UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA II

OPERADORES DE COMPOSICIÓN PONDERADOS EN ESPACIOS DE FUNCIONES ANALÍTICAS

TESIS DOCTORAL

Presentada por:
Alfredo García Hernández-Díaz
Dirigida por:
D. Manuel D. Contreras Márquez

Sevilla, Abril de 2002

Memoria presentada por Alfredo García Hernández-Díaz para optar al grado de Doctor en Matemáticas. Esta tesis ha sido dirigida por el profesor Doctor D. Manuel D. Contreras Márquez.

Sevilla, Abril de 2002.

Alfredo García

Fdo.: Alfredo García Hernández-Díaz

Visto bueno del director

Fdo.: Manuel D. Contreras Márquez

A mis padres,
por haberme dado la educación
y los estudios que poseo
así como el cariño de toda una vida.

En especial a Reyes,
porque sólo ella sabe lo que
nos ha costado llegar hasta aquí.
Sin su amor y su apoyo nada de lo
que he conseguido habría sido posible.

Índice

Introducción

Operadores de composición

Como es usual, denotaremos por $\mathbb{C}$ al plano complejo, $\mathbb{D}$ al disco unidad abierto y por $\mathbb{T}$ a su frontera. $H(\mathbb{D})$ será el espacio de las funciones complejas y analíticas en $\mathbb{D}$. Llamaremos *espacio (de Banach) de funciones analíticas (sobre* $\mathbb{D}$) a todo espacio de Banach que sea un subespacio vectorial de $H(\mathbb{D})$ verificando que la bola unidad del espacio es un conjunto relativamente compacto en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos y que contiene a los polinomios. Entre los espacios de Banach de funciones analíticas destacamos por su interés en nuestro trabajo a los espacios de Hardy H_p, el espacio de Bloch, el álgebra del disco A, los espacios de funciones con derivada en un espacio de Hardy H_p, que notaremos por S_p, y los espacios H_v^∞ y H_v^0 (véase el Capítulo 1 para la definición de todos estos espacios).

Antes de adentrarnos en los operadores de composición ponderados, permítanos el lector hacer una breve introducción a los operadores de composición. Recordemos que dado un espacio de funciones X sobre un conjunto D y una aplicación $\varphi : D \longrightarrow D$, un *operador de composición (con símbolo* φ*)* es la aplicación que a cada función f del espacio X le asigna la función $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$. Nosotros estudiaremos dos situaciones concretas: D el disco unidad o un semiplano.

El estudio de estos operadores en espacios de funciones analíticas es relativamente reciente ya que debemos remontarnos no más allá de finales de los años 60 para encontrar los primeros trabajos donde de manera explícita se habla de operadores de composición. Concretamente, E. A. Nordgren publica en el año 1968 el trabajo titulado *Composition operators* [64]. No obstante, estos operadores aparecen implícitamente en otros trabajos anteriores como, por ejemplo, en el artículo de J. E. Littlewood de 1925 donde se prueba el conocido posteriormente como Principio de Subordinación de Littlewood [48]. Recordemos que como consecuencia inmediata de este resultado se tiene que los operadores de composición son continuos en los espacios de Hardy y de Bergman.

El estudio de los operadores de composición relaciona la teoría de los operadores lineales con resultados clásicos sobre la teoría de una (o varias) variable(s) compleja(s), permitiendo el flujo de resultados de una teoría hacia la otra y surgiendo de esta forma un nuevo campo de trabajo que es de interés tanto para investigadores en análisis funcional y teoría de operadores como para los de la teoría de funciones de variable compleja. Así, por ejemplo, resultados clásicos de la teoría de variable compleja como el Teorema de Julia-Carathéodory permite obtener información sobre la compacidad de un operador de composición a partir de las propiedades geométricas de una cierta aplicación de Riemann. Esta interrelación queda magníficamente expuesta a lo largo del libro *Composition Operators and Classical Function Theory* de J. H. Shapiro [83].

En el trabajo anteriormente mencionado de E. A. Nordgren se estudia la continuidad y el espectro de los operadores de composición entre el espacio de funciones de cuadrado integrable L_2 y el espacio de Hardy H_2. Se inicia aquí una larga lista de trabajos donde dado un operador de composición entre dos espacios de funciones analíticas se estudia su continuidad, pertenencia a ciertos ideales de operadores (por ejemplo, el de los operadores compactos, débil compactos, completamente continuos o absolutamente sumantes), cuándo son cíclicos, hipercíclicos, cuándo su rango es cerrado, su invertibilidad, su espectro, norma esencial y un largo etcétera. Con mayor o menor intensidad todos estos problemas han sido tratados entre una amplia gama de espacios de funciones analíticas: espacios de Hardy, de Bergman, de Dirichlet, de Besov, de Bloch, BMOA, ... Para mostrar el interés y auge de esta nueva línea de trabajo, merece la pena mencionar que en el Mathematics Subject Classification Index del año 1990 aparece por primera vez una entrada explícita para los operadores de composición (47B33).

Por todo lo expuesto anteriormente, presentar aquí una lista de los autores más relevantes en el estudio de los operadores de composición es, sin duda, prácticamente imposible sin dejarnos atrás a algunos de gran influencia. Dos buenas referencias para ver los principales resultados, autores y el estado actual del estudio de los operadores de composición son los libros de J. H. Shapiro [83] y de C. C. Cowen y B. D. MacCluer [20].

Paralelamente al desarrollo de la teoría de los operadores de composición se han estudiado los operadores de multiplicación. Concretamente, dada $\psi : D \to \mathbb{C}$ y un espacio de Banach de funciones X sobre el conjunto D, se llama *operador de multiplicación (con símbolo ψ)* a la aplicación M_ψ que a cada función $f \in X$ le asocia la función $M_\psi(f) = \psi f$. El número de trabajos sobre estos operadores en espacios de funciones analíticas es sensiblemente inferior al de los operadores de composición. Algunos artículos sobre este tema son el de S. Axler [4], D. Vukotić [89] y K. Zhu [92]. El lector interesado en este tópico puede consultar estos tres trabajos así como las referencias que aparecen en ellos.

Operadores de composición ponderados: ¿por qué estudiarlos?

A medida que se iba desarrollando la teoría sobre los operadores de composición y de multiplicación, aparecen en la literatura diversos trabajos con otro tipo de operadores más generales: los *operadores de composición ponderados.* Recordemos que dados un espacio de funciones X sobre un conjunto D y dos aplicaciones $\varphi, \psi : D \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $\varphi(D) \subseteq D$, un *operador de composición ponderado (con símbolos φ y ψ)* es la aplicación que a cada función f del espacio X le asigna la función $W_{\varphi,\psi}(f) = \psi \cdot f \circ \varphi$. Para nuestros propósitos, durante toda la memoria el espacio X será un espacio de Banach de funciones analíticas y D el disco unidad abierto en el plano complejo $\mathbb{C}$. Aunque este nuevo tipo de operadores es una extensión bastante natural de los operadores de composición y de los de multiplicación, hasta el último lustro no se ha comenzado un estudio detallado de este tipo de operadores. En la siguiente sección de esta introducción mostraremos el estado actual del estudio de estos operadores. Antes de ello, presentamos cuatro contextos diferentes donde los operadores de composición ponderados han aparecido como una herramienta importante y que, de hecho, motivaron nuestro estudio.

1. Isometrías.

En 1960, K. deLeeuw probó que las isometrías de H_1 son operadores de composición ponderados. Concretamente, si T es una isometría sobreyectiva de H_1 en sí mismo, entonces existen una transformación de Möbius φ que lleva el disco unidad sobre sí mismo y una constante λ de módulo uno tales que

$$T = W_{\varphi,\lambda\varphi'} : H_1 \to H_1.$$

Este resultado aparece recogido en el texto de K. Hoffman [35, pág. 148]. La prueba que aparece en dicho libro hace uso de la descripción de las isometrías de H_∞ y del álgebra del disco. Éstas son esencialmente operadores de composición (de hecho, son operadores de composición ponderados donde φ es una transformación de Möbius que lleva el disco unidad sobre sí mismo multiplicados por una constante de módulo 1 [35, pág. 142-148]).

Posteriormente, F. Forelli probó que la caracterización de las isometrías en H_1 sigue siendo válida en los espacios de Hardy H_p para $1 < p < \infty$, $p \neq 2$ [30]. En este caso, si T es una isometría sobreyectiva de H_p en H_p, entonces existen una transformación de Möbius φ que lleva el disco unidad sobre sí mismo y una constante λ de módulo uno tales que

$$T = W_{\varphi,\lambda(\varphi')^{1/p}} : H_p \longrightarrow H_p.$$

En la década de los 80, este resultado fue extendido a otros espacios de funciones analíticas. Por ejemplo, a los espacios de Bergman ponderados A^p_α con $0 < p < \infty$, $p \neq 2$ y $\alpha > -1$. En dichos espacios, C. J. Kolaski (véanse, por ejemplo, [45] y [46]) prueba que si T es una isometría sobreyectiva de A^p_α en sí mismo, entonces existen una transformación de Möbius φ que lleva el disco unidad sobre sí mismo y una constante λ de módulo uno tales que

$$T = W_{\varphi,\lambda(\varphi')^{(2+\alpha)/p}} : A^p_\alpha \longrightarrow A^p_\alpha.$$

Algunos avances recientes en esta línea pueden verse en el trabajo de W. E. Hornor y J. E. Jamison [36].

2. Estudio de operadores clásicos.

Desde mediados de los años 80 han aparecido bastantes trabajos sobre semigrupos de operadores de composición y semigrupos de operadores de composición ponderados en espacios de funciones analíticas. En [87] puede verse el estado actual del estudio de estos semigrupos. La motivación de estos trabajos se encuentra en sus aplicaciones a los operadores clásicos entre espacios de funciones analíticas. Citamos a continuación una de estas aplicaciones. Consideremos una función analítica en el disco unidad $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. No es difícil probar que la función

$$C(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k \right) z^n$$

sigue siendo analítica en dicho disco. El operador C así definido se conoce como *operador de Cesàro.* El propio G. H. Hardy probó que si $1 < p < \infty$ y $f \in H_p$, entonces $C(f)$ también pertenece a H_p. Por tanto, tenemos un operador lineal y continuo en H_p, quedando como problema abierto el cálculo de su norma. En 1987, A. G. Siskakis [86] obtuvo que para $2 \leq p < \infty$, se verifica que $\|C\|_{H_p \to H_p} = p$ y que su espectro viene dado por $\left\{z : \left|z - \frac{p}{2}\right| \leq \frac{p}{2}\right\}$. Su prueba está basada en el hecho de que el operador $C : H_p \to H_p$ es la resolvente del generador infinitesimal del semigrupo de operadores $W_{\varphi_t,\psi_t} : H_p \to H_p$ donde

$$\varphi_t(z) = \frac{e^{-t}z}{(e^{-t}-1)\,z+1} \qquad \text{y} \qquad \psi_t(z) = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}-1)\,z+1},$$

lo que le permitió obtener propiedades del operador de Cesàro a partir de propiedades de los operadores W_{φ_t,ψ_t}. También obtuvo A. G. Siskakis que si $1 \leq p < 2$, se verifica que $p \leq \|C\|_{H_p \to H_p} \leq 2$. Esta misma relación entre el semigrupo de operadores de composición ponderados W_{φ_t,ψ_t} y el operador de Cesàro fue usada por C. C. Cowen en 1984 para probar que C es subnormal sobre el espacio H_2 [19].

Posteriormente, en un trabajo de reciente aparición [21], E. Diamantopoulos y A. G. Siskakis obtuvieron una cota de la norma de otro operador clásico: el operador de Hilbert. De nuevo usan resultados sobre operadores de composición ponderados. Recordemos que si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es una función analítica en el disco unidad, entonces la función

$$H(f)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{n+k+1} \right) z^n$$

también lo es. Notemos que la sucesión de los coeficientes de la serie de potencias de $H(f)$ se obtienen multiplicando la matriz de Hilbert por la sucesión $\{a_n\}$. Puesto que el operador H es un operador de Hankel, no es difícil ver que está acotado en H_p para $1 < p < \infty$. De nuevo surge como problema el cálculo de su norma. Después de algunas operaciones elementales se puede obtener que

$$H(f)(z) = \int_0^1 W_{\varphi_t,\psi_t}(f)(z)\,dt$$

donde

$$\varphi_t(z) = \frac{t}{(t-1)\,z+1} \qquad \text{y} \qquad \psi_t(z) = \frac{1}{(t-1)\,z+1}.$$

Puesto que la función ψ_t está acotada, es obvio que W_{φ_t,ψ_t} es un operador continuo en H_p. La aportación del trabajo de E. Diamantopoulos y A. G. Siskakis [21] está en el cálculo de su norma. Esto les permitió probar que si $2 \leq p < \infty$ se verifica que $\|H\|_{H_p \to H_p} \leq \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/p)}$ estando aún abierto el problema del cálculo exacto de dicha norma (recordemos que $\|H\|_{l_p \to l_p} = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi/p)}$ para $1 < p < \infty$).

3. Operadores de composición en el semiplano.

No vamos a entrar ahora en una descripción de los espacios de Hardy en el semiplano, pero sí en la relación con nuestro trabajo. Necesitamos introducir alguna notación previa. Denotaremos por $\Pi = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ y por $H_p(\Pi)$ el espacio de Hardy del semiplano donde $1 \leq p < \infty$ (para la definición y primeras propiedades de estos espacios véase la Sección 2.6).

El estudio de los operadores de composición en el semiplano fue iniciado por R. K. Singh en 1974 [85] estableciendo que un operador de composición en el espacio de Hardy $H_2(\Pi)$ es continuo si, y sólo si, un cierto operador de composición ponderado es continuo en el espacio de Hardy H_2 (más abajo damos una descripción de este operador de composición ponderado). El problema de la compacidad de los operadores de composición sobre $H_2(\Pi)$ fue discutido por R. Kumar, S. D. Sharma y R. K. Singh en [78], [79], [80] y [81]. En estos trabajos aparecen tanto condiciones suficientes como necesarias para que un operador de composición sea compacto en $H_2(\Pi)$. Sin embargo, no dan ejemplos de tales operadores. Ya en el año 2000, V. Matache [52] publicó un estudio sobre los operadores de composición en los espacios de Hardy en el semiplano, $H_p(\Pi)$, donde muestra que no existen operadores de composición compactos en $H_p(\Pi)$.

En todos estos resultados fue fundamental la relación entre los operadores de composición en el semiplano y los operadores de composición ponderados. Para mostrar dicha relación necesitamos introducir alguna notación previa. Consideremos $\gamma(z) = i\frac{1+z}{1-z}$. γ es una aplicación conforme de $\mathbb{D}$ sobre Π cuya inversa viene dada por $\gamma^{-1}(w) = \frac{w-i}{w+i}$. De esta forma, si $\phi : \Pi \longrightarrow \Pi$ es una función analítica, entonces la aplicación $\varphi = \gamma^{-1} \circ \phi \circ \gamma$ es analítica y transforma $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$. Notemos $\psi(z) = \frac{(1-\varphi(z))^{1/p}}{(1-z)^{1/p}}$. Es claro que ψ también es analítica en $\mathbb{D}$. Pues bien, el operador de composición C_ϕ es continuo (resp. compacto, débil compacto, completamente continuo) en $H_p(\Pi)$ si, y sólo si, $W_{\varphi,\psi}$ es continuo (resp. compacto, débil compacto, completamente continuo) en H_p. El propio V. Matache plantea el estudio de la continuidad de tales operadores.

Merece la pena destacar que, a diferencia de lo que sucede en los ejemplos de motivación anteriores, la función ψ no está necesariamente en H_∞ y, por tanto, no es automática la continuidad del operador $W_{\varphi,\psi}$.

4. Estudio de las componentes conexas del conjunto de los operadores de composición.

Diversos autores han estudiado la estructura del conjunto de los operadores de composición en un espacio de Banach de funciones analíticas X (con la topología uniforme de operadores). En dicho estudio ha aparecido recientemente como una herramienta de interés los operadores de composición ponderados. En lo que sigue, dado un espacio de funciones analíticas X sobre un conjunto D, denotaremos por $C(X)$ al conjunto de todos los operadores de composición dotado con la topología de la convergencia uniforme en la bola unidad de X.

En 1980, E. Berkson y H. Porta [6] probaron que el operador identidad en H_p está aislado en $C(H_p)$ para $1 \leq p < \infty$. Este resultado fue extendido por el primero de los autores en [5] probando que si φ tiene límite radial de módulo uno sobre un conjunto de medida positiva en $\mathbb{T}$ entonces C_φ está aislado en $C(H_p)$.

Posteriormente, B. D. MacCluer [55] y J. H. Shapiro y C. Sundberg [84] obtienen diferentes condiciones bajo las que dos operadores de composición están en la misma componente conexa. En [84, pág. 149], se conjetura que dos operadores de composición C_φ y C_ψ están en la misma componente de $C(H_2)$ si, y sólo si, su diferencia es un operador compacto. Recientemente, J. Moorhouse y C. Toews [63] han probado que la conjetura anterior no es cierta. Una de las herramientas utilizadas para encontrar el contraejemplo es una condición suficiente para que dos operadores de composición estén en la misma componente de $C(H_2)$ en términos de que una cierta familia de operadores de composición ponderados con dominio un espacio de Bergman e imagen en el espacio de Hardy H_2 esté uniformemente acotada.

Merece la pena comentar que cuando $X = H_\infty$ problemas similares a los comentados anteriormente han sido estudiados por B. D. MacCluer, S. Ohno y R. Zhao [56] y T. Hosokawa, K. Izuchi y D. Zheng [37] para el espacio $C(H_\infty)$.

Resumiendo esta sección de la introducción, los operadores de composición ponderados han aparecido en diferentes contextos en la literatura. A pesar de ello no se ha realizado un estudio sistemático de su continuidad y compacidad como anteriormente se había realizado con los operadores de composición.

Operadores de composición ponderados: estado actual

Salvo en el caso del álgebra del disco, el estudio de los operadores de composición ponderados es bastante reciente. Dedicamos esta sección de la introducción a mostrar los resultados conocidos hasta la fecha sobre estos operadores. Aunque en la próxima sección haremos un resumen de la memoria, creemos que es oportuno situar en este contexto nuestras aportaciones.

Hemos agrupado los resultados atendiendo al espacio donde están definidos. Aunque no vamos a entrar en ello, en la literatura también pueden encontrarse diversos trabajos donde se estudian los operadores de composición ponderados en espacios de funciones continuas e integrables o en espacios de funciones analíticas que no son espacios de Banach.

Álgebra del disco: Los primeros trabajos sobre los operadores de composición ponderados en el álgebra del disco $W_{\varphi,\psi} : A \to A$ se deben a H. Kamowitz. En 1978 estudia el espectro de estos operadores cuando φ es una transformación de Möbius [42] y en 1979 caracteriza la compacidad de $W_{\varphi,\psi} : A \to A$ y obtiene su espectro cuando es compacto [43]. Este último resultado fue extendido por A. I. Shakhbazov y Y. N. Dehghan al álgebra del disco en varias variables [76], [77].

Ya en el año 2001, S. Ohno y H. Takagi [68] prueban que para el operador $W_{\varphi,\psi} : A \to A$ la compacidad, la compacidad débil y la continuidad completa son siempre equivalentes. Además, caracterizan cuándo su rango es cerrado y cuándo es un operador de Fredholm.

Espacios de Hardy: La descripción de las isometrías en el espacio H_2 es bastante más compleja que en los restantes espacios de Hardy. En el año 1985, V. Pták [70] introdujo los operadores de composición ponderados en H_2 en relación con el estudio de las isometrías de este espacio de Hilbert. Concretamente, consideró el operador $W_{\varphi,\psi}$ tales que $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ y $\psi(z) = \frac{1}{cz+d}$, obteniendo condiciones para que este operador sea una isometría en H_2. Motivado por el trabajo de V. Pták, M. Engliš [26] publicó en el año 1990 un estudio más detallado de los anteriores operadores de composición ponderados. Estudió, entre otras propiedades, su continuidad, compacidad y espectro.

En 1992, K. R. M. Attele estudia la continuidad del operador $W_{\varphi,\psi} : H_2 \to H_2$ para ciertas funciones φ. Entre sus resultados destacamos que φ es un producto de Blaschke finito si, y sólo si, la continuidad del operador implica que ψ está acotada [3]. En la Sección 2.2 comentaremos con más detalle este trabajo de K. R. M. Attele.

En 1988, H. Takagi caracteriza la compacidad de los operadores de composición ponderados en el espacio de Hardy H_∞ [88]. Recientemente, M. D. Contreras y S. Díaz Madrigal obtuvieron otra caracterización de la compacidad mostrando además que ésta equivale a la compacidad débil y a la continuidad completa de $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_\infty$ [15]. Ya en el año 2001, S. Ohno y H. Takagi [68] estudian tambien cuándo el operador $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_\infty$ tiene rango cerrado y es de Fredholm.

La acotación y compacidad de los operadores de composición ponderados definidos en H_∞ y con llegada en el espacio de Bloch o en el espacio pequeño de Bloch ha sido recientemente caracterizada por S. Ohno [65].

También recientemente, S. Ohno y K. Stroethoff [66] han estudiado los operadores de composición ponderados de H_2 y del espacio de Bergman A^2_α en el espacio de Bloch. Concretamente caracterizan la continuidad y compacidad de dicho operador.

Por otro lado, motivados por las aplicaciones de los semigrupos de operadores de composición ponderados al estudio de ciertos operadores clásicos en los espacios de Hardy, diversos autores (entre los que destacamos a F. Jafari, W. König, A. G. Siskakis, T. Tonev y K. Yale) han realizado un estudio sobre semigrupos de operadores de composición ponderados en espacios de Hardy. Entre otros resultados obtienen el generador infinitesimal de tales semigrupos y su espectro. Merece la pena destacar que ante la ausencia de caracterizaciones de la continuidad de estos operadores, los resultados que obtienen están condicionados por la hipótesis de que las funciones que multiplican deben pertenecer al espacio H_∞. El estado en que se encuentra esta línea de trabajo puede consultarse en [87].

Como puede observarse en los resultados antes mencionados no aparecen en la literatura caracterizaciones de la continuidad, compacidad, compacidad débil y continuidad completa en los espacios de Hardy. Dedicamos a ello el Capítulo 2 de la memoria. La mayoría de los resultados de este capítulo aparecen en los trabajos [17] y [18].

Espacios de Bergman y de Dirichlet: En 1997, G. Mirzakarimi y K. Seddighi [60] estudian los operadores de composición ponderados en los espacios ponderados de Bergman y de Dirichlet. En los espacios ponderados de Bergman obtienen una caracterización de la continuidad y de la compacidad en términos de que una cierta medida sea de Carleson o de Carleson compacta (véase el Capítulo 2 para las definiciones). En los espacios ponderados de Dirichlet obtienen condiciones suficientes para la continuidad y la compacidad también en términos de medidas de Carleson.

Recientemente, J. Moorhouse y C. Toews [63] caracterizan la continuidad y compacidad de $W_{\varphi,\psi}$ entre dos espacios de Bergman ponderados diferentes y desde un espacio de Bergman ponderados en el espacio de Hardy H_2 en términos de que una cierta medida sea de Carleson o de Carleson compacta (por completar ideas, merece la pena comentar que aunque sus argumentos son válidos en cualquier espacio de Bergman ponderado, sólo enuncian sus resultados para el caso en que éstos son espacios de Hilbert). Precisamente estas caracterizaciones son algunas de las herramientas que les permiten obtener los resultados sobre las componentes conexas de $C(H_2)$ comentadas en la sección anterior.

Espacios de tipo Bloch: En el año 2001, S. Ohno y R. Zhao caracterizan la continuidad y compacidad de $W_{\varphi,\psi}$ en los espacios de Bloch y pequeño de Bloch [69]. Posteriormente, S. Ohno, K. Stroethoff y R. Zhao extienden estos resultados a los espacios de tipo Bloch [67]. Por otro lado, B. D. MacCluer y R. Zhao [57] estiman, y calculan en algunos casos, la norma esencial de los operadores de composición ponderados en espacios de tipo Bloch.

Recientemente, S. Ohno [65] ha probado que la acotación del operador $W_{\varphi,\psi}$ desde el espacio de Bloch en H_∞ equivale a su compacidad y a su vez ésta equivale a la compacidad del operador $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_\infty$.

Espacios de funciones con derivada en un espacio de Hardy: En 1996, S. C. Arora, M. Mukherjee y A. Panigrahi publicaron un trabajo donde se dan dos condiciones suficientes en términos de medidas de Carleson para la continuidad y compacidad de los operadores de composición ponderados en los espacios S_p [2]. En el Capítulo 3 de esta memoria damos condiciones que son tanto necesarias como suficientes para la continuidad y compacidad de los operadores de composición ponderados en estos espacios.

