UNIVERSIDAD DE SEVILLA

"SOBRE CIERTOS TIPOS DE BASES
EN ESPACIOS LOCALMENTE CONVEXOS"

VºBºCatedrático Director.

Fdo.D.Pedro Pérez Carreras
Catedrático de Matemáticas I
de la E.S.I.I. de Valencia.

Memoria que presenta
D.Celestino Montes Contreras
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Fdo.Celestino Montes Contreras

VºBºCatedrático Ponente.

Fdo.D.Juan Arias de Reyna.
Catedrático de la Facultad
de Matemáticas de Sevilla.

Autorizo la consulta
de esta memoria

A Angelines.

Mi sincero agradecimiento al Prof. Dr. D. Pedro Pérez Carreras por su orientación y estímulo en la elaboración de esta memoria.

INDICE

INTRODUCCION

El concepto de base de un espacio de Banach fué - introducido por J. Schauder en el año 1927. Gran parte de los trabajos que sobre este tema se han publicado se deben a los problemas planteados por S. Banach. En particular -- suele recibir todos los honores el famoso problema de la - base ([2, pg 111]). Respecto a la abundante bibliografía - que sobre el tema existe cabe destacar las monografías de J. Lindenstrauss-L. Tzafriri ([22]), J.T. Marti ([23]) e - I. Singer ([27] y [28]).

Una base en un espacio de Banach es una sucesión $(x_n)_{n=1,2,\dots}$ de elementos de E de tal forma que todo elemento x de E admite una (y sólo una) representación en la forma: $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$.

Dos modificaciones fundamentales se han dado a la teoria de bases: La primera consiste en la extensión de la noción de base a la clase de los espacios vectoriales topo lógicos, siendo J. Dieudonné ([6]) quien, según Köthe ([20]) hace un primer estudio de la teoría de bases en los espacios tonelados.

Anterior al mencionado trabajo de Dieudonné, es el de O. Frink ([10]), en el que motivado por los resultados clásicos de representación de fuciones continuas mediante series divergentes, aparece la idea de sustituir la convergencia en la serie que representa a los elementos del espacio por algún método de sumación. Son definitiva e independientemente B.R. Gelbaum ([11]) y V. Ya Kozlov ([21]) quienes introducen el concepto de T-base de un espacio de Banach. La formulación es idéntica para espacios vectoriales topológicos:

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ de elementos de un espacio vectorial topológico E, se dice que es convergente respecto a una matriz infinita $T = (t_{nj})_{n,j=1,2,\ldots}$ de escalares, o simplemente T-convergente, a un elemento x de E si:
$\lim_{n} \sum_{j=1}^{\infty} t_{nj} S_j = x$, en cuyo caso escribiremos $x_n = x$ (T).

Una sucesión (x_n) de elementos de un espacio vectorial topológico E es una T-base si todo elemento x en E admite una (y sólo una) representación en la forma:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \quad (T).$$

Con respecto a la teoría clásica de la sumabilidad son de hacer notar las monografías de G.H. Hardy ([13]) K. Zeller ([31]), K. Knopp ([18]) y A. Peyerimhoff ([26]).

Estudiamos en esta memoria dos tipos de bases en la clase de los espacios localmente convexos:

En primer lugar las c-bases, caso particular de T-base, con la peculiaridad de que la matriz que representa su método de sumación, el de Cesàro, es una matriz triangular.

En segundo lugar las ρ-bases, que ya no entran dentro de las T-bases y cuyo método de sumación, el de Abel, queda dentro de los llamados métodos funcionales.

Los dos métodos de sumación a usar son los que fundamentalmente se emplean en la teoría clásica de los desarrollos de funciones en Series de Fourier. En este punto es imposible soslayar la mención del libro clásico sobre el tema de A. Zygmund ([32]).

La memoria comienza con un capítulo O, de caracter puramente expositivo, destinado a mostrar el teorema de Silverman-Toeplitz y el teorema de la gráfica cerrada de De Wilde.

En el capítulo I, se estudian los hechos concernientes a la teoría de la sumabilidad, que necesitaremos en el resto de la memoria. Seguimos en él la linea de K. Knopp ([18]), obteniendo en primer lugar una extensión del teorema de Silverman-Toeplitz a espacios localmente convexos para, a partir de él, dar los resultados de inclusión entre la sumabilidad ordinaria, los distintos métodos de Cesàro y el método de Abel, todo ello en el contexto de los espacios localmente convexos.

En el segundo capítulo se introducen los conceptos de c-base y ρ-base estudiando las implicaciones entre estos dos conceptos y el de base. Se estudian así mismo, siguiendo tecnicas de Köthe ([21]), la relación entre estos conceptos y la propiedad de la aproximación, así como el problema de la base débil. Probamos además un resultado que en la literatura de bases se suele denominar teorema de caracterización que en su versión para c-bases constituye una extensión de un teorema de Singer (Ver [29]). Concluye el capítulo con una serie de ejemplos en los que se separan algunos de los conceptos introducidos. En ellos juegan un papel fundamental los espacios S_c y sa, de las sucesiones sumables en el sentido de Cesàro y Abel respectivamente, estudiados por M. Florencio ([8]) y J.M. Bilbao ([3]).

En el capítulo III, hacemos un estudio del problema de la continuidad, siguiendo las ideas de De Wilde ([5]). En el caso de las c-bases el resultado sigue básicamente las ideas del trabajo mencionado salvo dificultades de caracter técnico. Para las ρ-bases el resultado exige sin embargo una construcción previa que es original. Se incluye además en el caso de c-bases el análogo al clásico teorema de Banach-Newms para espacios vectoriales topológicos metrizables y completos.

En el capítulo IV, se estudian los productos de - espacios con c-base, obteniendose, tanto en el caso finito como en el caso numerable, una c-base del producto, supuesto que cada uno de los factores la tiene.

Finalmente se ha incluido un apéndice en donde se demuestra una extensión de un resultado de Gelbaum y Gil - de Lamadrid ([12]) a espacios localmente convexos mediante un resultado sobre sumabilidad relacionado con los productos tensoriales.

Quiero hacer constar mi agradecimiento a los profesores M. Valdivia y M. Florencio por sus valiosas sugerencias sobre este trabajo.

CAPITULO 0: PRERREQUISITOS.

0.- NOTACIONES Y TERMINOLOGIA:

Denotaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, y $\mathbb{C}$ a los conjuntos de números naturales, racionales, reales y complejos. $\mathbb{K}$ denotará indistintamente $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

La expresión espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ se simplificará por la de espacio vectorial y la de espacio vectorial topológico localmente convexo y separado por la de espacio localmente convexo.

Si A es un subconjunto del espacio vectorial E se denotará por lin(A) su envoltura lineal.

Si (E,F) es un par dual, denotaremos por $\sigma(E,F)$, $\mu(E,F)$ y $\beta(E,F)$ respectivamente las topologias débil, de Mackey y fuerte del par dual.

El resto de notaciones serán tomadas básicamente de [19] y [20], en cuanto a teoría general se refiere y de -

[27] y [28] en lo relativo a la teoría de bases.

Con relación a la notación de los distintos resultados, la expresión "Teorema XX. 80. 64" la usamos para mencionar el teorema 64 del apartado 80 del capítulo XX. - En caso de que la referencia se haga respecto del mismo capítulo (y el mismo apartado) no haremos mención al capítulo (ni al apartado).

1.- EL TEOREMA DE SILVERMAN-TOEPLITZ:

Dada una matriz infinita $(t_{nm})_{n,m=0,1,\dots}$ de elementos de $\mathbb{K}$, diremos que una sucesión (x_n) en $\mathbb{K}$ es T-convergente a x K si

$$\lim_n \sum_{j=1}^{\infty} t_{nj} x_j = x.$$

Una matriz T se dice que es consistente si toda sucesión convergente de K es T-convergente al mismo límite.

El resultado fundamental que usaremos es el Teorema de Silverman-Toeplitz, que nos da una condición necesaria y suficiente para que una matriz T sea consistente:

Teorema 1.-

Una matriz de escalares $T=(t_{nm})$ es consistente si y sólo si

(1) Existe una constante $M>0$ tal que $\sum_{j=0}^{\infty} |t_{nj}| < M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) $\lim_m t_{nm} = 0 \quad \forall n$

(3) $\lim_n \sum_{j=1}^{\infty} t_{nj} = 1$

La demostración de este teorema puede encontrarse en [13],

[18] ó [26].

2.- EL TEOREMA DE LA GRAFICA CERRADA:

Cuando en 1927, Schauder dió la definición de base de un espacio de Banach, impuso la condición de que los coeficientes funcionales asociados fuesen continuos. En la monografia de Banach [2], hay ya una prueba de que tal condición puede ser eliminada.

A partir de entonces muchos autores se han ocupado del tema (Ver, por ejemplo,[5],[9]) y la respuesta al llamado "problema de la continuidad" (¿ Debe ser toda base, en un espacio localmente convexo, una base de Schauder ?) ha pasado siempre por un teorema de gráfica cerrada, o de la aplicación abierta (Ver por ejemplo [24]).

El problema de la gráfica cerrada consiste en establecer cuando una cierta aplicación lineal entre dos espacios localmente convexos, $f:E \longrightarrow F$, cuya gráfica sea cerrada en $E \times F$, debe ser continua.

El primer teorema de gráfica cerrada fué demostrado por Banach. Se toman en este teorema como clases de partida y llegada la de los espacios metrizables y completos.

Sería posteriormente Schwartz quien demuestra que si se toma como clase de partida la de los espacios de Banach, la clase de llegada contiene a los espacios de Suslin. Dicho resultado sería mejorado mas tarde por Martineau demostrando que dicha clase de llegada contenía a los espacios K-Suslin. Finalmente De Wilde demuestra que dicha clase de llegada contiene a los espacios con red de tipo ζ; este resultado sin embargo no es una extensión de la teoria de Schwartz, dado que recientemente Valdivia (Ver [30]) ha dado ejemplos de espacios de Suslin que no tienen red de tipo ζ.

El desarrollo de las teorías de Schwartz y De Wilde puede encontrarse en [4]. Por razones de homogeneidad en la notación nosotros seguiremos la notación de [20] para la teoría de De Wilde.

Definición 1.-

Sea E un espacio localmente convexo. Una red de tipo ζ es una familia de conjuntos $W=(C_{n_1\ldots n_k})_{\substack{k=1,2,\ldots \\ n_k=1,2,\ldots}}$ verificando las siguientes condiciones:

(1) $E=\bigcup_{n_1=1}^{\infty} C_{n_1}$.

(2) $C_{n_1\ldots n_{k-1}}=\bigcup_{n_k=1}^{\infty} C_{n_1\ldots n_{k-1}n_k}$.

(3) Para toda sucesión (n_k) de naturales, existe otra (ρ_k) de reales positivos de tal forma que si $\lambda_k\in[0,\rho_k)$ y $x_k\in C_{n_1\ldots n_k}$ la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k x_k$ es convergente.

Teorema 1.-

Sea E un espacio ultrabornológico y F un espacio con una red de tipo ζ. Cualquier aplicación de E en F cuya gráfica sea sucesionalmente cerrada es continua.

El hecho de que este teorema de gráfica cerrada - se refiera a gráfica sucesionalmente cerrada lo hace especialmente manejable.

En lo que respecta a las propiedades de estabilidad usaremos el siguiente teorema:

Teorema 2.-

Cualquier límite proyectivo numerable de espacios con red de tipo $\mathcal{C}$, tiene una red de tipo $\mathcal{C}$.

La demostración de los dos teoremas anteriores -- puede encontrarse en [4] y [20].

El último resultado en el que nos basaremos respecto a la teoria de De Wilde se refiere al espacio $l^{\infty}(A,E)$:

Sea A un conjunto y E un espacio localmente convexo. Se define el espacio $l^{\infty}(A,E)$ como el formado por las - aplicaciones $\varphi: A \longrightarrow E$ tales que $\varphi(A)$ es acotado. Si Q es un sistema de seminormas que define la topologia de E, se dota a $l^{\infty}(A,E)$ del sistema de seminormas $Q^{*} = (q^{*})_{q\in Q}$ definidas por $q^{*}(\varphi) = \sup_{a\in A} q(\varphi(a))$. En [4, pg 93] se demuestra el siguiente resultado:

Teorema 3.-

Si E es un espacio localmente convexo, sucesionalmente completo con red de tipo $\mathcal{C}$, entonces $l^{\infty}(A,E)$ también la tiene.

CAPITULO I: SOBRE EL TEOREMA DE SILVERMAN-TOEPLITZ. REGULARIDAD DE CIERTOS METODOS DE CONVERGENCIA.

1.- EL TEOREMA DE SILVERMAN-TOEPLITZ:

Sea E un espacio localmente convexo.

Sea $T = (t_{n,m})_{n,m=0,1,\ldots}$ una matriz de escalares. Diremos que una sucesión $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$ de elementos de E, es T-convergente a un elemento x de E, si las series $\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}x_j$ son convergentes y ademas: $\lim_n \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}x_j = x$. Se escribirá entonces $(x_n) \longrightarrow x$ (T).

Diremos que la matriz T es consistente con E si toda sucesión convergente en E es T-convergente al mismo limite.

Nuestro objetivo es caracterizar las matrices consistentes con un espacio localmente convexo dado E. Esta -

caracterización nos permitirá deducir las propiedades sobre sumabilidad que usaremos en el resto de la memoria.

Lema 1.-

Sea $T = (t_{nm})_{n,m=0,1,\dots}$ una matriz de escalares verificando las dos condiciones siguientes:

(1) $\lim_n t_{nm}=0 \quad \forall m\in \mathbb{N}$

(2) Existe una constante K, positiva, tal que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |t_{nj}| < K \quad \forall n\in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

Entonces si (x_n) es una sucesión de elementos de un espacio localmente convexo E, convergente a 0 y tal que las series $\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}x_j$ son convergentes, tenemos

$$(x_n)\longrightarrow 0 \ (T).$$

Demostración:

Sea $y_n=\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}x_j$ e $y_{nm}=\sum_{j=0}^{m} t_{nj}x_j$

Se pretende demostrar que $\lim_n y_n= 0$

Sea q una seminorma continua de E. Entonces:

$$q(y_{nm}) =q(t_{n0}x_0+\dots+t_{nm}x_n)\leq$$

$$\leq q(t_{n0}x_0+\dots+t_{nN}x_N) + q(t_{n,N+1}x_{N+1}+\dots+t_{nm}x_m).$$

Con tal de que m>N.

Sea $\varepsilon>0$. Escojamos N de forma que si m>N, $q(x_m)< \frac{\varepsilon}{2K}$

Sea ademas $M_q> 0$ de forma que $q(x_n)\leq M_q$ para todo n.

En estas condiciones:

$$q(y_{nm}) \leq (|t_{n0}|+\ldots+|t_{nN}|)M_q + (|t_{n,N+1}|+\ldots+|t_{nm}|)\frac{\varepsilon}{2K}$$

Pero $|t_{n,N+1}|+\ldots+|t_{nm}| \leq \sum_{j=0}^{\infty}|t_{nj}|<K \quad \forall n.$

De donde podemos concluir:

$$q(y_{nm}) \leq (|t_{n0}|+\ldots+|t_{nN}|)M_q + \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{Si } m>N \text{ y } \forall n).$$

Ahora $y_{nm} \xrightarrow{m} y_n$, de donde:

$$q(y_n) \leq (|t_{n0}|+\ldots+|t_{nN}|)M_q + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n.$$

Al ser $(t_{nk})_n$ convergente a 0 $(k=1,\ldots,N)$ podremos escoger un natural n_o de forma que $|t_{nk}|<\frac{\varepsilon}{2(N+1)M_q}$ para cualquier $k=0,1,\ldots,N$ y para cualquier $n \geqslant n_o$.

Si $n \geqslant n_o$ tendremos entonces:

$$q(y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \text{c.q.d.}$$

Antes de pasar al teorema de Silverman-Toeplitz, probaremos un resultado un poco mas general en el sentido de que individualiza la T-convergencia de cada sucesión -- convergente:

<u>Proposición 1</u>.-

Sea E un espacio localmente convexo, $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$ una sucesión de elementos de E convergente a x, y $T = (t_{nm})$ una matriz de escalares que verifica:

(1) Las series $\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}x_j$ son convergentes.

(2) Existe una constante K, positiva, de forma que:

$$\sum_{j=0}^{\infty}|t_{nj}| < K \quad \forall n.$$

(3) $t_{nm} \xrightarrow{n} 0 \quad \forall m.$

(4) $\lim_n \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj} = 1.$

Entonces $(x_n) \longrightarrow x$ (T).

<u>Demostración</u>:

Por hipótesis $(x_n - x) \longrightarrow 0.$

Además las series $\sum_j t_{nj} x_j$ son convergentes por (1) y ---- $\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj} x$ es convergente a $(\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj})x$ ($\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}$ es convergente por (2)).

Deducimos entonces que las series $\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}(x_j - x)$ son convergentes y que además $\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}(x_j - x) = \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj} x_j - (\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj})x.$

Aplicando el lema 1 deducimos que:

$$\lim_n \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}(x_j - x) = 0.$$

Además por (4) se tiene que $\lim_n (\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj})x = x.$

Teniendo en cuenta las dos últimas igualdades se tiene que la sucesión $(\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj} x_j)_n$ es convergente y

$$\lim_n \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj} x_j = 0 + x = x \qquad \text{c.q.d.}$$

Deduciremos ahora de forma inmediata el teorema de Silverman-Toeplitz para espacios localmente convexos. En la prueba de este resultado, para la implicación que nos queda, usaremos la misma técnica que [29, pg 349] en el contexto - de espacios de Banach.

Teorema 1.-

Sea E un espacio localmente convexo. Una matriz de escalares $T = (t_{nm})$ es consistente con E si y sólo si se verifican las cuatro siguientes condiciones:

(1) Si (x_n) es convergente en E, las series $\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}x_j$ son convergentes.

(2) existe una constante $K>0$ de forma que:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |t_{nj}| < K \quad \forall n.$$

(3) $t_{nm} \xrightarrow{n} 0 \quad \forall m.$

(4) $\lim_n \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj} = 1.$

Demostración:

Es evidente segun la proposición 1 que si se verifican (1) (2), (3), (4), T es consistente con E.

Reciprocamente: Si T es consistente con E obviamente se verifica (1).

Sea $(\alpha_n)_{n=0,1,\ldots}$ una sucesión convergente de $\mathbb{K}$ y $x \in E$, $x \neq 0$

Entonces $\alpha_n x \longrightarrow \alpha x$ ($\alpha = \lim_n \alpha_n$), por lo serán convergentes las series $\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}\alpha_j x$ y $\lim_n \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}\alpha_j x = \alpha x$.

Pero esto es equivalente a ser convergentes las series

$$\sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}\alpha_j$$

y ser $\lim_n \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj}\alpha_j = \alpha$.

O lo que es lo mismo: T es consistente con $\mathbb{K}$. Del teorema 0.1.1. obtenemos entonces las condiciones (2), (3) y (4).

c.q.d.

Hay que hacer notar que tanto en la proposición 1 como en el teorema 1, puede quitarse la condición (1), caso de que el espacio sea sucesionalmente completo o la matriz T sea triangular.

En el segundo caso se debe a que las series que aparecen son sumas finitas.

En el primero, se puede ver facilmente que debido a la condición (2) y a la convergencia (y por tanto acotación) de la sucesión (x_n), las series que aparecen son de Cauchy.

En el capitulo II se verá un ejemplo donde se pondrá de manifiesto la necesidad de la condición (1) en el caso general.

Por último obtendremos dos consecuencias inmediatas del teorema de Silverman-Toeplitz. La primera es le regularidad del método de Cesàro y la segunda el criterio de Stolz para espacios localmente convexos. Probaremos antes el siguiente lema:

<u>Lema 2</u>.-

Sea (x_n) una sucesión convergente en el espacio localmente convexo E. Si (b_n) es una sucesión de reales no negativos de forma que la serie $\sum b_n$ diverge, entonces exite el límite:

$$\lim_n \left(\frac{1}{b_o+\ldots+b_n}(b_o x_o+\ldots+b_n x_n)\right)$$

y vale $\lim_n x_n$.

Demostración:

Hagamos notar que la expresión $\frac{1}{b_o+\ldots+b_n}$ sólo tiene sentido a partir del primer n tal que $b_n \neq 0$, que evidentemente existirá por la divergencia de $\sum b_n$.

Sea n_o dicho número y consideremos la matriz $T = (t_{nm})$ definida por:

$$t_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{si } n<n_o \\ \dfrac{b_m}{b_o+\ldots+b_n} & \text{si } n\geq n_o \text{ y } 0\leq m\leq n \\ 0 & \text{si } m>n \end{cases}$$

la condición (1) de la proposición 1 se verifica trivialmente pues la serie en este caso es una suma finita.

Además $\sum_{j=0}^{\infty}|t_{nj}| = \sum_{j=0}^{\infty} t_{nj} = \begin{cases} 0 & \text{si } n<n_o \\ 1 & \text{si } n\geq n_o \end{cases}$

De donde deducimos las condiciones (2) y (4) de la misma proposición. La condición (3) es trivial pues si $n\geq n_o$ $t_{nm}= \frac{b_m}{b_o+\ldots+b_n}$, y la divergencia de $\sum b_n$ nos da entonces $\lim_n t_{nm}= 0 \quad \forall m$.

Podemos entonces concluir la tesis de dicha proposición para obtener que existe el límite:

$$\lim_n\left(\frac{1}{b_o+\ldots+b_n}(b_o x_o+\ldots+b_n x_n)\right)$$

y vale $\lim_n x_n$. c.q.d.

Definición 1.-

Una sucesión (x_n) de elementos de un espacio localmente convexo E se dice que es c-convergente o convergente en el sentido de Cesàro a $x\in E$ si:

$$\lim_n \frac{1}{n}(x_1+\dots+x_n) = x.$$

Corolario 1.-

Sea E un espacio localmente convexo. Si (x_n) es una sucesión convergente de E, entonces es convergente Cesàro al mismo límite.

Demostración:

Basta tomar en el lema 2, $b_n = 1\ \forall n$. c.q.d.

Corolario 2.-

Sea (α_n) una sucesión de escalares positivos estrictamente creciente y divergente. Sea (x_n) una sucesión en el espacio localmente convexo E. Supongamos además que

$$\lim_n\left(\frac{1}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}(x_n-x_{n-1})\right) = x.$$

Entonces $\left(\frac{1}{\alpha_n}x_n\right)$ es convergente y $\lim_n \frac{1}{\alpha_n}x_n = x.$

Demostración:

Definamos las sucesiones:

$$y_0 = \frac{1}{\alpha_0}x_0 \quad \text{e} \quad y_n = \frac{1}{\alpha_n-\alpha_{n-1}}(x_n-x_{n-1})$$

$$\beta_0 = \alpha_0 \quad \text{y} \quad \beta_n = \alpha_n-\alpha_{n-1}$$

Por construcción $\beta_n>0$ y $\sum\beta_n$ es divergente.

Aplicando el lema 2: $\lim_n \frac{1}{\beta_0+\dots+\beta_n}(\beta_0y_0+\dots+\beta_ny_n) = 0$

Pero $\beta_0+\dots+\beta_n = \alpha_n$ y $\beta_0y_0+\dots+\beta_ny_n = x_0+\dots+(x_n-x_{n-1}) = x_n$

Así $\lim\limits_{n} \frac{1}{\alpha_n} x_n = x$ c.q.d.

2.- EL METODO DE CESARO DE ORDEN K:

En este apartado siguiendo técnicas contenidas en [18] deduciremos las inclusiones entre los distintos métodos de Cesàro.

Sea E un espacio vectorial y (x_n) una sucesión de elementos de E. A partir de ella definimos las siguientes:

$$S_n^{(0)} = x_n;\ S_n^{(k)} = S_o^{(k-1)} + S_1^{(k-1)} + \dots + S_n^{(k-1)};\ C_n^{(k)} = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} S_n^{(k)}$$

Las dos siguientes proposiciones son de caracter puramente algebraico.

Proposición 1.-

Si k=1,2,.... y n=0,1,... entonces:

$$S_n^{(k)} = \binom{n+k-1}{k-1} x_o + \binom{n+k-2}{k-1} x_1 + \dots + \binom{k-1}{k-1} x_n.$$

Demostración:

Se hará por inducción sobre k:

Para k=1 es trivial. Supongamos cierta la formula para —— 1...k. Entonces:

$$S_n^{(k+1)} = S_o^{(k)} + S_1^{(k)} + \dots + S_n^{(k)} = \binom{k-1}{k-1} x_o +$$

$$+ \binom{k}{k-1} x_o + \binom{k-1}{k-1} x_1 +$$

$$\dots$$

$$+ \binom{n+k-1}{k-1} x_o + \binom{n+k-2}{k-1} x_1 + \dots + \binom{k-1}{k-1} x_n$$

Si sumamos por columnas y tenemos en cuenta que

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{i+k-1}{k-1} = \binom{m+k}{k}$$

Obtendremos: $S_n^{(k+1)} = \binom{n+k}{k} y_0 + \binom{n+k-1}{k} y_1 + \dots + \binom{k}{k} y_n$

c.q.d.

