UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA II

REPRESENTABILIDAD FINITA POR COCIENTES Y OPERADORES

MANUELA BASALLOTE GALVÁN

Tesis Doctoral

Memoria que presenta
Dña. Manuela Basallote Galván
para optar al grado de Doctora
en Ciencias Matemáticas.

Fdo: M. Basallote Galván.

D. Santiago Díaz Madrigal, profesor titular del Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla,

CERTIFICA: Que la presente memoria "Representabilidad finita por cocientes y operadores", ha sido realizada bajo su dirección por la licenciada en Ciencias Matemáticas, Manuela Basallote Galván, y constituye su tesis para optar al grado de Doctora en Ciencias Matemáticas.

$V^o B^o$: Director de tesis.

D. Madrigal

Fdo: S. Díaz Madrigal.

Sevilla, Enero de 1998

Quiero dejar constancia de mi más sincero agradecimiento a todos los profesores del Departamento de Matemática Aplicada II por el ánimo y apoyo recibidos y, especialmente, al profesor Manuel D. Contreras Márquez por sus valiosos comentarios y al profesor Santiago Díaz Madrigal, director de esta memoria.

A Manolo

Contenido

Introducción

El punto de partida de esta memoria es el concepto de representabilidad finita entre espacios de Banach introducido por R. C. James [34]. Dicho concepto juega un papel básico en el estudio de la estructura de los espacios de Banach. Basta recordar que uno de los resultados más conocidos sobre la representabilidad finita es el famoso *principio de reflexividad local*, debido a J. Lindenstrauss y H. P. Rosenthal [41], que muestra que un espacio de Banach y su bidual localmente son muy similares.

La representabilidad finita está íntimamente relacionada con la noción de ultrapotencia. En concreto, K. D. Kürsden [39] y J. Stern [55] demostraron el denominado *teorema de dualidad local de ultraproductos*, el cual afirma que el dual de un ultraproducto de espacios de Banach y el ultraproducto de los duales de dichos espacios son, también, localmente muy similares. Dicho resultado se considera una versión del principio de reflexividad local en el contexto de ultraproductos y es una herramienta básica en las aplicaciones de la Lógica Matemática al Análisis.

La importancia de la representabilidad finita condujo a diversos autores tales como S. Heinrich [30], S. F. Bellenot [11] y B. Beauzamy [8] a extender este concepto a operadores distintos de la identidad. De ahí surge el concepto de representabilidad finita de operadores.

En esta memoria, hemos recopilado todos aquellos resultados esenciales sobre la representabilidad finita y la teoría de ultraproductos entre espacios de Banach que nos servirán como referencia básica en las pruebas de los teoremas posteriores y que, pensamos, ayudarán a leerla con facilidad. Estos resultados están en el capítulo I, salvo la sección 1.5, y las únicas demostraciones que se han incluido son aquéllas para las que no hemos podido conseguir una referencia adecuada. No obstante, consideramos que son conocidas. La exposición de estos resultados están fuertemente influenciada por el artículo monográfico de S. Heinrich [29] y el libro de B. Sims [52].

Por tanto, las aportaciones originales de esta memoria se incluyen en la sección 1.5 y en los capítulos II y III en su totalidad. A grosso modo, aportamos nuevos resultados sobre la teoría de ultraproductos, la formulación dual de la representabilidad finita entre espacios de Banach y nuevas propiedades de la representabilidad finita de operadores introducida por S. F. Bellenot [11].

A continuación detallamos, con más precisión, dichas aportaciones.

CAPÍTULO I. Es conocido que el principio de reflexividad local admite versiones más fuertes como las dadas por W. B. Johnson, H. P. Rosenthal y M. Zippin [35] y por T. Barton y X.-T. Yu [3].

Teniendo en cuenta la relación entre el principio de reflexividad local y el teorema de dualidad local de ultraproductos, hemos obtenido una respuesta positiva a la pregunta natural de si pueden conseguirse versiones paralelas a las versiones antes mencionadas en el contexto de ultraproductos (teoremas 1.5.3 y 1.5.4).

CAPÍTULO II. En su artículo [Ultrapowers and local properties of Banach Spaces, Trans. Amer. Math. Soc., **240** (1978)], J. Stern se plantea la existencia de una teoría dual para la representabilidad finita entre espacios de Banach. Para ello introduce el concepto de cociente local, dejando varias (esencialmente, dos) preguntas abiertas sobre la conexión entre la representabilidad finita y los cocientes locales.

En la sección 2.1, damos respuestas negativas a dichas preguntas que indican que el concepto de cociente local no funciona perfectamente como noción dual de la representabilidad finita. Es por ello, que nos volvemos a plantear la pregunta inicial de J. Stern.

Por otra parte, conviene citar que, S. Heinrich [30], de modo marginal, maneja el concepto de representabilidad finita por cocientes, sin hacer ningún estudio pormenorizado del mismo. De hecho, él considera que equivale al concepto de cociente local dado por J. Stern. En la sección 2.2, probamos que ambas definiciones son diferentes aunque coinciden cuando los espacios de partida son espacios duales y mostramos que la representabilidad finita por cocientes de S. Heinrich sí puede considerarse una noción dual bastante satisfactoria. En concreto, mencionamos los siguientes resultados:

- Los teoremas 2.2.3 y 2.2.4 que nos permiten relacionar la representabilidad finita por cocientes con las ultrapotencias y que corresponden a las versiones duales de los teoremas 1.2.10 y 1.2.12, respectivamente.

- El teorema 2.2.6 que nos muestra que un espacio de Banach X está finitamente representado en otro espacio de Banach Y si y sólo si X^* está finitamente representado por cocientes en Y^*; y viceversa, X está finitamente representado por cocientes en Y si y sólo si X^* está finitamente representado en X^*.

- El teorema 2.2.8 que nos permite clarificar la relación entre el concepto de cociente local dado por J. Stern y el concepto de representabilidad finita por cocientes de S. Heinrich.

La sección 2.3 la dedicamos a analizar el significado de la representabilidad finita por cocientes cuando uno de los espacios que intervienen es un espacio clásico de sucesiones. En concreto, caracterizamos aquellos espacios de Banach que están finitamente representados por cocientes en l_p y c_0 (teorema 2.3.1), que corresponde a la versión dual del teorema 1.2.2, y aquellos espacios de Banach tales que l_p y c_0 están finitamente representados en ellos (teorema 2.3.2), que corresponde a la versión dual del teorema 1.2.3. Asimismo, damos un resultado dual del famoso teorema de J. L. Krivine (teorema 2.3.3).

Finalmente, en la sección 2.4 presentamos una teoría dual a la elaborada por E. V. Tokarev [56], sobre el *espectro de un espacio de Banach* y conseguimos una versión dual del conocido como "teorema grande" de B. Maurey y G. Pisier.

Queremos también mencionar que la mayoría de los resultados obtenidos en este capítulo quedan recogidos en [19].

CAPÍTULO III. En [11], S. F. Bellenot prueba una variante del principio de reflexividad local que le lleva a un cierto concepto de representabilidad finita de operadores. Usando sus propias palabras, ("... this is a strange definition ..."), este concepto parece algo artificial. En nuestra opinión, este capítulo muestra que, sin embargo, la definición dada por S. F. Bellenot es realmente natural y con muy buenas propiedades.

En la sección 3.1 caracterizamos la representabilidad finita de S.F. Bellenot mediante diagramas conmutativos en el que intervienen subespacios finito-dimensionales, relacionando este concepto con la noción de representabilidad finita de operadores dada por B. Beauzamy en su libro [8]. También la caracterizamos a través de diagramas conmutativos en el que aparecen ultrapotencias (teorema 3.1.2) y damos una prueba alternativa del resultado de S. F. Bellenot que afirma que el biadjunto de un operador está finitamente representado en dicho operador (teorema 3.1.3). Esta afirmación se considera una extensión del principio de reflexividad local a la teoría de operadores. Nuestra prueba tiene un interés adicional puesto que la prueba original de S. F. Bellenot no parece completamente correcta.

En la sección 3.2, y siguiendo la misma línea que en el capítulo anterior, definimos un concepto dual a la representabilidad finita de operadores, que denominamos *q-representabilidad finita de operadores.* Los resultados que consideramos más interesantes respecto de este concepto son:

- El teorema 3.2.1 que muestra cómo, realmente, la representabilidad finita de operadores y la q-representabilidad finita de operadores son totalmente compatibles frente a la dualidad, pudiéndose interpretar este teorema como una extensión del teorema 2.2.6 dado en el capítulo anterior.

- El teorema 3.2.2 que nos permite relacionar la q-representabilidad finita de operadores con las ultrapotencias de operadores a través de un diagrama conmutativo.

Finalmente, en la sección 3.3 tratamos diversos ideales de operadores conocidos y los caracterizamos a través de la representabilidad finita y la q-representabilidad finita de operadores. Entre ellos están los operadores compactos, los uniformemente convexificantes, los de tipo Rademacher, los supertauberianos y cosupertauberianos y los que factorizan a través de un espacio de Hilbert.

Por último, queremos mencionar que parte de los resultados de este capítulo III quedan recogidos en [4], trabajo hecho en colaboración con el profesor M. D. Contreras, donde el teorema 3.1.2 ha sido una pieza clave para obtener nuevos resultados sobre operadores definidos sobre espacios de Banach clásicos tales como H^∞, H^1, el álgebra disco, L^1/H^1_0, JB^*-triples o el espacio $BMOA$.

Terminología y notación

A lo largo de toda la memoria trabajaremos con espacios de Banach. Para la nomenclatura de los conceptos no definidos en este trabajo, nos remitimos a los textos de B. Beauzamy [8], C. L. DeVito [18] y G. J. O. Jameson [31].

En particular, si X es un espacio de Banach, denotaremos por X^* y X^{**} el dual y el bidual topológico de X, respectivamente. En ciertos casos, identificaremos el espacio de Banach X con su imagen canónica en su bidual.

Si dos espacios de Banach X e Y son isométricos, lo representaremos por $X \equiv Y$. Si Y es un subespacio cerrado de un espacio de Banach X y consideramos el espacio cociente X/Y, la norma canónica en este espacio cociente viene dada por

$$\|x + Y\| = \inf\{\|x + y\| \, : \, y \in Y\}, \quad x \in X.$$

Si X e Y son dos espacios de Banach, $L(X, Y)$ representará el conjunto de los operadores lineales y continuos de X en Y. Cuando $Y = X$, lo denotaremos por $L(X)$. Si T es un operador de X en Y, entonces Ker$T$ designará el núcleo de T e Img$T$ designará el subespacio imagen de T.

Por otra parte, dado un número $p \in (1, \infty)$, denotamos por p' al exponente conjugado de p, es decir, p' es el número tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Para los casos extremos, $p = 1$ y $p = \infty$, los exponentes conjugados serán $p' = \infty$ y $p' = 1$, respectivamente. Si A es un subconjunto de $[1, \infty]$, A' representará el subconjunto de $[1, \infty]$ formado por aquellos números que son exponentes conjugados de algún número de A.

Por último, denotaremos por

- c_0 el espacio de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \in \mathbb{K}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0.$$

- l_p, con $1 < p < \infty$, el espacio de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \in \mathbb{K}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^p < \infty.$$

- l_∞ el espacio de las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n \in \mathbb{K}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty.$$

- $L^p(\mu)$ el espacio de las (clases de) funciones p-integrables en un espacio de medida (S, Σ, μ).

Capítulo I

Ultraproductos y representabilidad finita

1.1 Distancia de Banach-Mazur

El concepto de distancia de Banach-Mazur entre espacios de Banach fue introducido por S. Banach en [2, p. 51] en colaboración con Mazur. Hoy en día, juega un papel básico en el estudio de las propiedades locales de espacios de Banach.

Definición 1.1.1 *Sean X e Y dos espacios de Banach isomorfos. Se define la distancia de Banach-Mazur de X a Y como*

$$d(X,Y) = \inf\{\|T\|\|T^{-1}\| \ : \ T : X \longrightarrow Y \text{ es un isomorfismo } \}.$$

Si X e Y no son isomorfos se dirá que $d(X,Y) = \infty$.

La distancia de Banach-Mazur es una "métrica" multiplicativa, es decir, para cualesquiera espacios de Banach X, Y y Z, se verifica

1. $d(X,Y) \geq 1$,
2. $d(X,Y) = d(Y,X)$, y
3. $d(X,Y) \leq d(X,Z)d(Z,Y)$.

Evidentemente, si X e Y son isométricos, entonces $d(X,Y) = 1$. Un argumento de compacidad muestra que el recíproco es cierto si los espacios X e Y son finito-dimensionales [60, p. 71].

De esta manera, si para cada natural n, se denota por $\mathcal{F}_n$ a la clase de todos los espacios de Banach n-dimensionales y se establece la relación de equivalencia:

$$X, Y \in \mathcal{F}_n \text{ son equivalentes si y sólo si } d(X,Y) = 1,$$

podemos considerar el conjunto de todas las clases de equivalencia de elementos de $\mathcal{F}_n$, llamémosle $\tilde{\mathcal{F}}_n$. El conjunto $\tilde{\mathcal{F}}_n$ dotado de la métrica ρ inducida por la función $\log d(.,.)$ sobre $\tilde{\mathcal{F}}_n \times \tilde{\mathcal{F}}_n$ es un espacio métrico compacto llamado *compacto de Minkowski.* Información adicional acerca de dicho compacto queda recogida en [57, cap. 9].

En el siguiente lema recogemos la relación entre la distancia de Banach-Mazur y la dualidad. Este resultado es, sin duda, conocido pero no hemos logrado obtener una referencia explícita.

Lema 1.1.1 *Sean X e Y dos espacios de Banach, entonces*

$$d(X^*, Y^*) \leq d(X, Y).$$

Si, además, X e Y son reflexivos, entonces

$$d(X^*, Y^*) = d(X, Y).$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $T : X \longrightarrow Y$ un isomorfismo. Evidentemente, $T^* : Y^* \longrightarrow X^*$ es un isomorfismo también. Además,

$$\|T\| = \|T^*\| \text{ y}$$

$$\|T^{-1}\| = \|(T^{-1})^*\| = \|(T^*)^{-1}\|.$$

Por tanto

$$\{\|T\|\|T^{-1}\| : T : X \to Y \text{ isomorfismo}\} \subset \{\|S\|\|S^{-1}\| : S : Y^* \to X^* \text{ isomorfismo}\}$$

y, de esta forma, $d(X^*, Y^*) \leq d(X, Y)$.

Supongamos ahora que X e Y son espacios reflexivos. Puesto que X y X^{**} (respectivamente, Y e Y^{**}) son isométricos, se tiene que

$$d(X,Y) \leq d(X, X^{**})d(X^{**}, Y^{**})d(Y^{**}, Y) = d(X^{**}, Y^{**}) \leq d(X^*, Y^*).$$

■

1.2 Representabilidad finita y ultrapotencias

El concepto de representabilidad finita fue introducido por R. C. James [34] en el marco del estudio de los espacios de Banach super-reflexivos.

Antes de adentrarnos en la definición precisamos que, dado un cierto $\epsilon > 0$, se dice que dos espacios de Banach X e Y son $(1+\epsilon)$-*isomorfos* si $d(X, Y) < 1 + \epsilon$, es decir, si existe un isomorfismo $T : X \longrightarrow Y$ tal que

$$\|T\|\|T^{-1}\| < 1 + \epsilon.$$

A un isomorfismo que verifique esta condición lo llamaremos $(1+\epsilon)$-*isomorfismo*.

En particular, si X e Y son $(1+\epsilon)$-isomorfos existe un isomorfismo T de X sobre Y tal que

$$|\|Tx\| - \|x\|| \leq \epsilon\|x\|$$

para todo $x \in X$. A un operador que verifique esta última condición lo llamaremos ϵ-*isometría*.

Definición 1.2.1 *Dados dos espacios de Banach X e Y, se dice que Y está finitamente representado en X y se denota por $Y \prec X$, si para cada $\epsilon > 0$ y cada subespacio finito-dimensional M_0 de Y existe un subespacio finito dimensional M de X tal que M_0 y M son $(1+\epsilon)$-isomorfos.*

Esta definición, intuitivamente, indica que X contiene una copia "casi" isométrica de todos los subespacios finito-dimensionales de Y.

La representabilidad finita puede considerarse como una relación de preorden en la clase de todos los espacios de Banach puesto que verifica

1. $X \prec X$ (reflexividad),

2. Si $X \prec Y$ e $Y \prec Z$, entonces $X \prec Z$ (transitividad)

para cualesquiera espacios de Banach X, Y y Z.

No obstante, la representabilidad finita queda lejos de ser un orden parcial. Basta tomar los espacios l_1 y $L^1[0,1]$ y observar que l_1 está finitamente representado en $L^1[0,1]$, de hecho, l_1 se puede incluir isométricamente en $L^1[0,1]$, que $L^1[0,1]$ está finitamente representado en l_1 [37, p. 50] y, sin embargo, $L^1[0,1]$ y l_1 no son isomorfos ya que $L^1[0,1]$ contiene subespacios infinito-dimensionales reflexivos y l_1 no.

El análisis de la compatibilidad entre la representabilidad finita y los duales conduce a uno de los resultados más profundos de la teoría local de espacios de Banach, el *principio de reflexividad local*, debido a J. Lindenstrauss y H. P. Rosenthal [41].

Teorema 1.2.1 (Principio de reflexividad local).

Sea X un espacio de Banach y sean M un subespacio finito-dimensional de X^{**}, F un subespacio finito-dimensional de X^* y $\epsilon > 0$.

Entonces, existe un operador $T : M \longrightarrow X$ que es una ϵ- isometría tal que

$$Tm = m \text{ para todo } m \in M \cap X,$$

$$\langle Tm, f\rangle = \langle m, f\rangle \text{ para todo } m \in M \text{ y } f \in F.$$

En particular, observamos que el bidual de todo espacio de Banach X está finitamente representado en X.

Sin embargo, la relación entre la representabilidad finita entre dos espacios de Banach y sus respectivos duales parece no haberse tratado en la literatura y, de hecho, esta cuestión constituye uno de los ejes centrales de esta memoria (ver capítulo II).

Quizás, dos de los problemas esenciales de la representabilidad finita es, por un lado, caracterizar aquellos espacios de Banach que están finitamente representados en los espacios clásicos de sucesiones y, por otro lado, averiguar cuándo un cierto espacio clásico está finitamente representado en un espacio de Banach X. A continuación mostramos una recopilación de resultados referentes al primer problema.

Teorema 1.2.2 *(1) Un espacio de Banach X está finitamente representado en l_2 si y sólo si X es isométrico a un espacio de Hilbert.*
(2) Un espacio de Banach X está finitamente representado en l_p, con $1 \leq p < \infty$, $p \neq 2$, si y sólo si X es isométrico a un subespacio de un espacio $L^p(\mu)$, para un cierto espacio de medida (S, Σ, μ).
(3) Todo espacio de Banach X está finitamente representado en c_0.

El resultado (1) queda recogido en [37, p. 51], el enunciado (2) es debido a J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle y J. L. Krivine [13] y el tercero puede consultarse en [2, p. 171].

Para el segundo de los problemas citados antes, vamos a recordar los conceptos de *tipo* y *cotipo* de un espacio de Banach.

Un espacio de Banach X se dice que tiene *tipo* p, con $1 \leq p \leq 2$, si existe una constante C tal que, para cualquier familia finita $x_1, \ldots, x_n$ de elementos de X, se verifica

$$\left(\int_0^1 \| \sum_{i=1}^n r_i(t) x_i \|^p dt \right)^{1/p} \leq C \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p},$$

y se dice que tiene *cotipo* q, con $2 \leq q < \infty$, si existe una constante C tal que para cualquier familia finita $x_1, \ldots, x_n$ de elementos de X se verifica

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^q\right)^{1/q} \leq C \left(\int_0^1 \|\sum_{i=1}^{n} r_i(t) x_i\|^q dt\right)^{1/q}.$$

En ambos casos, r_n representa la función n-ésima de Rademacher en $[0,1]$. Es conocido que todo espacio de Banach tiene tipo $p = 1$ y cotipo $q = \infty$, llamados tipo y cotipo triviales. Para información adicional puede consultarse el texto de B. Beauzamy [8, p. 303–320].

Teorema 1.2.3 *(1) El espacio l_2 está finitamente representado en todo espacio de Banach infinito-dimensional.*
(2) El espacio l_1 está finitamente representado en un espacio de Banach X si y sólo si X sólo tiene tipo trivial.
(3) El espacio c_0 está finitamente representado en un espacio de Banach X si y sólo si X sólo tiene cotipo trivial.

La primera afirmación es el famoso *teorema de Dvoreztky* [22], el segundo resultado es debido a G. Pisier [49], mientras que el tercero se debe a B. Maurey y G. Pisier [43]. Hacemos notar que, además, G. Pisier [49] probó que l_1 está finitamente representado en un espacio de Banach X si y sólo si l_1 está finitamente representado en su dual X^*. El problema de caracterizar cuándo el espacio l_p, con $1 < p < \infty$ y $p \neq 2$, está representado finitamente en un espacio de Banach X es bastante más difícil. Un resultado muy conocido que, en cierto sentido, facilita el problema es el teorema de Krivine.

Teorema 1.2.4 *Sea $1 < p < \infty$ y $p \neq 2$. Entonces l_p está finitamente representado en un espacio de Banach X si y sólo si existe una constante $K \geq 1$ tal que para cada número natural n existe un subespacio finito-dimensional M_n de X con*

$$d(l_p^n, M_n) \leq K.$$

Inicialmente, este teorema fue probado por J. L. Krivine [38] para retículos de Banach y la prueba fue extendida para espacios de Banach arbitrarios por H. P. Rosenthal [51].

En este contexto, un resultado en el sentido positivo conseguido es el siguiente, debido a B. Maurey y G. Pisier [43].

Teorema 1.2.5 *Sea X un espacio de Banach y sean*

$$p_X = \sup\{p \in [1,\infty] \, : \, X \text{ tiene tipo } p\},$$

$$q_X = \inf\{q \in [1,\infty] \, : \, X \text{ tiene cotipo } q\}.$$

Entonces, l_{p_X} y l_{q_X} están finitamente representados en X.

La representabilidad finita está íntimamente conectada a una cierta construcción matemática, tomada de la Lógica Matemática, denominada ultrapotencia de un espacio de Banach. Su introducción en el contexto de espacios de Banach es debida a D. Dacunha-Castelle y J. L. Krivine en [14]. Pasamos a detallar dicha construcción. Sea $\mathcal{I}$ un conjunto y $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de $\mathcal{I}$, entonces $\mathcal{F}$ es un *filtro* sobre $\mathcal{I}$ si verifica

(a) $\mathcal{F}$ es no vacío y $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

(b) si $F, F' \in \mathcal{F}$, entonces $F \cap F' \in \mathcal{F}$,

(c) si $F \in \mathcal{F}$ y $F \subset F'$, entonces $F' \in \mathcal{F}$.

Si, además, $\mathcal{F}$ es maximal respecto de la inclusión, se denomina *ultrafiltro*. Un ultrafiltro *trivial* sobre un conjunto $\mathcal{I}$ es el formado por todos los subconjuntos de $\mathcal{I}$ que contienen a un punto fijo $i_0 \in \mathcal{I}$. En el resto de la memoria, trabajaremos con ultrafiltros no triviales a no ser que explícitamente se indique lo contrario.

Teniendo en cuenta las propiedades anteriores, se puede definir de modo natural el concepto de límite a través de un ultrafiltro $\mathcal{U}$.

Definición 1.2.2 *Sean X un espacio de Banach, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$, $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de elementos de X y $x \in X$. Diremos que x es el límite a través del ultrafiltro $\mathcal{U}$ de la familia $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ y lo denotaremos por*

$$x = \lim_{\mathcal{U}} x_i,$$

si para cada $\epsilon > 0$ se puede encontrar un subconjunto $I_0 \in \mathcal{U}$ de manera que $\|x_i - x\| < \epsilon$ para todo $i \in I_0$.

Evidentemente, dicho límite, si existe, es único. La gran utilidad del manejo de los ultrafiltros reside en el siguiente lema [29].

Lema 1.2.1 *Sean K un espacio de Hausdorff compacto y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto $\mathcal{I}$, entonces para cada familia $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ con $x_i \in K$ el límite a través del ultrafiltro $\mathcal{U}$,*

$$\lim_{\mathcal{U}} x_i$$

existe en K.

Dado un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$ y dada $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de espacios de Banach, podemos considerar el espacio vectorial $l_\infty(\mathcal{I}, X_i)$ de las familias $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ con $x_i \in X_i$, para todo $i \in \mathcal{I}$, tales que

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} \|x_i\| < \infty.$$

Con la norma

$$\|(x_i)_i\|_\infty = \sup_{i\in\mathcal{I}} \|x_i\| \ , \ (x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X_i),$$

$l_\infty(\mathcal{I}, X_i)$ se convierte en un espacio de Banach. Finalmente, denotamos por $N_\mathcal{U}$ el subespacio cerrado de $l_\infty(\mathcal{I}, X_i)$ formado por todas las familias $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ que verifican que $\lim_\mathcal{U} \|x_i\| = 0$.

Definición 1.2.3 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto $\mathcal{I}$. Se define el ultraproducto $(X_i)_{\mathcal{U}}$ de la familia de espacios de Banach $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ respecto del ultrafiltro $\mathcal{U}$ como el espacio cociente*

$$l_\infty(\mathcal{I}, X_i)/N_{\mathcal{U}}$$

dotado de la norma cociente canónica.

Cuando todos los espacios X_i coinciden con un determinado espacio de Banach X, se le denomina ultrapotencia del espacio de Banach X.

Dado un elemento $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X_i)$, la correspondiente clase de equivalencia en el ultraproducto $(X_i)_{\mathcal{U}}$ se denotará por $(x_i)_{\mathcal{U}}$. El espacio $(X_i)_{\mathcal{U}}$ es un espacio de Banach y la norma, en virtud del lema 1.2.1, puede expresarse como

$$\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|,$$

para cada $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X_i)_{\mathcal{U}}$. Hacemos notar que si $\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| \leq M$, para un $M > 0$, entonces existe un representante $(\tilde{x}_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X_i)$ y existe $I_0 \in \mathcal{U}$ tal que, para cada $i \in I_0$, se verifica que

$$\|\tilde{x}_i\| \leq M,$$

y, de forma análoga, si $m \leq \|(x_i)_{\mathcal{U}}\|$.

Si $\mathcal{U}$ es el ultrafiltro trivial generado por el elemento $i_0 \in \mathcal{I}$, entonces $(X_i)_{\mathcal{U}}$ es isométricamente isomorfo a X_{i_0}.

Por otra parte, todo espacio de Banach se puede identificar con un subespacio de cualquier ultrapotencia suya $(X)_{\mathcal{U}}$, [29], a través de la siguiente inyección isométrica

$$\begin{array}{rcl} J : X & \longrightarrow & (X)_{\mathcal{U}} \\ x & \longrightarrow & Jx = (x_i)_{\mathcal{U}} \end{array}$$

donde $(x_i)_{\mathcal{U}}$ es la clase de equivalencia asociada a $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ con $x_i = x$ para todo $i \in \mathcal{I}$. Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro no trivial, en general, los espacios X y $(X)_{\mathcal{U}}$ no son isométricos. De hecho, si X es infinito-dimensional, $(X)_{\mathcal{U}}$ es no separable [25, p. 74]. Pero cuando X es finito-dimensional, usando la compacidad de la bola unidad, puede verse fácilmente que X y $(X)_{\mathcal{U}}$ sí son isométricos. Basta tomar la isometría que a cada $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}$ le asigna $\lim_{\mathcal{U}} x_i \in X$ [8, p. 221].

Las ultrapotencias se comportan de manera natural frente a la formación de subespacios y de espacios cocientes como veremos a continuación. La prueba del primer lema es trivial. El segundo resultado es, probablemente, conocido, no obstante, añadimos una prueba por no disponer de referencias explícitas, puesto que será utilizado significativamente en el capítulo II.

Lema 1.2.2 *Sean X e Y dos espacios de Banach y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$. Si X es isométrico a un subespacio de Y, entonces la ultrapotencia $(X)_{\mathcal{U}}$ es isométrica a un subespacio de la ultrapotencia $(Y)_{\mathcal{U}}$.*

Lema 1.2.3 *Si X e Y son espacios de Banach e Y es un subespacio cerrado de X, entonces*

$$(X/Y)_{\mathcal{U}} \text{ y } (X)_{\mathcal{U}}/(Y)_{\mathcal{U}}$$

son isométricos, para cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$.

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$. Construyamos el operador

$$T_1 : (X)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (X/Y)_{\mathcal{U}}$$

de la siguiente manera:

Dado $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}$, tomamos un representante $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$. Para cada $i \in \mathcal{I}$, se tiene que

$$\|x_i + Y\| \leq \|x_i\| \leq \|(x_i)_i\|_\infty.$$

Por tanto, podemos considerar

$$T_1((x_i)_{\mathcal{U}}) := (x_i + Y)_{\mathcal{U}}.$$

T_1 está bien definida puesto que si $(x_i)_{\mathcal{U}} = (\tilde{x}_i)_{\mathcal{U}}$, entonces

$$\lim_{\mathcal{U}} \|(x_i + Y) - (\tilde{x}_i + Y)\| = \lim_{\mathcal{U}} \|(x_i - \tilde{x}_i) + Y\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|x_i - \tilde{x}_i\| = 0.$$

Obviamente, T_1 es lineal. Construyamos, a partir de él, el operador

$$T : (X)_{\mathcal{U}}/(Y)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (X/Y)_{\mathcal{U}}$$

de la siguiente manera: dado $x + (Y)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}/(Y)_{\mathcal{U}}$, consideramos un representante $x \in (X)_{\mathcal{U}}$. Definimos

$$T(x + (Y)_{\mathcal{U}}) := T_1(x).$$

T está bien definida puesto que si $x+(Y)_{\mathcal{U}} = \tilde{x}+(Y)_{\mathcal{U}}$, con $x = (x_i)_{\mathcal{U}}$ y $\tilde{x} = (\tilde{x}_i)_{\mathcal{U}}$, entonces $x - \tilde{x} \in (Y)_{\mathcal{U}}$ y, en particular, para cada $i \in \mathcal{I}$, el elemento $x_i - \tilde{x}_i \in Y$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\|T_1(x) - T_1(\tilde{x})\| &= \|T_1(x - \tilde{x})\| = \|T_1(x_i - \tilde{x}_i)_{\mathcal{U}}\| \\ &= \|(x_i - \tilde{x}_i + Y)_{\mathcal{U}}\| = 0.\end{aligned}$$

T es lineal y T es, además, una isometría puesto que se verifica para cualquier $z = (x_i)_{\mathcal{U}} + (Y)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}/(Y)_{\mathcal{U}}$,

$$\begin{aligned}\|z\| &= \inf_{(y_i)_{\mathcal{U}} \in (Y)_{\mathcal{U}}} \|(x_i)_{\mathcal{U}} + (y_i)_{\mathcal{U}}\| = \inf_{(y_i)_{\mathcal{U}} \in (Y)_{\mathcal{U}}} \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + y_i\| \\ &\geq \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + Y\| = \|(x_i + Y)_{\mathcal{U}}\| = \|T_1((x_i)_{\mathcal{U}})\| = \|T(z)\|.\end{aligned}$$

Y, recíprocamente, dado $\epsilon > 0$, para cada $i \in \mathcal{I}$, el elemento $x_i + Y \in X/Y$ y, por tanto, existe $\tilde{y}_i \in Y$ que verifica

$$\|x_i + \tilde{y}_i\| - \epsilon \leq \|x_i + Y\|.$$

Se observa que $(\tilde{y}_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, Y)$ puesto que, para cada $i \in \mathcal{I}$,

$$\|\tilde{y}_i\| \leq \|\tilde{y}_i + x_i\| + \|x_i\| \leq \|x_i + Y\| + \epsilon + \|x_i\| \leq 2\|(x_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_\infty + \epsilon.$$

Por tanto

$$\inf_{(y_i)_{\mathcal{U}} \in (Y)_{\mathcal{U}}} \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + y_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + \tilde{y}_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|x_i + Y\| + \epsilon$$

o, equivalentemente,

$$\|z\| \leq \|T(z)\| + \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$, con lo cual deducimos que

$$\|T(z)\| = \|z\|.$$

■

El comportamiento de los ultraproductos frente a la dualidad ha sido un tema bastante estudiado. Comenzamos comentando la relación entre el dual de un ultraproducto de espacios de Banach y el ultraproducto de los correspondientes espacios duales [29].

Si $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$ y $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ es una familia de espacios de Banach, entonces el ultraproducto $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$ se inyecta isométricamente en el espacio de Banach $(X_i)_{\mathcal{U}}^*$ por medio de la isometría

$$J : (X_i^*)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (X_i)_{\mathcal{U}}^*$$

que a cada $f = (f_i)_{\mathcal{U}} \in (X_i^*)_{\mathcal{U}}$ le hace corresponder $J(f) \in (X_i)_{\mathcal{U}}^*$ definido por

$$\langle J(f), x\rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle f_i, x_i\rangle, \quad x = (x_i)_{\mathcal{U}} \in (X_i)_{\mathcal{U}}.$$

C. W. Henson y L. C. Moore, Jr. [27] dan condiciones bajo las cuales esta isometría es sobreyectiva. Antes de presentar el resultado, recordamos que un ultrafiltro $\mathcal{U}$ es *numerablemente incompleto* si existe una sucesión decreciente $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{U}$ con intersección vacía.

Teorema 1.2.6 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro numerablemente incompleto sobre un conjunto $\mathcal{I}$ y sea $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de espacios de Banach. Entonces $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$ y $(X_i)_{\mathcal{U}}^*$ son isométricos si y sólo si $(X_i)_{\mathcal{U}}$ es reflexivo.*

Cuando en la identificación anterior trabajamos con ultrapotencias, se obtiene el siguiente resultado [55]

Teorema 1.2.7 *Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:*
(1) Todo espacio de Banach Y que está finitamente representado en X es reflexivo.
(2) $(X)^*_{\mathcal{U}}$ es isométrico a $(X^*)_{\mathcal{U}}$ para cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$.

Este resultado pone de manifiesto que, en general, $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$ y $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$ no son isométricos; sin embargo, K. D. Kürsten [39] y J. Stern [55] han demostrado que $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$ y $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$ "localmente pueden identificarse". Este resultado, que presentamos a continuación, puede considerarse la versión para ultraproductos del principio de reflexividad local para espacios de Banach.

Teorema 1.2.8 (Dualidad local de ultraproductos). *Sea $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de espacios de Banach y $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathcal{I}$. Sean M y F dos subespacios finito-dimensionales de $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$ y $(X_i)_{\mathcal{U}}$, respectivamente, y sea $\epsilon > 0$. Entonces, existe un operador T de M en $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$ que es una ϵ-isometría y satisface*

$$Tm = m \text{ para todo } m \in M \cap (X_i^*)_{\mathcal{U}},$$

$$\langle Tm, f\rangle = \langle m, f\rangle \text{ para todo } m \in M,\ f \in F.$$

Hacemos notar que en el teorema se está identificando el elemento $Tm \in (X_i^*)_{\mathcal{U}}$ con el correspondiente elemento en el espacio de Banach $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$ del modo canónico descrito anteriormente.

En particular, del teorema se deduce que $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$ está finitamente representado en $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$.

A continuación presentamos otra identificación bastante útil en la teoría de ultraproductos: la identificación de $(X_i)_{\mathcal{U}}$ como un subespacio de $(X_i^*)^*_{\mathcal{U}}$ [30]. Puesto que la vamos a utilizar en el capítulo III, damos su demostración por no poder ofrecer una referencia explícita de la misma.