Espacios de funciones con crecimiento controlado en la frontera del disco, H_v^∞ y H_v^0: En el año 2000, A. Montes Rodríguez [62] obtiene la norma esencial de los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_w^0$ y $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_w^\infty$ cuando los pesos son típicos, obteniendo de esta forma una caracterización de la compacidad. En el Capítulo 4 de esta memoria estudiamos los operadores de composición ponderados en esta familia de espacios. Obtenemos de forma independiente a la de A. Montes Rodríguez caracterizaciones de la compacidad. Además mostramos que en estos espacios la compacidad, compacidad débil y continuidad completa siempre son equivalentes y a su vez todas ellas equivalen a que el operador no sea un isomorfismo sobre un subespacio isomorfo a c_0. Estos resultados también aparecieron publicados en el año 2000 en [16].

Operadores de composición ponderados: nuestras aportaciones

Hemos dividido la memoria en cuatro capítulos cuyos contenidos pasamos a detallar.

Capítulo 1: El primer capítulo es de carácter introductorio y en él definimos la noción que usaremos de *espacio de Banach de funciones analíticas*, que engloba a todos los espacios en que nos centraremos, y el concepto de operador de composición ponderado que, como ya hemos visto, generaliza tanto a los operadores de composición como a los operadores de multiplicación. En la literatura se pueden encontrar distintas definiciones de espacio de Banach de funciones y, en particular, de funciones analíticas. En nuestro caso, la definición que damos es algo más restrictiva que la dada por C. C. Cowen y B. D. MacCluer en [20, pág. 2] donde no se exige que la bola unidad sea un subconjunto relativamente compacto en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos en $\mathbb{D}$ del espacio $H(\mathbb{D})$. Nuestra noción permite englobar en un mismo resultado caracterizaciones de la compacidad de los operadores de composición ponderados válidas en todos los espacios que son objeto de nuestro estudio.

A continuación, introducimos los distintos espacios de Banach de funciones analíticas donde estudiaremos en los siguientes capítulos los operadores de composición ponderados recordando algunas de las propiedades y resultados que consideramos más importantes para la memoria. Estos espacios son, como ya sabemos, los espacios de Hardy, los espacios de funciones con derivada en los espacios de Hardy y los espacios de funciones con crecimiento controlado en la frontera, H_v^0 y H_v^∞. También introducimos los espacios de tipo Bloch pues, como consecuencia del estudio que realizaremos en el Capítulo 4 sobre los operadores de composición ponderados en los espacios H_v^0 y H_v^∞, obtendremos la continuidad, compacidad, compacidad débil y la continuidad completa de los operadores de composición en dichos espacios.

En la segunda sección del Capítulo 1 presentamos algunos resultados y comentarios sobre los operadores de composición ponderados válidos en la mayoría de los espacios de funciones analíticas. Siendo estos bastante elementales, presentarlos aquí con una gran generalidad nos permite simplificar la exposición de los siguientes capítulos. Destaquemos que es precisamente para obtener la Proposición 1.21 por lo que modificamos la noción de espacio de funciones analíticas dada en [20]. Obtenemos en esta sección algunas condiciones necesarias para la continuidad y compacidad de un operador de composición ponderado entre dos espacios de funciones analíticas.

Capítulo 2: En el segundo capítulo nos centramos en los operadores de composición ponderados en los espacios de Hardy en el disco unidad.

Comenzamos introduciendo el concepto de *medida de Carleson* y *medida de Carleson compacta*. En 1962, en conexión con sus trabajos sobre el problema de la corona, L. Carleson obtuvo unas desigualdades que relacionan el comportamiento de una función de H_p con su comportamiento sobre la frontera del disco unidad. Estas desigualdades equivalen a la continuidad de la inclusión de H_p en cierto espacio de funciones integrables. Estas desigualdades y sus generalizaciones a otras inclusiones se les conocen como desigualdades de Carleson y a tales medidas, como ya hemos comentado, medidas de Carleson. Con los resultados que presentamos en esta sección (que esencialmente son conocidos) podemos obtener en las Secciones 2.2 y 2.3 caracterizaciones de la continuidad y de la compacidad de los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ cuando $p \leq q < \infty$. Las técnicas usadas para estas dos caracterizaciones se pueden considerar ya clásicas en el contexto de los operadores de composición. Dichas técnicas fueron introducidas por primera vez por B. D. MacCluer en el año 1985 [53].

En la segunda sección del capítulo extendemos a H_p, para $1 \leq p < \infty$, algunos ejemplos sobre operadores de composición ponderados en H_2 debidos a K. R. M. Attele [3]. Estos resultados muestran que el estudio de la continuidad de los operadores de composición ponderados es bastante diferente al de los operadores de composición.

En la tercera sección del capítulo nos centramos en la compacidad. En la Proposición 2.27 se prueba que una condición necesaria para la compacidad del operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$, con $q < \infty$, es que la medida del conjunto $\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}$ sea cero. En general el recíproco no es cierto, salvo cuando $p = \infty$ (Proposición 2.28). Dedicamos gran parte de este capítulo a estudiar condiciones bajo las que sí es cierto el recíproco. Damos dos respuestas parciales:

Teorema 2.30. Sean $1 \leq p, q < \infty$ y supongamos que $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_r$ es continuo para algún $r > q$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ es compacto;

2. $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$.

Teorema 2.35. Sean $1 \leq p, q < \infty$ y supongamos que $W_{\varphi,\psi} : H_r \to H_q$ es continuo para algún $r < p$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. El operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ es compacto;

2. $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$.

La herramienta fundamental para probar este segundo resultado es el Teorema 2.34. Este resultado es una generalización de una caracterización de los operadores completamente continuos definidos en H_1 debida a H. Jarchow [39].

En la cuarta sección del capítulo tratamos el problema de la compacidad débil. Debido, por un lado, a que los espacios de Hardy H_p son reflexivos cuando $1 < p < \infty$ y, por otro, a que J. Bourgain probó que todo operador continuo con dominio H_∞ y rango un espacio de Banach separable es débil compacto, sólo nos queda por estudiar los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_\infty$ y $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_1$. En el caso del operador $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_\infty$ probamos que siempre son débil compatos (Teorema 2.43). Usamos aquí un teorema de intercambio del doble límite. En el caso del operador $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_1$ probamos que la compacidad débil equivale a la compacidad en norma (Teorema 2.47). Para ello hacemos uso de un resultado que pasa la compacidad débil de un operador a otro subordinado a él en norma y utilizamos la igualdad entre los conjuntos débil compactos en $L_1(\mu)$ y los conjuntos uniformemente integrables.

Seguidamente, en la quinta sección del capítulo pasamos a considerar el problema de la continuidad completa. De nuevo la reflexividad de H_p hace que los casos interesantes sean precisamente cuando el dominio es H_1 o H_∞. Más aún, J. Bourgain probó que si el dominio es H_∞ entonces la continuidad completa equivale a la compacidad débil. Por tanto, para cerrar el estudio de esta propiedad queda por estudiar los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_q$. Por un lado, obtenemos que todo operador $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_q$ continuo con $1 < q \leq \infty$ es completamente continuo (Teorema 2.48) y la continuidad completa de $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_1$ equivale a que el conjunto $\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}$ tenga medida cero (Proposición 2.49).

Cerramos el capítulo aplicando los resultados obtenidos en las secciones anteriores a uno de los ejemplos que motivó nuestro estudio sobre los operadores de composición ponderados: los operadores de composición en los espacios de Hardy en el semiplano. Damos una nueva prueba del resultado de V. Matache que afirma que no existen operadores de composición compactos en $H_p(\Pi)$. De hecho, probamos que tampoco hay operadores de composición débil compactos de $H_1(\Pi)$ en sí mismo. Obtenemos también que no existen operadores de composición $C_\phi : H_p(\Pi) \to H_q(\Pi)$ continuos si $p > q$, que todo operador de composición continuo $C_\phi : H_1(\Pi) \to H_q(\Pi)$, con $1 < q < \infty$, es completamente continuo y, finalmente, caracterizamos la continuidad completa de $C_\phi : H_1(\Pi) \to H_1(\Pi)$.

Capítulo 3: En el Capítulo 3 consideramos los espacios de funciones cuyas derivadas están en los espacios de Hardy, es decir, los espacios

$$S_p = \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in H_p\}$$

para $1 \leq p \leq \infty$. Todas las funciones de esta familia de espacios pertenecen al álgebra del disco, es decir, tienen extensiones continuas a $\overline{\mathbb{D}}$. Por tanto, la inclusión de S_p en A es continua para todo p. Este hecho es clave para obtener el punto de arranque del capítulo: el operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ es continuo si, y sólo si, lo es $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$ (Teorema 3.2). El resto de la primera sección del capítulo se dedica a obtener consecuencias de este teorema y de los resultados sobre continuidad de los operadores de composición ponderados entre espacios de Hardy.

En la segunda sección tratamos el problema de la compacidad. Comenzamos observando que la inclusión de S_p en el álgebra del disco es compacta si, y sólo si, $1 < p \leq \infty$. Sí se verifica que la inclusión de S_1 en H_1 es compacta.

A partir de aquí obtenemos que si $(p,q) \neq (1,\infty)$, entonces $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ es compacto si, y sólo si, $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$ es compacto (Teorema 3.14). Podemos ahora aplicar los resultados del Capítulo 2. En cuanto a los operadores $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_\infty$ vemos que son compactos si, y sólo si, $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ o se verifica que

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi'(z)| = \lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{|\psi(z)\,\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} = 0$$

(Teorema 3.16).

En la tercera sección del capítulo obtenemos que los operadores $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_1$ son débil compactos siempre que sean continuos y que para los restantes casos no triviales ($W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$, $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_\infty$ y $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_\infty$) la compacidad débil equivale a la compacidad (Corolario 3.33 y Proposición 3.35).

Finalizamos el capítulo con una sección dedicada a los operadores completamente continuos. A diferencia de las secciones anteriores, ahora se tiene que la inclusión de S_1 en el álgebra del disco es completamente continua. Esto nos permite obtener que $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ es completamente continuo si, y sólo si, $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$ lo es (Proposición 3.38).

Capítulo 4: Finalmente, en el último capítulo estudiamos los operadores de composición ponderados en los espacios de funciones con crecimiento controlado en la frontera H_v^0 y H_v^∞ definidos por

$$H_v^0 := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \lim_{|z|\to 1} v(z)\,|f(z)| = 0 \right\}$$

y

$$H_v^\infty := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\,|f(z)| < \infty \right\}$$

dotados en ambos casos con la norma $\|\cdot\|_v$ definida por

$$\|f\|_v = \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\,|f(z)|$$

siendo $v : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ un *peso* (véase la Definición 1.7). Además, aplicamos los resultados obtenidos al estudio de los operadores de composición en los espacios de tipo Bloch. Concretamente, en la primera sección caracterizamos la continuidad de los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_w^0$ y $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_w^\infty$ en función de los símbolos φ y ψ y de los pesos v y w (Proposiciones 4.1 y 4.2). Es más, calculamos la norma de dichos operadores. Finalizamos la sección resolviendo el problema de qué funciones φ y ψ verifican los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_v^0$ y $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ son continuos para todo peso v (Teorema 4.6).

En la Sección 4.2 pasamos a estudiar la compacidad de estos operadores. Para ello calculamos la *norma esencial* del operador cuando el peso v es típico. Esto nos permite caracterizar la compacidad de los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_w^0$ y $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_w^\infty$. El punto que creemos más interesante en la prueba de estos resultados es la construcción de una sucesión de operadores compactos que "aproxima" a la identidad y que nos permite calcular la norma esencial (Corolarios 4.11 y 4.13). Finalizamos la sección calculando los pares de funciones φ y ψ tales que los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_v^0$ y $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ son siempre compactos independientemente del peso v considerado (Corolario 4.14).

En la tercera sección del capítulo probamos que si el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_w^0$ no es compacto entonces existe un subespacio de H_v^0 isomorfo a c_0 tal que el operador actúa como un isomorfismo sobre dicho subespacio (Teorema 4.15). Esto nos permitirá probar que las tres propiedades de compacidad que estamos estudiando (compacidad, compacidad débil y continuidad completa) son equivalentes para los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_w^0$ y $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_w^\infty$ (Corolarios 4.16 y 4.18).

Para terminar, en la Sección 4.4 aplicamos los resultados anteriores a los operadores de composición en los espacios de tipo Bloch. Usamos que, para un cierto peso v, el espacio H_v^∞ es isométrico a un hiperplano del espacio de tipo Bloch $\mathcal{B}_p$. Este hecho nos permite probar que el estudio del operador de composición $C_\varphi : \mathcal{B}_p \to \mathcal{B}_q$ equivale al estudio del operador de composición ponderado $W_{\varphi,\varphi'} : H_{v_p}^\infty \to H_{v_q}^\infty$, siendo v_r el peso dado por $v_r(z) = \left(1 - |z|^2\right)^r$. De esta forma, caracterizamos la continuidad, compacidad, compacidad débil y la continuidad completa del operador $C_\varphi : \mathcal{B}_p \to \mathcal{B}_q$.

Operadores de composición ponderados: algunos problemas abiertos

Para finalizar nos gustaría comentar algunos de los problemas abiertos que planteamos en la memoria así como otros futuros trabajos que podrían continuar con lo ya realizado en esta memoria. La siguiente lista de problemas no pretende ser exhaustiva sino simplemente mostrar algunas de las cuestiones que directamente o de manera colateral nos hemos planteado durante estos últimos años y que creemos que pueden ser objeto de estudio.

Problema 1. El estudio de los operadores de composición ponderados en los espacios de Hardy que realizamos en el Capítulo 2 creemos que puede ser completado considerando otros tópicos. Una de las líneas de investigación sobre operadores de composición ponderados que actualmente tiene más vitalidad es el cálculo (o al menos estimaciones razonables) de la norma esencial de estos operadores. En el año 1987, J. H. Shapiro inició el estudio de la norma esencial de los operadores de composición. Posteriormente, han aparecido una gran cantidad de trabajos interesantes donde se estudia dicha norma mostrando la estrecha relación entre resultados de la teoría de funciones de variable compleja y la teoría de operadores. En el año 2000, A. Montes Rodríguez y nosotros mismos, calculamos la norma esencial en H_v^∞. En el año 2001, B. D. MacCluer y R. Zhao obtuvieron nuevos resultados sobre la norma esencial de los operadores de composición ponderados en los espacios de Bloch. Hasta donde conocemos, no se han obtenido estimaciones de tales normas en los espacios de Hardy.

También creemos de interés el estudio de la continuidad y compacidad de los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ cuando $q < p$ (estos problemas aparecen más detallados en el Capítulo 2).

Problema 2. De manera análoga al estudio realizado en los espacios de Hardy, en los espacios S_p y en los espacios H_v^∞ y H_v^0, pretendemos continuar con otros espacios de funciones analíticas como, por ejemplo, los espacios de Bergman, Dirichlet y de Besov. Algunas de las técnicas que desarrollamos en la memoria se pueden adaptar sin demasiada dificultad a los espacios de Bergman. Por ejemplo, siguiendo los pasos de la prueba del Teorema 2.47 se puede obtener que un operador de composición ponderado en el espacio de Bergman $A_1^0 = \left\{f \in H(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|\, dA(z) < \infty\right\}$ es compacto si, y sólo si, es débil compacto. Sin embargo, otros posibles resultados necesitarán la introducción de nuevas herramientas tanto de Análisis Funcional como de Análisis Complejo.

Problema 3. Como ya hemos comentado, los semigrupos de operadores de composición ponderados han sido estudiados en los espacios de Hardy y de Bergman. Sin embargo, no se ha realizado tal estudio en otros espacios de funciones analíticas como el álgebra del disco, los espacios de Bloch,... Incluso en muchas de estas situaciones aún no se han estudiado los semigrupos de operadores de composición. En el trabajo de A. G. Siskakis [87] se plantea dicho estudio. A diferencia de lo que sucede en los espacios de Hardy, donde todo semigrupo de operadores de composición es fuertemente continuo, no parece que esto sea lo que sucede en el álgebra del disco, BMOA o el espacio de Bloch. Aparece aquí una interesante línea de trabajo que actualmente tiene una gran vitalidad.

Problema 4. A la vista de lo expuesto anteriormente sobre los operadores de Cesàro y de Hilbert, pensamos que los operadores de composición ponderados pueden arrojar nueva luz sobre éstos en otros espacios de funciones analíticas distintos de los espacios de Hardy. No cabe esperar una respuesta siempre positiva. Por ejemplo, el operador de Hilbert no es continuo en H_∞ ni en el espacio de Bloch. Este estudio debe mostrar nuevas desigualdades sobre los coeficientes de Fourier de una función analítica en el disco unidad.

Problema 5. Más a largo plazo se podrían considerar otros problemas como la ciclicidad e hiperciclicidad, relación de los operadores de composición ponderados con otros ideales de operadores como los absolutamente sumantes o el estudio de su espectro. Asimismo, se pueden considerar problemas análogos a los aquí tratados en varias variables complejas.

Agradecimientos

Me gustaría agradecer a los profesores D. José Bonet Solves y D. Dragan Vukotić Jovšić por su inestimable colaboración y por sus consejos durante el desarrollo y elaboración de esta memoria. Sin duda, sus comentarios han contribuido a mejorar la memoria que aquí presentamos. También me gustaría agradecer con estas líneas a D. Santiago Díaz Madrigal sus útiles indicaciones a lo largo de estos años así como su constante apoyo hacia mí. Además, a los profesores Hans Jarchow, Mikael Lindström, Barbara D. MacCluer, Jennifer Moorhouse y Carl Toews por hacernos llegar sus trabajos que tanto nos han ayudado e inspirado.

Mi más sincero agradecimiento al Departamento de Matemática Aplicada II y en especial a su director D. Francisco Torres Peral por facilitarme en todo momento cuanto he necesitado. A todos los miembros del Departamento por el apoyo, ánimo e interés que han mostrado estos años y al Grupo de Investigación en Análisis Funcional por el tiempo que han empleado en mi formación así como por el trato tan cordial que he recibido de todos y cada uno de sus miembros desde el primer día.

A mi director de tesis, D. Manuel D. Contreras Márquez, por su inconmensurable dedicación, por su infinita paciencia conmigo y, en general, por el interés y el trato que me ha dispensado en todo momento. Esto ha permitido que trabajar con él todo este tiempo haya sido muy cómodo y agradable.

Lista de símbolos

Espacios

Normas

$\lVert\cdot\rVert_A$	norma en el espacio A	5
$\lVert\cdot\rVert_{A_p^\alpha}$	norma en el espacio de Bergman A_p^α	37
$\lVert\cdot\rVert_{\mathcal{B}_\alpha}$	norma en el espacio de tipo Bloch $\mathcal{B}_\alpha$	6
$\lVert\cdot\rVert_{H_p}$	norma en el espacio de Hardy H_p	3
$\lVert\cdot\rVert_v$	norma en los espacios con peso H_v^0 y H_v^∞	8
$\lVert\cdot\rVert_{H_p(\Pi)}$	norma en el espacio de Hardy $H_p\,(\Pi)$	67
$\lVert\cdot\rVert_{S_p}$	norma en el espacio S_p	5
$\lVert T\rVert_e$	norma esencial del operador T	113
$\lVert T\rVert_{X\to Y}$	norma del operador $T : X \to Y$	14
$\lVert T\rVert$	norma del operador $T : X \to Y$ cuando está claro por el contexto quienes son X e Y	14

Conjuntos

B_X	bola unidad del espacio X	9
$\mathbb{C}$	espacio complejo	2
$D(z,r)$	disco abierto en $\mathbb{C}$ de centro z y radio r	121
$\mathbb{D}$	disco unidad abierto del plano complejo	2
Π	semiplano superior complejo	67
$S\,(b,r)$	$\overline{D(b,r)} \cap \overline{\mathbb{D}}$	25
$\mathbb{T}$	frontera del disco unidad	2
$W\,(b,r)$	ventana de Carleson	24
Φ	conjunto de funciones analíticas de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$	11

Operadores

C_φ	operador de composición	12
Id_X	operador identidad en X	113
$i_{q,p}$	operador inclusión de H_q en H_p $(p < q)$	47
M_ψ	operador de multiplicación	12
$W_{\varphi,\psi}$	operador de composición ponderado	12
δ_z	funcional de evaluación en z	2

Funciones

ϕ	función analítica del semiplano Π en sí mismo	67
φ	función analítica del disco unidad en sí mismo	11
φ_ω	función de Möbius de $\mathbb{D}$ sobre $\mathbb{D}$ que transforma w en 0	12
ψ	función analítica del disco unidad en el plano complejo	12
χ_n	potencia n-ésima de z	2
χ_Ω	función característica en Ω	34

Otros

A	medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{D}$	37
m	medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{T}$	4
$M(f,r)$	supremo de $\lvert f\rvert$ en $\lvert z\rvert = r$	8
v, w, v_p	pesos	7
$\widetilde{v}$	peso asociado a v	9
$\mu_{\varphi,\psi,p}$	medida asociada a φ, ψ y p	33
$w^*\text{-}\lim_n f_n = f$	convergencia débil-$*$ de f_n a f	106
$d(X,Y)$	distancia de Banach-Mazur entre X e Y	115

Capítulo 1

Definiciones y primeras propiedades

En este capítulo introducimos los dos conceptos claves de nuestro trabajo: espacio de Banach de funciones analíticas y operador de composición ponderado.

En primer lugar presentamos los espacios de Banach en los que vamos a centrar nuestro estudio. Todos ellos tienen en común que sus elementos son funciones analíticas en el disco unidad. De hecho, algunos de los resultados que veremos dependen solamente del comportamiento de los funcionales de evaluación en puntos de dicho disco. Esto nos ha llevado a introducir el concepto de *espacio de Banach de funciones analíticas* que aparece en la Definición 1.1. En la literatura aparecen otras nociones de espacio de Banach de funciones analíticas que no coinciden con la dada aquí. Puede verse, por ejemplo, la que aparece en el texto de C. C. Cowen y B. D. MacCluer [20, pág. 2]. La nuestra es algo más restrictiva que la que usan dichos autores pero nos permite unificar algunas pruebas como, por ejemplo, la caracterización de la compacidad de los operadores de composición ponderados (Proposición 1.21). De esta forma podemos presentar parte de los resultados preliminares bajo un único enunciado válido en los diferentes contextos en que nos moveremos. Damos, por supuesto, una lista de ejemplos de espacios de Banach de funciones analíticas que son precisamente los que irán apareciendo en el resto de la memoria.

En la segunda sección de este capítulo introducimos el concepto de operador de composición ponderado y obtenemos algunas caracterizaciones y condiciones necesarias tanto de su continuidad como de su compacidad.

Todos estos resultados aparecerán de manera reiterada en los restantes capítulos.

En este capítulo introducimos la mayoría de las notaciones y terminología que se usarán en la memoria.

1.1 Espacios de Banach de funciones analíticas

Comenzamos la sección fijando alguna notación. Como es usual, denotaremos por $\mathbb{C}$ al plano complejo, $\mathbb{D}$ al disco unidad abierto y por $\mathbb{T}$ a su frontera. $H(\mathbb{D})$ será el espacio de las funciones complejas y analíticas en el disco unidad. También, dada la reiteración de veces que aparecerán en la memoria, fijaremos una notación para los monomios. Para cada número entero no negativo n, llamaremos χ_n a la función $\chi_n(z) = z^n$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Definición 1.1 *Se llama espacio de Banach de funciones analíticas (sobre $\mathbb{D}$) a todo espacio de Banach que sea un subespacio vectorial de $H(\mathbb{D})$ verificando que*

- (*i*) *La bola unidad del espacio es un conjunto relativamente compacto en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.*
- (*ii*) *Los polinomios están incluidos en el espacio.*

Observemos que, por el Teorema de Montel, ser un conjunto relativamente compacto en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos equivale a ser un conjunto localmente acotado en $\mathbb{D}$. Esta propiedad se puede reescribir en términos de los funcionales de evaluación que pasamos a describir. Dado un espacio de Banach X, para cada $z \in \mathbb{D}$, llamaremos *funcional de evaluación* en z a la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} \delta_z : & X & \to & \mathbb{C} \\ & f & \mapsto & f(z). \end{array}$$

La acotación en el punto z de la bola unidad de X equivale a la continuidad del funcional δ_z. Asimismo, que la bola unidad del espacio X sea localmente acotada en $\mathbb{D}$ equivale a que para cada $0 < r < 1$, el conjunto $\{\delta_z : |z| \leq r\}$ esté acotado en X^* (dual topológico de X). Éste será el camino habitual para comprobar la primera de las condiciones que aparecen en la definición anterior. Por otro lado, cuando usemos esta propiedad, siempre lo haremos de la siguiente forma: toda sucesión acotada en un espacio de Banach de funciones analíticas tiene una subsucesión que converge uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$.

En lo que resta de sección presentamos los espacios de Banach de funciones analíticas que aparecerán en la memoria.

