima de bits, aproximadamente proporcionales al cuadrado de la respuesta en magnitud de cada subcanal: a mayor ganancia del mismo, mayor cantidad de potencia asociada. Sin embargo, si el ruido no es gaussiano la anterior distribución va cambiando.

Supongamos entonces que el ruido es tal que la proporción anterior justamente se invierte, esto es, que la potencia asociada a un subcanal es inversamente proporcional a la ganancia en frecuencia del mismo. (Esto sucedería, lógicamente, si la PSD<sup>31</sup> del ruido tiene justamente la forma contraria a la potencia cuarta de la respuesta en magnitud del canal). En ese caso, y repitiendo las simulaciones efectuadas previamente, los nuevos resultados serían los indicados en la siguiente tabla:

Ceros	$P_q / P_x$ (%)
$0.2e^{\pm j\pi/4}$	99.8797
$0.5e^{\pm j\pi/4}$	99.7476
$0.9e^{\pm j\pi/4}$	93.7950

Tabla 5.1: Incrementos de potencia de símbolos transmitidos con y sin precodificación.

Vemos aquí que la situación es justamente la inversa a la que se tenía en las gráficas anteriores. Esto es, a medida que nos acercamos a la circunferencia unidad, la potencia de los símbolos precodificados disminuye comparativamente respecto de los originales.

Por otra parte, la situación comentada respecto de cómo a de ser la PSD del ruido ha sido obtenida de forma exclusivamente empírica; esto es, no tiene por qué corresponderse con el mínimo de potencia. Ese estudio aún está por hacerse. En cualquier caso, lo que está claro es que existe una gama de posibilidades que incluyen que la potencia crezca, disminuya o que permanezca igual. Esto dependerá del canal y del ruido, de tal modo que para una

<sup>31</sup> *Power Spectral Density*, es decir, densidad espectral de potencia.

asignación óptima de bits el resultado no es controlable. Pero por el contrario, dependiendo de la situación, podría interesarnos disminuir la potencia aunque eso fuese a costa de reducir la tasa binaria transmitida.

## 5.4 ERRORES EN LA ESTIMACIÓN DEL CANAL

En este apartado vamos a evaluar las prestaciones del TDP/FDP cuando existen errores en la estimación de la respuesta del canal. Para ello, teniendo en cuenta que no nos interesa el método de estimación en sí, sino los errores que se producen en la misma, vamos a adoptar el siguiente criterio:

Denominemos  $\mathbf{h} = [h_0 \ h_1 \ \dots \ h_L]$  al vector que representa la respuesta impulsiva del canal, y sea  $\hat{\mathbf{h}} = [\hat{h}_0 \ \hat{h}_1 \ \dots \ \hat{h}_L]$  la estimación que hemos obtenido de la misma<sup>32</sup>. Vamos a adoptar también la suposición de que la diferencia entre  $\mathbf{h}$  y  $\hat{\mathbf{h}}$ , especificada como

$$\mathbf{n}_{can} = \mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}}, \quad (5.3)$$

es un vector de ruido gaussiano y blanco.

Definamos ahora una “relación señal a ruido” de la estimación de la forma

$$SNR_{can} = \frac{\mathbf{h}^T \mathbf{h}}{(\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}})^T (\mathbf{h} - \hat{\mathbf{h}})} = \frac{\mathbf{h}^T \mathbf{h}}{\mathbf{n}_{can}^T \mathbf{n}_{can}}. \quad (5.4)$$

De acuerdo con esta definición, está claro que  $0 \leq SNR_{can} \leq \infty$ , cumpliéndose que  $SNR_{can} = \infty$  si la estimación del canal es perfecta.

Pues bien, lo que vamos a hacer en este apartado es calcular la BER obtenida cuando existe un cierto error en la estimación del canal, error cuya magnitud vendrá expresada mediante la  $SNR_{can}$  correspondiente. Además, se va a suponer que no existe ruido en el canal, para de esa manera desacoplar el efecto del ruido del canal del de la estimación del mismo y que los resultados obtenidos no se vean contaminados por ninguna otra circunstancia.

Aclarado este punto, vamos a mostrar ya los resultados de algunas simulaciones. En cualquiera de ellas, vamos a limitarnos a casos simples de sistemas con dos únicos ceros, ya que nuestro objetivo es tan sólo corroborar los resultados teóricos ofrecidos en el tema 4, y no extraer ninguna conclusión adicional.

Comencemos con un sistema con ceros por ejemplo en  $0.2e^{\pm j\pi/4}$ . El número de subca-

---

<sup>32</sup> Por simplicidad, se va a suponer que se conoce la longitud de la CIR. De todos modos, esto no es una restricción adicional respecto de un sistema con prefijo cíclico, puesto que la longitud de la CIR es un dato del que debe disponerse también en dicho caso.

nales va a ser de nuevo de 8, y se a tomar ruido gaussiano blanco con densidad espectral de potencia 0.01 W/Hz. Tras realizar el estudio de la BER tanto para un sistema DMT con CP como para un sistema con TDP/FDP, los resultados son los reflejados en la Fig. 5.10.

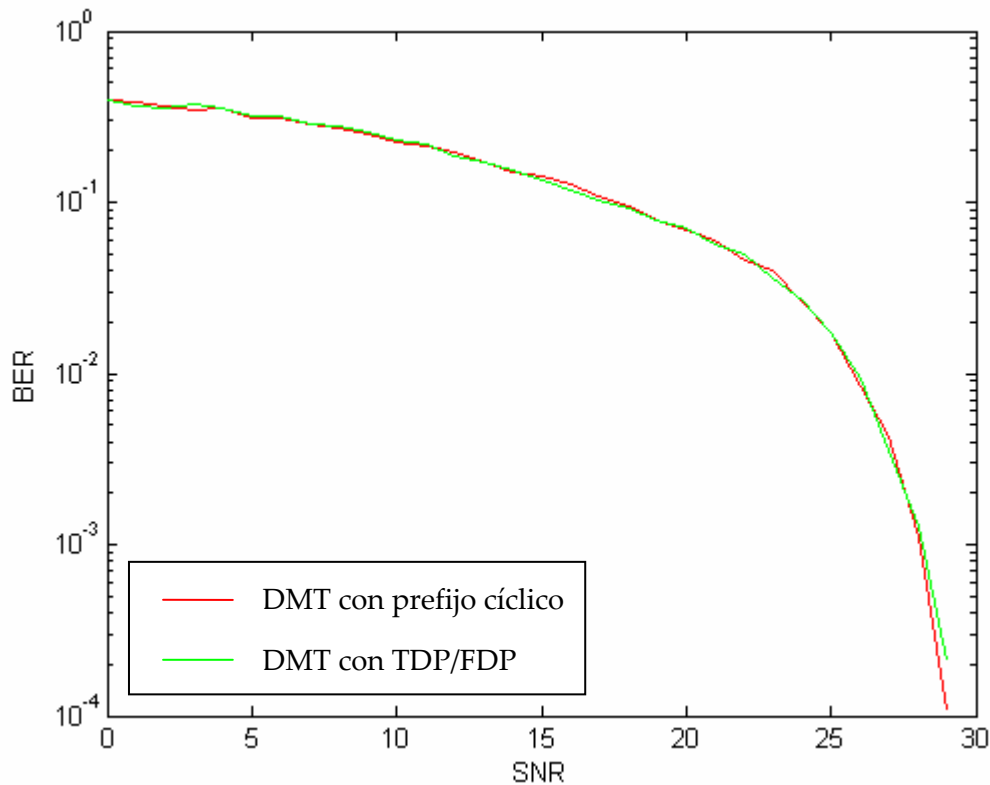


Fig. 5.10: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Ceros en  $c_{1,2} = 0.2e^{\pm j\pi/4}$ .