Proposición 2.-

Si $x_n = \sum_{i=0}^{n} y_i$ $(y_i \in E)$ y $k \in N$ entonces:

$$S_n^{(k)} = \binom{n+k}{k} y_0 + \binom{n+k-1}{k} y_1 + \dots + \binom{k}{k} y_n.$$

Demostración:

Es fácil consecuencia de la proposición 1. c.q.d.

Definición 1.-

Sea E un espacio localmente convexo y (x_n) una sucesión de elementos de E. Se dice que (x_n) es C_k-convergente a x E - si:

$$\lim_n C_n^{(k)} = x.$$

Como consecuencia del lema 1.2 vamos a deducir la regularidad del método de Cesàro de un cierto orden con — respecto a los de orden menor.

Proposición 3.-

Sea E un espacio localmente convexo y (x_n) una sucesión de elementos de E. Si (x_n) es C_k-convergente, es C_{k+1}-convergente al mismo límite.

Demostración:

$$C_n^{(k+1)} = \frac{1}{\binom{n+k+1}{k+1}}(S_0^{(k)}+\dots+S_n^{(k)}) =$$

$$= \frac{1}{\binom{n+k}{k}+\binom{n+k-1}{k}+\dots+\binom{k}{k}}\left(\binom{k}{k}C_0^{(k)}+\dots+\binom{n+k}{k}C_n^{(k)}\right)$$

Ahora bien $b_n = \binom{n+k}{k} \geqslant 1$ por lo que la serie $\sum b_n$ es divergente.

Como (x_n) es C_k- convergente, digamos a x, tenemos que $C_n^{(k)} \xrightarrow{n} x$.

El lema 1.2 nos da entonces que:

$$C_n^{(k+1)} \xrightarrow{n} x. \qquad \text{c.q.d.}$$

3.- REGULARIDAD DEL METODO DE ABEL RESPECTO A C_k:

Se trata ahora de ver bajo qué condiciones del espacio localmente convexo E, se puede afirmar que una sucesión C_k-sumable es ρ-sumable al mismo limite. La respuesta no va a ser como en el caso del paso de C_k a C_{k+1}. La razón estriba en que en aquel caso estábamos pasando de matrices triangulares a matrices triangulares; mientras que en el problema que nos planteamos, estamos pasando de un método triangular a otro no triangular: En efecto, aunque el método de sumación de Abel no sea matricial admite una "representación" en una cantidad no numerable de métodos matriciales que no son triangulares. De hecho será en esto en lo que se basará el teorema fundamental del apartado.

En este apartado denotaremos por $S_n^{(k)}(x)$ $(x=(x_n)$ es una sucesión de E) a los operadores definidos en el apartado anterior para la sucesión $(\sum_{i=0}^{n} x_i)_n$. Según la proposición 2.2 tendremos pues que

$$S_n^{(k)}(x) = \binom{n+k}{k} x_0 + \binom{n+k-1}{k} x_1 + \dots + \binom{k}{k} x_n.$$

Una serie $\sum x_n$ será entonces C_k-convergente si la sucesión $(C_n^{(k)}(x))_n = \left(\frac{1}{\binom{n+k}{k}} S_n^{(k)}(x)\right)_n$ es convergente.

<u>Definición 1.-</u>

Una serie $\sum x_n$ en un espacio localmente convexo E se dice que es ρ-convergente (o convergente en el sentido de Abel) si lo son las series

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n x_n \quad (\rho \in [0,1))$$

y además

$$\lim_{\rho \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n x_n = x.$$

En dicho caso escribiremos: $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = x \ (\rho)$.

La representación a que antes aludíamos es la siguiente: El hecho de ser $\lim_{\rho \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n x_n = x$ es equivalente a ser $\lim_m \rho_m^n x_n = x$ para cualquier sucesión $(\rho_m) \subset [0,1)$ convergente a 1. Para cada una de estas sucesiones, de las que existe una cantidad no numerable, se obtiene un método matricial.

Para establecer la regularidad del método de sumación de Abel respecto a los métodos de Cesàro necesitamos algunos resultados previos:

Lema 1.-

Sea E un espacio localmente convexo y (x_n) una sucesión de elementos de E. Sea $\rho\in[0,1)$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(k)}$ es convergente, tambien lo son las series $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(i)}$ $(i=0,1,\ldots k)$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n x_n$, siendo sus sumas:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(i)}=(1-\rho)^{k-i}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(k)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n x_n=(1-\rho)^{k+1}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(k)}$$

Demostración:

Sea $s_{-1}^{(i)}=0$ y $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(k)}=x$

Entonces $s_n^{(k-1)}=s_n^{(k)}-s_{n-1}^{(k)}$ $\forall n$.

Por lo que $\rho^n s_n^{(k-1)}=\rho^n s_n^{(k)}-\rho\rho^{n-1}s_{n-1}^{(k)}$

Las series $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^{n-1}s_{n-1}^{(k)}=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(k)}$ son convergentes a x.

De donde $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(k-1)}$ es convergente y su suma es $(1-\rho)x$.

De esta forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(0)}=(1-\rho)\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(1)}=\ldots=(1-\rho)^{i}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(i)}=\ldots=$$
$$=(1-\rho)^{k}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n s_n^{(k)}.$$

De donde trivialmente sigue la primera igualdad.

De la misma forma teniendo en cuenta que $x_n=s_n^{(0)}-s_{n-1}^{(0)}$ se obtiene la segunda parte. c.q.d.

El recíproco de esta proposición tambien es cierto aunque antes veremos otra propiedad, que corresponde al --

teorema de convergencia del producto de Cauchy de dos series de escalares. En su demostración se sigue el proceso de [1, pg 360]:

Lema 2.-

Supongamos que la serie de escalares $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n$ es absolutamente convergente y que la serie $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ converge en el espacio localmente convexo E.

Sea $\omega_n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k v_{n-k}$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n$ es convergente y tiene por suma λv donde -- $\lambda=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n$ y $v=\sum_{n=0}^{\infty}v_n$.

Demostración:

Definamos las siguientes sucesiones:

$$\mu_n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k,\quad u_n=\sum_{k=0}^{n}v_k,\quad x_n=\sum_{k=0}^{n}\omega_k,\quad y_n=v-u_n,\quad z_n=\sum_{k=0}^{n}\lambda_k y_{n-k}$$

Tenemos entonces:

$$x_p=\sum_{n=0}^{p}\sum_{k=0}^{n}\lambda_k v_{n-k}=\sum_{n=0}^{p}\sum_{k=0}^{p}f_n(k)$$

Donde $f_n(k)=\begin{cases}\lambda_k v_{n-k} & \text{si } n\geq k\\ 0 & \text{si } n<k\end{cases}$

Con lo cual:

$$x_p=\sum_{n=0}^{p}\sum_{k=0}^{p}f_n(k)=\sum_{k=0}^{p}\sum_{n=k}^{p}\lambda_k v_{n-k}=\sum_{k=0}^{p}\lambda_k\sum_{m=0}^{p-k}v_m=\sum_{k=0}^{p}\lambda_k u_{p-k}=$$
$$=\sum_{k=0}^{p}\lambda_k(v-y_{p-k})=\mu_p v-z_p.$$

Como quiera que $\mu_p\xrightarrow{p}\lambda$, tenemos que $\mu_p v\xrightarrow{p}\lambda v$.

Si probásemos que $z_p\xrightarrow{p}0$ obtendríamos el enunciado:

Como $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ es convergente a v tenemos que $y_n\longrightarrow 0$.

Supongamos que $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_k| = h > 0$ (Si $h = 0$ el resultado es trivial.

Sea q una seminorma continua de E y $\varepsilon > 0$.

Sea M_q un número positivo tal que $q(y_n) \leq M_q \ \forall n$

Sea por último $N \in \mathbb{N}$ de forma que si $n \geq N$ se tenga:

$$q(y_n) < \frac{\varepsilon}{2h} \quad y \quad \sum_{n=N+1}^{\infty} |\lambda_n| < \frac{\varepsilon}{2M_q}$$

Entonces si $p > 2N$ tendremos:

$$q(z_p) \leq \sum_{k=0}^{N} q(\lambda_k y_{p-k}) + \sum_{k=N+1}^{p} q(\lambda_k y_{p-k}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} |\lambda_k| \, q(y_{p-k}) + \sum_{k=N+1}^{p} |\lambda_k| \, q(y_{p-k}).$$

Pero si $k \leq N$, al ser $p > 2N$, $p-k > N$ y por tanto $q(y_{p-k}) < \frac{\varepsilon}{2h}$

y para todo k, $q(y_{p-k}) \leq M_q$. Así:

$$q(z_p) \leq \frac{\varepsilon}{2h} \sum_{k=0}^{N} |\lambda_k| + M_q \sum_{k=N+1}^{p} |\lambda_k| \leq \frac{\varepsilon}{2h} \sum_{k=0}^{\infty} |\lambda_k| + M_q \sum_{k=N+1}^{\infty} |\lambda_k| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + M_q \frac{\varepsilon}{2M_q} = \varepsilon$$

c.q.d.

Podemos enunciar entonces la siguiente proposición

<u>Proposición 1.-</u>

Sea E un espacio localmente convexo, $\rho \in [0,1)$, $K \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, y $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$ una sucesión de elementos de E. Son equivalentes:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n x_n$ es convergente.

(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n S_n^{(k)}$ es convergente.

<u>Demostración:</u>

(2) $\Rightarrow$ (1) Es el lema 1.

(1) $\Rightarrow$ (2): Se hará la demostración por inducción sobre k.

Tanto para probarlo para k=0, como para demostrar que si - es cierto para k lo es para k+1, basta demostrar que si -- $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n a_n$ $((a_n)\subset E)$ es convergente, entonces tambien lo es -- $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(a_0+\dots+a_n)$. Pero esta última serie es el producto de Cauchy de $\sum\rho^n$ que es absolutamente convergente y $\sum\rho^n a_n$ que es convergente por hipótesis. Obtenemos entonces el resultado a partir del lema 2. c.q.d.

Pasamos ya a demostrar el resultado fundamental - de este apartado, que en su parte esencial sigue las ideas contenidas en [18]:

Teorema 1.-

Sea E un espacio localmente convexo y (x_n) una sucesión de elementos de E. Supongamos que las series $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n x_n$ son convergentes para $\rho\in[0,1)$.

Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ es C_k-convergente, entonces es ρ-convergente y tiene la misma suma.

Demostración:

Basta demostrar que si $\rho_0,\rho_1,\dots$ es una sucesión de $[0,1)$, convergente a 1, entonces

$$\lim_n\sum_{i=0}^{\infty}\rho_n^i x_i = x$$

Donde x es la C_k-suma de $\sum_{i=0}^{\infty}x_i$.

Para demostrar dicha igualdad consideramos la matriz ---- $T=(t_{ni})$ siendo $t_{ni}=\binom{i+k}{k}(1-\rho_n)^{k+1}\rho_n^i$

Veamos que T y la sucesión $c_n^{(k)} = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} s_n^{(k)}$ cumplen las hipótesis de la proposición 1.1. (Teorema de Silverman-Toeplitz).

(1) $\sum_{i=0}^{\infty} t_{ni} \frac{1}{\binom{i+k}{k}} s_i^{(k)} = (1 - \rho_n)^{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} \rho_n^i s_i^{(k)}$ es convergente por la proposición 1.

(2), (4) $\sum_{i=0}^{\infty} |t_{ni}| = \sum_{i=0}^{\infty} t_{ni} = (1 - \rho_n)^{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+k}{k} \rho_n^i =$

$$= (1 - \rho_n)^{k+1} \frac{1}{(1 - \rho_n)^{k+1}} = 1.$$

(3) $\lim_n t_{ni} = \binom{i+k}{k} \lim_n (1 - \rho_n)^{k+1} \rho_n^i = \binom{i+k}{k} .0.1 = 0.$

Podemos entonces aplicar la citada proposición para obtener:

$$\lim_n (1 - \rho_n)^{k+1} \sum_{i=0}^{\infty} \rho_n^i s_i^{(k)} = x$$

Y esto según el lema 1 es lo mismo que afirmar:

$$\lim_n \sum_{i=0}^{\infty} \rho_n^i x_i = x. \qquad \text{c.q.d.}$$

En este resultado la condición de ser las series $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n x_n$ convergentes es necesaria. En el ejemplo 1 del capitulo II se verá un ejemplo de serie convergente de tal forma que la serie en cuestión sólo converge para los valores de ρ 0 y 1.

Naturalmente en espacios sucesionalmente completos, se puede dar una respuesta mas completa al problema planteado. Se obtendra esta como consecuencia inmediata del siguiente lema:

Lema 3.-

Si E es un espacio sucesionalmente completo y (x_n) es una sucesión C_k-sumable de E, entonces las series $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n S_n^{(k)}$ son convergentes.

Demostración:

La serie de números reales $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \rho^n$ es convergente y su suma vale $\frac{1}{(1-\rho)^{k+1}}$. Este hecho, trivial para $k=0$, puede comprobarse por inducción sobre k: Basta para ello derivar la igualdad $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \rho^n = \frac{1}{(1-\rho)^{k+1}}$ para obtener que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+k}{k} n\, \rho^{n-1} = \frac{k+1}{(1-\rho)^{k+2}}$$ y de aquí que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k} (n+1)\, \rho^n = \frac{k+1}{(1-\rho)^{k+2}}.$$ Como quiera que

$$\binom{n+k+1}{k} \frac{n+1}{k+1} = \binom{n+k+1}{k+1}$$ obtenemos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+1}{k+1} \rho^n$ es convergente y su suma es $\frac{1}{(1-\rho)^{k+2}}$.

Por hipótesis $C_n^{(k)} = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} S_n^{(k)}$ es convergente y por tanto acotada. Dada una seminorma continua q de E, existirá entonces una constante $M_q > 0$ de forma que:

$$q(S_n^{(k)}) \leq \binom{n+k}{k} M_q$$

De aquí que si $n_1 < n_2$ son dos naturales

$$q\left(\sum_{n_1}^{n_2} \rho^n S_n^{(k)}\right) \leq M_q \sum_{n_1}^{n_2} \binom{n+k}{k} \rho^n$$

Pero $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} \rho^n$ es convergente en $\mathbb{R}$, de donde obtendremos -

que $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n s_n^{(k)}$ es de Cauchy y por tanto convergente en E.

c.q.d.

Corolario 1.-

Si E es sucesionalmente completo y (x_n) es una sucesión C_k-sumable, entonces es ρ-sumable y tiene la misma suma.

Corolario 2.-

Si E es sucesionalmente completo y (x_n) es una sucesión sumable, entonces es ρ-sumable y tiene la misma suma.

4.- SUPRESION DE CEROS EN UNA SERIE C-CONVERGENTE.

Si en una serie se suprimen todos o algunos de sus términos nulos, la serie resultante sigue siendo convergente y tiene la misma suma.

Es conocido que esta situación no puede trasladarse al caso de las series c-convergentes. El objetivo de este apartado es usar un resultado de inclusión de medias de Nörlund, para siguiendo técnicas de [13, pg 60], dar alguna condición suficiente que nos permita suprimir ceros de las series c-convergentes.

Sea $(p_n)_{n=1,2,\ldots}$ una sucesión de reales positivos de tal forma que la serie $\sum p_n$ sea divergente.

Se dice que una sucesión (x_n) de elementos de un espacio localmente convexo E es $N(p_n)$-convergente a un elemento x de E si:

$$\lim_n \frac{1}{p_1+\dots+p_n}(p_1x_1+\dots+p_nx_n) = x$$

El lema 1.2 no es mas que la consistencia del método $N(p_n)$ con cualquier espacio localmente convexo.

A nosotros nos interesa en particular, dados dos métodos $N(p_n)$ y $N(q_n)$ cuando puede afirmarse que de la $N(p_n)$-convergencia de una serie se sigue la $N(q_n)$-convergencia de la misma.

El resultado que probaremos es el siguiente:

Proposición 1.-

Sean (p_n) y (q_n) dos sucesiones de reales positivos de tal forma que las series $\sum p_n$ y $\sum q_n$ son divergentes. Supongamos además que $\frac{q_{n+1}}{q_n} \leq \frac{p_{n+1}}{p_n}$. Entonces si $\sum x_n$ es una serie de un espacio localmente convexo $N(p_n)$-convergente es $N(q_n)$-convergente y tiene la misma suma.

Demostración:

Sean $P_n = p_1+\dots+p_n$ y $Q_n = q_1+\dots+q_n$

Sea (S_n) la sucesión de las sumas parciales de $\sum x_n$ y consideremos las sucesiones siguientes:

$$T_n = \frac{1}{P_n}(p_1S_1+\dots+p_nS_n),\quad U_n = \frac{1}{Q_n}(q_1S_1+\dots+q_nS_n)$$

Es claro entonces que $P_1T_1 = p_1S_1$ y $P_nT_n - P_{n-1}T_{n-1} = p_nS_n$

De donde:

$$U_n = \frac{1}{Q_n}\left(\frac{q_1}{p_1}P_1T_1 + \frac{q_2}{p_2}(P_2T_2 - P_1T_1) + \dots + \frac{q_n}{p_n}(P_nT_n - P_{n-1}T_{n-1})\right) =$$

$$= \frac{1}{Q_n}\left(\left(\frac{q_1}{p_1} - \frac{q_2}{p_2}\right)P_1T_1+\dots+\left(\frac{q_{n-1}}{p_{n-1}} - \frac{q_n}{p_n}\right)P_{n-1}T_{n-1}+ \frac{q_n}{p_n}P_nT_n\right).$$

Consideremos la matriz

$$t_{nm} = \begin{cases} \left(\frac{q_m}{p_m} - \frac{q_{m+1}}{p_{m+1}}\right) \frac{P_m}{Q_n} & \text{si } m<n \\ \frac{q_n}{p_n} \cdot \frac{P_n}{Q_n} & \text{si } m=n \\ 0 & \text{si } m>n \end{cases}$$

Es claro entonces que $U_n = \sum_{j=1}^{\infty} t_{nj}T_j$.

Por hipótesis la sucesión (T_n) es convergente. Basta pues probar que la matriz (t_{nj}) verifica las condiciones de la proposición 1.1 para obtener el resultado:

La condición (1) es trivial, así como la (3) a partir de -la divergencia de $\sum q_n$. Para deducir las condiciones (2) y (4) tengamos en cuenta que las igualdades probadas para la sucesión (S_n) son válidas si en ellas se toma (S_n) como una sucesión arbitraria de números reales. Para la sucesión 1, 1,.... se obtiene:

$$T_n = \frac{p_1+\dots+p_n}{P_n} = 1 = U_n \text{ y por tanto } \sum_{j=1}^{\infty}|t_{nj}| = \sum_{j=1}^{\infty} t_{nj} = 1$$

donde la primera igualdad se deduce de ser $\frac{q_{n+1}}{q_n} \leqslant \frac{p_{n+1}}{p_n}$.

c.q.d.

Podemos entonces demostrar el siguiente resultado:

Teorema 1.-

Sea $\sum_{n=1} x_n$ una serie en un espacio localmente convexo E y - $\sum_{n=1} y_n$ la serie de término general

$$y_n = \begin{cases} x_k & \text{si } n = n_k \\ 0 & \text{si } n \neq n_k \end{cases}$$

donde (n_k) es una sucesión estrictamente creciente de números naturales.

Si $n_{k+2}-n_{k+1} \geq n_{k+1}-n_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ es c-convergente entonces — $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente y tiene la misma suma.

Demostración:

Sean (S_n) y (T_n) la sucesión de sumas parciales de las series $\sum x_n$ y $\sum y_n$ respectivamente.

Se tiene entonces la siguiente igualdad:

$$T_1+T_2+\dots+T_{n_k} = (n_2-n_1)S_1+ (n_3-n_2)S_2+\dots+ (n_k-n_{k-1})S_{k-1}+T_{n_k}$$

De donde:

$$\frac{(n_2-n_1)S_1+(n_3-n_2)S_2+\dots+(n_k-n_{k-1})S_{k-1}}{n_k} = \frac{T_1+T_2+\dots+T_{n_k}}{n_k} - \frac{T_{n_k}}{n_k}$$

Al ser (T_n) convergente en el sentido de Cesàro, digamos a x:

$$\frac{T_1+T_2+\dots+T_{n_k}}{n_k} \xrightarrow{k} x \quad y \quad \frac{T_{n_k}}{n_k} \xrightarrow{k} 0 ,$$

De esta forma es claro que la serie $\sum x_n$ es $N(n_{k+1}-n_k)$-convergente a x.

Como $\frac{n_{k+2}-n_{k+1}}{n_{k+1}-n_k} \leq \frac{1}{1}$, aplicando la proposición 1, obtenemos que $\sum x_n$ es N(1)-convergente a x, es decir, c-convergente a x. c.q.d.

Este resultado será usado en el capítulo IV.

CAPITULO II: C-BASES Y ρ-BASES. EJEMPLOS.

1.-CONCEPTO. RESULTADOS DE INCLUSION:

Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo. Una sucesión de elementos de E, $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ se dice que es una c-base de E si todo elemento $x \in E$ admite una única representación en la forma: $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$ (c).

Es trivial la comprobación de que las aplicaciones $a_n : E \longrightarrow K$ son lineales. La sucesión $(a_n) \in E^*$ se denominará entonces sucesión de coeficientes funcionales asociados a la c-base (x_n).

Denotaremos por $S_k(x)$ a la k-ésima suma parcial de la serie $\sum_{n=1} a_n(x)x_n$ y por $C_k(x)$ la k-ésima suma parcial de Cesàro de la misma. Es decir:

$$S_k(x) = a_1(x)x_1 + \ldots + a_k(x)x_k.$$

$$C_k(x) = \frac{1}{k}(S_1(x) + \ldots + S_k(x)).$$

La regularidad del método de convergencia de Cesàro implica de una forma inmediata que si $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ es una c-base para $E[\mathcal{T}]$ y (a_n) es su sucesión de coeficientes funcionales asociados, entonces $a_n(x_m) = \delta_{nm}$.

Diremos que una c-base es una c-base de Schauder si los coeficientes funcionales asociados son continuos.

Una sucesión $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ de un espacio localmente convexo se dice que es una c-base débil si es una c-base en el espacio $E[\sigma(E,E')]$. Una c-base débil de Schauder será entonces una c-base débil para la que los coeficientes funcionales asociados son continuos.

Finalmente una c-base de $E[\mathcal{T}]$ se dirá equicontinua si el conjunto formado por las proyecciones de Cesàro $(C_k)_{k=1,2,\ldots}$ es un conjunto equicontinuo.

Es conocido el hecho de que existen c-bases que no son bases. Basta citar por ejemplo el espacio de Banach — $C[0,1]$ en el cual el sistema trigonométrico forma una c-base (Teorema de Fèjer), que no es base. Otro ejemplo puede ser el espacio S_c, espacio formado por las sucesiones sumables en el sentido de Cesàro, en el cual los vectores canónicos (e_n) forman una c-base que no es base (Ver [8]).

En contra de lo que podría parecer a la vista de los resultados del capítulo I, concernientes a la consistencia del método de Cesàro, tampoco es cierto que toda base sea c-base. Veremos un contraejemplo en el apartado 5. Este comportamiento patológico puede resolverse sin embargo con una condición adicional. Este es el objeto de la siguiente proposición:

Proposición 1.-

Toda base de Schauder de un espacio localmente convexo es una c-base de Schauder.

Demostración:

Sea (a_n) la sucesión de coeficientes funcionales asociados a la base (x_n). Tenemos entonces que si $x \in E$ $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$

La regularidad del método de convergencia de Cesàro demuestra entonces que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$ (c).

Sólo tendremos que ver entonces que la representación de cualquier elemento es única.

Supongamos para ello que $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ (c).

El hecho de ser a_p lineal y continua nos permite asegurar que $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n a_p(x_n)$ (c) $= \alpha_p$ $\forall p$.

(x_n) es pues una c-base; el hecho de ser de Schauder es trivial. c.q.d.

Sea $E[\mathcal{E}]$ un espacio localmente convexo. Una sucesión de elementos de E $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$ se dice que es una ρ-base de E si todo elemento x en E admite una representación única en la forma: $x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n$ (ρ).

Las aplicaciones $a_n : x \longrightarrow \alpha_n$ son trivialmente lineales. Denominaremos a la sucesión $(a_n) \subseteq E^*$ sucesión de coeficientes funcionales asociados a la ρ-base (x_n).

Una ρ-base se dice que es de Schauder si los coeficientes funcionales asociados son continuos.