Los primeros espacios que introducimos, y a los que dedicamos el Capítulo 2, son los espacios de Hardy. Estos espacios tienen sus orígenes en trabajos publicados a comienzos del siglo XX debidos, entre otros, a A. Beurling, W. Blaschke, G. H. Hardy, J. E. Littlewood, R. Nevanlinna, R. E. A. C. Paley, I. I. Privalov, F. y M. Riesz, V. Smirnov, G. Szegő y A. Zygmund. Posteriormente, otros matemáticos de gran importancia del pasado siglo han trabajado en propiedades de estos espacios y en su aplicación a otros campos. Destaquemos, por ejemplo, a J. Bourgain, L. Carleson, P. L. Duren, C. Fefferman, D. E. Marshall, W. Rudin, J. H. Shapiro, A. L. Shields y J. Wermer. Además, se han escrito varias monografías sobre los espacios de Hardy como, por ejemplo, las de P. L. Duren [25], S. D. Fisher [28], J. B. Garnett [31], K. Hoffman [35] y P. Koosis [47]. Pasamos, sin más, a introducir estos espacios.

Definición 1.2 *Para $1 \leq p \leq \infty$ se define el espacio de Hardy, que denotamos H_p, como*

$$H_p := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \|f\|_{H_p} < \infty \right\},$$

donde

$$\|f\|_{H_p} = \lim_{r \to 1^-} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta \right)^{1/p}$$

si $1 \leq p < \infty$ y

$$\|f\|_{H_\infty} = \sup_{z \in \mathbb{D}} |f(z)|.$$

Dotados con la norma $\|\cdot\|_{H_p}$, los espacios de Hardy son espacios de Banach.

Es claro que si $1 \leq p < q \leq \infty$, entonces

$$H_\infty \subseteq H_q \subsetneq H_p \subseteq H_1,$$

siendo todas estas inclusiones continuas.

Una de las propiedades que permite trabajar a menudo con cierta comodidad en estos espacios es que se pueden identificar con subespacios cerrados de los espacios de funciones integrables en $\mathbb{T}$. En el siguiente resultado debido a P. Fatou y cuya prueba puede verse en [73, Teorema 17.3.3] concretamos esta afirmación. Para simplificar la notación, en lo que sigue denotaremos L_p al espacio de las funciones p-integrables $L_p(\mathbb{T}, m)$, donde m denota la medida de Lebesgue normalizada en $\mathbb{T}$.

Proposición 1.3 *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Para toda $f \in H_p$ existen los límites radiales en casi todo punto de la frontera unidad. Es decir, existe*

$$f^*\left(e^{i\theta}\right) = \lim_{r \to 1} f\left(re^{i\theta}\right)$$

en casi todos los puntos $e^{i\theta}$ de $\mathbb{T}$. La función f^* así definida pertenece a $L_p(\mathbb{T}, m)$. Además

$$\lim_{r \to 1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|f^*\left(e^{i\theta}\right)\right|^p d\theta$$

y la aplicación $T : H_p \to L_p(\mathbb{T})$, $T(f) = f^*$, es una inyección isometrica (no sobreyectiva).

Teniendo en cuenta este resultado, y haciendo un pequeño abuso de notación, cuando estemos trabajando con funciones de H_p seguiremos llamando f a la función f^*.

En [20, Proposition 2.25] puede verse el resultado de J. Ryff que afirma que si $f \in H_1$ y $\varphi : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ es una función analítica entonces $(f \circ \varphi)^*\left(e^{i\theta}\right) = f^*\left(\varphi^*\left(e^{i\theta}\right)\right)$ en casi todo punto $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Por consiguiente, si ψ también pertenece a H_1 y es tal que $\psi f \circ \varphi \in H_1$, entonces

$$(\psi f \circ \varphi)^*\left(e^{i\theta}\right) = \psi^*\left(e^{i\theta}\right) f^*\left(\varphi^*\left(e^{i\theta}\right)\right)$$

en casi todo punto $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. En el Capítulo 2 haremos uso de este resultado sin hacer mención explícita de él.

En el siguiente resultado, muy conocido y cuya prueba se puede consultar en [20, Corollary 2.14], se afirma que los operadores de evaluación puntual sobre H_p son siempres continuos.

Proposición 1.4 *Sea $1 \leq p \leq \infty$. Para cada $z \in \mathbb{D}$, el funcional de evaluación $\delta_z : H_p \to \mathbb{C}$ es continuo y se verifica que*

$$\|\delta_z\|_{H_p^*} = \frac{1}{\left(1 - |z|^2\right)^{1/p}}$$

si $1 \leq p < \infty$ y $\|\delta_z\|_{H_\infty^*} = 1$. Por tanto, los espacios de Hardy $\left(H_p, \|\cdot\|_{H_p}\right)$ son espacios de Banach de funciones analíticas.

Pasamos a definir los espacios que notaremos S_p que están íntimamente ligados a los que hemos introducido anteriormente. Dichos espacios están formados por las funciones analíticas en el disco unidad cuya derivada está en H_p. Estos espacios y los operadores de composición definidos entre ellos también han sido estudiados, entre otros, por B. D. MacCluer, R. Roan o J. H. Shapiro (véanse, por ejemplo, [54], [71] y [82]). Además, C. C. Cowen y B. D. MacCluer [20, Chapter 4] hacen un estudio de los operadores de composición en dichos espacios.

Definición 1.5 *Para $1 \leq p \leq \infty$ se define el espacio*

$$S_p := \{f \in H(\mathbb{D}) : f' \in H_p\}.$$

Dotando a este espacio con la norma

$$\|f\|_{S_p} = |f(0)| + \|f'\|_{H_p}$$

es inmediato comprobar que $\left(S_p, \|\cdot\|_{S_p}\right)$ es un espacio de Banach.

Una de las principales propiedades de estos espacios es que sus funciones son continuas en todo punto de la frontera de $\mathbb{D}$ y, por tanto, son funciones del álgebra del disco, A (espacio de las funciones analíticas en $\mathbb{D}$ y continuas en $\overline{\mathbb{D}}$ dotado con la norma $\|f\|_A = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{D}\}$). Las funciones que pertenecen a estos espacios son continuas en el disco unidad cerrado. Esto se sigue, por ejemplo, del teorema clásico de Privalov (véase [25, Theorem 3.11]) o de los teoremas clásicos de Hardy y Littlewood acerca del orden de crecimiento de funciones analíticas [25, Chapter 5]. A los espacios de Banach de funciones analíticas en los que todas sus funciones están acotadas se les conoce en la literatura como *espacios pequeños.* Tenemos así que los espacios

S_p son espacios pequeños. Más adelante saldrán nuevos ejemplos de espacios pequeños.

Por el Teorema de la Gráfica Cerrada, la aplicación inclusión de S_p en el álgebra del disco es continua. Denotemos por c a la norma de dicha aplicación. Puesto que, $\|\delta_z\|_{A^*} = 1$, se tiene que $\|\delta_z\|_{S_p^*} \leq c\,\|\delta_z\|_{A^*} = c$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En particular, los espacios S_p son espacios de Banach de funciones analíticas. En el Capítulo 3, veremos que la inclusión anterior es compacta cuando $1 < p \leq \infty$, un hecho que será clave en el estudio de los operadores de composición ponderados en S_p.

La siguiente clase de espacios que vamos a introducir son los espacios de tipo Bloch. Estos espacios han sido ampliamente estudiados tanto por su interés intrínseco como por su relación con diferentes áreas del análisis. Autores como S. Axler, J. A. Cima, J. L. Fernández, N. Makarov, Ch. Pommerenke, K. Zhu y un largo etcétera han contribuido con sus trabajos al conocimiento de estos espacios. De la década de los 70 merece la pena destacar dos trabajos que muestran el estado en que se encontraba el estudio del espacio de Bloch. El primero de ello se debe a J. M. Anderson, J. Clunie y Ch. Pommerenke [1] y el segundo a J. A. Cima [13]. Más recientemente mencionamos en esta línea el trabajo de K. Zhu [91].

Definición 1.6 *Para cada valor de $\alpha > 0$, se define el espacio de tipo Bloch*

$$\mathcal{B}_\alpha = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^\alpha |f'(z)| < +\infty \right\}.$$

Llamaremos espacio pequeño de tipo Bloch a

$$\mathcal{B}_\alpha^0 = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \lim_{|z|\to 1^-} \left(1-|z|^2\right)^\alpha |f'(z)| = 0 \right\}.$$

Si dotamos a ambos espacios con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{B}_\alpha} = |f(0)| + \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right)^\alpha |f'(z)|,$$

éstos son espacios de Banach.

Es fácil observar que $\mathcal{B}_\alpha^0$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{B}_\alpha$ para cada $\alpha > 0$. Para $\alpha = 1$ obtenemos los llamados *espacio de Bloch* y *espacio pequeño de Bloch* que denotaremos simplemente por $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^0$ respectivamente. Cuando

$0 < \alpha < 1$ el espacio $\mathcal{B}_\alpha$ se puede identificar con el *espacio de las funciones analíticas y lipschitzianas* en el disco unidad de orden $1 - \alpha$, es decir, el espacio de las funciones analíticas en el disco unidad tales que

$$|f(z) - f(w)| \leq C |z - w|^{1-\alpha}$$

para cierta constante $C > 0$ (que depende de f) y para todo $z, w \in \mathbb{D}$ (véase, por ejemplo, [20, Theorem 4.1]). Se tiene así que los espacios $\mathcal{B}_\alpha$ y $\mathcal{B}_\alpha^0$ para $0 < \alpha < 1$ son nuevos ejemplos de los que antes hemos llamado espacios pequeños.

Si tomamos f una función en la bola unidad del espacio $\mathcal{B}_\alpha$ y $z \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq |f(0)| + |f(z) - f(0)| \leq |f(0)| + |z| \sup_{|w| \leq |z|} |f'(w)| \\ &\leq |f(0)| + \sup_{|w| \leq |z|} \frac{1}{\left(1 - |w|^2\right)^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\left(1 - |z|^2\right)^\alpha}. \end{aligned}$$

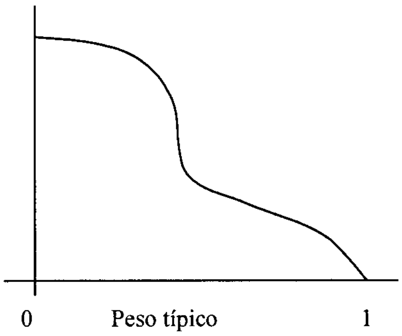
Por tanto, $\|\delta_z\|_{\mathcal{B}_\alpha^*} \leq 1 + \frac{1}{\left(1-|z|^2\right)^\alpha}$ y tenemos así que tanto $\mathcal{B}_\alpha$ como $\mathcal{B}_\alpha^0$ son espacios de Banach de funciones analíticas.

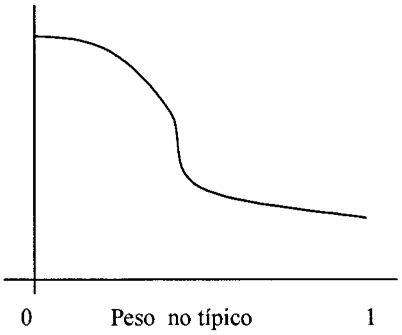
Los últimos ejemplos de espacios de Banach de funciones analíticas que introduciremos por ahora son los *espacios de funciones con crecimiento controlado en la frontera de* $\mathbb{D}$. Estos espacios comienzan a aparecer en la literatura para estudiar el crecimiento del módulo de funciones analíticas en el disco unidad cerca de la frontera. Conocidos matemáticos han trabajado en propiedades de estos espacios o con operadores definidos entre ellos. Mencionemos, por ejemplo, a K. Bierstedt, P. Bonet, P. Domański, M. Lindström, W. Lusky, L. A. Rubel, A. L. Shields o J. Taskinen (véase [7], [8], [10], [50], [51], [72] y las referencias que aparecen en estos artículos). Antes de pasar a definir estos espacios precisaremos el concepto de peso que vamos a usar.

Definición 1.7 *Llamamos peso radial, o simplemente peso, a toda función* $v : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ *continua, acotada, estrictamente positiva, decreciente con respecto al módulo y tal que* $v(z) = v(|z|)$ *para todo punto* z *de* $\mathbb{D}$. *Llamamos peso típico a todo peso radial que verifique además que*

$$\lim_{|z| \to 1^-} v(z) = 0.$$

En la siguiente figura mostramos la gráfica estándar en $[0,1]$ de un peso típico y otro no típico.





Ejemplo 1.8 Dada una función f analítica en $\mathbb{D}$ tal que $f(0) \neq 0$, denotamos por $M(f,r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ para cada $r \in [0,1)$. Es fácil comprobar que $v(z) = 1/M(f,|z|)$ es un peso radial (no necesariamente típico). De los pesos que surgen de esta forma merece la pena destacar, por motivos que comentaremos más adelante, el dado por $v(z) = (1-|z|)^{\alpha}$ donde α es una constante positiva. En este caso se tiene que v es un peso típico para cualquier $\alpha > 0$.

Con esta noción podemos ya presentar los espacios de funciones con crecimiento controlado en la frontera del disco.

Definición 1.9 *Dado un peso v se definen los espacios*

$$H_v^0 := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \lim_{|z|\to 1^-} v(z)\,|f(z)| = 0 \right\}$$

y

$$H_v^\infty := \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\,|f(z)| < \infty \right\}$$

dotados en ambos casos con la norma $\|\cdot\|_v$ definida por

$$\|f\|_v = \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)\,|f(z)|\,.$$

Obviamente tanto H_v^0 como H_v^∞ son espacios de Banach y H_v^0 es un subespacio cerrado de H_v^∞. Además, si v es un peso no típico (en particular si

$v \equiv 1$) se tiene que H_v^∞ es precisamente el espacio H_∞ de todas las funciones analíticas y acotadas en el disco unidad y

$$H_v^0 = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \lim_{|z|\to 1^-} |f(z)| = 0 \right\} = \{0\}.$$

Por otro lado, es claro que H_∞ está siempre contenido en H_v^∞ para cualquier peso. Es más, se tiene que H_∞ está estrictamente contenido en H_v^∞ si, y sólo si, v es típico [10, Corollary 1.2].

Íntimamente relacionado con cada peso típico se encuentra su *peso asociado.* Muchos de los resultados que veremos más adelante sobre propiedades de los espacios H_v^0 y H_v^∞ y sobre operadores definidos en ellos se obtienen en términos de dicho peso y no directamente en términos del peso v. Es más, como vamos a ver, dicho peso asociado es el apropiado para el estudio de $\|\delta_z\|_{(H_v^\infty)^*}$. Es por ello que nos detendremos por un momento en profundizar en el estudio de este concepto.

Como es usual, denotaremos por B_X a la bola unidad del espacio X.

Definición 1.10 *Dado un peso v se define el peso asociado a v como*

$$\widetilde{v}(z) = 1/\sup\left\{|f(z)| : f \in B_{H_v^\infty}\right\}.$$

Los resultados que presentamos a continuación se deben a J. Bonet, P. Domański, M. Lindström y J. Taskinen [10]. Para un estudio más completo de los pesos asociados se puede consultar el trabajo realizado por K. Bierstedt, J. Bonet y J. Taskinen [7].

Proposición 1.11 *Sea v un peso. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) $0 < v \leq \widetilde{v}$ *y* $\widetilde{v}$ *está acotada.*

(ii) La función $\widetilde{v}$ es continua y radial. Además $\widetilde{v}$ es decreciente como función del módulo. Es decir, $\widetilde{v}$ es un peso. Además, el peso $\widetilde{v}$ es típico siempre que v lo sea.

(iii) $\|f\|_v \leq 1$ *si, y sólo si,* $\|f\|_{\widetilde{v}} \leq 1$. *Es decir, los espacios H_v^∞ y $H_{\widetilde{v}}^\infty$ son isométricos.*

(*iv*) *Si v es típico, entonces*

$$\sup\left\{|f(z)| : f \in B_{H_v^\infty}\right\} = \sup\left\{|f(z)| : f \in B_{H_v^0}\right\}.$$

En particular, los espacios H_v^0 y $H_{\widetilde{v}}^0$ también son isométricos.

De la definición y del resultado anterior se tiene obviamente que

$$\|\delta_z\|_{(H_v^\infty)^*} = \|\delta_z\|_{(H_v^0)^*} = 1/\widetilde{v}(z).$$

Nótese que, en general, los pesos v y $\widetilde{v}$ no son equivalentes. Cuando esto ocurra diremos que el peso es esencial. Concretamente

Definición 1.12 *Diremos que un peso v es esencial si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$v(z) \leq \widetilde{v}(z) \leq Cv(z) \quad \textit{para todo } z \in \mathbb{D}.$$

Teniendo en cuenta la Proposición 1.11, el peso v es esencial si existe una constante $C > 0$ tal que $\widetilde{v}(z) \leq Cv(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$.

Veamos a continuación algunos ejemplos de pesos esenciales que serán de utilidad durante el desarrollo del Capítulo 4.

Ejemplo 1.13 Si $f \in H(\mathbb{D})$ con $f(0) \neq 0$ entonces el peso $v(z) = 1/M(f, |z|)$ es esencial; de hecho $v(z) = \widetilde{v}(z)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. En efecto, si fijamos un punto $z \in \mathbb{D}$ entonces se tiene que

$$M(f, |z|) = \max\{|f(w)| : |w| = |z|\} = |f(w_0)|$$

para un cierto punto $w_0 \in \mathbb{D}$ con $|w_0| = |z|$. Observemos que $f \in B_{H_v^\infty}$ ya que

$$\|f\|_v = \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z)|f(z)| = \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|f(z)|}{M(f, |z|)} \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} 1 = 1.$$

De esta forma, teniendo en cuenta esto y que los pesos asociados son radiales, se cumple que

$$\begin{aligned}\widetilde{v}(z) = \widetilde{v}(w_0) &= \frac{1}{\sup\left\{|h(w_0)| : h \in B_{H_v^\infty}\right\}} \\ &\leq \frac{1}{|f(w_0)|} = \frac{1}{M(f, |z|)} = v(z).\end{aligned}$$

La otra desigualdad es siempre cierta (Proposición 1.11 (*i*)).

Ejemplo 1.14 Para cada $0 < p < \infty$ los pesos dados por $v_p(z) = \left(1 - |z|^2\right)^p$ son pesos típicos esenciales. De hecho, $v_p = \widetilde{v}_p$. En efecto, veamos que estos pesos son un caso particular del ejemplo anterior para la función $f(z) = \left(1 - z^2\right)^{-p}$. Para ello basta comprobar que $1/M(f, |z|) = v_p(z)$. Fijemos un punto $z \in \mathbb{D}$. Entonces

$$\begin{aligned} M(f, |z|) &= \max_{|w|=|z|} |f(w)| = \max_{|w|=|z|} \frac{1}{|1 - w^2|^p} \\ &\leq \max_{|w|=|z|} \frac{1}{\left(1 - |w|^2\right)^p} = \frac{1}{\left(1 - |z|^2\right)^p} \end{aligned}$$

y

$$M(f, |z|) = \max_{|w|=|z|} \frac{1}{|1 - w^2|^p} \geq \frac{1}{\left(1 - |z|^2\right)^p}.$$

Así, se verifica que $M(f, |z|) = \left(1 - |z|^2\right)^{-p}$, o equivalentemente, $v_p(z) = M(f, |z|)^{-1}$. Por tanto, v_p es un peso esencial y $v_p = \widetilde{v}_p$.

L. A. Rubel y A. L. Shields [72] estudiaron diferentes propiedades sobre la dualidad de estos espacios. En particular, probaron que si v es un peso típico entonces el bidual de H_v^0 es isométrico a H_v^∞. En el Capítulo 4 comentaremos con más detalle este hecho. Además, W. Lusky probó que para una gran mayoría de pesos v, los espacios H_v^0 y H_v^∞ son isomorfos a los espacios de sucesiones c_0 y ℓ_∞ respectivamente [50], [51].

1.2 Operadores de composición ponderados

En la primera sección de este capítulo introductorio hemos visto los espacios en los que hemos centrado nuestro trabajo. Dedicamos esta segunda sección a presentar los operadores de composición ponderados.

Dado que durante toda la memoria utilizaremos constantemente funciones φ analíticas en el disco unidad con imagen también incluida en el disco unidad y para que la lectura de esta memoria resulte más cómoda, le daremos nombre al conjunto formado por dichas funciones.

Definición 1.15 *Denotemos por Φ al conjunto de las autoaplicaciones del disco, es decir,*

$$\Phi = \{\varphi \in H(\mathbb{D}) : \varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}\}.$$

Dado $\omega \in \mathbb{D}$, definimos

$$\varphi_\omega(z) = \frac{z - \omega}{1 - \overline{\omega} z}.$$

La función φ_ω es una transformación de Möbius que aplica el disco unidad sobre sí mismo y lleva ω en 0.

Pasamos ya a definir los operadores que vamos a estudiar en esta memoria. Este tipo de operadores no son más que la composición de otros dos operadores que han sido ampliamente estudiados: los operadores de composición y los operadores de multiplicación.

Definición 1.16 *Para cada $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H(\mathbb{D})$ llamamos operador de composición ponderado (con símbolos φ y ψ), operador que denotaremos mediante $W_{\varphi,\psi}$, a aquel que asigna a cada función $f \in H(\mathbb{D})$ la función*

$$W_{\varphi,\psi}(f) := \psi(f \circ \varphi).$$

En particular, cuando $\psi(z) \equiv 1$, a estos operadores se les denomina operadores de composición (con símbolo φ) y los denotaremos por C_φ y, cuando $\varphi(z) = z$, se les denomina operadores de multiplicación (con símbolo ψ) y los denotaremos M_ψ. Puesto que cuando la función ψ es idénticamente nula el operador $W_{\varphi,\psi}$ es el trivial, supondremos siempre que existe algún punto $z \in \mathbb{D}$ donde $\psi(z) \neq 0$.

Obviamente estos operadores llevan funciones de $H(\mathbb{D})$ en $H(\mathbb{D})$. Nuestro objetivo es estudiar cuándo los operadores de composición ponderados transforman los espacios de funciones analíticas definidos en la sección anterior en espacios de la misma clase de manera continua o compacta. La mayoría de los resultados que caracterizan la continuidad o la compacidad dependen fuertemente del espacio donde esté definido y del que tenga por rango. No obstante, hay una serie de observaciones comunes en todos los espacios de Banach de funciones analíticas que merece la pena poner en este contexto más abstracto en aras de evitar la reiteración de argumentos comunes.

Utilizaremos en multitud de ocasiones que si nuestros operadores están bien definidos entonces, automáticamente, son continuos.

Proposición 1.17 *Sean X e Y espacios de Banach de funciones analíticas. Si $W_{\varphi,\psi}(X) \subseteq Y$, entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : X \to Y$ es continuo.*

Demostración. Obviamente aplicaremos el Teorema de la Gráfica Cerrada. En efecto, sea $\{f_n\}$ una sucesión en X tal que $\{f_n\}$ converge a cero en X y existe g en Y tal que $W_{\varphi,\psi}(f_n) = \psi(f_n \circ \varphi)$ converge a g en Y. Tenemos que probar que $g \equiv 0$.

Teniendo en cuenta la Definición 1.1, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ tal que $\{f_{n_k}\}$ converge a cero para la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de $\mathbb{D}$ y, en particular, $f_{n_k}(z) \to 0$ para todo z en $\mathbb{D}$. Puesto que $\varphi(z) \in \mathbb{D}$ para todo z en $\mathbb{D}$, se tiene que $\psi(z) f_{n_k}(\varphi(z)) \to 0$ cuando $k \to \infty$, para todo z en $\mathbb{D}$. De esta forma se tiene que $g(z) = 0$, para todo z en $\mathbb{D}$. ■

El siguiente resultado nos muestra que de todos los operadores definidos entre dos espacios de Banach de funciones analíticas, los únicos cuyos adjuntos transforman funcionales de evaluación en múltiplos de dichos funcionales son precisamente los operadores de composición ponderados. De hecho, vamos a obtener cómo actúan dichos adjuntos sobre un funcional de evaluación. La prueba de este resultado es una ligera generalización de [20, Theorem 1.4].

Proposición 1.18 *Sea $T : X \to Y$ un operador continuo entre dos espacios de Banach de funciones analíticas X e Y. Entonces T es un operador de composición ponderado si, y sólo si,*

$$T^*(A(Y)) \subseteq A(X),$$

siendo el conjunto

$$A(Z) = \{\lambda\delta_z : \lambda \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{D}\} \subseteq Z^*,$$

para $Z = X$ o $Z = Y$. En este caso, si $T = W_{\varphi,\psi}$, entonces se tiene que

$$W^*_{\varphi,\psi}(\delta_z) = \psi(z)\,\delta_{\varphi(z)}.$$

Demostración. Supongamos que existen $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in Y$ tales que $T = W_{\varphi,\psi}$. Fijemos $z \in \mathbb{D}$. Entonces, para cada $f \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se verifica que

$$(T^*(\lambda\delta_z))(f) = (\lambda\delta_z)(Tf) = \lambda\psi(z) f(\varphi(z)) = \lambda\psi(z)\,\delta_{\varphi(z)}(f),$$

luego $T^*(\lambda\delta_z) = \lambda\psi(z)\,\delta_{\varphi(z)}$ y, por tanto, $T^*(A(Y)) \subseteq A(X)$.