Comprobamos así que, como se veía reflejado en el estudio teórico, el comportamiento de ambos sistemas es prácticamente idéntico, de modo que podemos confirmar que la precodificación lineal se comporta también adecuadamente en este terreno.

Podemos pensar, no obstante, que de acuerdo con lo ya sabido para la convergencia del TDP, este podría tener su punto débil en lo que se refiere a la estimación del canal cuando existen ceros cercanos a la circunferencia unidad. Pues bien, para comprobar qué sucede en ese caso, vamos a ir llevando los ceros hasta  $0.99e^{j\pi/4}$ , pasando por  $0.5e^{j\pi/4}$  y  $0.9e^{j\pi/4}$ . Los resultados son los mostrados en las figuras siguientes. Comprobamos de nuevo que la cercanía de los ceros a la circunferencia unidad no parece afectar sustancialmente al comportamiento del sistema con TDP/FDP respecto del prefijo cíclico. Es más, los peores resultados, sin ser ni mucho menos malos, son los obtenidos con ceros en  $0.9e^{j\pi/4}$ .

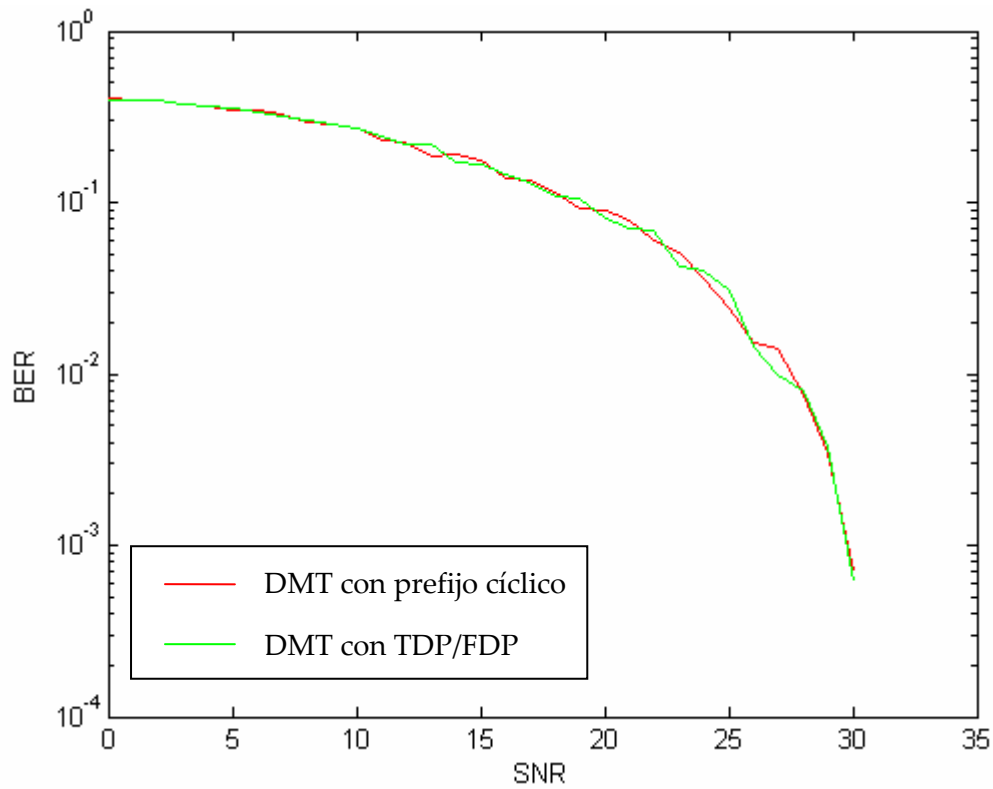


Fig. 5.11: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Ceros en  $c_{1,2} = 0.5e^{\pm j\pi/4}$ .

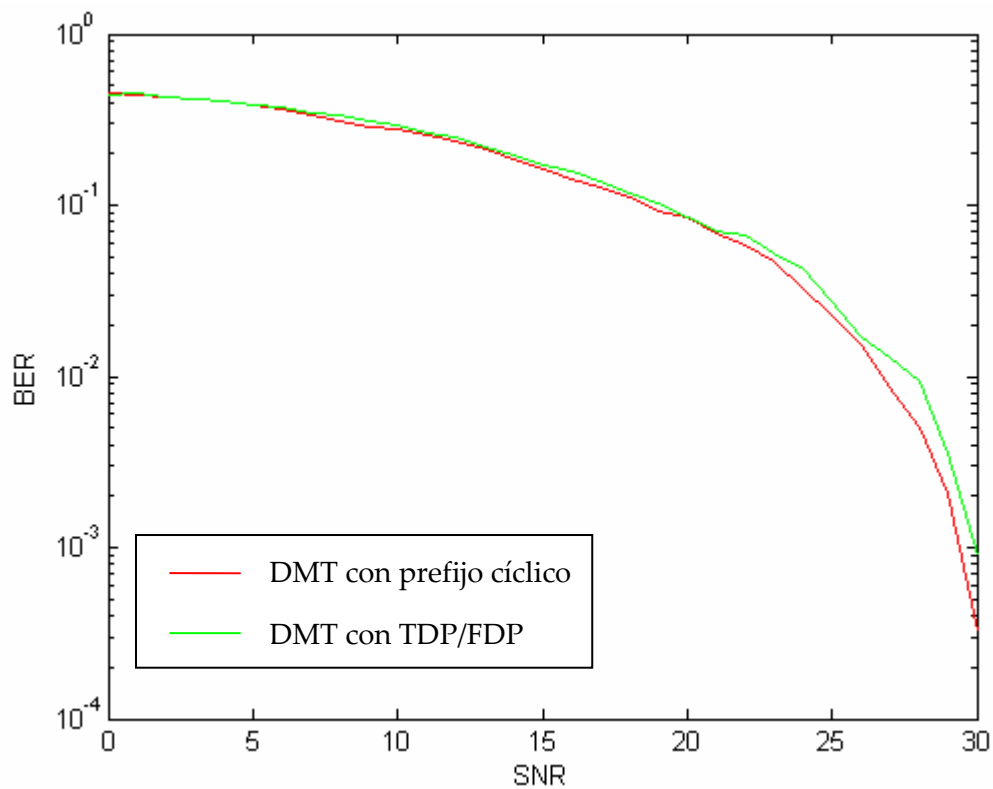


Fig. 5.12: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Ceros en  $c_{1,2} = 0.9e^{\pm j\pi/4}$ .