Lema 1.2.4 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$. Sea $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de espacios de Banach. Entonces el ultraproducto $(X_i)_{\mathcal{U}}$ es isométrico a un subespacio del espacio de Banach $(X_i^*)^*_{\mathcal{U}}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Consideramos la aplicación

$$J_1 : (X_i)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (X_i^*)_{\mathcal{U}}^*$$

que a cada $x = (x_i)_{\mathcal{U}} \in (X_i)_{\mathcal{U}}$ le hace corresponder $J_1(x) \in (X_i^*)_{\mathcal{U}}^*$ definido por

$$\langle J_1(x), f\rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle f_i, x_i\rangle$$

para toda $f = (f_i)_{\mathcal{U}} \in (X_i^*)_{\mathcal{U}}$. Obviamente, J_1 es lineal y es una isometría puesto que si $x = (x_i)_{\mathcal{U}} \in (X_i)_{\mathcal{U}}$,

$$\|J_1 x\| = \sup_{\|(f_i)_{\mathcal{U}}\| \leq 1} |\lim_{\mathcal{U}} \langle f_i, x_i\rangle| \leq \sup_{\|(f_i)_{\mathcal{U}}\| \leq 1} \lim_{\mathcal{U}} (\|f_i\| \|x_i\|)$$

$$= \sup_{\|(f_i)_{\mathcal{U}}\| \leq 1} \left(\lim_{\mathcal{U}} \|f_i\|\right) \left(\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\|\right) = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = \|x\|,$$

y, recíprocamente, dado $\epsilon > 0$ cualquiera, para cada $i \in \mathcal{I}$, existe un elemento $\tilde{f}_i \in B_{X_i^*}$ de manera que

$$|\langle \tilde{f}_i, x_i\rangle| + \epsilon > \|x_i\|.$$

Construyamos la correspondiente clase de equivalencia $(\tilde{f}_i)_{\mathcal{U}} \in B_{(X_i^*)_{\mathcal{U}}}$ para deducir que

$$\|J_1(x)\| = \sup_{\|(f_i)_{\mathcal{U}}\| \leq 1} |\lim_{\mathcal{U}} \langle f_i, x_i\rangle| \geq \lim_{\mathcal{U}} |\langle \tilde{f}_i, x_i\rangle|$$

$$> \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| - \epsilon = \|(x_i)_{\mathcal{U}}\| - \epsilon = \|x\| - \epsilon$$

para todo $\epsilon > 0$, es decir, $\|J_1(x)\| = \|x\|$.

■

La conexión entre la representabilidad finita y las ultrapotencias fue obtenida, de forma independiente, por C.W. Henson-L.C. Moore, Jr. [28] y por J. Stern [54]. Por un lado, se observa que los subespacios finito-dimensionales de un ultraproducto $(X_i)_{\mathcal{U}}$ están "cercanos" a determinados subespacios de X_i [52].

Teorema 1.2.9 *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$, $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de espacios de Banach, M un subespacio finito-dimensional de $(X_i)_{\mathcal{U}}$ y $\epsilon > 0$. Supongamos que el conjunto $\{(x_i^1)_{\mathcal{U}}, \ldots, (x_i^n)_{\mathcal{U}}\}$ constituye una base para M. Entonces se puede encontrar un conjunto $\mathcal{I}_0 \in \mathcal{U}$ y se pueden escoger unos representantes $(\tilde{x}_i^k)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X_i)$ de $(x_i^k)_{\mathcal{U}}$ para cada $k = 1, \ldots, n$ de manera que, si $i \in I_0$, el operador*

$$G_i : M \longrightarrow X_i$$

definido sobre los elementos de la base como

$$G_i(x_i^k)_{\mathcal{U}} = \tilde{x}_i^k \quad para \quad cada \quad k = 1, \ldots, n,$$

es una ϵ-isometría.

Por otro lado, hacemos notar que en el estudio de la relación entre la representabilidad finita y los ultraproductos juegan un papel importante los ultrafiltros que detallamos a continuación.

- Dado X un espacio de Banach, denotamos por $\mathcal{I}_X$ el conjunto de todos los pares (M, ϵ) con M un subespacio finito dimensional de X y $0 < \epsilon < 1$. Tomamos el orden parcial sobre $\mathcal{I}_X$ dado por la relación

  $$(M_1, \epsilon_1) \leq (M_2, \epsilon_2) \text{ si y sólo si } \epsilon_2 \leq \epsilon_1 \text{ y } M_1 \subset M_2.$$

  El filtro asociado a este orden consiste en todos los conjuntos $I(M_0, \epsilon_0) \subset \mathcal{I}_X$ dados por

  $$I(M_0, \epsilon_0) = \{(M, \epsilon) : (M_0, \epsilon_0) \leq (M, \epsilon)\}.$$

  Llamamos $\mathcal{U}_{F,X}$ a un ultrafiltro que domine a dicho filtro.

- Tomamos ahora $\tilde{\mathcal{I}}_X$ el conjunto de todas las ternas (M, F, ϵ) con M un subespacio finito dimensional de X^{**}, F un subespacio finito-dimensional de X^* y $0 < \epsilon < 1$ y consideramos el orden parcial sobre $\tilde{\mathcal{I}}_X$ dado por la relación

  $$(M_1, F_1, \epsilon_1) \leq (M_2, F_2, \epsilon_2) \text{ si y sólo si } \epsilon_2 \leq \epsilon_1, \ M_1 \subset M_2 \text{ y } F_1 \subset F_2.$$

Los conjuntos $I(M_0, F_0, \epsilon_0) \subset \mathcal{I}_X$ dados por

$$I(M_0, F_0, \epsilon_0) = \{(M, F, \epsilon) : (M_0, F_0, \epsilon_0) \leq (M, F, \epsilon)\}$$

generan un filtro y, al igual que antes, llamamos $\tilde{\mathcal{U}}_{F,X}$ a un ultrafiltro que lo contenga.

La importancia de estos ultrafiltros queda reflejada en los siguientes resultados [29].

Teorema 1.2.10 *Sean X e Y dos espacios de Banach. Si Y está finitamente representado en X entonces Y es isométrico a un subespacio de la ultrapotencia $(X)_{\mathcal{U}_{F,Y}}$.*

Además, si Y es X^{**}, existe una inyección isométrica

$$\phi : X^{**} \longrightarrow (X)_{\tilde{\mathcal{U}}_{F,X}}$$

tal que $\phi(X^{**})$ está 1-complementado en $(X)_{\tilde{\mathcal{U}}_{F,X}}$ y la restricción de ϕ a X es la inyección canónica de X en su ultrapotencia.

Como conclusión se obtiene la siguiente caracterización.

Teorema 1.2.11 *Sean X e Y dos espacios de Banach. Entonces Y está finitamente representado en X si y sólo si existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de manera que Y es isométrico a un subespacio de $(X)_{\mathcal{U}}$.*

En particular, toda ultrapotencia $(X)_{\mathcal{U}}$ está finitamente representada en X. Para el caso de ultrafiltros numerablemente incompletos se puede conseguir mayor información.

Teorema 1.2.12 *Sean X e Y dos espacios de Banach. Si Y es separable y está finitamente representado en X, entonces Y se inyecta isométricamente en cualquier ultrapotencia $(X)_{\mathcal{U}}$ con $\mathcal{U}$ ultrafiltro numerablemente incompleto.*

1.3 Ultraproductos iterados

En la sección anterior se ha visto que $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$ y $(X_i)_{\mathcal{U}}^*$, a pesar de no ser isométricos, son "localmente" similares. De hecho, este resultado admite una formulación de un modo global bastante preciso, la cual requiere el concepto de ultraproductos iterados que pasamos a detallar.

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos ultrafiltros sobre los conjuntos $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$, respectivamente. Denotamos por $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ la familia de todos los subconjuntos A de $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$ de manera que

$$\{j \in \mathcal{J} : \{i \in \mathcal{I} : (i,j) \in A\} \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}.$$

Se tiene que $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ así definido constituye un ultrafiltro sobre el conjunto $\mathcal{I} \times \mathcal{J}$. Es más, si $\mathcal{U}$ o $\mathcal{V}$ es no trivial, entonces $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ lo es y, si $\mathcal{U}$ o $\mathcal{V}$ es numerablemente incompleto, entonces $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ también lo es.

El siguiente resultado nos da una descripción del ultraproducto a través del ultrafiltro $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ [52].

Teorema 1.3.1 *Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos ultrafiltros sobre los conjuntos de índices $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$, respectivamente. Sea $(X_{(i,j)})_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{J}}$ una familia de espacios de Banach. Entonces, los espacios $(X_{(i,j)})_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ y $((X_{(i,j)})_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$ son isométricos, en virtud de la isometría*

$$\Psi : (X_{(i,j)})_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} \longrightarrow ((X_{(i,j)})_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$$

que a cada $x = (x_{ij})_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ le hace corresponder

$$\Psi(x) := (x_j)_{\mathcal{V}}$$

donde $(x_j)_{\mathcal{V}}$ es la clase de equivalencia del elemento $(x_j)_{j\in\mathcal{J}} \in l_\infty(\mathcal{J}, (X_{(i,j)})_{\mathcal{U}})$ definido por $x_j = (x_{ij})_{\mathcal{U}}$.

Así pues, podemos identificar el ultraproducto respecto del ultrafiltro producto $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ como un ultraproducto iterado. En particular, notemos que si el elemento $(x_{ij})_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} \in (X_{(i,j)})_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ entonces,

$$\lim_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} \|x_{ij}\| = \lim_{\mathcal{V}} \lim_{\mathcal{U}} \|x_{ij}\|.$$

Los ultraproductos iterados constituyen la base de dos grandes resultados en la teoría de los ultraproductos de espacios de Banach. Por un lado, J. Stern [55] consigue adaptar el teorema de isomorfismo de Keisler-Shelah estudiado en el contexto de la teoría de modelos, en términos de ultraproductos iterados.

Teorema 1.3.2 *Sea X un espacio de Banach y sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ dos ultrafiltros sobre $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$, respectivamente. Entonces, existe un conjunto $\mathcal{K}$ y un ultrafiltro $\mathcal{W}$ sobre $\mathcal{K}$ tal que*

$$(X)_{\mathcal{U}\times\mathcal{W}} \text{ y } (X)_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}} \text{ son isométricos.}$$

Por otro lado, los ultraproductos iterados han permitido a J. Stern [55] detallar de una forma global la relación entre el dual de un ultraproducto y el ultraproducto de los duales. De hecho, comprueba que el espacio $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$ se puede identificar con un subespacio complementado de alguna ultrapotencia de $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$.

Teorema 1.3.3 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$ y sea $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de espacios de Banach. Existe otro ultrafiltro $\mathcal{V}$ sobre un conjunto de índices $\mathcal{J}$ y existe una inyección isométrica ϕ de $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$ en $((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$ tal que $\phi((X_i)^*_{\mathcal{U}})$ está 1-complementado en $((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$ y la restricción de ϕ a $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$ es la inyección canónica de $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$ en su ultrapotencia $((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$.*

1.4 Ultraproductos de operadores

El concepto de ultraproducto de una familia de operadores a través de un ultrafiltro jugará un papel fundamental en el capítulo III a la hora de estudiar la representabilidad finita de operadores e, incluso, será de gran utilidad en algunas de las demostraciones dadas en el capítulo II (véase teorema 2.2.4) y en la sección siguiente. Pasamos a detallar su construcción [29].

Definición 1.4.1 *Sean $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ e $(Y_i)_{i\in\mathcal{I}}$ dos familias de espacios de Banach. Para cada $i \in \mathcal{I}$, sean T_i operadores lineales y continuos de X_i en Y_i tales que*

$$\sup_{i\in\mathcal{I}} \|T_i\| < \infty.$$

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre $\mathcal{I}$. El operador

$$(T_i)_\mathcal{U} : (X_i)_\mathcal{U} \longrightarrow (Y_i)_\mathcal{U}$$

definido por $(T_i)_\mathcal{U}(x_i)_\mathcal{U} = (T_i x_i)_\mathcal{U}$ para cada $(x_i)_\mathcal{U} \in (X_i)_\mathcal{U}$ se llama ultraproducto de la familia de operadores $(T_i)_{i\in\mathcal{I}}$ respecto al ultrafiltro $\mathcal{U}$.

Este operador está bien definido, es lineal, continuo y se verifica que

$$\|(T_i)_\mathcal{U}\| = \lim_\mathcal{U} \|T_i\|.$$

En el caso particular en que $X_i = X$, $Y_i = Y$ y $T_i = T$ para todo $i \in \mathcal{I}$, llamaremos a $(T)_\mathcal{U}$ *ultrapotencia del operador T a través del ultrafiltro $\mathcal{U}$*. En ese caso,

$$\|(T)_\mathcal{U}\| = \|T\| \quad \text{y} \quad (T)_\mathcal{U}(x) = T(x)$$

para todo $x \in X$, donde se está identificando el elemento $x \in X$ con el correspondiente elemento en $(X)_\mathcal{U}$. Puede probarse con facilidad que las ultrapotencias de operadores mantienen las isometrías y las proyecciones.

Lema 1.4.1 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal y continuo.*
(1) Si T es una isometría, entonces $(T)_\mathcal{U}$ es una isometría.
(2) Si Y es un subespacio cerrado de X y T es una proyección sobre Y, entonces $(T)_\mathcal{U}$ es una proyección sobre $(Y)_\mathcal{U}$.

1.5 El teorema de dualidad local de ultraproductos

Desde que J. Lindenstrauss y H. P. Rosenthal [41] enunciaron el principio de reflexividad local hasta nuestros días, han sido diversos los autores que han dirigido sus miradas a dicho teorema con el objetivo de obtener versiones más "fuertes" del mismo. Quizás, los dos ejemplos más significativos son los debidos a W. B. Johnson, H. P. Rosenthal y M. Zippin [35] y a T. Barton y X.-T. Yu [3].

W. B. Johnson, H. P. Rosenthal y M. Zippin analizaron la relación entre las normas de las proyecciones de los correspondientes subespacios finito-dimensionales de X^{**} y X.

Teorema 1.5.1 *Sea X un espacio de Banach. Sean M y F subespacios finito-dimensionales de X^{**} y X^*, respectivamente, y sea $0 < \epsilon < 1$. Supongamos que existe una proyección P de X^{**} sobre M con $\|P\| = \alpha$. Entonces existe un operador*

$$T : M \longrightarrow X$$

que es una ϵ-isometría y existe una proyección P_0 de X sobre $T(M)$ tales que

$$Tm = m \text{ para todo } m \in M \cap X,$$

$$\langle Tm, f\rangle = \langle m, f\rangle \text{ para todo } m \in M,\ f \in F, \text{ y}$$

$$\|P_0\| \leq \alpha(1+\epsilon).$$

Por otra parte, T. Barton y X.-T. Yu demostraron que el subespacio de X^* finito-dimensional puede ser, incluso, reflexivo.

Teorema 1.5.2 *Sea X un espacio de Banach y sean M un subespacio finito-dimensional de X^{**}, F un subespacio reflexivo de X^* y $\epsilon > 0$.*

Existe un operador $T : M \longrightarrow X$ que es una ϵ-isometría y tal que

$$Tm = m \text{ para todo } m \in M \cap X$$

$$\langle Tm, f\rangle = \langle m, f\rangle \text{ para todo } m \in M \text{ y } f \in F.$$

En ambos casos, se está identificando el elemento $Tm \in X$ con el correspondiente elemento de X^{**}.

En la demostración del teorema 1.5.2 interviene de forma primordial el siguiente resultado, debido a A. Wilansky [59].

Lema 1.5.1 *Sea X un espacio de Banach y sean F un subespacio reflexivo de X^*, $h \in X^{**}$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe un elemento $x \in X$ con*

$$\|x\| \leq (1+\epsilon)\|h\|,$$

$$\langle h, f\rangle = \langle f, x\rangle$$

para todo $f \in F$.

Hacemos notar que este lema es una generalización del famoso lema de Helly, pieza clave en algunas de las demostraciones del principio de reflexividad local [16] [21, p. 180] y que se reduce a este principio en el caso en que el subespacio de X^{**} de partida es uno-dimensional.

Teniendo en cuenta la similitud entre el principio de reflexividad local y el teorema de la dualidad local de ultraproductos, surge de modo natural el interrogante de si pueden obtenerse versiones paralelas a los refinamientos antes mencionados. En el resto de esta sección, nos dedicamos a probar que la pregunta tiene respuesta positiva.

Comenzamos con la versión para ultraproductos del teorema 1.5.1.

Teorema 1.5.3 *Sean $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$, $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de espacios de Banach, M y F dos subespacios finito-dimensionales de $(X_i)_{\mathcal{U}}^*$ y $(X_i)_{\mathcal{U}}$, respectivamente, y $\epsilon > 0$. Sea P una proyección de $(X_i)_{\mathcal{U}}^*$ sobre M con $\|P\| = \alpha$. Entonces existe un operador*

$$T : M \longrightarrow (X_i^*)_{\mathcal{U}}$$

que es una ϵ-isometría y existe una proyección P_0 de $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$ sobre $T(M)$ tal que

$$Tm = m \textit{ para todo } m \in M \cap (X_i^*)_{\mathcal{U}}$$

$$\langle Tm, f\rangle = \langle m, f\rangle \textit{ para todo } m \in M,\ f \in F,\ y$$

$$\|P_0\| \leq \alpha(1+\epsilon)$$

donde se está identificando el elemento $Tm \in (X_i^*)_{\mathcal{U}}$ con el correspondiente elemento en el espacio de Banach $(X_i)_{\mathcal{U}}^*$.

Demostración:

Sea $\delta > 0$ con $(1+\delta)^2 < 1+\epsilon$ y $\delta < \epsilon$. Aplicando el principio de reflexividad local al subespacio P^*M^* finito-dimensional de $(X_i)_{\mathcal{U}}^{**}$ y al subespacio M finito-dimensional de $(X_i)_{\mathcal{U}}^*$, obtenemos un operador

$$U : P^*M^* \longrightarrow (X_i)_{\mathcal{U}}$$

que es una δ-isometría y, además,

$$Ux = x \text{ para todo } x \in P^*M^* \cap (X_i)_{\mathcal{U}},$$

$$\langle (U \circ P^*)m^*, m\rangle = \langle P^*m^*, m\rangle \text{ para todo } m^* \in M^* \text{ y } m \in M.$$

Sea $S := U \circ P^*$.

Consideramos M y $\tilde{F} := \operatorname{span}\{F \cup \operatorname{Img(S)}\}$ subespacios finito-dimensionales de $(X_i)_{\mathcal{U}}^*$ y $(X_i)_{\mathcal{U}}$, respectivamente. Por la dualidad local de ultraproductos, podemos construir un operador

$$T : M \longrightarrow (X_i^*)_{\mathcal{U}}$$

que es una δ-isometría, tal que

a) $Tm = m$ para todo $m \in M \cap (X_i^*)_{\mathcal{U}}$,

b) $\langle Tm, \tilde{f}\rangle = \langle m, \tilde{f}\rangle$ para todo $m \in M$, $f \in \tilde{F}$.

En particular, T es una ϵ-isometría y por b), se obtiene trivialmente que

$$\langle Tm, f\rangle = \langle m, f\rangle$$

para todo $m \in M$ y $f \in F$. Sólo nos queda construir la proyección sobre $T(M)$ y evaluar su norma. Teniendo en cuenta que $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$ se inyecta isométricamente en $(X_i)_{\mathcal{U}}^*$, consideramos el operador

$$P_0 : (X_i^*)_{\mathcal{U}} \longrightarrow T(M) \subset (X_i^*)_{\mathcal{U}}$$

definido como la restricción de $T \circ S^*$ al ultraproducto $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$.

Por un lado,

$$\|P_0\| \leq \|T \circ S^*\| \leq \|T\|\|S\| \leq \|T\|\|U\|\|P^*\| \leq \alpha(1+\epsilon).$$

Por otro lado P_0 es una proyección sobre $T(M)$ porque para cada $m \in M$ y cada $m^* \in M^*$, usando b) y sabiendo que P es una proyección sobre M,

$$\langle (S^* \circ T)m, m^*\rangle = \langle Tm, Sm^*\rangle = \langle m, Sm^*\rangle = \langle m, (U \circ P^*)m^*\rangle$$

$$= \langle m, P^*m^*\rangle = \langle Pm, m^*\rangle = \langle m, m^*\rangle,$$

es decir $(S^* \circ T)m = m$ para todo $m \in M$. Aplicando en ambos miembros el operador T, obtenemos

$$P_0(Tm) = Tm \text{ para todo } m \in M.$$

■

Para la prueba de la extensión del teorema 1.5.2 necesitamos recordar distintas identificaciones en las que interviene el producto tensorial proyectivo $\otimes_\pi$, así como dar un lema análogo al de A. Wilansky con ultraproductos.

En concreto, las identificaciones son las siguientes:

Identificación 1. Si X e Y son dos espacios de Banach, entonces la aplicación que a cada $U \in L(X, Y^*)$ le hace corresponder $U' \in (X \otimes_\pi Y)^*$ definido por

$$U'(x \otimes_\pi y) = \langle Ux, y\rangle$$

para todo $x \in X$ e $y \in Y$, es una isometría entre $L(X, Y^*)$ y $(X \otimes_\pi Y)^*$ [17, p. 27].

Identificación 2. Si M es un espacio finito-dimensional, entonces la aplicación que a cada elemento $m \otimes_\pi (x_i)_\mathcal{U}$ de $M \otimes_\pi (X_i)_\mathcal{U}$ le hace corresponder el elemento $(m \otimes_\pi x_i)_\mathcal{U}$ de $(M \otimes_\pi X_i)_\mathcal{U}$, es una isometría entre $M \otimes_\pi (X_i)_\mathcal{U}$ y $(M \otimes_\pi X_i)_\mathcal{U}$ [52, p. 86].

Identificación 3. Si M es un espacio finito-dimensional, entonces la aplicación que a $(U_i)_\mathcal{U} \in (L(M, X_i^*))_\mathcal{U}$ le hace corresponder el operador $U \in L(M, (X_i^*)_\mathcal{U})$ definido por

$$Um = (U_i m)_\mathcal{U} \text{ para todo } m \in M,$$

es una isometría entre $(L(M, X_i^*))_\mathcal{U}$ y $L(M, (X_i^*)_\mathcal{U})$ [52, p. 86].

La versión del lema de A. Wilansky para ultraproductos es la siguiente.

Lema 1.5.2 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$ y sea $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ una familia de espacios de Banach. Sean F un subespacio reflexivo de $(X_i)_\mathcal{U}$, $h \in (X_i)_\mathcal{U}^*$ y $\epsilon > 0$. Entonces existe un elemento $x \in (X_i^*)_\mathcal{U}$ tal que*

$$\|x\| \leq (1 + \epsilon)\|h\|,$$

$$\langle h, f \rangle = \langle f, x \rangle$$

para todo $f \in F$ y donde se está identificando el elemento $x \in (X_i^*)_\mathcal{U}$ con el correspondiente elemento en $(X_i)_\mathcal{U}^*$.

DEMOSTRACIÓN:

Consideramos el operador

$$u : (X_i^*)_\mathcal{U} \longrightarrow F^*$$

definido por

$$u(x) := x|_F,$$

es decir, dado $x \in (X_i^*)_{\mathcal{U}}$, lo identificamos con el correspondiente elemento en $(X_i)_{\mathcal{U}}^*$ y tomamos la restricción de x al subespacio F. Evidentemente u es un operador acotado con $\|u\| \leq 1$. Denotemos por J_1 la inyección isométrica de $(X_i)_{\mathcal{U}}$ en $(X_i^*)_{\mathcal{U}}^*$ y por i la inclusión de F en $(X_i)_{\mathcal{U}}$. Aplicando la reflexividad de F, el operador adjunto de u va de F en $(X_i^*)_{\mathcal{U}}^*$ y, para cualesquiera $f = (f_i)_{\mathcal{U}} \in F$ y $(g_i)_{\mathcal{U}} \in (X_i^*)_{\mathcal{U}}$ se verifica

$$\langle u^*(f), (g_i)_{\mathcal{U}} \rangle = \langle f, u((g_i)_{\mathcal{U}}) \rangle = \langle f, (g_i)_{\mathcal{U}} \rangle$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} \langle g_i, f_i \rangle = \langle J_1((f_i)_{\mathcal{U}}), (g_i)_{\mathcal{U}} \rangle = \langle (J_1 \circ i)(f), (g_i)_{\mathcal{U}} \rangle.$$

Por tanto

$$u^* = J_1 \circ i$$

y, de hecho, es una isometría sobre la imagen. Luego

$$\tilde{u} : (X_i^*)_{\mathcal{U}}/\mathrm{Ker}u \longrightarrow F^*, \quad x + \mathrm{Ker}u \longmapsto u(x)$$

es una isometría (sobreyectiva).

Dado $h \in (X_i)_{\mathcal{U}}^*$, consideramos la restricción $h|_F$ de h a F. Como $\tilde{u}$ es una isometría sobreyectiva, podemos encontrar un elemento $\tilde{x} + \mathrm{Ker}u \in (X_i^*)_{\mathcal{U}}/\mathrm{Ker}u$ tal que

$$\tilde{u}(\tilde{x} + \mathrm{Ker}u) = h|_F \quad \text{y} \quad \|\tilde{u}(\tilde{x} + \mathrm{Ker}u)\| = \|h|_F\|.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $h \neq 0$. Tomamos $\epsilon' = \epsilon\|h\| > 0$. Podemos obtener $m \in \mathrm{Ker}u$ tal que

$$\|\tilde{x} + m\| - \epsilon' < \|\tilde{x} + \mathrm{Ker}u\|.$$

Definimos $x := \tilde{x} + m \in (X_i^*)_{\mathcal{U}}$. Se verifica que, para cualquier $f \in F$,

$$\|x\| \leq \|\tilde{x} + \mathrm{Ker}u\| + \epsilon' = \|h|_F\| + \epsilon' \leq (1 + \epsilon)\|h\|,$$

$$\langle h, f \rangle = \langle \tilde{u}(\tilde{x} + \mathrm{Ker}u), f \rangle = \langle u(\tilde{x}), f \rangle = \langle u(x), f \rangle = \langle x, f \rangle.$$

■

Finalmente, presentamos la versión para ultraproductos del teorema 1.5.2.

Teorema 1.5.4 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$ y sea $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ una familia de espacios de Banach. Sean M un subespacio finito-dimensional de $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$ y F un subespacio reflexivo de $(X_i)_{\mathcal{U}}$. Supongamos que F es de la forma $(F_i)_{\mathcal{U}}$ con F_i un subespacio de X_i para cada $i \in \mathcal{I}$. Dado $\epsilon > 0$, existe un operador*

$$T : M \longrightarrow (X_i^*)_{\mathcal{U}}$$

que es una ϵ-isometría tal que

$$Tm = m \text{ para todo } m \in M \cap (X_i^*)_{\mathcal{U}},$$

$$\langle Tm, f\rangle = \langle m, f\rangle \text{ para todo } m \in M \text{ y todo } f \in F.$$

En ambos casos, se está identificando $Tm \in (X_i^*)_{\mathcal{U}}$ con el correspondiente elemento de $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$.

DEMOSTRACIÓN:

Dado $\epsilon > 0$, como M es un subespacio finito-dimensional, su esfera unidad es compacta. Consideramos una $\frac{\epsilon}{2}$-red formada por $\{m_1, m_2, \dots m_n\}$. Para cada $k = 1, 2, \dots n$, podemos obtener un elemento $x_k = (x_{ki})_{\mathcal{U}} \in (X_i)_{\mathcal{U}}$ de norma uno tal que

$$\langle m_k, x_k\rangle + \epsilon/2 > \|m_k\| = 1.$$

Elijamos, para cada $k = 1, \dots n$, un representante $(x_{ki})_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X_i)$ y, en particular, su coordenada i-ésima x_{ki}. Tomamos, para cada $i \in \mathcal{I}$,

$$\hat{F}_i = F_i \oplus \operatorname{span}\{x_{1i}\} \oplus \dots \oplus \operatorname{span}\{x_{ni}\}.$$

Es inmediato comprobar que $\hat{F} = (\hat{F}_i)_{\mathcal{U}}$, donde

$$\hat{F} = F \oplus \operatorname{span}\{x_1\} \oplus \dots \oplus \operatorname{span}\{x_n\}.$$

Es más, $\hat{F}$ sigue siendo un subespacio reflexivo de $(X_i)_{\mathcal{U}}$. A continuación vamos a ver que, para cada $m \in M$, se verifica que

$$(1-\epsilon)\|m\| \leq \sup\{|\langle m, \hat{f}\rangle| : \hat{f} \in \hat{F} \text{ y } \|\hat{f}\| = 1\}.$$

En efecto, dado $m \in M$ con $\|m\| = 1$ y puesto que $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ es una $\frac{\epsilon}{2}$-red, existe un $k_0 \in \{1, 2, \dots n\}$ de manera que

$$\|m - m_{k_0}\| \leq \epsilon/2.$$

Se verifica, por tanto, que

$$\sup\{|\langle m, \hat{f}\rangle| : \hat{f} \in \hat{F} \text{ y } \|\hat{f}\| = 1\} \geq |\langle m, x_{k_0}\rangle|$$

$$= |\langle m_{k_0}, x_{k_0}\rangle - \langle m_{k_0} - m, x_{k_0}\rangle| \geq |\langle m_{k_0}, x_{k_0}\rangle| - |\langle m_{k_0} - m, x_{k_0}\rangle|$$

$$> 1 - \epsilon/2 - \|m_{k_0} - m\|\|x_{k_0}\| \geq 1 - \epsilon/2 - \epsilon/2 = 1 - \epsilon.$$

Si $m \in M$ es cualquier otro elemento no nulo, entonces $m/\|m\|$ pertenece a la esfera unidad de M, luego,

$$(1-\epsilon) < \sup\{|\langle m/\|m\|, \hat{f}\rangle| : \hat{f} \in \hat{F} \text{ y } \|\hat{f}\| = 1\},$$

equivalentemente,

$$(1-\epsilon)\|m\| < \sup\{|\langle m, \hat{f}\rangle| : \hat{f} \in \hat{F} \text{ y } \|\hat{f}\| = 1\}.$$

Finalmente, si M es un elemento de M cualquiera, entonces

$$(1-\epsilon)\|m\| \leq \sup\{|\langle m, \hat{f}\rangle| : \hat{f} \in \hat{F} \text{ y } \|\hat{f}\| = 1\}.$$

Consideremos la inclusión del subespacio M en $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$

$$I : M \longrightarrow (X_i)^*_{\mathcal{U}}.$$

El operador $I \in L(M, (X_i)^*_{\mathcal{U}})$. Por la identificación (1), podemos obtener I' perteneciente a $(M \otimes_\pi (X_i)_{\mathcal{U}})^*$ tal que

$$I'(m \otimes_\pi (x_i)_{\mathcal{U}}) = \langle I(m), (x_i)_{\mathcal{U}}\rangle \text{ para } m \in M \text{ y } (x_i)_{\mathcal{U}} \in (X_i)_{\mathcal{U}}.$$

Más aún, en virtud de la identificación (2), podemos encontrar el operador I'' de $((M \otimes_\pi X_i)_\mathcal{U})^*$ asociado a I', definido por

$$I''((m \otimes_\pi x_i)_\mathcal{U}) = I'(m \otimes_\pi (x_i)_\mathcal{U}).$$

Puesto que M es finito-dimensional, se tiene que $M \otimes_\pi \hat{F}$ es un subespacio de $M \otimes_\pi (X_i)_\mathcal{U}$ [17, p. 39]. Además $M \otimes_\pi \hat{F}$ es reflexivo [17, p. 196].

De esta manera $M \otimes_\pi \hat{F}$ es un subespacio reflexivo de $M \otimes_\pi (X_i)_\mathcal{U}$ y, por la identificación (2), $(M \otimes_\pi \hat{F}_i)_\mathcal{U}$ es un subespacio reflexivo de $(M \otimes_\pi X_i)_\mathcal{U}$.

Utilizando el lema anterior podemos encontrar un elemento $S \in ((M \otimes_\pi X_i)^*)_\mathcal{U}$ de manera que

$$\|S\| \leq (1+\epsilon)\|I''\|,$$

$$S(m \otimes_\pi \hat{f}_i)_\mathcal{U} = I''(m \otimes_\pi \hat{f}_i)_\mathcal{U} \quad \text{para todo } m \in M \text{ y } \hat{f}_i \in \hat{F}_i.$$

De hecho, S es de la forma $S = (S_i)_\mathcal{U}$ donde, para cada $i \in \mathcal{I}$, $S_i \in (M \otimes_\pi X_i)^*$.

Llamemos $M_1 := M \bigcap (X_i^*)_\mathcal{U}$ y sea M_2 un subespacio complementario de M_1 en M, es decir, M es la suma directa de M_1 y M_2. Supongamos que $\{h_1, \ldots h_r\}$ constituye una base de M_1. Como elementos de $(X_i^*)_\mathcal{U}$ serán de la forma

$$h_j = (h_j^i)_\mathcal{U}, \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots r.$$

Fijemos, para cada $j = 1, \ldots, r$, unos representantes

$$(h_j^i)_{i \in \mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X_i^*).$$

Para cada $i \in \mathcal{I}$, es evidente que $(M_1 \otimes_\pi X_i) \oplus (M_2 \otimes_\pi \hat{F}_i)$ es un subespacio de $M \otimes_\pi X_i$, por ser M_1 y M_2 finito-dimensionales.

Consideremos la restricción de S_i a dicho subespacio, y denotémosla por $\tilde{S}_i$.

$$\tilde{S}_i : (M_1 \otimes_\pi X_i) \oplus (M_2 \otimes_\pi \hat{F}_i) \longrightarrow \mathbb{K}.$$

A su vez, construimos, para cada $i \in \mathcal{I}$, el funcional

$$\hat{S}_i : (M_1 \otimes_\pi X_i) \oplus (M_2 \otimes_\pi \hat{F}_i) \longrightarrow \mathbb{K}$$

definido de la siguiente manera. Dado $(m_1 \otimes_\pi x_i) + (m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)$, si m_1 es de la forma $m_1 = \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_r h_r$, definimos

$$\hat{S}_i((m_1 \otimes_\pi x_i) + (m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)) = \langle m_{1i}, x_i \rangle + \tilde{S}_i(m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)$$

donde $m_{1i} = \alpha_1 h_1^i + \cdots \alpha_n h_r^i$. Evidentemente, $m_1 = (m_{1i})_{\mathcal{U}}$. Es claro que $\hat{S}_i$ es lineal y continuo y, además,

$$\|\hat{S}_i\| \leq 1 + \|\tilde{S}_i\| \leq 1 + \|S_i\| \leq 1 + \|(S_i)_{i \in \mathcal{I}}\|_\infty,$$

por tanto,

$$\|(\hat{S}_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|\hat{S}_i\| \leq 1 + \|(S_i)_i\|_\infty.$$

A continuación, vamos a ver que, de hecho, $\|(\hat{S}_i)_{\mathcal{U}}\| \leq 1$. Este refinamiento será usado fuertemente más adelante.

Si $(m_1 \otimes_\pi x_i \oplus m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)_{\mathcal{U}}$ es cualquier elemento de $(M_1 \otimes_\pi X_i \oplus M_2 \otimes_\pi \hat{F}_i)_{\mathcal{U}}$ de norma menor o igual que uno, se verifica

$$|(\hat{S}_i)_{\mathcal{U}}(m_1 \otimes_\pi x_i \oplus m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)_{\mathcal{U}}| = \lim_{\mathcal{U}} |\hat{S}_i(m_1 \otimes_\pi x_i \oplus m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)|$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} |\langle m_{1i}, x_i \rangle + \tilde{S}_i(m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)| = \lim_{\mathcal{U}} |\langle m_{1i}, x_i \rangle + S_i(m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)|$$

$$= |\langle m_1, (x_i)_{\mathcal{U}} \rangle + (S_i)_{\mathcal{U}}(m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)_{\mathcal{U}}| = |\langle m_1, (x_i)_{\mathcal{U}} \rangle + S(m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)_{\mathcal{U}}|$$

$$= |\langle m_1, (x_i)_{\mathcal{U}} \rangle + I''(m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)_{\mathcal{U}}| = |I''(m_1 \otimes_\pi x_i \oplus m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)_{\mathcal{U}}| \leq 1.$$

Tomando supremo, obtenemos que $\|(\hat{S}_i)_{\mathcal{U}}\| \leq 1$.

Para cada $i \in \mathcal{I}$, en virtud del teorema de Hahn-Banach, podemos extender $\hat{S}_i$ a un funcional lineal y continuo sobre $M \otimes_\pi X_i$, que denotamos por $\hat{T}_i$ tal que $\|\hat{S}_i\| = \|\hat{T}_i\|$. Por la identificación (1), podemos obtener $\tilde{T}_i \in L(M, X_i^*)$ tal que

$$\langle \tilde{T}_i m, x_i \rangle = \hat{T}_i(m \otimes_\pi x_i) \text{ para } m \in M \text{ y } x_i \in X_i.$$

Consideremos el ultraproducto de operadores

$$\tilde{T} = (\tilde{T}_i)_{\mathcal{U}} \in (L(M, X_i^*))_{\mathcal{U}}.$$

De nuevo, por la identificación (3), el operador $\tilde{T}$ tiene asociado un operador $T \in L(M, (X_i^*)_{\mathcal{U}})$ dado por

$$T(m) = (\tilde{T}_i m)_{\mathcal{U}} \text{ para cada } m \in M \text{ con } \|T\| = \|\tilde{T}\|.$$

Veamos que este operador T es el operador buscado.