Recíprocamente, supongamos que $T^*(A(Y)) \subseteq A(X)$. Recordemos que las funciones χ_0 y χ_1 están en X. Tomemos $\psi := T(\chi_0) \in Y$. Notemos que $T^*(\delta_z)(\chi_0) = \delta_z(\psi) = \psi(z)$ y que para $f \in X$ se tiene que $T(f)(z) =$

$T^*(\delta_z)(f)$. De esta forma, si ψ es la función nula, entonces se tiene que el operador T es idénticamente nulo y podemos tomar φ cualquier elemento de Φ. Podemos, por tanto, suponer que ψ no es la función idénticamente nula. Para definir la función φ, tomemos $z \in \mathbb{D}$. Si $\psi(z) \neq 0$, entonces, por hipótesis, existe un punto en $\mathbb{D}$ que denotamos $\varphi(z)$ tal que $T^*(\delta_z) = \psi(z)\,\delta_{\varphi(z)}$. Por otro lado, considerando la función χ_1, obtenemos que

$$T(\chi_1)(z) = \delta_z(T\chi_1) = T^*(\delta_z)(\chi_1) = \psi(z)\,\delta_{\varphi(z)}(\chi_1) = \psi(z)\,\varphi(z).$$

Así, se tiene que $\psi\varphi \in Y$, es decir, existe una función $f \in Y$ tal que $\psi\varphi = f$. De esta manera, en los puntos donde ψ no se anule, se tiene que $\varphi = f/\psi$ es analítica. Por otro lado, como ψ es analítica en $\mathbb{D}$, sus ceros son aislados. De esta forma, la función φ es analítica excepto en un conjunto donde todos sus puntos son aislados. Puesto que la función φ está acotada, todas sus singularidades aisladas son evitables. Extendemos así φ a todo el disco abierto de forma analítica.

Concluimos que

$$T(f)(z) = \delta_z(Tf) = T^*(\delta_z)(f) = \psi(z)\,\delta_{\varphi(z)}(f) = \psi(z)\,f(\varphi(z)),$$

luego $T = W_{\varphi,\psi}$. ■

La descripción de cómo actúa el adjunto de un operador de composición ponderado sobre los funcionales de evaluación dada en el anterior resultado nos permite obtener una condición necesaria para su continuidad. A partir de ahora haremos uso de la notación $\|T\|_{X\to Y}$ para la norma del operador $T : X \to Y$. Cuando no haya lugar a confusión con los espacios X e Y se denotará simplemente por $\|T\|$.

Corolario 1.19 *Sean $\varphi \in \Phi$, $\psi \in H(\mathbb{D})$ y X e Y dos espacios de Banach de funciones analíticas. Si el operador $W_{\varphi,\psi} : X \to Y$ es continuo, entonces*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{\left\|\delta_{\varphi(z)}\right\|_{X^*}}{\left\|\delta_z\right\|_{Y^*}} \leq \|W_{\varphi,\psi}\|_{X\to Y}.$$

Demostración. Tenemos que $W_{\varphi,\psi}^* : Y^* \to X^*$ es continuo y, por la proposición anterior, $W_{\varphi,\psi}^*(\delta_z) = \psi(z)\,\delta_{\varphi(z)}$ para cada $z \in \mathbb{D}$. Así se verifica que

$$\left\|W_{\varphi,\psi}^*(\delta_z)\right\|_{X^*} \leq \left\|W_{\varphi,\psi}^*\right\|_{Y^*\to X^*} \|\delta_z\|_{Y^*} = \|W_{\varphi,\psi}\|_{X\to Y} \|\delta_z\|_{Y^*},$$

o, equivalentemente, que

$$|\psi(z)| \left\|\delta_{\varphi(z)}\right\|_{X^*} \leq \|W_{\varphi,\psi}\|_{X\to Y} \|\delta_z\|_{Y^*}. \blacksquare$$

En particular, cuando tenemos un operador de multiplicación se tiene que

Corolario 1.20 *Sea $\psi \in H(\mathbb{D})$ y X e Y dos espacios de Banach de funciones analíticas. Si el operador $M_\psi : X \to Y$ es continuo entonces*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{\|\delta_z\|_{X^*}}{\|\delta_z\|_{Y^*}} < \infty.$$

En particular, si $M_\psi : X \to X$ es continuo entonces $\psi \in H_\infty$.

El recíproco de los dos anteriores corolarios está lejos de ser cierto. Por ejemplo, si consideramos el espacio de Bloch $\mathcal{B}$, es bien conocido que $M_\psi(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B}$ si, y sólo si, $\psi \in H_\infty$ y

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1-|z|^2\right) |\psi'(z)| \log\frac{1}{1-|z|^2} < \infty$$

(véase [69, Theorem 1], aunque hay otras referencias anteriores a esta). Si consideramos la función $\psi(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$, se tiene que $|\psi(z)| = e^{\frac{|z|^2-1}{|z-1|^2}} \leq 1$. Por tanto, $\psi \in H_\infty$. Sin embargo no se cumple la segunda afirmación. En efecto, si tomamos un punto de la forma $z = \cos(\theta) e^{i\theta}$, con $\theta \neq 0$, un sencillo cálculo muestra que

$$\begin{aligned}
\left(1-|z|^2\right) |\psi'(z)| \log\frac{1}{1-|z|^2} &= \left(1-|z|^2\right) e^{\frac{|z|^2-1}{|z-1|^2}} \frac{2}{|1-z|^2} \log\frac{1}{1-|z|^2} \\
&= e^{\frac{-\mathrm{sen}^2(\theta)}{|1-\cos(\theta)e^{i\theta}|^2}} \frac{2\mathrm{sen}^2(\theta)}{|1-\cos(\theta)e^{i\theta}|^2} \log\frac{1}{\mathrm{sen}^2(\theta)} \\
&= e^{\frac{-\mathrm{sen}^2(\theta)}{1-\cos^2\theta}} \frac{2\mathrm{sen}^2(\theta)}{1-\cos^2\theta} \log\frac{1}{\mathrm{sen}^2(\theta)} \\
&= \frac{2}{e} \log\frac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}
\end{aligned}$$

y esta función no está acotada para $\theta \in (0,\pi)$. Es decir, M_ψ no es un operador de multiplicación en el espacio de Bloch.

No obstante, a lo largo de la memoria presentaremos resultados donde el recíproco de los anteriores corolarios es cierto. Algunos de estos recíprocos se obtendrán imponiendo restricciones al símbolo φ y otras veces el recíproco será cierto en familias concretas de espacios de funciones analíticas.

Además de la continuidad, vamos a abordar el estudio de la compacidad de los operadores de composición ponderados. Es bien conocido que en Análisis Matemático, la gran mayoría de los resultados que prueban la existencia de algún objeto matemático tienen detrás un argumento de compacidad. En muchas de estas ocaciones dicho argumento de compacidad se puede expresar mediante la compacidad de un operador lineal. De ahí el interés del estudio de los ideales de operadores compactos. Piénsese, por ejemplo, en las aplicaciones del Teorema de Rellich-Kondrachov a la resolución de ecuaciones en derivadas parciales.

Para introducir el concepto de operador compacto, consideremos las tres siguientes familias de conjuntos en un espacio de Banach: los conjuntos acotados, los conjuntos relativamente compactos en la topología débil y los conjuntos relativamente compactos en la topología de la norma. Es bien conocido que un operador lineal y continuo entre dos espacios de Banach conserva estas familias. Pues bien, las nociones de compacidad para operadores se introducen para estudiar aquellos operadores que transforman una de estas familias en otra más pequeña. Nosotros nos vamos a centrar en los tres tipos de compacidad que más aparecen en la literatura. Pasamos a describir dichas nociones de compacidad. Diremos que

– un operador T entre dos espacios de Banach X e Y es *compacto* si transforma conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos en la topología de la norma (es decir, transforma sucesiones acotadas en sucesiones que tienen una subsucesión convergente en la topología de la norma);

– un operador T entre dos espacios de Banach X e Y es *débil compacto* si transforma conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos en la topología débil (es decir, transforma sucesiones acotadas en sucesiones que tienen una subsucesión convergente en la topología débil);

– un operador T entre dos espacios de Banach X e Y es *completamente continuo* si transforma conjuntos relativamente compactos en la topología débil en conjuntos relativamente compactos en la topología de la norma (es decir, transforma sucesiones convergentes en la topología débil en sucesiones que tienen una subsucesión convergente en la topología de la norma). Estos operadores son también conocidos como operadores de Dunford-Pettis.

Es claro que todo operador compacto es tanto débil compacto como completamente continuo. En general, ninguna otra implicación es cierta. Ejemplos de ello en el contexto de operadores de composición ponderados aparecerán en los próximos capítulos. No obstante, veremos que entre ciertos espacios de Banach de funciones analíticas sí que coinciden. Esto sucederá, por ejemplo, en los espacios H_v^∞ que estudiaremos en el Capítulo 4.

Una vez introducidos estos tres conceptos, podemos ya presentar algunas observaciones sobre los operadores de composición ponderados que pertenecen a uno de estos tres ideales de operadores. El primero de estos resultados caracteriza la compacidad y la compacidad débil. Como puede observarse en los próximos capítulos, este resultado nos permite simplificar notablemente los argumentos de las demostraciones donde se caracteriza la compacidad de operadores de composición ponderados. Para los operadores de composición este resultado es bien conocido y puede verse para los espacios de Hardy y de Bergman, por ejemplo, en el texto de C. C. Cowen y B. D. MacCluer [20, Proposition 3.11].

Proposición 1.21 *Sean $\varphi \in \Phi$, $\psi \in H(\mathbb{D})$ y X e Y dos espacios de Banach de funciones analíticas. El operador $W_{\varphi,\psi} : X \to Y$ es compacto (resp. débil compacto) si, y sólo si, para cada sucesión acotada $\{f_n\}$ en X que converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$, la sucesión $\{W_{\varphi,\psi}(f_n)\}$ converge a cero en la topología de la norma de Y (resp. en la topología débil de Y).*

Demostración. Supongamos que $W_{\varphi,\psi} : X \to Y$ es compacto (resp. débil compacto) y sea $\{f_n\}$ una sucesión acotada en X que converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$. Probemos que $\{W_{\varphi,\psi}(f_n)\}$ converge a cero en la topología de la norma de Y (resp. en la topología débil de Y).

Como $W_{\varphi,\psi}$ es compacto (resp. débil compacto) y la sucesión $\{f_n\}$ está acotada, existen una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ y $g \in Y$ tales que $\{W_{\varphi,\psi}(f_{n_k})\}$ converge a g en la topología de la norma de Y (resp. en la topología débil de Y). Pero, como $\{f_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$, se verifica que

$$\psi(z) f_n(\varphi(z)) \to 0$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Por tanto, en cualquiera de los casos, obtenemos que g debe ser la función nula.

Recíprocamente, supongamos que para cada sucesión acotada $\{f_n\}$ en X que converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$, la sucesión $\{W_{\varphi,\psi}(f_n)\}$ converge a cero en la topología de la norma de Y (resp. en la topología débil de Y). Recordemos que estamos denotando por B_X a la bola unidad de X. Probemos que $W_{\varphi,\psi}(B_X)$ es un subconjunto relativamente compacto de Y (resp. relativamente débil compacto de Y). Para ello consideremos una sucesión $\{f_n\}$ en B_X. Por ser X un espacio de Banach de funciones analíticas, B_X es un conjunto relativamente compacto en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos y, por tanto, existe una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ que converge uniformemene sobre compactos a una función $g \in B_X$. Por hipótesis, la sucesión $\{W_{\varphi,\psi}(f_{n_k} - g)\}$ converge a cero en la topología de la norma de Y (resp. en la topología débil de Y). Por tanto, $W_{\varphi,\psi} : X \to Y$ es compacto (resp. débil compacto). ■

Al igual que para la continuidad, bajo hipótesis menos generales, obtenemos en el siguiente resultado una condición necesaria para la compacidad de los operadores de composición ponderados. Casos particulares del siguiente resultado son ya conocidos como, por ejemplo, el que aparece en el texto de J. H. Shapiro [83, Section 3.5] para los operadores de composición en H_2. De hecho, nuestra prueba está fuertemente inspirada en la realizada allí. Previo al resultado introducimos la siguiente notación:

Dada una función $h : \mathbb{D} \to [0,1)$ y otra $g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ diremos que

$$\lim_{h(z)\to 1} g(z) = L$$

si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $r \in (0,1)$ tal que si $z \in \mathbb{D}$ es tal que $h(z) > r$ entonces $|g(z) - L| < \varepsilon$.

Proposición 1.22 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H(\mathbb{D})$ y X e Y dos espacios de Banach de funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$ tales que los polinomios separan los puntos de Y^* y $\lim_{|z|\to 1} \|\delta_z\|_{Y^*} = \infty$. Entonces, si el operador $W_{\varphi,\psi} : X \to Y$ es compacto se verifica que*

$$\lim_{|z|\to 1} |\psi(z)| \frac{\|\delta_{\varphi(z)}\|_{X^*}}{\|\delta_z\|_{Y^*}} = 0.$$

Demostración. Para cada $z \in \mathbb{D}$ definamos el funcional

$$k_z = \frac{\delta_z}{\|\delta_z\|_{Y^*}} \in B_{Y^*}.$$

Ahora, consideremos una sucesión $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1$ y sea k un valor adherente de la sucesión $\{k_{z_n}\}$ en B_{Y^*}. Probemos que $k \equiv 0$ con lo que tendremos que $\{k_{z_n}\}$ converge a cero para la topología débil-$*$. Sea p un polinomio de Y. Entonces existe una subsucesión $\{z_{n_k}\}$ de $\{z_n\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \left|\langle k_{z_{n_k}}, p\rangle\right| = |\langle k, p\rangle|.$$

De esta forma,

$$|\langle k, p\rangle| = \lim_{k\to\infty} \left|\langle k_{z_{n_k}}, p\rangle\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{|p(z_{n_k})|}{\|\delta_{z_{n_k}}\|_{Y^*}} \leq \left(\sup_{z\in\mathbb{D}} |p(z)|\right) \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\|\delta_{z_{n_k}}\|_{Y^*}} = 0.$$

Como los polinomios separan los puntos de Y^* se tiene que $k \equiv 0$. Luego $\{k_{z_n}\}$ converge a cero para la topología débil-$*$ de Y^*.

Finalmente, por la compacidad de $W_{\varphi,\psi}$ se verifica que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| W^*_{\varphi,\psi}\left(k_{z_n}\right) \right\|_{X^*} = 0,$$

es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\psi\left(z_n\right)\right| \frac{\left\|\delta_{\varphi(z_n)}\right\|_{X^*}}{\left\|\delta_{z_n}\right\|_{Y^*}} = 0. \blacksquare$$

También en este caso se tiene que el recíproco no es cierto. En el texto de J. H. Shapiro aparece un ejemplo de un operador de composición no compacto en el espacio de Hardy H_2 cuyo símbolo φ es un producto de Blaschke y tal que $\lim_{|z|\to 1} \frac{\left\|\delta_{\varphi(z)}\right\|_{H_2^*}}{\|\delta_z\|_{H_2^*}} = 0$ (véase [83, Section 10.2]).

Los espacios de Hardy H_p con $1 \leq p < \infty$, el espacio H_v^0 y el espacio pequeño de Bloch $\mathcal{B}^0$ son ejemplos de espacios de Banach de funciones analíticas sobre $\mathbb{D}$ que están en las condiciones de la proposición anterior. Aunque no los hemos definido aún, merece la pena comentar que los espacios de Bergman ponderados A_p^α con $1 \leq p < \infty$ y $\alpha > -1$ también verifican las hipótesis de la proposición anterior. En cambio, ningún espacio pequeño, como por ejemplo los espacios S_p, las verifica.

Finalizamos el capítulo con una observación sobre el conjunto de los elementos $\psi \in H(\mathbb{D})$ para los que el operador $W_{\varphi,\psi}$ es continuo para una función fija $\varphi \in \Phi$. Si X e Y son dos espacios de Banach, denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ al conjunto de los operadores lineales y continuos de X en Y. Además, denotaremos por $\mathcal{K}(X,Y)$ al espacio de Banach de los operadores compactos de X en Y. Cuando $X = Y$ escribiremos simplemente $\mathcal{L}(X)$ y $\mathcal{K}(X)$.

Fijada una función $\varphi \in \Phi$, el conjunto

$$M = \{W_{\varphi,\psi} \in \mathcal{L}(X,Y) : \psi \in H(\mathbb{D})\}$$

de los operadores de composición ponderados lineales y continuos es un subespacio vectorial cerrado de $\mathcal{L}(X,Y)$. En efecto, supongamos que tenemos una sucesión $\{\psi_n\}$ tales que $\{W_{\varphi,\psi_n}\}$ converge a un cierto operador $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ en la norma de $\mathcal{L}(X,Y)$. Podemos suponer que $T \neq 0$ pues el operador nulo pertenece a M. Por otro lado,

$$\lim_n W_{\varphi,\psi_n}(\chi_0) = \lim_n \psi_n = T(\chi_0) \text{ en } Y.$$

Llamemos $\psi = T(\chi_0)$. Probemos que $T = W_{\varphi,\psi}$. Para ello consideremos $f \in X$ y observemos que

$$\begin{aligned} T(f)(z) &= \lim_n W_{\varphi,\psi_n}(f)(z) = \lim_n \psi_n(z) f(\varphi(z)) \\ &= \psi(z) f(\varphi(z)) = W_{\varphi,\psi}(f)(z). \end{aligned}$$

Este sencilla observación será de utilidad para mostrar, entre otros resultados, que si $1 \leq p < \infty$, las únicas funciones $\varphi \in \Phi$ para las que la continuidad de $W_{\varphi,\psi} : H_p \longrightarrow H_p$ implica que $\psi \in H_\infty$ son los productos de Blaschke finitos.

Capítulo 2

Espacios de Hardy

Dedicamos este capítulo al estudio de los operadores de composición ponderados en los espacios de Hardy. De entre todas las familias de espacios de Banach de funciones analíticas que se introdujeron en el Capítulo 1, ésta es de la que más resultados sobre operadores de composición y de multiplicación aparecen en la literatura. Es prácticamente imposible hacer una lista de los resultados conocidos sobre operadores de composición entre los espacios de Hardy. A pesar de ello, quedan interesantes problemas abiertos que siguen proporcionando una multitud de trabajos.

El primer resultado importante sobre los operadores de composición en los espacios de Hardy se tiene como consecuencia del Principio de Subordinación de Littlewood [25, Theorem 1.7] que data de 1925: los operadores de composición sobre los espacios de Hardy son siempre continuos. Con respecto a este resultado, la situación es algo más compleja cuando se trata con los operadores de composición ponderados. Esto quedará patente con los ejemplos que aparecen en la segunda sección de este capítulo. Veremos que los operadores de composición ponderados no son siempre continuos y daremos una caracterización de ésta cuando el dominio es H_p y el rango es H_q para $p \geq q$. Las tres siguientes secciones se dedican al estudio de la compacidad, compacidad débil y la continuidad completa de estos operadores. Finalizamos el capítulo con algunas aplicaciones de nuestros resultados al estudio de los operadores de composición entre los espacios de Hardy del semiplano.

Antes de pasar a estudiar los operadores de composición ponderados, merece la pena hacer algunos comentarios conocidos por los expertos en el área sobre los operadores de multiplicación. Consideramos conveniente escribir la demostración ya que no hemos encontrado una referencia adecuada para ellos.

Observemos que, por el Corolario 1.19, se sabe que si $1 \leq p, q < \infty$ y $M_\psi : H_p \longrightarrow H_q$ es continuo entonces

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |\psi(z)| \left(1 - |z|^2\right)^{p-q} < +\infty.$$

Es necesario pues distinguir tres casos. En primer lugar, si $p = q$, se tiene entonces que $\psi \in H_\infty$. Pero, como el recíproco es obvio, se verifica que el operador $M_\psi : H_p \longrightarrow H_p$ es continuo si, y sólo si, $\psi \in H_\infty$. En segundo lugar, si $p < q$, al verificarse que $\lim_{|z| \to 1} \left(1 - |z|^2\right)^{p-q} = \infty$, la tesis obtenida equivale a que $\lim_{|z| \to 1} |\psi(z)| = 0$. Por el Principio del Módulo Máximo, esto sólo ocurre cuando $\psi \equiv 0$. Se tiene así que el operador $M_\psi : H_p \longrightarrow H_q$ es continuo si, y sólo si, la función ψ es idénticamente nula.

Para estudiar el caso en que $p > q$, necesitamos una de las herramientas básicas en el estudio de los espacios de Hardy: la llamada factorización interior-exterior. De hecho, sólo necesitaremos en la memoria que dada una función $f \in H_1$, existe una función $f_1 \in H_1$, que no se anula en el disco unidad y tal que $\left|f\left(e^{i\theta}\right)\right| = \left|f_1\left(e^{i\theta}\right)\right|$ casi por doquier en $\mathbb{T}$. La construcción de tal función f_1 es bien conocida. Comentamos su prueba para simultáneamente introducir alguna terminología. Consideremos $\{z_n\}$ la sucesión de ceros (contados con su multiplicidad) de la función f. Esta sucesión satisface la llamada condición de Blaschke: $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |z_n|) < \infty$. Esto hace que el siguiente producto, llamado producto de Blaschke, converja uniformemente sobre compactos en el disco unidad $\mathbb{D}$:

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{z}_n}{|z_n|} \frac{z_n - z}{1 - z_n z}$$

(donde hemos usado el convenio de que $\frac{0}{0} = 1$). La función B es una función analítica en $\mathbb{D}$ que tiene exactamente los mismos ceros que f y tal que $\|B\|_{H_\infty} = 1$ y $\left|B(e^{i\theta})\right| = 1$ casi por doquier en $\mathbb{T}$. Basta ahora tomar $f_1 = f/B$. La función B es uno de los dos tipos estándar de función interior. Recordemos que una función g analítica en el disco unidad se dice que es *interior* si $|g(z)| \leq 1$ para cada $z \in \mathbb{D}$ y $\left|g\left(e^{i\theta}\right)\right| = 1$ casi por doquier en $\mathbb{T}$ y que una función F analítica en el disco unidad se dice que es *exterior* si es de la forma

$$F(z) = \lambda \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} k(\theta)\, d\theta\right]$$

donde k es una función con valores reales e integrable en $[-\pi,\pi]$ y λ es un número complejo de módulo 1. Pues bien, si f es una función en H_1, no idénticamente cero, entonces puede ser factorizada como $f = gF$ donde g es una función interior y F es una función exterior. Esta factorización es única salvo constantes de módulo uno y puede verse con detalle en cualquier texto de espacios de Hardy, por ejemplo en [35, Chapter 5], y se conoce como factorización interior-exterior.

Estamos ya en condiciones de caracterizar los operadores de multiplicación cuando $p > q$. Concretamente, vamos a probar que el operador $M_\psi : H_p \to H_q$ es continuo si, y sólo si, $\psi \in H_r$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$. En efecto, supongamos que $\psi \in H_r$ y sea $f \in H_p$. Por la Desigualdad de Hölder tenemos que

$$\begin{aligned}
\|M_\psi(f)\|_{H_q}^q &= \int_{\mathbb{T}} |\psi f|^q \, dm \le \left(\int_{\mathbb{T}} (|\psi|^q)^{r/q} \, dm\right)^{q/r} \left(\int_{\mathbb{T}} (|f|^q)^{p/q} \, dm\right)^{q/p} \\
&= \left(\int_{\mathbb{T}} |\psi|^r \, dm\right)^{q/r} \left(\int_{\mathbb{T}} |f|^p \, dm\right)^{q/p} = \|\psi\|_{H_r}^q \, \|f\|_{H_p}^q .
\end{aligned}$$

Recíprocamente, supongamos que $M_\psi : H_p \to H_q$ es continuo. Entonces $\psi \in H_q$. Dividiendo por un producto de Blaschke apropiado obtenemos una función $F \in H_q$ tal que $|F| = |\psi|$ casi por doquier en $\mathbb{T}$ y F no se anula en $\mathbb{D}$. Probemos que el operador $M_{F^q} : H_{p/q} \to H_1$ es continuo. Para cada $f \in H_{p/q}$, tomamos también una función $f_1 \in H_{p/q}$ tal que $|f| = |f_1|$ casi por doquier en $\mathbb{T}$ y tal que f_1 no se anula en $\mathbb{D}$. Se verifica así que

$$\begin{aligned}
\|M_{F^q}(f)\|_{H_1} &= \int_{\mathbb{T}} |F|^q \, |f| \, dm = \int_{\mathbb{T}} |\psi|^q \, |f_1| \, dm \\
&= \int_{\mathbb{T}} |\psi|^q \left|f_1^{1/q}\right|^q dm = \left\|M_\psi\left(f_1^{1/q}\right)\right\|_{H_q}^q \\
&\le \|M_\psi\|_{H_p \to H_q}^q \left\|f_1^{1/q}\right\|_{H_p}^q = \|M_\psi\|_{H_p \to H_q}^q \, \|f\|_{H_{p/q}} .
\end{aligned}$$

Esto prueba que $M_{F^q} : H_{p/q} \to H_1$ es continuo y, por tanto, $F^q f \in H_1$, para toda $f \in H_{p/q}$. Como esto equivale a que $\overline{F}^q f \in L_1$, para toda $f \in H_{p/q}$, y se tiene así que $F^q \in \left(H_{p/q}\right)^* = H_{r/q}$, de donde se deduce que F, y por tanto ψ, pertenece a H_r.