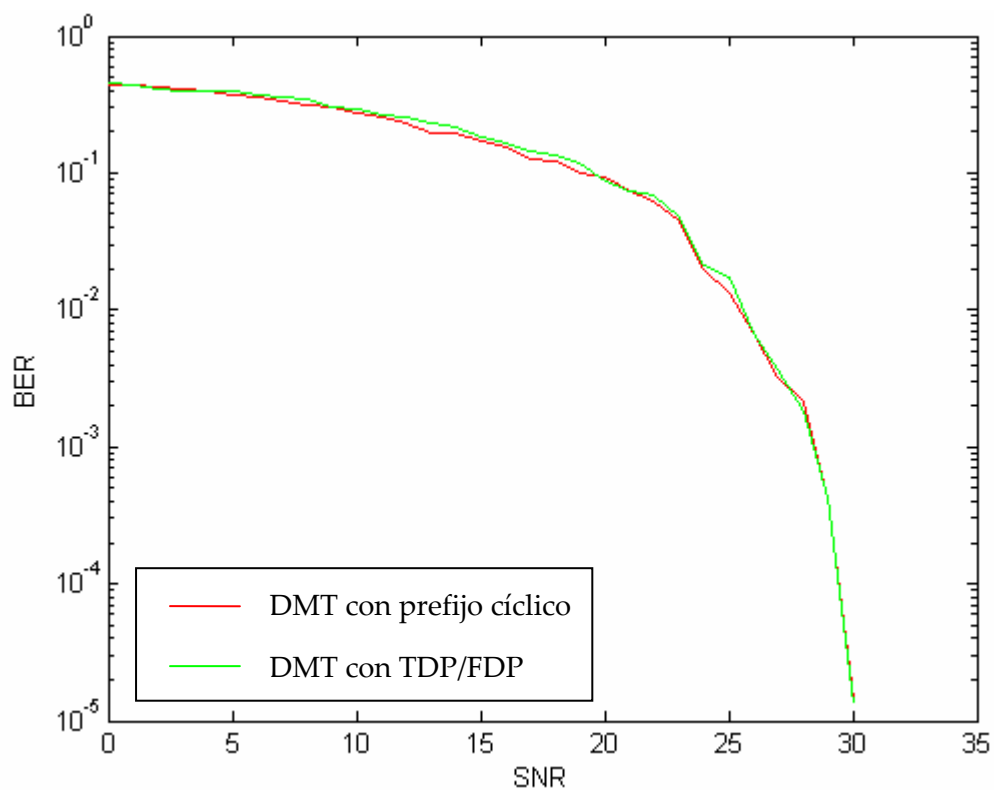


Fig. 5.13: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Ceros en  $c_{1,2} = 0.99e^{\pm j\pi/4}$ .

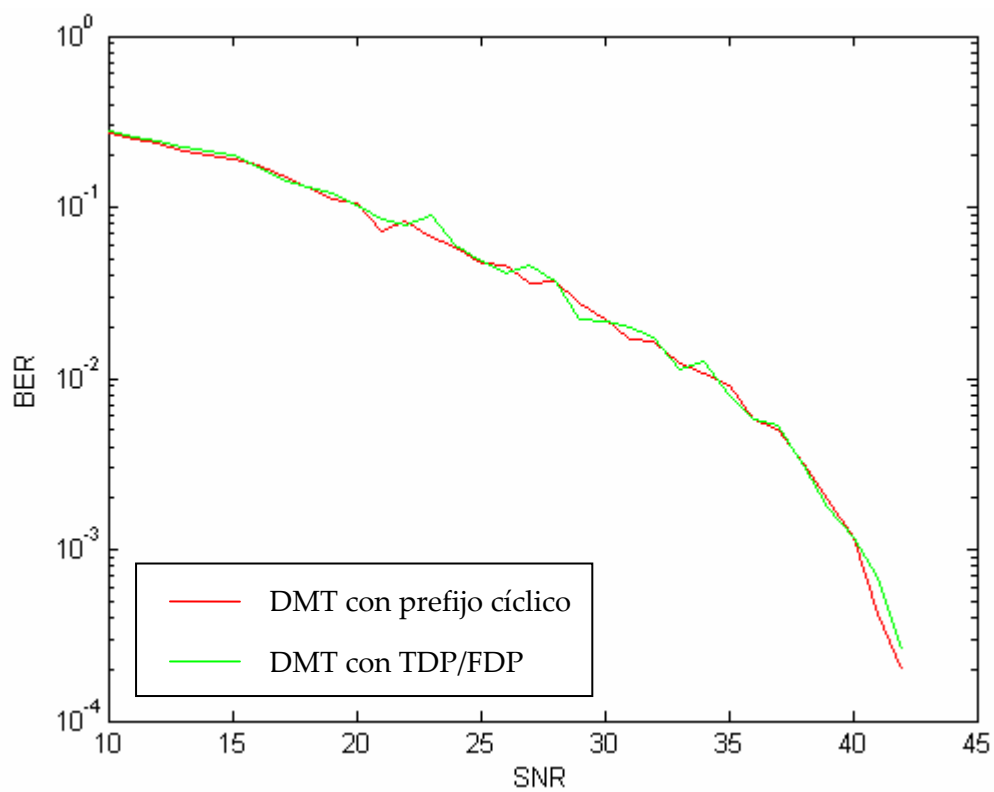


Fig. 5.14: BER frente a SNR en la estimación del canal. Ceros:  $c_{1,2} = 0.9e^{\pm j\pi/4}$  (32 subcanales).

De todas maneras, estos resultados también se ven afectados por el número de subcanales, mejorando a medida que dicho número aumenta. Por ejemplo, si ahora tomamos 32 subcanales en lugar de 8, como en las figuras anteriores, nos encontramos con que para ceros en  $0.9e^{\pm j\pi/4}$  el resultado es el mostrado en la Fig. 5.14.

Por último, y para comprobar que la fase de los ceros tampoco afecta sustancialmente a los resultados conseguidos, vamos a efectuar una última simulación situando los ceros en  $\pm 0.9$ . Los resultados son los presentados en la Fig. 5.15.