En primer lugar, si $m \in M \bigcap (X_i^*)_{\mathcal{U}}$, entonces $m \in M_1$ y, por tanto, podemos escribir $m = \alpha_1 h_1 + \cdots \alpha_r h_r$. Comprobemos que $T(m) = m$. Para cualquier $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}$ se verifica

$$\langle T(m), (x_i)_{\mathcal{U}} \rangle = \langle (\tilde{T}_i m)_{\mathcal{U}}, (x_i)_{\mathcal{U}} \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle \tilde{T}_i m, x_i \rangle$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} \hat{T}_i(m \otimes_\pi x_i) = \lim_{\mathcal{U}} \hat{S}_i(m \otimes_\pi x_i) = \lim_{\mathcal{U}} \langle m_i, x_i \rangle$$

$$= \langle (m_i)_{\mathcal{U}}, (x_i)_{\mathcal{U}} \rangle = \langle m, (x_i)_{\mathcal{U}} \rangle,$$

donde $m_i = \alpha_1 h_1^i + \cdots + \alpha_r h_r^i$.

En segundo lugar, veremos que $\langle Tm, \hat{f} \rangle = \langle m, \hat{f} \rangle$ para cualquier $m \in M$ y $\hat{f} \in \hat{F}$. Podemos suponer que $m = m_1 + m_2$ con $m_1 \in M_1$ y $m_1 = \alpha_1 h_1 + \cdots + \alpha_r h_r$, $m_2 \in M_2$ y $\hat{f} = (\hat{f}_i)_{\mathcal{U}}$ con $\hat{f}_i \in \hat{F}_i$. Por tanto

$$\langle T(m), \hat{f} \rangle = \langle (\tilde{T}_i m)_{\mathcal{U}}, (\hat{f}_i)_{\mathcal{U}} \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle \tilde{T}_i m, \hat{f}_i \rangle$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} \left(\hat{T}_i(m \otimes_\pi \hat{f}_i) \right) = \lim_{\mathcal{U}} \left(\hat{S}_i(m_1 \otimes_\pi \hat{f}_i \oplus m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i) \right)$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} \left(\langle m_{1i}, \hat{f}_i \rangle + \tilde{S}_i(m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i) \right) = \lim_{\mathcal{U}} \left(\langle m_{1i}, \hat{f}_i \rangle + S_i(m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i) \right)$$

$$= \langle (m_{1i})_{\mathcal{U}}, (\hat{f}_i)_{\mathcal{U}} \rangle + (S_i)_{\mathcal{U}}(m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)_{\mathcal{U}} = \langle m_1, (\hat{f}_i)_{\mathcal{U}} \rangle + S(m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)_{\mathcal{U}}$$

$$= \langle m_1, \hat{f} \rangle + I''(m_2 \otimes_\pi \hat{f}_i)_{\mathcal{U}} = \langle m_1, \hat{f} \rangle + \langle m_2, \hat{f} \rangle = \langle m, \hat{f} \rangle.$$

En particular, $\langle Tm, f \rangle = \langle m, f \rangle$ para cualquier $m \in M$ y $f \in F$.

En tercer lugar, probaremos que T es una ϵ-isometría. Por un lado,

$$\|T\| = \|\tilde{T}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|\tilde{T}_i\| = \lim_{\mathcal{U}} \|\hat{T}_i\|$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} \|\hat{S}_i\| = \|(\hat{S}_i)_{\mathcal{U}}\| \leq 1.$$

Por tanto, $\|T(m)\| \leq \|m\| \leq \|m\| + \epsilon\|m\|$.

Por otro lado, para cada $m \in M$,

$$\begin{aligned}\|T(m)\| &= \sup\{|\langle Tm, (x_i)_{\mathcal{U}}\rangle| : (x_i)_{\mathcal{U}} \in (X_i)_{\mathcal{U}}, \quad \|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = 1\} \\ &\geq \sup\{|\langle Tm, \hat{f}\rangle| : \hat{f} \in \hat{F}, \quad \|\hat{f}\| = 1\} \\ &= \sup\{|\langle m, \hat{f}\rangle| : \hat{f} \in \hat{F}, \quad \|\hat{f}\| = 1\} \geq (1-\epsilon)\|m\|.\end{aligned}$$

■

1.6 La constante "open" de un operador

Una consecuencia bastante conocida del teorema de la aplicación abierta es que todo operador lineal, continuo y sobreyectivo

$$T : X \longrightarrow Y$$

lleva asociado una constante $M > 0$ tal que, para cada $y \in Y$, existe un elemento $x \in X$ con $T(x) = y$ y $\|x\| \leq M\|y\|$. En lo sucesivo, denotaremos por $\text{open}(T)$ al ínfimo de tales constantes.

El objetivo de esta sección es recopilar diversos resultados, unos conocidos y otros (aparentemente) no, sobre el número $\text{open}(T)$ que serán utilizados en capítulos posteriores. Por ejemplo, es inmediato comprobar que:

- Si X un espacio de Banach y M un subespacio cerrado de X, entonces:

  (1) Si $P : X \longrightarrow M$ es una proyección, entonces $\text{open}(P) \leq 1$.

  (2) Si $Q : X \longrightarrow X/M$ es una aplicación cociente, entonces $\text{open}(Q) \leq 1$.

- Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal, continuo y sobreyectivo entre espacios de Banach y consideramos el operador

$$\tilde{T} : X/\text{Ker}T \longrightarrow Y, \quad x + \text{Ker}T \longmapsto Tx,$$

  entonces $\tilde{T}$ es una isometría sobreyectiva si y sólo si $\text{open}(T) \leq 1$ y $\|T\| \leq 1$.

- Si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador lineal, continuo y posee inverso, entonces

$$\|T^{-1}\| = \text{open}(T).$$

- Si $T : X \longrightarrow Y$ y $S : Y \longrightarrow Z$ son dos operadores lineales, continuos y sobreyectivos, entonces

$$\text{open}(S \circ T) \leq \text{open}(T)\text{open}(S).$$

El siguiente teorema recoge ciertas relaciones entre la constante "open" de un operador, la de su biadjunto y la de su ultrapotencia. Damos la prueba por no disponer de referencia explícita de la misma.

Teorema 1.6.1 *Sea T un operador lineal y continuo de X en Y. Se verifica:*
(1) $\text{open}(T)_{\mathcal{U}} \leq \text{open}(T)$, *para cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$.*
(2) Existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ de manera que

$$\text{open}(T^{**}) \leq \text{open}(T)_{\mathcal{U}}.$$

(3) $\text{open}(T^{**}) \leq \text{open}(T)$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Sea A el conjunto de las constantes $M > 0$ tales que, para cada $(y_i)_{\mathcal{U}} \in (Y)_{\mathcal{U}}$, existe $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}$ tal que $(T)_{\mathcal{U}}(x_i)_{\mathcal{U}} = (y_i)_{\mathcal{U}}$ y $\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| \leq M\|(y_i)_{\mathcal{U}}\|$, y sea B el conjunto de las constantes $N > 0$ tales que, para cada $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $Tx = y$ y $\|x\| \leq N\|y\|$.

Tomemos un número N perteneciente a B y probemos que $N \in A$. Dado $(y_i)_{\mathcal{U}} \in (Y)_{\mathcal{U}}$, consideremos $(y_i)_i \in l_\infty(\mathcal{I}, Y)$ un representante de su clase de equivalencia. Observamos que, para cada $i \in \mathcal{I}$, $y_i \in Y$ y, por pertenecer N a B, podemos encontrar $x_i \in X$ con $Tx_i = y_i$ y $\|x_i\| \leq N\|y_i\|$.

Obviamente, $(x_i)_i \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$ y el elemento $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}$ verifica

$$(T)_{\mathcal{U}}(x_i)_{\mathcal{U}} = (Tx_i)_{\mathcal{U}} = (y_i)_{\mathcal{U}},$$

$$\|(x_i)_\mathcal{U}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} N\|y_i\| = N\|(y_i)_\mathcal{U}\|,$$

es decir, $N \in A$. Por tanto $B \subset A$ y tomando ínfimos se deduce que

$$\text{open}(T)_\mathcal{U} \leq \text{open}(T).$$

(2) Tomemos el ultrafiltro $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}_{F,Y}$ dado en la sección segunda. Por el teorema 1.2.10, el espacio Y^{**} está 1-complementado en la ultrapotencia $(Y)_\mathcal{U}$. Más aún, puede verse en [29] que la proyección P de $(Y)_\mathcal{U}$ en Y^{**} está definida por

$$P(y_i)_\mathcal{U} := w^* - \lim_{\mathcal{U}} y_i,$$

es decir, para todo $y^* \in Y^*$,

$$\langle P(y_i)_\mathcal{U}, y^* \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle y_i, y^* \rangle.$$

Sea A el conjunto de las constantes $M > 0$ tales que, para cada $(y_i)_\mathcal{U} \in (Y)_\mathcal{U}$, existe $(x_i)_\mathcal{U} \in (X)_\mathcal{U}$ tal que $(T)_\mathcal{U}(x_i)_\mathcal{U} = (y_i)_\mathcal{U}$ y $\|(x_i)_\mathcal{U}\| \leq M\|(y_i)_\mathcal{U}\|$, y sea C el conjunto de las constantes $R > 0$ tales que, para cada $y^{**} \in Y^{**}$, existe $x^{**} \in X^{**}$ tal que $T^{**}x^{**} = y^{**}$ y $\|x^{**}\| \leq R\|y^{**}\|$.

Para probar que $\text{open}(T^{**}) \leq \text{open}(T)_\mathcal{U}$, bastará probar que $A \subset C$. Sea M una constante perteneciente a A. Dado $y^{**} \in Y^{**}$, por ser P una proyección, existe un elemento $(y_i)_\mathcal{U} \in (Y)_\mathcal{U}$ tal que

$$P(y_i)_\mathcal{U} = y^{**}, \quad \|(y_i)_\mathcal{U}\| \leq \|y^{**}\|.$$

Para este elemento $(y_i)_\mathcal{U} \in (Y)_\mathcal{U}$, existe a su vez, un $(x_i)_\mathcal{U} \in (X)_\mathcal{U}$ tal que

$$(T)_\mathcal{U}(x_i)_\mathcal{U} = (y_i)_\mathcal{U}, \quad \|(x_i)_\mathcal{U}\| \leq M\|(y_i)_\mathcal{U}\|.$$

Consideramos un representante $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$ de la correspondiente clase de equivalencia en $(X_i)_\mathcal{U}$. Puesto que la familia $(x_i)_{\in\mathcal{I}}$ está contenida en un múltiplo de la bola unidad cerrada de X^{**}, aplicando el teorema de Alaoglu y el teorema 1.2.1, podemos garantizar la existencia del límite débil* a través del ultrafiltro $\mathcal{U}$ de la familia $(x_i)_i$. Tomemos

$$x^{**} := w^* - \lim_{\mathcal{U}} x_i.$$

Se verifica que

$$\|x^{**}\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = \|(x_i)_{\mathcal{U}}\| \leq M\|(y_i)_{\mathcal{U}}\| \leq M\|y^{**}\|.$$

Además, $T^{**}x^{**} = y^{**}$ puesto que, para cualquier $y^* \in Y^*$

$$\langle T^{**}x^{**}, y^*\rangle = \langle x^{**}, T^*y^*\rangle = \lim_{\mathcal{U}}\langle x_i, T^*y^*\rangle = \lim_{\mathcal{U}}\langle Tx_i, y^*\rangle$$

$$= \langle P(Tx_i)_{\mathcal{U}}, y^*\rangle = \langle P(T)_{\mathcal{U}}(x_i)_{\mathcal{U}}, y^*\rangle = \langle P(y_i)_{\mathcal{U}}, y^*\rangle = \langle y^{**}, y^*\rangle.$$

Por tanto, $M \in C$.

(3) Es inmediato a partir de (1) y (2).

■

Capítulo II

Representabilidad finita por cocientes

2.1 Cocientes locales

Es inmediato probar que la clase de espacios de Banach que están representados finitamente en un cierto espacio de Banach X es la menor clase cerrada bajo isometrías, ultrapotencias y la formación de subespacios [55]. Con el objeto de abordar la pregunta (sic. "rather vague question")

" ¿ Hay una noción dual satisfactoria para la representabilidad finita ? ",

J. Stern introdujo la menor clase de espacios de Banach, que denotaremos por $Q(X)$, que contiene a X y es cerrada bajo isometrías, ultrapotencias y la formación de espacios cocientes. Para dar una caracterización de $Q(X)$ consideró la siguiente definición.

Definición 2.1.1 *Dados dos espacios de Banach X e Y, se dice que Y es un cociente local de X si existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$ tal que Y es isométrico a un cociente de $(X)_{\mathcal{U}}$ por un subespacio cerrado.*

J. Stern probó que un espacio de Banach Y pertenece a $Q(X)$ si y sólo si Y es un cociente local de X.

En su estudio de la relación entre la representabilidad finita y los cocientes locales como conceptos duales, J. Stern obtuvo los siguientes resultados.

Teorema 2.1.1 *Sean X e Y dos espacios de Banach.*
(1) Y está finitamente representado en X si y sólo si Y^* es cociente local de X^*.
(2) Si Y es cociente local de X, entonces Y^* está finitamente representado en X^*.

A partir del punto (2) del teorema anterior, J. Stern propuso los siguientes problemas:

1. ¿Es todo espacio de Banach X un cociente local de su bidual X^{**}? [55, Problem 4.1].

2. ¿Es cierto el recíproco de (2)? (Observaciones a [55, Theorem 4.1]).

El objetivo de esta sección es responder a dichas cuestiones. De hecho, obtendremos varios contraejemplos a la primera pregunta. Teniendo en cuenta que todo espacio de Banach es isométrico a un subespacio de su bidual, es evidente que una respuesta negativa al primer problema es una respuesta negativa al segundo problema.

En los siguientes contraejemplos hacemos uso de dos propiedades ya clásicas en la teoría de espacios de Banach:

- Un espacio de Banach X verifica la *propiedad (V) (de Pełczyński)* si, para cualquier espacio de Banach Y, todo operador de X en Y incondicionalmente convergente es débil-compacto [20, p. 116].

- Un espacio de Banach X es de *Grothendieck* si, para cualquier otro espacio de Banach separable Y, todo operador de X en Y es débil- compacto [58, p. 246].

Es conocido que todo espacio de Banach dual con la propiedad (V) es de Grothendieck [20, p. 116].

Contraejemplo 1.

En este primer contraejemplo consideraremos C^*-álgebras.

Si H es un espacio de Hilbert complejo, denotamos por $L(H)$ el álgebra de Banach de todos los operadores lineales y continuos sobre H. Recordamos que una C^*-álgebra es cualquier subálgebra de $L(H)$ cerrada bajo la involución de $L(H)$.

Por el teorema de Gelfand-Naimark, es conocido que las C^*-álgebras pueden identificarse con las B^*-álgebras, es decir, con las álgebras de Banach complejas A con involución $(* : a \longmapsto a^*)$ tales que

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \text{ para todo } a \in A.$$

A continuación vamos a ver que si X es una C^*-álgebra separable de dimensión infinita, entonces X no es cociente local de su bidual. Si X fuera cociente local de su bidual X^{**}, se tendría que X es isométrico a un cociente de alguna ultrapotencia $(X^{**})_{\mathcal{U}}$ para algún ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$. Por otro lado, notemos que $(X^{**})_{\mathcal{U}}$ es un cociente de $l_\infty(\mathcal{I}, X^{**})$. Teniendo en cuenta que toda C^*-álgebra es una B^*-álgebra y que el bidual de una B^*-álgebra es una B^*-álgebra [12, p. 213], es claro que $l_\infty(\mathcal{I}, X^{**})$ es una B^*-álgebra con el producto y la involución naturales:

- $(x_i)_i \cdot (y_i)_i = (x_i \cdot y_i)_i$
- $((x_i)_i)^* = (x_i^*)_i$

para $(x_i)_i, (y_i)_i \in l_\infty(\mathcal{I}, X^{**})$.
Por tanto, en virtud de [47], se tiene que $l_\infty(\mathcal{I}, X^{**})$ tiene la propiedad (V). Teniendo en cuenta que $l_\infty(\mathcal{I}, X^{**})$ es el dual del espacio de Banach $l_1(\mathcal{I}, X^*)$ [31, p. 259], tenemos que $l_\infty(\mathcal{I}, X^{**})$ es un espacio de Grothendieck. Como "ser de Grothendieck" es hereditario por cocientes [58, p. 245], obtenemos que el espacio

de Banach separable X es también de Grothendieck. Por tanto, X es una C^*-álgebra reflexiva [58, p. 244]. Por ser reflexiva, obviamente, X es un M-ideal en su bidual. Por [26, p. 120], X es isomorfo a $c_0(K(H_i))$ donde $K(H_i)$ son los operadores compactos sobre unos espacios de Hilbert H_i y obtendríamos que c_0 es reflexivo, llegando a una contradicción.

Los dos ejemplos concretos más significativos de C^*-álgebras separables, corresponden a c_0 (caso conmutativo) y $K(l_2)$ (caso no conmutativo). Como es habitual, por $K(l_2)$ denotamos la subálgebra de los operadores compactos sobre l_2. Hacemos notar que los correspondientes biduales son:

- $(c_o)^{**}$ isométrico a l_∞, y
- $K(l_2)^{**}$ isométrico a $L(l_2)$.

Contraejemplo 2.

En este segundo contraejemplo consideraremos el espacio de Hardy $H^1(\partial\mathbb{D})$, su dual y su predual.

Sea $\partial\mathbb{D}$ la frontera del disco unidad en el plano complejo, sea $d\theta$ la medida longitud de arco sobre $\partial\mathbb{D}$ y sea, para $1 \le p \le \infty$, $L^p(\partial\mathbb{D})$ el espacio de Lebesgue asociado.

Dado $f \in L^1(\partial\mathbb{D})$, los coeficientes de Fourier de f se definen como

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)e^{-in\theta}\,d\theta,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Recordamos que, para $1 \le p \le \infty$, $H^p(\partial\mathbb{D})$ es el subespacio cerrado de $L^p(\partial\mathbb{D})$ formado por aquellas (clases de) funciones f tales que $a_n(f) = 0$ para todo $n < 0$.

Pasamos a comentar brevemente cuál es el dual y el predual de $H^1(\partial\mathbb{D})$.

Si $f \in L^2(\partial\mathbb{D})$ e I es un intervalo contenido en $\partial\mathbb{D}$, la media de f sobre I se define como

$$f_I = \frac{1}{|I|}\int_I f(\theta)\,d\theta$$

donde $|I|$ denota la longitud de I.

Se dice que una función $f \in L^2(\partial\mathbb{D})$ es de oscilación media acotada si

$$\|f\|_{BMO} = \sup_I \left\{ \frac{1}{|I|} \int_I |f(\theta) - f_I|^2 \, d\theta \right\}^{1/2} < \infty,$$

y se denota por BMO al espacio de todas las funciones $f \in L^2(\partial\mathbb{D})$ que son de oscilación media acotada. Si $BMOA$ representa la intersección de BMO con $H^2(\partial\mathbb{D})$ dotado con la norma definida por

$$\|f\| = \|f\|_{BMO} + |\tilde{f}(0)|$$

para $f \in BMOA$ y donde $\tilde{f}$ representa la extensión armónica de f en $\partial\mathbb{D}$, entonces puede probarse [61, p. 180] que $BMOA$ y $(H^1(\partial\mathbb{D}))^*$ son isométricos con la dualidad

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta)\, \overline{g(\theta)}\, d\theta$$

para todo $f \in H^1(\partial\mathbb{D})$ y $g \in BMOA$.

A su vez el espacio VMO ("vanishing mean oscillation ") es aquél formado por las funciones $f \in BMO$ tales que

$$\lim_{|I|\to 0} \frac{1}{|I|} \int_I |f(\theta) - f_I|^2 \, d\theta = 0$$

Si $VMOA$ representa la intersección de VMO con $H^2(\partial\mathbb{D})$, puede comprobarse que $VMOA$ es un subespacio cerrado de $BMOA$ y, además, el dual de $VMOA$ y $H^1(\partial\mathbb{D})$ son isométricos [61, p. 187] con la dualidad antes mencionada. Es decir,

$$(VMOA)^{**} \equiv (H^1(\partial\mathbb{D}))^* \equiv BMOA.$$

Veamos que $VMOA$ no es cociente local de $BMOA$. Si así fuera, tendríamos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$ tal que $VMOA$ es isométrico a un cociente de $(BMOA)_{\mathcal{U}}$. Por otra parte, en [46, p. 12] se obtiene que

$$(H^1(\partial\mathbb{D}))^* \equiv L^\infty(\partial\mathbb{D})/H_0^\infty(\partial\mathbb{D})$$

donde $H_0^\infty(\partial\mathbb{D}) = \{f \in H^\infty(\partial\mathbb{D}) \text{ con } f = z.g \text{ para algún } g \in H^\infty\}$. Por tanto, usando el lema 1.2.3, se deduce que

$$(BMOA)_{\mathcal{U}} \equiv ((H^1(\partial\mathbb{D}))^*)_{\mathcal{U}} \equiv (L^\infty(\partial\mathbb{D})/H_0^\infty(\partial\mathbb{D}))_{\mathcal{U}}$$

$$\equiv (L^\infty(\partial\mathbb{D}))_{\mathcal{U}}/(H_0^\infty(\partial\mathbb{D}))_{\mathcal{U}}.$$

Por otro lado, si consideramos el conjunto $\mathcal{I}\times\partial\mathbb{D}$ con la topología discreta y denotamos por $\beta(\mathcal{I}\times\partial\mathbb{D})$ su compactificación de Stone-Čech, teniendo en cuenta [31, p. 303], observamos que

$$l_\infty(\mathcal{I}, l_\infty(\partial\mathbb{D})) \equiv l_\infty(\mathcal{I}\times\partial\mathbb{D}) \equiv C(\beta(\mathcal{I}\times\partial\mathbb{D})).$$

Puesto que $\beta(\mathcal{I}\times\partial\mathbb{D})$ es extremadamente disconexo, se tendrá que el espacio $l_\infty(\mathcal{I}, l_\infty(\partial\mathbb{D}))$ es de Grothendieck [58].

Debido a que $l_\infty(\mathcal{I}, l_\infty(\mathbb{N}))$ está complementado en $l_\infty(\mathcal{I}, l_\infty(\partial\mathbb{D}))$ y el espacio $l_\infty(\mathcal{I}, l_\infty(\mathbb{N}))$ es isomorfo a $l_\infty(\mathcal{I}, L^\infty(\partial\mathbb{D}))$, obtenemos que $l_\infty(\mathcal{I}, L^\infty(\partial\mathbb{D}))$ es isomorfo a un subespacio complementado de $l_\infty(\mathcal{I}, l_\infty(\partial\mathbb{D}))$ y, por tanto, es de Grothendieck. Puesto que "ser de Grothendieck" se hereda por cocientes, deducimos que el espacio $(L^\infty(\partial\mathbb{D}))_{\mathcal{U}}$ es de Grothendieck y, aplicando de nuevo esta idea, obtenemos que $(BMOA)_{\mathcal{U}}$ es de Grothendieck. Es decir, llegamos a que $VMOA$ es de Grothendieck. De nuevo aquí aparece la contradicción puesto que $VMOA$ es separable (porque su dual es separable) y no reflexivo.

La conclusión, a grosso modo, que se deduce de estos ejemplos es que el concepto de cociente local no es "del todo" el dual del concepto de representabilidad finita. En la siguiente sección, nuestro objetivo será encontrar una definición adecuada que nos permita construir esa teoría dual.

2.2 Representabilidad finita por cocientes

El concepto de representabilidad finita por cocientes aparece por primera vez en [30]. En dicho artículo, S. Heinrich estudia ideales de operadores entre espacios de Banach. Construye nuevos ideales basándose en la representabilidad finita, pero necesita "adaptar" la noción de cociente local dada por J. Stern, introduciendo de esta manera la representabilidad finita por cocientes, aunque sin llevar a cabo un estudio pormenorizado de la misma.

Aparentemente, él supone que el concepto de cociente local y la representabilidad finita por cocientes son nociones equivalentes. En esta sección nosotros probaremos que ambas definiciones son diferentes aunque coinciden para una cierta clase de espacios de Banach. Por otra parte, retomaremos la noción de representabilidad finita por cocientes y veremos que, de hecho, este concepto es realmente compatible con la noción usual de representabilidad finita.

Dado un espacio de Banach X, denotaremos

$$\mathrm{Cod}(X) := \{M \subset X : \ X/M \text{ es finito} - \text{dimensional y } M \text{ es cerrado}\},$$

$$\mathrm{Dim}(X) := \{M \subset X : \ M \text{ es un subespacio finito} - \text{dimensional}\}.$$

Definición 2.2.1 *Sean X e Y dos espacios de Banach. Se dice que Y está finitamente representado por cocientes en X, si para cada $\epsilon > 0$ y cada $N \in \mathrm{Cod}(Y)$ existe $M \in \mathrm{Cod}(X)$ tal que*

$$d(Y/N, X/M) < 1 + \epsilon.$$

Se denotará por $Y \prec_q X$.

Teorema 2.2.1 *La relación "$\prec_q$" es un preorden en la clase de todos los espacios de Banach.*

DEMOSTRACIÓN:

Obviamente, es reflexiva.

Es transitiva, es decir, si $Y \prec_q X$ y $X \prec_q Z$ entonces $Y \prec_q Z$, para cualesquiera X, Y, Z espacios de Banach. De hecho, dado $\epsilon > 0$, dado N un subespacio cerrado de Y de codimensión finita y tomando $\epsilon' > 0$ tal que $(1+\epsilon')^2 \leq 1+\epsilon$, existe $M \in \mathrm{Cod}(X)$ tal que

$$d(Y/N, X/M) < 1 + \epsilon'.$$

A su vez, tomando este subespacio $M \in \mathrm{Cod}(X)$ y debido a que $X \prec_q Z$, se puede encontrar un subespacio cerrado L de Z finito-codimensional tal que

$$d(Z/L, X/M) < 1 + \epsilon'.$$

Finalmente,

$$d(Y/N, Z/L) \leq d(Y/N, X/M)d(X/M, Z/L) < (1 + \epsilon')^2 \leq 1 + \epsilon.$$

■

Observaciones

La representabilidad finita por cocientes no genera un orden parcial en la clase de espacios de Banach. Un ejemplo significativo de esta idea lo damos a continuación.

En el teorema 2.2.6 de esta sección veremos que se verifica que

$$Y^* \prec X^* \Longrightarrow Y \prec_q X.$$

Teniendo en cuenta este resultado, podemos deducir que

- $c_0 \prec_q l_\infty$ puesto que todo espacio de Banach está representado finitamente en su bidual.
- $l_\infty \prec_q c_0$ en virtud del principio de reflexividad local.
- c_0 y l_∞ no son isomorfos (c_0 es separable y l_∞ no).

En el estudio de la representabilidad finita por cocientes usaremos con profusión el manejo de los ortogonales a un cierto subespacio de un espacio de Banach. Es por ello que comenzamos comentando los principales resultados al respecto.

Dado N un subespacio de un espacio de Banach X, se define el ortogonal de N como

$$N^{\perp} := \{x^* \in X^* : \text{ donde } \langle x^*, x\rangle = 0 \text{ para todo } x \in N\}.$$

A su vez, dado M un subespacio de X^*, se define

$$M_{\perp} := \{x \in X : \text{ donde } \langle x^*, x\rangle = 0 \text{ para todo } x^* \in M\}.$$

Si N es un subespacio cerrado de X entonces, por el teorema de la bipolar $(N^{\perp})_{\perp} = N$.

Por otra parte, si M es un subespacio de X^*, entonces $(M_{\perp})^{\perp}$ coincide con la clausura débil-* de M. Si M es un subespacio finito dimensional de X^*, también se da la otra posible combinación, es decir, entonces

$$(M_{\perp})^{\perp} = M.$$

Conviene observar que, en general, si M no es finito dimensional el resultado anterior no es válido. Por ejemplo, tomemos un espacio X no reflexivo y consideremos un elemento x^{**} del bidual X^{**} que no esté en X.

Sea

$$M := \mathrm{Ker} x^{**} = (\mathrm{span}\{x^{**}\})_{\perp} \in \mathrm{Cod}(X^{**}).$$

Veamos que la clausura débil-* de M es todo X^*. Si existe $x_0^* \in X^*$ tal que x_0^* no esté en la clausura débil-* de M, se puede encontrar $x_0 \in X$ de manera que

$$|\langle x_0, x_0^*\rangle| > \sup_{u \in M} |\langle u, x_0\rangle|.$$

Como M es un subespacio, se tiene que $x_0 \in M^{\perp}$ y

$$M^{\perp} = ((\mathrm{span}\{x^{**}\})_{\perp})^{\perp} = \mathrm{span}\{x^{**}\}.$$

Luego, $x_0 = \lambda x^{**}$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$ no nulo y, por tanto $x^{**} \in X$, llegando a una contradicción.

El siguiente resultado es la versión dual del teorema 1.2.9.

Teorema 2.2.2 *Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$. Sea $\epsilon > 0$ y $M \in \mathrm{Cod}(X)_{\mathcal{U}}$. Entonces existe $I_0 \in \mathcal{U}$ tal que, para cada $i \in I_0$, podemos encontrar $M_i \in \mathrm{Cod}(X)$ tal que*

$$d((X)_{\mathcal{U}}/M, X/M_i) \leq 1 + \epsilon, \quad i \in I_0.$$

DEMOSTRACIÓN:

Dado $\epsilon > 0$ y dado $M \in \mathrm{Cod}(X)_{\mathcal{U}}$, tomemos $\epsilon' > 0$ tal que $(1 + \epsilon')^2 \leq 1 + \epsilon$ y consideremos el subespacio $M^{\perp}$.

Es evidente que $M^{\perp}$ es un subespacio de dimensión finita en $(X)^*_{\mathcal{U}}$ pues es isométrico al dual de $(X)_{\mathcal{U}}/M$. Aplicando la dualidad local de ultraproductos, podemos encontrar $\tilde{N} \in \mathrm{Dim}((X^*)_{\mathcal{U}})$ tal que

$$d(M^{\perp}, \tilde{N}) < 1 + \epsilon'.$$

Además, por el teorema 1.2.9, podemos encontrar $I_0 \in \mathcal{U}$ tal que, para cada $i \in I_0$, existe $N_i \in \mathrm{Dim}(X^*)$ tal que

$$d(\tilde{N}, N_i) < 1 + \epsilon'.$$

Tomemos $M_i := (N_i)_{\perp}$. Se tiene que M_i es un subespacio de X de codimensión finita pues

$$(X/M_i)^* \equiv M_i^{\perp} \equiv ((N_i)_{\perp})^{\perp} \equiv N_i$$

Finalmente, aplicando el lema 1.1.1 y teniendo en cuenta que $(X)_{\mathcal{U}}/M$ y X/M_i son de dimensión finita, se tiene que

$$d((X)_{\mathcal{U}}/M, X/M_i) = d(((X)_{\mathcal{U}}/M)^*, (X/M_i)^*) \leq d(M^{\perp}, M_i^{\perp})$$

$$\leq d(M^{\perp}, N_i) \leq d(M^{\perp}, \tilde{N}) d(\tilde{N}, N_i) < (1 + \epsilon')^2 \leq 1 + \epsilon.$$

■

En el capítulo I se vió que si un espacio de Banach Y está finitamente representado en otro espacio de Banach X, entonces Y es isométrico a un subespacio de $(X)_{\mathcal{U}_{F,Y}}$, donde $\mathcal{U}_{F,Y}$ es un ultrafiltro que domina el filtro canónico definido sobre el conjunto de todos los pares (M, ϵ) con M un subespacio finito dimensional de Y y $\epsilon > 0$ [Teorema 1.2.10]. Este ultrafiltro admite una versión dual. Sea $\mathcal{I}_Y$ el conjunto de todos los pares (N, ϵ) con N un subespacio cerrado de Y de codimensión finita y $0 < \epsilon < 1/2$. Tomamos el orden parcial sobre $\mathcal{I}_Y$ dado por la relación

$$(N_1, \epsilon_1) \leq (N_2, \epsilon_2) \text{ si y sólo si } \epsilon_2 \leq \epsilon_1 \text{ y } N_2 \subset N_1.$$

El filtro asociado a este orden consiste en todos los conjuntos $I(N_0, \epsilon_0) \subset \mathcal{I}_Y$ con

$$I(N_0, \epsilon_0) = \{(N, \epsilon) : (N_0, \epsilon_0) \leq (N, \epsilon)\}.$$

Llamemos $\mathcal{U}_{Q,Y}$ a un ultrafiltro que domine a dicho filtro.

El siguiente resultado da la relación entre $\mathcal{U}_{Q,Y}$ y la representabilidad finita por cocientes y puede considerarse la versión dual del teorema 1.2.10.

Teorema 2.2.3 *Si $Y \prec_q X$, entonces Y^{**} es isométrico a un cociente de $(X)_{\mathcal{U}_{Q,Y}}$.*

DEMOSTRACIÓN:

Para simplificar la notación, escribiremos $\mathcal{U}$ en vez de $\mathcal{U}_{Q,Y}$ e $\mathcal{I}$ en vez de $\mathcal{I}_Y$.

Puesto que $Y \prec_q X$, para cada $i = (N_i, \epsilon_i)$ existe $M_i \in \text{Cod}(X)$ y existe un $(1 + \epsilon_i)$-isomorfismo

$$T_i : X/M_i \longrightarrow Y/N_i.$$

Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $\|T_i\| = 1$ y $\|T_i^{-1}\| < 1 + \epsilon_i$. Si no fuera así, tomaríamos el $(1 + \epsilon_i)$-isomorfismo $S_i = T_i/\|T_i^{-1}\|$.

A continuación vamos a definir un cierto operador de $l_\infty(\mathcal{I}, X)$ en Y^{**}. Dado $(x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$, para cada $i \in \mathcal{I}$, podemos encontrar, aplicando la definición de norma cociente, un cierto elemento $\overline{x_i} \in Y$ tal que

$$\overline{x_i} + N_i = T_i(x_i + M_i),$$

$$\|\overline{x_i}\| \leq \|T_i(x_i + M_i)\| + \epsilon_i.$$

La red $(\overline{x_i})_{i\in\mathcal{I}}$ de Y está acotada puesto que, para cada $i \in \mathcal{I}$,

$$\|\overline{x_i}\| \leq \|T_i(x_i + M_i)\| + \epsilon_i \leq \|T_i\|\|x_i + M_i\| + \epsilon_i \qquad (*)$$

$$\leq \|x_i + M_i\| + \epsilon_i \leq \|x_i\| + \epsilon_i \leq \|(x_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_\infty + \epsilon_i$$

$$\leq \|(x_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_\infty + 1.$$

Por tanto $(\overline{x_i})_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, Y)$ y podemos considerar $(\overline{x_i})_{i\in\mathcal{I}}$ como una red de elementos de Y^{**}. Por el teorema de Alaoglu y el lema 1.2.1, podemos garantizar la existencia del $w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i} \in Y^{**}$, y podemos definir la aplicación

$$T : l_\infty(\mathcal{I}, X) \longrightarrow Y^{**}, \quad (x_i)_{i\in\mathcal{I}} \longmapsto w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i}.$$

Veamos que T está bien definida. Sea $(x_i)_i \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$ tal que, para cada $i \in \mathcal{I}$, se hayan tomado $\overline{x_i}, \hat{x}_i \in Y$ con

$$\overline{x_i} + N_i = T_i(x_i + M_i) = \hat{x}_i + N_i,$$

$$\|\overline{x_i}\| \leq \|T_i(x_i + M_i)\| + \epsilon_i \ \text{ y } \ \|\hat{x}_i\| \leq \|T_i(x_i + M_i)\| + \epsilon_i.$$

Para cada $y^* \in Y^*$, consideramos

$$i_0 = (\mathrm{Ker} y^*, 1/3).$$

Obviamente, si $i = (N_i, \epsilon_i) \in I(\mathrm{Ker} y^*, 1/3)$, entonces $N_i \subset \mathrm{Ker} y^*$. En particular, $y^* \in N_i^\perp$.

Por otro lado $\overline{x_i} - \hat{x}_i \in N_i$ y, por tanto,

$$|\langle \overline{x_i} - \hat{x}_i, y^* \rangle| = 0.$$

Resumiendo $\lim_{\mathcal{U}} \langle \overline{x_i}, y^* \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle \hat{x}_i, y^* \rangle$, para cada $y^* \in Y^*$.

Veamos ahora que T es lineal.