Cuando uno de los dos índices p o q no es finito se obtiene de manera inmediata que, si $1 \le p \le \infty$, el operador $M_\psi : H_\infty \to H_p$ es continuo si, y sólo si, $\psi \in H_p$, y que, si $1 \le p < \infty$, el operador $M_\psi : H_p \to H_\infty$ es continuo si, y sólo si, ψ es la función nula.

2.1 Medidas de Carleson

Dedicamos esta sección a introducir la noción de medida de Carleson y medida de Carleson compacta que nos permitirá en éste y en los siguientes capítulos caracterizar la continuidad y compacidad de los operadores de composición ponderados entre distintos espacios de funciones analíticas.

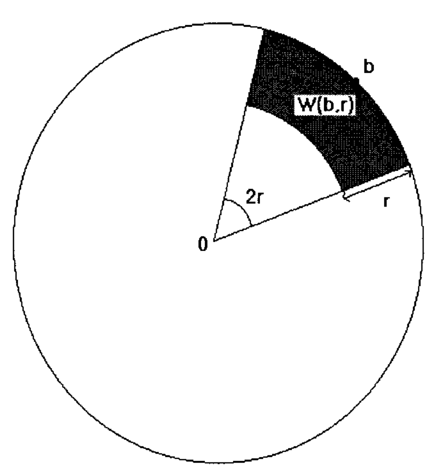
Este tipo de medidas fueron introducidas por L. Carleson a mediados del Siglo XX para probar el Teorema de la Corona (véase [25]). Destaquemos que el primer trabajo donde aparecen medidas de Carleson en el contexto de los operadores de composición es en un artículo de B. D. MacCluer del año 1985 [53]. Concretamente, ella caracteriza la continuidad de los operadores de composición en los espacios de Hardy con varias variables en términos de una cierta medida definida a partir del símbolo del operador de composición. Nótese que, a diferencia de lo que sucede con una variable, estos operadores de composición no son siempre continuos.

Antes de dar la definición de medida de Carleson, necesitamos introducir la siguiente terminología.

Definición 2.1 *Para cada $b = e^{it} \in \mathbb{T}$ y $0 < r < 1$ se define la ventana de Carleson asociada a b y r como el conjunto*

$$W(b, r) = \left\{ z = \rho e^{i\theta} \in \overline{\mathbb{D}} : 1 - r \leq \rho \leq 1, \ \ |\theta - t| \leq r \right\}.$$

Este conjunto es de la siguiente forma:



Para dar una mayor generalidad necesaria más adelante, en la siguiente definición Δ denotará bien a $\mathbb{D}$ o bien a $\overline{\mathbb{D}}$. En cada situación se indicará el conjunto sobre el que se esté trabajando.

Definición 2.2 *Sea μ una medida de Borel finita y positiva sobre Δ y fijemos un número $\beta \geq 1$. Diremos que μ es una medida de Carleson de orden β sobre Δ si existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\mu\left(W\left(b,r\right)\cap\Delta\right)\leq Cr^{\beta}$$

para todo $b \in \mathbb{T}$ y $0 < r < 1$. Diremos que μ es una medida de Carleson compacta de orden β sobre Δ si verifica que

$$\lim_{r\to 0}\sup_{b\in\mathbb{T}}\frac{\mu\left(W\left(b,r\right)\cap\Delta\right)}{r^{\beta}}=0.$$

Cuando β sea igual a 1, omitiremos la expresión "de orden β".

Para cada $b \in \mathbb{T}$ y $0 < r < 1$, tomemos $S(b,r) = \left\{z \in \overline{\mathbb{D}} : |z-b| \leq r\right\}$. Es conocido que existe una $c < 1$ tal que $W(b,rc) \subset S(b,r) \subset W(b,r)$ para cualesquiera r y b [20, pág. 37]. De esta forma, en la anterior definición es equivalente considerar los conjuntos $S(b,r)$ o $W(b,r)$ (posiblemente con constante C distinta).

Por otro lado, es bien conocido también que una medida μ es de Carleson de orden β ($\beta \geq 1$) sobre $\mathbb{D}$ si, y sólo si, el espacio de Hardy H_p está contenido en $L_{\beta p}(\mathbb{D},\mu)$. Esto equivale a que el operador de inclusión sea continuo. Pues bien, nuestro próximo objetivo es extender este resultado a medidas de Carleson sobre $\overline{\mathbb{D}}$.

Teorema 2.3 *Sean μ una medida finita y positiva en $\overline{\mathbb{D}}$, $1 \leq p < \infty$ y $\beta \geq 1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) μ es una medida de Carleson de orden β sobre $\overline{\mathbb{D}}$;

(ii) El operador inclusión $H_p \to L_{\beta p}\left(\overline{\mathbb{D}},\mu\right)$ es continuo.

Demostración. Probamos en primer lugar que (i) implica (ii). Distinguimos dos casos: $\beta = 1$ y $\beta > 1$. El primero de éstos puede verse en [20, Theorem 2.35]. De hecho, éste es una extensión de un resultado sobre medidas de Carleson sobre $\mathbb{D}$ debido al propio Carleson (véase, por ejemplo, [20, Theorem 2.33]).

Pasamos al caso en que $\beta > 1$. Supongamos que μ es una medida de Carleson de orden β sobre $\overline{\mathbb{D}}$. Vamos a hacer una reducción al disco abierto probando que la medida μ cuando se restringe a $\mathbb{T}$ es cero. Así, podremos aplicar [25, Theorem 9.4] donde se prueba que ser una medida de Carleson de orden β sobre $\mathbb{D}$ equivale a que el operador inclusión $H_p \longrightarrow L_{\beta p}(\mathbb{D}, \mu)$ sea continuo.

Por hipótesis, se verifica que $\mu(E) \leq Cm(E)^\beta$ para todo $E \subset \mathbb{T}$ medible. Se tiene así que la medida $\mu_{|\mathbb{T}}$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue m en $\mathbb{T}$. Denotemos por g a la derivada de Radon-Nikodým de $\mu_{|\mathbb{T}}$ con respecto a m. Por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, se tiene que

$$g(b) = \lim_{E \searrow b} \frac{1}{m(E)} \int_E g dm = \lim_{E \searrow b} \frac{\mu(E)}{m(E)} \leq \lim_{E \searrow b} Cm(E)^{\beta - 1} = 0$$

casi por doquier en $\mathbb{T}$. Es decir, $\mu_{|\mathbb{T}} = 0$.

Para la prueba de que (ii) implica (i) se pueden seguir los mismos pasos que los dados en [25, pág. 157]. ■

De la demostración del anterior resultado se sigue que

Corolario 2.4 *Si μ es una medida de Carleson de orden β sobre $\overline{\mathbb{D}}$ con $\beta > 1$, entonces $\mu(E) = 0$ para todo conjunto medible $E \subseteq \mathbb{T}$.*

El análogo del teorema anterior para medidas de Carleson compactas aparece en un trabajo de H. Hunziker y H. Jarchow [38, Theorem 2.4].

Teorema 2.5 *Sean μ una medida finita y positiva en $\overline{\mathbb{D}}$, $1 \leq p < \infty$ y $\beta \geq 1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) μ es una medida de Carleson compacta de orden β sobre $\overline{\mathbb{D}}$;

(ii) El operador inclusión $H_p \longrightarrow L_{\beta p}\left(\overline{\mathbb{D}}, \mu\right)$ es compacto.

2.2 Continuidad

Dedicamos esta sección a estudiar la continuidad de los operadores de composición ponderados entre diferentes espacios de Hardy. Comenzamos con algunos ejemplos que muestran que la situación es bien distinta a la de los operadores de composición (recuérdese el Principio de Subordinación de Littlewood) y a la de los operadores de multiplicación (si $p \geq q$, existe $r \in [1,\infty]$ tal que $M_\psi : H_p \longrightarrow H_q$ es continuo si, y sólo si, $\psi \in H_r$). Estos ejemplos nos clarificarán algo el camino a seguir para la caracterización tanto de la continuidad como de la compacidad de un operador de composición ponderado en H_p. Nos centramos, de momento, en el caso en que el índice del dominio y del rango del operador coinciden.

Puesto que todo operador de composición en H_p es continuo, es fácil obtener que si $\psi \in H_\infty$ entonces $W_{\varphi,\psi} : H_p \longrightarrow H_p$ es continuo. El siguiente resultado muestra que para productos de Blaschke finitos es cierto el recíproco. Necesitamos para ello el siguiente lema.

Lema 2.6 *Consideremos n números complejos no nulos $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{D}$ y φ el producto de Blaschke finito $\varphi(z) = z^m \prod_{k=1}^{n} \frac{\overline{\alpha_k}}{|\alpha_k|} \frac{\alpha_k - z}{1-\overline{\alpha_k}z}$. Llamemos $\alpha = \min\{|\alpha_k| : k = 1, ..., n\}$. Entonces se verifica que*

$$|\varphi(z)| \geq |z|^m \left(\frac{|z| - \alpha}{1 - \alpha|z|}\right)^n$$

siempre que $|z| \geq \max\{|\alpha_k| : k = 1, ..., n\}$.

Demostración. Usando que la función $x \mapsto \frac{|z|-x}{1-x|z|}$ es decreciente en $(0,1)$, basta obtener el resultado para $m = 0$ y $n = 1$. En este caso se tiene que si $\alpha_1 = |\alpha_1| e^{i\xi}$ y $z = re^{i\theta}$ entonces

$$|\varphi(z)|^2 = \left|\frac{|\alpha_1| - re^{i(\theta-\xi)}}{1 - |\alpha_1| re^{i(\theta-\xi)}}\right|^2 = \frac{|\alpha_1|^2 + r^2 - 2|\alpha_1| r\cos(\theta - \xi)}{1 + |\alpha_1|^2 r^2 - 2|\alpha_1| r\cos(\theta - \xi)}.$$

Puesto que la función $x \mapsto \frac{|\alpha_1|^2 + r^2 - 2|\alpha_1| rx}{1 + |\alpha_1|^2 r^2 - 2|\alpha_1| rx}$ es decreciente en el intervalo $[-1, 1]$, se tiene ahora que

$$\frac{|\alpha_1|^2 + r^2 - 2|\alpha_1| r\cos(\theta - \xi)}{1 + |\alpha_1|^2 r^2 - 2|\alpha_1| r\cos(\theta - \xi)} \geq \left(\frac{|z| - |\alpha_1|}{1 - |\alpha_1||z|}\right)^2,$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Luego, si $|z| \geq |\alpha_1|$ tenemos que

$$|\varphi(z)| \geq \frac{|z| - |\alpha_1|}{1 - |\alpha_1||z|}. \blacksquare$$

Proposición 2.7 *Sean φ un producto de Blaschke finito y $\psi \in H_p$, donde $1 \leq p < \infty$. Entonces $W_{\varphi,\psi}$ es continuo en H_p si, y sólo si, $\psi \in H_\infty$.*

Demostración. Basta probar que si $W_{\varphi,\psi}$ es continuo en H_p entonces $\psi \in H_\infty$. Por el Corolario 1.19 y la Proposición 1.4, existe una constante M tal que para todo $z \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$|\psi(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^{1/p}}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^{1/p}} \leq M.$$

Por el lema anterior, existen $r_0 \in (0,1)$ y $\alpha \in (0,1)$ tales que $|\varphi(z)| \geq |z|^m \left(\frac{|z|-\alpha}{1-\alpha|z|}\right)^n$ para $|z| \geq r_0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2} &\leq \frac{1-|z|^{2m}\left(\frac{|z|-\alpha}{1-\alpha|z|}\right)^{2n}}{1-|z|^2} \\
&= \frac{1-|z|^{2m}}{1-|z|^2} + |z|^{2m} \frac{1-\left(\frac{|z|-\alpha}{1-\alpha|z|}\right)^{2n}}{1-|z|^2} \\
&\leq \sum_{k=0}^{m-1} |z|^{2k} + \frac{\left(1-\frac{|z|-\alpha}{1-\alpha|z|}\right)}{1-|z|^2} \frac{\left(1-\left(\frac{|z|-\alpha}{1-\alpha|z|}\right)^{2n}\right)}{\left(1-\frac{|z|-\alpha}{1-\alpha|z|}\right)} \\
&= \sum_{k=0}^{m-1} |z|^{2k} + \frac{1+\alpha}{(1-\alpha|z|)(1+|z|)} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{|z|-\alpha}{1-\alpha|z|}\right)^k \\
&\leq m + \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \sum_{k=0}^{2n-1} 1 = m + 2n\frac{1+\alpha}{1-\alpha}.
\end{aligned}$$

De esta forma, se verifica

$$|\psi(z)| \leq M \frac{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^{1/p}}{\left(1-|z|^2\right)^{1/p}} \leq M \left(m + 2n\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{1/p}$$

siempre que $|z| \geq r_0$. Por tanto, ψ está acotada en $\mathbb{D}$. ■

El hecho de que en la proposición anterior la función φ tenga un número finito de ceros en $\mathbb{D}$ no es superfluo. De hecho, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.8 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $1 < p < \infty$ tales que*

$$\{\psi \in H_p : W_{\varphi,\psi} \text{ es continuo en } H_p\} = H_\infty.$$

Entonces el número de ceros de φ en $\mathbb{D}$ es finito.

Demostración. Consideremos el espacio de Banach

$$X := \{\psi \in H_p : W_{\varphi,\psi} \text{ es continuo en } H_p\}$$

dotado con la norma $\|\psi\|_X := \|W_{\varphi,\psi}\|_{H_p \to H_p}$ (véase el comentario de la página 19). Puesto que $X = H_\infty$ y $\|\psi\|_X \leq \|\psi\|_{H_\infty} \|C_\varphi\|_{H_p \to H_p}$, el Teorema de la Aplicación Abierta nos muestra que la inclusión de X en H_∞ es continua y, por tanto, existe una constante c tal que $\|\psi\|_{H_\infty} \leq c\,\|\psi\|_X$ para toda $\psi \in X$.

Sea $\omega \in \mathbb{D}$ un cero de la función φ. Puesto que $\varphi \circ \varphi_\omega(0) = 0$, el Principio de Subordinación de Littlewood afirma que el operador de composición con la función $\varphi \circ \varphi_\omega$ tiene norma igual a uno en H_p. Tomemos $\psi(z) = \left(\frac{1}{1-\overline{\omega}z}\right)^{2/p}$. Puesto que $\psi \in H_\infty$, se tiene que $W_{\varphi,\psi}$ es continuo en H_p. Por otro lado, un sencillo cálculo muestra que $|\psi(z)|^p = \frac{|\varphi_\omega'(z)|}{1-|\omega|^2}$. De esta forma, para cada $g \in H_p$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}} |\psi|^p |g \circ \varphi|^p \, dm &= \frac{1}{1-|\omega|^2} \int_{\mathbb{T}} |\varphi_\omega'| \, |g \circ \varphi|^p \, dm \\
&= \frac{1}{1-|\omega|^2} \int_{\mathbb{T}} |g \circ \varphi \circ \varphi_\omega|^p \, dm \\
&\leq \frac{1}{1-|\omega|^2} \int_{\mathbb{T}} |g|^p \, dm.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\|\psi\|_X = \|W_{\varphi,\psi}\|_{H_p} \leq \left(\frac{1}{1-|\omega|^2}\right)^{1/p}.$$

Por otro lado, tenemos que $\|\psi\|_{H_\infty} = \left(\frac{1}{1-|\omega|}\right)^{2/p}$. Luego, hemos probado que para cualquier cero ω de la función φ se verifica que

$$\left(\frac{1}{1-|\omega|}\right)^{2/p} \leq c \left(\frac{1}{1-|\omega|^2}\right)^{1/p}.$$

Es decir, $|\omega| \leq 1 - 2(1 + c^p)^{-1} < 1$. Por tanto, los ceros de φ están en un disco cerrado dentro del disco abierto unidad, lo que implica que φ tiene un número finito de ceros. ■

Para $p = 1$ el anterior resultado también es cierto. Esto se verá más adelante como consecuencia del Corolario 2.19.

Si la función φ no es interior el resultado anterior se puede concretar más en el siguiente sentido.

Proposición 2.9 *Sean $1 \leq p < r < \infty$. Si $\varphi \in \Phi$ no es una función interior, entonces existe una función $\psi \in H_p \setminus H_r$ tal que $W_{\varphi,\psi}$ es continuo en H_p.*

Demostración. Puesto que φ no es una función interior, podemos tomar un conjunto medible $E \subseteq \mathbb{T}$ con $m(E) > 0$ y un $r \in (0,1)$ tal que $|\varphi(z)| < r$ para cada $z \in E$. Tomemos $\lambda \in E$ un punto de densidad de E. Es decir, tal que

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{m(E \cap (\lambda - \delta, \lambda + \delta))}{2\delta} = 1$$

(véase [73, pág. 165]). Definamos la función h en $\mathbb{T}$ dada por

$$h(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{si } \xi \notin E, \\ (\xi - \lambda)^{-1/r}, & \text{si } \xi \in E, \xi \neq \lambda. \end{cases}$$

Entonces es claro que $h \notin L_r(\mathbb{T}, m)$ y que $h \in L_p(\mathbb{T}, m)$. Además, la función $\log|h|^p \in L_1(\mathbb{T}, m)$. Por tanto, $|h|^p$ es el módulo de una función $\phi \in H_1$ que no se anula en $\mathbb{D}$ (véase, por ejemplo, [35, pág. 53]). Tomemos $\psi = \phi^{1/p} \in H_p$. Entonces $|\psi| = |h|$ y, por tanto, $\psi \notin H_r$. Por otro lado, si $g \in H_p$ se tiene que $g \circ \varphi$ está esencialmente acotada sobre E por una cierta constante M. Se tiene así que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}} |\psi|^p |g \circ \varphi|^p \, dm &= \int_E |\psi|^p |g \circ \varphi|^p \, dm + \int_{\mathbb{T} \setminus E} |\psi|^p |g \circ \varphi|^p \, dm \\ &\leq M \int_{\mathbb{T}} |\psi|^p \, dm + \int_{\mathbb{T} \setminus E} |g \circ \varphi|^p \, dm \\ &\leq M \|\psi\|_{H_p}^p + \|C_\varphi\|_{H_p \to H_p}^p \|g\|_{H_p}^p . \end{aligned}$$

Por tanto, $\psi g \circ \varphi \in H_p$ y así $W_{\varphi,\psi}$ es continuo en H_p. ■

Como consecuencia de la anterior proposición vamos a ver que las únicas funciones φ para las que se verifica la Proposición 2.7 son precisamente los productos de Blaschke finitos. Necesitamos para ello un breve comentario sobre los isomorfismos en los espacios de Hardy. Dado $\omega \in \mathbb{D}$, una sencilla cuenta muestra que $\varphi_\omega \circ \varphi_{-\omega}$ es la identidad en el disco unidad. Esto junto con el Principio de Subordinación de Littlewood prueba un resultado archiconocido: los operadores de composición cuyo símbolo es φ_ω para algún $\omega \in \mathbb{D}$ son isomorfismo en los espacios de Hardy.

Consideremos ahora una función $\varphi \in \Phi$ para la que el conjunto

$$\{\psi \in H_p : W_{\varphi,\psi} \text{ es continuo en } H_p\}$$

esté formado por funciones acotadas. Por la Proposición 2.9, ésta debe ser una función interior. Por el Teorema de Frostman [25, pág. 30], existe $\omega \in \mathbb{D}$ tal que $\varphi_\omega \circ \varphi$ es un producto de Blaschke. Puesto que $W_{\varphi,\psi}$ es continuo si, y sólo si, $W_{\varphi_\omega \circ \varphi,\psi}$ lo es (nótese que $W_{\varphi_\omega \circ \varphi,\psi} = W_{\varphi,\psi} \circ C_{\varphi_\omega}$), la Proposición 2.8 nos muestra que $\varphi_\omega \circ \varphi$ tiene un número finito de ceros. Es decir, $\varphi_\omega \circ \varphi$ es un producto de Blaschke finito. Basta ya un simple cálculo para obtener que también φ es un producto de Blaschke finito. Es decir, hemos probado el siguiente resultado.

Corolario 2.10 *Fijemos $1 < p < \infty$ y $\varphi \in \Phi$. Entonces φ es un producto de Blaschke finito si, y sólo si,*

$$\{\psi \in H_p : W_{\varphi,\psi} \textit{ es continuo en } H_p\} = H_\infty.$$

Fijado p y con lo visto hasta ahora hemos probado que existen funciones $\varphi \in \Phi$ tales que el conjunto $\{\psi \in H_p : W_{\varphi,\psi}$ es continuo en $H_p\}$ puede ser o bien H_∞ o bien H_p. En el siguiente resultado probamos que, de hecho, no existen más espacios de Hardy cumpliendo esto (recordemos que para funciones no interiores este resultado ya se ha puesto de manifiesto).

Proposición 2.11 *Fijemos $1 < p < r < \infty$. Entonces no existe ninguna función $\varphi \in \Phi$ tal que*

$$H_r = \{\psi \in H_p : W_{\varphi,\psi} \textit{ es continuo en } H_p\}.$$

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que existe $\varphi \in \Phi$ tal que

$$H_r = \{\psi \in H_p : W_{\varphi,\psi} \text{ es continuo en } H_p\}.$$

Tomemos $q = \frac{pr}{r-p}$ y observemos que $q > p$. Por hipótesis, para cada función $g \in H_p$ se tiene que $g \circ \varphi H_r \subseteq H_p$. Sean p' y q' los exponentes conjugados de p

y q respectivamente (es decir, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$ y $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1$). Usando la Desigualdad de Hölder obtenemos ahora que $g \circ \varphi H_r H_{p'} \subseteq H_1$. Vamos a ver que $H_{q'} \subseteq H_r H_{p'}$ y así se tendrá que $g \circ \varphi H_{q'} \subseteq H_1$. Para ello tomemos $f \in H_{q'}$ y $f = uF$ una factorización interior-exterior de la función f. Entonces, usando que $\frac{1}{r}+\frac{1}{p'}=\frac{1}{q'}$, se tiene que $f = \left(uF^{\frac{q'}{r}}\right) F^{\frac{q'}{p'}}$ es una factorización de f como producto de una función de H_r y otra de $H_{p'}$.

Resumiendo, hemos probado que para toda función $g \in H_p$ se tiene que $g \circ \varphi \in H_q$. Por tanto, el operador C_φ es continuo de H_p en H_q. Es decir, existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|C_\varphi (g)\|_{H_q} \leq c \|g\|_{H_p},$$

para toda $g \in H_p$. Por otro lado, por la Proposición 2.9, φ es una función interior. De esta forma se tiene que

$$\left(\frac{1-|\varphi(0)|}{1+|\varphi(0)|}\right)^{1/q} \|g\|_{H_q} \leq \|C_\varphi (g)\|_{H_q}$$

(véase, por ejemplo, [20, Theorem 3.8]). Por tanto, hemos probado que $H_p \subseteq H_q$, lo que contradice que $q > p$. ■

Los resultados vistos hasta ahora en esta sección fueron probados por K. R. M. Attele para $p = 2$ en [3]. Las pruebas de las Proposiciones 2.8, 2.9, 2.11 y el Corolario 2.10 están fuertemente inspiradas en dicho trabajo.

Pasamos ya a dar caracterizaciones de la continuidad del operador $W_{\varphi,\psi}$ entre H_p y H_q. El caso más simple es cuando uno de los dos índices no es finito. Si el dominio es H_∞ y $\psi \in H_q$ entonces es claro que

$$\|W_{\varphi,\psi}(f)\|_{H_q} = \left(\int_{\mathbb{T}} |\psi f \circ \varphi|^q \, dm\right)^{1/q} \leq \|f\|_{H_\infty} \|\psi\|_{H_q},$$

es decir, $\psi f \circ \varphi \in H_q$. De esta forma se tiene el siguiente resultado.