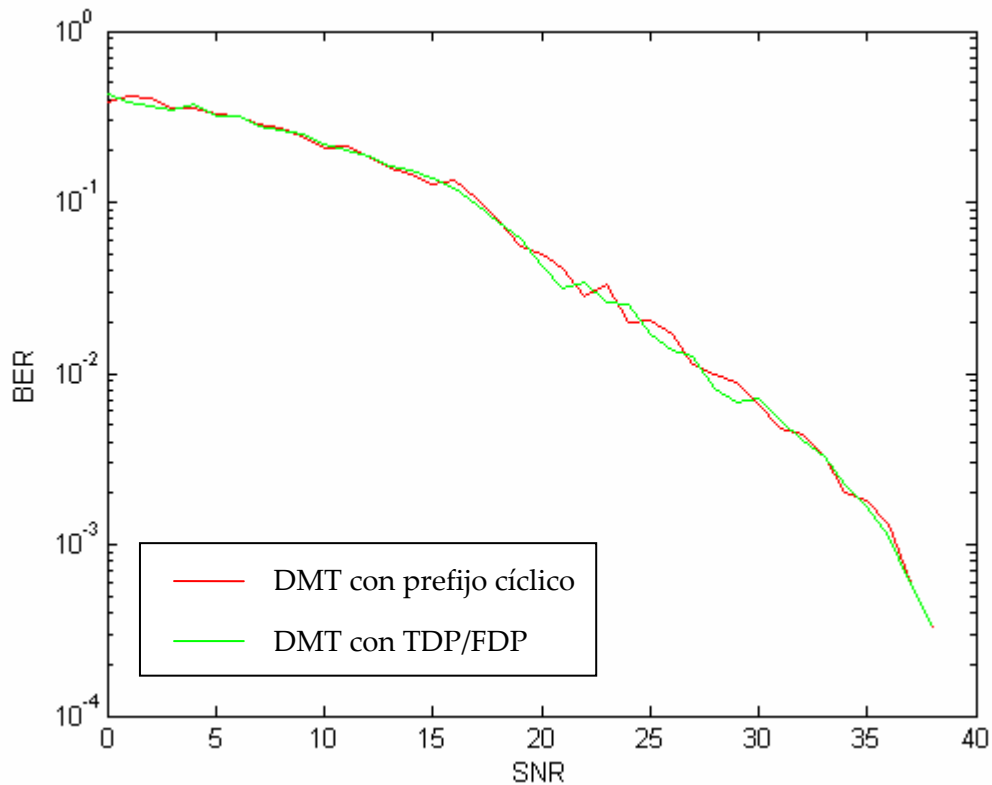


Fig. 5.15: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Ceros en  $c_{1,2} = \pm 0.9$  (32 subcanales).

## 5.5 APLICACIÓN A ADSL

En este último apartado vamos a aplicar el TDP/FDP a un modelo real: un sistema ADSL formado por un par trenzado de cobre [ANSI98]. Para una exhaustiva explicación de esta tecnología, véase [Bingham00].

### 5.5.1. Introducción a ADSL

Las limitaciones en cuanto a velocidad de los modems clásicos de banda vocal no provienen de la línea telefónica en sí, sino de cómo los equipos de la red telefónica tratan a las señales. Existen filtros que limitan el ancho de banda de la señal producida por los



señales. Existen filtros que limitan el ancho de banda de la señal producida por los modems a menos de 4 KHz (en la central de conmutación, la señal vocal es digitalizada mediante un muestreo a 8 KHz, por lo que previamente debemos truncar su espectro en una frecuencia inferior a los 4 KHz). Si eliminamos dichos filtros, nos encontraremos con que podemos transmitir frecuencias en la región de los MHz, aunque con una atenuación bastante considerable. De hecho, es esta atenuación (que aumenta con la longitud de la línea y con la frecuencia) la que va a limitar las restricciones en cuanto a velocidad.

Por supuesto, para que sea posible utilizar la planta de cableado como soporte para los servicios ADSL, hay que diseñar modems específicos para este tipo de aplicaciones, y colocarlos tanto en las centrales como en los locales del abonado: ahora la red no va a tratar sus señales como señales de voz. De hecho, existe algo de confusión en este aspecto: cuando nos referimos a una línea ADSL, realmente hablamos de un modem ADSL, y no de una línea<sup>33</sup>.

ADSL es un servicio totalmente enfocado a su uso en el bucle de abonado, el último tramo en un circuito de conexión telefónico. Como su nombre indica, se trata de transmitir un flujo de datos asimétrico, asignando mucha más capacidad al enlace descendente (sentido red-abonado) que al ascendente (sentido abonado-red). La razón por la que se utiliza este modo asimétrico está más relacionado con la configuración de la planta de cableado que con las tecnologías de transmisión. Pero afortunadamente, la mayoría de los servicios susceptibles de implementarse con ADSL demandan un uso asimétrico del canal: vídeo bajo demanda, tele-compra, acceso a Internet, acceso a LAN's remotas, accesos multimedia, servicios especiales de conexión entre PC's... Todas estas aplicaciones se caracterizan por precisar una gran capacidad de canal en el sentido red-usuario y una baja capacidad en el sentido usuario-red. Por ejemplo, una transmisión de vídeo requiere unos 1.5 o 3 Mb/s en el enlace descendente, pero la aplicación funcionará correctamente con tan solo 64 Kb/s (o incluso con 16 Kb/s) en el ascendente.

### 5.5.2. Características de la red telefónica

La planta de bucles de abonado que se encuentra instalada actualmente se desplegó hace muchos años. Básicamente podemos decir que un bucle de abonado se compone de un par de hilos aislados de cobre, que conectan el equipo terminal de la central telefónica con el teléfono del abonado, situado en su domicilio. El calibre de los pares oscila entre 26 AWG <sup>34</sup> y

---

<sup>33</sup> No se instala una nueva línea, sino que se aprovecha la ya existente (par trenzado de cobre). La instalación de los modems ADSL hace que la línea pueda soportar una velocidad mayor.

<sup>34</sup> AWG es una unidad anglosajona para expresar el calibre (grosor) de los cables de cobre.

19 AWG (aproximadamente entre 0.4 y 0.91 mm) y están aislados. El aislante utilizado en la mayoría de los casos es el polietileno, aunque en instalaciones antiguas aún pueden encontrarse cables aislados mediante papel.

La forma usual de distribuir los pares hasta los hogares de los abonados es la siguiente: de la central telefónica parten cables multipar, cada uno de los cuales puede contener hasta 50 grupos (conjunto de pares empaquetados, aislados y apantallados del resto). Cada uno de estos grupos puede contener 10, 25 o 50 pares (según normalizaciones). A medida que la red de despliegue avanza por la ciudad, se van separando los cables cada vez más, hasta llegar al último tramo del bucle en el cual el par ya viaja solo desde el cable principal hasta el local del abonado. Este último tramo es lo que se llama cable de bajada (*drop-wire*), el cual no suele ser un par trenzado, sino una simple línea bifilar.

Dentro de estos grupos, los cables de cobre van aislados, pero sin apantallar. Pero cada par se trenza sobre sí mismo, formando lo que se llama un cable UTP (*Unshielded Twisted Pair* o par trenzado sin apantallar). Se suelen utilizar cables UTP de categoría 3 o 5; la principal diferencia se encuentra en el número de vueltas por unidad de longitud. La mayor parte del cableado existente es del tipo UTP-3, para el que el *pitch* o paso de trenzado es inapreciable en un primer vistazo. El tipo UTP-5 tiene un paso de trenzado más pequeño, y sí se puede apreciar.

Esta elección del medio de transmisión puede parecer demasiado simple, pero cumple (y ha cumplido durante muchos años) su función: es un medio de transmisión barato (hay que tener en cuenta que para un operador de telefonía el despliegue de su red de acceso supone una gran parte del coste total de la inversión) y por otra parte, es un medio que es capaz de transportar sin problemas señales vocales con una calidad más que aceptable. Como cada bucle únicamente tiene que transportar un solo canal vocal (el cual es bidireccional, y en banda base), no es realmente demasiado el ancho de banda necesario en el medio de transmisión.