Sean $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}, (y_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Teniendo en cuenta la definición anterior, podemos suponer que

$$T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}] = w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i}$$

$$\text{con } \ \overline{x_i} + N_i = T_i(x_i + M_i) \ \text{ y } \ \|\overline{x_i}\| \leq \|T_i(x_i + M_i)\| + \epsilon_i,$$

$$T[(y_i)_{i\in\mathcal{I}}] = w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{y_i}$$

$$\text{con } \ \overline{y_i} + N_i = T_i(y_i + M_i) \ \text{ y } \ \|\overline{y_i}\| \leq \|T_i(y_i + M_i)\| + \epsilon_i,$$

$$T[\alpha(x_i)_{i\in\mathcal{I}} + \beta(y_i)_{i\in\mathcal{I}}] = w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{\alpha x_i + \beta y_i}$$

$$\text{con } \ \overline{\alpha x_i + \beta y_i} + N_i = T_i(\alpha x_i + \beta y_i + M_i)$$

$$\text{y } \ \|\overline{\alpha x_i + \beta y_i}\| \leq \|T_i(\alpha x_i + \beta y_i + M_i)\| + \epsilon_i.$$

Para cualquier $y^* \in Y^*$, consideremos $i_0 = (\text{Ker} y^*, 1/3)$. Si tomamos el índice $i = (N_i, \epsilon_i) \in I(\text{Ker} y^*, 1/3)$ se tiene que $N_i \subset \text{Ker} y^*$ y, por tanto, $y^* \in N_i^\perp$.

Por otro lado,

$$\overline{\alpha x_i + \beta y_i} + N_i = T_i(\alpha x_i + \beta y_i + M_i) = T_i(\alpha(x_i + M_i) + \beta(y_i + M_i))$$

$$= \alpha T_i(x_i + M_i) + \beta T_i(y_i + M_i) = \alpha(\overline{x_i} + N_i) + \beta(\overline{y_i} + N_i) = (\alpha\overline{x_i} + \beta\overline{y_i}) + N_i.$$

Es decir,

$$\overline{\alpha x_i + \beta y_i} - \alpha\overline{x_i} - \beta\overline{y_i} \in N_i.$$

Luego, deducimos que si $i = (N_i, \epsilon_i) \in I(\text{Ker} y^*, 1/3)$, entonces

$$\langle\overline{\alpha x_i + \beta y_i} - \alpha\overline{x_i} - \beta\overline{y_i}, y^*\rangle = 0$$

y, por tanto, para cada $y^* \in Y^*$, se verifica

$$\lim_{\mathcal{U}}\langle\overline{\alpha x_i + \beta y_i} - \alpha\overline{x_i} - \beta\overline{y_i}, y^*\rangle = 0.$$

Recordando la definición de T, llegamos a

$$T[\alpha(x_i)_{i\in\mathcal{I}} + \beta(y_i)_{i\in\mathcal{I}}] = \alpha T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}] + \beta T[(y_i)_{i\in\mathcal{I}}].$$

A continuación vamos a ver que T es continua. Dado $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$,

$$\|T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}]\| = \|w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i}\| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} |\lim_{\mathcal{U}} \langle \overline{x_i}, y^*\rangle|$$

$$\leq \sup_{\|y^*\|\leq 1} \lim_{\mathcal{U}} \|\overline{x_i}\| \|y^*\| = \lim_{\mathcal{U}} \|\overline{x_i}\| \leq \lim_{\mathcal{U}} (\|(x_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_\infty + \epsilon_i) = \|(x_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_\infty.$$

Evidentemente, hemos usado $(*)$ y que $\lim_{\mathcal{U}} \epsilon_i = 0$ puesto que, dado cualquier número $\epsilon > 0$, basta tomar $i_0 = (N, \epsilon)$ con $N \in \mathrm{Cod}(Y)$ arbitrario para deducir que si $i = (N_i, \epsilon_i) \in I(N, \epsilon)$, entonces $|\epsilon_i| < \epsilon$.

La acotación anterior muestra, además que $\|T\| \leq 1$.

Definimos ahora la aplicación

$$T_1 : (X)_{\mathcal{U}} \longrightarrow Y^{**}$$

dada por $T_1(x_i)_{\mathcal{U}} := T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}]$ siendo $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ cualquier representante de $(x_i)_{\mathcal{U}}$.

Veamos que T_1 está bien definida, es decir que no depende del representante escogido. Por la linealidad de T, bastará comprobar que si $(x_i)_{\mathcal{U}}$ es la clase nula, entonces se verifica que $T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}] = 0$.

Dado $y^* \in Y^*$ cualquiera, utilizando $(*)$ obtenemos que

$$|\langle \overline{x_i}, y^*\rangle| \leq \|\overline{x_i}\| \|y^*\| \leq (\|x_i\| + \epsilon_i)\|y^*\|$$

y, por tanto,

$$\lim_{\mathcal{U}} |\langle \overline{x_i}, y^*\rangle| \leq \lim_{\mathcal{U}} (\|x_i\| + \epsilon_i) \|y^*\| = \left(\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| + \lim_{\mathcal{U}} \epsilon_i\right) \|y^*\| = 0.$$

Luego, $T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}] = w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i} = 0$.

Obviamente T_1 es lineal por la linealidad de T. Veamos que T_1 es continua. Dado $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}$, utilizando $(*)$ conseguimos que

$$\|T_1(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \|T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}]\| = \|w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i}\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|\overline{x_i}\|$$

$$\leq \lim_{\mathcal{U}} (\|x_i\| + \epsilon_i) = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| + \lim_{\mathcal{U}} \epsilon_i = \|(x_i)_{\mathcal{U}}\|.$$

En particular, $\|T_1\| \leq 1$.

El teorema estará probado si demostramos que T_1 es sobreyectiva con la constante $\text{open}(T_1) \leq 1$ puesto que, en ese caso $T_1 : (X)_{\mathcal{U}} \longrightarrow Y^{**}$ sería lineal, continuo, sobreyectivo, con $\|T_1\| \leq 1$ y $\text{open}(T_1) \leq 1$ y, por tanto,

$$(X)_{\mathcal{U}}/\text{Ker}T_1 \text{ y } Y^{**}$$

serían isométricos.

Tomemos $y^{**} \in Y^{**}$ cualquiera. Tendremos que encontrar $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}$ tal que

$$T_1(x_i)_{\mathcal{U}} = y^{**} \quad \text{y} \quad \|(x_i)_{\mathcal{U}}\| \leq \|y^{**}\|.$$

Para buscar dicho elemento razonamos como sigue. Para cada $i = (N_i, \epsilon_i)$ el subespacio $N_i^{\perp}$ es finito-dimensional. Si suponemos que

$$N_i^{\perp} = \text{span}\{y_1^*(i), \ldots, y_{n_i}^*(i)\},$$

por el lema de Helly existirá $\tilde{y}_i \in Y$ de manera que

$$\|\tilde{y}_i\| \leq (1 + \epsilon_i)\|y^{**}\|$$

$$\langle y_j^*(i), \tilde{y}_i\rangle = \langle y^{**}, y_j^*(i)\rangle$$

para cada $j = 1, 2, \ldots n_i$.

Aplicando la definición de norma cociente al elemento $T_i^{-1}(\tilde{y}_i + N_i) \in X/M_i$, podemos encontrar $x_i \in X$ con

$$x_i + M_i = T_i^{-1}(\tilde{y}_i + N_i) \quad \text{y} \quad \|x_i\| \leq \|T_i^{-1}(\tilde{y}_i + N_i)\| + \epsilon_i.$$

Tomemos la red $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ con los elementos x_i elegidos de la forma anterior. La red $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ está acotada puesto que

$$\|x_i\| \leq \|T_i^{-1}(\tilde{y}_i + N_i)\| + \epsilon_i \leq \|T_i^{-1}\|\|\tilde{y}_i + N_i\| + \epsilon_i$$

$$\leq (1 + \epsilon_i)\|\tilde{y}_i\| + \epsilon_i \leq (1 + \epsilon_i)^2\|y^{**}\| + \epsilon_i \leq 4\|y^{**}\| + 1.$$

Consideremos la correspondiente clase de equivalencia $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}$. Se verifica

$$\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}}(\|T_i^{-1}(\tilde{y}_i + N_i)\| + \epsilon_i)$$

$$\leq \lim_{\mathcal{U}} \left(\|T_i^{-1}\| \|\tilde{y}_i + N_i\| + \epsilon_i \right) \leq \lim_{\mathcal{U}} \left((1+\epsilon_i)\|\tilde{y}_i\| + \epsilon_i \right)$$
$$\leq \lim_{\mathcal{U}} (1+\epsilon_i)^2 \|y^{**}\| + \lim_{\mathcal{U}} \epsilon_i = \|y^{**}\|.$$

En la parte final de la prueba mostramos que se tiene que $T_1(x_i)_{\mathcal{U}} = y^{**}$ o, equivalentemente,

$$\lim_{\mathcal{U}} \langle \overline{x_i}, y^* \rangle = \langle y^{**}, y^* \rangle \text{ para todo } y^* \in Y^*.$$

La argumentación se hará en dos pasos. Por un lado,

$$\lim_{\mathcal{U}} \langle \overline{x_i}, y^* \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle \tilde{y}_i, y^* \rangle.$$

En efecto, tomando $i_0 = (\mathrm{Ker} y^*, 1/3)$ tenemos que si $i = (N_i, \epsilon_i) \in I(\mathrm{Ker} y^*, 1/3)$, entonces $N_i \subset \mathrm{Ker} y^*$ y, por tanto, $y^* \in N_i^\perp$. Además, $\overline{x_i} - \tilde{y}_i \in N_i$ puesto que

$$\overline{x_i} + N_i = T_i(x_i + M_i) = \tilde{y}_i + N_i.$$

Finalmente, para cada $i = (N_i, \epsilon_i) \in I(\mathrm{Ker} y^*, 1/3)$,

$$\langle \overline{x_i}, y^* \rangle - \langle \tilde{y}_i, y^* \rangle = \langle \overline{x_i} - \tilde{y}_i, y^* \rangle = 0.$$

Por otro lado,

$$\lim_{\mathcal{U}} \langle \tilde{y}_i, y^* \rangle = \langle y^{**}, y^* \rangle.$$

En efecto, tomando $i_0 = (\mathrm{Ker} y^*, 1/3)$, se tiene que si $i = (N_i, \epsilon_i) \in I(\mathrm{Ker} y^*, 1/3)$, entonces $N_i \subset \mathrm{Ker} y^*$. En particular, $y^* \in N_i^\perp = \mathrm{span}\{y_1^*(i), \ldots, y_{n_i}^*(i)\}$, es decir,

$$y^* = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j y_j^*(i), \quad \lambda_j \in \mathbb{K}.$$

Finalmente, para cada $i = (N_i, \epsilon_i) \in I(\mathrm{Ker} y^*, 1/3)$,

$$\langle \tilde{y}_i, y^* \rangle - \langle y^{**}, y^* \rangle = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j \left(\langle \tilde{y}_i, y_j^*(i) \rangle - \langle y^{**}, y_j^*(i) \rangle \right) = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_j \cdot 0 = 0.$$

■

El teorema 2.2.3 puede refinarse si Y tiene dual separable, obteniendo una versión dual del teorema 1.2.12.

Teorema 2.2.4 *Si Y es un espacio de Banach con dual separable y está representado finitamente por cocientes en X, entonces Y^{**} es isométrico a un cociente de $(X)_{\mathcal{U}}$ para cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$ numerablemente incompleto.*

DEMOSTRACIÓN:

Esta demostración sigue un esquema análogo a la del teorema 2.2.3. Construiremos un operador auxiliar T de $l_\infty(\mathcal{I}, X)$ en Y^{**} que nos permitirá obtener el operador de $(X)_{\mathcal{U}}$ en Y^{**} deseado.

Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro numerablemente incompleto sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$. Existen

$$\mathcal{I} = I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$$

tales que $I_k \in \mathcal{U}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} I_k = \emptyset$.

Por otro lado, puesto que Y^* es separable, existe un subconjunto F de Y^* denso y numerable. Supongamos que $F = \{y_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$.

Para cada $i \in \mathcal{I}$, llamemos n_i al mayor número natural tal que $i \in I_{n_i} \setminus I_{n_i+1}$. Sea $N_i = \operatorname{span}\{y_1^*, \ldots, y_{n_i}^*\}$. El subespacio $(N_i)_\perp$ es de codimensión finita en Y puesto que

$$(Y/(N_i)_\perp)^* \equiv ((N_i)_\perp)^\perp \equiv N_i.$$

Por hipótesis, $Y \prec_q X$. Por tanto, podemos garantizar la existencia de un subespacio cerrado $M_i \in \operatorname{Cod}(X)$ y de un $\left(1+\frac{1}{n_i}\right)$-isomorfismo

$$T_i : X/M_i \longrightarrow Y/(N_i)_\perp.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $\|T_i\| = 1$ y $\|T_i^{-1}\| < 1 + \frac{1}{n_i}$.

A continuación, vamos a definir un operador T de $l_\infty(\mathcal{I}, X)$ en Y^{**}. Dado $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$, para cada $i \in \mathcal{I}$, podemos encontrar, aplicando la definición de norma cociente, un elemento $\overline{x_i} \in Y$ tal que

$$\overline{x_i} + (N_i)_\perp = T_i(x_i + M_i)$$

$$\|\overline{x_i}\| \le \|T_i(x_i + M_i)\| + \frac{1}{n_i}.$$

La red $(\overline{x_i})_{i\in\mathcal{I}}$ de Y está acotada, puesto que, para cada $i \in \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned}\|\overline{x_i}\| &\leq \|T_i(x_i + M_i)\| + \frac{1}{n_i} \leq \|T_i\|\|x_i + M_i\| + \frac{1}{n_i} \\ &\leq \|x_i + M_i\| + \frac{1}{n_i} \leq \|x_i\| + \frac{1}{n_i} \leq \|(x_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_\infty + \frac{1}{n_i} \\ &\leq \|(x_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_\infty + 1.\end{aligned} \tag{†}$$

Por tanto, $(\overline{x_i})_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, Y)$ y considerándola como una red en Y^{**}, por el teorema de Alaoglu y el lema 1.2.1, existe el $w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i} \in Y^{**}$. Definamos

$$T : l_\infty(\mathcal{I}, X) \longrightarrow Y^{**}, \quad (x_i)_{i\in\mathcal{I}} \longmapsto w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i}.$$

Veamos que T está bien definido. Si, dado $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$, existiesen, para cada $i \in \mathcal{I}$, $\overline{x_i}, \hat{x}_i \in Y$ tales que

$$\overline{x_i} + (N_i)_\perp = T_i(x_i + M_i) = \hat{x}_i + (N_i)_\perp,$$

$$\|\overline{x_i}\| \leq \|T_i(x_i + M_i)\| + \frac{1}{n_i} \quad \text{y} \quad \|\hat{x}_i\| \leq \|T_i(x_i + M_i)\| + \frac{1}{n_i}$$

entonces, para cualquier elemento y_k^* de F, considerando el subconjunto k-ésimo $I_k \in \mathcal{U}$, se verifica que si $i \in I_k$, entonces $n_i \geq k$ y, por tanto, el elemento $y_k^* \in \operatorname{span}\{y_1^*, \ldots, y_{n_i}^*\} = N_i$.

Por otro lado $\overline{x_i} - \hat{x}_i \in (N_i)_\perp$ y, por tanto,

$$\langle \overline{x_i}, y_k^* \rangle - \langle \hat{x}_i, y_k^* \rangle = \langle \overline{x_i} - \hat{x}_i, y_k^* \rangle = 0$$

Por densidad $\langle \overline{x_i}, y^* \rangle = \langle \hat{x}_i, y^* \rangle$ para todo $y^* \in Y^*$. Resumiendo,

$$w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i} = w^* - \lim_{\mathcal{U}} \hat{x}_i.$$

Veamos que T es lineal. Sean $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}, (y_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Teniendo en cuenta la definición de T, podemos suponer que

$$T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}] = w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i}$$

$$\text{con } \ \overline{x_i} + (N_i)_\perp = T_i(x_i + M_i) \ \text{ y } \ \|\overline{x_i}\| \leq \|T_i(x_i + M_i)\| + \frac{1}{n_i},$$

$$T[(y_i)_{i\in\mathcal{I}}] = w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{y_i}$$

$$\text{con } \ \overline{y_i} + (N_i)_\perp = T_i(y_i + M_i) \ \text{ y } \ \|\overline{y_i}\| \leq \|T_i(y_i + M_i)\| + \frac{1}{n_i},$$

$$T[\alpha(x_i)_{i\in\mathcal{I}} + \beta(y_i)_{i\in\mathcal{I}}] = T[(\alpha x_i + \beta y_i)_{i\in\mathcal{I}}] = w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{\alpha x_i + \beta y_i},$$

$$\text{con } \ \overline{\alpha x_i + \beta y_i} + (N_i)_\perp = T_i(\alpha x_i + \beta y_i + M_i)$$

$$\text{y } \ \|\overline{\alpha x_i + \beta y_i}\| \leq \|T_i(\alpha x_i + \beta y_i + M_i)\| + \frac{1}{n_i}.$$

Para cualquier elemento y_k^* de F, considerando el subconjunto $I_k \in \mathcal{U}$, se tiene que si $i \in I_k$, entonces, $n_i \geq k$ y, por tanto, $y_k^* \in \{y_1^*, \ldots, y_{n_i}^*\} = N_i$.

Por otro lado

$$\overline{\alpha x_i + \beta y_i} + (N_i)_\perp = T_i(\alpha x_i + \beta y_i + M_i) = T_i(\alpha(x_i + M_i) + \beta(y_i + M_i))$$

$$= \alpha T_i(x_i+M_i)+\beta T_i(y_i+M_i) = \alpha(\overline{x_i}+(N_i)_\perp)+\beta(\overline{y_i}+(N_i)_\perp) = (\alpha\overline{x_i}+\beta\overline{y_i})+(N_i)_\perp,$$

es decir, $\overline{\alpha x_i + \beta y_i} - \alpha\overline{x_i} - \beta\overline{y_i} \in (N_i)_\perp$.
Luego, si $i \in I_k$, entonces

$$\langle \overline{\alpha x_i + \beta y_i} - \alpha\overline{x_i} - \beta\overline{y_i}, y_k^* \rangle = 0$$

y, por tanto, para cada $y_k^* \in F$, se verifica

$$\lim_{\mathcal{U}} \langle \overline{\alpha x_i + \beta y_i}, y_k^* \rangle = \alpha \lim_{\mathcal{U}} \langle \overline{x_i}, y_k^* \rangle + \beta \lim_{\mathcal{U}} \langle \overline{y_i}, y_k^* \rangle$$

Por densidad, la igualdad es también válida para cualquier $y^* \in Y^*$ y conseguimos

$$T[\alpha(x_i)_i + \beta(y_i)_i] = \alpha T[(x_i)_i] + \beta T[(y_i)_i].$$

Veamos que T es continua. Dado $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$, utilizando (†) se obtiene

$$\|T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}]\| = \|w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i}\| = \sup_{\|y^*\|\leq 1} |\lim_{\mathcal{U}} \langle \overline{x_i}, y^* \rangle|$$

$$\leq \sup_{\|y^*\|\leq 1} \lim_{\mathcal{U}} \|\overline{x_i}\| \|y^*\| = \lim_{\mathcal{U}} \|\overline{x_i}\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \left(\|(x_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_\infty + \frac{1}{n_i} \right) = \|(x_i)_{i\in\mathcal{I}}\|_\infty.$$

Evidentemente, hemos usado que $\lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{n_i} = 0$.

La acotación anterior muestra, además que $\|T\| \leq 1$.

Consideremos ahora la aplicación

$$T_1 : (X)_{\mathcal{U}} \longrightarrow Y^{**}$$

definida por $T_1(x_i)_{\mathcal{U}} = T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}]$ siendo $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ cualquier representante de $(x_i)_{\mathcal{U}}$.

Veamos que T_1 está bien definida. Por la linealidad de T, bastará probar que si $\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = 0$, entonces $T[(x_i)_i] = 0$.

Dado $y^* \in Y^*$ cualquiera, utilizando (†) obtenemos

$$|\lim_{\mathcal{U}} \langle \overline{x_i}, y^* \rangle| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|\overline{x_i}\| \|y^*\|$$

$$\leq \left(\lim_{\mathcal{U}} \left(\|x_i\| + \frac{1}{n_i}\right)\right) \|y^*\| = \left(\lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| + \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{n_i}\right) \|y^*\| = 0.$$

Luego, $T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}] = w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i} = 0$.

Obviamente T_1 es lineal por la linealidad de T.

Veamos que T_1 es continua. Dado $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}$, utilizando de nuevo (†), conseguimos

$$\|T_1(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \|T[(x_i)_{i\in\mathcal{I}}]\| = \|w^* - \lim_{\mathcal{U}} \overline{x_i}\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|\overline{x_i}\|$$

$$\leq \lim_{\mathcal{U}} \left(\|x_i\| + \frac{1}{n_i}\right) = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| + \lim_{\mathcal{U}} \frac{1}{n_i} = \|(x_i)_{\mathcal{U}}\|.$$

En particular, $\|T_1\| \leq 1$.

El teorema estará probado, al igual que en el teorema 2.2.3, si demostramos que T_1 es sobreyectiva con constante $\mathrm{open}(T_1) \leq 1$.

Dado $y^{**} \in Y^{**}$, para cada $i \in \mathcal{I}$, considerando $\{y_1^*, \ldots, y_{n_i}^*\} \subset Y^*$ y aplicando el lema de Helly, se puede obtener $\tilde{y_i} \in Y$ tal que

$$\|\tilde{y_i}\| \leq \left(1 + \frac{1}{n_i}\right) \|y^{**}\| \quad \text{con} \quad \langle y_k^*, \tilde{y_i} \rangle = \langle y^{**}, y_k^* \rangle \text{ para } k = 1, \ldots, n_i.$$

Aplicando la definición de norma cociente a $T_i^{-1}(\tilde{y}_i + (N_i)_\perp) \in X/M_i$, podemos encontrar $x_i \in X$ tal que

$$x_i + M_i = T_i^{-1}(\tilde{y}_i + (N_i)_\perp) \ \text{ y } \ \|x_i\| \leq \|T_i^{-1}(\tilde{y}_i + (N_i)_\perp)\| + \frac{1}{n_i}.$$

Tomemos la red $(x_i)_{i\in\mathcal{I}}$ con los elementos x_i elegidos de la forma anterior. La red $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$, puesto que

$$\begin{aligned}\|x_i\| &\leq \|T_i^{-1}(\tilde{y}_i + (N_i)_\perp)\| + \frac{1}{n_i} \leq \|T_i^{-1}\|\|\tilde{y}_i + (N_i)_\perp\| + \frac{1}{n_i} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)\|\tilde{y}_i\| + \frac{1}{n_i} \leq \left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^2 \|y^{**}\| + \frac{1}{n_i} \leq 4\|y^{**}\| + 1.\end{aligned}$$

Consideremos la correspondiente clase de equivalencia $(x_i)_\mathcal{U} \in (X)_\mathcal{U}$. Se verifica que

$$\|(x_i)_\mathcal{U}\| = \lim_\mathcal{U} \|x_i\| \leq \lim_\mathcal{U} \left(\left(1 + \frac{1}{n_i}\right)^2 \|y^{**}\| + \frac{1}{n_i}\right) = \|y^{**}\|.$$

Finalmente, comprobamos que $T_1(x_i)_\mathcal{U} = y^{**}$ o, equivalentemente,

$$\lim_\mathcal{U} \langle \overline{x_i}, y^* \rangle = \langle y^{**}, y^* \rangle \ \text{ para todo } y^* \in Y^*.$$

El razonamiento se hará en dos pasos. Por un lado,

$$\lim_\mathcal{U} \langle \overline{x_i}, y_k^* \rangle = \lim_\mathcal{U} \langle \tilde{y}_i, y_k^* \rangle, \ \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

En efecto, tomando $I_k \in \mathcal{U}$ se verifica que, si $i \in I_k$, entonces $n_i \geq k$. Por tanto, $y_k^* \in \operatorname{span}\{y_1^*, \ldots, y_{n_i}^*\} = N_i$. Además $\overline{x_i} - \tilde{y}_i \in (N_i)_\perp$, puesto que

$$\overline{x_i} + (N_i)_\perp = T_i(x_i + M_i) = \tilde{y}_i + (N_i)_\perp.$$

Por tanto,

$$\langle \overline{x_i}, y_k^* \rangle - \langle \tilde{y}_i, y_k^* \rangle = \langle \overline{x_i} - \tilde{y}_i, y_k^* \rangle = 0.$$

Por otro lado,

$$\lim_\mathcal{U} \langle \tilde{y}_i, y_k^* \rangle = \langle y^{**}, y_k^* \rangle, \ \text{ para cada } k \in \mathbb{N}.$$

En efecto, tomando $I_k \in \mathcal{U}$, se tiene que si $i \in I_k$, entonces $n_i \geq k$. En particular, $y_k^* \in \{y_1^*, \ldots, y_{n_i}^*\} = N_i$. Por tanto,

$$\langle \tilde{y}_i, y_k^* \rangle - \langle y^{**}, y_k^* \rangle = \langle y^{**}, y_k^* \rangle - \langle y^{**}, y_k^* \rangle = 0.$$

En definitiva, $\lim_{\mathcal{U}}\langle \overline{x_i}, y_k^* \rangle = \langle y^{**}, y_k^* \rangle$ para todo $y_k^* \in F$. Por densidad, llegamos a

$$\lim_{\mathcal{U}}\langle \overline{x_i}, y^* \rangle = \langle y^{**}, y^* \rangle \text{ para todo } y^* \in Y^*.$$

■

En el siguiente teorema caracterizaremos la representabilidad finita por cocientes de diversas maneras.

Teorema 2.2.5 *Sean X e Y dos espacios de Banach. Son equivalentes:*
(1) Y está finitamente representado por cocientes en X.
(2) Existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que Y^{**} es isométrico a un cociente de $(X)_{\mathcal{U}}$.
(3) Y^{**} está finitamente representado por cocientes en X.
(4) Y está finitamente representado por cocientes en X^{**}.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Visto en el teorema 2.2.3.

(2) $\Longrightarrow$ (3) Supongamos que existe $T : (X)_{\mathcal{U}} \longrightarrow Y^{**}$ lineal, continuo, sobreyectivo, con $\|T\| \leq 1$ y $\text{open}(T) \leq 1$.

Dado $\epsilon > 0$ y dado $N \in \text{Cod}(Y^{**})$, consideremos la aplicación cociente canónica

$$Q : Y^{**} \longrightarrow Y^{**}/N,$$

que, recordemos, verifica $\|Q\| \leq 1$ y $\text{open}(Q) \leq 1$.

La composición $Q \circ T$ es un operador lineal, continuo, sobreyectivo, tal que $\|Q \circ T\| \leq 1$ y $\text{open}(Q \circ T) \leq 1$ y, por tanto,

$$\widetilde{Q \circ T} : (X)_{\mathcal{U}}/\text{Ker}(Q \circ T) \longrightarrow Y^{**}/N$$

es una isometría. Luego,

$$d((X)_{\mathcal{U}}/\text{Ker}(Q \circ T), Y^{**}/N) = 1.$$

En particular, $\mathrm{Ker}(Q \circ T) \in \mathrm{Cod}(X)_{\mathcal{U}}$ y por el teorema 2.2.2 existirá $I_0 \in \mathcal{U}$ tal que, para cada $i \in I_0$, se puede encontrar $M_i \in \mathrm{Cod}(X)$ con

$$d((X)_{\mathcal{U}}/\mathrm{Ker}(Q \circ T), X/M_i) < 1 + \epsilon.$$

Tomando cualquiera de estos M_i llegamos a

$$d(Y^{**}/N, X/M_i) \leq d(Y^{**}/N, (X)_{\mathcal{U}}/\mathrm{Ker}(Q \circ T)) d((X)_{\mathcal{U}}/\mathrm{Ker}(Q \circ T), X/M_i) < 1 + \epsilon.$$

(3) $\Longrightarrow$ (4) Dado $\epsilon > 0$ y dado $N \in \mathrm{Cod}(Y)$, observemos que $N^{\perp\perp} \in \mathrm{Cod}(Y^{**})$, puesto que

$$Y^{**}/N^{\perp\perp} \equiv (N^{\perp})^* \equiv (Y/N)^{**} \equiv Y/N.$$

Por hipótesis, Y^{**} está representado finitamente por cocientes en X, por tanto, existe $M \in \mathrm{Cod}(X)$ tal que

$$d\left(Y^{**}/N^{\perp\perp}, X/M\right) < 1 + \epsilon.$$

Tomemos $M^{\perp\perp}$. Se verifica que $M^{\perp\perp} \in \mathrm{Cod}(X^{**})$ y, además,

$$d\left(Y/N, X^{**}/M\right) \leq d\left(Y/N, Y^{**}/N^{\perp\perp}\right) d\left(Y^{**}/N^{\perp\perp}, X/M\right) < 1 + \epsilon.$$

(4) $\Longrightarrow$ (1) Dado $\epsilon > 0$ y dado $N \in \mathrm{Cod}(Y)$, tomemos un número $\epsilon' > 0$ tal que $(1 + \epsilon')^2 < 1 + \epsilon$. Por hipótesis, $Y \prec_q X^{**}$ y, por tanto, podemos encontrar $M \in \mathrm{Cod}(X^{**})$ tal que

$$d\left(Y/N, X^{**}/M\right) < 1 + \epsilon'.$$

Por el principio de reflexividad local y puesto que $M^{\perp}$ es un subespacio finito-dimensional de X^{***}, existirá un subespacio L de X^* finito-dimensional tal que

$$d(M^{\perp}, L) < 1 + \epsilon'.$$

Tomemos $L_{\perp}$. Se verifica que $L_{\perp} \in \mathrm{Cod}(X)$ puesto que

$$(X/L_{\perp})^* \equiv (L_{\perp})^{\perp} \equiv L,$$

y, además,

$$
\begin{aligned}
d(Y/N, X/L_\perp) &\leq d(Y/N, X^{**}/M)\, d(X^{**}/M, X/L_\perp) \\
&= d(Y/N, X^{**}/M)\, d((X^{**}/M)^*, (X/L_\perp)^*) \\
&\leq d(Y/N, X^{**}/M)\, d\left(M^\perp, L\right) < (1+\epsilon')^2 < 1+\epsilon.
\end{aligned}
$$

■

Notemos que, por la reflexividad de la representabilidad finita por cocientes y por el teorema 2.2.5, se puede deducir que todo espacio de Banach X está representado finitamente por cocientes en su bidual X^{**} y, recíprocamente, $X^{**} \prec_q X$.

El siguiente teorema muestra claramente que el concepto de representabilidad finita por cocientes puede considerarse la noción dual de la representabilidad finita, en contrapartida con lo ocurrido con la noción de cociente local dada por J. Stern .

Teorema 2.2.6 *Sean X e Y espacios de Banach. Entonces,*
(1) $Y \prec_q X$ si y sólo si $Y^* \prec X^*$.
(2) $Y \prec X$ si y sólo si $Y^* \prec_q X^*$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) ($\Longrightarrow$) Dados $\epsilon > 0$ y $N \in \mathrm{Dim}(Y^*)$, el subespacio $N_\perp$ es de codimensión finita en Y puesto que

$$(Y/N_\perp)^* \equiv (N_\perp)^\perp \equiv N.$$

Por hipótesis, Y está representado finitamente por cocientes en X, por tanto, se puede encontrar $\tilde{M} \in \mathrm{Cod}(X)$ tal que

$$d(Y/N_\perp, X/\tilde{M}) < 1+\epsilon.$$

Tomemos $M := \tilde{M}^{\perp}$. M es un subespacio finito dimensional de X^* puesto que

$$M = \tilde{M}^{\perp} \equiv (X/\tilde{M})^*,$$

y, además,

$$d(N, M) \leq d(N, (Y/N_{\perp})^*) d((Y/N_{\perp})^*, (X/\tilde{M})^*) d((X/\tilde{M})^*, M)$$

$$= d((Y/N_{\perp})^*, (X/\tilde{M})^*) = d(Y/N_{\perp}, X/\tilde{M}) < 1 + \epsilon.$$

($\Longleftarrow$) Dados $\epsilon > 0$ y $N \in \mathrm{Cod}(Y)$, $N^{\perp}$ es un subespacio finito dimensional de Y^*. Por hipótesis, Y^* está finitamente representado en X^*, por tanto, existe $\tilde{M} \in \mathrm{Dim}(X^*)$ con $d(N^{\perp}, \tilde{M}) < 1 + \epsilon$.

Tomemos $M := \tilde{M}_{\perp}$. Se verifica que $M \in \mathrm{Cod}(X)$ pues

$$(X/M)^* = (X/\tilde{M}_{\perp})^* \equiv (\tilde{M}_{\perp})^{\perp} \equiv \tilde{M}$$

y, además

$$d(Y/N, X/M) = d((Y/N)^*, (X/M)^*)$$

$$\leq d((Y/N)^*, N^{\perp}) d(N^{\perp}, \tilde{M}) d(\tilde{M}, (X/M)^*)$$

$$= d(N^{\perp}, \tilde{M}) < 1 + \epsilon.$$

(2) Por (1) bastará probar que $Y \prec X$ si y sólo si $Y^{**} \prec X^{**}$, y esto es obvio puesto que $Y^{**} \prec Y$ por el principio de reflexividad local, $X \prec X^{**}$ siempre y la representabilidad finita es transitiva.

■

En el siguiente teorema recogemos distintas relaciones entre la representabilidad finita por cocientes y los ultraproductos.

Teorema 2.2.7 *Para cualesquiera espacios de Banach X e Y se verifican:*
(1) Toda ultrapotencia de X está finitamente representada por cocientes en X.

(2) X está finitamente representado por cocientes en cualquier ultrapotencia suya.

(3) Si Y está finitamente representado por cocientes en X y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, entonces la ultrapotencia $(Y)_{\mathcal{U}}$ está finitamente representada por cocientes en la ultrapotencia $(X)_{\mathcal{U}}$.

(4) Para cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$ y para cualquier familia de espacios de Banach $(X_i)_{i\in\mathcal{I}}$ se verifica que $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$ está finitamente representado por cocientes en $(X_i^*)_{\mathcal{U}}$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$. Por el teorema 1.2.10, $(X)^{**}_{\mathcal{U}}$ es isométrico a un subespacio uno-complementado de $((X)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$ para algún ultrafiltro $\mathcal{V}$ sobre un conjunto de índices $\mathcal{J}$. Por tanto, existe una proyección

$$P : X_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}} \longrightarrow (X)^{**}_{\mathcal{U}}$$

de norma uno. En particular, $\|P\| \leq 1$ y $\mathrm{open}(P) \leq 1$. Luego, los espacios $(X)^{**}_{\mathcal{U}}$ y $(X)_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}/\mathrm{Ker}P$ son isométricos y, por el teorema 2.2.5, $(X)_{\mathcal{U}} \prec_q X$.

(2) Obvio por el teorema 2.2.6 y puesto que, usando el teorema 1.3.3, se verifica que

$$X^* \prec (X^*)_{\mathcal{U}} \prec (X)^*_{\mathcal{U}}.$$

(3) Se deduce inmediatamente de los puntos anteriores y de la transitividad de la representabilidad finita por cocientes.

(4) Por el teorema 1.3.3, sabemos que $(X_i)^*_{\mathcal{U}}$ es isométrico a un subespacio uno-complementado de $((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}$ para algún ultrafiltro $\mathcal{V}$, es decir, existe una proyección

$$P : ((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}} \longrightarrow (X_i)^*_{\mathcal{U}}$$

de norma 1. Consideremos

$$P^{**} : ((X_i^*)_{\mathcal{U}})^{**}_{\mathcal{V}} \longrightarrow (X_i)^{***}_{\mathcal{U}}$$

Se verifica que

$$\|P^{**}\| = \|P\| \leq 1 \text{ y } \mathrm{open}(P^{**}) \leq \mathrm{open}(P) \leq 1.$$

Por el teorema 1.2.10, $((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}^{**}$ es isométrico a un subespacio uno-complementado de $(((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}})_{\mathcal{W}}$ para algún ultrafiltro $\mathcal{W}$ y, por tanto, existe una proyección de norma uno

$$Q : (((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}})_{\mathcal{W}} \longrightarrow ((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}}^{**}.$$

Como $(((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}})_{\mathcal{W}}$ es isométrico a $((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}}$, podemos considerar la composición

$$P^{**} \circ Q : ((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}} \longrightarrow (X_i)_{\mathcal{U}}^{***}.$$

Obviamente, $P^{**} \circ Q$ es sobreyectivo y

$$\|P^{**} \circ Q\| \leq \|P^{**}\|\|Q\| \leq 1 \text{ y } \mathrm{open}(P^{**} \circ Q) \leq \mathrm{open}(P^{**})\mathrm{open}(Q) \leq 1.$$

Es decir, $(X_i)_{\mathcal{U}}^{***}$ y $((X_i^*)_{\mathcal{U}})_{\mathcal{V}\times\mathcal{W}}/\mathrm{Ker}(P^{**} \circ Q)$ son isométricos y, aplicando el teorema 2.2.5,

$$(X_i)_{\mathcal{U}}^* \prec_q (X_i^*)_{\mathcal{U}}.$$

■

El teorema 2.2.6 nos permite clarificar la relación entre los dos conceptos que se han propuesto como nociones duales de la representabilidad finita: la noción de cociente local dada por J. Stern y la noción de representabilidad finita por cocientes esbozada por S. Heinrich y desarrollada en esta memoria.