Proposición 2.12 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_q$ con $1 \leq q \leq \infty$. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_q$ es continuo si, y sólo si, $\psi \in H_q$.*

Si ahora el rango es H_∞ se tiene que

Proposición 2.13 *Sean $\varphi \in \Phi$, $\psi \in H_\infty$ y X un espacio de Banach de funciones analíticas. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : X \to H_\infty$ es continuo si, y sólo si,*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \left\|\delta_{\varphi(z)}\right\|_{X^*} < \infty.$$

Demostración. Si el operador $W_{\varphi,\psi} : X \to H_\infty$ es continuo, basta aplicar el Corolario 1.19 para obtener la acotación de la función $|\psi(z)| \left\|\delta_{\varphi(z)}\right\|_{X^*}$ en $\mathbb{D}$.

Recíprocamente, supongamos que existe una constante M tal que

$$|\psi(z)| \left\|\delta_{\varphi(z)}\right\|_{X^*} \leq M$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Entonces, dado $f \in X$ se tiene que

$$|\psi(z) f(\varphi(z))| \leq |\psi(z)| \|f\|_X \left\|\delta_{\varphi(z)}\right\|_{X^*} \leq M \|f\|_X . \blacksquare$$

Teniendo en cuenta la Proposición 1.4, se deduce del resultado anterior que

Corolario 2.14 *Sean $\varphi \in \Phi$, $\psi \in H_\infty$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_\infty$ es continuo si, y sólo si,*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|^p}{1 - |\varphi(z)|^2} < \infty$$

Es fácil ahora mostrar ejemplos de operadores de composición ponderados continuos con rango H_∞. Por ejemplo, si tomamos $\varphi(z) = \frac{z+1}{2}$ y $\psi(z) = z-1$, entonces

$$\frac{|\psi(z)|^2}{1 - |\varphi(z)|^2} \leq 4,$$

luego $W_{\varphi,\psi} : H_2 \to H_\infty$ es continuo.

A la vista de los dos resultados anteriores podemos centrar ya nuestro interés en los casos en que tanto p como q son finitos. Concretamente, vamos a estudiar la siguiente situación: $1 \leq p \leq q < \infty$. Como ya se ha anunciado, vamos a aplicar los resultados de la sección anterior sobre medidas de Carleson, para lo que necesitamos introducir la siguiente notación.

Definición 2.15 *Sea $1 \leq q < \infty$. Para cada par de funciones $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_q$ definimos la medida $\mu_{\varphi,\psi,q}$ sobre $\overline{\mathbb{D}}$ como*

$$\mu_{\varphi,\psi,q}(E) = \int_{\varphi^{-1}(E)\cap\mathbb{T}} |\psi|^q \, dm$$

para todo E subconjunto medible de $\overline{\mathbb{D}}$. Merece la pena recordar que estamos considerando las extensiones de las funciones φ y ψ al conjunto $\overline{\mathbb{D}}$ salvo en un conjunto de medida cero de $\mathbb{T}$.

Es habitual obtener propiedades de las funciones de H_p a partir del comportamiento de las funciones de $L_p(\mathbb{T}, m)$. La medida definida anteriormente, está definida en $\overline{\mathbb{D}}$. El siguiente lema, que es una simple generalización del Teorema del Cambio de Variable que aparece en [33, pag. 163], nos permitirá pasar de $\overline{\mathbb{D}}$ a $\mathbb{T}$ y viceversa.

Lema 2.16 *Sea $1 \leq q < \infty$ y consideremos dos funciones $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_q$. Entonces se verifica que*

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} g d\mu_{\varphi,\psi,q} = \int_{\mathbb{T}} |\psi|^q (g \circ \varphi)\, dm,$$

para toda función g medible y positiva sobre $\overline{\mathbb{D}}$.

Demostración. Si g es una función medible y simple definida sobre $\overline{\mathbb{D}}$ dada por $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i}$ donde χ_{E_i} denota la función característica en E_i y $\{E_i\}$ es un recubrimiento finito de $\overline{\mathbb{D}}$ por conjuntos medibles y disjuntos, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\mathbb{D}}} g d\mu_{\varphi,\psi,q} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu_{\varphi,\psi,q}(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int_{\varphi^{-1}(E_i)\cap\mathbb{T}} |\psi|^q\, dm \\
&= \int_{\mathbb{T}} |\psi|^q \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{\varphi^{-1}(E_i)\cap\mathbb{T}} \right) dm = \int_{\mathbb{T}} |\psi|^q (g \circ \varphi)\, dm.
\end{aligned}$$

Supongamos ahora que g es una función medible y positiva sobre $\overline{\mathbb{D}}$. Entonces existe una sucesión creciente $\{g_n\}$ de funciones medibles positivas y simples tal que $g_n(z) \to g(z)$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$ (véase [73, Teorema 1.4.2]). De esta forma se tiene que

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} g_n d\mu_{\varphi,\psi,q} \to \int_{\overline{\mathbb{D}}} g d\mu_{\varphi,\psi,q}.$$

Por otro lado, $\{|\psi|^q g_n \circ \varphi\}$ es una sucesión creciente tal que

$$|\psi(z)|^q g_n(\varphi(z)) \to |\psi(z)|^q g(\varphi(z))$$

para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$, luego

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} g_n d\mu_{\varphi,\psi,q} = \int_{\mathbb{T}} |\psi|^q (g_n \circ \varphi)\, dm \to \int_{\mathbb{T}} |\psi|^q (g \circ \varphi)\, dm.$$

Es decir,

$$\int_{\overline{\mathbb{D}}} g d\mu_{\varphi,\psi,q} = \int_{\mathbb{T}} |\psi|^q (g \circ \varphi)\, dm. \blacksquare$$

Pasamos ya a obtener la caracterización de la continuidad de $W_{\varphi,\psi}$ cuando $q \geq p$. Antes de enunciarla, recordemos que B. D. MacCluer [53] obtuvo una caracterización de la continuidad de los operadores de composición en los espacios de Hardy de varias variables en términos de que una cierta medida sea de Carleson.

Teorema 2.17 *Sean* $1 \leq p \leq q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in H_q$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ *es continuo;*

(*ii*) *La medida* $\mu_{\varphi,\psi,q}$ *es de Carleson de orden* q/p *sobre* $\overline{\mathbb{D}}$.

Demostración. Por el Teorema 2.3, la condición (*ii*) equivale a que exista una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\overline{\mathbb{D}}} |f(z)|^q \, d\mu_{\varphi,\psi,q} \right)^{1/q} &= \|f\|_{L_q(\overline{\mathbb{D}},\mu_{\varphi,\psi,q})} \qquad (2.1) \\ &\leq C \|f\|_{H_p} = C \left(\int_{\mathbb{T}} |f(z)|^p \, dm \right)^{1/p}, \end{aligned}$$

para toda $f \in H_p$. Teniendo en cuenta el Lema 2.16, la desigualdad (2.1) equivale a que

$$\left(\int_{\mathbb{T}} |\psi(z)|^q \, |f(\varphi(z))|^q \, dm \right)^{1/q} \leq C \left(\int_{\mathbb{T}} |f(z)|^p \, dm \right)^{1/p}$$

para toda $f \in H_p$, es decir, $\|W_{\varphi,\psi}(f)\|_{H_q} \leq C \|f\|_{H_p}$. $\blacksquare$

El próximo resultado nos muestra que en el contexto del teorema anterior, cuando $p < q$, el operador de composición ponderado "está próximo" a ser compacto como quedará de manifiesto en la siguiente sección de la memoria (compárese este resultado con la Proposición 2.27 y los Teoremas 2.30 y 2.35).

Corolario 2.18 *Sean* $1 \leq p < q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in H_q$. *Si el operador* $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ *es continuo, entonces*

$$m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0.$$

Demostración. Por el teorema anterior, la medida $\mu_{\varphi,\psi,q}$ es de Carleson de orden q/p sobre $\overline{\mathbb{D}}$, siendo $q/p > 1$. De esta forma, por el Corolario 2.4, se tiene que la medida $\mu_{\varphi,\psi,q}$ es cero sobre cualquier conjunto medible que esté contenido en $\mathbb{T}$. Llamemos $E = \{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}$. Puesto que $E \subseteq \varphi^{-1}(\varphi(E))$ y $\varphi(E) \subseteq \mathbb{T}$ se sigue que

$$0 = \mu_{\varphi,\psi,q}(\varphi(E)) = \int_{\varphi^{-1}(\varphi(E))\cap\mathbb{T}} |\psi|^q \, dm \geq \int_{E\cap\mathbb{T}} |\psi|^q \, dm = \int_E |\psi|^q \, dm.$$

es decir, $|\psi| = 0$ casi por doquier en el conjunto E. Puesto que $\psi \in H_1$ y es no nula, se verifica que $m(E) = 0$ (véase, por ejemplo, [47, pág. 57]). ■

Destaquemos que este último resultado deja de ser cierto si $p \geq q$. Basta tomar $\varphi(z) = z$ y observar que el operador de composición C_φ es siempre continuo de H_p en H_q.

Corolario 2.19 *Sea* $1 \leq p < \infty$. *Sean* $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in H_p$ *y sea* $\psi = gF$ *una factorización interior-exterior de la función* ψ. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador* $W_{\varphi,\psi}$ *es continuo en* H_p;

(*ii*) *El operador* $W_{\varphi,F}$ *es continuo en* H_p;

(*iii*) *El operador* $W_{\varphi,F^{p/2}}$ *es continuo en* H_2.

Demostración. Basta observar que para cualquier conjunto medible E en $\overline{\mathbb{D}}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi,\psi,p}(E) &= \int_{\varphi^{-1}(E)\cap\mathbb{T}} |\psi|^p \, dm = \int_{\varphi^{-1}(E)\cap\mathbb{T}} |F|^p \, dm \\ &= \mu_{\varphi,F,p}(E) = \mu_{\varphi,F^{p/2},2}(E). \ \blacksquare \end{aligned}$$

Hemos comenzado esta sección con algunas observaciones sobre el conjunto $\{\psi \in H_p : W_{\varphi,\psi}$ es continuo en $H_p\}$ para $1 < p < \infty$. El anterior corolario nos permite extender dichos resultados al caso en que $p = 1$. Fijemos $\varphi \in \Phi$ y supongamos que

$$\{\psi \in H_1 : W_{\varphi,\psi} \text{ es continuo en } H_1\} \subseteq H_\infty.$$

Veamos que se verifica lo mismo en H_2. Sea $\psi \in H_2$, tal que $W_{\varphi,\psi}$ es continuo en H_2 y consideremos $\psi = gF$ una factorización interior-exterior de la función

ψ. Entonces $F^2 \in H_1$ y, por el corolario anterior, W_{φ,F^2} es continuo en H_1. Así, por hipótesis, $F^2 \in H_\infty$ y, por tanto, $\psi \in H_\infty$. Entonces, por la Proposición 2.8, se tiene que el número de ceros de φ es finito. De forma análoga se pueden obtener extensiones del Corolario 2.10 y de la Proposición 2.11:

Corolario 2.20 *Sea $\varphi \in \Phi$. Se verifican las siguientes afirmaciones:*

(*i*) *Si $\{\psi \in H_1 : W_{\varphi,\psi}$ es continuo en $H_1\} \subseteq H_\infty$, entonces el número de ceros de φ en $\mathbb{D}$ es finito.*

(*ii*) *La función φ es un producto de Blaschke finito si, y sólo si,*

$$\{\psi \in H_1 : W_{\varphi,\psi} \textit{ es continuo en } H_1\} = H_\infty.$$

(*iii*) *No existe un $r \in (1,\infty)$ tal que*

$$\{\psi \in H_1 : W_{\varphi,\psi} \textit{ es continuo en } H_1\} = H_r.$$

Cuando estamos trabajando con $p = q$, el Corolario 2.19 nos permite reducirnos al caso $p = 2$. Por el Corolario 1.19, si $W_{\varphi,\psi}$ es continuo en H_2 debe existir una constante M tal que

$$|\psi(z)|^2 \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \leq M$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. No sabemos si es cierto el recíproco. No obstante, bajo ciertas hipótesis adicionales sobre las funciones φ y ψ sí que se puede obtener.

Recordemos que, para cada $\alpha > -1$ y para cada $1 \leq p < \infty$, el *espacio de Bergman ponderado* A_p^α se define como

$$A_p^\alpha = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \left(1-|z|^2\right)^\alpha dA(z) < \infty \right\},$$

donde A denota la medida de Lebesgue normalizada sobre el disco unidad (observemos que estamos usando la misma notación que para el álgebra del disco). Dotando a A_p^α con la norma

$$\|f\|_{A_p^\alpha} = \left(\int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p \left(1-|z|^2\right)^\alpha dA(z) \right)^{1/p},$$

éste es un espacio de Banach. De hecho, A_p^α es un espacio de Banach de funciones analíticas.

Definición 2.21 *Diremos que una función $\varphi \in \Phi$ es N-a-1 si, para cada $w \in \mathbb{D}$, la función $\varphi(z) - w$ tiene como máximo N ceros en $\mathbb{D}$.*

Teorema 2.22 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_2$ tales que φ es N-a-1 y el operador $W_{\varphi,\psi'} : H_2 \to A_2^1$ es continuo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_2 \to H_2$ es continuo;

(ii) $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)|^2 \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} < \infty$.

Demostración. Como ya hemos comentado anteriormente, es suficiente probar que *(ii)* implica *(i)*. Supongamos que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)|^2 \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} < \infty$. Entonces existe una constante $M > 0$ tal que

$$|\psi(z)|^2 \left(1-|z|^2\right) \leq M\left(1-|\varphi(z)|^2\right), \tag{2.2}$$

para todo $|z| < 1$.

Para llegar a que $W_{\varphi,\psi}$ es continuo en H_2 utilizamos una norma equivalente sobre este espacio consecuencia de la Igualdad de Littlewood-Paley (véase, [83, Pag. 38] o [47, pág. 224]) en vez de la norma usual. Esto es, para cada $f \in H(\mathbb{D})$ se verifica que

$$\|f\|_{H_2}^2 = |f(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \log\frac{1}{|z|} dA(z).$$

Por otro lado, es fácil ver que

$$\lim_{|z|\to 1} \frac{1-|z|^2}{\log 1/|z|} = 2.$$

Es decir, la norma usual en H_2 es equivalente a la norma dada por

$$\|f\|^2 := |f(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \left(1-|z|^2\right) dA(z).$$

Desde ahora y hasta el final de esta prueba usaremos esta norma en H_2.

Fijemos f en H_2. Entonces, por la Desigualdad de Minkowski, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|W_{\varphi,\psi}(f)\|^2 &= |\psi(0) f(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |(\psi(z) f(\varphi(z)))'|^2 (1-|z|^2)\, dA(z) \\
&\leq |\psi(0) f(\varphi(0))|^2 \\
&\quad +2\left\{\left(\int_{\mathbb{D}} |\psi'(z) f(\varphi(z))|^2 (1-|z|^2)\, dA(z)\right)^{1/2}\right. \\
&\quad \left. + \left(\int_{\mathbb{D}} |\psi(z)\varphi'(z) f'(\varphi(z))|^2 (1-|z|^2)\, dA(z)\right)^{1/2}\right\}^2.
\end{aligned}$$

Acotemos cada uno de estos tres sumandos. Para el primero de ellos, se tiene que

$$|\psi(0) f(\varphi(0))| \leq |\psi(0)| \left\|\delta_{\varphi(0)}\right\|_{H_2^*} \|f\|_{H_2}.$$

Como $W_{\varphi,\psi'} : H_2 \to A_2^1$ es continuo, se verifica que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} |\psi'(z) f(\varphi(z))|^2 (1-|z|^2)\, dA(z) &= \left\|W_{\varphi,\psi'}(f)\right\|_{A_2^1}^2 \\
&\leq \left\|W_{\varphi,\psi'}\right\|_{H_2\to A_2^1}^2 \|f\|_{H_2}^2.
\end{aligned}$$

Falta probar que el tercer término está acotado por un múltiplo de $\|f\|_{H_2}$. Por el Teorema del Cambio de Variable que aparece en [20, Theorem 2.32], se tiene que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{D}} |\psi(z)\varphi'(z) f'(\varphi(z))|^2 (1-|z|^2)\, dA(z) \\
&\qquad = \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 \left(\sum_{z\in\varphi^{-1}(w)} |\psi(z)|^2 (1-|z|^2)\right) dA(w).
\end{aligned}$$

Además, teniendo en cuenta que φ es N-a-1 y la desigualdad (2.2), tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{z\in\varphi^{-1}(w)} |\psi(z)|^2 (1-|z|^2) &\leq M \sum_{z\in\varphi^{-1}(w)} (1-|\varphi(z)|^2) \\
&= M \sum_{z\in\varphi^{-1}(w)} (1-|w|^2) \leq MN(1-|w|^2),
\end{aligned}$$

con lo que

$$\int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 \left(\sum_{z \in \varphi^{-1}(w)} |\psi(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) \right) dA(w)$$
$$\leq MN \int_{\varphi(\mathbb{D})} |f'(w)|^2 \left(1 - |w|^2\right) dA(w)$$
$$\leq MN \int_{\mathbb{D}} |f'(w)|^2 \left(1 - |w|^2\right) dA(w) \leq MN \|f\|^2 . \blacksquare$$

Observación 2.23 La hipótesis de que el operador $W_{\varphi,\psi'} : H_2 \to A_2^1$ sea continuo se verifica, por ejemplo, si imponemos que $\psi \in \mathcal{B}_{1/2}$. De hecho se tiene que el operador es compacto, ya que, en este caso

$$\|\psi\|_{\mathcal{B}_{1/2}}^2 = \sup_{z \in \mathbb{D}} |\psi'(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) < \infty,$$

y si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones en la bola unidad de H_2 que converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$, entonces

$$\left\|W_{\varphi,\psi'}(f_n)\right\|_{A_2^1}^2 = \int_{\mathbb{D}} |\psi' f_n \circ \varphi|^2 \left(1 - |z|^2\right) dA(z) \leq \|\psi\|_{\mathcal{B}_{1/2}}^2 \|C_\varphi(f_n)\|_{A_2^1}^2 .$$

Basta ahora usar que los operadores de composición son continuos en los espacios de Bergman y que la inclusión de H_2 en A_2^1 es compacta.

Observación 2.24 Ejemplos donde el operador $M_\psi : H_2 \to A_2^1$ es continuo aparecen en el trabajo de N. S. Feldman [27]. Concretamente, él prueba que si existe una función $\rho \in L_1((0,1))$ verificando que

$$|\psi(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) \leq \rho(|z|) \tag{2.3}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, entonces el operador de multiplicación $M_\psi : H_2 \to A_2^1$ es, de hecho, compacto y, por tanto, también lo será $W_{\varphi,\psi} : H_2 \to A_2^1$. En particular, $W_{\varphi,\psi} : H_2 \to A_2^1$ es continuo. En efecto, teniendo en cuenta la Proposición 1.21, es suficiente probar que si $\{f_n\}$ es una sucesión en la bola unidad de H_2 que converge a cero uniformemente sobre compactos entonces $\|M_\psi(f_n)\|_{A^1_2}$ también converge a cero. Para ello observemos que

$$\begin{aligned}
\|M_\psi(f_n)\|^2_{A^1_2} &= \int_{\mathbb{D}} |\psi(z)|^2 |f_n(z)|^2 \left(1-|z|^2\right) dA(z) \\
&= \int_0^1 r \int_0^{2\pi} \left|\psi\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 \left|f_n\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 \left(1-|r|^2\right) d\theta dr \\
&\leq \int_0^1 \rho(r) \left(\int_0^{2\pi} \left|f_n\left(re^{i\theta}\right)\right|^2 d\theta\right) dr \\
&= \int_0^1 \rho(r) M_2(f_n, r)^2 dr.
\end{aligned}$$

Pero, para cada r fijo, $\rho(r) M_2(f_n, r)^2 \to 0$ y

$$\left|\rho(r) M_2(f_n, r)^2\right| \leq |\rho(r)| \in L_1((0,1)).$$

Luego, por el Teorema de Convergencia Dominada, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \rho(r) M_2(f_n, r)^2 dr = 0.$$

Notemos que la existencia de una función ρ como la dada en (2.3) se verifica, por ejemplo, para las funciones de H_2 (véase el Teorema de Hardy-Littlewood [25, Theorem 5.9]).

Problema abierto. Queda obtener caracterizaciones de la continuidad de los operadores de composición ponderados de H_p en H_q cuando $1 \leq q < p < \infty$. Puesto que en este contexto $H_p \subseteq H_q$, para cualquier $\varphi \in \Phi$, se tiene que $C_\varphi(H_p) \subseteq H_p$. Si ahora M_ψ es un operador de multiplicación de H_p en H_q (es decir, si $\psi \in H_r$ con $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{p}$) entonces obviamente $W_{\varphi,\psi}$ es continuo. No obstante, es fácil obtener ejemplos que muestran que éstos no son todos los posibles operadores de composición ponderados continuos de H_p en H_q.

2.3 Compacidad

Al igual que en la sección anterior, estudiamos en primer lugar la compacidad de los operadores de composición ponderados cuando el dominio o el rango es H_∞.

La compacidad del operador $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_\infty$ fue caracterizada por M. D. Contreras y S. Díaz Madrigal en [15, Proposition 2.3]. Concretamente, ellos prueban que dadas $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_\infty$, el operador $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_\infty$ es compacto si, y sólo si, o bien $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ o bien $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| = 0$. El primer resultado de esta sección extiende dicha caracterización cuando el dominio es un espacio de Hardy arbitrario. Para ello necesitamos el siguiente lema que se usará repetidas veces a lo largo del capítulo.

Lema 2.25 *Sea $1 \leq p < \infty$. Entonces se verifica que:*

(i) Dado $\omega \in \mathbb{D}$, la función $g(z) = (1-\omega z)^{-2/p}$ está en H_p y su norma viene dada por

$$\|g\|_{H_p} = \frac{1}{\left(1-|\omega|^2\right)^{1/p}}.$$

(ii) Si $\{\omega_n\}$ es una sucesión en el disco unidad tal que $|\omega_n| \to 1$, entonces la suseción de funciones $f_n(z) = \left(1-|\omega_n|^2\right)^{1/p}(1-\omega_n z)^{-2/p}$ converge a cero uniformemente sobre compactos en $\mathbb{D}$.

Demostración. (i) Puede verse, por ejemplo, en [20, pág. 18].

(ii). Tomemos un número fijo $0 < r < 1$. Veamos que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge a cero uniformemente en el disco cerrado de centro el origen y radio r. Si $|z| \leq r$, entonces

$$|f_n(z)|^p = \frac{1-|\omega_n|^2}{|1-\omega_n z|^2} \leq \frac{1-|\omega_n|^2}{(1-|\omega_n||z|)^2} \leq \frac{1-|\omega_n|^2}{(1-r)^2}.$$

Basta notar ahora que $\frac{1-|\omega_n|^2}{(1-r)^2} \to 0$ cuando $n \to \infty$. ■

Con este lema elemental podemos ya pasar a probar el siguiente resultado. Desde este momento haremos uso frecuente, y sin hacer mención explícita de ello, de la caracterización de la compacidad y compacidad débil de los operadores de composición ponderados en términos de sucesiones acotadas que convergen a cero uniformemente sobre compactos (Proposición 1.21).

Proposición 2.26 *Sean $\varphi \in \Phi$, $\psi \in H_\infty$ y $1 \leq p < \infty$. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_\infty$ es compacto si, y sólo si, $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ o se verifica que*

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{|\psi(z)|^p}{1-|\varphi(z)|^2} = 0.$$

Demostración. Supongamos que $\|\varphi\|_{H_\infty} = 1$ y que dicho límite no es cero. Entonces deben existir una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ tal que $|\varphi(z_n)| \to 1$ y un número $\varepsilon > 0$ tales que $\varepsilon\left(1 - |\varphi(z_n)|^2\right) \leq |\psi(z_n)|^p$ para todo natural n.

Consideremos las funciones f_n en H_p dadas por $f_n(z) = g_n(z)/\|g_n\|_{H_p}$ siendo

$$g_n(z) = \frac{1}{\left(1 - \overline{\varphi(z_n)}z\right)^{2/p}}.$$

Obviamente, $\{f_n\}$ está en la bola unidad de H_p y además, por el Lema 2.25 (ii), se verifica que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge a cero en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos en $\mathbb{D}$. Por otro lado,

$$\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{H_\infty} \geq |\psi(z_n)|\,|f_n(\varphi(z_n))| = |\psi(z_n)|\left(1 - |\varphi(z_n)|^2\right)^{-1/p} \geq \varepsilon^{1/p}.$$

Es decir, $\{f_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos y la sucesión $\left\{\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{H_\infty}\right\}$ no converge a cero. Por consiguiente, $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_\infty$ no es compacto.