Dada una ρ-base $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$, llamaremos proyectores de Abel a las aplicaciones A_n^ρ, $A^\rho : E \longrightarrow E$ definidas por las igualdades:

$$A_n^\rho(x) = \sum_{k=0}^{n} \rho^k a_k(x) x_k$$

$$A^\rho(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k a_k(x) x_k$$

Diremos que una sucesión es una ρ-base débil de $E[\mathcal{T}]$ si es una ρ-base del espacio $E[\sigma(E,E')]$. Una ρ-base débil de Schauder será entonces una ρ-base débil para la que los coeficientes funcionales asociados son continuos

Finalmente observar que si (x_n) es una ρ-base de E y (a_n) es la sucesión de coeficientes funcionales asociados, se tiene entonces que $a_n(x_m) = \delta_{nm}$ ya que $x_m = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{nm} x_n \ (\rho)$ es la única ρ-descomposición de x_m en la ρ-base (x_n).

En [3, pg 23] J.M.Bilbao prueba que los vectores canónicos en sa, espacio de las sucesiones sumables en el sentido de Abel, forman una ρ-base que no es base. Más adelante probaremos que tampoco forman una c-base.

Con respecto a los resultados de inclusión, como veremos en los ejemplos, no puede darse una proposición análoga a la proposición 1. Es necesario imponer alguna condición adicional, referente a la completitud del espacio.

Proposición 2.-

Supongamos que E es un espacio localmente convexo con una c-base de Schauder $(x_n)_{n=0,1,\dots}$ y sea (a_n) su sucesión de coeficientes funcionales asociados. Si para todo x en E las series $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n a_n(x) x_n$ son convergentes, entonces (x_n) es una ρ-base de E.

Demostración:

Sea $x \in E$. Por hipótesis $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) x_n$ (c).

Aplicando el teorema I.3.1. obtenemos que $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) x_n$ (ρ), con lo cual todo elemento es ρ-desarrollable respecto de la sucesión (x_n). La unicidad del desarrollo puede obtenerse teniendo en cuenta que si $0 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n$, por la continuidad de a_m, $0 = a_m(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n a_m(x_n) = \alpha_m$ $\forall m$. c.q.d.

Corolario 1.-

Si E es un espacio localmente convexo y sucesionalmente completo, entonces toda c-base de Schauder es ρ-base de Schauder.

Por último daremos dos resultados de inclusión con respecto a la equicontinuidad:

Proposición 3.-

Toda base equicontinua es una c-base equicontinua.

Demostración:

Si (x_n) es una base equicontinua la sucesión $(S_n)_{n=1,2,\dots}$

es equicontinua por lo que para toda seminorma continua p de E existirá otra q de tal forma que $p(S_n(x)) \leq q(x)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in E$. De aquí que $p(C_n(x)) \leq \frac{1}{n}(q(S_1(x))+\ldots+ q(S_n(x))) \leq$ $\leq \frac{1}{n} nq(x) = q(x)$, es decir $(C_n)_{n=1,2,\ldots}$ es una sucesión equicontinua. c.q.d.

Proposición 4.-

Supongamos que E es un espacio localmente convexo con una c-base equicontinua $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$ con la sucesión de coeficientes funcionales asociados (a_n). Si para todo x en E las series $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n a_n(x)x_n$ son convergentes, entonces (x_n) es una ρ-base equicontinua.

Demostración:

Si $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$ es una c-base equicontinua, para toda seminorma p de E existirá otra q de tal forma que:

(1) $$p(\frac{1}{n+1} (S_o(x) +\ldots+ S_n(x)) \leq q(x) \quad \text{si } n=0,1,\ldots$$

De aquí que $p(S_o(x) +\ldots+ S_n(x)) \leq (n+1)q(x)$ y por tanto $p(S_n(x)) \leq 2(n+1)q(x)$ de donde finalmente

$p(a_n(x)x_n) \leq 4(n+1)q(x)$ para todo valor de n. Si $\rho \in [0,1)$ tendremos entonces que

$$p(A_n^\rho(x)) = p(\sum_{i=0}^{n} \rho^i a_i(x)x_n) \leq (\sum_{i=0}^{n} 4(i+1)\rho^i)q(x) \leq M_\rho q(x)$$

(Con $M_\rho = \sum_{i=0}^{\infty} 4(i+1)\rho^i$). Deducimos entonces que $(A_n^\rho)_{n=0,1,\ldots}$ es un equicontinuo. Denotemos ahora por $S_n^{(1)}$ al operador -

$S_0 + \dots + S_n$; la desigualdad (1) se convierte en

$p(\frac{1}{n+1} S_n^{(1)}) \leq q(x)$ $\forall n$. Teniendo en cuenta la proposición I.3.1. y el lema I.3.1. tendremos entonces que

$$p(A^{\rho}(x)) = p(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k a_k(x) x_k) = p((1-\rho)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k S_k^{(1)}) \leq$$

$$\leq (1-\rho)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k p(S_k^{(1)}) \leq [((1-\rho)^2 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\rho^k) q(x) =$$

$$= q(x) \text{ para todo valor de } \rho.$$

Es decir $(A^{\rho})_{\rho \in [0,1)}$ es equicontinuo y por tanto (x_n) es una ρ-base equicontinua. c.q.d.

Finalmente y con el objeto de acortar la escritura usaremos las siguientes abreviaturas:

B ... Base;	BS ... B de Schauder;
CB ... c-Base;	CBS ... CB de Schauder;
ρB ... -Base;	ρBS ... ρB de Schauder;
BE ... B equicontinua;	WB ... B débil;
CBE ... CB equicontinua;	WCB ... CB débil;
ρBE ... B equicontinua;	WρB ... B débil;
WBS ... WB de Schauder;	
WCBS ... WCB de Schauder;	
WρBS ... WρB de Schauder;	

Finalmente abreviaremos la expresión "sucesión de coeficientes funcionales asociados" en s.c.f.a.

2.- RELACIÓN CON LA PROPIEDAD DE LA APROXIMACION:

Al igual que las bases, las c-bases y ρ-bases están estrechamente relacionadas con la propiedad de la aproximación.

Siguiendo a Köthe [20], diremos que un espacio localmente convexo $E[\tau]$ tiene la propiedad de la aproximación si $\mathcal{F}(E)$ (Conjunto de operadores lineales continuos de rango finito de E en E) es denso en $\mathcal{L}_c(E)$ (Espacio de las aplicaciones lineales y continuas de E en E, con la topología de la convergencia uniforme en los subconjuntos precompactos de E.

En realidad basta imponer que la aplicación identidad $I:E \longrightarrow E$ es un punto adherente a $\mathcal{F}(E)$.

En primer lugar estudiaremos las c-bases, para lo que emplearemos tecnicas analogas a [20, pg 248], haciendo uso de la siguiente proposición que puede encontrarse en [20, pg 139]:

"Si E y F son dos espacios localmente convexos las topologías de la convergencia simple y de la convergencia precompacta coinciden en todo equicontinuo de $\mathcal{L}(E,F)$".

Proposición 1.-

Si un espacio localmente convexo tiene una CBE, entonces tiene la propiedad de la aproximación.

Demostración:

Basta ver según se dijo que la identidad es un punto adherente a $\mathcal{F}(E)$. Para ello probaremos que los operadores de Cesàro $C_k \in \mathcal{F}(E)$ convergen a I:

El conjunto $H = (C_k)_{k=1,2,\dots} \cup (I)$ es equicontinuo por ser unión de dos que lo son.

Además por definición de c-base (C_k) converge a I en la topología de la convergencia simple de $\mathcal{L}(E)$.

Pero H es un equicontinuo, de forma que en él coinciden las topologías de la convergencia simple y de la convergencia uniforme en los precompactos; con lo cual:

$$C_k \longrightarrow I \quad \text{en} \quad \mathcal{L}_c(E). \qquad \text{c.q.d.}$$

Proposición 2.-

Toda CBS en un espacio tonelado es equicontinua; por tanto dicho espacio tendrá la propiedad de la aproximación.

Demostración:

Sea V un entorno absolutamente convexo y cerrado de 0 en E y $U = \bigcap_1^{\infty} C_k^{-1}(V)$.

U será entonces un conjunto absolutamente convexo y cerrado por ser intersección de conjuntos que lo son.

Si probasemos que U es absorbente, aplicando que E es tonelado, obtendriamos que U es un entorno de 0 con lo cual concluirá la prueba en vista de que, por construcción: $C_k(U) \subseteq V \quad \forall k$.

Sea pues $x \in E$. Se tiene entonces que $C_k x \longrightarrow x$. Por tanto $(C_k x)_{k=1,2,\dots}$ es acotado por lo que tomando el entorno V, podremos encontrar un $\lambda > 0$ de forma que: $(C_k x) \subseteq \lambda V$. De donde $C_k x \in \lambda V \quad \forall k$, lo cual equivale a $x \in \lambda C_k^{-1}(V) \quad \forall k$ y entonces: $\quad x \in \lambda U$ c.q.d.

Es evidente que un espacio localmente convexo que tenga una c-base es separable. El recíproco de esta afirmación no es cierto en general. Para buscar un contraejemplo, en la clase de los espacios localmente convexos, usaremos el mismo ejemplo que se da para el correspondiente problema en la teoria de bases. Dicho ejemplo puede encontrarse en Kalton [17].

Antes de pasar a ello necesitamos el siguiente lema:

Lema 1.-

Todo espacio localmente convexo con una CB es sucesionalmente separable.

Demostración:

Sea E un espacio localmente convexo y (x_n) una c-base de E. Sea (a_n) la s.c.f.a. a la c-base. Sea finalmente $x \in E$. Escojamos $q_i^{(n)}(x) \in \mathbb{Q}$ de forma que:

$$(1) \qquad \left| \frac{n-i+1}{n} a_i(x) - q_i^{(n)}(x) \right| \leq \frac{1}{n^2(4i-3)} \left| a_i(x) \right|$$

Tal número siempre existe por ser $\mathbb{Q}$ denso en $\mathbb{R}$ siempre que $a_i(x) \neq 0$. Si $a_i(x) = 0$ basta tomar $q_i^{(n)}(x) = 0$.

Sea B un conjunto absolutamente convexo y acotado que con-tenga a $(C_n(x))_{n=1,2,\ldots}$.

Entonce si $C_0(x) = C_{-1}(x) = 0$ tenemos que:

$a_i(x)x_i = iC_i(x) - 2(i-1)C_{i-1}(x) + (i-2)C_{i-2}(x) \in (4i-3)B$

De donde $\frac{1}{n^2(4i-3)} a_i(x)x_i \in \frac{1}{n^2} B$

Ahora tenemos en cuenta (1) y que B es absolutamente convexo para obtener que:

$$\left(\frac{n-i+1}{n} a_i(x) - q_i^{(n)}(x)\right)x_i \in \frac{1}{n^2} B$$

Y por tanto que: $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n-i+1}{n} a_i(x) - q_i^{(n)}(x)\right)x_i \in \frac{1}{n} B$

Como $x - \sum_{i=1}^{n} q_i^{(n)}(x)x_i = x - C_n(x) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n-i+1}{n} a_i(x) - q_i^{(n)}(x)\right)x_i$

obtenemos que $x - \sum_{i=1}^{n} q_i^{(n)}(x)x_i \in x - C_n(x) + \frac{1}{n} B$

De aquí se deduce trivialmente que:

$$x = \lim_n \sum_{i=1}^{n} q_i^{(n)}(x)x_i$$

Es decir las combinaciones lineales racionales de los elementos de la c-base son sucesionalmente densas en E.

c.q.d.

Corolario 1.-

w_d con $d = 2^{\aleph_0}$ no tiene una CB.

Demostración:

No es sucesionalmente separable, ya que tiene 2^d elementos.

c.q.d.

Es de hacer notar que w_d es separable (Ver [14]) y tiene la propiedad de la aproximación (Ver [20 pg 245]).

Con respecto a las ρ-bases seguiremos las mismas ideas si bien la demostración del análogo a la proposición 2 necesitará alguna preparación.

Proposición 3.-

Todo espacio localmente convexo con una ρBE tiene la propiedad de la aproximación.

Demostración:

El conjunto H_ρ, formado por la sucesión $(A^\rho_n)_{n=0,1,\dots}$ y A^ρ es equicontinuo, y por hipótesis $A^\rho_n \longrightarrow A^\rho$ en la topología de la convergencia simple y por ende en la de la convergencia precompacta. Esto prueba que A^ρ es un punto adherente a $\mathcal{F}(E)$, espacio de operadores de rango finito de E en E, en $\mathcal{L}(E)$.

El mismo razonamiento aplicado al conjunto $H = (A^\rho)_{\rho\in[0,1)} \cup (I)$ prueba que $I \in \overline{\overline{\mathcal{F}(E)}} = \overline{\mathcal{F}(E)}$, en $\mathcal{L}(E)$ con la topología de la convergencia precompacta, que era una condición equivalente a la de poseer la propiedad de la aproximación.

c.q.d.

Lema 2.-

Sea E un espacio localmente convexo y $(x_n)_{n=0,1,\dots}$ una ρB de E. Entonces $(A^{\rho}(x))_{\rho\in[0,1)}$ es un acotado de E.

Demostración:

Sea q una seminorma continua de E. La convergencia de $A^{\rho}(x)$ a x nos da la desigualdad $q(A^{\rho}(x)) \leq 1+q(x)$, si $\rho \geq \rho_0 > 0$

Sea $\rho_1 = \frac{1+\rho_0}{2}$, que verifica $\rho_0 < \rho_1 < 1$. Sea $\rho < \rho_0$ y tengamos en cuenta la cadena de desigualdades siguiente:

$$q(\sum_{n=0}^{m} \rho^n a_n(x)x_n) \leq \sum_{n=0}^{m} (\frac{\rho}{\rho_1})^n q(\rho_1^n a_n(x)x_n) \leq \frac{\rho_1}{\rho_1-\rho} \sup_n q(\rho_1^n a_n(x)x_n) \leq$$

$$\leq \frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_0} \sup q(\rho_1^n a_n(x)x_n).$$

Observemos que el supremo usado existe dado que la serie - $\sum \rho_1^n a_n(x)x_n$ es convergente. Además sólo depende de q, ρ_1 y x.

Sigue de la desigualdad establecida sin mas que tomar límites que $q(A^{\rho}(x)) \leq M_{q,x} \quad \forall\rho\in[0,1)$, siendo

$$M_{q,x} = \max(1 + q(x) \ , \ \frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_0} \sup_n q(\rho_1^n a_n(x)x_n)) \quad \text{c.q.d.}$$

Podemos entonces demostrar la siguiente proposición:

Proposición 4.-

Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio tonelado. Si E tiene una ρBS, es equicontinua y por tanto E tiene la propiedad de la aproximación.

Demostración:

Hay que demostrar en primer lugar que $(A_n^{\rho})_{n=0,1,\ldots}$ es un conjunto equicontinuo. para ello tomemos un entorno V de 0 absolutamente convexo y cerrado. $(A_n^\rho)^{-1}(V)$ será tambien absolutamente convexo y cerrado y por tanto $U = (A_n^\rho)^{-1}(V)$ - tambien lo será. Por otra parte $(A_n^\rho(x))_n$ es una sucesión - convergente y por tanto acotada. Quiere decir esto que podremos encontrar un $\lambda>0$ de forma que $(A_n^\rho(x)) \subseteq \lambda V$, de donde $x \in \lambda(A_n)^{-1}(V)$ $\forall n$, con lo cual U es absorbente. La tonelación del espacio nos da entonces la equicontinuidad de $(A_n^\rho)_{n=0,1,\ldots}$.

Para ver en segundo lugar que $(A^\rho)_{\rho\in[0,1)}$ es equicontinuo, -- basta tomar de nuevo un entorno de 0 absolutamente convexo y cerrado V, formar el conjunto $U = \bigcap_{\rho\in[0,1)}(A^\rho)^{-1}(V)$, que es absolutamente convexo y cerrado, y tener en cuenta que según el lema 1 $(A^\rho(x))_{\rho\in[0,1)}$ es un conjunto acotado, con lo -- cual podremos encontrar un $\lambda > 0$ de forma que $x \in \lambda(A^\rho)^{-1}(V)$ $\forall\rho \in [0,1)$. De aquí que por la tonelación del espacio, U sea un entorno quedando demostrada la equicontinuidad de $(A^\rho)_{\rho\in[0,1)}$

c.q.d.

Nota: Tanto en la proposición 2 como en la 4 puede sustituirse la hipótesis de tonelación por la de tonelación numerable. Sin embargo ello no conduce a nada distinto ya -- que según un resultado de De Wilde todo espacio numerablemente tonelado y separable es tonelado. La demostración de dicho resultado puede encontrarse en [25]

3.- C-BASES Y ρ-BASES DEBILES:

En analogía con el correspondiente problema en la teoria de bases nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Cuando una WCB (resp WρB) debe ser una CB (resp ρB)?

En los siguientes teoremas se dan condiciones suficientes para ambas preguntas siguiendo la linea de [20] si bien sustituimos la hipótesis de ser numerablemente tonelado por la de ser tonelado. La razón para ello es la — misma que en el apartado anterior.

Usaremos el siguiente resultado cuya demostración puede encontrarse en [20, §39]:

"Sea H un equicontinuo de $\mathcal{L}(E,F)$ (E y F localmente convexos) y N un subconjunto total de E. Las topologías $\mathcal{T}_s$ de la convergencia simple y $\mathcal{T}_s(N)$ de la convergencia simple en N coinciden en H".

Teorema 1.-

Toda WCBS en un espacio tonelado es una CBS.

Demostración:

Sólo hemos de probar que la WCBS en cuestión es una CB. La continuidad de la s.c.f.a. es inmediata.

Sea (x_n) la WCBS de $E[\mathcal{T}]$ y (a_n) su s.c.f.a. que por hipótesis son continuos. Sean $(C_k)_{k=1,2,...}$ los operadores de —

Cesàro asóciados a (x_n). De la continuidad de a_n deducimos la continuidad de (C_k) para la topología $\mathcal{T}$. De la misma forma que en la proposición 2.2, probariamos entonces que el conjunto $H = (C_k) \cup (I)$ es continuo.

Consideremos ahora el conjunto:

$$N = \{ x: C_k x \xrightarrow{\mathcal{T}} x \}$$

Evidentemente si x es una combinación lineal finita de (x_n), por ejemplo $x = \sum_1^n \alpha_i x_i$ tendremos

$$a_k(x) = \sum_1^n \alpha_i a_k(x_i) = \alpha_k \quad \text{si } k \leq n \text{ y } 0 \text{ en otro caso}$$

De donde $x = \sum_1^n a_i(x) x_i$

Por lo que $S_k x \xrightarrow{\mathcal{T}} x$

Y por la regularidad del método de Cesàro

$$C_k x \xrightarrow{\mathcal{T}} x$$

Esto demuestra que $\mathrm{lin}(x_n) \subseteq N$.

Por otra parte $\mathrm{lin}(x_n)$ es $\sigma(E,E')$-denso y por tanto $\mathcal{T}$-denso, de donde N es $\mathcal{T}$-denso en E.

La propia definición de N da que $C_k \longrightarrow I$ en $\mathcal{L}_s(N)$.

Por lo que según la proposición enunciada

$$C_k \longrightarrow I \text{ en } \mathcal{L}_s.$$

O lo que es igual:

$$C_k x \xrightarrow{\mathcal{T}} Ix = x \qquad \forall x \in E$$

que es la definición de c-base. c.q.d.

El problema de la c-base débil admite un enunciado aparentemente más general: Sea (E,F) un par dual y $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ dos topologías en E compatibles con el par. Supongamos que (x_n) es una CBS de $E[\mathcal{T}_1]$. ¿Es (x_n) una CB de $E[\mathcal{T}_2]$? Este enunciado es efectivamente el mismo que el anterior:

En el caso de que $E[\mu(E,F)]$ sea tonelado, si (x_n) es una CBS de $E[\mathcal{T}_1]$, lo es de $E[\sigma(E,F)]$ (La unicidad se deduce de la continuidad de la s.c.f.a.). Por el teorema 1 (x_n) será una CBS de $E[\mu(E,F)]$ y por tanto de $E[\mathcal{T}_2]$. Podemos enunciar entonces el siguiente corolario.

Corolario 1.-

Sea (E,F) un par dual. Supongamos que $E[\mu(E,F)]$ es tonelado. Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías del par dual, toda CBS de $E[\mathcal{T}_1]$ es CBS de $E[\mathcal{T}_2]$.

Finalmente probaremos el teorema de la ρ-base débil, análogo a los ya conocidos de la base débil y de la c-base débil, si bien tambien precisa de la utilización del lema 2.2.

Teorema 2.-

Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio tonelado. Si (x_n) es una $W\rho BS$, entonces es una ρBS.

Demostración:

Los conjuntos $(A_n^\rho(x))_n$ y $(A^\rho(x))_{\rho\in[0,1)}$ son acotados para $x \in E$, los primeros por ser sucesiones convergentes y el segundo por el lema 1.

En particular $(A_n^\rho)_n$ es simplemente acotado y por tanto equicontinuo. Coinciden pues en él las topologías $\mathcal{T}_s(\text{lin}(x_n)_n)$ y $\mathcal{T}_s(E)$. Trivialmente para la primera de estas topologías $(A_n^\rho)_n$ es de Cauchy. Por tanto lo será tambien para la segunda y de esta forma $(A_n^\rho(x))_n$ es de Cauchy en E para todo x en E. Por tanto $(A_n^\rho(x))_n$ convergerá en la compleción de E, $\hat{E}$, a un cierto elemento x_o, y por tanto $\lim A_n^\rho(x)=x_o(\sigma(\hat{E}\, E'))$. Pero $\lim_n A_n^\rho(x) = A^\rho(x)\ (\sigma(E,E'))$ y de aquí que $x_o= A^\rho(x)\in E$ con lo cual $A_n^\rho(x) \to A^\rho(x)$ en E. Al ser E tonelado y A^ρ el límite puntual de una sucesión de operadores continuos A^ρ será continuo.

Sea $H = (A^\rho)_{\rho\in[0,1)} \cup (I)$. H es un simplemente acotado y por lo tanto equicontinuo. Coinciden en él pues las topologías $\mathcal{T}_s$ y $\mathcal{T}_s(\text{lin}(x_n)_n)$. En la primera de ellas es claro que $\lim_{\rho\to 1} A^\rho=I$ y por tanto lo será en la segunda, es decir $\lim_{\rho\to 1} A^\rho(x)=x\ (\mathcal{T})$ para todo x en E. La unicidad es trivial. c.q.d.

De la misma forma que antes puede probarse el siguiente enunciado totalmente equivalente al teorema 2.

<u>Corolario 2</u>.-

Sea (E,F) un par dual. Supongamos que $E[\mu(E,F)]$ es tonelado. Si $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías del par dual, toda ρBS de $E[\mathcal{T}_1]$ es ρBS de $E[\mathcal{T}_2]$.

4.-UN TEOREMA DE CARACTERIZACION:

El objetivo de este apartado es ver bajo que condiciones podemos deducir el hecho de que una cierta sucesión de un espacio localmente convexo es una CB (resp ρB) conocido su comportamiento tan sólo en su envoltura lineal.

El resultado que probamos a continuación constituye una extensión a espacios localmente convexos de un resultado de Singer para c-bases (Ver [29]).

Sea E un espacio localmente convexo y (x_n) una sucesión de elementos de E. Usaremos la siguiente notación:

$$\sigma_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \frac{n-j+1}{n} a_j x_j & \text{si} \quad n \leq m \\ \sum_{j=1}^{m} \frac{n-j+1}{n} a_j x_j & \text{si} \quad n \geq m \end{cases}$$

Donde $a_i \in \mathbb{K}$, $n,m \in \mathbb{N}$.

Observese que dicha expresión depende en principio de la representación que se escoja de $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i$, y por ello es necesario explicitarla.

Probaremos antes del resultado buscado el siguiente lema:

Lema 1.-

Sea E un espacio vectorial topológico. Sea H un conjunto de aplicaciones lineales y continuas de E en E. Sea N un subespacio denso de E. Si $H:N \longrightarrow E$ es equicontinuo, entonces $H:E \longrightarrow E$ es equicontinuo.

Demostración:

Sea U un entorno cerrado de E y V un entorno abierto de E de forma que $h(V \cap N) \subseteq U \quad \forall h \in H$. Al ser N denso $\bar{V} = \overline{N \cap V}$. — De esta forma $h(V) \subseteq h(\bar{V}) = h(\overline{N \cap V})$ y finalmente por la continuidad de h, $h(V) \subseteq \overline{h(N \cap V)} \subseteq \bar{U} = U \quad \forall h \in H$ c.q.d.

Podemos entonces enunciar el siguiente teorema:

<u>Teorema 1.</u>-

Sea E un espacio localmente convexo y (x_n) una sucesión — total de elementos no nulos. Son equivalentes:

(1) (x_n) es una CBE.