Teorema 2.2.8 *(1) Si Y es cociente local de X entonces Y está representado finitamente por cocientes en X. El recíproco no es cierto en general.*
(2) Si Y es un espacio de Banach dual, entonces Y está representado finitamente por cocientes en X si y sólo si Y es cociente local de X.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Si Y es cociente local de X, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que Y es isométrico a un cociente de $(X)_{\mathcal{U}}$. En particular, Y^* es isométrico a un subespacio de $(X)^*_{\mathcal{U}}$. Por la dualidad local de ultraproductos $(X)^*_{\mathcal{U}}$ se inyecta isométricamente en $(X^*)_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ para algún ultrafiltro $\mathcal{V}$. Por tanto, Y^* es isométrico a un subespacio de $(X^*)_{\mathcal{U}\times\mathcal{V}}$ y, por el teorema 1.2.11, $Y^* \prec X^*$. Finalmente, por el teorema 2.2.6, $Y \prec_q X$.

Para ver que el recíproco no es cierto, en general, basta considerar los ejemplos de la sección 2.1 y el teorema 2.2.6.

(2) Teniendo en cuenta el punto (1) observamos que sólo es necesario demostrar la implicación hacia la derecha.

Supongamos que $Y \prec_q X$. Por el teorema 2.2.5, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ y existe

$$T : (X)_{\mathcal{U}} \longrightarrow Y^{**}$$

lineal, continuo, sobreyectivo, con $\|T\| \leq 1$ y $\text{open}(T) \leq 1$. Puesto que Y es un espacio de Banach dual, está uno-complementado en su bidual. Es decir, existe

$$P : Y^{**} \longrightarrow Y$$

una proyección de norma uno. Consideremos la composición $P \circ T$. Se verifica que $P \circ T$ es lineal, continuo, sobreyectivo y

$$\|P \circ T\| \leq \|P\|\|T\| \leq 1 \;\text{ y }\; \text{open}(P \circ T) \leq \text{open}(P)\text{open}(T) \leq 1.$$

Luego, Y es isométrico a $(X)_{\mathcal{U}}/\text{Ker}(P \circ T)$ y, por tanto, Y es cociente local de X.

■

2.3 Relación con los espacios clásicos

Esta sección la dedicamos a analizar el significado de la representabilidad finita por cocientes cuando uno de los espacios que intervienen es un espacio clásico de sucesiones.

En el siguiente teorema mostramos la versión dual del teorema 1.2.2.

Teorema 2.3.1 *(1) Un espacio de Banach X está finitamente representado por cocientes en c_0 si y sólo si X^{**} es isométrico a un cociente de $C(K)$ para algún espacio compacto K de Haussdorf.*
(2) Todo espacio de Banach está finitamente representado por cocientes en l_1.
(3) Un espacio de Banach X está finitamente representado por cocientes en l_2 si y sólo si X es isométrico a un espacio de Hilbert.
(4) Sea $1 < p < \infty$ y $p \neq 2$. Un espacio de Banach X está finitamente representado por cocientes en l_p si y sólo si X^{**} es isométrico a un cociente de $L^p(\mu)$ para alguna medida μ.

DEMOSTRACIÓN:

(1) ($\Longrightarrow$) Por estar X finitamente representado por cocientes en c_0, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que X^{**} es isométrico a un cociente de $(c_0)_{\mathcal{U}}$. En virtud de [29, Teorema 3.3], la ultrapotencia $(c_0)_{\mathcal{U}}$ es isométrico a un $C(K)$ para algún compacto K de Hausdorff y, por tanto, X^{**} es isométrico a un cociente de algún $C(K)$.

($\Longleftarrow$) Si X^{**} es isométrico a un cociente de $C(K)$, dualizando se consigue que X^{***} es isométrico a un subespacio de $(C(K))^*$. Es conocido que el dual de $C(K)$ es isométrico a un $L^1(\mu)$ para una cierta medida μ. Por tanto, deducimos que $X^{***} \prec L^1(\mu)$. Por el teorema 1.2.2, $L^1(\mu)$ está finitamente representado en l_1. Luego,

$$X^* \prec X^{***} \prec L^1(\mu) \prec l_1.$$

Aplicando el teorema 2.2.6, deducimos que $X \prec_q c_0$.

(2) Por el teorema 1.2.2, todo espacio de Banach está finitamente representado en c_0. En particular, $X^* \prec c_0$ y, por el teorema 2.2.6, X^{**} está finitamente representado por cocientes en l_1. Como $X \prec_q X^{**}$ y la representabilidad finita por cocientes es transitiva, obtenemos que $X \prec_q l_1$.

(3) Por el teorema 2.2.6, X está finitamente representado por cocientes en l_2 si y sólo si X^* está finitamente representado en l_2. A su vez, por el teorema 1.2.2, esto equivale a decir que X^* es isométrico a un espacio de Hilbert o, equivalentemente, el propio X es isométrico a un espacio de Hilbert.

(4) Sea $1 < p < \infty$ y $p \neq 2$. Por el teorema 2.2.6, el espacio X está finitamente representado por cocientes en l_p si y sólo si X^* está finitamente representado en $l_{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. En virtud del teorema 1.2.2, esto se verifica si y sólo si X^* es isométrico a un subespacio de un $L^{p'}(\mu)$ para alguna medida μ o, equivalentemente, si y sólo si X^{**} es isométrico a un cociente de $L^p(\mu)$.

■

Para conseguir la versión dual del teorema 1.2.3, recordemos que

- Un espacio de Banach X *contiene a los espacios* $l_\infty^{(n)}$ *uniformemente* si existe un $\delta > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $x_1, \ldots, x_n \in X$ tales que, dada cualquier sucesión finita de escalares $a_1, \ldots, a_n$, se tiene
$$\delta \max_{i=1,\ldots n} |a_i| \leq \| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \| \leq \frac{1}{\delta} \max_{i=1,\ldots n} |a_i|.$$
Es decir, si existe un $\delta > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un subespacio $E_n \subset X$ de dimensión n tal que
$$d(l_\infty^{(n)}, E_n) \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

- Los espacios $l_1^{(n)}$ están *uniformemente complementados* en un espacio de Banach X si existe una constante $K > 0$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una proyección
$$P_n : X \longrightarrow X$$
con $\|P_n\| \leq K$ y $d(l_1^{(n)}, P_n(X)) \leq K$ [10].

B. Maurey y G. Pisier [43] probaron que un espacio de Banach X tiene sólo cotipo trivial si y sólo si X contiene a los $l_\infty^{(n)}$ uniformemente. Además, de la versión fuerte del principio de reflexividad local dado por W. B. Johnson, H. P. Rosenthal y M. Zippin, se deduce que los espacios $l_1^{(n)}$ están uniformemente complementados en un espacio de Banach X si y sólo si los espacios $l_\infty^{(n)}$ están contenidos uniformemente en X^*.

Teorema 2.3.2 *(1) c_0 está finitamente representado por cocientes en un espacio de Banach X si y sólo si X sólo tiene tipo trivial.*
(2) l_1 está finitamente representado por cocientes en un espacio de Banach X si y sólo si los espacios $l_1^{(n)}$ están uniformemente complementados en X.
(3) l_2 está finitamente representado por cocientes en todo espacio de Banach X.
(4) Si $1 < p < \infty$ y $p \neq 2$, se verifica que l_p está finitamente representado por cocientes en un espacio de Banach X si y sólo si $l_{p'}$ está finitamente representado en X^*.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Por el teorema 2.2.6, $c_0 \prec_q X$ si y sólo si l_1 está finitamente representado en X^*. Por G. Pisier [49], esto equivale a decir que $l_1 \prec X$ y, por el teorema 1.2.3, esto es equivalente a decir que X sólo tiene tipo trivial.

(2) Por el teorema 2.2.6, $l_1 \prec_q X$ si y sólo si $l_\infty \prec X^*$. Utilizando el principio de reflexividad local, esto es equivalente a decir que c_0 está finitamente representado en X^*. Por el teorema 1.2.3, esto significa que X^* tiene cotipo trivial y, por los comentarios previos al teorema, es equivalente a decir que los $l_1^{(n)}$ están uniformemente complementados en X.

(3) Basta aplicar el teorema de Dvoretzky y el teorema 2.2.6.

(4) Obvio por el teorema 2.2.6.

■

El teorema 2.2.6 también permite dar un resultado dual del teorema 1.2.4 de

J. L. Krivine.

Teorema 2.3.3 *Sea* $1 < p < \infty$ *y* $p \neq 2$. *Entonces* l_p *está finitamente representado por cocientes en un espacio de Banach* X *si y sólo si existe una constante* $K \geq 1$ *tal que, para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe un subespacio cerrado* N_n *de* X *de codimensión finita, con*

$$d(l_p^{(n)}, X/N_n) \leq K.$$

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Si $l_p \prec_q X$, por el teorema 2.2.6, tenemos que $l_{p'} \prec X^*$. El teorema 1.2.4 nos garantizará la existencia de una constante $K \geq 1$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $M_n \in \mathrm{Dim}(X^*)$ con

$$d(l_{p'}^{(n)}, M_n) \leq K.$$

Tomemos $N_n := (M_n)_\perp$. Se verifica que $N_n \in \mathrm{Cod}(X)$ y,

$$d(l_p^{(n)}, X/N_n) = d((l_p^{(n)})^*, (X/N_n)^*) \leq d(l_{p'}^{(n)}, M_n) d(M_n, (X/N_n)^*) \leq K.$$

($\Longleftarrow$) Supongamos que existe una constante $K \geq 1$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $N_n \in \mathrm{Cod}(X)$ con

$$d(l_p^{(n)}, X/N_n) \leq K.$$

Tomemos $M_n := (N_n)^\perp$. Se verifica que $M_n \in \mathrm{Dim}(X^*)$ y,

$$d(l_{p'}^{(n)}, M_n) \leq d((l_p^{(n)})^*, (X/N_n)^*) d((X/N_n)^*, M_n) = d(l_p^{(n)}, X/N_n) \leq K.$$

Por el teorema 1.2.4, esto significa que $l_{p'} \prec X^*$ y, por el teorema 2.2.6, $l_p \prec_q X$.

■

2.4 q-Espectro de un espacio de Banach

En esta sección mostramos cómo el concepto de la representabilidad finita por cocientes como noción dual de la representabilidad finita puede utilizarse para elaborar teorías paralelas a algunas ya existentes. En concreto, nosotros hemos elegido la teoría de espectro de un espacio de Banach infinito-dimensional desarrollada por E. V. Tokarev [56]. Además, al final de la sección se dará una versión dual de un famoso teorema de B. Maurey y G. Pisier para la representabilidad finita por cocientes.

Definición 2.4.1 *Dado X un espacio de Banach infinito-dimensional, se define el espectro de X como el conjunto*

$$\mathcal{S}(X) := \{p \in [1, \infty] \,:\, l_p \prec X\}.$$

Por el teorema de Dvoretzky, $2 \in \mathcal{S}(X)$ para cualquier espacio de Banach X. Además, fácilmente se puede comprobar que si $p \in \mathcal{S}(X)$ y $p < 2$, entonces $[p, 2] \subset \mathcal{S}(X)$.

En el artículo mencionado antes, E. V. Tokarev se plantea esencialmente dos cuestiones:

- Caracterizar aquellos conjuntos de $[1, \infty]$ que son espectro de algún espacio de Banach.
- Determinar cuándo dos espacios de Banach poseen el mismo espectro.

Definición 2.4.2 *Un subconjunto $A \subset [1, \infty)$ se dice espectral si existe un espacio de Banach infinito-dimensional tal que $\mathcal{S}(X) = A$.*

Observemos que restringirse al intervalo $[1, \infty)$ se debe a que si X es un espacio de Banach e $\infty \in \mathcal{S}(X)$, entonces $\mathcal{S}(X) = [1, \infty]$.

La respuesta dada por E. V. Tokarev para la primera cuestión es la siguiente.

Teorema 2.4.1 *Un subconjunto $A \subset [1, \infty)$ es espectral si y sólo si*

$$A = [p, 2] \cup B$$

con $1 \leq p \leq 2$ y donde B es un subconjunto compacto de $[2, \infty)$.

Para la segunda cuestión sólo obtiene el siguiente resultado parcial.

Teorema 2.4.2 *Sean X e Y dos espacios de Banach. Entonces,*
(1) Si X e Y son finitamente equivalentes, es decir, si $X \prec Y$ e $Y \prec X$, entonces $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(Y)$.
(2) Si $\infty \in \mathcal{S}(X)$ e $\infty \in \mathcal{S}(Y)$, entonces X e Y son finitamente equivalentes.

E. V. Tokarev prueba que ser finitamente equivalentes no resuelve en su totalidad el segundo problema.

Teorema 2.4.3 *Para cada conjunto espectral $A \subset [1, \infty)$, existen, al menos, dos espacios de Banach X e Y no finitamente equivalentes tales que $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(Y)$.*

Para construir la teoría dual del espectro de un espacio de Banach, introducimos el siguiente concepto vía la representabilidad finita por cocientes.

Definición 2.4.3 *Dado X un espacio de Banach infinito-dimensional, se define el q-espectro de X como el conjunto*

$$\mathcal{Q}(X) := \{p \in [1, \infty] \, : \, l_p \prec_q X\}.$$

Nos planteamos también las correspondientes cuestiones duales:

- Caracterizar aquellos conjuntos de $[1, \infty]$ que son q-espectro de algún espacio de Banach.

- Determinar cuándo dos espacios de Banach poseen el mismo q-espectro.

El siguiente teorema es el que nos permitirá traducir los resultados de E. V. Tokarev a nuestro contexto.

Teorema 2.4.4 *Dado un espacio de Banach X. Se verifica que p pertenece a $\mathcal{Q}(X)$ si y sólo si p' pertenece a $\mathcal{S}(X^*)$.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Si $p \in \mathcal{Q}(X)$, entonces l_p está finitamente representado por cocientes en X y, por el teorema 2.2.6, $(l_p)^*$ está finitamente representado en X^*. Distingamos dos casos:

- Si $1 \leq p < \infty$, entonces $(l_p)^* \equiv l_{p'}$ y obtenemos que $l_{p'} \prec X^*$.

- Si $p = \infty$, basta aplicar que todo espacio de Banach está finitamente representado en su bidual para obtener que

$$l_1 \prec (l_\infty)^* \prec X^*.$$

En cualquier caso, $l_{p'} \prec X^*$ y, por tanto, $p' \in \mathcal{S}(X^*)$.

($\Longleftarrow$) Sea $p \in [1, \infty]$ con $p' \in \mathcal{S}(X^*)$. Se verifica que $l_{p'}$ está finitamente representado en X^* y, por tanto, $(l_{p'})^* \prec_q X^{**}$. Debido a la transitividad de la representabilidad finita por cocientes, y dado que $X^{**} \prec_q X$, se obtiene que $(l_{p'})^* \prec_q X$. Distingamos dos casos:

- Si $p = 1$, basta aplicar que todo espacio de Banach está finitamente representado por cocientes en su bidual para obtener que

$$l_1 \prec_q (l_\infty)^* \prec_q X.$$

- Si $1 < p \leq \infty$, entonces $(l_{p'})^* \equiv l_p$ y obtenemos que $l_p \prec_q X$.

En cualquier caso, $l_p \prec_q X$ y, por tanto, $p \in \mathcal{Q}(X)$.

■

Evidentemente, del resultado anterior se deduce que si $1 \in \mathcal{Q}(X)$, entonces $\mathcal{Q}(X) = [1, \infty]$. Es por ello, por lo que nos hemos restringido al intervalo $(1, \infty]$ para responder a la primera cuestión. También conviene recordar que la función que a cada número $p \in [1, \infty)$ le hace corresponder su exponente conjugado es estrictamente decreciente.

Definición 2.4.4 *Un subconjunto $A \subset (1, \infty]$ se dice q-espectral si existe un espacio de Banach infinito-dimensional tal que $\mathcal{Q}(X) = A$.*

El resultado dual al teorema 2.4.1 es el siguiente.

Teorema 2.4.5 *Un subconjunto $A \subset (1, \infty]$ es q-espectral si y sólo si*

$$A = [2, p] \cup B$$

con $p \geq 2$ y donde B es un subconjunto compacto de $(1, 2]$.

DEMOSTRACIÓN:

$(\Longrightarrow)$ Si $A \subset (1, \infty]$ es q-espectral, entonces existe un espacio de Banach X infinito-dimensional tal que

$$\mathcal{Q}(X) = A.$$

Tomando exponentes conjugados y usando el teorema 2.4.4, obtenemos que

$$A' = (\mathcal{Q}(X))' = \mathcal{S}(X^*).$$

Es decir, A' es espectral. Por el teorema 2.4.1,

$$A' = [p, 2] \cup B$$

con $1 \leq p \leq 2$ y donde B es un subconjunto compacto de $[2, \infty)$. Finalmente, tomando exponentes conjugados, llegamos a que

$$A = [2, p'] \cup B'$$

con $p' \geq 2$ y donde B' es un subconjunto compacto de $(1, 2]$.

($\Longleftarrow$) Si $A = [2, p] \cup B$ con $p \geq 2$ y donde B es un subconjunto compacto de $(1, 2]$, tomando exponentes conjugados llegamos a que

$$A' = [p', 2] \cup B'$$

con $1 \leq p' \leq 2$ y donde B' es un subconjunto compacto de $[2, \infty)$. Por el teorema 2.4.1, existirá un espacio de Banach X tal que

$$\mathcal{S}(X) = A'.$$

Observemos que $\mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(X^{**})$ y, por tanto, usando el teorema 2.4.4,

$$A' = \mathcal{S}(X) = \mathcal{S}(X^{**}) = (\mathcal{Q}(X^*))'.$$

Es decir, $A = \mathcal{Q}(X^*)$.

■

Para responder a la segunda cuestión, veamos que podemos obtener resultados duales de los teoremas 2.4.2 y 2.4.3.

Corolario 2.4.1 *Sean X e Y dos espacios de Banach. Entonces,*
(1) Si X^* e Y^* son finitamente equivalentes, entonces $\mathcal{Q}(X) = \mathcal{Q}(Y)$.
(2) Si $1 \in \mathcal{Q}(X)$ y $1 \in \mathcal{Q}(Y)$, entonces X^* e Y^* son finitamente equivalentes.

DEMOSTRACIÓN:

Es obvia por los teoremas 2.4.2 y 2.4.4.

■

Corolario 2.4.2 *Para cada conjunto q-espectral $A \subset (1, \infty]$, existen, al menos, dos espacios de Banach X e Y, con X^* e Y^* no finitamente equivalentes tales que $\mathcal{Q}(X) = \mathcal{Q}(Y)$.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea A un subconjunto q-espectral. Fácilmente, por el teorema 2.4.4, se observa que A' es un subconjunto espectral. Por el teorema 2.4.3, existen dos espacios de Banach Z y T no finitamente equivalentes con $\mathcal{S}(Z) = \mathcal{S}(T)$. Tomemos

$$X := Z^* \text{ e } Y := T^*.$$

Se verifica que

$$(\mathcal{Q}(X))' = \mathcal{S}(X^*) = \mathcal{S}(Z^{**}) = \mathcal{S}(Z) = \mathcal{S}(T) = \mathcal{S}(T^{**}) = (\mathcal{Q}(T^*))' = (\mathcal{Q}(Y))'.$$

Es decir $\mathcal{Q}(X) = \mathcal{Q}(Y)$ y, además, los espacios X^* e Y^* no son finitamente equivalentes puesto que Z y T no lo son.

■

Finalmente, veremos cómo el concepto de q-espectro de un espacio de Banach permite conseguir una versión dual del teorema 1.2.5 de B. Maurey y G. Pisier.

Teorema 2.4.6 *Sea X un espacio de Banach y sean*

$$r_X = \inf\{p \in [1, 2] \,:\, l_p \prec_q X\},$$

$$s_X = \sup\{p \in [2, \infty] \; : \; l_p \prec_q X\}.$$

Entonces l_{r_X} y l_{s_X} están finitamente representados por cocientes en X.

DEMOSTRACIÓN:

Antes de nada hacemos notar que los números p_X y q_X dados en el teorema 1.2.5, también pueden expresarse como [8, p. 317]

$$p_X = \inf\{p \in [1, 2] \; : \; l_p \prec X\},$$

$$q_X = \sup\{p \in [2, \infty] \; : \; l_p \prec X\}.$$

Observemos que,

$$(\inf(\mathcal{Q}(X)))' = \sup(\mathcal{Q}(X))'$$

puesto que $(\inf(\mathcal{Q}(X)))'$ es cota superior de $(\mathcal{Q}(X))'$ ya que, si $p \in \mathcal{Q}(X)$, entonces $\inf(\mathcal{Q}(X)) \leq p$ o, equivalentemente, $(\inf(\mathcal{Q}(X)))' \geq p'$. Y si β es otra cota superior de $(\mathcal{Q}(X))'$, entonces β' es cota inferior de $\mathcal{Q}(X)$ y, por tanto, se verifica que $\beta' \leq \inf \mathcal{Q}(X)$ o, equivalentemente, $\beta \geq (\inf(\mathcal{Q}(X)))'$.

Análogamente,

$$(\sup(\mathcal{Q}(X)))' = \inf(\mathcal{Q}(X))'.$$

Por el teorema 2.4.4, se verifica que

$$(r_X)' = (\inf(\mathcal{Q}(X)))' = \sup(\mathcal{Q}(X))' = \sup(\mathcal{S}(X^*)) = q_{X^*},$$

$$(s_X)' = (\sup(\mathcal{Q}(X)))' = \inf(\mathcal{Q}(X))' = \inf(\mathcal{S}(X^*)) = p_{X^*}.$$

Y, utilizando el teorema 1.2.5, conseguimos que

$$l_{(r_X)'} \prec X^* \;\text{ y }\; l_{(s_X)'} \prec X^*.$$

Haciendo un razonamiento análogo al de la prueba del teorema 2.4.4, se llega a que

$$(l_{r_X})^* \prec X^* \;\text{ y }\; (l_{s_X})^* \prec X^*.$$

Finalmente, por el teorema 2.2.6, deducimos que

$$l_{r_X} \prec_q X \text{ y } l_{s_X} \prec_q X.$$

$\blacksquare$

Capítulo III

Representabilidad finita e ideales de operadores

3.1 Representabilidad finita de operadores

En la literatura matemática hemos detectado diversas definiciones del concepto de representabilidad finita de operadores. En particular, la que da S. Heinrich en su trabajo sobre ideales [30], la de B. Beauzamy en su artículo sobre operadores uniformemente convexificantes [6] o la de S. F. Bellenot en su estudio sobre el principio de reflexividad local [11]. Conviene observar que S. F. Bellenot comenta que ninguna de estas definiciones son equivalentes.

Posteriormente, B. Beauzamy [8] en su libro sobre teoría general de espacios de Banach, introduce una nueva definición de representabilidad finita de operadores que, en principio, es formalmente diferente a las anteriores.

En esta sección, nosotros retocaremos esta última definición, comprobaremos que coincide con la dada por S. F. Bellenot y obtendremos una caracterización del tipo de diagrama conmutativo.

Nuestra definición es la siguiente.

Definición 3.1.1 *Sean* $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ y $T : X \longrightarrow Y$ *dos operadores definidos entre espacios de Banach. Diremos que* T_0 *está finitamente representado en* T, *y lo representaremos por* $T_0 \prec T$, *si para cada* $\epsilon > 0$ *y cada subespacio finito-*

dimensional M_0 de X_0, existe un subespacio finito-dimensional M de X y existen dos ϵ-isometrías, $V : M_0 \longrightarrow M$ y $W : T_0M_0 \longrightarrow TM$ tales que $WT_0 = TV$.

Hacemos notar que si cambiamos ϵ-isometrías por $(1+\epsilon)$ -isomorfismos, obtenemos la definición dada por B. Beauzamy en su libro [8]. Obviamente, nuestro concepto implica el de B. Beauzamy, pero, en principio, no sabemos si el recíproco es cierto.

Usando poco más que la definición se obtiene el siguiente resultado.

Lema 3.1.1 *La relación "$\prec$" verifica la propiedad reflexiva y transitiva, es decir, es un preorden en la clase de todos los operadores entre espacios de Banach.*

DEMOSTRACIÓN:

La reflexividad es obvia. Veamos la transitividad.

Sean $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$, $T_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ y $T_2 : X_2 \longrightarrow Y_2$ operadores entre espacios de Banach tales que

$$T_0 \prec T_1 \text{ y } T_1 \prec T_2.$$

Dado $\epsilon > 0$ y dado $M_0 \in \mathrm{Dim}(X_0)$, consideremos $\delta > 0$ tal que $\delta(2+\delta) < \epsilon$. Por estar T_0 finitamente representado en T_1, existe un subespacio finito-dimensional M_1 de X_1 y existen dos δ-isometrías

$$V_1 : M_0 \longrightarrow M_1, \quad W_1 : T_0M_0 \longrightarrow T_1M_1 \quad \text{tales que} \quad T_1V_1 = W_1T_0.$$

A su vez, por estar T_1 finitamente representado en T_2, existe un subespacio finito-dimensional M_2 de X_2 y existen dos δ-isometrías

$$V_2 : M_1 \longrightarrow M_2, \quad W_2 : T_1M_1 \longrightarrow T_2M_2 \quad \text{tales que} \quad T_2V_2 = W_2T_1.$$

Tomemos los operadores

$$V : M_0 \longrightarrow M_2, \quad W : T_0M_0 \longrightarrow T_2M_2$$

definidos como $V := V_2V_1$ y $W := W_2W_1$. Se verifica que

- V es una ϵ-isometría puesto que, para todo $x \in M_0$,

$$|\|Vx\| - \|x\|| \leq |\|V_2(V_1x)\| - \|V_1x\|| + |\|V_1x\| - \|x\||$$

$$\leq \delta\|V_1x\| + \delta\|x\| \leq \delta(1+\delta)\|x\| + \delta\|x\| = \delta(2+\delta)\|x\| \leq \epsilon\|x\|.$$

- De forma análoga, W es una ϵ-isometría.

- Por último,

$$T_2V = T_2V_2V_1 = W_2T_1V_1 = W_2W_1T_0 = WT_0.$$

Por tanto, $T_0 \prec T_2$.

■

Observaciones

Claramente se observa que, si X y Y son dos espacios de Banach, entonces

$$X \prec Y \text{ si y sólo si } I_X \prec I_Y,$$

donde I_X e I_Y representan los operadores identidad sobre X e Y, respectivamente.

Por tanto, se deduce inmediatamente de la sección segunda del capítulo primero que:

- La representabilidad finita de operadores no es una propiedad simétrica. Basta considerar I_{l_2} e I_X donde X es un espacio de Banach no Hilbert y tener en cuenta los teoremas 1.2.2 y 1.2.3.

- La representabilidad finita de operadores no es una propiedad antisimétrica. Basta tomar I_{l_∞} e I_{c_0} y tener en cuenta los teoremas 1.2.2 y 1.2.1.

Una de las propiedades más importantes de esta definición de representabilidad finita de operadores que jugará un papel básico en esta memoria, es su relación con las ultrapotencias de operadores.

Teorema 3.1.1 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$. Entonces, la ultrapotencia de operadores*

$$(T)_{\mathcal{U}} : (X)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (Y)_{\mathcal{U}}$$

está finitamente representada en el operador T.

DEMOSTRACIÓN:

Dados $\epsilon > 0$ y $M_0 \in \mathrm{Dim}(X)_{\mathcal{U}}$, supongamos que M_0 es de la forma

$$M_0 = \mathrm{span}\{(x_i^1)_{\mathcal{U}}, \ldots, (x_i^n)_{\mathcal{U}}\}$$

donde $\|(x_i^k)_{\mathcal{U}}\| \leq 1$ para cada $k = 1, \ldots n$.
Para cada $k = 1, \ldots, n$, podemos encontrar un representante $(x_i^k)_{i \in \mathcal{I}}$ y un subconjunto $I_k \in \mathcal{U}$ tal que, si $i \in I_k$, entonces

$$\|x_i^k\| \leq 2.$$

Sea $I_0 := \cap_{k=1}^n I_k$. Si $i \in I_0$, entonces

$$\|x_i^k\| \leq 2, \text{ para todo } k = 1, \ldots, n.$$

Con los elementos $x_i^1, \ldots, x_i^n$ escogidos de esta manera y, siguiendo la demostración de [29, prop. 6.1], podemos conseguir un subconjunto $J_0 \in \mathcal{U}$ tal que, si $i \in J_0$, el operador

$$T_i : M_0 \longrightarrow X$$

definido por $T_i(x_i^k)_{\mathcal{U}} = x_i^k$, para cada $k = 1, \ldots, n$, verifica

$$|\|T_i(x)\| - \|x\|| \leq \epsilon\|x\|,$$

es decir, T_i es una ϵ-isometría.

Tomemos el espacio $(T)_{\mathcal{U}} M_0$ y notemos que

$$(T)_{\mathcal{U}} M_0 = \mathrm{span}\{\frac{(T)_{\mathcal{U}}(x_i^1)_{\mathcal{U}}}{\|T\|}, \ldots, \frac{(T)_{\mathcal{U}}(x_i^n)_{\mathcal{U}}}{\|T\|}\}.$$

Se verifica que

$$\left\|\frac{(T)_{\mathcal{U}}(x_i^k)_{\mathcal{U}}}{\|T\|}\right\| \leq \frac{\|(T)_{\mathcal{U}}\|}{\|T\|}\|(x_i^k)_{\mathcal{U}}\| = \|(x_i^k)_{\mathcal{U}}\| \leq 1.$$

para cada $k = 1, \ldots, n$ y, además, si $i \in I_0$,

$$\left\|\frac{Tx_i^k}{\|T\|}\right\| \leq \|x_i^k\| \leq 2, \text{ para cada } k = 1, \ldots, n.$$

Teniendo en cuenta, de nuevo, la demostración de [29, prop. 6.1], podemos obtener un subconjunto $J_1 \in \mathcal{U}$ tal que, si $i \in J_1$, el operador

$$R_i : (T)_{\mathcal{U}}M_0 \longrightarrow Y$$

definido por

$$R_i\left(\frac{(T)_{\mathcal{U}}(x_i^k)_{\mathcal{U}}}{\|T\|}\right) = \frac{Tx_i^k}{\|T\|} \text{ para cada } k = 1, \ldots, n$$

verifica

$$|\|R_iy\| - \|y\|| \leq \epsilon\|y\|$$

para todo $y \in (T)_{\mathcal{U}}M_0$ o, equivalentemente, R_i es una ϵ-isometría.

Bastará tomar un índice $i \in J_0 \cap J_1 \in \mathcal{U}$, $V := T_i$ y $W := R_i$ para concluir que $(T)_{\mathcal{U}}$ está finitamente representado en T, puesto que

$$R_i(T)_{\mathcal{U}}(x_i^k)_{\mathcal{U}} = Tx_i^k = TT_i(x_i^k)_{\mathcal{U}}$$

para todo $k = 1, \ldots, n$ y, por la linealidad de los operadores, que

$$R_i(T)_{\mathcal{U}}(x) = TT_i(x) \;\; x \in M_0.$$

■

A continuación daremos una caracterización de la representabilidad finita de operadores en términos de diagrama conmutativo usando ultrapotencias. Probaremos asimismo, como comentamos al comienzo de la sección, que nuestra definición y la de S. F. Bellenot son equivalentes.

Comenzamos recordando la definición dada por S. F. Bellenot.

Sean $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ *y* $T : X \longrightarrow Y$ *dos operadores entre espacios de Banach. Entonces* T_0 *está finitamente representado en* T *en el sentido de S. F. Bellenot si, dado* $\epsilon > 0$ *y dado* $M_0 \in Dim(X_0)$*, existe un operador* $U : M_0 \longrightarrow X$ *tal que, para todo* $x \in M_0$*,*

a) $|\|Ux\| - \|x\|| \leq \epsilon\|x\|$,

b) $|\|T_0x\| - \|TUx\|| \leq \epsilon\|x\|$,

c) *si* $M_0 \cap \mathrm{Ker}T_0 = \{0\}$*, entonces*

$$|\|T_0x\| - \|TUx\|| \leq \epsilon\|T_0x\|,$$

En su artículo, S. F. Bellenot comenta que, de hecho, la condición **c)** se puede omitir. Por claridad, damos una prueba de esta afirmación.

Lema 3.1.2 *Sean* $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ *y* $T : X \longrightarrow Y$ *dos operadores entre espacios de Banach. Son equivalentes,*
(1) T_0 *está finitamente representado en* T *en el sentido de Bellenot.*
(2) Dados $\epsilon > 0$ *y* $M_0 \in Dim(X_0)$*, existe un operador* $U : M_0 \longrightarrow X$ *tal que, para todo* $x \in M_0$*,*

a) $|\|Ux\| - \|x\|| \leq \epsilon\|x\|$,

b) $|\|T_0x\| - \|TUx\|| \leq \epsilon\|x\|$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Longrightarrow$ (2) Es evidente.

(2) $\Longrightarrow$ (1) Sean $\epsilon > 0$ y $M_0 \in \mathrm{Dim}(X_0)$. Si $M_0 \cap \mathrm{Ker}T_0 \neq \emptyset$, entonces no habrá nada que probar puesto que se obtiene (1) de forma inmediata.

Si $M_0 \cap \mathrm{Ker}T_0 = \emptyset$, entonces, llamando H a la restricción de T_0 a M_0, obtenemos que H es una biyección.

Consideremos

$$\epsilon' := \min\{\epsilon, \epsilon/\|(H)^{-1}\|\}.$$

Por hipótesis, existe un operador $U : M_0 \longrightarrow X$ tal que

$$|\|Ux\| - \|x\|| \leq \epsilon'\|x\| \leq \epsilon\|x\|,$$

$$|\|T_0x\| - \|TUx\|| \leq \epsilon'\|x\| \leq \epsilon\|x\|$$

y, además,

$$|\|T_0x\| - \|TUx\|| \leq \epsilon'\|x\| = \epsilon'\|(H)^{-1}Hx\|$$

$$\leq \epsilon'\|(H)^{-1}\|\|Hx\| \leq \epsilon\|T_0x\|.$$

■

Teorema 3.1.2 *Sean $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ y $T : X \longrightarrow Y$ dos operadores entre espacios de Banach. Son equivalentes:*

(1) T_0 está finitamente representado en T .

(2) T_0 está finitamente representado en T en el sentido de Bellenot.

(3) Existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$ y existen dos inyecciones métricas $\mathcal{J}$ y $\tilde{\mathcal{J}}$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{T_0} & T_0X_0 \\ \mathcal{J}\downarrow & & \downarrow\tilde{\mathcal{J}} \\ (X)_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{(T)_{\mathcal{U}}} & (Y)_{\mathcal{U}} \end{array}$$

es conmutativo.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Longrightarrow$ (2)

Dados $\epsilon > 0$ y $M_0 \in \mathrm{Dim}(X_0)$, consideremos H la restricción de T_0 a M_0. Podemos suponer que $H \neq 0$. Tomemos $\epsilon' = \min\{\epsilon, \epsilon/\|H\|\}$. Por hipótesis,

$T_0 \prec T$, por tanto, existe un subespacio finito-dimensional M de X y existen dos ϵ'- isometrías

$$V : M_0 \longrightarrow M, \quad W : T_0 M_0 \longrightarrow TM \quad \text{tales que} \quad TV = WT_0.$$

Tomemos $U := V$. Se verifica, para todo $x \in M_0$, que

a) $|\|Ux\| - \|x\|| = |\|Vx\| - \|x\|| \leq \epsilon'\|x\| \leq \epsilon\|x\|$,

b) $|\|T_0 x\| - \|TUx\|| = |\|T_0 x\| - \|TVx\|| = |\|T_0 x\| - \|WT_0 x\||$

$\leq \epsilon'\|T_0 x\| \leq \epsilon'\|H\|\|x\| \leq \epsilon\|x\|$.

Es decir, teniendo en cuenta el lema anterior, T_0 está finitamente representado en T en el sentido de Bellenot.