Por tanto, si el operador es compacto, entonces se verifica que

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{|\psi(z)|^p}{1 - |\varphi(z)|^2} = 0.$$

Recíprocamente, supongamos que $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{|\psi(z)|^p}{1-|\varphi(z)|^2} = 0$ y tomemos $\{f_n\}$ una sucesión acotada en H_p que converge a cero uniformemente sobre los compactos de $\mathbb{D}$. Sea $C = \sup_n \|f_n\|_{H_p}$ y fijemos $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe un $r_0 < 1$ tal que, si $|\varphi(z)| \geq r_0$, entonces $|\psi(z)|^p \leq \left(\frac{\varepsilon}{2C}\right)^p \left(1 - |\varphi(z)|^2\right)$. Por otro lado, existe un número natural n_0 tal que si $n \geq n_0$ entonces

$$\sup_{|z|\leq r_0} |f_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{2\,\|\psi\|_{H_\infty}}.$$

De esta forma, si $n \geq n_0$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{H_\infty} &= \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z) f_n(\varphi(z))| \\
&\leq \sup_{|\varphi(z)|\leq r_0} |\psi(z) f_n(\varphi(z))| + \sup_{|\varphi(z)|> r_0} |\psi(z) f_n(\varphi(z))| \\
&\leq \|\psi\|_{H_\infty} \sup_{|\omega|\leq r_0} |f_n(\omega)| \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{2C} \sup_{|\varphi(z)|> r_0} |f_n(\varphi(z))| \left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^{1/p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \|\psi\|_{H_\infty} \sup_{|\omega|\leq r_0} |f_n(\omega)| + \frac{\varepsilon}{2C} \sup_{|\varphi(z)|>r_0} \frac{|f_n(\varphi(z))|}{\left\|\delta_{\varphi(z)}\right\|_{H_p^*}} \\ &\leq \|\psi\|_{H_\infty} \frac{\varepsilon}{2\|\psi\|_{H_\infty}} + \frac{\varepsilon}{2C} \|f_n\|_{H_p} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En otro caso, si suponemos que $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$, la compacidad de $W_{\varphi,\psi}$ se obtiene de manera inmediata ya que $\overline{\varphi(\mathbb{D})}$ es un compacto contenido en $\mathbb{D}$ y $\psi \in H_\infty$. ■

En el siguiente resultado obtenemos una condición necesaria para la compacidad de los operadores de composición ponderados. Recuérdese que esta condición necesaria también se obtuvo en la sección anterior para que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ fuese continuo cuando $p < q$ (véase el Corolario 2.18).

Proposición 2.27 *Sean $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_q$. Si el operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ es compacto, entonces se verifica que*

$$m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0.$$

Demostración. La compacidad del operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ junto con el hecho de que la sucesión $\{\chi_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos implica que $\|W_{\varphi,\psi}(\chi_n)\|_{H_q} \to 0$. Por un lado,

$$\begin{aligned} \|W_{\varphi,\psi}(\chi_n)\|_{H_q}^q &= \int_{\mathbb{T}} |\psi\varphi^n|^q \, dm \\ &= \int_{\{z\in\mathbb{T}:|\varphi(z)|<1\}} |\psi\varphi^n|^q \, dm + \int_{\{z\in\mathbb{T}:|\varphi(z)|=1\}} |\psi|^q \, dm \\ &\geq \int_{\{z\in\mathbb{T}:|\varphi(z)|=1\}} |\psi|^q \, dm. \end{aligned}$$

Concluimos así que $\int_{\{z\in\mathbb{T}:|\varphi(z)|=1\}} |\psi|^q \, dm = 0$. Finalmente, puesto que $\psi \in H_q$ y no es la función nula, se tiene que que $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$ (véase, por ejemplo, [47, pág. 57]). ■

Obsérvese que de este resultado se deduce de manera inmediata la no existencia de operadores de multiplicación compactos en los espacios de Hardy.

Para $p = q$ y los operadores de composición, el anterior resultado se debe a H. J. Schwartz [20, pág. 143]. Además, su recíproco no es cierto cuando $p < \infty$. Esto también fue puesto de manifiesto para operadores de composición por H. J. Schwartz tomando la función $\varphi(z) = (z+1)/2$ [20, pág. 143].

A continuación probamos que cuando el dominio del operador es H_∞ el recíproco del resultado anterior sí es cierto.

Proposición 2.28 *Sean* $1 \leq q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in H_q$. *Entonces el operador* $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_q$ *es compacto si, y sólo si,* $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$.

Demostración. Supongamos que $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$. Consideremos una sucesión acotada $\{f_n\}$ en H_∞ que converja a cero uniformemente sobre compactos. Fijado un punto $z \in \mathbb{T}$ para el que $|\varphi(z)| < 1$ se tiene que $f_n(\varphi(z)) \to 0$. Por tanto, $\psi(z) f_n(\varphi(z)) \to 0$ para casi todo z en $\mathbb{T}$. Además

$$|\psi(z) f_n(\varphi(z))|^q \leq |\psi(z)|^q \|f_n\|_{H_\infty}^q \leq C^q |\psi(z)|^q$$

donde C es una cota superior de la sucesión $\|f_n\|_{H_\infty}$. Por otro lado, la función $|\psi|^q \in L_1(\mathbb{T}, m)$. Basta ahora aplicar el Teorema de Convergencia Dominada para obtener que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{T}} |\psi f_n \circ \varphi|^q \, dm = 0. \blacksquare$$

Tenemos así caracterizada la compacidad de los operadores de composición ponderados cuando el dominio o el rango es H_∞. Nos centramos a partir de ahora en el caso en que los dos índices (p y q) son finitos. Como ya hemos comentado, el ejemplo anteriormente citado de H. J. Schwartz nos muestra que, en general, el recíproco de la Proposición 2.27 no es cierto. No obstante y bajo ciertas hipótesis adicionales veremos que se pueden obtener recíprocos parciales.

Para obtener dichos recíprocos será fundamental el concepto de sucesión uniformemente p-integrable. Recordemos que un conjunto acotado K de $L_p(\mathbb{T}, m)$ es uniformemente p-integrable si

$$\lim_{m(E)\to 0} \sup_{f\in K} \int_E |f|^p \, dm = 0.$$

En $L_1(\mathbb{T}, m)$, un conjunto acotado es uniformemente 1-integrable si, y sólo si, es compacto en la topología débil de $L_1(\mathbb{T}, m)$. A partir de este resultado se puede obtener que dada una sucesión $\{f_n\}$ en $L_1(\mathbb{T}, m)$ que converge a cero en la topología débil, se verifica que converge puntualmente a cero si, y sólo si, converge a cero en la topología de la norma [24, Theorem IV.8.12, Corollary III.6.13 (b)]. Este resultado deja de ser cierto en $L_p(\mathbb{T}, m)$ para $p > 1$. No obstante, si $\{f_n\}$ es una sucesión en $L_p(\mathbb{T}, m)$ que converge puntualmente a cero casi por doquier y es uniformemente p-integrable, entonces $\{|f_n|^p\}$ sigue convergiendo a cero puntualmente casi por doquier y $\{|f_n|^p\}$ es uniformemente 1-integrable en $L_1(\mathbb{T}, m)$. Es decir, $\||f_n|^p\|_{L_1(\mathbb{T},m)} \to 0$ y, por tanto, $\|f_n\|_{L_p(\mathbb{T},m)} \to 0$. Por consiguiente, se verifica el siguiente resultado.

Lema 2.29 *Sean $1 \leq p < \infty$ y $\{f_n\}$ una sucesión acotada en H_p que converja a cero puntualmente en casi todo punto de $\mathbb{T}$ y que sea uniformemente p-integrable en L_p. Entonces $\{f_n\}$ converge a cero en la topología de la norma de H_p.*

Podemos ya obtener el primero de los recíprocos parciales de la Proposición 2.27 anteriormente anunciado.

Teorema 2.30 *Sean $1 \leq p, q < \infty$ y supongamos que $W_{\varphi,\psi} : H_p \longrightarrow H_r$ es continuo para algún $r > q$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \longrightarrow H_q$ es compacto;

(ii) $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$.

Demostración. Por la Proposición 2.27, basta ver (ii) implica (i). Supongamos así que $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$. Consideremos una sucesión acotada $\{f_n\}$ acotada en H_p que converge a cero uniformemente sobre compactos. Comprobemos que la sucesión $\{\psi f_n \circ \varphi\}$ verifica las hipótesis del lema anterior. Por un lado, la hipótesis y la convergencia uniforme a cero sobre compactos de $\{f_n\}$, se verifica que

$$\psi(z) f_n(\varphi(z)) \to 0$$

para casi todo z en $\mathbb{T}$. Por otro lado, por ser el operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \longrightarrow H_r$ continuo se tiene que

$$\begin{aligned} \int_E |\psi f_n \circ \varphi|^q \, dm &\leq \left(\int_E |\psi f_n \circ \varphi|^r \, dm\right)^{q/r} \left(\int_E dm\right)^{1-q/r} \\ &\leq \|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{H_r}^q \, m(E)^{1-q/r} \leq C m(E)^{1-q/r} \end{aligned}$$

para cada conjunto E medible en $\mathbb{T}$, donde C es una cota de $\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{H_r}^q$. Por tanto, la sucesión $\{\psi f_n \circ \varphi\}$ es uniformemente q-integrable y se tiene así que $\|\psi f_n \circ \varphi\|_{H_q} \to 0$. ■

Observemos que como el operador de composición $C_\varphi : H_p \to H_p$ es siempre continuo, si tomamos un $q < p$ y aplicamos el teorema anterior con $r = p$ se verifica que $C_\varphi : H_p \to H_q$ es compacto si, y sólo si, se verifica que $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$. Este resultado ya fue obtenido por H. Jarchow [39, Theorem 1] y T. Goebeler [32, Corollary 5].

Corolario 2.31 *Si $1 \leq p, q < \infty$ y $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_r$ es continuo para algún $r > \max\{p, q\}$, entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ es compacto.*

Demostración. Teniendo en cuenta el teorema anterior, es suficiente probar que $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$. Pero esto es obvio ya que al ser $r > p$ podemos aplicar el Corolario 2.18 al operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_r$. ■

El Teorema 2.30 dice que podemos caracterizar la compacidad de $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ en términos del conjunto $\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}$ cuando el rango de $W_{\varphi,\psi}$ es más pequeño que H_q. A continuación mostramos que cuando $W_{\varphi,\psi}$ envía un espacio de Hardy más grande que H_p en H_q se obtiene una caracterización similar. Dicho resultado lo obtenemos con técnicas diferentes a las usadas hasta ahora y que, de hecho, pueden ser de utilidad en contextos completamente diferentes al de los operadores de composición ponderados. Concretamente usamos una caracterización de los operadores definidos en H_p que transforman sucesiones acotadas y uniformemente p-integrables en sucesiones relativamente compactas. Antes de mostrar el resultado para $p > 1$, lo enunciamos para $p = 1$. En este caso, el resultado fue obtenido por H. Jarchow [39, Theorem 2] y nos será de utilidad en la Sección 2.5 para caracterizar los operadores de composición ponderados completamente continuos en H_1. Para $1 \leq p < q \leq \infty$, notaremos mediante $i_{q,p}$ al operador inclusión de H_q en H_p.

Teorema 2.32 *Sean X un espacio de Banach y $T : H_1 \to X$ un operador lineal y continuo. La siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $T : H_1 \to X$ es completamente continuo;

(ii) El operador $T \circ i_{1,p} : H_p \to X$ es compacto para algún $p \in (1, \infty]$;

(iii) El operador $T \circ i_{1,p} : H_p \to X$ es compacto para todo $p \in (1, \infty]$.

Merece la pena indicar que su prueba descansa en un *análogo* analítico para H_1, debido a J. Bourgain, del siguiente hecho elemental para funciones medibles: Si $f \in L_1(\mathbb{T}, m)$ y λ es una constante positiva arbitraria, entonces existen dos funciones $g \in L_\infty(\mathbb{T}, m)$ y $h \in L_1(\mathbb{T}, m)$ tales que $f = g + h$, $|g| \leq \min\{|f|, \lambda\}$, $|h| \leq |f|$ y $\|h\|_{L_1(\mathbb{T},m)} \leq \int_{\{z\in\mathbb{T}:|f(z)|\geq\lambda\}} |f|\, dm$. Notemos que en este caso es suficiente tomar $g = f\chi_{\{z\in\mathbb{T}:|f(z)|<\lambda\}}$ y $h = f - g$.

Para extender el Teorema de Jarchow a H_p usaremos una extensión del resultado de Bourgain debida a S. V. Kisliakov [44] y que fue obtenida con técnicas completamente diferentes a las originales de Bourgain.

Lema 2.33 *Sea $1 \leq p < \infty$. Existe una constante $C = C(p)$ tal que para todo $\lambda > 0$ y $f \in H_p$ existen $g \in H_\infty$ y $h \in H_p$ tales que $f = g + h$, $|g| \leq C \min\{|f|, \lambda\}$, $|h| \leq C|f|$ y*

$$\|h\|_{H_p}^p \leq C \int_{\{z\in\mathbb{T}:\ |f(z)|>\lambda\}} |f|^p\, dm.$$

Teorema 2.34 *Sean $1 < r < \infty$, X un espacio de Banach y $T : H_r \to X$ un operador continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $T : H_r \to X$ lleva sucesiones acotadas y uniformemente r-integrables en sucesiones relativamente compactas;

(ii) El operador $T \circ i_{p,r} : H_p \to X$ es compacto para todo $r < p < \infty$;

(iii) El operador $T \circ i_{p,r} : H_p \to X$ es compacto para algún $r < p < \infty$;

(iv) El operador $T \circ i_{\infty,r} : H_\infty \to X$ es compacto.

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generadlidad que $\|T\| \leq 1$. La única implicación no inmediata y donde usaremos la factorización de Kisliakov es (iv) implica (i).

(i) implica (ii). Probemos que la imagen por T de la bola unidad de H_p es relativamente compacta. Para ello veremos que $i_{p,r}\left(B_{H_p}\right)$ es un subconjunto de H_r acotado y uniformemente r-integrable. Es inmediato que $i_{p,r}\left(B_{H_p}\right)$ está acotado y además, por la Desigualdad de Hölder, se verifica que si E es un subconjunto medible de $\mathbb{T}$, entonces

$$\begin{aligned}\int_E |f|^r\, dm &\leq \left(\int_E |f|^p\, dm\right)^{r/p} \left(\int_E dm\right)^{1-r/p} \\ &\leq \|f\|_{H_p}^r\, m(E)^{1-r/p} \leq m(E)^{1-r/p}\end{aligned}$$

y $1 - r/p > 0$, por lo que $i_{p,r}\left(B_{H_p}\right)$ es uniformemente r-integrable.

(ii) implica (iii). Es obvio.

(iii) implica (iv). Usando que la inclusión $i_{\infty,p} : H_\infty \to H_p$ es siempre continua para todo $1 < p < \infty$, consideramos la siguiente composición de operadores,

$$T \circ i_{\infty,r} = \left(T \circ i_{p,r}\right) \circ i_{\infty,p}$$

y obtenemos que $T \circ i_{\infty,r}$ es composición de un operador compacto y otro continuo.

(iv) implica (i). Supongamos que $T \circ i_{\infty,r}$ es compacto y consideremos una sucesión $\{f_n\}$ en H_r acotada (podemos suponer que $\|f_n\|_{H_r} \leq 1$) y uniformemente r-integrable. Supongamos también, por reducción al absurdo, que $\{T(f_n)\}$ no es relativamente compacta en X. Por la reflexividad del espacio H_r, existe una subsucesión de $\{f_n\}$ (que denotamos igual) y una función f en H_r tal que $\{f_n\}$ converge a f para la topología débil de H_r. Además podemos suponer que $f = 0$ ya que la sucesión $\{f_n - f\}$ verifica las mismas propiedades que $\{f_n\}$. En resumen, tenemos una sucesión $\{f_n\}$ en la bola unidad de H_r que converge a cero para la topología débil de H_r y tal que $\{T\left(f_n\right)\}$ no es relativamente compacta en X. En particular, $\{T\left(f_n\right)\}$ no converge a cero, es decir, existe una subsucesión (que denotamos igual), y un número $\varepsilon > 0$ tal que $\|T(f_n)\|_X > \varepsilon$, para todo n.

La r-integrabilidad uniforme implica que existe un $\delta > 0$ tal que

$$\sup_n \int_B |f_n|^r \, dm \leq \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^r \frac{1}{C}$$

para todo $B \subset \mathbb{T}$ con $m(B) \leq \delta$, donde la constante C es la que aparece en el Lema 2.33. Aplicando dicho lema con $\lambda = \delta^{-1/r}$ se obtiene que, para cada n, existen $g_n, h_n \in H_r$ tales que $f_n = g_n + h_n$, $|g_n| \leq C\,|f_n|$, $|h_n| \leq C\,|f_n|$, $|g_n| \leq C\lambda$ y

$$\|h_n\|_{H_r}^r \leq C \int_{\{z \in \mathbb{T}:\ |f_n(z)| > \lambda\}} |f_n|^r \, dm.$$

Además, se tiene que

$$\begin{aligned} 1 &\geq \|f_n\|_{H_r}^r = \int_{\mathbb{T}} |f_n|^r \, dm \\ &\geq \int_{\{z \in \mathbb{T}: |f_n(z)| > \lambda\}} |f_n|^r \, dm > \lambda^r m\left(\{z \in \mathbb{T} : |f_n\left(z\right)| > \lambda\}\right) \end{aligned}$$

de donde se sigue que

$$m\left(\{z \in \mathbb{T} : |f_n(z)| > \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda^r} = \delta.$$

De esta forma,

$$\sup_n \int_{\{z\in\mathbb{T}:|f_n(z)|>\lambda\}} |f_n|^r \, dm \leq \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^r \frac{1}{C}$$

y, por tanto, $\|h_n\|_{H_r}^r \leq \left(\frac{\varepsilon}{3}\right)^r$ o, lo que es lo mismo, $\|h_n\|_{H_r} \leq \varepsilon/3$ para todo n.

De esta forma podemos controlar $\|h_n\|_{H_r}$. Veamos que podemos hacer algo parecido con $\|T(g_n)\|_X$. Para hacer esto, tenemos que observar que, como la sucesión $\{g_n\}$ está acotada en H_∞, existe una subsucesión (que denotamos igual) y una función g en H_r tal que g_n converge a g débilmente en H_r. Pero la sucesión $\{f_n\}$ converge a cero débilmente en H_r y, por tanto, la sucesión $\{h_n\}$ debe converger a $-g$ para la topología débil de H_r. De esto se deduce que $\|g\|_{H_r} \leq \varepsilon/3$. Finalmente, por la continuidad del operador $T \circ i_{\infty,r}$, $\{T(g_n)\}$ converge a $T(g)$ en X, luego existe n_0 tal que

$$\|T(g_n) - T(g)\|_X < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $n \geq n_0$. Con todo lo anterior obtenemos que si $n \geq n_0$, entonces

$$\begin{aligned}
\varepsilon &< \|T(f_n)\|_X = \|T(g_n + h_n)\|_X \\
&\leq \|T(g_n - g)\|_X + \|T(g)\|_X + \|T(h_n)\|_X \\
&\leq \|T(g_n - g)\|_X + \|T(g)\|_X + \|T\|_{H_r\to X}\|h_n\|_{H_r} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

obteniendo una contradicción. ■

Podemos ya obtener el segundo recíproco parcial de la Proposición 2.27.

Teorema 2.35 *Sean $1 \leq p, q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_q$ tales que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_r \to H_q$ es continuo para algún $r < p$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ es compacto;*

(*ii*) $m\left(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}\right) = 0.$

Demostración. Por la Proposición 2.27, basta ver que (ii) implica (i). Supongamos así que $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$. Para obtener (i) utilizaremos el Teorema 2.34. Como $r < p$, por dicho teorema, se verifica que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ es compacto si, y sólo si, lo es el operador $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_q$. Pero esto último se verifica por (ii) y la Proposición 2.28. ■

Una observación análoga a la realizada después del Teorema 2.30 se puede hacer con el teorema anterior tomando ahora $r = q$.

Corolario 2.36 *Sean $1 \leq p, q < \infty$. Si $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_q$ tales que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_r \to H_q$ es continuo para algún $r < \min\{p, q\}$, entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ es compacto.*

Demostración. Teniendo en cuenta que $r < p$ y el Teorema 2.35, es suficiente probar que $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$. Pero esto es obvio ya que al ser $r < q$ podemos aplicar el Corolario 2.18 y obtener lo deseado. ■

Nos planteamos ahora obtener una caracterización de la compacidad de los operadores de composición ponderados sin la hipótesis adicional de que éstos sean continuos cuando cambiamos el rango por un espacio más pequeño o el dominio por un espacio más grande. Esta caracterización sólo será válida cuando el rango del operador esté contenido en su dominio. Haremos uso de los resultados sobre medidas de Carleson que se vieron el la primera sección del presente capítulo.

Teorema 2.37 *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_q$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ es compacto;

(ii) La medida $\mu_{\varphi,\psi,q}$ es de Carleson compacta de orden q/p sobre $\overline{\mathbb{D}}$.

Demostración. (i) implica (ii). Supongamos, por reducción al absurdo, que existen $\beta > 0$, $b_n \in \mathbb{T}$ y $r_n \in (0,1)$ tales que $r_n \searrow 0$ y

$$\mu_{\varphi,\psi,q}(S(b_n, r_n)) \geq \beta r_n^{q/p}.$$

Consideremos $a_n = (1 - r_n) b_n$ y tomemos las funciones $f_n \in H_p$ dadas por $f_n(z) = 1/(1 - \overline{a_n} z)^{2/p}$. Por el Lema 2.25, se tiene que

$$\|f_n\|_{H_p}^p = \frac{1}{1 - |a_n|^2} = \frac{1}{r_n(2 - r_n)}.$$

Tomando ahora

$$g_n(z) = \frac{f_n(z)}{\|f_n\|_{H_p}} = \frac{r_n^{1/p}(2-r_n)^{1/p}}{(1-\overline{a_n}z)^{2/p}},$$

el mismo Lema 2.25 afirma que $\{g_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos.

Por otro lado, para todo $z \in S(b_n, r_n)$ se verifica que

$$\begin{aligned} |1-\overline{a_n}z| &= \left|1-(1-r_n)\overline{b_n}z\right| = \left||b_n|^2 - \overline{b_n}z + r_n\overline{b_n}z\right| \\ &= \left|b_n\overline{b_n} - \overline{b_n}z + r_n\overline{b_n}z\right| = \left|\overline{b_n}(b_n - z) + r_n\overline{b_n}z\right| \\ &\leq |b_n - z| + r_n|z| \leq 2r_n. \end{aligned}$$

Es decir,

$$|f_n(z)| \geq \frac{1}{(2r_n)^{2/p}}$$

para todo $z \in S(b_n, r_n)$. Por consiguiente, teniendo en cuenta el Lema 2.16, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\psi g_n \circ \varphi\|_{H_q}^q &= \int_{\mathbb{T}} |\psi|^q |g_n \circ \varphi|^q \, dm = \int_{\overline{\mathbb{D}}} |g_n|^q \, d\mu_{\varphi,\psi,q} \\ &= \int_{\overline{\mathbb{D}}} \frac{|f_n|^q}{\|f_n\|_{H_p}^q} d\mu_{\varphi,\psi,q} = (r_n(2-r_n))^{q/p} \int_{\overline{\mathbb{D}}} |f_n|^q \, d\mu_{\varphi,\psi,q} \\ &\geq (r_n(2-r_n))^{q/p} \int_{S(b_n,r_n)} |f_n|^q \, d\mu_{\varphi,\psi,q} \\ &\geq (r_n(2-r_n))^{q/p} \left(\frac{1}{2r_n}\right)^{2q/p} \mu_{\varphi,\psi,q}(S(b_n,r_n)) \\ &\geq (r_n(2-r_n))^{q/p} \left(\frac{1}{2r_n}\right)^{2q/p} \beta r_n^{q/p} \\ &= (2-r_n)^{q/p} \frac{1}{2^{2q/p}} \beta \geq \frac{1}{2^{2q/p}} \beta, \end{aligned}$$

lo que contradice la compacidad del operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \longrightarrow H_q$.

(ii) implica (i). Por el Teorema 2.5, el operador inclusión de H_p en $L_q(\overline{\mathbb{D}}, \mu_{\varphi,\psi,q})$ es compacto. Basta ahora tener en cuenta que, por el Lema 2.16, para cada $f \in H_p$ se verifica que

$$\|f\|_{L_q(\overline{\mathbb{D}},\mu_{\varphi,\psi,q})} = \|W_{\varphi,\psi}(f)\|_{H_q}. \blacksquare$$

Argumentando como en la prueba del Corolario 2.19 se tiene un análogo a dicho corolario para la compacidad.

Corolario 2.38 *Sean $1 \leq p < \infty$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_p$ y sea $\psi = gF$ una factorización interior-exterior de la función ψ. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \longrightarrow H_p$ es compacto;*

(*ii*) *El operador $W_{\varphi,F} : H_p \longrightarrow H_p$ es compacto;*

(*iii*) *El operador $W_{\varphi,F^{p/2}} : H_2 \longrightarrow H_2$ es compacto.*

Es bien conocido que la compacidad de los operadores de composición en los espacios de Hardy no depende del espacio H_p considerado, es decir, si $C_\varphi : H_p \to H_p$ es compacto para algún $p \in [1, \infty)$, entonces $C_\varphi : H_p \to H_p$ es compacto para todo $p \in [1, \infty)$. En el siguiente ejemplo mostramos que la situación es distinta cuando consideramos operadores de composición ponderados.