(2) Si p es una seminorma continua de E, existe — otra q y una constante K_p de forma que

$$\sup_{\substack{q(\sum_1^m a_j x_j) \leq 1 \\ m \in \mathbb{N},\, a_j \in \mathbb{K}}} \left[p\left(\sigma_n \left(\sum_{j=1}^{m} a_j x_j \right) \right) \right] \leq K_p$$

<u>Demostración</u>:

Es obvio que si suponemos (1), la sucesión (x_n) está formada por elementos linealmente independientes.

Veamos que ocurre lo mismo si suponemos (2). Lo haremos por reducción al absurdo:

Supongamos que n es el primer entero tal que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ son linealmente dependientes. Es evidente entonces que $n > 1$ — (Si $\{x_1\}$ fuera linealmente dependiente seria $x_1 = 0$), y además que x_n es combinación lineal de los anteriores:

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i$$

Si multiplicamos esta expresión por un escalar cualquiera, λ

obtendremos: $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda\lambda_i x_i - \lambda x_n = 0$.

Sea p una seminorma continua de E y q la que le corresponde según la condición (2).

Como quiera que $q(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda \lambda_i x_i - \lambda x_n) = q(0) = 0 \leq 1$

Obtendremos que $p(\sigma_n(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda \lambda_i x_i - \lambda x_n)) \leq K_p$

De aquí que: $p(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j+1}{n} \lambda_j x_j - \frac{1}{n} x_n) \leq \frac{K_p}{|\lambda|}$ si $\lambda \neq 0$

Al ser esta expresión válida para $\lambda \neq 0$ obtendremos:

$$p(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j+1}{n} \lambda_j x_j - \frac{1}{n} x_n) = 0 \qquad \forall p$$

Y por la separación del espacio:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j+1}{n} \lambda_j x_j - \frac{1}{n} x_n = 0$$

De donde $x_n = \sum_{j=1}^{n-1}(n-j+1) \lambda_j x_j$

Además por construcción $x_n = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j x_j$, y $x_1,\dots,x_{n-1}$ son linealmente independientes. De aquí que:

$$(n-j+1) \lambda_j = \lambda_j \qquad j=1,2,\dots,n-1.$$

Es decir $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$ y por tanto $x_n = 0$ lo cual contradice la hipótesis del teorema.

Demostrado ya que los vectores (x_n) pueden suponerse linealmente independientes, el teorema puede enunciarse en la siguiente forma: Son equivalentes:

(1) (x_n) es una c-base equicontinua.

(2) Los operadores $\sigma_n : \mathrm{lin}(x_n) \longrightarrow E$ son equicontinuos.

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea (f_n) la s.c.f.a. a la c-base (x_n) y (C_n) - los proyectores de Cesàro.

Si $x=\sum_{i=1}^{m} a_i x_i$, entonces $f_n(x) = \begin{cases} a_n & \text{si } m \geq n \\ 0 & \text{si } m < n \end{cases}$

Una sencilla comprobación demuestra entonces que

$$\sigma_n(x) = C_n(x)$$

Con lo cual $\sigma_n = C_n\big|_{\text{lin}(x_n)}$

De la equicontinuidad de los operadores (C_n) se deduce entonces la de (σ_n).

(2) $\Rightarrow$ (1) Demostraremos en primer lugar que existe una - sucesión (f_n) de elementos de E' de forma que (x_n, f_n) es - un sistema biortogonal:

Si esto no ocurriera podriamos encontrar un n de forma que ninguna forma lineal y continua que se anule en $x_1 \ldots x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots$ podria ser no nula en x_n.

Por el teorema de Hahn-Banach:

[1] $\qquad x_n \in \overline{\text{lin}\,(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots)}$

Tengamos en cuenta ahora que (σ_n) es una sucesión de operadores equicontinua.

Sea entonces U un entorno de 0. Existirá entonces otro V - de tal forma que $\sigma_m(V \cap \text{lin}(x_n)) \subseteq \frac{1}{n} U$ para todo m en N.

Dado V, [1] nos asegura que existen constantes, $a_1, \ldots, a_m$, dependientes de V tales que:

$$x_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - \sum_{n+1}^{m} a_i x_i \in V$$

La construcción de V dará entonces:

$$\sigma_n(x_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - \sum_{n+1}^{m} a_i x_i) \in \frac{1}{n} U$$

Es decir, por definición de σ_n:

$$\frac{1}{n} x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(n-j+1)}{n} a_j x_j \in \frac{1}{n} U$$

De donde: $x_n - \sum_{i=1}^{n-1} (n-j+1) a_j x_j \in U$

Lo cual implica $x_n \in \overline{\text{lin}\ (x_1,\ldots,x_{n-1})}$

Pero lin $(x_1,\ldots,x_{n-1})$ es de dimensión finita y tendremos entonces $x_n \in \text{lin}(x_1,\ldots,x_{n-1})$. Lo cual es absurdo.

Una vez con nuestro sistema biortogonal, podemos considerar los operadores:

$$\hat{\sigma}_n : E \longrightarrow E$$

Definidos por la igualdad:

$$\hat{\sigma}_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} f_j(x) x_j$$

Que coinciden con σ_n en $\text{lin}(x_n)$.

Si $x \in \text{lin}(x_n)$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) x_n$ y por la regularidad del método de Cesàro: $\hat{\sigma}_n(x) \longrightarrow x$

Esto implica que $\hat{\sigma}_n \longrightarrow I$ en $\mathcal{L}(E,E)$ con la topología de la convergencia simple en $\text{lin}(x_n)$ que es denso.

Ahora bien, por el lema 1 $(\hat{\sigma}_n)$ es equicontinuo, por lo que dicha topología coincide con la de la convergencia simple en E y por tanto

$$\hat{\sigma}_n(x) \longrightarrow x \qquad \forall x \in E.$$

O lo que es igual $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)x_n = x \quad (c)$.

La unicidad del desarrollo se deduce del hecho de ser f_n - lineal y continua: Si $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n = 0 \quad (c)$ entonces

$$0 = f_m(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n f_m(x_n) \quad (c) = \alpha_m \qquad \forall m.$$

Es decir : (x_n) es una c-base. La equicontinuidad se deduce de ser $(\hat{\sigma}_n)$ una sucesión equicontinua. c.q.d.

El hecho de no suponer la sucesión (x_n) linealmente independiente, hace que en el teorema anterior se — presente la condición (2) en una forma complicada. Esto puede de resolverse mediante el siguiente corolario en realidad equivalente al teorema, ya que la prueba que hemos hecho de él, contiene en realidad a la del corolario:

Corolario 1.-

Sea (x_n) una sucesión total de elementos linealmente independientes. Son equivalentes:

(1) (x_n) es una CBE.

(2) (σ_n) es una sucesión de aplicaciones equicontinua.

Para el caso de ρ-bases, optamos por dar directamente el enunciado sencillo si bien hemos de hacer notar - que usando la misma técnica que en el teorema 1, puede deducirse el analogo a él para ρ-bases basandonos en el que damos (Analogo al corolario 1).

Sea E un espacio localmente convexo. Dada una sucesión de elementos de E linealmente independientes, ---- $(x_n)_{n=0,1,\dots}$, consideremos las aplicaciones:

$$a_n^{\rho}: \operatorname{lin}(x_n)_n \longrightarrow E \qquad (\rho \in [0,1), \quad n=0,1,\dots)$$

definidas por:

$$a_n^{\rho}\Big(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\Big) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} \rho^j a_j x_j & \text{si } n \leq m \\ \sum_{j=1}^{m} \rho^j a_j x_j & \text{si } n \geq m \end{cases}$$

y por otra parte las funciones:

$$a^{\rho}: \operatorname{lin}(x_n)_n \longrightarrow E \qquad (\rho \in [0,1))$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i x_i \longmapsto \sum_{i=1}^{m} \rho^i a_i x_i$$

El teorema de caracterización para ρ-bases puede obtenerse como sigue:

<u>Teorema 2</u>.-

Sea E un espacio localmente convexo sucesionalmente completo. Sea (x_n) una sucesión fundamental de elementos linealmente independientes. Son equivalentes:

(1) (x_n) es una ρBE.

(2) a) Si $\rho \in [0,1)$, la sucesión $(a_n)_{n=0,1,\dots}$ es equicontinua.

b) El conjunto $(a^{\rho})_{\rho\in[0,1)}$ es equicontinuo.

<u>Demostración</u>:

(1) $\Rightarrow$ (2) Si (x_n) es una ρ-base es claro que $a_n^{\rho} = A_n^{\rho}\big|_{\operatorname{lin}(x_n)_n}$

y que $a^\rho = A^\rho \big|_{\mathrm{lin}(x_n)_n}$. La equicontinuidad de $(A^\rho_n)_{n=0,1,\dots}$ y $(A^\rho)_{\rho\in[0,1)}$ nos da entonces (2).

(2) $\Longrightarrow$(1) Demostraremos en primer lugar que existe una sucesión (f_n) de elementos de E' de forma que $(x_n,f_n)_{n=0,1\dots}$ forma un sistema biortogonal ($f_n(x_m) = \delta_{n,m}$).

Si esto no ocurriera podríamos encontrar un n de forma que ninguna forma lineal y continua que se anule en $x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_{n+1},\dots$ podria ser no nula en x_n. Por el teorema de Hahn-Banach tendriamos entonces que:

$$x_n \in \overline{\mathrm{lin}(x_1,x_2,\dots,x_{n-1},x_{n+1},\dots)}$$

Sea U un entorno de cero y $\rho_0 \in (0,1)$. El hecho de ser $(a^{\rho_0}_n)_n$ equicontinuo en $\mathrm{lin}(x_n)_n$ nos asegura la existencia de un entorno V de 0 de forma que:

$$a^{\rho_0}_m(V \cap \mathrm{lin}(x_n)_n) \subseteq \rho_0^n U \qquad m=0,1,\dots$$

Al ser $x_n \in \overline{\mathrm{lin}(x_m)_{m\neq n}}$ podremos encontrar unas constantes $a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n,\dots,a_m$ de forma que:

$$x_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - \sum_{n+1}^{m} a_i x_i \in V$$

Por lo que según la construcción de V:

$$a^{\rho_0}_n(x_n - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i - \sum_{n+1}^{m} a_i x_i) \in \rho_0^n U$$

Es decir: $\rho_0^n x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \rho_0^i a_i x_i \in \rho_0^n U$, de donde $x_n - \sum_{i=0}^{n-1} \rho_0^i \rho_0^{-n} x_i \in U$

En definitiva hemos probado que $x_n \in \overline{\mathrm{lin}(x_1,\dots,x_{n-1})} = \mathrm{lin}(x_1,\dots,x_{n-1})$ lo cual contradice la independencia lineal de $(x_n)_n$.

Una vez conseguido el sistema biortogonal, podemos definir los operadores $A_n^\rho(x) = \sum_{i=1}^{n} \rho^i f_i(x)x_i$ que coinciden con a_n^ρ en $\mathrm{lin}(x_n)_n$.

La sucesión $(A_n^\rho)_{n=0,1,\ldots}$ será por tanto equicontinua en $\mathrm{lin}(x_n)_n$ y según el lema 1, equicontinua en E, por lo que en el conjunto formado por los terminos de dicha sucesión coincidirán las topologías de la convergencia simple en $\mathrm{lin}(x_n)_n$ y en E. Trivialmente para la primera $(A_n)_{n=0,1,\ldots}$ es una sucesión de Cauchy. Lo será tambien para la segunda y por tanto $(A_n^\rho(x))_{n=0,1,\ldots}$ será una sucesión de Cauchy y por tanto convergente a un elemento $A^\rho(x)$. Las aplicaciones A^ρ son trivialmente lineales. Por otra parte A^ρ es el límite puntual de una sucesión equicontinua, por lo que será continua. Es claro además que A^ρ coincide con a^ρ en $\mathrm{lin}(x_n)_n$. Aplicando de nuevo el lema 1, obtendremos que $(A^\rho)_{\rho\in[0,1)}$ es un equicontinuo. Por tanto en $(A^\rho)_\rho \cup (I)$ coinciden las topologías de la convergencia simple en $\mathrm{lin}(x_n)_n$ y en E. Claramente en la primera $\lim_{\rho\to 1^-} A^\rho = I$ por lo que se tendrá la misma igualdad en la segunda. Esto demuestra que

$$\lim_{\rho\to 1^-} \lim_{n} \sum_{k=0}^{n} \rho^k f_k(x)x_k = x \qquad \forall x \in E.$$

La unicidad de este desarrollo se demuestra mediante el siguiente razonamiento: Si $0 = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n \quad (\rho)$, al ser f_n continua:

$$0 = f_k(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n f_k(x_n) \quad (\rho) = \alpha_k \qquad \forall k.$$

Esto concluye la demostración de que (x_n) es una ρ- base. Su equicontinuidad se ha obtenido en los razonamientos intermedios. c.q.d.

5.-EJEMPLOS:

En el siguiente diagrama las implicaciones que se indican han sido demostradas en los apartados precedentes o son de caracter trivial:

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, dash] & CB \arrow[r, dash] & \rho B \\
BS \arrow[u] \arrow[r] & CBS \arrow[u] \arrow[r, "*"] & \rho BS \arrow[u] \\
BE \arrow[u] \arrow[r] & CBE \arrow[u] \arrow[r, "*"] & \rho BE \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

En las implicaciones en que aparece el signo * se supone que si $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$ es la CB en cuestión y (a_n) es su s.c.f.a. las series $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n a_n(x)x_n$ son convergentes para todo x en E y ρ en $[0,1)$. En nuestro primer ejemplo se trata de demostrar que dicha condición no puede ser omitida.

Ejemplo 1.-

Ejemplo de una BE y por tanto CBE que no es ρB.

Sea α un número real, $0<\alpha<1$ y x la sucesión definida -- por $x_n=\alpha^n$, $n=0,1,2,\ldots$

Sea $H=\varphi+\mathrm{lin}(x)$, con la topología inducida por l^1, lo -cual le da una estructura de espacio normado. Los vectores canónicos de l^1, (e_n), forman una BS de H, por serlo de l^1 y tenerse que $(e_n)\subseteq H$. Probaremos que no son una ρB:

Si así ocurriera, en particular el elemento x admitiría -- una representación en la forma:

$$x=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n \quad (\rho).$$

La continuidad de la s.c.f.a. a la B (e_n), (f_n), nos permite asegurar que: $\alpha_n=f_n(x)=\alpha^n$.

Y por tanto se tendrá la igualdad $x=\lim_{\rho\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\alpha^n e_n$, que -en particular implica la convergencia de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(\rho\alpha)^n e_n$ en H, para $\rho\in[0,1)$. Pero la suma de dicha serie en l^1 es el elemento $x_\rho=(1,\alpha\rho,(\alpha\rho)^2,\ldots,(\alpha\rho)^n,\ldots)$, y para que este elemento esté en H es necesario que $x_\rho=f+\lambda x$, con $f\in\varphi$ y $\lambda\in\mathbb{K}$, por lo que a partir de un cierto n_0:

$$(\alpha\rho)^n=\lambda\alpha^n.$$

Es decir $\rho^n=\lambda \quad \forall n\geq n_0$.

Y esto sólo ocurre cuando $\rho=0$. De esta forma probamos que la serie sólo converge si $\rho=0$ y por tanto (e_n) no es una ρB de H. c.q.d.

Este ejemplo contiene en particular el prometido en el capítulo I de una matriz que es consistente con K pero que no lo es con cualquier espacio localmente convexo:

Consideremos la matriz infinita $T=(t_{nm})_{n,m=0,1\ldots}$ definida por $t_{nm}=\frac{1}{n+1}(\frac{n}{n+1})^m$. T cumple las condiciones (2), (3) y (4) del teorema I.1.1. de forma trivial. Consideremos la sucesión (S_n) de las sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n e_n$ del ejemplo 1, que es convergente en H. Si tal sucesión fuera T-convergente, deberían serlo las series $\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(\frac{n}{n+1})^j S_n$ y esto según el lema I.3.1. implicaria la convergencia de las series $\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{n}{n+1})^j\alpha^j e_j$ para todo n en contra de que como se vió, sólo converge para n = 0. Esto prueba que la condición (1) de dicho teorema no puede omitirse.

Con el objeto de separar los conceptos de ρBS y CBS damos el siguiente ejemplo, basado en las técnicas que en [3] se usan para el estudio del espacio sa:

Ejemplo 2.-

Ejemplo de una ρBE que no es CB.

En [3] se demuestra que en el espacio sa, espacio de las sucesiones escalares que son sumables en el sentido de Abel, dotado de la topología dada por la familia de seminormas: $(\|\cdot\|+q_j)_{j=1,2,\ldots}$ definidas por:

$$\|x\| = \sup_{0\leq\rho<1} \left|\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i x_i\right|$$
$$q_j(x) = \sup_i |x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i$$

la sucesión de los vectores canonícos (e_n) forman una ρB.

Probemos que (e_n) no forman una CB de sa:

Si esto ocurriera, todo elemento x de sa admitiría una representación en la forma $x = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e_n$ (c). De aquí que al ser sa un espacio de Fréchet, aplicando el corolario I.3.1. $x = \sum\alpha_n e_n$ (ρ) y de aquí que $\alpha_n = x_n$, es decir:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \quad (c).$$

La n-ésima suma parcial de Cesàro correspondiente a esta serie es $C_n = (x_0, \frac{n}{n+1}x_1, \ldots, \frac{1}{n+1}x_n, 0, \ldots)$ con lo cual la diferencia entre dos de ellas consecutivas será:

$$C_{n+1}-C_n = \left(0, \frac{1}{(n+2)(n+1)} x_1, \ldots, \frac{n}{(n+2)(n+1)} x_n, \right.$$
$$\left. \frac{n+1}{(n+2)(n+1)} x_{n+1}, 0, \ldots\right)$$

Además $(\| \ \| + q_j)(C_{n+1}-C_n) \geq \|C_{n+1}-C_n\|$

Probaremos que si $x_n = (-1)^n(n+1)$, $\|C_{n+1}-C_n\| > \frac{1}{2}$ para n impar lo cual contradice al hecho de ser (C_n) de Cauchy:

$$\|C_{n+1}-C_n\| = \sup_{0\leq\rho<1}\left|\sum_{k=1}^{n+1}\frac{k}{(n+1)(n+2)} x_k \rho^k\right| =$$
$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)} \sup_{0\leq\rho<1}\left|\sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(-1)^k \rho^k\right|$$

Tengamos en cuenta ahora que si $\rho \in (-1, +\infty)$:

$$\sum_{k=1}^{n+3}(-1)^k \rho^{k-1} = (-1)\frac{(-\rho)^{n+3}-1}{-\rho-1} = \frac{1}{1+\rho}(\rho^{n+3}-1) \text{ si n es impar}$$

Derivando dos veces esta expresión obtenemos:

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k (k+1)k\, \rho^k =$$

$$= \rho\left(\frac{2}{(1+\rho)^3}(\rho^{n+3}-1) - \frac{2}{(1+\rho)^2}(n+3)\rho^{n+2} + \frac{1}{1+\rho}(n+3)(n+2)\rho^{n+1}\right)$$

para $\rho \in (-1,+\infty)$.

Tenemos entonces una función continua en $[0,1]$. El supremo de su valor absoluto en $[0,1)$ será por tanto mayor o igual que el valor absoluto del valor que tome en $\rho = 1$ que es $-\frac{1}{2}(n+3)(n+1)$. De aquí que:

$$\| C_{n+1}-C_n \| = \frac{1}{(n+2)(n+1)} \sup_{0\leq\rho<1} \left| \sum_{k=1}^{n+1} k(k+1)(-1)^k \rho^k \right| \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\,\frac{(n+3)(n+1)}{(n+2)(n+1)} > \frac{1}{2}.$$

Tenemos entonces un ejemplo de un espacio de Fréchet que tiene una ρBS que no es CB. c.q.d.

En los dos siguientes ejemplos pondremos de manifiesto que la condición de continuidad de la s.c.f.a. no puede omitirse para poder afirmar que toda B (resp. CB) es una CB (resp. ρB).

Ejemplo 3.-

Ejemplo de una B que no es CB.

Sea E un espacio localmente convexo que posea una CB que no sea B (Por ejemplo, el espacio S_c de las sucesiones sumables en el sentido de Cesàro).

Sea (x_n) dicha CB, y (a_n) su s.c.f.a.

Consideremos el espacio $H = \{ x \in E: x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) x_n \}$

Como (x_n) no es una B de E, $H \neq E$ (No es posible que un elemento admita dos desarrollos por la regularidad del método de Cesàro). Consideremos entonces un elemento x_o en $E \setminus H$, y el espacio $F = \mathrm{lin}(H, x_o)$.

En F consideramos la sucesión: $y_1 = x_o$, $y_n = x_{n-1}$ $(n \geq 2)$.

Veamos que (y_n) es una B de F cuando en él consideramos la topología inducida por E:

Sea $y \in F$.

Por definición y será de la forma $y = \alpha x_o + h$, con $\alpha \in \mathbb{K}$ y $h \in H$

Por definición de H, $h = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ con $\alpha_n = a_n(h) \in \mathbb{K}$.

Sean $\beta_1 =$ y $\beta_n = \alpha_{n-1}$ $(n \geq 2)$.

Entonces $y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n$, con lo cual todo elemento de F, se puede desarrollar respecto a la sucesión (y_n). Este desarrollo es además único:

Si $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n = 0$, tenemos que $\beta_1 x_o = -\sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n+1} x_n = -h$.

Pero $h = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n+1} x_n$ implica $h = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{n+1} x_n$ (c) por la regularidad del método de convergencia de Cesàro, y de aquí que $\beta_{n+1} = a_n(h)$ y por tanto $h \in H$.

Así $\beta_1 x_o \in H$ y por tanto $\beta_1 = 0$, por lo que $h = 0$ y $\beta_{n+1} = a_n(0) = 0$. Esto demuestra que (y_n) es una B de F. Veamos ahora que (y_n) no es una CB de F. No podemos pretender demostrar desde luego que haya algún elemento no c-de~~sarrollable respecto a (y_n). Sin embargo~~ es trivial comprobar que x_o admite dos c-desarrollos:

$x_o = y_1$ y $x_o = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}(x_o) y_n$ (c) c.q.d.

Ejemplo 4.-

Ejemplo de una CB que no es ρB en un espacio donde se cumple la condición ¥ .

Consideremos un espacio de Fréchet que tenga una ρB que no sea CB y denotemosla por $(x_n)_{n=0,1,\ldots}$ (Por ejemplo sa). - Consideremos el subespacio H de E definido como

$H = \left\{x: \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)x_n = x \quad (c)\right\}$, donde (a_n) es la s.c.f.a. a la ρB (x_n).

Es evidente que H no es vacio pues contiene a $\mathrm{lin}(x_n)$. Además no es E, pues si todo elemento de E se puede desarrollar en la forma $x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)x_n$ (c) la única forma de que (x_n) no sea una B es que este desarrollo no sea único, y esto junto con el corolario I.3.2. nos dará que x admite dos representaciones en la forma $x = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x_n$ (ρ) lo cual contradice al hecho de ser (x_n) una ρB de E.

Sea pues $x \in E\setminus H$ y consideremos el subespacio $F = \mathrm{lin}(H, x_0)$ Consideremos en F la sucesión $y_0 = x$, $y_n = x_{n-1}$ $(n \geqslant 1)$ y veamos que constituye una CB de F:

Si $y \in F$, $y = \alpha x + h$ con $h \in H$. Si tomamos $\beta_0 = \alpha$ y $\beta_n = a_{n-1}(h)$ tendremos entonces que $y = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n y_n (c)$.

Por otra parte el desarrollo es único ya que $0 = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n y_n$ (c) implica que $-\alpha_0 x = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n y_n$ $(c) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{n+1}x_n$ (c); ahora bien: se demostró antes que el posible c-desarrollo de un elemento en la CB (x_n) es único y por tanto $\alpha_0 x \in H$, lo cual demuestra que $\alpha_0 = 0$ y por la misma razón $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = 0$.

Por último el hecho de que (y_n) no es una ρB de F se deduce de que x admite dos ρ-desarrollos:

$x = y_1$ y $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x)y_n \quad (\rho)$.

La primera igualdad es trivial. Para la segunda basta demostrar que las sumas de las series $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n a_{n-1}(x)y_n$ estan en F. Pero esto es trivial puesto que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n a_{n-1}(x)y_n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n+1} a_n(x)x_n \in H. \qquad \text{c.q.d.}$$

De la misma forma puede darse un ejemplo de una B que no es ρB. Omitimos su construcción por ser totalmente análoga a la del ejemplo 4. Si haremos uso, sin embargo de las mismas técnicas para dar un ejemplo de una B que no es WB.

<u>Ejemplo 5</u>.-

Ejemplo de una B que no es WB.