Sin embargo, al reutilizar esta planta de cableado ya instalada, surgieron problemas debido a la necesidad de transportar señales de un ancho de banda considerablemente superior. Este hecho provoca además que los fenómenos de acoplamiento entre distintos pares se hagan más evidentes (la cantidad de interferencia recibida depende del nivel de potencia que circule por el cable interferente, pero también de la frecuencia de la señal interferente). Este acoplamiento es lo que se conoce comúnmente en el contexto de ADSL como *crosstalk* (traducido como diafonía).

El *crosstalk* entre pares de un cable multipar es el principal inconveniente en cualquier implementación de un sistema ADSL. La razón de que aparezca es la existencia de acoplamientos inductivos y capacitivos (o más precisamente, el no-balanceamiento de dichos acoplamientos).

Si el par bajo consideración es considerado como el interferente, las corrientes y volta-

jes inducidas en los otros pares viajan en ambas direcciones; aquellas que continúan en la misma dirección que la señal interferente reciben el nombre de **FEXT** (*Far-End Crosstalk* o telediafonía), y aquellas que regresan en dirección a la fuente del interferente son llamadas **NEXT** (*Near-End Crosstalk* o paradiafonía). Para aquellos sistemas en los que ocurran a la vez los dos fenómenos, el NEXT será en general mucho más importante.

### 5.5.3. Modelo de canal

Evidentemente, para modelar de forma adecuada el canal definido por la línea telefónica presente en ADSL necesitamos considerar dos aspectos:

- Una función de transferencia de la línea.
- Un modelo del ruido aditivo que se añade a la salida del canal.

Para el cálculo de la función de transferencia existen disponibles algoritmos muy completos en función de las características (agrupamiento, calibre, etc.) de cada sección del bucle de abonado [Bingham00]. Sin embargo, nosotros hemos optado por utilizar un modelo más simple pero que se adecúe a nuestras necesidades [Bengsson96]. Según dicho modelo, la respuesta impulsiva del canal viene dada por

$$h(d,t) = \begin{cases} 10^{A/10} \sqrt{\frac{RC}{4\pi t^3}} e^{-RCd^2/4t}, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

donde  $d$  es la distancia de la línea,  $A$  la atenuación máxima en dB, y  $R$  y  $C$  la resistencia y la capacitancia de la línea, respectivamente.

Por su parte, la respuesta en frecuencia correspondiente es

$$H(d,f) = 10^{A/10} e^{-\sqrt{RC}fd}. \quad (5.6)$$

En cuanto al ruido o, más exactamente el *crosstalk*, se va utilizar el modelo propuesto por [Bingham00]. Según el mismo, la PSD del *crosstalk*, en decibelios, es

$$10 \log |XT|^2 = K_1 + K_2 \log(N) + K_3 \log(f) + K_4 \log(l). \quad (5.7)$$

donde  $l$  está expresada en kft<sup>35</sup>,  $f$  en MHz, y  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  y  $K_4$  se indican en la tabla 5.2. Por su parte,  $N$  es el número de fuentes interferentes.

---

<sup>35</sup> Se trata de una medida anglosajona: 1 kft son 1000 pies, y un pie son 0.30480 metros.

	NEXT(dB)		FEXT(dB))	
	Promedio	Peor caso	Promedio	Peor caso
$K_1$	-75	-51	-75	-51
$K_2$	16	6	16	6
$K_3$	15	25	20	20
$K_4$	0	0	10	10

Tabla 5.2: Valores de los parámetros en (5.7).

#### 5.5.4. Resultados de la precodificación

Ya sin más vamos a presentar los resultados obtenidos cuando aplicamos el TDP/FDP a un sistema ADSL. Como datos adicionales a los referidos en los apartados anteriores, indicaremos que la frecuencia de muestreo es 1.104 MHz. El número de subcanales utilizado es 256, aunque de acuerdo al estándar [ANSI98] los 35 primeros no se usan (se destinan para las comunicaciones de voz). La probabilidad de error deseada se fija a  $10^{-6}$ . Se considera, por último, que el número de pares interferentes es de 20.

Puesto que conocemos que las prestaciones en cuando a BER van a ser las mismas que las obtenidas en un sistema con CP, el interés radica fundamentalmente en dos aspectos:

- Por una parte, queremos analizar si la potencia de los símbolos precodificados aumenta mucho o no respecto de los originales. Para comprobarlo, mostramos una serie de resultados en la tabla 5.2, en la que vemos el incremento de potencia respecto de la distancia de la línea. Vemos así que realmente el uso del TDP/FDP no supone para nada un incremento sustancial de la potencia transmitida: siempre nos movemos alrededor del 100%, sucediendo incluso que en ocasiones estamos por debajo.
- Por otra parte, resulta interesante comprobar si los errores en la estimación del canal pueden influir en las prestaciones del TDP/FDP. Pues bien, tomando una distancia de 1 km y de acuerdo a la Fig. 5.16 comprobamos que los resultados son prácticamente idénticos que los obtenidos cuando se usa el CP.

Por todo lo anterior podemos confirmar que la precodificación lineal propuesta en esta tesis es de indudable atractivo para su utilización sobre un sistema ADSL, proporcionando las mismas prestaciones que el prefijo cíclico pero sin sus limitaciones en cuanto a eficiencia espectral y latencia.

Distancia (km)	$P_q / P_x$ (%)	Distancia (km)	$P_q / P_x$ (%)
0.1	100.0624	1.1	99.9921
0.2	99.9321	1.2	99.9727
0.3	100.0229	1.3	100.0505
0.4	100.0252	1.4	100.0271
0.5	99.9904	1.5	100.0826
0.6	99.9374	1.6	100.1501
0.7	99.9433	1.7	100.0863
0.8	100.1558	1.8	100.1563
0.9	100.0188	1.9	100.4486
1.0	99.9847	2.0	100.5402

Tabla 5.3: Potencias de símbolos transmitidos con y sin precodificación. Sistema ADSL.