(2) $\Longrightarrow$ (3)

Tomemos el ultrafiltro $\mathcal{U} := \mathcal{U}_{F,X_0}$ sobre el conjunto de índices

$$\mathcal{I} = \{i = (M_0, \epsilon) \ : \ 0 < \epsilon < 1/2 \ \text{ y } \ M_0 \in \mathrm{Dim}(X_0)\}$$

definido en la página 15 de esta memoria.

Notemos que, para cada índice $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in \mathcal{I}$, por (2), existe un operador $U_i : M_0^i \longrightarrow X$ con

a) $|\|U_i x\| - \|x\|| \leq \epsilon_i \|x\|$ para todo $x \in M_0^i$, y

b) $|\|T_0 x\| - \|TU_i x\|| \leq \epsilon_i \|x\|$ para todo $x \in M_0^i$.

Construyamos un operador

$$\mathcal{J} : X_0 \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}.$$

Dado $x \in X_0$, tomamos la familia $(x_i)_i$ donde, para cada $i \in \mathcal{I}$,

$$x_i = \begin{cases} U_i x & \text{si} \quad x \in M_0^i \\ 0 & \text{si} \quad x \notin M_0^i \end{cases}.$$

Se verifica que $(x_i)_{i \in \mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$ puesto que, para cada $i \in \mathcal{I}$,

$$\|x_i\| \leq \|U_i x\| \leq (1 + \epsilon_i)\|x\| \leq 2\|x\|.$$

Definamos

$$\mathcal{J}x := (x_i)_{\mathcal{U}}.$$

Veamos que $\mathcal{J}$ es lineal. Sean $x, y \in X_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y supongamos que

$$\mathcal{J}x = (x_i)_{\mathcal{U}}, \text{ donde } x_i = \begin{cases} U_i x & \text{si} \quad x \in M_0^i \\ 0 & \text{si} \quad x \notin M_0^i. \end{cases},$$

$$\mathcal{J}y = (y_i)_{\mathcal{U}}, \text{ donde } y_i = \begin{cases} U_i y & \text{si} \quad y \in M_0^i \\ 0 & \text{si} \quad y \notin M_0^i. \end{cases},$$

$$\mathcal{J}(\alpha x + \beta y) = (z_i)_{\mathcal{U}}, \text{ donde } z_i = \begin{cases} U_i(\alpha x + \beta y) & \text{si} \quad \alpha x + \beta y \in M_0^i \\ 0 & \text{si} \quad \alpha x + \beta y \notin M_0^i. \end{cases}$$

Para comprobar que $\mathcal{J}(\alpha x+\beta y) = \alpha\mathcal{J}x+\beta\mathcal{J}y$, bastará demostrar que se verifica

$$\lim_{\mathcal{U}} \|z_i - \alpha x_i - \beta y_i\| = 0.$$

En efecto, dado $\epsilon > 0$, consideremos $M_0 = \operatorname{span}\{x, y\}$. Si tomamos el índice $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in I(M_0, \epsilon)$, entonces $\epsilon_i \leq \epsilon$ y $M_0 \subset M_0^i$. Por tanto, $x, y \in M_0^i$ y, por ser M_0^i un subespacio, $\alpha x + \beta y \in M_0^i$.
Luego,

$$\begin{aligned} \|z_i - \alpha x_i - \beta y_i\| &= \|U_i(\alpha x + \beta y) - \alpha U_i x - \beta U_i y\| \\ &= \|\alpha U_i x + \beta U_i y - \alpha U_i x - \beta U_i y\| = 0 < \epsilon. \end{aligned}$$

Veamos que $\mathcal{J}$ es una isometría. Tendremos que probar que, para cada elemento $x \in M_0$,

$$\|\mathcal{J}x\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| = \|x\|.$$

Podemos suponer que $x \neq 0$.

Dado $\epsilon > 0$, tomemos $M_0 = \operatorname{span}\{x\}$ y $\epsilon' = \epsilon/\|x\|$. Si $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in I(M_0, \epsilon')$, entonces $\epsilon_i \leq \epsilon/\|x\|$ y $M_0 \subset M_0^i$. Por tanto, $x \in M_0^i$ y, utilizando a), obtenemos

$$|\|x_i\| - \|x\|| = |\|U_i x\| - \|x\|| \leq \epsilon_i \|x\| \leq \epsilon.$$

Construyamos ahora

$$\tilde{\mathcal{J}} : T_0 X_0 \longrightarrow (Y)_{\mathcal{U}}.$$

Dado $y \in T_0X_0$, existe $x \in X_0$ tal que $y = T_0x$. Definamos

$$\tilde{\mathcal{J}}y := (T)_{\mathcal{U}}Jx.$$

Veamos que $\tilde{\mathcal{J}}$ está bien definida. Si existieran dos elementos distintos $x, \tilde{x}$ de X_0 tales que $y = T_0x = T_0\tilde{x}$, tendríamos que

$$\tilde{\mathcal{J}}y = (T)_{\mathcal{U}}(x_i)_{\mathcal{U}} \text{ con } x_i = \begin{cases} U_ix & \text{si} \quad x \in M_0^i \\ 0 & \text{si} \quad x \notin M_0^i, \end{cases}$$

y

$$\tilde{\mathcal{J}}y = (T)_{\mathcal{U}}(\tilde{x}_i)_{\mathcal{U}} \text{ con } \tilde{x}_i = \begin{cases} U_i\tilde{x} & \text{si} \quad \tilde{x} \in M_0^i \\ 0 & \text{si} \quad \tilde{x} \notin M_0^i. \end{cases}$$

Tendremos que probar que $(T)_{\mathcal{U}}(x_i)_{\mathcal{U}} = (T)_{\mathcal{U}}(\tilde{x}_i)_{\mathcal{U}}$, o equivalentemente,

$$\lim_{\mathcal{U}} \|Tx_i - T\tilde{x}_i\| = 0.$$

Dado $\epsilon > 0$, tomemos $M_0 = \operatorname{span}\{x, \tilde{x}\}$ y $\epsilon' = \epsilon/\|x - \tilde{x}\|$. Si consideramos un índice $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in I(M_0, \epsilon')$, entonces $\epsilon_i \leq \epsilon/\|x - \tilde{x}\|$ y $M_0 \subset M_0^i$. Es decir, x y $\tilde{x}$ están en M_0^i y, por tanto, $x - \tilde{x} \in M_0^i$. Usando b) obtenemos que

$$\|Tx_i - T\tilde{x}_i\| = \|TU_ix - TU_i\tilde{x}\| = \|TU_i(x - \tilde{x})\|$$

$$\leq \epsilon_i\|x - \tilde{x}\| + \|T_0(x - \tilde{x})\|$$

$$= \epsilon_i\|x - \tilde{x}\| + \|T_0x - T_0\tilde{x}\| = \epsilon_i\|x - \tilde{x}\| \leq \epsilon.$$

Veamos que $\tilde{\mathcal{J}}$ es lineal. Sean $y_1 = T_0x_1$, $y_2 = T_0x_2 \in T_0X_0$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

$$\tilde{\mathcal{J}}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \tilde{\mathcal{J}}(\alpha T_0x_1 + \beta T_0x_2) = \tilde{\mathcal{J}}T_0(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

$$= (T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J}(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha(T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J}x_1 + \beta(T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J}x_2 = \alpha\tilde{\mathcal{J}}y_1 + \beta\tilde{\mathcal{J}}y_2.$$

Veamos, a su vez, que $\tilde{\mathcal{J}}$ es una isometría, es decir, para cada $y = T_0x \in T_0X_0$, tenemos que probar que $\|\tilde{\mathcal{J}}y\| = \|y\|$, donde

$$\tilde{\mathcal{J}}y = (T)_{\mathcal{U}}Jx = (T)_{\mathcal{U}}(x_i)_{\mathcal{U}} \text{ con } x_i = \begin{cases} U_ix & \text{si} \quad x \in M_0^i \\ 0 & \text{si} \quad x \notin M_0^i. \end{cases}$$

Bastará probar que $\lim_{\mathcal{U}} \|Tx_i\| = \|T_0x\|$. Obviamente, podemos suponer que $x \neq 0$.
Dado $\epsilon > 0$, tomemos $M_0 = \text{span}\{x\}$ y $\epsilon' = \epsilon/\|x\|$. Si $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in I(M_0, \epsilon')$, entonces $\epsilon_i \leq \epsilon/\|x\|$ y $M_0 \subset M_0^i$. Por tanto, $x \in M_0^i$ y, usando b), obtenemos que

$$\left|\|Tx_i\| - \|T_0x\|\right| = \left|\|TU_ix\| - \|T_0x\|\right| \leq \epsilon_i\|x\| \leq \epsilon.$$

Finalmente, de la propia construcción, obtenemos que

$$\tilde{\mathcal{J}}T_0 = (T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J}.$$

(3) $\Longrightarrow$ (1) Por hipótesis, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ y existen $\mathcal{J}, \tilde{\mathcal{J}}$ dos inyecciones métricas tales que

$$\mathcal{J} : X_0 \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}, \quad \tilde{\mathcal{J}} : T_0X_0 \longrightarrow (Y)_{\mathcal{U}} \text{ y } \tilde{\mathcal{J}}T_0 = (T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J}.$$

Para ver que $T_0 \prec T$, bastará comprobar que $T_0 \prec (T)_{\mathcal{U}}$, puesto que $(T)_{\mathcal{U}}$ está finitamente representado en T (teorema anterior) y la representabilidad finita de operadores es una propiedad transitiva.

Por tanto, veamos que T_0 está finitamente representado en $(T)_{\mathcal{U}}$.
Dado $\epsilon > 0$ y dado $M_0 \in \text{Dim}(X_0)$, tomamos $M = \mathcal{J}M_0 \in \text{Dim}(X)_{\mathcal{U}}$, V la restricción de $\mathcal{J}$ a M_0 y W la restricción de $\tilde{\mathcal{J}}$ a T_0M_0. Obviamente, V y W son ϵ-isometrías y, además, para cada $x \in M_0$,

$$WT_0(x) = \tilde{\mathcal{J}}T_0(x) = (T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J}(x) = (T)_{\mathcal{U}}V(x).$$

■

Observaciones

(1) En su artículo [11], S. F. Bellenot también da un resultado cercano a la equivalencia entre las condiciones (2) y (3) con conceptos y técnicas de la teoría de la envoltura no standard ("nonstandard hull") bajo hipótesis bastante restrictivas, en concreto, que el operador T_0 sea sobreyectivo entre espacios de Banach separables.

(2) La implicación (1) $\Longrightarrow$ (3) también se puede conseguir de forma directa, siguiendo el mismo esquema que en la implicación (2) $\Longrightarrow$ (3). Basta tomar el ultrafiltro $\mathcal{U} := \mathcal{U}_{F,X_0}$ sobre el conjunto de índices $\mathcal{I}$ y observar que, para cada $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in \mathcal{I}$, existe un subespacio finito-dimensional M_i de X y existen dos ϵ_i-isometrías V_i y W_i tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_0^i & \xrightarrow{T_0} & T_0M_0^i \\ V_i \downarrow & & \downarrow W_i \\ M_i & \xrightarrow{T} & TM_i \end{array}$$

es conmutativo. En particular, para todo $m \in M_0$

$$|\|V_ix\| - \|x\|| \leq \epsilon_i\|x\|,$$

$$|\|TV_ix\| - \|T_0x\|| = |\|W_iT_0x\| - \|T_0x\|| \leq \epsilon_i\|T_0x\|.$$

Tomamos, por tanto, las isometrías

$$\mathcal{J} : X_0 \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}, \quad x \longmapsto (x_i)_{\mathcal{U}}$$

donde

$$x_i = \begin{cases} V_ix & \text{si} \quad x \in M_0^i \\ 0 & \text{si} \quad x \notin M_0^i \end{cases}$$

y

$$\tilde{\mathcal{J}} : T_0X_0 \longrightarrow (Y)_{\mathcal{U}}, \quad T_0x \longmapsto (T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J}x,$$

obteniendo que $(T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J} = \tilde{\mathcal{J}}T_0$.

El siguiente lema recoge relaciones entre la representabilidad finita de operadores y los operadores biadjuntos.

Teorema 3.1.3 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Entonces*

(1) T está finitamente representado en T^{**}.

(2) T^{**} está finitamente representado en T.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Dado $\epsilon > 0$ y dado M_0 subespacio finito-dimensional de X, basta considerar como operador V la restricción de $\mathcal{J}_X$ a M_0 donde $\mathcal{J}_X$ es la inyección métrica del espacio X en su bidual X^{**} y como operador W la restricción de $\mathcal{J}_Y$ a TM_0 donde $\mathcal{J}_Y$ es la inyección métrica del espacio Y en su bidual Y^{**} . Obviamente, V y W son ϵ-isometrías y, además,

$$WT_0 = TV.$$

Por tanto T está finitamente representado en T^{**}.

(2) Dado $\epsilon > 0$ y dado $M_0 \in \mathrm{Dim}(X^{**})$, tomemos $\delta > 0$ tal que

$$\delta + \delta\|T\| + \frac{\delta^2}{2}\|T\| < \epsilon \quad \text{y} \quad \delta < \epsilon.$$

Sea $\{m_1, \dots, m_n\}$ una $\frac{\delta}{2}$-red en la esfera unidad de M_0. Para cada $k = 1, \dots, n$, existe $x_k^* \in X^*$ con $\|x_k^*\| = 1$ tal que

$$|\langle m_k, x_k^* \rangle| + \frac{\delta}{2} > \|m_k\| = 1.$$

Sea $F_0 := \mathrm{span}\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$. Se verifica que, para todo $m \in M_0$,

$$(1-\delta)\|m\| \leq \sup\{|\langle m, f_0\rangle| : f_0 \in F_0 \ \text{ y } \ \|f_0\| = 1\}.$$

En efecto, dado $m \in M_0$ con $\|m\| = 1$, existe un $k_0 \in \{1, \dots n\}$, tal que

$$\|m - m_{k_0}\| < \frac{\delta}{2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
\sup\{|\langle m, f_0\rangle| : f_0 \in F_0 \ \text{ y } \ \|f_0\| = 1\} &\geq |\langle m, x_{k_0}^*\rangle| \\
&\geq |\langle m_{k_0}, x_{k_0}^*\rangle| - |\langle m_{k_0}, x_{k_0}^*\rangle - \langle m, x_{k_0}^*\rangle| \\
&> 1 - \frac{\delta}{2} - \|m_{k_0} - m\|\|x_{k_0}^*\| > 1 - \frac{\delta}{2} - \frac{\delta}{2} = 1 - \delta.
\end{aligned}$$

Si $m \in M_0$ es arbitrario, entonces,

$$\sup\{|\langle m, f_0\rangle| : f_0 \in F_0 \ \text{ y } \ \|f_0\| = 1\} \geq (1-\delta)\|m\|.$$

Consideremos ahora el subespacio finito-dimensional $T^{**}M_0$ y sea $\{h_1,\ldots,h_r\}$ una $\frac{\delta}{2}$-red en la esfera unidad de $T^{**}M_0$. Para cada $k=1,\ldots,r$, existe $y_k^*\in Y^*$ con $\|y_k^*\|=1$ tal que

$$|\langle h_k, y_k^*\rangle| + \frac{\delta}{2} > \|h_k\| = 1.$$

Sea $F_1 := \operatorname{span}\{y_1^*,\ldots,y_r^*\}$. Al igual que antes, para cada $m\in M_0$, se verifica que

$$(1-\delta)\|T^{**}m\| \leq \sup\{|\langle T^{**}m, f_1\rangle| : f_1\in F_1 \text{ y } \|f_1\|=1\}.$$

Sea $I: M_0 \longrightarrow X^{**}$ la inclusión de M_0 en X^{**}. Por [16], existe una isometría de $L(M_0,X^{**})$ sobre $(L(M_0,X))^{**}$ tal que, si denotamos por $\hat{I}$ a la imagen por dicha isometría de la aplicación I se tiene que

$$\hat{I}(\Phi_{m,x^*}) = \langle I(m), x^*\rangle, \quad m\in M_0, \quad x^*\in X^*,$$

donde Φ_{m,x^*} denota el funcional lineal y continuo sobre $L(M_0,X)$ definido por

$$\langle \Phi_{m,x^*}, T\rangle = \langle Tm, x^*\rangle, \quad T\in L(M_0,X).$$

Sea $F := \operatorname{span}\{\Phi_{m,f_0}, \Phi_{m,T^*f_1} : m\in M_0, f_0\in F_0, f_1\in F_1\}$.
Por el lema de Helly, para cada subespacio finito-dimensional $G\subset (L(M_0,X))^*$ que contenga a F, existe un operador $S_G\in L(M_0,X)$ tal que

$$\langle g, S_G\rangle = \langle \hat{I}, g\rangle \text{ para todo } g\in G,$$

$$\|S_G\| \leq (1+\delta)\|\hat{I}\| \leq 1+\delta.$$

Por tanto, para cada $m\in M_0$, se verifica que

$$(1-\delta)\|m\| \leq \sup\{|\langle m, f_0\rangle| : f_0\in F_0 \text{ y } \|f_0\|=1\}$$

$$= \sup\{|\langle \hat{I}, \Phi_{m,f_0}\rangle| : f_0\in F_0 \text{ y } \|f_0\|=1\}$$

$$= \sup\{|\langle \Phi_{m,f_0}, S_G\rangle| : f_0\in F_0 \text{ y } \|f_0\|=1\}$$

$$= \sup\{|\langle S_G(m), f_0\rangle| : f_0\in F_0 \text{ y } \|f_0\|=1\} \leq \|S_G(m)\| \leq (1+\delta)\|m\|.$$

Y, además,

$$
\begin{aligned}
(1-\delta)\|T^{**}m\| &\leq \sup\{|\langle T^{**}m, f_1\rangle| : f_1 \in F_1 \text{ y } \|f_1\| = 1\} \\
&= \sup\{|\langle m, T^* f_1\rangle| : f_1 \in F_1 \text{ y } \|f_1\| = 1\} \\
&= \sup\{|\langle \hat{I}, \Phi_{m,T^* f_1}\rangle| : f_1 \in F_1 \text{ y } \|f_1\| = 1\} \\
&= \sup\{|\langle \Phi_{m,T^* f_1}, S_G\rangle| : f_1 \in F_1 \text{ y } \|f_1\| = 1\} \\
&= \sup\{|\langle S_G(m), T^* f_1\rangle| : f_1 \in F_1 \text{ y } \|f_1\| = 1\} \\
&= \sup\{|\langle TS_G(m), f_1\rangle| : f_1 \in F_1 \text{ y } \|f_1\| = 1\} \leq \|TS_G(m)\|.
\end{aligned}
$$

Sea C_δ^G el conjunto de todos los operadores $S \in L(M_0, X)$ tales que $\langle g, S\rangle = \langle \hat{I}, g\rangle$ para todo $g \in G$ y que verifican las condiciones

$$(1-\delta)\|m\| \leq \|S(m)\| \leq (1+\delta)\|m\|,$$

$$(1-\delta)\|T^{**}m\| \leq \|TS(m)\|$$

para todo $m \in M_0$. El argumento anterior muestra que para cada $\delta > 0$ y cada subespacio finito-dimensional G que contenga a F, el conjunto C_δ^G es no vacío. Llamemos

$$C_\delta := \bigcup_G C_\delta^G.$$

Veamos que C_δ es convexo. En efecto, si tomamos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \geq 0$ tales que $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$ y $S_1, \ldots, S_s \in C_\delta$, entonces existen $G_1, \ldots, G_s$ tales que $F \subset G_i$ para $i = 1, \ldots, s$ y verifican

$$\langle g_i, S_i\rangle = \langle \hat{I}, g_i\rangle, \quad g_i \in G_i$$

$$(1-\delta)\|m\| \leq \|S_i(m)\| \leq (1+\delta)\|m\|,$$

$$(1-\delta)\|T^{**}m\| \leq \|TS_i(m)\|$$

para cada $m \in M_0$ e $i = 1, \ldots, s$. Basta tomar

$$G := \bigcap_{i=1}^s G_i \supset F$$

para que

$$\langle g, \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i S_i\right)\rangle = \langle \hat{I}, g\rangle, \quad g \in G.$$

Además

$$\begin{aligned}(1-\delta)\|m\| &\leq \sup\{|\langle m, f_0\rangle| : f_0 \in F_0 \text{ y } \|f_0\| = 1\}\\ &= \sup\{|\langle \hat{I}, \Phi_{m,f_0}\rangle| : f_0 \in F_0 \text{ y } \|f_0\| = 1\}\\ &= \sup\{|\langle \Phi_{m,f_0}, \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i S_i\right)\rangle| : f_0 \in F_0 \text{ y } \|f_0\| = 1\}\\ &= \sup\{|\langle \sum_{i=1}^{s} \lambda_i S_i m, f_0\rangle| : f_0 \in F_0 \text{ y } \|f_0\| = 1\}\\ &\leq \|\sum_{i=1}^{s} \lambda_i S_i m\| \leq \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \|S_i m\| \leq (1+\delta)\|m\|.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}(1-\delta)\|T^{**}m\| &\leq \sup\{|\langle T^{**}m, f_1\rangle| : f_1 \in F_1 \text{ y } \|f_1\| = 1\}\\ &= \sup\{|\langle m, T^{*}f_1\rangle| : f_1 \in F_1 \text{ y } \|f_1\| = 1\}\\ &= \sup\{|\langle \Phi_{m,T^{*}f_1}, \left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i S_i\right)\rangle| : f_1 \in F_1 \text{ y } \|f_1\| = 1\}\\ &= \sup\{|\langle \sum_{i=1}^{s} \lambda_i S_i m, T^{*}f_1\rangle| : f_1 \in F_1 \text{ y } \|f_1\| = 1\}\\ &= \sup\{|\langle T\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i S_i\right) m, f_1\rangle| : f_1 \in F_1 \text{ y } \|f_1\| = 1\} \leq \|T\left(\sum_{i=1}^{s} \lambda_i S_i\right) m\|.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\sum_{i=1}^{s} \lambda_i S_i \in C_\delta^G, \quad \text{por tanto,} \quad \sum_{i=1}^{s} \lambda_i S_i \in C_\delta.$$

Sean ahora

$$D := \{(y_1, \dots y_n) \in (Y)^n : \|y_k\| < \|T^{**}m_k\| + \delta, \ k = 1, \dots, n\},$$

$$\tilde{C}_\delta := \{(TSm_1, \dots, TSm_n) \in (Y)^n : S \in C_\delta\}.$$

El subconjunto D es no vacío, abierto y convexo y $\tilde{C}_\delta$ es no vacío y convexo.

Si $D \cap \tilde{C}_\delta = \emptyset$, entonces, por el teorema de separación de Hahn-Banach, existe un funcional lineal y continuo

$$g : (Y)^n \longrightarrow \mathbb{K}$$

y existe un número $\alpha > 0$ tal que

$$D \subset \{(y_1, \ldots, y_n) \in (Y)^n : \operatorname{Re}\langle g, (y_1, \ldots, y_n)\rangle < \alpha\},$$

$$\tilde{C}_\delta \subset \{(y_1, \ldots, y_n) \in (Y)^n : \operatorname{Re}\langle g, (y_1, \ldots, y_n)\rangle \geq \alpha\}.$$

Evidentemente, $g = (g_1, \ldots, g_n)$, donde para cada $k = 1, \ldots n$,

$$g_k : Y \longrightarrow \mathbb{K}$$

es un funcional lineal y continuo.

Tomemos

$$G := \operatorname{span}\{\Phi_{m,f_0}, \Phi_{m,T^* f_1}, \Phi_{m,T^* g_1}, \ldots, \Phi_{m,T^* g_n} : m \in M_0, f_0 \in F_0, f_1 \in F_1\}.$$

El correspondiente operador $S_G \in C_\delta$ verifica que

$$\begin{aligned} \alpha \leq \operatorname{Re}\langle g, (TS_G m_1, \ldots, TS_G m_n)\rangle &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \langle g_k, TS_G m_k\rangle\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \langle T^* g_k, S_G m_k\rangle\right) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \langle T^* g_k, m_k\rangle\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} \langle g_k, T^{**} m_k\rangle\right) = \operatorname{Re}\langle g, (T^{**} m_1, \ldots, T^{**} m_n)\rangle. \end{aligned} \qquad (*)$$

Por otro lado, para cada $k = 1, \ldots, n$, si $T^{**} m_k \neq 0$, entonces $T^{**} m_k$ está en la bola cerrada de Y^{**} centrada en el origen y de radio $\|T^{**} m_k\|$. Por el teorema de Goldstine, dados

$$0 < \mu < \frac{\delta}{4n}\left(\sum_{k=1}^{n} \|\operatorname{Re}(g_k)\|\right) \quad \text{y} \quad g_k \in Y^*,$$

existe $\tilde{d}_k$ en la bola cerrada de Y centrada en el origen y de radio $\|T^{**} m_k\|$ tal que

$$|\langle \tilde{d}_k, g_k\rangle - \langle T^{**} m_k, g_k\rangle| < \mu.$$

Definamos, para cada $k = 1, \dots, n$,

$$d_k := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad T^{**}m_k = 0 \\ \tilde{d}_k & \text{si} \quad T^{**}m_k \neq 0. \end{cases}$$

Observemos que, también,

$$|\langle d_k, g_k\rangle - \langle T^{**}m_k, g_k\rangle| < \mu.$$

Consideremos, para cada $k = 1, \dots, n$ un elemento $c_k \in Y$ tal que $\|c_k\| = 1$ y

$$\mathrm{Re}\langle g_k, c_k\rangle > \frac{\|\mathrm{Re}(g_k)\|}{2}.$$

Observemos que $(d_1 + \frac{\delta}{2}c_1, \dots, d_n + \frac{\delta}{2}c_n) \in D$. En efecto, para cada $k = 1, \dots, n$,

$$\|d_k + \frac{\delta}{2}c_k\| \leq \|d_k\| + \frac{\delta}{2}\|c_k\| \leq \|T^{**}m_k\| + \frac{\delta}{2} < \|T^{**}m_k\| + \delta.$$

Por tanto,

$$\alpha > \mathrm{Re}\langle g, (d_1 + \frac{\delta}{2}c_1, \dots d_n + \frac{\delta}{2}c_n)\rangle.$$

Teniendo en cuenta que

$$|\mathrm{Re}\langle T^{**}m_k - d_k, g_k\rangle| \leq |\langle T^{**}m_k - d_k, g_k\rangle| < \mu$$

deducimos que

$$\begin{aligned}
\alpha > \mathrm{Re}\langle g, (d_1 + \frac{\delta}{2}c_1, \dots d_n + \frac{\delta}{2}c_n)\rangle &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\langle g_k, d_k + \frac{\delta}{2}c_k\rangle\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\langle g_k, d_k\rangle\right) + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\langle g_k, \frac{\delta}{2}c_k\rangle\right) \\
&> \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\langle g_k, d_k\rangle\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\delta}{4}\|\mathrm{Re}(g_k)\| \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\langle g_k, T^{**}m_k\rangle\right) + \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\langle g_k, d_k - T^{**}m_k\rangle\right) + \sum_{k=1}^{n}\frac{\delta}{4}\|\mathrm{Re}(g_k)\| \\
&> \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}\langle g_k, T^{**}m_k\rangle\right) - n\mu + \sum_{k=1}^{n}\frac{\delta}{4}\|\mathrm{Re}(g_k)\| \\
&= \mathrm{Re}\langle g, (T^{**}m_1, \dots T^{**}m_n)\rangle + \beta
\end{aligned}$$

donde $\beta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta}{4}\|\mathrm{Re}(g_k)\| - n\mu > 0$.

Luego, $\mathrm{Re}\langle g, (T^{**}m_1, \ldots T^{**}m_n)\rangle < \alpha - \beta$, llegando a contradicción con $(*)$.

Por tanto, $D \cap \tilde{C}_\delta \neq \emptyset$ y existe un operador $S \in L(M_0, X)$ tal que

$$(1-\delta)\|m\| \leq \|Sm\| \leq (1+\delta)\|m\|, \quad m \in M_0,$$

$$(1-\delta)\|T^{**}m\| \leq \|TSm\|, \quad m \in M_0,$$

$$\|TSm_k\| \leq \|T^{**}m_k\| + \delta, \quad k = 1, \ldots n.$$

En particular, $|\|Sm\| - \|m\|| \leq \delta\|m\| \leq \epsilon\|m\|$ para todo $m \in M_0$.
Si $m \in M_0$ con $\|m\| = 1$. Por un lado,

$$\|TSm\| \geq \|T^{**}m\| - \delta\|T^{**}m\| \geq \|T^{**}m\| - \delta\|T\| > \|T^{**}m\| - \epsilon.$$

Por otro lado, existe un $k_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\|m - m_{k_0}\| < \delta/2$ y se tiene que

$$\|TSm\| \leq \|TSm_{k_0}\| + \|TS(m_{k_0} - m)\| \leq \|T^{**}m_{k_0}\| + \delta + \|T\|(1+\delta)\delta/2$$

$$\leq \|T^{**}m\| + \|T^{**}m_{k_0} - T^{**}m\| + \delta + \|T\|(1+\delta)\delta/2$$

$$\leq \|T^{**}m\| + \|T\|\delta/2 + \delta + \|T\|(1+\delta)\delta/2 < \|T^{**}m\| + \epsilon.$$

En definitiva, $|\|TSm\| - \|T^{**}m\|| < \epsilon$ para todo $m \in M_0$ con $\|m\| = 1$. Si $m \in M_0$ es arbitrario, entonces

$$|\|TSm\| - \|T^{**}m\|| \leq \epsilon\|m\|$$

Finalmente, por el teorema 3.1.2, deducimos que T^{**} está finitamente representado en T.

■

Observación

La afirmación (2) del lema anterior se enuncia en [11, corolario 7]. Desafortunadamente, dicho corolario depende de la condición D del teorema 5, cuya prueba pensamos que no es correcta.

El siguiente lema recoge relaciones de la representabilidad finita de operadores con los ultraproductos de operadores.

Teorema 3.1.4 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach y sea $\mathcal{U}$ un ultrafiltro. Entonces*
(1) T está finitamente representado en $(T)_{\mathcal{U}}$.
(2) $(T^*)_{\mathcal{U}}$ está finitamente representado en $(T)^*_{\mathcal{U}}$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Dado $\epsilon > 0$ y dado $M_0 \in \mathrm{Dim}(X)$, consideramos X inyectado isométricamente en la ultrapotencia $(X)_{\mathcal{U}}$ con la isometría $J : X \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$ dada en la página 9 de esta memoria. Si restringimos J a M_0, se obtiene, para todo $x \in M_0$,

$$|\|Jx\| - \|x\|| = |\|x\| - \|x\|| = 0 \leq \epsilon\|x\|,$$

$$|\|Tx\| - \|(T)_{\mathcal{U}}Jx\|| = |\|Tx\| - \|(T)_{\mathcal{U}}(x_i)_{\mathcal{U}}\|| = |\|Tx\| - \lim_{\mathcal{U}} \|Tx_i\||$$
$$= |\|Tx\| - \lim_{\mathcal{U}} \|Tx\|| = |\|Tx\| - \|Tx\|| = 0 \leq \epsilon\|x\|.$$

Por el teorema 3.1.2, $T \prec (T)_{\mathcal{U}}$.

(2) Dado $\epsilon > 0$ y dado M_0 subespacio finito-dimensional de $(Y^*)_{\mathcal{U}}$, consideramos $(Y^*)_{\mathcal{U}}$ inyectado isométricamente en $(Y)^*_{\mathcal{U}}$ con la isometría $J_1 : (Y^*)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (Y)^*_{\mathcal{U}}$ dada en la página 12 de esta memoria. Si tomamos U como la restricción de J_1 a M_0 se obtiene, para todo $(y_i^*)_{\mathcal{U}} \in M_0$,

$$|\|U(y_i^*)_{\mathcal{U}}\| - \|(y_i^*)_{\mathcal{U}}\|| = |\|J_1(y_i^*)_{\mathcal{U}}\| - \|(y_i^*)_{\mathcal{U}}\||$$

$$= |\|(y_i^*)_{\mathcal{U}}\| - \|(y_i^*)_{\mathcal{U}}\|| = 0 \leq \epsilon\|(y_i^*)_{\mathcal{U}}\|$$

y, además,

$$|\|(T^*)_{\mathcal{U}}(y_i^*)_{\mathcal{U}}\| - \|(T)^*_{\mathcal{U}}U(y_i^*)_{\mathcal{U}}\|| = |\|(T^*)_{\mathcal{U}}(y_i^*)_{\mathcal{U}}\| - \|(T)^*_{\mathcal{U}}J_1(y_i^*)_{\mathcal{U}}\||$$

$$= |\|(T^*)_{\mathcal{U}}(y_i^*)_{\mathcal{U}}\| - \|J_2(T^*)_{\mathcal{U}}(y_i^*)_{\mathcal{U}}\|| = |\|(T^*)_{\mathcal{U}}(y_i^*)_{\mathcal{U}}\| - \|(T^*)_{\mathcal{U}}(y_i^*)_{\mathcal{U}}\||$$

$$= 0 \leq \epsilon \| (y_i^*)_{\mathcal{U}} \|$$

donde J_2 representa la inyección métrica del espacio $(X^*)_{\mathcal{U}}$ en $(X)^*_{\mathcal{U}}$. Por el lema 3.1.2 y el teorema 3.1.2, deducimos que $(T^*)_{\mathcal{U}} \prec (T)^*_{\mathcal{U}}$.

∎

3.2 q-Representabilidad finita de operadores

A continuación presentamos una definición, en cierto sentido, dual a la de representabilidad finita de operadores considerada en la sección anterior. Como veremos al final de la sección, la compatibilidad entre ambos conceptos es la mejor que se puede esperar.

Definición 3.2.1 *Sean $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ y $T : X \longrightarrow Y$ dos operadores definidos entre espacios de Banach. Diremos que T_0 está q-finitamente representado en T, y lo representaremos por $T_0 \prec_q T$, si para cada $\epsilon > 0$ y cada $M_0 \in Cod(Y_0)$, existen $M \in Cod(Y)$ y dos ϵ-isometrías*

$$V : X_0/T_0^{-1}M_0 \longrightarrow X/T^{-1}M \text{ y } W : Y_0/M_0 \longrightarrow Y/M,$$

tales que $W\widehat{T_0} = \widehat{T}V$, donde

$$\widehat{T_0} : X_0/T_0^{-1}M_0 \longrightarrow Y_0/M_0 \text{ está definido por } \widehat{T_0}(x + T_0^{-1}M_0) = T_0 x + M_0,$$

$$\widehat{T} : X/T^{-1}M \longrightarrow Y/M \text{ está definido por } \widehat{T}(x + T^{-1}M) = Tx + M.$$

Siempre que no haya confusión denotaremos por T_0 y T a $\widehat{T_0}$ y $\widehat{T}$, respectivamente.

Con argumentos completamente análogos al lema 3.1.1, se deduce, obviamente, el siguiente resultado.

Lema 3.2.1 *La q-representabilidad finita de operadores verifica la propiedad reflexiva y transitiva, es decir, es un preorden en la clase de todos los operadores entre espacios de Banach.*

Observaciones

Sean X y Y son espacios de Banach. Entonces

$$X \prec_q Y \quad \text{si y sólo si} \quad I_X \prec_q I_Y.$$

donde I_X e I_Y representan los operadores identidad sobre X e Y, respectivamente.

Por tanto, deducimos inmediatamente de la sección tercera del capítulo segundo que:

- La q-representabilidad finita de operadores no es una relación simétrica. Basta considerar los operadores identidad sobre l_2 y X con X un espacio de Banach no Hilbert y tener en cuenta los teoremas 2.3.2 y 2.3.1.

- La q-representabilidad finita de operadores no es una relación antisimétrica. Basta tomar las identidades sobre l_∞ y c_0 y tener en cuenta las observaciones al teorema 2.2.5.

Los siguientes resultados elementales nos serán de gran utilidad.
Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Entonces,

- *Si $M \subset Y^*$ es un subespacio, entonces $T^{-1}M_\perp = (T^*M)_\perp$.*

- *Si $N \subset X$ es un subespacio, entonces $(TN)^\perp = (T^*)^{-1}N^\perp$.*

- *Si M un subespacio cerrado de Y y $M \in Cod(Y)$, entonces el subespacio $T^{-1}M$ es de codimensión finita en X.*

Nuestro siguiente resultado establece las relaciones entre la representabilidad finita de operadores y la q-representabilidad finita de operadores y mostramos cómo el comportamiento es análogo al dado en la sección 2.2 entre la representabilidad finita y la representabilidad finita por cocientes entre espacios de Banach. En cierto sentido, considerando los operadores identidad, este resultado es una extensión del teorema 2.2.6.