En [7, pg 224] Dubinsky y Retherford dan un ejemplo de una WBS que no es BS. Sea $(x_n)_{n=1,2,\ldots}$ dicha WB, y (a_n) su s.c.f.a. Sea $H = \{x \in E: \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n = x \quad (\mathcal{T})\}$. Es claro que $H \neq \emptyset$ pues $\mathrm{lin}(x_n)_n \subseteq H$ y que $H \subsetneq E$ ya que (x_n) no es B. Sea $x \in E \setminus H$ y $F = H \oplus \mathrm{lin}(x)$ con la topología inducida por E. Consideremos en F la sucesión: $y_1 = x$, $y_n = x_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$. (y_n) es una B de F ya que si $y \in F$, $y = \alpha x + h$, con $h \in H$. - De aquí que $y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n$ con $\beta_1 = \alpha$ y $\beta_n = a_{n-1}(h)$ $(n \geqslant 2)$, - siendo además este desarrollo único ya que si $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n$ $(\mathcal{T})$

se tendrá que $\beta_1 x = -\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n y_n$ $(\mathcal{T}) \in H$ (El desarrollo de un elemento de H es único debido a que (x_n) es una WB), y por tanto $\beta_1 = 0$ con lo cual $\sum_{n=2}^{\infty}\beta_n x_{n-1} = 0$ $(\sigma(E,E'))$ de donde $\beta_n = 0$ $(n \geq 2)$.

(y_n) no es una WB de F, ya que x admite dos representaciones: $x = y_1$ y $x = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}(x) y_n$ ((F,F')).

El primero de ellos es trivial y el segundo se debe a que $x = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1}(x) x_{n-1}$ $(\sigma(E,E'))$ y a que $\sigma(E,E')\big|_F = \sigma(F,F')$.

c.q.d.

Hemos citado ya un ejemplo de CBS que no es B. Daremos ahora otro ejemplo de esta misma situación en el que la CB en cuestión no es de Schauder; este ejemplo está sugerido por el análogo para bases que puede encontrarse en [15, pg 324].

Ejemplo 6.-

Ejemplo de una CB que no es de Schauder y que no es B.

En el espacio de Banach S_c se considera la sucesión (b_n) - definida por:

$$b_n = \begin{cases} e_1 - e_2 & \text{si } n = 1 \\ e_n - e_{n+1} - b_1 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

Se considera el subespacio E de S_c formado por aquellos -- elementos de S_c que admiten una representación en la forma $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n b_n$ (c) $(\alpha_n \in K)$. Veamos que (b_n) es una CB de E -- que no es de Schauder y que no es base:

(a) es una CB:

La existencia del c-desarrollo en la sucesión (b_n) de cualquier elemento de E sigue su propia definición.

Para obtener la unicidad de este, basta tener en cuenta que si $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n \quad (c) = \alpha_1 b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n (e_n - e_{n+1} - b_1)$, el hecho de ser las aplicaciones coordenadas π_k continuas nos da:

$$0 = \alpha_1\, \pi_1(b_1) - \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n\, \pi_1(b_1) = \alpha_1 - \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n \quad (c)$$

$$0 = -\alpha_1 + \alpha_2(\pi_2(e_2) - \pi_2(b_1)) = -\alpha_1 + 2\alpha_2$$

$$0 = \alpha_k - \alpha_{k-1} \qquad \text{si } k \geqslant 3$$

Con lo cual $(\alpha_k)_{k \geqslant 2}$ es una sucesión constante que además es sumable en el sentido de Cesàro, con lo cual ha de ser nula. Por tanto $\alpha_k = 0 \quad \forall k \geqslant 2$ y $\alpha_1 = 2\alpha_2 = 0$.

(b) (b_n) no es una CBS:

Los vectores $(e_{n+1} - e_1)_{n \in N}$ forman un acotado de E mientras que $e_{n+1} - e_1 = nb_1 + b_2 + \dots + b_n$.

(c) (b_n) no es una B:

Sea (α_n) una sucesión de escalares que sea sumable en el sentido de Cesàro. Veamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n$ es c-convergente: $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n = \alpha_1 b_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n (e_n - e_{n+1} - b_1)$. La serie $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n b_1$ es c-convergente por serlo $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n$. Las series $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n e_n$ y $\sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n e_{n+1}$ son c-convergentes por ser (e_n) una CB de S_c. Por tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n b_n$ es c-convergente.

Basta tomar entonces una sucesión (α_n) que sea c-sumable pero no sumable. Entonces $x^o = \sum \alpha_n b_n \in E$ y sin embargo x^o no admite un desarrollo en la forma $x^o = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n b_n$ ya que en este caso la regularidad del método de Cesàro nos daría $\beta_n = \alpha_n$, y la continuidad de Π_1 nos daría que la serie $\sum_{n=1} \alpha_n$ sería convergente lo cual es absurdo. c.q.d.

De la misma forma, empleando el espacio sa, puede darse un ejemplo de una ρB que no es de Schauder y no es CB.

Finalmente, para separar los conceptos de BE, CBE y ρBE, basta tener en cuenta las siguientes consideraciones:

Un K-espacio de sucesiones λ es un subespacio vectorial de ω, espacio de todas las sucesiones con valores en $\mathbb{K}$, con una topología compatible con la estructura vectorial de tal forma que las aplicaciones coordenadas $\Pi_k : \lambda \longrightarrow \mathbb{K}$ definidas por $\Pi_k(x) = x_k$ son continuas.

Es trivial que si λ y μ son dos K-espacios de sucesiones de tal forma que $\lambda \subseteq \mu$, la inclusión $\lambda \hookrightarrow \mu$ tiene gráfica cerrada.

Denotemos por S el espacio de las sucesiones de K que son sumables, con su topología usual y consideremos las inclusiones $S \hookrightarrow S_c \hookrightarrow sa$, que por ser S, S_c y sa K-espacios tendrán gráfica cerrada. Como quiera que los tres son espacios de Fréchet, aplicando el teorema de la gráfica cerrada, dichas inclusiones serán continuas. En particular los vectores canónocos (e_n) formarán una BS de S con la topología inducida por S_c y una CBS de S_c con la topología inducida por sa. Esto nos proporciona los dos siguientes ejemplos:

<u>Ejemplo 7</u>.-

Ejemplo de una BS que no es BE pero que es CBE.

En S con la topología inducida por S_c los vectores canónicos forman una BS que no puede ser BE pues sinó en virtud del teorema de caracterización para bases tendriamos que es una BE de S_c, lo cual como ya se ha advertido es imposible. Por otra parte como CBS sí es CBE, bastando para probar esta afirmación tener en cuenta la proposición 2.2., junto con el hecho de ser S_c un espacio de Banach.

c.q.d.

<u>Ejemplo 8</u>.-

Ejemplo de una CBS que no es CBE pero que es ρBE.

El razonamiento es idéntico al anterior tomando como espacio S_c con la topología inducida por sa.

CAPITULO III: SOBRE UN RESULTADO DE DE WILDE: EL PROBLEMA DE LA CONTINUIDAD.

1.- EL PROBLEMA DE LA CONTINUIDAD PARA C-BASES:

El problema que nos planteamos ahora es: Dada una c-base (no necesariamente de Schauder), ¿bajo qué condiciones podemos afirmar la continuidad de la s.c.f.a.? Como ya advertimos en la introducción, las soluciones dadas al problema correspondiente para bases, pasan por un teorema de gráfica cerrada. Los dos resultados obtenidos siguen la idea original de Newns y se apoyan en los teoremas de la gráfica cerrada de De Wilde y de Banach-Schauder respectivamente.

El primer resultado se dará en un contexto mas general que el de las c-bases:

Sea $E[\mathcal{T}]$ un espacio localmente convexo y F un subespacio vectorial de E. Supongamos que (F_n) es una sucesión de subespacios de E de tal forma que cualquier elemento x de F admite una (única) representación de la forma ------- $x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ (c), donde $f_n \in F_n$. Se dice entonces que (F_n) es — una c-descomposición de F.

Llamaremos c-descomposición débil a una c-descomposición para la topología débil de E, $\sigma(E,E')$.

Consideremos las aplicaciones:

$$\begin{aligned} \tau_n : F &\longrightarrow F_n \\ f &\longmapsto f_n \end{aligned}$$

Es obvio que las aplicaciones τ_n son lineales. En el caso de que dichas aplicaciones sean continuas, diremos que la c-descomposición es de Schauder.

En el siguiente teorema usaremos las técnicas de [5] para obtener la solución deseada al problema de la — continuidad para c-descomposiciones.

<u>Teorema 1</u>.-

Sea E un espacio ultrabornológico y F un espacio sucesionalmente completo que admite una red de tipo $\mathcal{C}$.

Sea $T:E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y continua. Supongamos que T(E) admite una c-descomposición débil en subespacios L_n sucesionalmente cerrados en F. Entonces:

(1) $\tau_n \circ T : E \longrightarrow F$ es continua para todo n.

(2) La sucesión $\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tau_j \circ T\right)_{n=1,2,\ldots}$ es equicontinua en $\mathcal{L}(E,F)$.

(3) $T = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{T}_i \circ T$ (c). La serie es c-convergente en la topología de la convergencia uniforme en los precompactos de E, cuando en F se toma la topología débil. Es decir, en $\mathcal{L}_c(E, F[\sigma(F F')])$.

Demostración:

Sea Q la familia de seminormas continuas de F. Sea $l^{\infty}(F)$ el espacio de sucesiones acotadas de F, que se puede dotar del sistema de seminormas $Q^{*} = (q^{*})_{q\in Q}$, definidas por:

$$q^{*}(f_n) = \sup_n (q(f_n)).$$

Como F es sucesionalmente completo y admite una red de tipo $\mathcal{C}$, $l^{\infty}(F)$ admite una red de tipo $\mathcal{C}$ (teorema 0.2.3.).

Sea $x \in E$. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n T(x)$ es $\sigma(F F')$-convergente en el sentido de Cesàro a T(x), con lo cual la sucesión de las sumas parciales de Cesàro de dicha serie:

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathcal{T}_j T(x)\right)_{n=1,2,\ldots}$$

es $\sigma(F F')$-convergente y por lo tanto acotada en F.

Podemos entonces definir la aplicación:

$$T': E \longrightarrow l^{\infty}(F)$$

$$x \longmapsto \left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \mathcal{T}_j T(x)\right)_{n=1,2,\ldots}$$

que evidentemente es una aplicación lineal.

Nuestro proximo objetivo será demostrar su continuidad. Para ello vamos a basarnos en el teorema de la gráfica cerrada de De Wilde.

Demostremos pues que T′ tiene una gráfica sucesionalmente cerrada:

Si $(x_i) \longrightarrow x$ en E y $(T'x_i) \longrightarrow (h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en $l^\infty(F)$, habremos de demostrar que $T'x = (h_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

a) Probaremos en primer lugar que (h_m) converge a Tx en la topología débil de F:

Sean $f\in F'$ y $\varepsilon>0$ y tengamos en cuenta que:

$$[1]\quad |f(Tx - h_m)| \leq |f(Tx - Tx_i)| + \left|f(Tx_i - \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tau_j T(x_i))\right| + \left|f(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tau_j T(x_i) - h_m)\right|$$

Al ser $f\in F'$, $|f|\in Q$ y del hecho de ser $T'x_i \longrightarrow (h_m)$, podemos deducir la existencia de un i_0 de forma que:

$$|f|^*((\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tau_j Tx_i - h_m)_{m\in\mathbb{N}}) \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ si } i\geq i_0$$

Es decir: $\left|f(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tau_j Tx_i - h_m)\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall i\geq i_0 \quad \forall m\in\mathbb{N}$

Por otra parte $x_i \longrightarrow x$ y T es continua por lo que $Tx_i \longrightarrow Tx$ en F y por tanto $Tx_i \longrightarrow Tx$ en la topología $\sigma(F,F')$. Esto nos permite escoger i_0 con la condición adicional de que $|f(Tx_i - Tx)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ si $i\geq i_0$

Las dos últimas desigualdades junto con [1] demuestran que:

$$|f(Tx - h_m)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \left|f(Tx_i - \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tau_j Tx_i)\right| \quad \forall i\geq i_0,\ \forall m\in\mathbb{N}$$

Tomemos entonces $i=i_0$. Sin mas que tener en cuenta la definición de τ_n, tenemos:

$$Tx_{i_0} = \lim_m \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tau_j Tx_{i_0} \quad \text{en la topología } \sigma(F,F').$$

Podemos tomar entonces un m_0 de forma que:

$$\left|f(Tx_{i_0} - \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\tau_j Tx_{i_0})\right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{si } m\geq m_0$$

Por lo que $|f(Tx - h_m)| \leq \varepsilon$ si $m \geq m_o$.

b) Veamos ya que $T'x = (h_m)$.

Del hecho de ser $T'x_i \longrightarrow (h_m)$ en $l^\infty(F)$, deducimos que dados $\varepsilon > 0$ y $q \in Q$, podemos encontrar un i_o de forma que:

$$q^*(T'x_i - (h_m)) \leq \varepsilon \qquad \text{si } i \geq i_o.$$

Es decir: $q(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_j Tx_i - h_m) \leq \varepsilon$ si $i \geq i_o$ y $m \in \mathbb{N}$.

En particular: $A_m^{(i)} = \frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \tau_j Tx_i \xrightarrow{i} h_m$ en F para $m \in \mathbb{N}$

Definamos $h_o = h_{-1} = 0$, y probemos que:

$mh_m - 2(m-1)h_{m-1} + (m-2)h_{m-2} \in L_m$.

Para m=1 tenemos que $A_1^{(i)} = \tau_1 Tx_i \xrightarrow{i} h_1$. Como $\tau_1 Tx_i \in L_1$ y L_1 es sucesionalmente cerrado, $h_1 \in L_1$.

Para m=2, al ser $A_2^{(i)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{2} \sum_{j=1}^{n} \tau_j Tx_i = \frac{1}{2}(2\tau_1 Tx_i + \tau_2 Tx_i)$ convergente a h_2, tendremos que:

$$2A_2^{(i)} - 2A_1^{(i)} = \tau_2 Tx_i \longrightarrow 2h_2 - 2h_1.$$

Y de la misma forma que antes $2h_2 - 2h_1 \in L_2$.

Si m>2 $A_m^{(i)} = \frac{1}{m}\left[2(m-1)A_{m-1}^{(i)} - (m-2)A_{m-2}^{(i)} + \tau_m Tx_i\right]$ converge a h_m, de donde $\tau_m Tx_i = mA_m^{(i)} - 2(m-1)A_{m-1}^{(i)} + (m-2)A_{m-2}^{(i)}$ convergerá a $mh_m - 2(m-1)h_{m-1} + (m-2)h_{m-2}$.

De nuevo el hecho de ser L_m sucesionalmente cerrado y ---- $\tau_m Tx_i \in L_m$ nos asegura que:

$$mh_m - 2(m-1)h_{m-1} + (m-2)h_{m-2} \in L_m.$$

Puede demostrarse fácilmente por inducción que la n-ésima suma parcial de Cesàro de la serie:

$$\sum (mh_m - 2(m-1)h_{m-1} + (m-2)h_{m-2})$$

es h_n. Si tenemos en cuenta lo demostrado en a) obtendremos

$$\sum_{m=1}^{\infty} (mh_m - 2(m-1)h_{m-1} + (m-2)h_{m-2}) = Tx \quad (c)$$

donde la convergencia es en la topología débil $\sigma(F\ F')$.
Ahora bien $\sum_{1}^{\infty} \tau_m Tx \quad (c) = Tx$ es la única c-descomposición débil de Tx con respecto a (L_n). De aquí que:

$$mh_m - 2(m-1)h_{m-1} + (m-2)h_{m-2} = \tau_m Tx.$$

Serán iguales por tanto las sumas parciales de Cesàro de las series $\sum (mh_m - 2(m-1)h_{m-1} + (m-2)h_{m-2})$ y $\sum \tau_m Tx$. Las de la primera han sido ya calculadas, y son h_n. Las de la segunda forman el término general de $T'x$. Tenemos por tanto que $T'x = (h_m)$.
Hemos probado pues que $T' : E \longrightarrow l^{\infty}(F)$ tiene gráfica sucesionalmente cerrada. El teorema de la gráfica cerrada de - De Wilde nos asegura entonces su continuidad.
Quiere decir esto que si $q \in Q$ podremos encontrar una seminorma continua p en E de forma que:

$$q^*(T'x) \leq p(x).$$

Es decir:

$$q\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tau_j T(x)\right) \leq p(x) \qquad \forall n \in N.$$

De donde trivialmente se concluye (2).

Para concluir (1) basta tener en cuenta las siguientes igualdades:

$$\tau_1 \circ T = \frac{1}{1} \sum_{m=1}^{1} \sum_{j=1}^{m} \tau_j \circ T$$

$$\tau_2 \circ T = 2\left(\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} \sum_{j=1}^{m} \tau_j \circ T\right) - 2\left(\frac{1}{1} \sum_{m=1}^{1} \sum_{j=1}^{m} \tau_j \circ T\right)$$

$$\tau_n \circ T = n\left(\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tau_j \circ T\right) - 2(n-1)\left(\frac{1}{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} \tau_j \circ T\right) +$$

$$+ (n-2)\left(\frac{1}{n-2} \sum_{m=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{m} \tau_j \circ T\right) \quad \text{si } n > 2.$$

Todas ellas de fácil comprobación y que expresan $\tau_n \circ T$ — como combinación lineal de aplicaciones continuas.

Para acabar, fijemonos en que la sucesión

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \tau_i \circ T \longrightarrow T \text{ en } \mathcal{L}_s(E, F[\sigma(F\, F')])$$

y que el conjunto $H = \left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \tau_i \circ T\right\}_{n=1,2,\dots}$ T es un equicontinuo en $\mathcal{L}(E,F)$.

Coinciden entonces en H, las topologías de la convergencia simple y de la convergencia uniforme en los precompactos – ([20], §39.4), de donde

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} \tau_i \circ T \longrightarrow T \text{ en } \mathcal{L}_c(E, F[\sigma(F\, F')])$$

que es lo que se afirmaba en (3). c.q.d.

<u>Corolario 1.-</u>

Si E es un espacio bornológico y sucesionalmente completo que admite una red de tipo $\mathcal{C}$, toda c-descomposición débil en subespacios sucesionalmente cerrados E_n es una c-descomposición de Schauder.

Demostración:

Al ser E bornológico y sucesionalmente completo es ultrabornológico. Apliquemos entonces el teorema con $E = F$ y $T = I$. Obtendremos entonces que τ_n es continua para todo n.

Veamos que la c-descomposición débil es una c-descomposición en la topología de E.

Es claro que si $x \in N = \text{lin}\,(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$ se tiene $\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n x = x$ (c) en la topología de E. Esto prueba que:

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \quad (c) \quad \text{en } \mathcal{L}(E) \text{ con la topología } \mathcal{T}_s(N).$$

Ahora bién N es $\sigma(E\,E')$-denso y por tanto denso en E. Por la conclusión (2) del teorema $H = (\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \tau_j)_{n=1,2,\dots} \cup \{I\}$ es un equicontinuo en E.

Coincidirán pues en H las topologías $\mathcal{T}_s(N)$ y $\mathcal{T}_s$ de donde concluimos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(x) = x \quad \text{si} \quad x \in E \qquad \text{c.q.d.}$$

Corolario 2.-

Sea E un espacio ultrabornológico y F sucesionalmente completo y admitiendo una red de tipo $\mathcal{C}$. Si F admite una WCB (e_n) y (a_n) es su s.c.f.a., y $T:E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal y continua, entonces $a_n:T:E \longrightarrow \mathbb{K}$ es continua para todo n.

Demostración:

Sea $F_n = \text{lin}\, e_n$. Es trivial que F_n es una c-descomposición débil de F con $\tau_n(x) = a_n(x)x_n$.

Aplicando el teorema 1, $\tau_n \circ T$ es continua.

Sea p una seminorma de F tal que $p(x_n) \neq 0$.

Tendremos entonces que:

$$\left| a_n(T(x)) \right| \leq \frac{1}{p(x_n)} \, p(\tau_n Tx)$$

y por tanto que $a_n \circ T$ es continua. c.q.d.

Corolario 3.-

Sea E un espacio bornológico sucesionalmente completo con una red de tipo ζ. Si E tiene una WCB (x_n), entonces (x_n) es una CBS.

Demostración:

Tomando E = F y T = I en el corolario 2 obtenemos que (x_n) es una WCB de Schauder.

Ahora bien E es ultrabornológico y por tanto tonelado. El teorema II.3.1. nos asegura que (x_n) es una CBS.

c.q.d.

Con respecto al problema que nos ocupa y saliendonos del contexto general de la memoria de los espacios localmente convexos, podemos dar un resultado para espacios no localmente convexos. En la prueba usaremos el teorema de la gráfica cerrada de Banach-Schauder y seguiremos tecnicas analogas a [16]

Teorema 2.-

Sea E un espacio vectorial topológico metrizable y completo. Supongamos que (x_n) es una CB de E. Entonces (x_n) es una CBE.

Demostración:

Sea $|\cdot|$ una F-norma que defina la topología de E.

Sean C_n los operadores de Cesàro correspondientes a la CB.

Se define $|x|^* = \sup_n |C_n(x)|$ para $x \in E$.

Probaremos en primer lugar que $|\cdot|^*: E \longrightarrow \mathbb{R}$ es una F-norma:

1) $|x|^* \geq 0$ (Es trivial).

2) $|x|^* = 0 \Rightarrow |C_n x| = 0 \quad \forall n \Rightarrow C_n x = 0 \quad \forall n \Rightarrow x = 0$.

3) Si $|\lambda| \leq 1 \quad |\lambda x|^* = \sup_n |\lambda C_n(x)| \leq \sup_n |C_n(x)| = |x|^*$

4) $|x + y|^* = \sup_n |C_n(x) + C_n(y)| \leq |x|^* + |y|^*$

5) $|x_m|^* \to 0 \Rightarrow |\lambda x_m|^* \to 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

Para probar esto tendremos en cuenta que $\lim_{|x| \to 0} |\lambda x| = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

Es decir: dado $\varepsilon > 0$ podremos encontrar un $\delta > 0$ de tal forma que $|\lambda x| < \varepsilon$ si $|x| < \delta$

Como $|x_m|^* \to 0$ podremos encontrar un m_o de forma que ----- $|C_n(x_m)| < \delta$ si $m \geq m_o$ y $n \in \mathbb{N}$.

Esto último implica:

$$|\lambda C_n(x_m)| < \varepsilon \quad \text{si } m \geq m_o \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

Es decir:

$$|\lambda x_m|^* < \varepsilon \qquad \text{si } m \geq m_o.$$

6) $\lambda_m \to 0 \Rightarrow |\lambda_m x|^* \to 0 \quad \forall x \in E$:

Sea $\varepsilon>0$. Sea U un entorno de 0, equilibrado de forma que:

$$|y| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para } y \in U.$$

Sea k_o de tal forma que:

$$C_k(x) - x \in U \quad \text{si } k \geqslant k_o.$$

Tomemos además un m_o de forma que verifique las tres condiciones siguientes:

1) $\lambda_m(C_k(x) - x) \in U \quad \forall m \geqslant m_o \quad \forall k < k_o.$

2) $|\lambda_m| \leq 1 \qquad$ si $m \geqslant m_o$

3) $|\lambda_m x| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad$ si $m \geqslant m_o.$

Tendremos entonces que:

$$|\lambda_m x|^* = \sup_k |\lambda_m C_k(x)| \leqslant \sup_k (|\lambda_m x| + |\lambda_m(C_k(x) - x)|) \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_m x| + \sup_k |\lambda_m(C_k(x) - x)|$$

Y si $m \geqslant m_o$:

$$|\lambda_m x|^* \leq \frac{\varepsilon}{2} + \sup_k |\lambda_m(C_k(x) - x)|$$

Si $k< k_o$ $\lambda_m(C_k(x) - x) \in U$ y por tanto $|\lambda_m(C_k(x) - x)| < \frac{\varepsilon}{2}$

Si $k \geqslant k_o$ $C_k(x) - x \in U$, lo cual unido a ser $\lambda_m \leq 1$ y U equilibrado nos da la misma conclusión.

Es decir $|\lambda_m x|^* \leq \varepsilon \quad \forall m \geqslant m_o.$

Podemos entonces considerar en E, aparte de su topología original $\mathcal{T}$, la que se deriva de $|\cdot|^*$, que denotaremos por $\mathcal{T}^*$. Además el hecho de ser $|x| \leq |x|^*$ nos permite asegurar que $\mathcal{T}^*$ es mas fina que $\mathcal{T}$.

Si probasemos que $E[\mathcal{T}^*]$ es completo, el teorema de

Banach-Schauder nos dará que $\mathcal{T}=\mathcal{T}^*$. Pero $(C_n)_{n=1,2,\ldots}$ es trivialmente equicontinuo para $\mathcal{T}^*$. Así lo será tambien para $\mathcal{T}$ y el teorema estará demostrado.