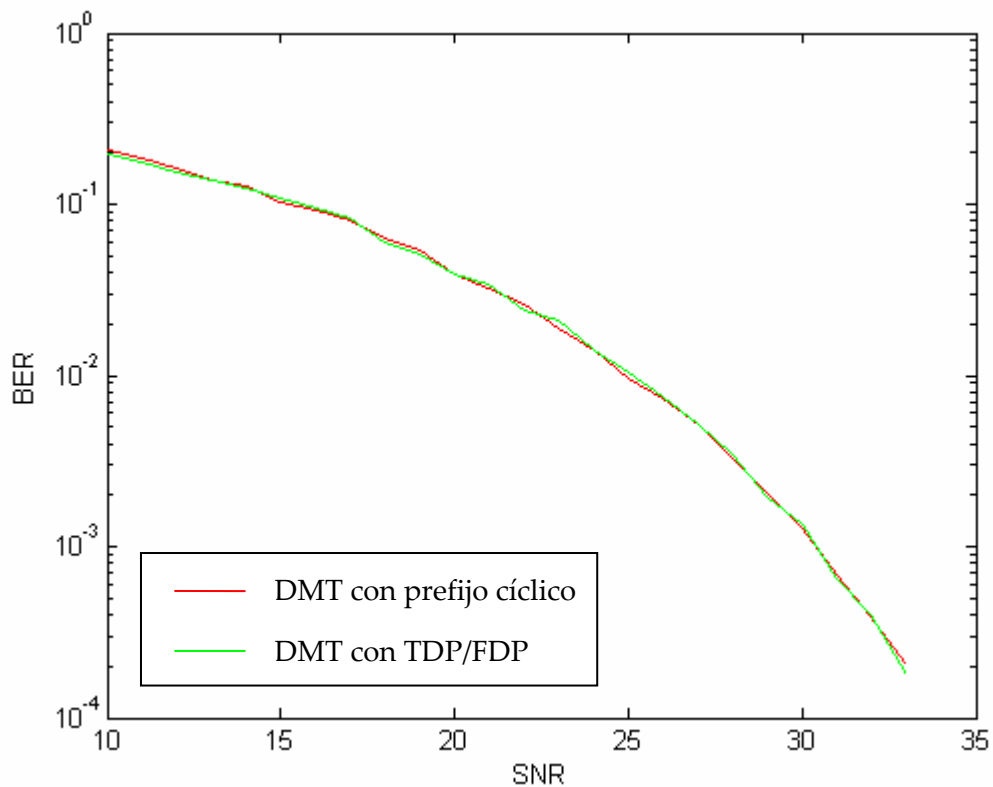


Fig. 5.16: BER frente a la SNR en la estimación del canal. Sistema ADSL.

## 5.6 RESUMEN

En el presente capítulo se han presentado un buen número de simulaciones que atestiguan las buenas características de la precodificación propuesta en esta tesis. Así, hemos comprobado que:

- Tanto con ruido como en ausencia del mismo, las prestaciones conseguidas en cuanto a reducción de la interferencia y BER obtenida son idénticas a las que se tienen en un sistema con prefijo cíclico.
- En cuanto a la potencia de los símbolos precodificados, comprobamos que esta no tiene por qué aumentar, sino que incluso puede disminuir respecto de la de los símbolos originales. En cualquier caso, cuando crece no lo hace nunca de forma demasiado acusada.
- Por otra parte, se ha verificado que el comportamiento del TDP/FDP en presencia de errores de estimación en el canal es prácticamente el mismo que cuando se tiene CP.
- Por último, hemos comprobado que todo lo anterior no sólo es aplicable para sistemas sencillos, sino que igualmente resulta muy provechoso en un sistema complejo y real como es ADSL.

## Capítulo 6

# CONCLUSIONES Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

### 6.1 INTRODUCCIÓN

Con este último capítulo vamos a proceder a una rápida recapitulación de las conclusiones cualitativas más importantes que se han obtenido en la presente tesis. A continuación se presentarán sugerencias para líneas futuras de investigación que, o bien completan el trabajo efectuado, o bien pudieran utilizar éste como punto de partida.

### 6.2 CONCLUSIONES

En la presente tesis se ha presentado una técnica novedosa para la optimización de la eficiencia espectral en la modulación multiportadora, a través de la completa eliminación de todas las interferencias (ISI e ICI) sin necesidad de ningún período de guarda, llámese prefijo cíclico o cualquier otro. Para ello se ha propuesto la utilización de una adecuada precodificación lineal que introduzca información sobre el canal en los propios símbolos a transmitir. De este modo el efecto del canal compensa dicha precodificación, resultando que la señal recibida es exactamente la misma que la que se tendría en un sistema OFDM clásico con CP.

La precodificación lineal propuesta aúna gran parte de las ventajas de la precodificación no lineal del THP y de los igualadores DFE, evitando sus inconvenientes. En concreto:

- No sufre de propagación de errores.
- Admite la utilización del algoritmo *water-filling*.
- Es compatible con cualquier codificación para la reducción de errores.

Aparte de todo ello, tiene otra serie de ventajas que la hacen a priori una técnica apetecible en comunicaciones:

- Al contrario que con THP o DFE, el receptor no cambia respecto de un sistema OFDM con CP.
- La probabilidad de error tampoco cambia respecto de la OFDM clásica.

Se ha procedido, pues, a un estudio analítico detallado de la precodificación lineal propuesta, complementado con varias simulaciones. Los puntos más destacados podrían resumirse en los siguientes:

- Se desarrollan dos versiones teóricamente idénticas: en el dominio del tiempo (TDP) y en el de la frecuencia (FDP). Ambas se diferencian únicamente en su complejidad computacional.
- El TDP/FDP converge si y sólo si el canal es de fase mínima.
- La potencia de los símbolos precodificados puede aumentar pero también disminuir respecto de los originales.
- Se ha propuesto un método de estimación del canal sin necesidad de utilizar un período de guarda.
- Se ha comprobado que los posibles errores cometidos en la estimación del canal no afectan al TDP/FDP apenas más de lo que lo hacen en un sistema OFDM con prefijo cíclico.
- Por último, se ha verificado que la precodificación propuesta es claramente aplicable a un sistema real como es ADSL, obteniéndose muy buenos resultados en dicho entorno.

## 6.3 LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

### 6.3.1. Complementos al estudio realizado

Tal y como ha sido desarrollada en la presente tesis, la precodificación lineal propuesta podría ser empleada de forma más o menos inmediata en los siguientes casos:

- Utilización en otros entornos reales aparte de ADSL, como por ejemplo en comunicaciones a través de la línea eléctrica o PLC (*Power Line Communications*), o bien en comunicaciones *wireless* de todo tipo.
- Podría tratar de integrarse el precodificador en un sistema más completo, combinándolo con otros elementos muy comunes en aplicaciones que utilizan OFDM/DMT. Por ejemplo, sería interesante estudiar el comportamiento conjunto del TDP/FDP junto con una codificación convolucional o una modulación trellis codificada [Proakis95]. También podría evaluarse qué sucede al combinar el precodificador con un entrelazado.
- Sigue pendiente, por supuesto, un análisis teórico completo de la potencia de la precodificación lineal.



### 6.3.2. Extensiones y proyecciones

La precodificación lineal propuesta nos puede llevar de forma más o menos natural a pensar en posibles mejoras a la misma, alguna de las cuales ya ha sido adelantada en capítulos previos:

- Como ya se adelantaba en el apartado 4.5, una posibilidad para emplear el TDP/FDP en canales de fase no mínima sería el empleo de un “igualador de fase” en recepción que tratara de convertir dicho canal en otro de fase mínima. Por tanto, una extensión obvia sería el desarrollo de dicho igualador así como el análisis de las prestaciones conseguidas con el mismo.
- Según lo dicho en el apartado 4.6, la precodificación lineal puede utilizarse desde un punto de vista diferente del desarrollado en la presente tesis: podría emplearse para disminuir la potencia de transmisión, aún a costa de una menor tasa de bits transmitida. Esto podría tener especial interés en aplicaciones *wireless*, en las cuales, como es bien sabido, la potencia empleada es a menudo un parámetro crítico.
- En comunicaciones de portadora única es común el empleo de un THP junto con un DFE [Forney91] para de esa manera evitar la propagación de errores propia de los igualadores realimentados. Pues bien, de igual manera podría evaluarse la posibilidad de combinar el TDP/FDP con un DFE con ese mismo objetivo. No obstante, no habría que perder de vista que un requisito debería ser el de maximizar la tasa binaria, con lo cual el tratamiento del ruido debería ser cuidadoso para que el algoritmo *water-filling* pudiera seguir siendo aplicado. (O, de forma alternativa, y según lo comentado anteriormente, podría tratar de disminuirse la potencia transmitida).