Teorema 3.2.1 *Sean $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ y $T : X \longrightarrow Y$ dos operadores entre espacios de Banach. Entonces,*
(1) T_0 está q-finitamente representado en T si y sólo si T_0^* está finitamente representado en T^*.
(2) T_0 está finitamente representado en T si y sólo si T_0^* está q-finitamente representado en T^*.

DEMOSTRACIÓN:

(1)($\Longrightarrow$) Dado $\epsilon > 0$ y dado M_0 subespacio de Y_0^* finito-dimensional, consideremos el subespacio $(M_0)_\perp$ de codimensión finita en Y_0.

Por hipótesis, $T_0 \prec_q T$, luego, existe un subespacio $N \in \mathrm{Cod}(Y)$ y existen ϵ-isometrías, A y B, tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_0/T_0^{-1}(M_0)_\perp & \xrightarrow{T_0} & Y_0/(M_0)_\perp \\ B\downarrow & & \downarrow A \\ X/T^{-1}N & \xrightarrow{T} & Y/N \end{array}$$

es conmutativo, es decir, $AT_0 = TB$.
Tomemos $M := N^\perp$. Obviamente, M es un subespacio finito-dimensional de Y^*. Además, puesto que A es una ϵ-isometría, entonces

$$A^* : (Y/N)^* \longrightarrow (Y_0/(M_0)_\perp)^*$$

también lo es. Observemos que

$$(Y/N)^* \equiv N^\perp = M \text{ y } (Y_0/(M_0)_\perp)^* \equiv M_0.$$

Luego, podemos considerar A^* como un operador de M en M_0. Tomemos el operador $V := (A^*)^{-1}$.

Por otro lado,

$$B^* : \left(X/T^{-1}N\right)^* \longrightarrow \left(X_0/T_0^{-1}(M_0)_\perp\right)^*$$

es una ϵ-isometría. Teniendo en cuenta que $N = M_\perp$ y los comentarios previos al teorema, obtenemos

$$\left(X/T^{-1}N\right)^* \equiv (T^{-1}N)^\perp = (T^{-1}M_\perp)^\perp = ((T^*M)_\perp)^\perp = T^*M$$

$$\left(X_0/T_0^{-1}(M_0)_\perp\right)^* \equiv ((T_0^{-1}(M_0)_\perp)^\perp = ((T_0^*M_0)_\perp)^\perp = T_0^*M_0.$$

Luego, podemos considerar la ϵ-isometría B^* definida de T^*M en $T_0^*M_0$. Tomemos $W := (B^*)^{-1}$.

Finalmente, se tiene $WT_0^* = T^*V$ puesto que $AT_0 = TB$.

($\Longleftarrow$) Dado $\epsilon > 0$ y dado $M_0 \in \mathrm{Cod}(Y_0)$, consideremos $M_0^\perp \in \mathrm{Dim}(Y_0^*)$. Por hipótesis, $T_0^* \prec T^*$, luego, existe $N \in \mathrm{Dim}(Y^*)$ y existen ϵ-isometrías, A y B, tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_0^\perp & \xrightarrow{T_0^*} & T_0^*M_0^\perp \\ B \downarrow & & \downarrow A \\ N & \xrightarrow{T^*} & T^*N \end{array}$$

conmuta, es decir $AT_0^* = T^*B$.

Tomemos $M := N_\perp$. Se verifica que M es de codimensión finita puesto que

$$(Y/M)^* \equiv M^\perp = (N_\perp)^\perp = N.$$

Además, si B es una ϵ-isometría, entonces

$$B^* : N^* \longrightarrow (M_0^\perp)^*$$

también lo es. Pero

$$N^* \equiv (Y/M)^{**} \equiv Y/M \text{ y } (M_0^\perp)^* \equiv (Y_0/M_0)^{**} \equiv Y_0/M_0.$$

Es decir, podemos considerar B^* como una ϵ-isometría de Y/M sobre Y_0/M_0. Tomemos $W := (B^*)^{-1}$.

Por otro lado, si A es una ϵ-isometría, entonces el operador adjunto

$$A^* : (T^*N)^* \longrightarrow (T_0^* M_0^\perp)^*$$

también lo es. Teniendo en cuenta los comentarios previos al teorema, obtenemos

$$T^*N \equiv ((T^*N)_\perp)^\perp \equiv (T^{-1}N_\perp)^\perp = (T^{-1}M)^\perp \equiv \left(X/T^{-1}M\right)^*$$

$$T_0^* M_0^\perp = ((T_0^* M_0^\perp)_\perp)^\perp \equiv (T_0^{-1}(M_0^\perp)_\perp)^\perp = (T_0^{-1}M_0)^\perp \equiv \left(X_0/T_0^{-1}M_0\right)^*.$$

Luego, podemos considerar A^* como una ϵ-isometría definida de $X/T^{-1}M$ sobre $X_0/T_0^{-1}M_0$. Tomemos $V := (A^*)^{-1}$.

Además, $T_0^{**}A^* = B^*T^{**}$ puesto que $AT_0^* = T^*B$. Pero A^* parte de $X/T^{-1}M$ y tiene su imagen sobre $X_0/T_0^{-1}M_0$, por tanto, $T_0A^* = B^*T$ o, equivalentemente $WT_0 = TV$.

(2) Teniendo en cuenta la transitividad de la representabilidad finita de operadores y el teorema 3.1.3, T_0 está finitamente representado en T si y sólo si T_0^{**} está finitamente representado en T^{**}. Por el apartado (1), esto equivale a decir que $T_0^* \prec_q T^*$.

■

Observaciones

(1) Todo operador T está q-finitamente representado en su biadjunto T^{**} puesto que, por el teorema 3.1.3, $T^* \prec T^{***}$.

(2) Si T es un operador cualquiera, siempre se verifica que $T^{**} \prec_q T$ puesto que, por el teorema 3.1.3, T^{***} está finitamente representado en T^*.

(3) Todo operador está q-finitamente representado en cualquier ultrapotencia suya, puesto que si T es un operador y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro, por el teorema 3.1.4, se obtiene

$$T^* \prec (T^*)_\mathcal{U} \prec (T)_\mathcal{U}^*.$$

Aplicando el teorema anterior, $T \prec_q (T)_\mathcal{U}$

A continuación, relacionaremos el concepto de q-representabilidad finita de operadores con el de ultrapotencia de operadores.

Teorema 3.2.2 *Sean $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ y $T : X \longrightarrow Y$ dos operadores entre espacios de Banach. Si T_0 está q-finitamente representado en T, entonces existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$ y existen dos operadores Q y $\tilde{Q}$ sobreyectivos con $\|Q\| \leq 1$, $\|\tilde{Q}\| \leq 1$, $\mathrm{open}(Q) \leq 1$, $\mathrm{open}(\tilde{Q}) \leq 1$, tales que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} (X)_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{(T)_{\mathcal{U}}} & (Y)_{\mathcal{U}} \\ \tilde{Q}\downarrow & & \downarrow Q \\ (T_0^*Y_0^*)^* & \xrightarrow{T_0^{**}} & Y_0^{**} \end{array}$$

es conmutativo, es decir, $Q(T)_{\mathcal{U}} = T_0^{**}\tilde{Q}$.

Hacemos notar que, en el diagrama, estamos cometiendo un abuso de notación, puesto que T_0^{**}, en realidad, representa el operador

$$\widetilde{T_0^{**}} : X_0^{**}/\mathrm{Ker}T_0^{**} \equiv (T_0^*Y_0^*)^* \longrightarrow Y_0^{**}, \quad x_0^{**} + \mathrm{Ker}T_0^{**} \longmapsto T_0^{**}x_0^{**}.$$

DEMOSTRACIÓN:

Si T_0 está finitamente representado en T, entonces, por el teorema 3.2.1, T_0^* está finitamente representado en T^*. Teniendo en cuenta la observación (2) posterior al teorema 3.1.2, consideramos el ultrafiltro $\mathcal{U}_{F,Y_0^*}$ sobre el conjunto de índices

$$\mathcal{I} = \{i = (M_0, \epsilon) : 0 < \epsilon < 1/2 \ \text{ y } \ M_0 \in \mathrm{Dim}(Y_0^*)\},$$

y, para cada $i \in \mathcal{I}$, tomamos $M_i \in \mathrm{Dim}(Y^*)$ y dos ϵ_i-isometrías, V_i y W_i, tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_0^i & \xrightarrow{T_0^*} & T_0^*M_0^i \\ V_i\downarrow & & \downarrow W_i \\ M_i & \xrightarrow{T^*} & T^*M_i \end{array}$$

es conmutativo. Además, construimos las isometrías

$$\mathcal{J} : Y_0^* \longrightarrow (Y^*)_{\mathcal{U}}, \quad y_0^* \longmapsto (y_i^*)_{\mathcal{U}}$$

donde

$$y_i^* = \begin{cases} V_i y_0^* & \text{si} \quad y_0^* \in M_0^i \\ 0 & \text{si} \quad y_0^* \notin M_0^i \end{cases}$$

y

$$\tilde{\mathcal{J}} : T_0^* Y_0^* \longrightarrow (X^*)_{\mathcal{U}}, \quad T_0^* y_0^* \longmapsto (T^*)_{\mathcal{U}} \mathcal{J} y_0^*.$$

Obviamente, $(T^*)_{\mathcal{U}} \mathcal{J} = \tilde{\mathcal{J}} T_0^*$.
Dualizando, obtenemos

$$\mathcal{J}^* : ((Y^*)_{\mathcal{U}})^* \longrightarrow Y_0^{**} \ \text{ y } \ \tilde{\mathcal{J}}^* : ((X^*)_{\mathcal{U}})^* \longrightarrow (T_0^* Y_0^*)^*.$$

Por el lema 1.2.4, tenemos que los espacios $(Y)_{\mathcal{U}}$ y $(X)_{\mathcal{U}}$ se inyectan isométricamente en $((Y^*)_{\mathcal{U}})^*$ y $((X^*)_{\mathcal{U}})^*$, respectivamente. Por tanto, podemos definir

$$Q : (Y)_{\mathcal{U}} \longrightarrow Y_0^{**}$$

como la restricción de $\mathcal{J}^*$ a $(Y)_{\mathcal{U}}$ y

$$\tilde{Q} : (X)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (T_0^* Y_0^*)^*$$

como la restricción de $\tilde{\mathcal{J}}^*$ a $(X)_{\mathcal{U}}$.

Obviamente,

$$\|Q\| \leq \|\mathcal{J}^*\| = \|\mathcal{J}\| = 1,$$

$$\|\tilde{Q}\| \leq \|\tilde{\mathcal{J}}^*\| = \|\tilde{\mathcal{J}}\| = 1.$$

Además, teniendo en cuenta que $((T^*)_{\mathcal{U}})^*$ restringido a $(X)_{\mathcal{U}}$ coincide con $(T)_{\mathcal{U}}$, se verifica que, para cada $(x_i)_{\mathcal{U}} \in (X)_{\mathcal{U}}$,

$$Q(T)_{\mathcal{U}}(x_i)_{\mathcal{U}} = \mathcal{J}^*(T)_{\mathcal{U}}(x_i)_{\mathcal{U}} = \mathcal{J}^*((T^*)_{\mathcal{U}})^*(x_i)_{\mathcal{U}} = T_0^{**} \tilde{\mathcal{J}}^*(x_i)_{\mathcal{U}} = T_0^{**} \tilde{Q}(x_i)_{\mathcal{U}},$$

es decir, $Q(T)_{\mathcal{U}} = T_0^{**} \tilde{Q}$.

Veamos que Q es sobreyectiva y $\text{open}(Q) \leq 1$.

Dado $y_0^{**} \in Y_0^{**}$, para cada $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in \mathcal{I}$, llamemos z_i a la restricción de y_0^{**} al subespacio M_0^i. Se verifica que

$$z_i \in (M_0^i)^* \ \text{ y } \ (V_i^*)^{-1} z_i \in M_i^* \equiv (((M_i)_\perp)^\perp)^* \equiv (Y/(M_i)_\perp)^{**} \equiv Y/(M_i)_\perp$$

puesto que $(M_i)_\perp$ es de codimensión finita en Y.

Por la definición de norma cociente, existirá $y_i \in Y$ tal que

$$y_i + (M_i)_\perp = (V_i^*)^{-1} z_i \text{ y } \|y_i\| \leq \|(V_i^*)^{-1} z_i\| + \epsilon_i.$$

Para cada $i \in \mathcal{I}$, se verifica que

$$\|y_i\| \leq \|(V_i^*)^{-1} z_i\| + \epsilon_i \leq \|(V_i)^{-1}\| \|z_i\| + \epsilon_i \leq \frac{1}{1-\epsilon_i} \|y_0^{**}\| + \epsilon_i \leq 2\|y_0^{**}\| + 1.$$

Por tanto, $(y_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, Y)$ y podemos considerar la clase $(y_i)_\mathcal{U} \in (Y)_\mathcal{U}$. Observamos que

$$\|(y_i)_\mathcal{U}\| = \lim_\mathcal{U} \|y_i\| \leq \lim_\mathcal{U} (\|(V_i^*)^{-1} z_i\| + \epsilon_i)$$

$$\leq \lim_\mathcal{U} \left(\frac{1}{1-\epsilon_i} \|z_i\| + \epsilon_i \right) \leq \lim_\mathcal{U} \left(\frac{1}{1-\epsilon_i} \|y_0^{**}\| + \epsilon_i \right) = \|y_0^{**}\|.$$

Para probar que $Q(y_i)_\mathcal{U} = y_0^{**}$ lo haremos en varios pasos.

En primer lugar, dado $y_0^* \in Y_0^*$, y teniendo en cuenta la definición de $\mathcal{J}$, se verifica

$$\langle Q(y_i)_\mathcal{U}, y_0^* \rangle = \langle \mathcal{J}^*(y_i)_\mathcal{U}, y_0^* \rangle = \langle (y_i)_\mathcal{U}, \mathcal{J} y_0^* \rangle$$

$$= \langle (y_i)_\mathcal{U}, (y_i^*)_\mathcal{U} \rangle = \lim_\mathcal{U} \langle y_i, y_i^* \rangle.$$

En segundo lugar, observemos que, para cada $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in \mathcal{I}$, M_0^i es un subespacio finito-dimensional de Y_0^* y, por tanto, está complementado. Sea

$$P_i : Y_0^* \longrightarrow M_0^i$$

la correspondiente proyección.

Se verifica

$$\lim_\mathcal{U} \langle y_i, y_i^* \rangle = \lim_\mathcal{U} \langle y_i, V_i P_i y_0^* \rangle.$$

En efecto, dado $\epsilon > 0$, tomemos $M_0 = \operatorname{span}\{y_0^*\}$. Si $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in I(M_0, \epsilon)$, entonces $\epsilon_i \leq \epsilon$ y $M_0 \subset M_0^i$. En particular, $y_0^* \in M_0^i$ y, por tanto,

$$|\langle y_i, y_i^* \rangle - \langle y_i, V_i P_i y_0^* \rangle| = |\langle y_i, V_i y_0^* \rangle - \langle y_i, V_i y_0^* \rangle| = 0 < \epsilon.$$

En definitiva,

$$\langle Q(y_i)_\mathcal{U}, y_0^* \rangle = \lim_\mathcal{U} \langle y_i, y_i^* \rangle = \lim_\mathcal{U} \langle y_i, V_i P_i y_0^* \rangle.$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $V_iP_iy_0^* \in M_i$, deducimos que

$$\langle Q(y_i)_{\mathcal{U}}, y_0^*\rangle = \lim_{\mathcal{U}}\langle y_i, V_iP_iy_0^*\rangle = \lim_{\mathcal{U}}\langle y_i + (M_i)_\perp, V_iP_iy_0^*\rangle$$

$$= \lim_{\mathcal{U}}\langle (V_i^*)^{-1}z_i, V_iP_iy_0^*\rangle = \lim_{\mathcal{U}}\langle z_i, P_iy_0^*\rangle = \lim_{\mathcal{U}}\langle y_0^{**}|_{M_0^i}, P_iy_0^*\rangle = \langle y_0^{**}, y_0^*\rangle.$$

Esta última igualdad es válida puesto que, para cada $\epsilon > 0$, tomando el subespacio $M_0 = \text{span}\{y_0^*\}$, se verifica que si $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in I(M_0, \epsilon)$, entonces $\epsilon_i \leq \epsilon$ y $M_0 \subset M_0^i$. Es decir, $y_0^* \in M_0^i$, luego,

$$|\langle y_0^{**}|_{M_0^i}, P_iy_0^*\rangle - \langle y_0^{**}, y_0^*\rangle| = |\langle y_0^{**}|_{M_0^i}, y_0^*\rangle - \langle y_0^{**}, y_0^*\rangle| = 0 < \epsilon.$$

De forma análoga, veamos que $\tilde{Q}$ es sobreyectiva y $\text{open}(\tilde{Q}) \leq 1$.

Dado $x_0^{**} \in (T_0^*Y_0^*)^*$, por el teorema de Hahn-Banach, existe una extensión de x_0^{**} de la misma norma, que denotaremos por $z^{**} \in X_0^{**}$. Para cada índice $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in \mathcal{I}$, llamemos z_i a la restricción de z^{**} a $T_0^*M_0^i$. Tenemos

$$z_i \in (T_0^*M_0^i)^* \text{ y}$$

$$(W_i^*)^{-1}z_i \in (T^*M_i)^* = ((T^*M_i)_\perp)^\perp)^* = (X/(T^*M_i)_\perp)^{**} \equiv X/(T^*M_i)_\perp$$

puesto que $(T^*M_i)_\perp$ es de codimensión finita en X. Al igual que antes, por la definición de norma cociente, existe $x_i \in X$ tal que

$$x_i + (T^*M_i)_\perp = (W_i^*)^{-1}z_i \;\text{ y }\; \|x_i\| \leq \|(W_i^*)^{-1}z_i\| + \epsilon_i.$$

Es más, $(x_i)_{i\in\mathcal{I}} \in l_\infty(\mathcal{I}, X)$ puesto que, para cada $i \in \mathcal{I}$,

$$\|x_i\| \leq \|(W_i^*)^{-1}z_i\| + \epsilon_i \leq \frac{1}{1-\epsilon_i}\|z_i\| + \epsilon_i \leq 2\|z^{**}\| + 1 = 2\|x_0^{**}\| + 1.$$

Consideremos la clase $(x_i)_{\mathcal{U}}$. Obtenemos

$$\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}}\|x_i\| \leq \lim_{\mathcal{U}}\left(\frac{1}{1-\epsilon_i}\|x_0^{**}\| + \epsilon_i\right) = \|x_0^{**}\|.$$

Para probar que $\tilde{Q}(x_i)_{\mathcal{U}} = x_0^{**}$ lo haremos en varios pasos, argumentando de manera análoga a lo hecho con Q.

En primer lugar, dado $T_0^* y_0^* \in T_0^* Y_0^*$,

$$\langle \tilde{Q}(x_i)_{\mathcal{U}}, T_0^* y_0^* \rangle = \langle \tilde{\mathcal{J}}^*(x_i)_{\mathcal{U}}, T_0^* y_0^* \rangle = \langle (x_i)_{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{J}} T_0^* y_0^* \rangle$$

$$= \langle (x_i)_{\mathcal{U}}, (T^*)_{\mathcal{U}} \mathcal{J} y_0^* \rangle = \langle (x_i)_{\mathcal{U}}, (T^*)_{\mathcal{U}} (y_i^*)_{\mathcal{U}} \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle x_i, T^* y_i^* \rangle.$$

En segundo lugar, si $P_i : Y_0^* \longrightarrow M_0^i$ es una proyección sobre M_0^i, entonces

$$\lim_{\mathcal{U}} \langle x_i, T^* y_i^* \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle x_i, T^* V_i P_i y_0^* \rangle.$$

En efecto, dado $\epsilon > 0$, basta considerar $M_0 = \operatorname{span}\{y_0^*\}$, para comprobar que si $i = (M_0^i, \epsilon_i) \in I(M_0, \epsilon)$, entonces $\epsilon_i \leq \epsilon$ y $M_0 \subset M_0^i$, es decir, el elemento $y_0^* \in M_0^i$ y, por tanto,

$$|\langle x_i, T^* y_i^* \rangle - \langle x_i, T^* V_i P_i y_0^* \rangle| = |\langle x_i, T^* V_i y_0^* \rangle - \langle x_i, T^* V_i y_0^* \rangle| = 0 < \epsilon.$$

De esta forma y, como $T^* V_i P_i y_0^* \in T^* M_i$, haciendo razonamientos análogos a los efectuados con Q y teniendo en cuenta que $W_i T_0^* = T^* V_i$, obtenemos

$$\langle \tilde{Q}(x_i)_{\mathcal{U}}, T_0^* y^* \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle x_i, T^* V_i P_i y_0^* \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle x_i + (T^* M_i)_\perp, T^* V_i P_i y_0^* \rangle$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} \langle (W_i^*)^{-1} z_i, T^* V_i P_i y_0^* \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle (W_i^*)^{-1} z_i, W_i T_0^* P_i y_0^* \rangle$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} \langle z_i, T_0^* P_i y_0^* \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle z^{**}|_{T_0^* M_0^i}, T_0^* P_i y_0^* \rangle$$

$$= \langle z^{**}, T_0^* y_0^* \rangle = \langle x_0^{**}, T_0^* y_0^* \rangle.$$

■

3.3 Algunas clases de operadores

En esta sección caracterizaremos diversos ideales de operadores conocidos, a través de la representabilidad finita y la q-representabilidad finita de operadores.

En particular, esto indicará que dichos operadores quedan esencialmente determinados por su acción sobre los subespacios de dimensión finita o por los subespacios cerrados de codimensión finita. En concreto, trataremos los siguientes ideales de operadores:

- Operadores compactos.
- Operadores uniformemente convexificantes.
- Operadores de tipo Rademacher.
- Operadores supertauberianos y cosupertauberianos.
- Operadores que factorizan a través de un espacio de Hilbert.

Comenzamos tratando la compacidad.

Teorema 3.3.1 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Entonces, T es un operador compacto si y sólo si cualquier operador $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ finitamente representado en T es compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Veamos, antes de nada, que si $T : X \longrightarrow Y$ es un operador compacto y $\mathcal{U}$ es un ultrafiltro sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$, entonces la ultrapotencia $(T)_{\mathcal{U}}$ también es un operador compacto. Para ello, bastará comprobar que

$$(T)_{\mathcal{U}} B_{(X)_{\mathcal{U}}} \subset J(\overline{TB_X})$$

donde J representa la inyección canónica de Y en $(Y)_{\mathcal{U}}$ dada en la página 9 de esta memoria.

En efecto, dado $y = (T)_{\mathcal{U}}(x_i)_{\mathcal{U}} \in (T)_{\mathcal{U}} B_{(X)_{\mathcal{U}}}$ y puesto que

$$\|(x_i)_{\mathcal{U}}\| = \lim_{\mathcal{U}} \|x_i\| \leq 1,$$

podemos encontrar un representante $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ y un conjunto $I_0 \in \mathcal{U}$ tal que si $i \in I_0$, entonces $\|x_i\| \leq 1$. Es decir, si $i \in I_0$ entonces $Tx_i \in TB_X$. Por hipótesis T es compacto, luego, aplicando el lema 1.2.1, existe

$$z := \lim_{\mathcal{U}} Tx_i \in \overline{TB_X}.$$

Es más, se verifica que $y = Jz$ puesto que

$$\|y - Jz\| = \|(Tx_i)_{\mathcal{U}} - Jz\| = \lim_{\mathcal{U}} \|Tx_i - z\| = 0.$$

Teniendo en cuenta que el ideal de los operadores compactos es inyectivo [48, p. 72], razonamos del siguiente modo.

Si $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ es un operador finitamente representado en T, entonces por el teorema 3.1.2, se pueden encontrar un ultrafiltro $\mathcal{U}$ y dos inyecciones métricas $\mathcal{J} : X_0 \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$, $\tilde{\mathcal{J}} : T_0X_0 \longrightarrow (Y)_{\mathcal{U}}$ de manera que $\tilde{\mathcal{J}}T_0 = (T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J}$.

Sabemos que $(T)_{\mathcal{U}}$ es compacto, luego, $(T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J}$ o, equivalentemente, $\tilde{\mathcal{J}}T_0$ es un operador compacto. Finalmente, aplicando la inyectividad se consigue que T_0 es compacto.

($\Longleftarrow$) Obvio porque el operador T está finitamente representado en sí mismo.

■

Observación

La demostración, de hecho, también prueba lo siguiente.

T es compacto si y sólo si $(T)_{\mathcal{U}}$ es compacto para cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$. Es decir, ser compacto es una superpropiedad.

Corolario 3.3.1 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Entonces, T es un operador compacto si y sólo si cualquier operador $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ que esté q-finitamente representado en T es compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Sea T_0 un operador q-finitamente representado en T, por el teorema 3.2.1, T_0^* está finitamente representado en T^*. El operador T^* es compacto por el teorema de Schauder. Por tanto, aplicando el teorema anterior, deducimos que T_0^* es compacto y, de nuevo, por el teorema de Schauder, T_0 es un operador compacto.

($\Longleftarrow$) Obvio porque el operador T está q-finitamente representado en sí mismo.

■

Por claridad, vamos a recordar la definición de operador uniformemente convexificante, comenzando por el concepto de (n, ϵ)-rama en un espacio de Banach X. Diremos que dos puntos x_1, x_2 de X forman una $(1, \epsilon)$-rama en X si $\|x_1 - x_2\| \geq \epsilon$. Supuesto definida una $(n-1, \epsilon)$-rama en X, diremos que 2^n puntos $x_1, \ldots, x_{2^n}$ de X forman una (n, ϵ)-rama en X si

$$\|x_{2i} - x_{2i-1}\| \geq \epsilon \text{ para } i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$$

y los puntos medios

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \ldots, \frac{x_{2^n-1} + x_{2^n}}{2}$$

forman una $(n-1, \epsilon)$-rama en X.

Un operador $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios de Banach se dice que tiene la *propiedad de árbol finita* si existe un $0 < \epsilon \leq 2$ tal que, para cada $n \in \mathbb{N}$, se pueden encontrar 2^n puntos $x_1, x_2, \ldots x_{2^n}$ en la bola unidad de X tales que sus imágenes $Tx_1, Tx_2, \ldots Tx_{2^n}$ forman una (n, ϵ)-rama en Y.

Finalmente, un operador $T : X \longrightarrow Y$ es *uniformemente convexificante* si no posee la propiedad de árbol finita.

El nombre de uniformemente convexificante proviene de la siguiente caracterización [6].

$T : X \longrightarrow Y$ es uniformemente convexificante si y sólo si existe una norma equivalente $|\cdot|$ en X tal que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x_1, x_2 \in X$ con $|x_1| = |x_2| = 1$, se tiene que $\|Tx_1 - Tx_2\| < \epsilon$ siempre que $|\frac{1}{2}(x_1 + x_2)| > 1 - \delta$.

Nuestro siguiente teorema fue probado por B. Beauzamy [6], pero usando su concepto de representabilidad finita de operadores. En cualquier caso, pensamos que nuestra prueba difiere en ciertos aspectos de la dada por B. Beauzamy.

Teorema 3.3.2 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. T es uniformemente convexificante si y sólo si todo operador $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ que esté finitamente representado en T es débil-compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Esta implicación se puede deducir de B. Beauzamy [6] razonando del siguiente modo.

Sea T_0 un operador tal que $T_0 \prec T$. En particular, T_0 está finitamente representado en T en el sentido de B. Beauzamy [6] y utilizando el ejercicio 6 de [6, p. 241], deducimos que T_0 es débil-compacto.

No obstante, hemos optado por dar una prueba directa (probablemente más corta) usando nuestro concepto de representabilidad finita de operadores.

Supongamos que $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ es un operador finitamente representado en T y que no es débil-compacto. Por [8, p. 64], se pueden encontrar un número $\theta > 0$ y dos sucesiones $(x_k)_{k\geq 1}$, $(f_n)_{n\geq 1}$ en la esfera unidad de X_0 e Y_0^*, respectivamente, tales que

$$\begin{array}{ll} f_n(T_0x_k) > \theta & \text{si} \quad n \leq k \\ f_n(T_0x_k) = 0 & \text{si} \quad n > k. \end{array}$$

En particular, se verifica que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\operatorname{dist}\left(\operatorname{conv}(T_0x_1, \ldots, T_0x_k), \operatorname{conv}(T_0x_{k+1}, \ldots)\right) \geq \theta. \tag{$*$}$$

En efecto, tomemos $K \in \mathbb{N}$ con $k < K$ y consideremos cualesquiera escalares

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots \alpha_K \geq 0 \text{ con } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1 \text{ y } \sum_{i=k+1}^{K} \alpha_i = 1.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & f_{k+1}\left(-\sum_{i=1}^{k} \alpha_i T_0 x_i + \sum_{i=k+1}^{K} \alpha_i T_0 x_i\right) \\ &= -\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_{k+1}(T_0x_i) + \sum_{i=k+1}^{K} \alpha_i f_{k+1}(T_0x_i) \\ &= \sum_{i=k+1}^{K} \alpha_i f_{k+1}(T_0x_i) > \sum_{i=k+1}^{K} \alpha_i \theta = \theta > 0, \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}\theta &< |f_{k+1}\left(-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i T_0 x_i + \sum_{i=k+1}^{K}\alpha_i T_0 x_i\right)| \\ &\leq \|f_{k+1}\|\| - \sum_{i=1}^{k}\alpha_i T_0 x_i + \sum_{i=k+1}^{K}\alpha_i T_0 x_i\| \\ &\leq \| - \sum_{i=1}^{k}\alpha_i T_0 x_i + \sum_{i=k+1}^{K}\alpha_i T_0 x_i\|,\end{aligned}$$

con lo que $(*)$ está probado.

Tomemos ahora $0 < \epsilon < \min\{\theta, 1\}$ y definamos

$$\epsilon' := \frac{\theta - \epsilon}{\theta + \epsilon} > 0.$$

Fijemos un $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y consideremos el subespacio

$$M_n := \operatorname{span}\{x_1, \ldots, x_{2^n}\}.$$

Puesto que T_0 está finitamente representado en T, existe un subespacio finito-dimensional N_n de X y dos ϵ'-isometrías

$$U : M_n \longrightarrow N_n \ \text{ y } \ V : T_0 M_n \longrightarrow T N_n$$

tales que $VT_0 = TU$. Consideremos

$$\tilde{U} = \frac{U}{\|U\|} \ \text{ y } \ \tilde{V} = \frac{V}{\|U\|}.$$

Observemos que se verifica

$$\|\tilde{U}\| = 1, \ \ \|(\tilde{V})^{-1}\| \leq \|U\|\|V^{-1}\| < \frac{1+\epsilon'}{1-\epsilon'} \ \text{ y } \ \tilde{V}T_0 = T\tilde{U}.$$

Consideremos los 2^n puntos de la bola unidad de X siguientes,

$$y_1, \ldots, y_{2^n} \ \text{ donde } \ y_i = \tilde{U}x_i \ \text{ para } \ i = 1, \ldots 2^n.$$

Si comprobamos que $Ty_1, \ldots Ty_{2^n}$ forman una (n, ϵ)-rama en Y, habríamos llegado a una contradicción y, por tanto, la implicación estaría probada.

Veamos, antes de nada, que para cada $k \in \mathbb{N}$ con $k < 2^n$, se verifica que

$$\operatorname{dist}(\operatorname{conv}(Ty_1, \ldots, Ty_k), \operatorname{conv}(Ty_{k+1}, \ldots)) \geq \epsilon. \tag{$**$}$$

En efecto, tomemos $K \in \mathbb{N}$ con $k < K$ y consideremos cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots \alpha_K \geq 0$ con $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ y $\sum_{i=k+1}^K \alpha_i = 1$. Entonces, utilizando $(*)$,

$$\|\sum_{i=1}^k \alpha_i T y_i - \sum_{i=k+1}^K \alpha_i T y_i\| = \|\sum_{i=1}^k \alpha_i T\tilde{U} x_i - \sum_{i=k+1}^K \alpha_i T\tilde{U} x_i\|$$

$$= \|\sum_{i=1}^k \alpha_i \tilde{V} T_0 x_i - \sum_{i=k+1}^K \alpha_i \tilde{V} T_0 x_i\| \geq \frac{1-\epsilon'}{1+\epsilon'} \|(\tilde{V})^{-1}(\tilde{V}(\sum_{i=1}^k \alpha_i T_0 x_i - \sum_{i=k+1}^K \alpha_i T_0 x_i))\|$$

$$= \frac{1-\epsilon'}{1+\epsilon'} \|\sum_{i=1}^k \alpha_i T_0 x_i - \sum_{i=k+1}^K \alpha_i T_0 x_i\| \geq \frac{1-\epsilon'}{1+\epsilon'} \theta = \epsilon.$$

De esta forma, por $(**)$, para $k = 0, \ldots, n$ y para $i = 1, \ldots, 2^{n-k-1}$, se tiene que

$$\|\frac{\sum_{j=(2i-2)2^k+1}^{(2i-1)2^k} T y_j}{2^k} - \frac{\sum_{j=(2i-1)2^k+1}^{2i2^k} T y_j}{2^k}\| \geq \epsilon$$

y, por tanto, $\{Ty_1, \ldots Ty_{2^n}\}$ es una (n, ϵ)-rama.

$(\Longleftarrow)$ Por reducción al absurdo, si T no es uniformemente convexificante, entonces T posee la propiedad de árbol finita. Por [6, prop. I.3], existe un número $\widehat{\theta}$ con $0 < \widehat{\theta} < 1$ de manera que para cada $K \in \mathbb{N}$ y cada $\epsilon > 0$ se pueden encontrar $x_1^\epsilon, \ldots, x_K^\epsilon$ y $h_1^\epsilon, \ldots h_K^\epsilon$ en la bola unidad de X e Y^*, respectivamente, tales que

$$\begin{array}{lll} h_n^\epsilon(Tx_k^\epsilon) \geq \widehat{\theta}(1-\epsilon) & \text{si} & n \leq k \\ |h_n^\epsilon(Tx_k^\epsilon)| \leq \epsilon & \text{si} & k < n \leq K. \end{array} \tag{$\dagger$}$$

Si construimos un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $(T)_\mathcal{U}$ no sea débil-compacto, llegaremos a contradicción puesto que $(T)_\mathcal{U}$ está finitamente representado en T y la implicación estará probada.

Tomemos el conjunto de índices

$$\mathcal{I} = \{i = (K_i, \epsilon_i) \text{ con } 0 < \epsilon_i < 1 \text{ y } K_i \in \mathbb{N}\}.$$

Consideremos el orden parcial sobre $\mathcal{I}$ dado por la relación

$$(K_1, \epsilon_1) \leq (K_2, \epsilon_2) \text{ si y sólo si } \epsilon_2 \leq \epsilon_1 \text{ y } K_1 \leq K_2.$$

Los conjuntos $I(K_0, \epsilon_0) \subset \mathcal{I}$ con

$$I(K_0, \epsilon_0) = \{(K, \epsilon) : (K_0, \epsilon_0) \leq (K, \epsilon)\}$$

generan un filtro. Tomemos $\mathcal{U}$ cualquier ultrafiltro que lo contenga.

Probaremos que $(T)_{\mathcal{U}}$ no es débil-compacto aplicando [8, p. 64].

Tomemos $\frac{\widehat{\theta}}{2}$ y consideremos la sucesión $(\widehat{x_k})_k$ de la bola unidad $(X)_{\mathcal{U}}$ definida por $\widehat{x_k} = (\widehat{x_{k,i}})_{\mathcal{U}}$ donde, para cada $i = (K_i, \epsilon_i) \in \mathcal{I}$

$$\widehat{x_{k,i}} = \begin{cases} x_k^{\epsilon_i} & \text{si } k \leq K_i \\ 0 & \text{si } k > K_i. \end{cases}$$

Consideremos, por otro lado, la sucesión $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de la bola unidad de $(Y)^*_{\mathcal{U}}$ definida por $f_n = J\widehat{f_n}$ donde $\widehat{f_n} = (\widehat{f_{n,i}})_{\mathcal{U}}$ y, para cada $i = (K_i, \epsilon_i) \in \mathcal{I}$

$$\widehat{f_{n,i}} = \begin{cases} h_n^{\epsilon_i} & \text{si } n \leq K_i \\ 0 & \text{si } n > K_i. \end{cases}$$

Evidentemente, J representa la inyección canónica de $(Y^*)_{\mathcal{U}}$ en $(Y)^*_{\mathcal{U}}$.