Sólo nos queda pues demostrar que $E[\mathcal{T}^*]$ es completo:

La igualdad $a_n(x)x_n = nC_n(x) - 2(n-1)C_{n-1}(x) - (n-2)C_{n-2}(x)$ (Se toman $C_0(x) = C_{-1}(x) = 0$) es de fácil comprobación.

A partir de ella podemos concluir que:

$$|a_n(x)x_n| \leq n|C_n(x)| + 2(n-1)|C_{n-1}(x)| + (n-2)|C_{n-2}(x)| \leq$$

$$\leq (4n-3)|x|^*$$

Y de aquí que $|a_n(x)x_n| \leq (4n-3)|x|^*$

Es decir la aplicación $x \longmapsto a_n(x)x_n$ es continua como aplicación de $E[\mathcal{T}^*]$ en $E[\mathcal{T}]$

Observemos sin embargo que su imagen es de dimensión 1 y por tanto la topología que induce $\mathcal{T}$ será normable. Sea $\|\ \|_n$ una norma que defina dicha topología. Al ser la aplicación continua tendremos que $\|a_n(x)x_n\|_n \leq k_n|x|^*$ para algun $k_n > 0$

Y de aquí que:

$$|a_n(x)| \leq \frac{k_n}{\|x_n\|_n} |x|^*$$

En definitiva hemos probado que a_n es $\mathcal{T}^*$-continua.

Consideremos entonces una sucesión (y_n) $\mathcal{T}^*$-de Cauchy.

Como a_n es $\mathcal{T}^*$-continua $(a_n(y_r))_{r=1,2,\ldots}$ será de Cauchy en $\mathbb{K}$ y definirá un elemento $t_n = \lim_r a_n(y_r) \in \mathbb{K}$.

Probaremos que (t_n) son los coeficientes del desarrollo de un cierto elemento "y" en la CB (x_n). Para ello consideremos las siguientes sucesiones $B_i = \sum_{j=1}^{i} t_j x_j \quad A_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} B_i$.

Demostremos que (A_k) es convergente en $E[\mathcal{T}]$. Podemos para ello demostrar tan sólo que es de Cauchy:

Sea $\varepsilon > 0$.

Por ser (y_n) $\mathcal{T}^*$-de Cauchy podremos encontrar un r_0 tal que:

$$|y_r - y_s|^* \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad s > r \geq r_0$$

Por la definición de $|\ |^*$ y la linealidad de C_k:

[1] $|C_k(y_r) - C_k(y_s)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall k \quad y \quad s > r \geq r_0$

De donde

[2] $|C_{k_1}(y_r) - C_{k_1}(y_s) - C_{k_2}(y_r) - C_{k_2}(y_s)| \leq \varepsilon \ \forall k_1, \forall k_2, \ s > r \geq r_0$

Ahora bien $a_i(y_s) \xrightarrow{s} t_i$ y $C_k(y_s) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{j} a_i(y_s) x_i$

lo cual junto con que $\mathcal{T}$ es una topología compatible con la estructura de espacio vectorial, dará:

$$C_k(y_s) \xrightarrow{s} A_k \quad \text{en} \quad \mathcal{T}$$

Y tomando limites respecto a s en [2] tendremos:

$$|C_{k_1}(y_r) - C_{k_2}(y_r) - A_{k_1} + A_{k_2}| \leq \varepsilon \quad \forall k_1, \quad \forall k_2, \quad r \geq r_0.$$

Pero $(C_k(y_{r_0}))_k$ es convergente y por tanto de Cauchy, por lo que podremos encontrar un k_0 de forma que:

$$|C_{k_1}(y_{r_0}) - C_{k_2}(y_{r_0})| \leq \varepsilon \qquad \text{si } k_1 > k_2 > k_0$$

Las dos últimas desigualdades dan entonces:

$$|A_{k_1} - A_{k_2}| \leq 2\varepsilon \qquad \text{si } k_1 > k_2 > k_0$$

Es decir (A_k) es $\mathcal{T}$-de Cauchy y por tanto $\mathcal{T}$-convergente a un cierto elemento y de E. Esto se puede escribir de la siguiente forma: $y = \sum_{i=1}^{\infty} t_i x_i$ (c).

La unicidad del desarrollo prueba que $a_n(y) = t_n$.

Probaremos que y es el τ^*-límite de (y_n). Para ello nos basaremos en la desigualdad [1]:

$$\left| C_k(y_r) - C_k(y_s) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k, \quad s > r \geq r_o$$

Al igual que antes podemos tomar límites en s para obtener

$$\left| C_k(y_r) - A_k \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k, \quad r \geq r_o$$

Pero $A_k = C_k(y)$ de donde:

$$\left| C_k(y_r - y) \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k, \quad r \geq r_o$$

y de aquí $\left| y_r - y \right|^* \leq \frac{\varepsilon}{2}$ si $r \geq r_o$. c.q.d.

2.-EL PROBLEMA DE LA CONTINUIDAD PARA ρ-BASES:

La prueba del teorema de continuidad para ρ-bases, seguirá la idea de De Wilde [5], como en el caso de las c-bases si bien precisaremos de algunos resultados previos.

Comenzaremos definiendo el espacio bs(E,ρ), dados un espacio localmente convexo E y $\rho \in [0,1)$: bs(E,ρ) será el espacio de aquellas sucesiones de E, tales que la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{n=0} \rho^n x_n$ está acotada en E.

Definimos tambien el espacio $bs_A(E) = \bigcap_{\rho \in [0,1)} bs(E,)$.

Dotaremos a bs(E,ρ) del sistema de seminormas $Q = \left(q_\rho^* \right)_{q \in Q}$ (Q es una familia de seminormas que defina la topología de E), definidas por: $q_\rho^*((x_n)) = \sup_m q(\sum_{n=0}^{m} \rho^n x_n)$.

Probaremos el siguiente lema:

Lema 1.-

Sea $\rho \in (0,1)$. $bs(E,\rho)$ es isomorfo a $l^\infty(E)$.

Demostración:

Consideremos la aplicación:

$$T: bs(E,\rho) \longrightarrow l^\infty(E)$$
$$(x_n)_n \longmapsto (\sum_{i=0}^{n} \rho^i x_i)_n$$

Claramente T está bien definida.

El sistema de seminormas de $l^\infty(E)$ viene dado por:

$$q^*((y_n)) = \sup_n q(y_n) \qquad (q \in Q).$$

Con lo cual $q^*(T(x_n)) = \sup_m (q(\sum_{n=0}^{m} \rho^n x_n)) = q^*(x_n)$ (1)

Esto demuestra en primer lugar que la aplicación considerada es continua. Además si $T(x_n) = 0$, obtendremos que — $q^*(T(x_n)) = 0$ para $q \in Q$ y por tanto que $q_\rho^*(x_n) = 0$ $\forall q \in Q$. El hecho de ser $bs(E,\rho)$ separado nos dará entonces que — $(x_n) = 0$ y por tanto la inyectividad de T.

Finalmente si $(y_n) \in l^\infty(E)$ es sencillo comprobar que la sucesión (x_n) definida por $x_o = y_o$, $x_n = \frac{1}{n}(y_n - y_{n-1})$ está — en $bs(E,\rho)$ y que se transforma en (y_n). Esto prueba que T es sobre. La continuidad de T^{-1} se obtiene trivialmente de (1). c.q.d.

Corolario 1.-

Si E es un espacio sucesionalmente completo con una red de tipo $\mathcal{C}$ y $\rho\in(0,1)$, bs(E, ρ) posee una red de tipo $\mathcal{C}$.

Demostración:

$l^{\infty}(E)$ posee una red de tipo $\mathcal{C}$ (Teorema 0.2.3.) y es isomorfo a bs(E, ρ). c.q.d.

Nos ocuparemos a continuación de las relaciones existentes entre bs(E, ρ_1) y bs(E, ρ_2) segun los valores de ρ_1 y ρ_2:

Proposición 1.-

Sean ρ_1, $\rho_2 \in (0,1)$, $\rho_1 < \rho_2$. Entonces:

(1) bs(E, ρ_2) $\subseteq$ bs(E, ρ_1).

(2) Dicha inclusión es continua. Es más si $q \in Q$:

$$q^*_{\rho_1}(x_n) \leq \frac{2\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\, q^*_{\rho_2}(x_n), \text{ para } (x_n)\in bs(E,\rho_2)$$

Demostración:

(1) Si $(x_n)\in bs(E,\rho_2)$, la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}\rho^n x_n$ es acotada, siendolo por tanto también la sucesión $(\rho_2^n x_n)$ Por tanto dada $q\in Q$, podremos encontrar una constante M_q de forma que:

$$q(\rho^n x_n)\leq M_q \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Tomemos $\alpha=\frac{\rho_1}{\rho_2}\in(0,1)$ y evaluemos $q(\sum_{n=0}^{m}\rho_1^n x_n)$:

$$q(\sum_{n=0}^{m}\rho_1^n x_n) = q(\sum_{n=0}^{m}\alpha^n\rho_2^n x_n)\leq\sum_{n=0}^{m}\alpha^n q(\rho_2^n x_n)\leq M_q\sum_{n=0}^{m}\alpha^n\leq$$

$$\leq \frac{M_q}{1-\alpha} = M'_q \qquad \forall m \in \mathbb{N}.$$

(2) Para el mismo valor de α tomado en 1 se tiene que:

$$q^*_{\rho_1}(x_n) = \sup_m q\left(\sum_{n=0}^{m} \rho_1^n x_n\right) = \sup_m q\left(\sum_{n=0}^{m} \alpha^n \rho_2^n x_n\right) \leq$$

$$\leq \sup_m \sum_{n=0}^{m} \alpha^n \sup_k q(\rho_2^k x_k).$$

Pero $\rho_2^n x_n = \sum_{k=0}^{h} \rho_2^k x_k - \sum_{k=0}^{n-1} \rho_2^k x_k$ de donde $\sup_n q(\rho_2^n x_n) \leq$ $2q^*_{\rho_2}(x_n)$ y de esta forma:

$$q^*_{\rho_1}(x_n) \leq 2\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n q^*_{\rho_2}(x_k) = \frac{2}{1-\alpha}\, q^*_{\rho_2}(x_n) = \frac{2\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\, q^*_{\rho_2}(x_n).$$

c.q.d:

Dotaremos ahora al espacio $bs_A(E) = \bigcap_{\rho\in(0,1)} bs(E,\rho)$ de la topología límite proyectivo de los espacios $bs(E\rho)$:

$$bs_A(E) \xrightarrow{i_\rho} bs(E\rho).$$

Nuestro proximo objetivo será demostrar que este límite proyectivo puede expresarse como otro numerable:

<u>Teorema 1</u>.-

Sea (ρ_n) una sucesión de números reales entre 0 y 1, de forma que 1 sea un punto adherente a ella. Entonces $bs_A(E)$ es el límite proyectivo de la sucesión de espacios $(bs(E,\rho_n))_n$.

<u>Demostración</u>:

a) Igualdad conjuntista:

Es evidente que $\bigcap_{\rho\in(0,1)} bs(E\rho) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} bs(E,\rho_n)$

Por otra parte si $\rho\in(0,1)$ podremos encontrar un n de forma que $\rho<\rho_n<1$ y por la proposición 1 $bs(E,\rho_n)\subseteq bs(E,\rho)$, de donde $\bigcap_{n=1}^{\infty} bs(E,\rho_n)\subseteq bs(E,\rho)$ para $\rho\in(0,1)$ con lo cual $\bigcap_{n=1}^{\infty} bs(E,\rho_n)\subseteq \bigcap_{\rho\in(0,1)} bs(E,\rho)$.

b) Igualdad topológica:

Representemos por $bs_A(E)_N$ a $bs_A(E)$ con la topología límite proyectivo de $(bs(E,\rho_n))_n$. Esta topología es obviamente menos fina que la topología original. La prueba concluirá por tanto si probasemos que $i: bs_A(E)_N \longrightarrow bs_A(E)$ es continua o lo que es lo mismo que $i_\rho: bs_A(E)_N \hookrightarrow bs(E,\rho)$ es continua para $\rho\in(0,1)$.

Ahora bién si $0<\rho<1$, podemos encontrar un natural n de forma que $\rho<\rho_n$. Según la proposición 1

$$q^*_\rho((x_n))\leq \frac{2\rho_n}{\rho_n-\rho}\, q^*_{\rho_n}((x_n)) \qquad \forall q\in Q,\quad \forall (x_n)\in bs_A(E).$$

c.q.d.

Corolario 2.-

Si E es un espacio sucesionalmente completo con una red de tipo $\mathcal{C}$, $bs_A(E)$ posee una red de tipo $\mathcal{C}$.

Demostración:

Puede ser expresado como el límite proyectivo de una sucesión de espacios con redes de tipo $\mathcal{C}$, con lo cual basta aplicar el teorema 0.2.2. c.q.d.

La demostración del teorema de continuidad para ρ-bases se obtendrá de nuevo con un poco mas de generalidad: Concretamente para ρ-descomposiciones.

Dado un espacio localmente convexo E y un subespacio F de E, diremos que la sucesión $(F_n)_{n=0,1,\ldots}$ de subespacios de E es una ρ-descomposición de F si cualquier elemento x en F admite una (única) representación en la forma:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad (\rho), \text{ con } f_n \in F_n.$$

Si las aplicaciones $\tau_n : F \longrightarrow F_n$ definidas por $\tau_n(x) = f_n$ son continuas diremos que la ρ-descomposicion es de Schauder.

Una ρ-descomposición débil es una ρ-descomposición para la topología débil ($\sigma(E,E')$).

Teorema 2.-

Sea E un espacio ultrabornológico y F un espacio sucesionalmente completo con una red de tipo $\mathcal{C}$.

Sea $T:E \longrightarrow F$ una aplicación lineal y continua y supongamos que su rango T(E) admite una ρ-descomposición débil en subespacios sucesionalmente cerrados $(F_m)_{m=0,1\ldots}$ de F.

Entonces:

(1) $\tau_n \circ T:E \longrightarrow F$ es continua (n=0,1...).

(2) $(\sum_{n=0}^{m} \rho^n \tau_n \circ T)_m$ es equicontinuo en $\mathcal{L}(E,F)$ para cualquier $\rho \in [0,1)$.

(3) $T = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n \circ T \quad (\rho)$. La serie es convergente en $\mathcal{L}_c(E,F[\sigma(F,F')])$.

Nota: $\mathcal{L}_c(E,F[\sigma(F,F')])$ denota el espacio de las aplicaciones lineales y continuas de E en $F[\sigma(F,F')]$ con la topología de la convergencia uniforme en los precompactos de E.

Demostración:

A lo largo de toda la demostración Q denotará el conjunto de todas las seminormas continuas de F.

Sea $x \in E$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n Tx$ es debilmente ρ-convergente a Tx. Serán pues convergentes en la topología débil las series $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \tau_n Tx$ y por tanto sus sumas parciales estarán acotadas. Veamos que además el conjunto $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \tau_n Tx\right)_{\rho \in [0,1)}$ es acotado:

Sea f una forma lineal y continua sobre F. El hecho de ser $\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n Tx = Tx \quad (\rho)(\sigma(F,F'))$, asegura que $\left|f\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \tau_n Tx\right)\right| \leq$ $\leq 1 + |f(Tx)|$ siempre que ρ sea mayor o igual que un cierto ρ_0.

Sea $\rho_1 = \frac{1+\rho_0}{2}$, que verifica $\rho_0 < \rho_1 < 1$. Entonces:

$$\left|f\left(\sum_{n=0}^{m} \rho^n \tau_n Tx\right)\right| \leq \sum_{n=0}^{m} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n \left|f(\rho_1^n \tau_n Tx)\right| \leq \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho} \sup_n \left|f(\rho_1^n \tau_n Tx)\right| \leq$$
$$\leq \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_0} \sup_n \left|f(\rho_1^n \tau_n Tx)\right|$$

Observemos que el supremo existe pues $\sum \rho_1^n \tau_n Tx$ es $\sigma(F,F')$--convergente. Además sólo depende de ρ_1 y x. Sin más que tomar límites respecto a m, obtendremos que

$$\left|f\left(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \tau_n Tx\right)\right| \leq M_{f,x} \quad \forall \rho \in [0,1)$$

Siendo $M_{f,x}=\max\left[1+|f(Tx)|\ ,\ \frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_0}\sup\left|f(\rho_1^n\tau_n Tx)\right|\right]$

Esto demuestra que $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\tau_n Tx\right)_{\rho\in[0,1)}$ es débil acotado y por — tanto acotado.

Podemos entonces definir la aplicación:

$$T':E\longrightarrow bs_A(F)\times l^\infty([0,1),F)$$

$$x\longmapsto((\tau_n Tx)_n,\ \varphi)$$

Donde $\varphi(\rho)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\tau_n Tx.$

Nuestro objetivo es probar que T' es continua. Para ello - tendremos en cuenta que tanto $bs_A(F)$ como $l^\infty([0,1),F)$ poseen una red de tipo $\mathcal{C}$; El primero por el corolario 2 y - el segundo por el teorema 0.2.3. Su producto tendrá tambien una red de tipo $\mathcal{C}$. Al ser E ultrabornológico, bastará demostrar que T' tiene una gráfica sucesionalmente cerrada - para obtener mediante el teorema de la gráfica cerrada de De Wilde que T' es continua.

Supongamos pues que: $x_n\longrightarrow x$ en E, $T'x_n\longrightarrow((h_m)_m,\varphi_0)$.

Se trata de demostrar que $T'x=((h_n),\varphi)$, es decir $\tau_m Tx=h_m$, y $\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\tau_n Tx=\varphi_0(\rho)$.

Veamos en primer lugar que $\varphi_0(\rho)=\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i h_i\quad(\sigma(F,F'))\ \forall\rho\in[0,1)$

Sea $f\in F'$ y tengamos en cuenta la siguiente cadena de desigualdades:

$$f(\varphi_0(\rho)-\sum_{i=0}^{k}\rho^i h_i)\Big|\leq\Big|f(\varphi_0(\rho)-\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\tau_i Tx_n)\Big|+$$

$$+\Big|f(\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\tau_i Tx_n-\sum_{i=0}^{k}\rho^i\tau_i Tx_n)\Big|+\Big|f(\sum_{i=0}^{k}\rho^i\tau_i Tx_n-\sum_{i=0}^{k}\rho^i h_i)\Big|$$

Sea $\varepsilon>0$. Al ser la sucesión $((\sum_{i=0}^{\infty}\rho^{i}\tau_{i}Tx_{n})_{\rho\in[0,1)})_{n}$ de $l^{\infty}([0,1),F)$ convergente a φ_{0}, y $((\tau_{m}Tx_{n})_{m})_{n}$ de $bs_{A}(F)$ convergente a $(h_{m})_{m}$ podemos encontrar un n_{0} que dependerá sólo de ρ de tal forma que:

$$\left|f(\varphi_{0}(\rho)-\sum_{i=0}^{\infty}\rho^{i}\tau_{i}Tx_{n})\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad \forall n\geq n_{0}\quad \forall\rho\in[0,1)$$

$$\left|f(\sum_{i=0}^{k}\rho^{i}\tau_{i}Tx_{n}-\sum_{i=0}^{k}\rho^{i}h_{i})\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad \forall n\geq n_{0}\quad \forall k\in\mathbb{N}.$$

Con lo cual:

$$\left|f(\varphi_{0}(\rho)-\sum_{i=0}^{k}\rho^{i}h_{i})\right|<\frac{2\varepsilon}{3}+\left|f(\sum_{i=k+1}^{\infty}\rho^{i}\tau_{i}Tx_{n})\right|\quad \forall n\geq n_{0}\quad \forall k\in\mathbb{N}$$

Basta ahora tener en cuenta que $\sum_{i=k+1}^{\infty}\rho^{i}\tau_{i}Tx_{n}$ es el resto de una serie débilmente convergente. Por ello si fijamos $n\geq n_{0}$ podremos encontrar un k_{0} de tal forma que $\left|f(\sum_{i=k+1}^{\infty}\rho^{i}\tau_{i}Tx_{n})\right|<\frac{\varepsilon}{3}$ si $k\geq k_{0}$, para obtener entonces que $\left|f(\varphi_{0}(\rho)-\sum_{i=0}^{k}\rho^{i}h_{i})\right|<\varepsilon$ si $k\geq k_{0}$.

Por otra parte $\lim_{\rho\to 1^{-}}\varphi_{0}(\rho)=Tx$ $(\sigma(F,F'))$:

$$\left|f(\varphi_{0}(\rho)-Tx)\right|\leq\left|f(\varphi_{0}(\rho)-\sum_{i=0}^{\infty}\rho^{i}\tau_{i}Tx_{n})\right|+$$
$$+\left|f(\sum_{i=0}^{\infty}\rho^{i}\tau_{i}Tx_{n}-Tx_{n})\right|+\left|f(Tx-Tx_{n})\right|$$

Tenemos en cuenta ahora que $x_{n}\longrightarrow x$ y que T es continua, por lo cual $Tx_{n}\longrightarrow Tx$ en F; además al ser la sucesión $((\sum_{i=0}^{\infty}\rho^{i}\tau_{i}Tx_{n})_{\rho})_{n}$ convergente a $\varphi_{0}(\rho)$ en $l^{\infty}([0,1),F)$, podremos encontrar un n_{0} de tal forma que:

$$\left|f(\varphi_{0}(\rho)-\sum_{i=0}^{\infty}\rho^{i}\tau_{i}Tx_{n})\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad \forall n\geq n_{0}\quad \forall\rho\in[0,1)$$

$$\left|f(Tx-Tx_{n})\right|<\frac{\varepsilon}{3}\quad \forall n\geq n_{0}$$

Con lo cual:

$$|f(\varphi_0(\rho) - Tx)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + |f(\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\tau_i Tx_n - Tx_n)| \ \forall n \geq n_0 \quad \forall \rho \in [0,1)$$

Ahora tenemos en cuenta que (τ_i) corresponde a la ρ-descomposición débil (F_i) por lo que $\lim_{\rho\to 1^-} \sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\tau_i Tx_n = Tx_n$. ---

Basta entonces fijar $n \geq n_0$ para encontrar un ρ_0 de tal forma que si $\rho > \rho_0$ $|f(\sum_{i=0}^{\infty}\rho^i\tau_i Tx_n - Tx_n)| < \frac{\varepsilon}{3}$ y por tanto que -

$|f(\varphi_0(\rho) - Tx)| < \varepsilon$

Hemos probado entonces que:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m = Tx \quad (\rho) \quad (\sigma(F,F')).$$

Veamos ahora que $h_m \in F_m$.

Para ello partiremos de que $((\tau_i Tx_n)_i)_n \longrightarrow (h_i)$ en $bs_A(F)$,

por lo que dados $q \in Q$, $\rho \in [0,1)$ y $\varepsilon > 0$ podremos encontrar un n_0 de forma que $q_\rho^*((\tau_i Tx_n - h_i)_i) \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$, o lo que es - lo mismo:

$$q(\sum_{k=0}^{m}\rho^k\tau_k Tx_n - \sum_{k=0}^{m}\rho^k h_k) \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0 \qquad \forall m.$$

Si escribimos $A_{m,n}^{\rho} = \sum_{k=0}^{m}\rho^k\tau_k Tx_n$, esta desigualdad nos da:

$$\lim_n A_{m,n}^{\rho} = \sum_{k=0}^{m}\rho^k h_k$$

De aquí que: $\lim_n \tau_m Tx_n = \lim_n \frac{1}{\rho^m}(A_{m,n}^{\rho} - A_{m-1,n}^{\rho}) = h_m$.

Pero $\tau_m Tx_n \in F_m$ que es sucesionalmente cerrado. De esta forma $h_m \in F_m$.

Tenemos entonces dos ρ-descomposiciones débiles de Tx: -- $\sum h_m$ y $\sum \tau_m Tx$. Es claro entonces que $\tau_m Tx = h_m$ y que

$$\varphi_0(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n h_n = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\tau_n Tx.$$

Queda pues demostrado que T' es continua. Esto significa que: a) La aplicación $x \in E \longmapsto (\tau_n Tx)_n \in bs_A(F)$ es continua por lo que dados $q \in Q$ y $\rho \in [0,1)$, existirá una seminorma continua p en E de forma que $q^*_\rho((\tau_n Tx)_n) \leq p(x)$, es decir

$$\sup_m q(\sum_{k=0}^{m} \rho^k \tau_k Tx) \leq p(x)$$

que es lo mismo que afirmar que $(\sum_{k=0}^{m} \rho^k \tau_k \circ T)_{m=0,1,\ldots}$ es un equicontinuo.

b) La aplicación $x \in E \longmapsto (\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \tau_n x)_{\rho \in [0,1)} \in l^\infty([0,1),E)$ es continua por lo que dada $q \in Q$ puedo encontrar una seminorma continua de E, p, tal que:

$$q^*((\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \tau_n Tx)_{\rho \in [0,1)}) \leq p(x)$$

O lo que es igual: $\sup (q(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \tau_n Tx)) \leq p(x)$, es decir, el conjunto $(\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \tau_k \circ T)_{\rho \in [0,1)}$ es equicontinuo.