# BIBLIOGRAFÍA

- [Acker99] K. Van Acker, G. Leus, M. Moonen, O. Van de Wiel and T. Pollet, "Per tone equalization for DMT receivers", *Proc. IEEE Global Telecommun. Conf.*, Rio de Janeiro, vol. 5, pp. 2311-2315, Dec. 1999.
- [Acker01] K. Van Acker, G. Leus, M. Moonen, O. Van de Wiel and T. Pollet, "Per tone equalization for DMT-based systems", *IEEE Trans. Comm.*, vol. 49, no. 1, pp. 109-119, Jan. 2001.
- [Al-Dhahir96] N. Al-Dhahir and J.M. Cioffi, "Optimum Finite-Length Equalization for Multicarrier Transceivers", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 1, pp. 56-64, Jan. 1996.
- [ANSI98] *Network and Customer Installation Interfaces –Asymmetric Digital Subscriber Line (ADSL) Metallic Interface*, ANSI T1.413-1998.
- [Bahai02] A.R.S. Bahai and B.R. Saltzberg, *Multi-Carrier Digital Communications. Theory and Applications of OFDM*, New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [Bellman60] R. Bellman, *Introduction to matrix analysis*, New York: McGraw-Hill Book Company, 1960.
- [Bengsson96] D. Bengsson and D. Landström, *Coding in a Discrete Multitone Modulation System*, Master's Thesis, Lulea University of Technology, 1996.
- [Bingham90] J.A.C. Bingham, "Multicarrier modulation for data transmission: An idea whose time has come", *IEEE Comm. Mag.*, vol. 28, no. 5, pp. 5-14, May 1990.
- [Bingham00] J.A.C. Bingham, *ADSL, VDSL and Multicarrier Modulation*, New York: John Wiley & Sons, Inc., Jan. 2000.
- [Chang66] R.W. Chang, "Synthesis of Band-Limited Orthogonal Signals for Multichannel Data Transmission", *J. Bell Sys. Tech.*, vol. 45, pp. 1775-1796, Dec. 1966.
- [Chen03] S. Chen and T. Yao, "FEQ for OFDM Systems with Insufficient CP", *Proc. 14<sup>th</sup> IEEE Int. Symp. on Personal, Indoor and Mobile Radio Commun. (PIMRC'2003)*, Beijing, China, pp. 550-553, Sept. 2003.
- [Cheong98] K.-W. Cheong and J. M. Cioffi, "Precoder for DMT with insufficient cyclic prefix", *Proc. IEEE Int. Conf. Communications (ICC'98)*, Atlanta, USA, vol. 1, pp. 339-343, June 1998.

- [Chow92] J. Chow and J.M. Cioffi, "A cost-effective maximum likelihood receiver for multicarrier systems", *Proc. Int. Conf. Communications (ICC'92)*, Chicago, USA, vol. 2, pp. 948-952, June 1992.
- [Chow93] J.S. Chow, J.M. Cioffi and J.A.C. Bingham, "Equalizer training algorithms for multicarrier modulation systems", *Proc. Int. Conf. Communications (ICC'93)*, Ginebra, Suiza, vol. 2, pp. 761-765, May 1993.
- [Chow95] J.S. Chow, J.M. Cioffi and J.A.C. Bingham, "A Practical Discrete Multitone Transceiver Loading Algorithm for Data Transmission over Spectrally Shaped Channels", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 43, pp. 773-775, Feb./March/April 1995.
- [Cioffi] J.M. Cioffi, *Multi-channel modulation*, Stanford University, Course EE379C.
- [Cioffi91] J.M. Cioffi, *A multicarrier primer*, Stanford University/Amati T1E1 contribution, I1E1.4/91-157, Nov. 1991.
- [Debbah04] M. Debbah, P. Loubaton and M. de Courville, "Asymptotic Performance of Successive Interference Cancellation in the Context of Linear Precoded OFDM Systems", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 52, no. 9, pp. 1444-1448, Sept. 2004.
- [Datta95] B.N. Datta, *Numerical Linear Algebra and Applications*, Pacific Grove, CA: Brooks/Cole Publishing Company, ITP, 1995.
- [Doeltz57] M.L. Doeltz, E.T. Heald and D.L. Martin, "Binary Data Transmission Techniques for Linear Systems", *Proc. I.R.E.*, vol. 45, pp. 656-661, May 1957.
- [Edfors96] O. Edfors, M. Sandell, J.-J. van de Beek, D. Landström and F. Sjöberg, *An introduction to orthogonal frequency-division multiplexing*, Lulea Tekniska Universitet, Research Report Sept. 1996:16.
- [Forney91] G.D. Forney and M.V. Eyuboglu, "Combined Equalization and Coding Using Precoding", *IEEE Commun. Mag.*, vol. 29, no. 12, pp. 25-34, Dec. 1991.
- [Goldsmith] A. Goldsmith, *Multicarrier modulation*, Stanford University, Course EE359.
- [Golub83] G.H. Golub and C.F. van Loan, *Matrix Computations*, Baltimore: North Oxford Academic, 1983.
- [Harashima72] H. Harashima and H. Miyakawa, "Matched-transmission technique for channels with intersymbol interference", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 20, no. 4, pp. 774-780, Aug. 1972.

- [Haykin88] S. Haykin, *Digital Communications*, New York : John Wiley & Sons, 1988.
- [Haykin96] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [Hughes-Hartogs87] D. Hughes-Hartogs, "Ensemble Modem Structure for Imperfect Transmission Media", *U.S. Patents* 4,679,227, July 1987; 4,731,816, March 88; and 4,833,706, May 1989.
- [Kalet89] I. Kalet, "The Multitone Channel", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 37, no.2, pp. 119-124. Feb. 1989.
- [Kay93] S.M. Kay, *Fundamentals of Statistical Signal Processing. Estimation Theory*, vol.1, Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall, 1993.
- [Melsa96] P. J. W. Melsa, R. C. Younce and C. E. Rohrs, "Impulse response shortening for discrete multitone transceivers", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 44, no. 12, pp. 1662-1672, Dec. 1996.
- [Ohno02] S. Ohno and G.B. Giannakis, "Optimal Training and Redundant Precoding for Block Transmission With Application to Wireless OFDM", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 50, no. 12, pp. 2113-2123, Dec. 2002.
- [Oppenheim89] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, 2<sup>nd</sup> Edition, Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall, 1989.
- [Pal98] D. Pal, G. N. Iyengar and J. M. Cioffi, "A new method of channel shortening with applications to discrete multi tone (DMT) systems", in *Proc. IEEE Int. Conf. Communications, (ICC'98)*, Atlanta, GA, pp. 763-768, June 1998.
- [Park04] C.-J. Park and G.-H. Im, "Efficient DMT/OFDM Transmission With Insufficient Cyclic Prefix", *IEEE Commun. Letters*, vol. 8 no. 9, pp. 576-578, Sept. 2004.
- [Parsaee04] G. Parsaee, A. Yarali, H. Ebrahimzad, "MMSE-DFE Equalizer Design for OFDM Systems with Insufficient Cyclic Prefix", *Proc. 60<sup>th</sup> IEEE Vehic. Technol. Conference*, Los Angeles, EE.UU., vol. 6, pp. 3828-2832, Sept. 2004.
- [Peled80] A. Peled and A. Ruiz, "Frequency Domain Data Transmission Using Reduced Computational Complexity Algorithms", *IEEE ICASSP*, Denver, EE.UU., pp.964-967, April 1980.
- [Proakis94] J.G. Proakis and M. Salehi, *Communications Systems Engineering*, Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1994.