Finalmente, si $n \leq k$,

$$\langle f_n, (T)_{\mathcal{U}} \widehat{x_k} \rangle = \langle f_n, (T)_{\mathcal{U}} (\widehat{x_{k,i}})_{\mathcal{U}} \rangle = \langle J\widehat{f_n}, (T\widehat{x_{k,i}})_{\mathcal{U}} \rangle$$

$$= \langle J(\widehat{f_{n,i}})_{\mathcal{U}}, (T\widehat{x_{k,i}})_{\mathcal{U}} \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle \widehat{f_{n,i}}, T\widehat{x_{k,i}} \rangle = \lim_{\mathcal{U}} \langle h_n^{\epsilon_i}, T x_k^{\epsilon_i} \rangle$$

$$\geq \lim_{\mathcal{U}} \widehat{\theta}(1 - \epsilon_i) = \widehat{\theta} > \frac{\widehat{\theta}}{2},$$

y si $n > k$,

$$|\langle f_n, (T)_{\mathcal{U}} \widehat{x_k} \rangle| = \lim_{\mathcal{U}} |\langle \widehat{f_{n,i}}, T\widehat{x_{k,i}} \rangle| = \lim_{\mathcal{U}} |\langle h_n^{\epsilon_i}, T x_k^{\epsilon_i} \rangle| \leq \lim_{\mathcal{U}} \epsilon_i = 0.$$

■

Corolario 3.3.2 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Se verifica que T es un operador uniformemente convexificante si y sólo si todo operador $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ que esté q-finitamente representado en T es débil-compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Sea T_0 un operador q-finitamente representado en T, por el teorema 3.2.1, se tiene que T_0^* está finitamente representado en T^*. El operador T^* es uniformemente convexificante puesto que T lo es [6, prop. II.4]. Por el teorema anterior, se deduce que T_0^* es débil-compacto y, aplicando el teorema de Gantmacher, T_0 es un operador débil-compacto.

($\Longleftarrow$) Por [6], bastará probar que T^* es uniformemente convexificante. Si T_0 es un operador tal que $T_0 \prec T^*$, entonces, aplicando el teorema 3.2.1 y las observaciones deducidas del mismo, T_0^* está q-finitamente representado en T. Por tanto, podemos deducir que T_0^* es débil-compacto y, de nuevo, por el teorema de Gantmacher, T_0 es débil-compacto. Finalmente, el teorema anterior nos dice que T^* es uniformemente convexificante.

■

A continuación recordamos la definición de operador de tipo Rademacher. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ entre espacios de Banach es de *tipo Rademacher* si

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x_1,\ldots,x_n\in B_X} \frac{1}{n}\int_0^1 \|\sum_{i=1}^n r_i(t)Tx_i\|dt = 0$$

donde r_i denota la i-ésima función de Rademacher definida en $[0,1]$.

En [5], B. Beauzamy probó que un operador $T : X \longrightarrow Y$ no es de tipo Rademacher si y sólo si fija copias de l_1^n uniformemente. Es decir, si existe un número $\theta > 0$, tal que para cada $\epsilon > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se pueden encontrar $x_1^n, \ldots, x_n^n \in X$ verificando

$$(1-\epsilon)\sum_{p=1}^n |\alpha_p| \le \|\sum_{p=1}^n \alpha_p x_p^n\| \le \sum_{p=1}^n |\alpha_p|,$$

$$(1-\epsilon)\theta\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p| \leq \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p T x_p^n\| \leq \theta\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|$$

para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Además, B. Beauzamy refinó el resultado anterior probando que si existe un número θ tal que, para todo $\epsilon > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$, existen $x_1^n, \ldots, x_n^n$ en X tales que

$$(1-\epsilon)\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p| \leq \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p T x_p^n\| \leq \sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|,$$

$$\|x_p^n\| \leq \frac{1}{\theta}, \quad p = 1, \ldots, n$$

para cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, entonces T fija copias de l_1^n uniformemente.

Comenzamos dando una nueva caracterización de los operadores de tipo Rademacher.

Teorema 3.3.3 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Entonces T no es de tipo Rademacher si y sólo si existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre un conjunto de índices $\mathcal{I}$ tal que la ultrapotencia $(T)_{\mathcal{U}}$ fija una copia de l_1.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Tomemos cualquier ultrafiltro sobre $\mathbb{N}$ que domine el filtro de Fréchet, es decir, el filtro generado por

$$I_\alpha = \{i \in \mathbb{N} \ : \ i > \alpha\}.$$

Si T no es de tipo Rademacher, sabemos que existe un número $\theta > 0$ tal que, para cada $i \in \mathbb{N}$ se pueden encontrar $x_1^i, \ldots, x_i^i$ en X con

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{i}|\alpha_p| \leq \|\sum_{p=1}^{i}\alpha_p x_p^i\| \leq \sum_{p=1}^{i}|\alpha_p|, \tag{$*$}$$

$$\frac{1}{2}\theta\sum_{p=1}^{i}|\alpha_p| \leq \|\sum_{p=1}^{i}\alpha_p T x_p^i\| \leq \theta\sum_{p=1}^{i}|\alpha_p| \tag{$**$}$$

para cualesquiera $\alpha_1, \ldots \alpha_i \in \mathbb{K}$.

Observemos que

$$\|x_p^i\| \leq 1 \text{ para cada } p = 1, \ldots, i \text{ y cada } i \in \mathbb{N}.$$

Consideremos la sucesión $(x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ en $(X)_{\mathcal{U}}$ definida por $x_p = (x_{p,i})_{\mathcal{U}}$ donde, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$x_{p,i} = \begin{cases} x_p^i & \text{si } p \leq i \\ 0 & \text{si } p > i. \end{cases}$$

Veamos que esta sucesión es equivalente a la base unidad de l_1. Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son escalares arbitrarios, consideramos, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\alpha_{p,i} = \begin{cases} \alpha_p & \text{si } i > n \geq p \\ 0 & \text{si } i \leq n \text{ o } p > n \end{cases}.$$

Evidentemente,

$$\sum_{p=1}^{n} |\alpha_p| = \lim_{\mathcal{U}} \sum_{p=1}^{i} |\alpha_{p,i}| \quad \text{y} \quad \lim_{\mathcal{U}} \|\sum_{p=1}^{n} \alpha_p x_p^i\| = \lim_{\mathcal{U}} \|\sum_{p=1}^{i} \alpha_{p,i} x_p^i\|.$$

Luego, utilizando $(*)$

$$\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{n} |\alpha_p| = \frac{1}{2}\lim_{\mathcal{U}} \sum_{p=1}^{i} |\alpha_{p,i}| \leq \lim_{\mathcal{U}} \|\sum_{p=1}^{i} \alpha_{p,i} x_p^i\|$$

$$= \lim_{\mathcal{U}} \|\sum_{p=1}^{n} \alpha_p x_p^i\| = \|\sum_{p=1}^{n} \alpha_p x_p\|,$$

$$\|\sum_{p=1}^{n} \alpha_p x_p\| = \lim_{\mathcal{U}} \|\sum_{p=1}^{i} \alpha_{p,i} x_p^i\| \leq \lim_{\mathcal{U}} \sum_{p=1}^{i} |\alpha_{p,i}| = \sum_{p=1}^{n} |\alpha_p|.$$

De forma análoga y utilizando $(**)$ se deduce fácilmente que $((T)_{\mathcal{U}} x_p)_{p\in\mathbb{N}}$ es también equivalente a la base unidad de l_1 y, por tanto, $(T)_{\mathcal{U}}$ fija una copia de l_1.

$(\Longleftarrow)$ Probaremos primero que $(T)_{\mathcal{U}}$ fija copias de l_1^n uniformemente.

Como $(T)_{\mathcal{U}}$ fija copia de l_1, existe una sucesión $(x_n)_n$ en $(X)_{\mathcal{U}}$ tal que $(x_n)_n$ y $((T)_{\mathcal{U}} x_n)_n$ son equivalentes a la base unidad de l_1, es decir, se pueden encontrar $0 < m < M$ de manera que

$$m \sum_{p=1}^{n} |\alpha_p| \leq \|\sum_{p=1}^{n} \alpha_p x_p\| \leq M \sum_{p=1}^{n} |\alpha_p|,$$

$$m\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p| \leq \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(T)_{\mathcal{U}}x_p\| \leq M\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|$$

para cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Para probar que $(T)_{\mathcal{U}}$ fija copias de l_1^n uniformemente usaremos el refinamiento dado por B. Beauzamy [5] y comentado en la página 109.

Tomemos $\theta := \frac{m}{M}$ Dado $\epsilon > 0$, puesto que $((T)_{\mathcal{U}}x_n)_n$ es equivalente a la base unidad de l_1, siguiendo la demostración del lema 2.1 de [32], se puede encontrar una sucesión $(\widehat{u_n})_n$ de elementos en la bola unidad de $(Y)_{\mathcal{U}}$ de manera que

$$(1-\epsilon)\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p| \leq \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p\widehat{u_p}\| \leq \sum_{p=1}^{n}|\alpha_p| \qquad (***)$$

para cualesquiera escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Es más, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\widehat{u_n} = \frac{1}{\phi K}\sum_{j=q_n}^{q_{n+1}-1} a_j^n (T)_{\mathcal{U}}x_j$$

donde $\phi > 1$, $K \in [m, M]$, $(q_n)_n$ es una cierta sucesión estrictamente decreciente en $\mathbb{N}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\sum_{j=q_n}^{q_{n+1}-1}|a_j^n| = 1$.

Definamos

$$u_n := \frac{1}{\phi K}\sum_{j=q_n}^{q_{n+1}-1} a_j^n x_j.$$

Dado $n \in \mathbb{N}$ si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son escalares entonces, aplicando $(***)$,

$$(1-\epsilon)\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p| \leq \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p(T)_{\mathcal{U}}u_p\| \leq \sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|$$

y para $p = 1, \ldots, n$,

$$\|u_p\| = \frac{1}{\phi K}\|\sum_{j=q_p}^{q_{p+1}-1} a_j^p x_j\| \leq \frac{M}{\phi K}\sum_{j=q_p}^{q_{p+1}-1}|a_j^p| = \frac{M}{\phi K} < \frac{M}{m} = \frac{1}{\theta}.$$

Pasamos ya a probar que T fija copias de l_1^n uniformemente. Puesto que $(T)_{\mathcal{U}}$ fija copias uniformemente de l_1^n, existe $\theta > 0$ tal que, dado $\epsilon > 0$ y dado $n \in \mathbb{N}$, considerando $\delta > 0$ con

$$\frac{(1-\delta)^2}{1+\delta} > 1-\epsilon,$$

se pueden encontrar $x_1^n, \ldots, x_n^n \in (X)_{\mathcal{U}}$ verificando

$$(1-\delta)\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p| \leq \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p x_p^n\| \leq \sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|,$$

$$(1-\delta)\theta\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p| \leq \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p (T)_{\mathcal{U}} x_p^n\| \leq \theta\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|$$

para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

Por otro lado, $(T)_{\mathcal{U}}$ está finitamente representado en T, por tanto, dado el subespacio $M_n := \mathrm{span}\{x_1^n, \ldots, x_n^n\}$, existen dos δ-isometrías, V_n y W_n, tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M_n & \xrightarrow{(T)_{\mathcal{U}}} & (T)_{\mathcal{U}} M_n \\ V \downarrow & & \downarrow W \\ VM_n & \xrightarrow{T} & TVM_n \end{array}$$

es conmutativo.

Sea $\alpha := \max\{\|V\|, \|W\|\}$ y tomemos

$$\tilde{V} := \frac{V}{\alpha} \;\; \text{y} \;\; \tilde{W} := \frac{W}{\alpha}.$$

Puesto que $\alpha \leq 1+\delta$, se verifica

$$\|\tilde{V}\| \leq 1, \quad \|\tilde{W}\| \leq 1,$$

$$\|(\tilde{V})^{-1}\| = \alpha\|V^{-1}\| \leq \frac{1+\delta}{1-\delta} \;\; \text{y} \;\; \|(\tilde{W})^{-1}\| = \alpha\|W^{-1}\| \leq \frac{1+\delta}{1-\delta}.$$

Tomemos $\widehat{x_1^n} := \tilde{V}x_1^n, \ldots, \widehat{x_n^n} := \tilde{V}x_n^n \in X$.

Si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son escalares, se verifica

$$\|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p \widehat{x_p^n}\| = \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p \tilde{V} x_p^n\| \leq \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p x_p^n\| \leq \sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|,$$

$$\|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p \widehat{x_p^n}\| = \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p \tilde{V} x_p^n\| \geq \frac{1-\delta}{1+\delta}\|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p x_p^n\|$$

$$\geq \frac{(1-\delta)^2}{1+\delta}\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p| > (1-\epsilon)\sum_{p=1}^{n}|\alpha_p|.$$

Además,

$$\|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p T\widehat{x_p^n}\| = \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p T\tilde{V} x_p^n\| = \|\sum_{p=1}^{n}\alpha_p \tilde{W}(T)_{\mathcal{U}} x_p^n\|$$

$$\leq \| \sum_{p=1}^{n} \alpha_p (T)_{\mathcal{U}} x_p^n \| \leq \theta \sum_{p=1}^{n} |\alpha_p|,$$

$$\| \sum_{p=1}^{n} \alpha_p T \widehat{x_p^n} \| = \| \sum_{p=1}^{n} \alpha_p T \tilde{V} x_p^n \| = \| \sum_{p=1}^{n} \alpha_p \tilde{W} (T)_{\mathcal{U}} x_p^n \|$$

$$\geq \frac{1-\delta}{1+\delta} \| \sum_{p=1}^{n} \alpha_p (T)_{\mathcal{U}} x_p^n \| \geq \theta \frac{(1-\delta)^2}{1+\delta} \sum_{p=1}^{n} |\alpha_p| > \theta(1-\epsilon) \sum_{p=1}^{n} |\alpha_p|.$$

Por tanto, T fija copias de l_1^n uniformemente.

■

Nuestro próximo resultado complementa, en cierto sentido, algunos resultados de B. Beauzamy [5].

Teorema 3.3.4 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. T es de tipo Rademacher si y sólo si todo operador $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ finitamente representado en T es débil-condicionalmente-compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Supongamos que T es de tipo Rademacher y sea $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ finitamente representado en T. Por el teorema 3.1.2 existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ y dos isometrías $J : X_0 \longrightarrow (X)_{\mathcal{U}}$ y $\tilde{J} : T_0 X_0 \longrightarrow (Y)_{\mathcal{U}}$ tales que $\tilde{J} T_0 = (T)_{\mathcal{U}} J$.

Por el teorema anterior, sabemos que $(T)_{\mathcal{U}}$ no fija una copia de l_1 y, por [20, p. 237] podemos obtener un espacio de Banach Z sin copia de l_1 y operadores acotados

$$P : (X)_{\mathcal{U}} \longrightarrow Z \;\text{ y }\; H : Z \longrightarrow (Y)_{\mathcal{U}}$$

tales que $HP = (T)_{\mathcal{U}}$. Por tanto,

$$HPJ = (T)_{\mathcal{U}} J = \tilde{J} T_0,$$

luego, T_0 no fija una copia de l_1 y deducimos que T_0 es débil-condicionalmente-compacto.

($\Longleftarrow$) Si T no es de tipo Rademacher, por el lema anterior se deduce que existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ tal que $(T)_{\mathcal{U}}$ fija una copia de l_1. Por tanto, $(T)_{\mathcal{U}}$ no es débil-condicionalmente-compacto y esto no puede ocurrir porque $(T)_{\mathcal{U}}$ está finitamente representado en T.

■

Teorema 3.3.5 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. T es de tipo Rademacher si y sólo si todo operador $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ tal que T_0^* esté q-finitamente representado en T, es débil-condicionalmente-compacto.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Sea $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ tal que $T_0^* \prec_q T$. Por el teorema 3.2.1 y las observaciones deducidas del mismo, $T_0 \prec T^*$. Por [5], T^* es de tipo Rademacher, luego, utilizando el teorema anterior, T_0 es débil-condicionalmente-compacto.

($\Longleftarrow$) Sea $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ tal que $T_0 \prec T^*$. Por el teorema 3.2.1 y las observaciones deducidas del mismo, $T_0^* \prec_q T$. Por tanto, T_0 es débil-condicionalmente-compacto. Por el teorema anterior, obtenemos que T^* es de tipo Rademacher y, de nuevo, por [5], T es de tipo Rademacher.

■

Pasamos ahora a estudiar los operadores tauberianos y supertauberianos. Un operador $T : X \longrightarrow Y$ se dice que es *tauberiano* si y sólo si para todo operador compacto $K : X \longrightarrow Y$ se verifica que el núcleo de $T + K$ es reflexivo y es *supertauberiano* si y sólo si para todo operador compacto $K : X \longrightarrow Y$ se verifica que el núcleo de $T + K$ es super-reflexivo. Por otra parte, es conocido que un operador T no es supertauberiano [23] si y sólo si existe un $\epsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$ y todo entero positivo n, podemos encontrar conjuntos finitos $\{x_1, \ldots, x_n\}$

en la bola unidad de X y $\{f_1, \dots, f_n\}$ en la bola unidad de X^* tales que

$$\begin{array}{lll} f_k(x_l) > \epsilon & \text{si} & 1 \leq k \leq l \leq n \\ f_k(x_l) = 0 & \text{si} & 1 \leq l < k \leq n \end{array}$$

$$\text{y} \quad \|Tx_k\| < \delta \text{ para } k = 1, \dots, n.$$

Teorema 3.3.6 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Entonces T es supertauberiano si y sólo si todo operador $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ finitamente representado en T es tauberiano.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Tomemos un operador $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ finitamente representado en T y probemos que T_0 es supertauberiano. En particular se obtendrá que T_0 es tauberiano.

Por reducción al absurdo, supongamos que T_0 no es supertauberiano, entonces existirá un $\epsilon \in (0,1)$ tal que para cada $\delta > 0$ y cada $n \in \mathbb{N}$ se pueden encontrar $x_1^0, \dots, x_n^0$ en B_{X_0} y $f_1^0, \dots, f_n^0$ en $B_{X_0^*}$ de manera que

$$\begin{array}{lll} f_k^0(x_l^0) > \epsilon & \text{si} & 1 \leq k \leq l \leq n \\ f_k^0(x_l^0) = 0 & \text{si} & 1 \leq l < k \leq n \end{array}$$

$$\text{y } \|T_0 x_k^0\| < \delta \text{ para } k = 1, \dots, n.$$

Tomemos el subespacio $M_0 = \text{span}\{x_1^0, \dots, x_n^0\} \in \text{Dim}(X_0)$ y puesto que T_0 está finitamente representado en T, podemos encontrar un subespacio finito dimensional de X, M, y dos $1/2$-isometrías

$$V : M_0 \longrightarrow M \text{ y } W : T_0 M_0 \longrightarrow TM,$$

tales que $WT_0 = TV$.

Sea $\alpha = \max\{\|V\|, \|W\|\}$ y consideremos

$$\tilde{V} = \frac{V}{\alpha} \text{ y } \tilde{W} = \frac{W}{\alpha}.$$

Se verifica que

$$\|\tilde{V}\| \leq 1, \ \|\tilde{W}\| \leq 1, \ \|(\tilde{V})^{-1}\| = \alpha \|V^{-1}\| \leq 3 \text{ y } \tilde{W}T_0 = T\tilde{V}.$$

Por otro lado, para $k = 1, \ldots, n$ consideramos el funcional $g_k : M \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por la composición de $(\tilde{V})^{-1}$ con la restricción de f_k^0 a M_0. Se verifica que

$$\|g_k\| = \|f_k^0|_{M_0} \circ (\tilde{V})^{-1}\| \leq \|(\tilde{V})^{-1}\| \|f_k^0\| \leq 3.$$

Aplicando el teorema de Hahn-Banach, podemos extender g_k a un funcional lineal sobre X de igual norma, que llamaremos $\tilde{f}_k$.

Tomemos $\epsilon' = \frac{\epsilon}{3}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $\delta > 0$, consideramos las familias finitas

$$\{x_1 := \tilde{V}x_1^0, \ldots, x_n := \tilde{V}x_n^0\} \subset B_X$$
$$\{f_1 := \tilde{f}_1/3, \ldots, f_n := \tilde{f}_n/3\} \subset B_{X^*}.$$

Finalmente, se verifica que si $1 \leq k \leq l \leq n$,

$$\begin{aligned} f_k(x_l) = \frac{1}{3}\tilde{f}_k(x_l) = \frac{1}{3}g_k(x_l) &= \frac{1}{3}f_k^0(\tilde{V})^{-1}(\tilde{V}x_l^0) \\ &= \frac{1}{3}f_k^0(x_l^0) > \frac{\epsilon}{3} = \epsilon', \end{aligned}$$

y si $1 \leq l < k \leq n$,

$$f_k(x_l) = \frac{1}{3}f_k^0(x_l^0) = 0.$$

Por otra parte, para cada $k = 1, \ldots, n$,

$$\|Tx_k\| = \|T\tilde{V}x_k^0\| = \|\tilde{W}T_0x_k^0\| \leq \|\tilde{W}\| \|T_0x_k^0\| < \delta$$

y obtenemos que T no es supertauberiano.

($\Longleftarrow$) Si tomamos cualquier ultrafiltro $\mathcal{U}$ sobre $\mathbb{N}$, como la ultrapotencia $(T)_\mathcal{U}$ está finitamente representada en T, podemos asegurar que $(T)_\mathcal{U}$ es un operador tauberiano. Basta utilizar el teorema 9 de [23] para deducir que T es supertauberiano.

■

Usando los resultados que hemos visto sobre los operadores uniformemente convexificantes, también puede obtenerse la siguiente reformulación del teorema 18 de [23].

Corolario 3.3.3 *Un operador $T : X \longrightarrow Y$ es supertauberiano si y sólo si para todo espacio de Banach Z y todo $A \in L(Z, X)$ se verifica que si TA es uniformemente convexificante, entonces A es uniformemente convexificante.*

Para formular la correspondiente versión del teorema anterior con la q-representabilidad finita, recordamos las siguientes definiciones.
Un operador es *cotauberiano* si y sólo si su adjunto es tauberiano y es *cosupertauberiano* si y sólo si su adjunto es supertauberiano.

Corolario 3.3.4 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Entonces T es cosupertauberiano si y sólo si todo operador $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ que esté q-finitamente representado en T es cotauberiano.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Tomemos un operador T_0 que esté q-finitamente representado en T, por el teorema 3.2.1 deducimos que $T_0^* \prec T^*$. Por hipótesis T es cosupertauberiano, luego, T^* es supertauberiano. Por el teorema anterior podemos deducir que T_0^* es tauberiano o, equivalentemente, T_0 es cotauberiano.

($\Longleftarrow$) Tomemos cualquier operador T_0 que esté finitamente representado en T^*. Por el teorema 3.2.1 se tiene que $T_0^* \prec_q T^{**}$ y dado que $T^{**} \prec_q T$, por la transitividad de la q-representabilidad finita obtenemos que T_0^* está q-finitamente representado en T. Por hipótesis, T_0^* es cotauberiano y esto implica que T_0 es tauberiano [1].

Finalmente, por el teorema anterior, tenemos que T^* es supertauberiano, luego, T es cosupertauberiano.

■

También podemos obtener una reformulación del teorema 23 de [23].

Corolario 3.3.5 *Un operador $T : X \longrightarrow Y$ es cosupertauberiano si y sólo si para todo espacio de Banach Z y todo $A \in L(Y, Z)$ se verifica que si AT es uniformemente convexificante, entonces A es uniformemente convexificante.*

Por la famosa caracterización de [15], es conocido que un operador es débil-compacto si y sólo si se factoriza a través de un espacio de Banach reflexivo. Por tanto, es inmediato que un operador T es uniformemente convexificante si y sólo si todo operador T_0 que esté finitamente representado en T se factoriza a través de un espacio de Banach reflexivo.

Esto nos ha conducido a plantearnos la siguiente pregunta:
¿ Qué tipo de operadores son aquellos tales que todo operador finitamente representado en él se factoriza a través de un espacio de Hilbert?

El final de esta sección se dedica a responder esta cuestión.

Teorema 3.3.7 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Entonces T se factoriza a través de un espacio de Hilbert si y sólo si todo operador $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ finitamente representado en T factoriza a través de un espacio de Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Sea $T_0 : X_0 \longrightarrow Y_0$ un operador finitamente representado en T. Por el teorema 3.1.2, existe un ultrafiltro $\mathcal{U}$ y dos inyecciones métricas $\mathcal{J}$ y $\tilde{\mathcal{J}}$ tales que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{T_0} & T_0X_0 \\ \mathcal{J}\downarrow & & \downarrow\tilde{\mathcal{J}} \\ (X)_{\mathcal{U}} & \xrightarrow{(T)_{\mathcal{U}}} & (Y)_{\mathcal{U}} \end{array}$$

es conmutativo, es decir, $\tilde{\mathcal{J}}T_0 = (T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J}$.

Por otro lado, T se factoriza a través de un Hilbert, por tanto, existe un espacio de Hilbert H y existen dos operadores

$$R : X \longrightarrow H \text{ y } S : H \longrightarrow Y$$

tales que $T = SR$. Tomando ultrapotencias, obtenemos

$$(R)_{\mathcal{U}} : (X)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (H)_{\mathcal{U}} \text{ y } (S)_{\mathcal{U}} : (H)_{\mathcal{U}} \longrightarrow (Y)_{\mathcal{U}}$$

tales que $(T)_{\mathcal{U}} = (S)_{\mathcal{U}}(R)_{\mathcal{U}}$.
Notemos que $(H)_{\mathcal{U}}$ también es un espacio de Hilbert y, además

$$(S)_{\mathcal{U}}(R)_{\mathcal{U}}\mathcal{J} = (T)_{\mathcal{U}}\mathcal{J} = \tilde{\mathcal{J}}T_0,$$

es decir, $\mathrm{Img}((S)_{\mathcal{U}}(R)_{\mathcal{U}}\mathcal{J}) \subset \mathrm{Img}\tilde{\mathcal{J}}$.
El operador $\tilde{\mathcal{J}}$ es una biyección sobre su imagen. Por tanto,

$$(\tilde{\mathcal{J}}|_{\mathrm{Img}\tilde{\mathcal{J}}})^{-1}(S)_{\mathcal{U}}(R)_{\mathcal{U}}\mathcal{J} = T_0$$

y deducimos que T_0 factoriza a través del Hilbert $(H)_{\mathcal{U}}$.

($\Longleftarrow$) Obvio pues T está finitamente representado en T.

■

La versión dual del teorema anterior es la siguiente.

Corolario 3.3.6 *Sea $T : X \longrightarrow Y$ un operador entre espacios de Banach. Entonces T se factoriza a través de un Hilbert si y sólo si todo operador T_0 que esté q-finitamente representado en T se factoriza a través de un Hilbert.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Longrightarrow$) Tomando adjunto y puesto que el dual de un espacio de Hilbert es un espacio de Hilbert, sabemos que T^* también se factoriza a través de un Hilbert.

Si T_0 está q-finitamente representado en T, por el teorema 3.2.1, se tiene que $T_0^* \prec T^*$. Por el teorema anterior, T_0^* factoriza a través de un Hilbert y, por tanto, T_0^{**} se factoriza a través de un Hilbert. Teniendo en cuenta que $T_0 \prec T_0^{**}$, de nuevo por el teorema anterior, deducimos que T_0 se factoriza a través de un Hilbert.

($\Longleftarrow$) Obvio puesto que T está q-finitamente representado en T.

∎

Referencias

[1] T. Alvarez, M. González, *Some examples of tauberian operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **111**(1991), 1023–1027.

[2] S. Banach, *Theory of Linear Operations,* North-Holland Mathematical Library, vol. 38, North-Holland, Amsterdam (1991), ISBN: 0-444-70184-2.

[3] T. Barton, X.-T. Yu, *A generalized principle of local reflexivity,* Questiones Mathematicae, **19** (1996) 353–355.

[4] M. Basallote, M. D. Contreras, S. Díaz, *Uniformly convexifying operators in classical Banach spaces,* preprint.

[5] B. Beauzamy, *Opérateurs de type Rademacher entre espaces de Banach,* Seminaire Maurey-Schwartz 1975–1976, Exposés núm. VI-VII, École Polytechnique, Paris.

[6] B. Beauzamy, *Opérateurs uniformément convexifiants,* Studia Math., **LVII** (1976) 103–139.

[7] B. Beauzamy, *Quelques propriétés des opérateurs uniformément convexifiants,* Studia Math., **LX** (1977), 211–222.

[8] B. Beauzamy, *Introduction to Banach Spaces and their geometry,* segunda edición, North-Holland, Amsterdam (1985), ISBN: 0-444-87878-5.

[9] E. Behrends, *On the principle of local reflexivity,* Studia Math., **100** (1991), 109–128.

[10] S. F. Bellenot, *Uniformly complemented l_p^n's in quasi-reflexive Banach spaces,* Israel J. Math., **39** (1981) 234–246.

[11] S. F. Bellenot, *Local reflexivity of normed spaces, operators, and Fréchet spaces,* J. Func. Anal., **59** (1984), 1–11.

[12] F. F. Bonsall, J. Duncan, *Complete normed Algebras,* Springer-Verlag, Berlin (1973), ISBN: 3-540-06386-2.

[13] J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle, J. L. Krivine, *Lois stables et espaces* L^p, Ann. Inst. Henri Poincaré, Sér. B. **2** (1966), 231–259.

[14] D. Dacunha–Castelle, J. L. Krivine, *Applications des ultraproduits a l'étude des espaces et des algèbres de Banach,* Studia Math., **41** (1972), 315–334.

[15] W. J. Davis, T. Figiel, W. B. Johnson, A. Pelczynski, *Factoring weakly compact operators,* J. of Funct. Anal., **17** (1974), 311–327.

[16] D. W. Dean, *The equation* $L(E, X^{**}) = L(E, X)^{**}$ *and the principle of local reflexivity,* Proc. Amer. Math. Soc., **40** (1973), 146–148.

[17] A. Defant, K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals,* North-Holland, Amsterdam (1993), ISBN: 0-444-89091-2.

[18] C. L. DeVito, *Functional Analysis,* Academic Press, New York (1978), ISBN: 0-12-213250-5.

[19] S. Díaz, M. Basallote, *Finite representability by quotients,* Arch. Math., **69** (1997), 319–326.

[20] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces,* Springer–Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1984), ISBN: 0-387-90859-5.

[21] J. Diestel, H. Jarchow, A. Tonge, *Absolutely summing operators,* Cambridge University Press, Cambridge (1995), ISBN: 0-521-43168-9.

[22] A. Dvoreztky, *A theorem on convex bodies and applications to Banach spaces,* Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **45** (1959), 223–226.

[23] M. González, A. Martínez-Abejón, *Supertauberian operators and perturbations,* Arch. Math., **64** (1995), 423–433.

[24] M. González, V. M. Onieva, *Characterizations of tauberian operators and other semigroups of operators,* Proc. Amer. Math. Soc., **108** (1990), 399–405.

[25] S. Guerre-Delabrière, *Classical sequences in Banach spaces,* Pure and Applied Mathematics, A series of Monographs and Textbooks, **166**, Ed. Dekker, New York (1992), ISBN: 0-8247-8723-4.

[26] P. Harmand, D. Werner, W. Werner, *M-ideals in Banach spaces and Banach algebras,* Springer-Verlag, Berlin (1993), ISBN: 3-540-56814-X.

[27] C. W. Henson, L. C. Moore, Jr., *The nonstandard theory of topological vector spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **172** (1972), 405–435.

[28] C. W. Henson, L. C. Moore, Jr., *Subspaces of the nonstandard hull of a normed space,* Trans. Amer. Math. Soc., **197** (1974), 131–143.

[29] S. Heinrich, *Ultraproducts in Banach Space Theory,* J. Reine Angew. Math., **313** (1980), 72–104.

[30] S. Heinrich, *Finite representability and super–ideals of operators,* Dissertationes Mathematicae, Warszawa (1980), ISBN: 83-01-01108-4.

[31] G. J. O. Jameson, *Topology and Normed Spaces,* Chapman and Hall, London (1974) ISBN: 412-12880-2.

[32] R. C. James, *Uniformly Non-square Banach spaces,* Ann. Math., **80** (1964), 542–550.

[33] R. C. James, *Some self–dual properties of normed linear spaces,* Symp. on Infinite Dimensional Topology, Ann. Math. Studies, **69** (1972), 159–175.

[34] R. C. James, *Super-reflexive Banach spaces,* Canad. J. Math., **24** (1972), 896–904.

[35] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal, M. Zippin, *On bases, finite dimensional descompositions and weaker structures in Banach Spaces,* Israel J. Math., **9** (1971), 488–506.

[36] N. Kalton, A. Wilansky, *Tauberian operators on Banach spaces,* Proc. Amer. Math. Soc., **57** (1976), 251–255.

[37] V. M. Kadets, M. I. Kadets, *Rearrangements of Series in Banach Spaces,* Translations of Mathematical Monographs, vol. 86, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island (1991), ISBN: 0-8218-4546-2.

[38] J. L. Krivine, *Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés,* Ann. Math., **104** (1976), 1–29.

[39] K. D. Kürsten, *On some questions of A. Pietsch II,* Teor. Funkcii. Funkcional. Anal. i Prilozenia (Kharkov), **29** (1978), 61–73.

[40] J. Lindenstrauss, *On nonseparable reflexive Banach spaces,* Bull. Amer. Math. Soc., **72** (1966), 967–970.

[41] J. Lindenstrauss, H. P. Rosenthal, *The $\mathcal{L}_p$-spaces*, Israel J. Math. , **7** (1969), 325–349.

[42] B. Maurey, G. Pisier, *Caractérisation d'une classe d'espaces de Banach par des propriétés de séries aléatoires vectorielles,* C. R. Acad. Sci. Paris, **277**(1973), 687–690.

[43] B. Maurey, G. Pisier, *Séries de variables aléatories vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach,* Studia Math., **LVIII** (1976), 45–90.

[44] G. J. Murphy, *C^*-algebras and operator theory,* Academic Press, Boston (1990), ISBN:0-12-511360-9.

[45] R. Neidinger, H. P. Rosenthal, *Norm-attainment of linear functionals on subspaces and characterizations of tauberian operators,* Pacific J. Math., **118** (1985), 215–228.

[46] A. Pełczyński, *Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators,* CBMS AMS, **30** (1977).

[47] H. Pfitzner, *Weak compactness in the dual of a C^*-algebra is determined conmutatively,* Math. Ann. **289** (1994), 349–371.

[48] A. Pietsch, *Operator ideals,* North-Holland Mathematical Library, vol. 20, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1980), ISBN: 0-444-85293-X.

[49] G. Pisier, *Sur les espaces de Banach qui ne contiennent pas de l_1^n uniformément,* Comptes Rendus Acad. Sci. Paris, **277** (1973), 991–994.

[50] H. P. Rosenthal, *The Banach spaces $C(K)$ and $L^p(\mu)$,* Bull. Amer. Math. Soc., **81** (1975), 763–781.

[51] H. P. Rosenthal, *On a theorem of J. L. Krivine concerning local finite representability of l_p in general Banach spaces,* J. Funct. Anal., **28** (1978), 197–225.

[52] B. Sims, *Ultra-techiques in Banach space theory,* Queen's Papers In Pure and Applied Mathematics, número 60, Queen's University Kingston, Ontario, Canadá (1982).

[53] C. Stegall, *A proof of the principle of local reflexivity,* Proc. Amer. Math. Soc., **78** (1980), 154–156.

[54] J. Stern, *Some applications of model theory in Banach Space Theory,* Ann. Math. Logic, **9** (1976), 49–122.

[55] J. Stern, *Ultrapowers and local properties of Banach Spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **240** (1978), 231–252.

[56] E. V. Tokarev, *Spectrum of infinite-dimensional Banach spaces,* Functional Anal. Appl., **23** (1989), 76–78.

[57] N. Tomczak-Jaegerman, *Banach-Mazur distances and finite-dimensional operator ideals,* Longman Scientific and technical, England (1989), ISBN: 0-582-01374-7.

[58] A. Wilansky, *Modern methods in topological vector spaces,* McGraw-Hill, New York (1978), ISBN:0-07-070180-6.

[59] A. Wilansky, *An extension of Helly' s theorem for Banach spaces,* Portugaliae Mathematica, **38**, Fasc. 1-2 (1979), 139–140.

[60] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for analysis,* Cambridge University Press, Cambridge (1991), ISBN: 0-521-35618-0.

[61] K. Zhu, *Operator theory in function spaces,* Dekker, Pure and Applied Mathematics, New York (1990), ISBN: 0-8247-8411-1.

Manuela Basallote Galván

Representabilidad finita por coicientes y operadores

Apto Cum Laude por

unanimidad 25 Marzo 98

El Doctorado,

M. Basallote