Con esto queda demostrado (2). (1) es trivial a partir de (2) y de la igualdad $\tau_n \circ T = \frac{1}{\rho^n}(\sum_{k=0}^{n} \rho^k \tau_k \circ T - \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \tau_k T)$.

Para demostrar (3) solo hay que tener en cuenta que $(\sum_{k=0}^{m} \rho^k \tau_k \circ T)_m$ es un equicontinuo y por tanto $H_\rho = (\sum_{k=0}^{m} \rho^k \tau_k \circ T)_m \cup (\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \tau_k \circ T)$ tambien lo será. Además $\lim_m \sum_{k=0}^{m} \rho^k \tau_k \circ T = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \tau_k \circ T$ en la topología de la convergencia simple en E ($\alpha_s(E, F[\sigma(F,F')])$). Al ser E tonelado dicha topología y la de la convergencia uniforme en los precompactos coinciden en H. Es decir $\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \tau_k \circ T$ converge en la topología de la convergencia uniforme en los precompactos de E.

El mismo razonamiento aplicado al conjunto $H=(\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\tau_k\circ T)U(T)$ da el resultado enunciado en (3).

c.q.d.

Corolario 3.-

Si E es un espacio bornológico y sucesionalmente completo que admite una red de tipo $\mathcal{C}$, toda ρ-descomposición débil en subespacios sucesionalmente cerrados E_n es una ρ-descomposición de Schauder.

Demostración:

E es bornológico y sucesionalmente completo. Por tanto es ultrabornológico. Apliquemos el teorema con E = F y T = I y obtendremos que τ_n es continua.

Solo queda ver que (E_n) es una ρ-descomposición en la topología de E: Es obvio que $\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n x = x$ (ρ) en la topología $\mathcal{C}$ de E si $x \in \mathrm{lin}(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n)$.

Pero $N = \mathrm{lin}(\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n)$ es total en E, y por tanto en los equicontinuos de $\mathcal{L}(E)$ coinciden las topologías de la convergencia de N y E. Además en la primera $\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n = I$ (ρ). Basta tener en cuenta entonces que los conjuntos:

$$H_\rho = (\sum_{n=0}^{m}\rho^n\tau_n)_{m=0,1,\ldots} U(\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\tau_n) \quad \text{y}$$

$$H = (\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n\tau_n)_{\rho\in[0,1)} U(I)$$

son equicontinuos para demostrar que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\tau_n x = x \quad (\rho) \qquad \forall x \in E.$$

La unicidad del desarrollo puede demostrarse fácilmente —

teniendo en cuenta que si $0 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \quad (\rho)$ con $f_n \in E_n$

$$0 = \tau_m(0) = \sum_{n=0}^{\infty} {}_m(f_n) \quad (\rho) = f_m \quad \forall m=0,1,\dots$$

c.q.d.

Corolario 4.-

Sea E un espacio ultrabornológico y F sucesionalmente completo con una red de tipo $\mathcal{C}$. Si (x_n) es una $W\rho B$ de F, (a_n) es la s.c.f.a. y $T:E \longrightarrow F$ es lineal y continua, entonces $a_n \circ T:E \longrightarrow \mathbb{K}$ es continua para todo n en N.

Demostración:

$F_n = \mathrm{lin}(x_n)$ es sucesionalmente cerrado por ser de dimension finita. $(F_n)_{n=0,1,\dots}$ es una ρ-descomposición débil de F con $\tau_n(x) = a_n(x)x_n$.

El teorema nos afirma entonces que $\tau_n \circ T$ es continua. Si además tenemos en cuenta que: $|a_n \circ T(x)| \leq \frac{1}{p(x_n)} p(\tau_n \circ T(x))$

para toda seminorma de F tal que $p(x_n) \neq 0$ obtendremos la continuidad de $a_n \circ T$. c.q.d.

Corolario 5.-

Sea E un espacio bornológico y sucesionalmente completo con una red de tipo $\mathcal{C}$. Si (x_n) es una $W\rho B$ de E, entonces es una ρBS.

Demostración:

Tomando F = E y T = I en el corolario anterior obtenemos que (x_n) es una $W\rho BS$ y por el teorema de la ρ-base débil una ρBS.

CAPITULO IV : PRODUCTOS DE ESPACIOS CON C-BASE

1.- PRODUCTOS FINITOS:

El objetivo de este capítulo es establecer los resultados de estabilidad de los espacios dotados con una CB frente a los productos topológicos. El caso finito puede abordarse directamente:

Proposición 1.-

Sea (x_n) una CB del espacio localmente convexo E, e (y_n) una CB de F. La sucesión

$$z_n = \begin{cases} (x_k, 0) & \text{si } n=2k-1 \\ (0, y_k) & \text{si } n=2k \end{cases}$$

es una CB de $E \times F$ con la topología producto.

Demostración:

$$\text{Sea } h_n(x,y) = \begin{cases} f_k(x) & \text{si } n=2k-1 \\ g_k(y) & \text{si } n=2k \end{cases}$$

Donde (f_k) y (g_k) son respectivamente las s.c.f.a. a las CB (x_k) e (y_k). Usaremos la siguiente notación:

$$S^1_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)x_k \qquad x \in E.$$

$$S^2_n(y) = \sum_{k=1}^{n} g_k(y)y_k \qquad y \in F.$$

$$S_n(x,y) = \sum_{k=1}^{n} h_k(x,y)z_k \qquad x \in E,\ y \in F.$$

Es obvia la linealidad de las funciones h_k. Demostraremos que (z_k) es una CB con la s.c.f.a. (h_k).

Para ello basta tener en cuenta que:

$$S_{2n}(x,y) = \sum_{k=1}^{2n} h_k(x,y)z_k = \sum_{p=1}^{n}(h_{2p-1}(x,y)z_{2p-1}+h_{2p}(x,y)z_{2p})=$$

$$= \sum_{p=1}^{n}(f_p(x)\ (x_p,0)+g_p(y)\ (0,y_p))= (S^1_n(x),S^2_n(y))$$

y que (con el convenio $S^2_o= 0$):

$$S_{2n-1}(x,y)= S_{2n-2}(x,y)+h_{2n-1}(x,y)z_n=$$

$$=(S^1_{n-1}(x)\ ,\ S^2_{n-1}(y))+f_n(x)(x_n,0)=(S^1_n(x)\ ,S^2_{n-1}(y))$$

Si denotamos por H^i_k a $S^i_1+\ldots+ S^i_k$ y $H_k= S_1+\ldots+S_k$ tendremos

$$H_{2n}(x,y)= S_1+ S_2+\ldots+ S_{2n-1}+S_{2n}=$$

$$= (S^1_1,0) + (S^1_1,S^2_1) +\ldots+ (S^1_n,S^2_{n-1}) + (S^1_n,S^2_n)=$$

$$= (2H^1_n(x)\ ,\ 2H^2_n(y) - S^2_n(y)).$$

y de la misma forma:

$$H_{2n-1}(x,y) = (2H^1_n(x) - S^1_n(x)\ ,\ 2H^2_{n-1}(y)).$$

Si denotamos finalmente por $C_n(x,y)$, $C^1_n(x)$ y $C^2_n(y)$ las — n-ésimas sumas parciales de Cesàro de las series $\sum_{k=1} h_k(x,y)z_k$ $\sum_{k=1} f_k(x)x_k$ y $\sum_{k=1} g_k(y)y_k$, obtenemos que:

(1) $\quad C_{2n}(x,y) = (C_n^1(x)\ ,\ C_n^2(y) - \frac{1}{2n} S_n^2(y)).$

(2) $\quad C_{2n-1}(x,y) = (\frac{2n}{2n-1} C_n^1(x) - \frac{1}{2n-1} S_n^1(x)\ ,\ \frac{2n-2}{2n-1} C_{n-1}^2(y)).$

Además $S_n^1(x) \longrightarrow x$ (c) con lo cual:

$$\frac{1}{n} S_n^1(x) = \frac{S_1^1(x)+\ldots+S_n^1(x)}{n} - \frac{n-1}{n}\,\frac{S_1^1(x)+\ldots+S_{n-1}^1(x)}{n-1}$$

tiende a $x-1.x = 0$. De la misma forma $\frac{1}{n} S_n^2(y) \longrightarrow 0$. Lo cual unido a (1) y (2) demuestra que $C_n(x,y) \longrightarrow (x,y)$, que es lo mismo que afirmar que $\sum_{k=1}^{\infty} h_k(x,y) z_k = (x,y)$ (c).

Sólo nos queda entonces por demostrar que la c-descomposición es única. Supongamos para ello que $(0,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n$ (c). Las proyecciones P_1, P_2 definidas en $E \times F$ con valores en E y F respectivamente son continuas. De esta forma deducimos que: $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_1(z_n)$ (c) y $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_2(z_n)$ (c)

Teniendo en cuenta el teorema 1.4.1, deducimos que:

$0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k-1} x_k$ (c) y $0 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{2k} y_k$ (c)

De aquí que al ser (x_n) e (y_n) CB de E y F obtengamos que:

$$\alpha_{2k-1} = \alpha_{2k} = 0 \quad \forall k$$

c.q.d.

Nota: El uso que hemos hecho del teorema 1.4.1. no lo justifica, en el sentido de que para el caso en cuestión —— $(n_{k+1} - n_k = 2)$ la conclusión puede obtenerse sin mas que calcular las sumas parciales de Cesàro directamente. Esto no podrá hacerse sin embargo en el siguiente apartado.

2.- PRODUCTOS NUMERABLES:

A lo largo de este apartado mantendremos la siguiente notación: $(E_k)_{k=1,2,...}$ representará una sucesión de espacios localmente convexos. Supondremos que para cada k, E_k posee una CB que denotaremos por $(x_n^k)_{n=1,2,...}$.

Consideremos la sucesión doble:

$$\begin{array}{ll} (x_1^1, 0, 0, \ldots), & (0, x_1^2, 0, \ldots)\ldots \\ (x_2^1, 0, 0, \ldots), & (0, x_2^2, 0, \ldots)\ldots \\ (x_3^1, 0, 0, \ldots), & (0, x_3^2, 0, \ldots)\ldots \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

A la cual daremos la siguiente ordenación:

$$z_n = \begin{cases} (0,\ldots, x_p^{k+1}, 0,\ldots) & \text{si } n=k^2+p \ (p=1,\ldots,k+1) \\ (0,\ldots, x_{k+1}^{k+1-p}, 0,\ldots) & \text{si } n=k^2+k+1+p \ (p=1\ldots k) \end{cases}$$

$(f_n^k)_{n=1,2,...}$ será la s.c.f.a. a la CB (x_n^k); a partir de ella podemos construir la sucesión doble $(h_n^k)_{n,k=1,2,...}$ donde $h_n^k: \prod_{k=1}^{\infty} E_k \rightarrow \mathbb{K}$ está definida por: $h_n^k(y^1, y^2, \ldots) = f_n^k(y^k)$, es decir, $h_n^k = f_n^k \cdot P_k$, donde P_k es la k-ésima proyección canónica.

Ordenaremos esta sucesión doble de la misma forma que la primera, es decir, denotaremos por (h_n) a la sucesión:

$$h_n = \begin{cases} h_p^{k+1} & \text{si } n=k^2+p \quad (p=1,2,\ldots,k+1). \\ h_{k+1}^{k+1-p} & \text{si } n=k^2+k+1+p \quad (p=1,2,\ldots k). \end{cases}$$

Finalmente usaremos las siguientes notaciones:

$$S_n^k(x^k)= f_1^k(x^k)x_1^k+\dots+ f_n^k(x^k)x_n^k \qquad \text{si } x^k\in E_k.$$

$$S_n(x)= h_1(x)z_1+\dots+ h_n(x)z_n \qquad \text{si } x\in \prod_{k=1}^{\infty} E_k.$$

$$H_n^k(x^k)= S_1^k(x^k)+\dots+ S_n^k(x^k) \qquad \text{si } x^k\in E_k .$$

$$H_n(x)= S_1(x)+\dots+ S_n(x) \qquad \text{si } x\in \prod_{k=1}^{\infty} E_k.$$

<u>Lema 1</u>.-

(1) $S_{n^2}(x^1,x^2,\dots)= (S_n^1(x^1),S_n^2(x^2),\dots,S_n^n(x^n),0,\dots)$

(2) Si $p=1,2,\dots,n+1$, entonces:

$$S_{n^2+p}(x^1,x^2,\dots)=(S_n^1(x^1),\dots,S_n^n(x^n),S_p^{n+1}(x^{n+1}),0,\dots)$$

(3) Si $p=1,2,\dots,n$ entonces:

$$S_{n^2+n+1+p}(x^1,x^2,\dots)=(S_n^1(x^1),\dots,S_n^{n-p}(x^{n-p}),S_{n+1}^{n-p+1}(x^{n-p+1}),\dots,S_{n+1}^{n+1}(x^{n+1}),0,\dots)$$

<u>Demostración</u>:

Sea $x=(x^1,x^2,\dots)\in \prod_{k=1}^{\infty} E_k$

Tendremos entonces que:

$$S_{n^2}(x) = \sum_{i=1}^{n^2} h_i(x)z_i = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=j^2+1}^{(j+1)^2} h_i(x)z_i =$$
$$= \sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{p=1}^{j+1} h_{j^2+p}(x)z_{j^2+p} + \sum_{p=1}^{j} h_{j^2+j+1+p}(x)z_{j^2+j+1+p}\right]$$

Descomponemos esta expresión en dos: La primera de ellas puede obtenerse como sigue:

$$\sum_{j=0}^{n-1}\left[\sum_{p=1}^{j+1} f_p^{j+1}(x^{j+1})(0,\dots,x_p^{j+1},\dots\ )\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}(0,\dots,S_{j+1}^{j+1}(x^{j+1}),0,\dots\ )=(S_1^1(x^1),\dots,S_n^n(x^n),0,\dots)$$

Para la segunda, tengamos en cuenta que el valor j=0 no -- aporta ningún término con lo cual nos quedará:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\left[\sum_{p=1}^{j} f_{j+1}^{j+1-p}(x^{j+1-p})(0,\dots,x_{j+1}^{j+1-p},0,\dots)\right] =$$

$$= (f_{j+1}^1(x^1)x_{j+1}^1, f_{j+1}^2(x^2)x_{j+1}^2,\dots,f_{j+1}^j(x^j)x_{j+1}^j,0,\dots)=$$

$$= (f_2^1(x^1)x_2^1\ ,\quad 0 \quad ,\ 0\ ,\dots \qquad \dots \qquad) +$$

$$+ (f_3^1(x^1)x_3^1\ ,\ f_3^2(x^2)x_3^2\ ,\ 0\ ,\dots \qquad \dots \qquad) +$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ (f_n^1(x^1)x_n^1\ ,\ f_n^2(x^2)x_n^2\ ,\dots\ ,\ f_n^{n-1}(x^{n-1})x_n^{n-1}\ ,\ 0\ ,\dots)$$

Lo cual unido a la anterior igualdad nos da:

$$S_{n^2}(x) = (S_n^1(x^1)\ ,\ S_n^2(x^2)\ ,\dots,\ S_n^n(x^n)\ ,\ 0\ ,\dots\ ).$$

Para demostrar las dos igualdades restantes podemos considerar las siguientes igualdades:

Si p=1,...,n+1 entonces:

$$S_{n^2+p}(x)= S_{n^2}(x)+h_{n^2+1}(x)z_{n^2+1}+\dots+h_{n^2+p}(x)z_{n^2+p} =$$

$$= S_{n^2}(x)+\sum_{i=1}^{p} f_i^{n+1}(x^{n+1})(0,\dots,x_i^{n+1},0,\dots\ )=$$

$$= S_{n^2}(x)+ (0,\dots,\ S_p^{n+1}(x^{n+1}),\ 0\ ,\dots\ )=$$

$$= (S_n^1(x^1),\dots,S_n^n(x^n),S_p^{n+1}(x^{n+1}),\ 0\ ,\dots\ ).$$

Finalmente si p= 1,...,n

$$S_{n^2+n+1+p}(x) = S_{n^2+n+1}(x) + \sum_{i=1}^{p} h_{n^2+n+1+i}(x)z_{n^2+n+1+i} =$$

$$=S_{n^2+n+1}(x)+\sum_{i=1}^{p} f_{n+1}^{n+1-i}(x^{n+1-i})(0,\dots,x_{n+1}^{n+1-i},0,\dots) =$$

$$=S_{n^2+n+1}(x)+(0,\dots,0,f_{n+1}^{n+1-p}(x^{n+1-p})x_{n+1}^{n+1-p},\dots,f_{n+1}^{n}(x^n)x_{n+1}^{n},$$

$$,0,\dots) =$$

$$=(s_n^1(x^1),\dots,s_n^{n+1-p}(x^{n+1-p}),\dots,s_n^n(x^n),s_{n+1}^{n+1}(x^{n+1}),0,\dots)+$$

$$+(0,\dots,0,f_{n+1}^{n+1-p}(x^{n+1-p})x_{n+1}^{n+1-p},\dots,f_{n+1}^{n}(x^n)x_{n+1}^{n},0,\dots)=$$

$$=(s_n^1(x^1),\dots,s_n^{n-p}(x^{n-p}),s_{n+1}^{n+1-p}(x^{n+1-p}),\dots,s_{n+1}^{n+1}(x^{n+1}),0\dots)$$

c.q.d.

Lema 2.-

Si $n>m+2$, la coordenada m-ésima de $H_{n^2}(x)$ es:

$$P_m(H_{n^2}(x))= A_m+ mS_n^m(x^m) +\sum_{i=1}^{n-1} S_i^m(x^m) + 2\sum_{i=1}^{n-1} iS_i^m(x^m).$$

Donde $A_m \in E_m$ depende de m y x y no de n.

Demostración:

En primer lugar, teniendo en cuenta el lema 1:

$$H_{n^2}(x) =\sum_{i=1}^{n^2} S_i =\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=k^2+1}^{(k+1)^2} S_i = \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{k+1} S_{k^2+i}+ \sum_{i=1}^{k} S_{k^2+k+1+i}\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{k+1}(s_k^1,\ s_k^2,\dots,\ s_k^k,\ s_i^{k+1},0,0,\dots)\Big)+$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\Big(\sum_{i=1}^{k}(s_k^1,\dots,s_k^{k-i},s_{k+1}^{k-i+1},\dots,s_{k+1}^{k+1},0,0,\dots)\Big) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} ((k+1)S_k^1,\ (k+1)S_k^2, \ldots,\ (k+1)S_k^k,\ H_{k+1}^{k+1},\ 0,\ 0, \ldots\ ) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1} (kS_k^1 + f_{k+1}^1(x^1)x_{k+1}^1,\ kS_k^2 + 2f_{k+1}^2(x^2)x_{k+1}^2, \ldots,$$

$$,\ kS_k^{k-1} + (k-1)f_{k+1}^{k-1}(x^{k-1})x_{k+1}^{k-1},\ kS_{k+1}^k,\ kS_{k+1}^{k+1},\ 0, \ldots\ ).$$

(Hemos usado las abreviaturas siguientes: $S_k^i = S_k^i(x^i)$,

$H_k^i = H_k^i(x^i)$, $S_i = S_i(x)$).

Con lo cual la coordenada m-ésima de H_{n^2} si $n > m+2$ será:

$$P_m(H_{n^2}(x)) = H_m^m + (m+1)S_m^m + \ldots + nS_{n-1}^m +$$

$$+ (m-1)S_m^m + mS_{m+1}^m + (m+1)S_{m+1}^m + \ldots + (n-1)S_{n-1}^m +$$

$$+ mf_{m+2}^m(x^m)x_{m+2}^m + mf_{m+3}^m(x^m)x_{m+3}^m + \ldots + mf_n^m(x^m)x_n^m.$$

Es decir:

$$P_m(H_{n^2}(x)) = H_m^m - \sum_{i=1}^{m-1}(i+1)S_i^m + \sum_{i=1}^{n-1}(i+1)S_i^m + (m-1)S_m^m + mS_{m+1}^m -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} iS_i^m + \sum_{i=1}^{n-1} iS_i^m + m(S_n^m - S_{m+1}^m).$$

De donde finalmente:

$$P_m(H_n\ (x)) = A_m + mS_n^m(x^m) + \sum_{i=1}^{n-1} S_i^m(x^m) + 2\sum_{i=1}^{n-1} iS_i^m(x^m).$$

Donde $A_m \in E_m$ no depende de n. c.q.d.

Podemos entonces enunciar el siguiente teorema:

Teorema 1.-

Sea $(E_k)_{k=1,2,\ldots}$ una sucesión de espacios localmente convexos. Sea $(x_n^k)_{n=1,2,\ldots}$ una CB de E_k. La sucesión (z_n) —

definida por:

$$z_n = \begin{cases} (0,\dots,x_p^{k+1} \ ,0,\dots) & \text{si } n=k^2+p \qquad (p=1,\dots,k+1) \\ (0,\dots,x_{k+1}^{k+1-p},0,\dots) & \text{si } n=k^2+k+1+p \ (p=1,\dots,k) \end{cases}$$

es una CB de $\prod_{k=1}^{\infty} E_k$.

<u>Demostración</u>:

Veamos en primer lugar que $\lim_n \frac{1}{n^2}H_{n^2}(x)= x$.

Bastará para ello, manteniendo la notación precedente, demostrar que $\lim_n P_m(\frac{1}{n^2}H_{n^2}(x))= P_m(x)= x^m$. Ahora bien, según el lema 2:

$$P_m(\frac{1}{n^2}H_{n^2}(x))= \frac{1}{n^2}(A_m+mS_n^m(x^m)+ \sum_{i=1}^{n-1} S_i^m(x^m)+2 \sum_{i=1}^{n-1} iS_i^m(x^m)).$$

Teniendo en cuenta entonces que:

$$\lim_n \frac{1}{n}S_n^m= \lim_n \frac{S_1^m+\dots+ S_n^m}{n} - \frac{n-1}{n} \frac{S_1^m+\dots+ S_{n-1}^m}{n-1} = 0$$

Y que, aplicando el corolario I.1.1. (Criterio de Stolz),

$\lim_n \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} S_i^m= \lim_n \frac{1}{n^2-(n-1)^2}S_{n-1}^m= 0$, deducimos que el límite de $P_m(\frac{1}{n}H_n \ (x))$ existirá si y sólo si existe $\lim_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{n^2}S_i^m$ y en ese caso:

$$\lim_n P_m(\frac{1}{n^2}H_{n^2}(x))= \lim_n \sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{n^2}S_i^m$$

Pero $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{2i}{n^2}S_i^m= \frac{2}{n^2} \sum_{i=1}^{n-1} iS_i^m= \frac{2}{n^2} \ (n-1)H_{n-1}^m-\left[H_1^m+\dots+H_{n-2}^m\right] =$

$$= \frac{2(n-1)^2}{n^2} \frac{1}{n-1}H_n^m- \frac{2}{n^2}\left[H_1^m+\dots+ H_{n-2}^m\right]$$

Como $\frac{1}{n-1}H_n^m \xrightarrow{n} x^m$ por ser (x_n^m) una CB de E_m, y

$\frac{2}{n^2}\left[H_1^m+\ldots+H_{n-2}^m\right] \xrightarrow{n} x^m$ por ser el método C_2 regular respecto a C_1 tendremos entonces que:

$$\lim_n P_m\left(\frac{1}{n^2}H_{n^2}(x)\right)= x \qquad \forall m \in \mathbb{N}$$

De donde $\lim_n \frac{1}{n^2}H_n\ (x)= x$ en $\prod_{k=1}^{\infty} E_k$

Veamos finalmente que $\lim_n \frac{1}{n}H_n(x)= x$ en $\prod_{k=1}^{\infty} E_k$.

Sea q una seminorma en E_m y $\varepsilon>0$.

Sea $k_o>m$ de tal forma que:

$$(1) \quad \frac{2k+1}{k^2} < \frac{\varepsilon}{M} \quad \text{si } k\geq k_o \quad (M= \sup_{p\in\mathbb{N}} q(\frac{1}{p}H_p^m(x^m)))$$

$$(2) \quad q\left[P_m(\frac{1}{k^2}H_{k^2}(x)- x)\right. \qquad \text{si } k\geq k_o$$

$$(3) \quad q(\frac{1}{k}S_k^m(x^m)) \qquad \text{si } k\geq k_o$$

Sea $n_o= k_o^2$ y $n\geq n_o$.