- [Proakis95] J.G. Proakis, *Digital Communications*, 3<sup>rd</sup> Edition, New York: McGraw-Hill, 1995.
- [Proakis97] J.G. Proakis and D.G. Manolakis, *Tratamiento Digital de Señales*, España: Prentice-Hall, 1997.
- [Saltzberg67] B.R. Saltzberg, "Performance of an Efficient Parallel Data Transmission System", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 15, no. 6, pp. 805-811, Dec. 1967.
- [Schott97] J.R. Schott, *Matrix Analysis for Statistics*, New York: John Wiley & Sons, 1997.
- [Searle82] S.R. Searle, *Matrix Algebra Useful for Statistics*, New York: John Wiley & Sons, 1982.
- [Sun98] Y. Sun and L. Tong, "Bandwidth Efficient Wireless OFDM", *IEEE Conference Record of the Thirty-Second Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, Pacific Grove, EE.UU., vol. 1, pp. 78-82, Nov. 1998.
- [Sun99] Y. Sun and L. Tong, "Channel Equalization Using One-Tap DFE for Wireless OFDM Systems with ICI and ISI", *Proc 2<sup>nd</sup> IEEE SP con Signal Proc. Advances in Wireless Commun. (SPAWC'99)*, Annapolis, EE.UU., pp. 146-149, May 1999.
- [Sun99b] Y. Sun and L. Tong, "Channel Equalization for Wireless OFDM Systems with ICI and ISI", *Proc. IEEE Int. Conf. Commun. (ICC'99)*, Vancouver, Canada, pp. 182-186, June 1999.
- [Sun01] Y. Sun, "Bandwidth-Efficient Wireless OFDM", *IEEE Journal on Selected Areas in Commun.*, vol. 19, no. 11, pp. 2267-2278, Nov. 2001
- [Tomlinson71] M. Tomlinson, "New automatic equaliser employing modulo arithmetic," *Electronic Letters*, vol.7, no. 5-6, pp. 138-139, March 1971.
- [Trautmann02] S. Trautmann and N. J. Fliege, "A new equalizer for multitone systems without guard time", *IEEE Commun. Letters*, vol. 6, no. 1, pp. 34-36, Jan. 2002.
- [Trautmann02b] S. Trautmann and N. J. Fliege, "Perfect equalization for DMT systems without guard interval," *IEEE. J. Select. Areas Comm.*, vol. 20, no. 5, pp. 987-996, June 2002.
- [Wang00] Z. Wang and G.B. Giannakis, "Wireless Multicarrier Communications", *IEEE Signal Proc. Mag.*, pp.29-48, May 2000.
- [Wang04] C. Wang and Z. Zhou, "A New Detection Algorithm for OFDM Sys-

- tem without Cyclic Prefix", *IEEE 6<sup>th</sup> CAS Symp. on Emerging Technologies: Mobile and Wireless Commun.*, vol. 2, pp. 453-456, May/June 2004.
- [Weinstein71] S.B. Weinstein and P.M. Ebert, "Data Transmission by Frequency Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform", *IEEE Trans. Commun.*, vol. 19, no. 5, pp. 628-634, Oct. 1971.
- [Wenxiao00] S. Wenxiao, L. Zi and Z. Licui, "Removing Distortion in DMT Modulation Caused by Insufficient Cyclic Prefix Length", *Proc. 3<sup>rd</sup> World Congress on Intelligent Control and Automation*, Hefei, China, vol. 4, pp. 2488-2491, July 2000.
- [Windpassinger04] C. Windpassinger, R.F.H. Fischer, T. Vencel and J.B.Huber, "Precoding in Multiantenna and Multiuser Communications", *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 3, n. 4, pp. 1305-1316, July 2004.
- [Xu03] B. Xu, C. Yang and S. Mao, "A Multi-Carrier Detection Algorithm for OFDM Systems Without Guard Time", *Proc. IEEE Int. Conf. Communications (ICC'03)*, Anchorage, EE.UU., vol.5, pp. 3377-3381, May 2003.
- [Xuejun03] H. Xuejun, B. Houjie, "Blind Channel Estimation and Equalization in OFDM without Cyclic Prefix", *Proc. IEEE Int. Conf. Communications, (ICC'03)*, Anchorage, EE.UU., vol. 2, pp. 1919-1921, May 2003.
- [Zhang02] J. Zhang and W. Ser, "A new algorithm for time domain equalization in OFDM systems," *Proc. 56<sup>th</sup> IEEE Vehic. Technol. Conference*, Vancouver, Canada, vol. 2, pp. 904-907, Sept. 2002.
- [Zhu00] J. Zhu, W. Ser and A. Nehorai, "Channel Equalization for DMT with Insufficient Cyclic Prefix," *Proc. IEEE 34<sup>th</sup> Asilomar Conf. on Signals, Systems and Computers*, Asilomar, EE.UU., vol. 2, pp. 951-955, Oct/Nov. 2000.





# RELACIÓN DE TRABAJOS PUBLICADOS

Se enumeran a continuación las publicaciones científicas y comunicaciones en congresos relacionadas con la presente tesis.

## **Publicaciones en revistas internacionales:**

- F.J. Simois and J.I. Acha, "Precoding for non-Redundant Transmission over Minimum-Phase Channels in Wireline Multitone Systems", *IEEE J. Selected Areas Commun.*, submitted.

## **Comunicaciones en congresos internacionales:**

- F.J. Simois and J.I. Acha, "Frequency-Domain Precoding for Multitone Systems Without Cyclic Prefix", *Iasted International Conference on Communication Systems and Networks (CSN 2003)*, Benalmádena, España. pp. 293-298, Sept. 2003.
- F.J. Simois and J.I. Acha, "Time-Domain Precoder for Wireline Multitone Systems Without Cyclic Prefix", *Proc. 9<sup>th</sup> International OFDM-Workshop*, Dresden, Alemania, pp. 138-142, Sept. 2004.
- F.J. Simois and J.I. Acha, "Analysis of Channel Estimation Errors in Time-Domain Precoding For Multitone Systems", *Proc. 10<sup>th</sup> International OFDM-Workshop*, Hamburgo, Alemania, accepted (to be published), Sept. 2005.

## **Comunicaciones en congresos nacionales:**

- F.J. Simois and J.I. Acha, "Precodificación lineal en sistemas DMT sin prefijo cíclico", *Symposium Nacional de la Unión Científica de Radio (URSI 2005)*, Gandía, España, aceptado (a ser publicado), Sept. 2005.