Si $n= k^2+p$, $(p=1,2,\ldots,2k+1)$, $k\geq k_o$, entonces:

$$q(P_m(\frac{1}{n}H_n(x)- x)) = q(P_m(\frac{1}{k^2+p}H_{k^2+p}(x)- x)) =$$

$$= q(P_m(\frac{1}{k^2+p}H_{k^2}(x)- x+ \frac{1}{k^2+p}(S_{k^2+1}(x)+\ldots+ S_{k^2+p}(x))) =$$

$$= q(P_m(\frac{1}{k^2}(1- \frac{p}{k^2+p})H_{k^2}(x)- x+ \frac{1}{k^2+p}(S_{k^2+1}(x)+\ldots+S_{k^2+p}(x)))=$$

$$= q\Big(P_m\Big((1- \frac{p}{k^2+p})(\frac{1}{k^2}H_{k^2}(x)-x)- \frac{p}{k^2+p}x+$$

$$+ \frac{1}{k^2+p}(S_{k^2+1}(x)+\ldots+S_{k^2+p}(x))\Big)\Big) \leq$$

$$\leq \left(1-\frac{p}{k^2+p}\right)q\left(P_m\left(\frac{1}{k^2}H_{k^2}(x)-x\right)\right)+\frac{p}{k^2+p}q(x^m)+$$

$$+\frac{1}{k^2+p}q\left(P_m\left(S_{k^2+1}(x)+\dots+S_{k^2+p}(x)\right)\right)\leq$$

$$\leq q\left(P_m\left(\frac{1}{k^2}H_{k^2}^{(x)}-x\right)\right)+\frac{2k+1}{k^2}q(x^m)+\frac{1}{k^2+p}q\left(P_m\left(S_{k^2+1}(x)+\dots+S_{k^2+p}(x)\right)\right)\leq$$

$$\leq \varepsilon+\frac{\varepsilon}{M}q(x^m)+\frac{1}{k^2+p}q\left(P_m\left(S_{k^2+1}(x)+\dots+S_{k^2+p}(x)\right)\right)\leq$$

$$\leq 2\varepsilon+\frac{1}{k^2+p}q\left(P_m\left(S_{k^2+1}(x)+\dots+S_{k^2+p}(x)\right)\right).$$

a) Si $p=1,2,\dots,k+1$ tendremos que:

$$P_m\left(S_{k^2+1}(x)+\dots+S_{k^2+p}(x)\right)=pS_k^m(x^m)\qquad (k_o>m).$$

Con lo cual

$$q\left(P_m\left(\frac{1}{n}H_n(x)-x\right)\right)\leq 2\varepsilon+\frac{p}{k^2+p}q(S_k^m(x^m))\leq 2\varepsilon+\frac{2k+1}{k^2}q(S_k^m(x^m))\leq$$

$$\leq 2\varepsilon+\frac{2k+1}{k}q\left(\frac{1}{k}S_k^m(x^m)\right)<2\varepsilon+3\varepsilon=5\varepsilon.$$

b) Si $p=k+1+h$, $h=1,2,\dots,k$ tendremos:

$$q\left(P_m\left(\frac{1}{n}H_n(x)-x\right)\right)\leq 2\varepsilon+\frac{1}{k^2+k+1+h}q\left(P_m\left(S_{k^2+1}(x)+\dots+\right.\right.$$

$$\left.\left.+S_{k^2+k+1}(x)+\dots+S_{k^2+k+1+h}(x)\right)\right)\leq$$

$$\leq 2\varepsilon+\frac{1}{k^2+k+1}q\left(P_m\left(S_{k^2+1}(x)+\dots+S_{k^2+k+1}(x)\right)\right)+$$

$$+\frac{1}{k^2+k+1+h}q\left(P_m\left(S_{k^2+k+2}(x)+\dots+S_{k^2+k+1+h}(x)\right)\right)\leq$$

$$\leq 5\varepsilon+\frac{1}{k^2+k+1+h}q\left(P_m\left(S_{k^2+k+1+1}(x)+\dots+S_{k^2+k+1+h}(x)\right)\right)$$

Ahora bien:

$$P_m(S_{k^2+k+1+1}(x)+\dots+S_{k^2+k+1+h}(x)) = hS_k^m(x^m) + \nu f_{k+1}^m(x^m)x_{k+1}^m$$

Donde ν es un entero menor que h.

Por tanto:

$$\frac{1}{k^2+k+1+h} q(P_m(S_{k^2+k+1+1}(x)+\dots+S_{k^2+k+1+h}(x))) \leq$$

$$\leq \frac{h}{k^2+k+1+h} q(S_k^m(x^m)) + \frac{\nu}{k^2+k+1+h} q(f_{k+1}^m(x^m)x_{k+1}^m) \leq$$

$$\leq \frac{k}{k^2} q(S_k^m(x^m)) + \frac{k}{k^2} q(S_{k+1}^m(x^m) - S_k^m(x^m)) \leq$$

$$\leq 2q(\frac{1}{k} S_k^m(x^m)) + \frac{k+1}{k} q(\frac{1}{k+1} S_{k+1}^m(x^m)) \leq$$

$$\leq 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon .$$

De donde:

$$q(P_m(\frac{1}{n} H_n(x) - x)) \leq 5\varepsilon + 4\varepsilon = 9\varepsilon .$$

En definitiva

$$q(P_m(\frac{1}{n} H_n(x) - x)) \leq 9\varepsilon \qquad \forall n \geq n_o .$$

Y de aquí que

$$\sum_{n=1}^{\infty} h_n(x) z_n = x \quad (c) \quad \text{en} \quad \prod_{k=1}^{\infty} E_k .$$

Veamos finalmente que la c-descomposición de cualquier ele mento es única. Supongamos para ello que $0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z_n$ (c) en $\prod_{k=1}^{\infty} E_k$. Consideremos la proyección m-ésima P_m que es una — aplicación lineal y continua. Tendremos entonces que:

$$(1) \quad 0 = P_m(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n P_m(z_n) \ (c) = \sum_{n=1}^{m^2} \alpha_n P_m(z_n) + \sum_{n=m^2+1}^{\infty} \alpha_n P_m(z_n) \ (c) ,$$

Estudiemos ahora la distribución de ceros en la serie — $\sum_{m^2+1}^{\infty} \alpha_n P_m(z_n)$.

Como quiera que

$$z_n=\begin{cases}(0,\ldots,x_p^{k+1},0,\ldots) & \text{si } n=k^2+p\ (p=1,\ldots,k+1)\\ (0,\ldots,x_{k+1}^{k+1-p},0,\ldots) & \text{si } n=k^2+k+1+p\ (p=1,\ldots,k)\end{cases}$$

Si $n=k^2+p$ $(p=1,\ldots,k+1)$, se tendrá que $k\geq m$ con lo cual — $P_m(z_n)=0$.

Si $n=k^2+k+1+p$ $(p=1,\ldots,k)$ se tendrá que $P_m(z_n)\neq 0$ si y sólo si $k+1-p=m$. Fijados entonces m y $k\geq m$ obtenemos que $P_m(z_n)\neq 0$ $(n=k^2+p\ (p=1,\ldots,2k+1))$ si y sólo si $p=k+1-m$. De esta forma si $n\geq m^2+1$ y $n\neq n_k=(k+1)^2-m+1$ $(k=m,\ m+1,\ldots)$, $P_m(z_n)=0$.

Como quiera que $n_{k+1}-n_k=(k+2)^2-(k+1)^2=2k+3$ es una sucesión creciente, aplicando el teorema I.4.1. obtenemos que:

$$\sum_{n=m^2+1}^{\infty}\alpha_n P_m(z_n)\ (c)=\sum_{k=m}^{\infty}\alpha_{(k+1)^2-m+1}x_{k+1}^m\ (c).$$

Con lo cual teniendo en cuenta (1):

$$(2)\quad 0=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n P_m(z_n)+\sum_{k=m}^{\infty}\alpha_{(k+1)^2-m+1}x_{k+1}^m\ (c).$$

Ahora bién si $P_m(z_n)\neq 0$ y $n=1,2,\ldots,m^2$ no puede ser $n=k^2+k+1+p$ $(p=1,\ldots,k)$ ya que en este caso $k+1-p=m$ y por tanto — $k=m+p-1\geq m$, con lo que $n\geq m^2+m+1+p>m$. Deberá ser entonces — $n=k^2+p$ $(p=1,\ldots,k+1)$ y por tanto $k+1=m$ con lo cual (2) se convierte en:

$$0=\sum_{p=1}^{m}\alpha_{(m-1)^2+p}x_p^m+\sum_{k=m}^{\infty}\alpha_{(k+1)^2-m+1}x_{k+1}^m\quad (c).$$

El hecho de ser (x_n^m) una CB de E_m nos permite asegurar que:

$$\alpha_{(m-1)^2+p}=0\qquad (p=1,2,\ldots,m).$$

$$\alpha_{(k+1)^2-m+1}=0\quad (k=m,m+1,\ldots)$$

Y esto para todo valor de m. Nuestra prueba concluirá si probamos que todo número natural n puede escribirse en la forma $(m-1)^2+p$ $(m=1,2,\dots,\ p=1,2,\dots,m)$ o bién en la forma $(k+1)^2-m+1$ $(m=1,2,\dots,\ k=m,\ m+1,\dots)$.

Ahora bien todo número natural puede escribirse como q^2+h $(h=1,2,\dots,q+1)$ ó $q^2+q+1+h$ $(h=1,2,\dots,q)$ con $q=0,1,\dots$.

Basta tomar en el primer caso $m=1+q$, $p=h$ y en el segundo $m=q-h+1$ y $k=q$. c.q.d.

APENDICE: SOBRE UN RESULTADO DE GELBAUM-GIL DE LAMADRID SOBRE PRODUCTOS TENSORIALES DE BASES.

En [12] Gelbaum y Gil de Lamadrid prueban entre otros el siguiente resultado:

"Si (x_n) e (y_n) son bases de sendos espacios de Banach E y F, la sucesión $(z_k)\in E\otimes F$ definida por:

$$z_k=\begin{cases} x_i\otimes y_{n+1} & \text{si } k=n^2+i \quad (i=1,2,\dots,n+1) \\ x_{n+1}\otimes y_{n+1-i} & \text{si } k=n^2+n+1+i \quad (i=1,2,\dots,n) \end{cases}$$

$(n=0,1,\dots)$ es una base de $E\hat{\otimes}_\eta F$".

Pretendemos en este apéndice obtener un resultado análogo en espacios localmente convexos. Más precisamente intentamos probar que si E y F son dos espacios localmente convexos con base de Schauder, la sucesión considerada anteriormente constituye una base de Schauder de $E\hat{\otimes}_\eta F$.

Para ello necesitamos algunas cuestiones previas:

Dadas dos sucesiones (u_n) y (v_n) de elementos de dos espacios vectoriales E y F definimos su producto tensorial como la sucesión (w_k) de $E\otimes F$ definida por:

$$w_k = \begin{cases} u_i \otimes v_{n+1} & \text{si } k=n^2+i \quad (i=1,2,\dots,n+1) \\ u_{n+1}\otimes v_{n+1-i} & \text{si } k=n^2+n+1+i \quad (i=1,2,\dots,n) \end{cases}$$

$(n=0,1,\dots)$.

Veremos en primer lugar una cuestión de caracter puramente algebraico y cuya demostración puede encontrarse en [29]

Proposición 1.-

Sean E y F dos espacios vectoriales y (u_n), (v_n) dos sucesiones de elementos de E y F respectivamente. Sea $(w_k)\subseteq E\otimes F$ el producto tensorial de (u_n) y (v_n). Sean $S_n^1=u_1+\dots+u_n$, $S_n^2= v_1+\dots+ v_n$, y $S_k= w_1+\dots+ w_k$.

Entonces:

(1) $S_{n^2} = S_n^1 \otimes S_n^2$

(2) $S_{n^2+m}= S_n^1\otimes S_n^2 + S_m^1\otimes(S_{n+1}^2 - S_n^2) \qquad m=1,2,\dots,n+1.$

(3) $S_{n\ +n+1+m}= S_{n+1}^1 \otimes S_{n+1}^2 - (S_{n+1}^1 - S_n^1)\otimes S_{n-m}^2 \qquad m=1,\dots,n.$

Demostración:

(1) Por inducción: Para n=1 es trivial. Supuesto cierto para n:

$$S_{(n+1)^2} = S_{n^2} + \sum_{i=1}^{2n+1} w_{n^2+i} = S_{n^2} + \sum_{i=1}^{n+1} w_{n^2+i} + \sum_{i=1}^{n} w_{n^2+n+1+i} =$$

$$= S_{n^2} + \sum_{i=1}^{n+1} u_i\otimes v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} u_{n+1}\otimes v_{n+1-i} =$$

$$= S^1_n \otimes S^2_n + S^1_{n+1} \otimes v_{n+1} + u_{n+1} \otimes S^2_n =$$

$$= S^1_{n+1} \otimes S^2_n + S^1_{n+1} \otimes v_{n+1} = S^1_{n+1} \otimes S^2_{n+1}.$$

(2) $S_{n^2+m} = S_{n^2} + w_{n^2+1} + \dots + w_{n^2+m} =$

$$= S^1_n \otimes S^2_n + u_1 \otimes v_{n+1} + \dots + u_m \otimes v_{n+1} =$$

$$= S^1_n \otimes S^2_n + S^1_m \otimes v_{n+1} = S^1_n \otimes S^2_n + S^1_m \otimes (S^2_{n+1} - S^2_n).$$

(3) $S_{n^2+n+1+m} = S_{(n+1)^2} - w_{n^2+n+1+m+1} - w_{n^2+n+1+m+2} - \dots - w_{(n+1)^2}$

$$= S^1_{n+1} \otimes S^2_{n+1} - u_{n+1} \otimes v_{n+1-m-1} - u_{n+1} \otimes v_{n+1-m-2} - \dots - u_{n+1} \otimes v_1 =$$

$$= S^1_{n+1} \otimes S^2_{n+1} - u_{n+1} \otimes S^2_{n-m} = S^1_{n+1} \otimes S^2_{n+1} - (S^1_{n+1} - S^2_n) \otimes S^2_{n-m}.$$

c.q.d.

El resultado que pretendemos se obtendrá como corolario al siguiente teorema:

<u>Teorema 1.-</u>

Sean E y F dos espacios localmente convexos. Supongamos que las series $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ de E y $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ de F son convergentes. Sea (w_k) el producto tensorial de (u_n) y (v_n). Entonces $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ es convergente en $E \otimes_\pi F$ y $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = (\sum_{n=1}^{\infty} u_n)(\sum_{n=1}^{\infty} v_n)$.

<u>Demostración:</u>

Con la misma notación de la proposición 1 tenemos ahora

$$\lim_n S^1_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u \text{ y } \lim_n S^2_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v.$$

Además si P y Q son dos familias de seminormas que definen las topologías de E y F, la η-topología de $E\otimes F$ viene dada por la familia $(p\otimes q)_{\substack{p\in P\\ q\in Q}}$ definidas por:

$$p\otimes q(z) = \inf_{\sum x\otimes y = z} \left(\sum p(x)q(y)\right)$$

Sean pues $p\in P$ y $q\in Q$. Entonces:

1) $p\otimes q(S_{n^2} - u\otimes v) = p\otimes q(S_n^1\otimes S_n^2 - u\otimes v)\leq$

$$\leq p\otimes q((S_n^1 - u)\otimes S_n^2) + p\otimes q(u\otimes(S_n^2 - v))\leq$$

$$\leq p(S_n^1 - u)\cdot q(S_n^2) + p(u)\cdot q(S_n^2 - v).$$

2) $p\otimes q(S_{n^2+m} - u\otimes v) = p\otimes q(S_{n^2} - u\otimes v + S_m^1\otimes(S_{n+1}^2 - S_n^2))\leq$

$$\leq p\otimes q(S_{n^2} - u\otimes v) + p(S_m^1)\cdot q(S_{n+1}^2 - S_n^2) \qquad (m=1,2,\dots,n+1)$$

3) $p\otimes q(S_{n^2+n+1+m} - u\otimes v) = p\otimes q(S_{(n+1)^2} - u\otimes v - (S_{n+1}^1 - S_n^1)\otimes S_{n-m}^2)\leq$

$$\leq p\otimes q(S_{(n+1)^2} - u\otimes v) + p(S_{n+1}^1 - S_n^1)\cdot q(S_{n-m}^2). \quad (m=1,\dots,n)$$

Ahora $S_n^1 \longrightarrow u$ y $S_n^2 \longrightarrow v$. Ambas sucesiones estarán pues acotadas y existirán entonces sendas constantes M_p y M_q positivas de forma que $p(S_n^1)\leq M_p$ $\forall n$ y $q(S_n^2)\leq M_q$ $\forall n$.

Además al ser $S_n^1 \longrightarrow u$ y $S_n^2 \longrightarrow v$ podremos encontrar un lugar n_0 a partir del cual:

$$p(S_n^1 - u) < \frac{\varepsilon}{4M_q} \qquad p(S_{n+1}^1 - S_n^1) < \frac{\varepsilon}{2M_q}$$

$$q(S_n^2 - v) < \frac{\varepsilon}{4M_p} \qquad q(S_{n+1}^2 - S_n^2) < \frac{\varepsilon}{2M_p}$$

Supongamos que $k \geq n_0^2$:

En los tres casos $k=n^2$, $k=n^2+m$ $(m=1,\dots,n+1)$, $k=n^2+n+1+m$ $(m=1,\dots,n)$ tenemos entonces que $n \geq n_o$. Con esto

1) Si $k=n^2$ $\quad p\otimes q(S_{n^2}-u\otimes v) \leq p(S_n^1 - u)\cdot q(S_n^2) + p(u)\cdot q(S_n^2 - v) \leq$

$$\leq \frac{\varepsilon}{4M_q} M_q + M_p \frac{\varepsilon}{4M_p} = \frac{\varepsilon}{2}$$

2) Si $k=n^2+m$ $\quad (m=1,\dots,n+1)$

$$p\otimes q(S_{n^2+m} - u\otimes v) \leq p\otimes q(S_{n^2} - u\otimes v) + p(S_m^1)\cdot q(S_{n+1}^2 - S_n^2) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + M_p \frac{\varepsilon}{2M_p} = \varepsilon$$

3) Si $k=n^2+n+1+m$ $\quad (m=1,\dots,n)$

$$p\otimes q(S_{n^2+n+1+m} - u\otimes v) \leq p\otimes q(S_{(n+1)^2} - u\otimes v) + p(S_{n+1}^1 - S_n^1) q(S_{n-m}^2) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M_q} M_q = \varepsilon$$

Es decir $p\otimes q(S_k - u\otimes v) < \varepsilon \qquad \forall k \geq n_o^2$

O lo que es lo mismo $\sum w_k = (\sum u_n) \otimes (\sum v_n)$ c.q.d.

Corolario 1.-

Si (x_n) es una BS de E e (y_n) es una BS de F, el producto tensorial de (x_n) e (y_n) es una BS de $E\otimes_\eta F$.

Demostración:

Sean (a_n) y (b_n) las s.c.f.a. a las bases (x_n) e (y_n).

Como $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)x_n$ e $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(y)y_n$ para $x \in E$ e $y \in F$, ––– aplicando el teorema $x\otimes y = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x\otimes y)z_k$, donde (h_k) es el producto tensorial de (a_n) y (b_n). Por linealidad obtenemos entonces $z = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(z) z_k$ para $z \in E \otimes F$. La unicidad del desarrollo es trivial a partir de la continuidad de h_k.

c.q.d.

Obtenemos el resultado de Gelbaum y Gil de Lamadrid a partir de este:

<u>Corolario 2</u>.-

Si (x_n) e (y_n) son bases de los espacios de Banach E y F, su producto tensorial es una base de $E \hat{\otimes}_\eta F$.

<u>Demostración</u>:

El producto tensorial de (x_n) e (y_n) es una BS de $E \otimes_\eta F$ que por ser producto de dos Banach es tonelado, con lo cual la base será equicontinua. De esta forma $S_k(z) \xrightarrow{k} z$ para $z \in E \otimes F$, es decir $S_k \longrightarrow I$ en la topología $\mathcal{T}_s(E \otimes F)$ de la convergencia simple en $E \otimes F$ que coincide con $\mathcal{T}_s(E \hat{\otimes}_\eta F)$ por ser $(S_k)_k \cup (I)$ equicontinuo, o lo que es igual $S_k(z) \longrightarrow z$ para todo z en $E \hat{\otimes}_\eta F$.

La unicidad es trivial a partir de la continuidad de las funciones h_k.

c.q.d.

BIBLIOGRAFIA

1.- APOSTOL,T.M.: Análisis Matemático. Massachusetts (1957)

2.- BANACH,S.: Théorie des operations lineaires. Warzawa (1932).

3.- BILBAO,J.M.: Espacios de Sucesiones y Sumabilidad de Abel. Tesis. Universidad de Sevilla (1981).

4.- DE WILDE,M.: Closed graph theorems and webbed spaces. Liege (1978).

5.-DE WILDE,M.: On weak Schauder decompositions. Studia Math. XLI, pp 145-148 (1972).

6.- DIEUDONNE,J.: On biorthogonal systems. Michigan Math. J.2, pp 7-20 (1953).

7.- DUBINSKY,E-RETHERFORD,J.R.: Schauder bases in compatible topologies. Studia Math. XXVIII, pp 221-226 (1967)

8.- FLORENCIO,M.: Sobre sumabilidad de Cesàro en el espacio CS (I). Rev. Real Ac. Ci. Ex. Fis. Nat. pp 1185-1197 (1981).

9.- FLORET,K.: Bases in sequentially retractive limit spaces. Colloquium on Nuclear Spaces and Ideals in operator algebras (1969).

10.- FRINK,O. Jr.: Series expansions in linear spaces. Amer. J. Math. 63, pp 87-100 (1941).

11.- GELBAUM,B.R.: Expansions in Banach Spaces. Duke Math. 17, pp 187-196 (1950).

12.- GELBAUM,B.R.-GIL DE LAMADRID,J.: Bases of Tensor Products of Banach Spaces. Pacific. J. of Math. 11, pp 297-310 (1959).

13.- HARDY,G.H.: Divergent series. Oxford (1973).

14.- HENRIQUES,G.: Ein nich d-separabler linearer Unterraum eines. Arch. Math. 15, pp 448-449 (1964).

15.- JAMESON,G.J.O.: Topology and Normed Spaces. London (1974)

16.- JARCHOW,H.: Locally convex Spaces. Ed. Teubner.

17.- KALTON, N.J.: A Barrelled space witout a Basis. Proc. A.M.S. 26, pp 465-466 (1970).

18.- KNOPP,K.: Theory and applications of infinite series. Ed. Hafner P.C. New York.

19.- KOTHE,G.: Topological Vector Spaces I (1969).

20.- KOTHE,G.: Topological Vector Spaces II (1979).

21.- KOZLOV,V. Ya.: On a generalization of the notion of basis. Doklady Akad. Nauk SSSR 73, 643-646 (1950).

22.- LINDENSTRAUSS,J.-TZAFRIRI,L.: Classical Banach Spaces Jerusalem (1977).

23.- MARTÍ,J.T.: Introduction to the theory of bases. Springer Tracts in Natural Philosophy 18 (1969).

24.- Mc ARTHUR,W.: Developments in Schauder basis theory. Bull. A.M.S. 78, 6 pp 877-908 (1972).

25.- PEREZ CARRERAS,P.-BONET SOLVES,J.: Espacios tonelados. Publicación de la Universidad de Sevilla (1980).

26.- PEYERIMHOFF,A.: Lectures on Summability. Lecture notes in mathematics 107. (1969).

27.- SINGER,I.: Bases in Banach Spaces I. Bucharest (1969)

28.- SINGER,I.:Bases in Banach Spaces II. Bucharest (1981)

29.- SINGER,I.: On Cesàro bases in Banach spaces. Rev. Math. pures et appl. 7, pp 135-142 (1962).

30.- VALDIVIA,M.: On certain classes of locally convex spaces without $\mathcal{C}$-web. (Por aparecer en Ann. Inst. Fourier).

31.- ZELLER,K.: Theorie der Limitierungsverfahren. Springer (1958).

32.- ZYGMUND,A.: Trigonometric series, vol. I y II. Chicago (1958).

IDAD DE SEVI

ULTAD DE CIENCIAS MATEMATICAS

ido el Tribunal integrado por los abajo f
de la fecha, para juzgar la Tesis Doct

D. Celestino Martín Carrera

"sobre ciertos Tipos de Bases en Espacios localmente convexos."

orgarle la calificación de SOBRESALIENTE "CUM LAUDE"

Sevilla, 16 de octubre 1.982

Vocal,	El Vocal,	El Voc
Manuel [illegible]	[illegible]	[illegible]
idente,	El Secretario,	El Do
A. Castro	Juan Arias de Reyna	[illegible]

Universidad de Sevilla
Facultad de Matemáticas