Ejemplo 2.39 Consideremos las funciones $\varphi(z) = \frac{z+1}{2}$ y $\psi(z) = \frac{1-z}{(1+z)^{1/2}}$. Veamos que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_1$ es compacto mientras que $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_p$ no lo es para $p \geq 2$.

Por el teorema anterior, para obtener la compacidad del operador $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_1$ basta comprobar que

$$\lim_{r\to 0} \sup_{b\in\mathbb{T}} \frac{\mu_{\varphi,\psi,1}(S(b,r))}{r} = 0.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ y consideremos los arcos

$$I_1 = \{z \in \mathbb{T} : |1 - z| < \varepsilon\} \quad \text{e} \quad I_2 = \mathbb{T} \setminus I_1.$$

Denotemos por $B := \{z \in \mathbb{C} : |z - 1/2| = 1/2\}$. Por un lado, como el arco I_2 y la circunferencia B son conjuntos compactos y disjuntos, la distancia entre I_2 y B es estrictamente positiva, digamos $r_0 = dist(I_2, B)$. Entonces es inmediato comprobar que para todo punto $b \in I_2$ y para todo $r < r_0$ se verifica que

$$\varphi^{-1}(S(b,r)) \cap \mathbb{T} = \emptyset$$

y, así, se tiene que $\mu_{\varphi,\psi,1}(S(b,r)) = 0$ para todo $b \in I_2$ y para todo $r < r_0$.

Por la continuidad de los operadores de composición en los espacios de Hardy y el Teorema 2.17, existe una constante $C > 0$ tal que

$$m\left(\varphi^{-1}(S(b,r)) \cap \mathbb{T}\right) \leq Cr$$

para todo $0 < r < 1$ y $b \in \mathbb{T}$. Podemos suponer que $C > \varepsilon$.

Si tomamos ahora $b \in I_1$ y $r_1 < \frac{\varepsilon}{4C}$, entonces se tiene que

$$\varphi^{-1}(S(b,r)) \cap \mathbb{T} \subseteq \left\{z \in \mathbb{T} : |1-z| < \frac{\varepsilon}{C}\right\}.$$

Por consiguiente, si $r < \frac{\varepsilon}{4C}$ entonces

$$\begin{aligned} \mu_{\varphi,\psi,1}(S(b,r)) &= \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} \frac{|1-z|}{|1+z|^{1/2}} dm \\ &\leq \frac{\varepsilon}{C} \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} \frac{1}{|1+z|^{1/2}} dm \\ &\leq \frac{\varepsilon}{C} \int_{\varphi^{-1}(S(1,r))\cap\mathbb{T}} dm \\ &= \frac{\varepsilon}{C} m\left(\varphi^{-1}(S(1,r)) \cap \mathbb{T}\right) \leq \varepsilon r \end{aligned}$$

para todo $b \in I_1$, donde hemos utilizado que $\frac{1}{|1+z|^{1/2}} \leq 1$ ya que $|1-z| < \frac{\varepsilon}{C} < 1$.

Por tanto, si $r < \min\left\{r_0, \frac{\varepsilon}{4C}\right\}$ se verifica que

$$\sup_{b\in\mathbb{T}} \frac{\mu_{\varphi,\psi,1}(S(b,r))}{r} = \sup_{b\in I_1} \frac{\mu_{\varphi,\psi,1}(S(b,r))}{r} \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que $\mu_{\varphi,\psi,1}$ es una medida de Carleson compacta (de orden 1) sobre $\overline{\mathbb{D}}$. Luego, el operador $W_{\varphi,\psi} : H_1 \longrightarrow H_1$ es compacto.

Por otro lado, como $\psi \notin H_p$ para $p \geq 2$, el operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \longrightarrow H_p$ no es continuo ni, en particular, compacto.

En el resto de la sección vamos a mostrar dos condiciones suficientes bajo las que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \longrightarrow H_q$ es compacto.

Proposición 2.40 *Sean* $1 \leq p, q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in H_q$. *Si*

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\psi(e^{i\theta})|^q}{\left(1 - |\varphi(e^{i\theta})|^2\right)^{q/p}} d\theta < \infty,$$

entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ *es compacto.*

Demostración. Probaremos que $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ es compacto utilizando el Teorema de la Convergencia Dominada. Sea $\{f_n\}$ una sucesión acotada en H_p que converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$ y probemos que $\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{H_q} \to 0$. Denotemos por $M = \sup_n \|f_n\|_{H_p}$. Puesto que la integral que aparece en el enunciado es finita el conjunto de puntos donde se anula el denominador es de medida cero (nótese que ψ no se puede anular en un conjunto de medida positiva salvo que φ o ψ sean nulas en cuyo caso el operador es claramente compacto). Es decir, $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$. Por ello y la convergencia a cero de $\{f_n\}$ puntualmente en $\mathbb{D}$ se verifica que

$$|\psi(z) f_n(\varphi(z))| \to 0$$

para casi todo $z \in \mathbb{T}$. Además,

$$\begin{aligned} |\psi(z) f_n(\varphi(z))|^q &= |\psi(z)|^q \left|\delta_{\varphi(z)}(f_n)\right|^q \\ &\leq |\psi(z)|^q \left\|\delta_{\varphi(z)}\right\|_{H_p^*}^q \|f_n\|_{H_p}^q \\ &\leq M^q \frac{|\psi(z)|^q}{\left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^{q/p}} \in L_1(\mathbb{T}, m). \end{aligned}$$

Entonces, por el Teorema de la Convergencia Dominada, se verifica que $\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{H_q} \to 0$. ■

Para operadores de composición y cuando $p = q = 2$, la proposición anterior es el Teorema de Hilbert-Schmidt debido a H. J. Schwarz [83, pag. 26]. El recíproco de esta última proposición no es cierto incluso para operadores de composición en el espacio de Hilbert H_2 (véase [83, pág. 52]).

Para finalizar la sección, recordemos que, por la Proposición 1.22, si el operador $W_{\varphi,\psi} : H_2 \to H_2$ es compacto entonces $\lim_{|z|\to 1} |\psi(z)|^2 \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = 0$. En la página 19, se cita un ejemplo de un operador de composición en H_2 que muestra que el recíproco de este resultado no es cierto. A continuación mostramos que bajo ciertas hipótesis adicionales se puede obtener dicho recíproco.

Para los operadores de composición, el siguiente resultado fue obtenido por J. H. Shapiro en [83]. De hecho, cambiando el límite que aparece en *(ii)* del siguiente teorema por un cociente que involucra a la función de Nevanlinna, él suprime la hipótesis "φ es N-a-1". Para operadores de composición ponderados no sabemos si se puede omitir dicha hipótesis.

Teorema 2.41 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_2$ tales que φ es N-a-1 y $W_{\varphi,\psi'} : H_2 \to A_2^1$ es compacto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_2 \to H_2$ es compacto;

(ii) $\lim_{|z|\to 1} |\psi(z)|^2 \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} = 0.$

Demostración. Al igual que en la demostración del Teorema 2.22, usaremos la norma equivalente en H_2 dada por

$$\|f\|^2 = |f(0)|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \left(1-|z|^2\right) dA(z).$$

Como ya hemos comentado anteriormente basta probar que *(ii)* implica *(i)*. Para probar que $W_{\varphi,\psi}$ es compacto en H_2 utilizaremos la Proposición 1.21. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en H_2 tal que $\|f_n\| \le 1$ para todo n y que converge a cero uniformemente sobre compactos. Tenemos que probar que $\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|$ converge a cero.

Para cada natural n se tiene que

$$\begin{aligned}\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|^2 &= |\psi(0) f_n(\varphi(0))|^2 + 2\int_{\mathbb{D}} \left|(\psi(z) f_n(\varphi(z)))'\right|^2 \left(1-|z|^2\right) dA(z)\\ &\le |\psi(0) f_n(\varphi(0))|^2\\ &\quad +2\left\{\left(\int_{\mathbb{D}} |\psi'(z) f_n(\varphi(z))|^2 \left(1-|z|^2\right) dA(z)\right)^{1/2}\right.\\ &\quad \left.+\left(\int_{\mathbb{D}} |\psi(z)\varphi'(z) f_n'(\varphi(z))|^2 \left(1-|z|^2\right) dA(z)\right)^{1/2}\right\}^2.\end{aligned}$$

Vamos a probar que cada uno de estos tres últimos sumandos converge a cero. Puesto que $\{f_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos y $\varphi(0) \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$|\psi(0) f_n(\varphi(0))| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Por otro lado, como $W_{\varphi,\psi'} : H_2 \to A_2^1$ es compacto, se verifica que

$$\int_{\mathbb{D}} |\psi'(z) f_n(\varphi(z))|^2 \left(1 - |z|^2\right) dA(z) = \left\| W_{\varphi,\psi'}(f_n) \right\|_{A_2^1}^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Falta probar que el tercer sumando tiende a cero. Fijemos $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $r_0 \in [0,1)$ tal que

$$|\psi(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) \le \frac{\varepsilon}{N} \left(1 - |\varphi(z)|^2\right), \tag{2.4}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$ tal que $|z| \ge r_0$. Consideremos $r_1 \in (0,1)$ tal que $r_1 \ge r_0$ y

$$r_0 \le \frac{r_1 - |\varphi(0)|}{1 - r_1 |\varphi(0)|}.$$

Entonces, si $|w| > r_1$, por el Lema de Pick-Schwarz, todo punto $z \in \mathbb{D}$ tal que $\varphi(z) = w$ verifica que

$$r_1 < |w| = |\varphi(z)| \le \frac{|z| + |\varphi(0)|}{1 + |z|\,|\varphi(0)|}.$$

Luego

$$|z| > \frac{r_1 - |\varphi(0)|}{1 - r_1 |\varphi(0)|} \ge r_0.$$

Así, tomando $w \in \mathbb{D}$ tal que $|w| > r_1$ se verifica que

$$\begin{aligned} \sum_{z\in\varphi^{-1}(w)} |\psi(z)|^2 \left(1 - |z|^2\right) &\le \frac{\varepsilon}{N} \sum_{z\in\varphi^{-1}(w)} \left(1 - |\varphi(z)|^2\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{N} \sum_{z\in\varphi^{-1}(w)} \left(1 - |w|^2\right) \le \varepsilon \left(1 - |w|^2\right). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Por otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{D}} |\psi(z) \varphi'(z) f_n'(\varphi(z))|^2 \left(1 - |z|^2\right) dA(z) = \\ &\quad = \int_{r_1\overline{\mathbb{D}}} |\psi(z) \varphi'(z) f_n'(\varphi(z))|^2 \left(1 - |z|^2\right) dA(z) \\ &\quad\quad + \int_{\mathbb{D}\setminus r_1\overline{\mathbb{D}}} |\psi(z) \varphi'(z) f_n'(\varphi(z))|^2 \left(1 - |z|^2\right) dA(z). \end{aligned}$$

Veamos que cada uno de estos dos sumandos es arbitrariamente pequeño (menor que ε) para n suficientemente grande. Por un lado, es fácil observar que la convergencia uniforme sobre compactos a cero de la sucesión $\{f_n\}$ implica que la sucesión $\{f_n'\}$ tiene la misma propiedad (véase [73, Teorema 10.4.11]). Además, la continuidad del operador $W_{\varphi,\psi'} : H_2 \to A_2^1$ implica que $C = \int_{r_1\overline{\mathbb{D}}} |\psi(z)\varphi'(z)|^2 (1-|z|^2)\, dA(z) < \infty$. Puesto que $\varphi(r_1\overline{\mathbb{D}})$ es un conjunto cuya clausura es un compacto de $\mathbb{D}$, existe un n_0 tal que para $n \geq n_0$ y $z \in \mathbb{D}$ tal que $|z| \leq r_1$ se verifica que $|f_n'(\varphi(z))| \leq \varepsilon/C$. De esta forma para $n \geq n_0$ se tiene que

$$\int_{r_1\overline{\mathbb{D}}} |\psi(z)\varphi'(z) f_n'(\varphi(z))|^2 (1-|z|^2)\, dA(z)$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{C} \int_{r_1\overline{\mathbb{D}}} |\psi(z)\varphi'(z)|^2 (1-|z|^2)\, dA(z) = \varepsilon.$$

Por otro lado, utilizando el Teorema del Cambio de Variable [20, Theorem 2.32] y la desigualdad (2.5) se verifica que

$$\int_{\mathbb{D}\setminus r_1\overline{\mathbb{D}}} |\psi(z)\varphi'(z) f_n'(\varphi(z))|^2 (1-|z|^2)\, dA(z)$$

$$= \int_{\varphi(\mathbb{D}\setminus r_1\overline{\mathbb{D}})} |f_n'(w)|^2 \left(\sum_{z\in\varphi^{-1}(w)} |\psi(z)|^2 (1-|z|^2) \right) dA(w)$$

$$\leq \varepsilon \int_{\varphi(\mathbb{D}\setminus r_1\overline{\mathbb{D}})} |f_n'(w)|^2 (1-|w|^2)\, dA(w)$$

$$\leq \varepsilon \int_{\mathbb{D}} |f_n'(w)|^2 (1-|w|^2)\, dA(w) \leq \varepsilon \|f_n\|^2 \leq \varepsilon. \blacksquare$$

En relación con las hipótesis del teorema anterior, en las Observaciones 2.23 y 2.24 se comentan algunas condiciones bajo las que el operador $W_{\varphi,\psi'} : H_2 \to A_2^1$ es compacto.

Problema abierto. Como en la sección anterior queda obtener una caracterización de la compacidad de los operadores de composición ponderados de H_p en H_q cuando $1 \leq q < p < \infty$.

2.4 Compacidad débil

Con respecto a la compacidad débil de los operadores que estamos estudiando, la reflexividad de los espacios de Hardy H_p cuando $1 < p < \infty$, fuerza a que todo operador continuo que tenga por rango o dominio dicho espacio sea débil compacto. Por tanto, los únicos casos no triviales y que estudiamos en esta sección son precisamente aquellos en que el dominio y el rango son H_∞ o H_1.

En 1983, J. Bourgain probó que un operador lineal y continuo definido en H_∞ y con rango un espacio de Banach separable es débil compacto [11] (véase también [15]). Por tanto, la compacidad débil de $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_1$ equivale a la continuidad. Por otro lado, M. D. Contreras y S. Díaz Madrigal probaron en [15, Proposition 2.3] que $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_\infty$ es compacto si, y sólo si, es débil compacto, con lo que ya está caracterizada la compacidad débil de este operador. De esta forma, resta estudiar la compacidad débil de $W_{\varphi,\psi}$ cuando está definido en H_1 y tiene rango H_1 o H_∞.

Comenzamos estudiando la compacidad débil de los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_\infty$. Es bien conocido que si K es un espacio topológico compacto y tenemos una sucesión $\{f_n\}$ acotada en $C(K)$ (el espacio de las funciones continuas de K en $\mathbb{C}$) y $f \in C(K)$ se verifica que $\{f_n\}$ converge en la topología débil a f si, y sólo si, $\{f_n(z) - f(z)\}$ converge a cero para cada z en K. La situación es algo más complicada cuando trabajamos con el espacio de las funciones continuas y acotadas en un espacio localmente compacto L, espacio que como es habitual notaremos $C_b(L)$. En este caso podemos recurrir a la propiedad de intercambio del doble límite que nos lleva a la siguiente caracterización: dada una sucesión $\{f_n\}$ acotada en $C_b(L)$ y $f \in C_b(L)$, $\{f_n\}$ converge en la topología débil a f si, y sólo si, para cualquier sucesión $\{z_m\}$ de elementos de L, se verifica que

$$\lim_n \lim_m f_n(z_m) = \lim_m f(z_m),$$

siempre que todos los límites que aparecen en la anterior igualdad existan (véase, por ejemplo, [29, pág. 48]). Si vemos al espacio H_∞ como un subespacio cerrado de $C_b(\mathbb{D})$, es obvio que una sucesión acotada de H_∞ converge a cero en la topología débil de H_∞ si, y sólo si, lo hace en la topología débil de $C_b(\mathbb{D})$. Si ahora consideramos una sucesión acotada $\{f_n\}$ en H_∞ y le aplicamos la propiedad de intercambio del doble límite que caracteriza la compacidad débil en $C_b(\mathbb{D})$, tenemos el siguiente lema:

Lema 2.42 *Sea $\{f_n\}$ una sucesión acotada en H_∞. Entonces $\{f_n\}$ converge a cero débilmente en H_∞ si, y sólo si, para cada sucesión $\{z_m\}$ en $\mathbb{D}$ se verifica que*

$$\lim_n \lim_m f_n(z_m) = 0$$

siempre que todos los límites que aparecen en la anterior igualdad existan.

El anterior lema también se puede obtener usando la caracterización de la compacidad débil en espacios $L_\infty(\mu, X)$ dada por G. Schlüchtermann [75].

Teniendo caracterizada la convergencia débil a cero en H_∞ podemos ya probar el siguiente resultado.

Teorema 2.43 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_\infty$ tales que $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_\infty$ es continuo. Entonces $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_\infty$ es débil compacto.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en la bola unidad de H_1 que converja a cero uniformemente sobre compactos y probemos que $\{W_{\varphi,\psi}(f_n)\}$ converge a cero para la topología débil de H_∞. Para ello supondremos inicialmente que $f_n \in H_\infty$ y eliminaremos esta restricción más adelante.

Puesto que el operador $W_{\varphi,\psi}$ es continuo de H_1 en H_∞, la sucesión $\{\psi f_n \circ \varphi\}$ está acotada en H_∞. De esta forma, por el lema anterior, bastará probar que la sucesión $\{\psi f_n \circ \varphi\}$ verifica que, para cada sucesión $\{z_m\}$ en $\mathbb{D}$, ésta tiene una subsucesión $\{z_{m_k}\}$ tal que $\lim_n \lim_k \psi(z_{m_k}) f_n(\varphi(z_{m_k})) = 0$.

Consideremos, por tanto, una sucesión $\{z_m\}$ en $\mathbb{D}$ y distingamos dos casos: que $|\varphi(z_m)| \to 1$ o que existan una subsucesión $\{z_{m_k}\}$ de $\{z_m\}$, $a \in \overline{\mathbb{D}}$ y $b \in \mathbb{D}$ tales que $z_{m_k} \to a$ y $\varphi(z_{m_k}) \to b$. En primer lugar, si $|\varphi(z_m)| \to 1$, como $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_\infty$ es continuo, por el Corolario 2.14, se verifica $|\psi(z_m)| \to 0$. Entonces

$$\lim_{m\to\infty} |\psi(z_m) f_n(\varphi(z_m))| \le \|f_n\|_{H^\infty} \lim_{m\to\infty} |\psi(z_m)| = 0$$

y así

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} |\psi(z_m) f_n(\varphi(z_m))| = 0.$$

Para el segundo de los casos utilizaremos de nuevo la convergencia uniforme sobre compactos de $\{f_n\}$ a cero. Como $\lim_k \varphi(z_{m_k}) = b \in \mathbb{D}$ entonces

$$\lim_k f_n(\varphi(z_{m_k})) = f_n(b)$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left|\psi\left(z_{m_k}\right)f_n\left(\varphi\left(z_{m_k}\right)\right)\right| &\leq \|\psi\|_{H_\infty}\lim_{n\to\infty}\lim_{k\to\infty}\left|f_n\left(\varphi\left(z_{m_k}\right)\right)\right| \\ &= \|\psi\|_{H_\infty}\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(b\right)\right| = 0.\end{aligned}$$

De esta forma, si las funciones f_n están en H_∞ tenemos probado que $\{W_{\varphi,\psi}(f_n)\}$ converge a cero para la topología débil de H_∞. Veamos cómo se puede suprimir esta condición. Sea $\{g_n\}$ una sucesión en la bola unidad de H_1 que converja a cero uniformemente sobre compactos. Por la densidad de los polinomios en H_1, existe una sucesión de polinomios $\{p_n\}$ tal que $\|g_n - p_n\|_{H_1} \to 0$. Veamos que $\{p_n\}$ está en las condiciones anteriores. Sea $0 < r < 1$ y $z \in \mathbb{D}$ con $|z| \leq r$. Entonces

$$\begin{aligned}\left|g_n(z) - p_n(z)\right| &= \left|\delta_z\left(g_n - p_n\right)\right| \leq \|\delta_z\|_{H_1^*}\|g_n - p_n\|_{H_1} \\ &\leq \frac{1}{1-r^2}\|g_n - p_n\|_{H_1}.\end{aligned}$$

De esta forma se obtiene que $\{g_n - p_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos. Como $\{g_n\}$ también converge a cero uniformemente sobre compactos, se sigue que $\{p_n\}$ también converge a cero en dicha topología. Además, $p_n \in H_\infty$ y $\{p_n\}$ está acotada en H_1. Por tanto, aplicando el caso anterior, se tiene que $\{W_{\varphi,\psi}(p_n)\}$ converge a cero para la topología débil de H_∞. Por la continuidad de $W_{\varphi,\psi}$,

$$\|W_{\varphi,\psi}(g_n) - W_{\varphi,\psi}(p_n)\|_{H_\infty} \to 0$$

con lo que $\{W_{\varphi,\psi}(g_n)\}$ también converge a cero débilmente en H_∞. ■

Merece la pena destacar que no todo operador de H_1 en H_∞ es débil compacto. En el siguiente ejemplo constatamos esta afirmación.

Ejemplo 2.44 Consideremos el operador $T : H_1 \to H_\infty$ definido como

$$T(f)(z) = \int_0^z f(\xi)\,d\xi$$

para toda $f \in H_1$. La continuidad de T se tiene ya que $T(f) \in S_1$ y, como vimos en el Capítulo 1, se verifica que $S_1 \subset A$, con lo que basta aplicar el Teorema de la Gráfica Cerrada. Pasemos a probar que T no es débil compacto. Para ello, tomemos una sucesión $0 < r_n < 1$ tal que $r_n \to 1$ y definamos la sucesión de funciones

$$f_n(z) = \frac{1-r_n^2}{(1-r_n z)^2}.$$

Como ya sabemos, ésta es una sucesión en la bola unidad de H_1 que converge a cero uniformemente sobre compactos (Lema 2.25). De esta forma, la sucesión $\{T(f_n)\}$ es relativamente compacta en la topología débil de H_∞ si, y sólo si, converge a cero en la topología débil de H_∞. Veremos que esto no puede ocurrir aplicando el Lema 2.42. Como $\{T(f_n)\}$ es una sucesión acotada en H_∞ y

$$T(f_n)(z) = \int_0^z f_n(\xi)\,d\xi = \int_0^z \frac{1-r_n^2}{(1-r_n\xi)^2}d\xi = \left(1-r_n^2\right)\frac{z}{1-r_n z},$$

se tiene que, para toda sucesión $s_m \in [0,1)$ tal que $s_m \to 1$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} T(f_n)(s_m) &= \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\left(1-r_n^2\right)\frac{s_m}{1-r_n s_m} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1-r_n^2\right)\frac{1}{1-r_n} = \lim_{n\to\infty}(1+r_n) = 2.
\end{aligned}$$

Por tanto, T no es débil compacto.

Como ya hemos comentado al comienzo de la sección, para finalizar el estudio de la compacidad débil de los operadores de composición ponderados nos queda solamente el caso en que tanto el dominio como el rango es H_1. Para obener este resultado haremos uso del siguiente lema debido a S. Díaz Madrigal [22, Corollary 1].

Lema 2.45 *Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada en un espacio de Banach X. Entonces $\{x_n\}$ converge en la topología débil a cero si, y sólo si, para cada subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ existe una sucesión de combinaciones convexas de $\{x_{n_k}\}$, que denotamos $\{y_n\}$, tal que $\|y_n\|_X \to 0$.*

Si $\{x_n\}$ es una sucesión convergente a cero en la topología débil, es bien conocido la existencia de las combinaciones convexas que aparecen en el anterior resultado. Lo novedoso del lema anterior, y de hecho la parte que nosotros usaremos, es el recíproco.

El siguiente resultado pasa la compacidad débil de un operador a otro subordinado a él en la norma. Un resultado similar para compacidad (en la norma) es bien conocido y fácil de obtener y puede verse, por ejemplo, en el texto de J. Diestel [23, pág. 5]. Creemos que este resultado puede tener interés por sí mismo y por ello lo enunciamos en un contexto más general que el de los operadores de composición ponderados.

Proposición 2.46 *Sean X, Y y Z espacios de Banach, $T : X \longrightarrow Y$ y $S : X \longrightarrow Z$ operadores acotados tales que $\|Sx\| \leq \|Tx\|$ para todo $x \in X$. Supongamos que existen dos topologías lineales τ_1 sobre X y τ_2 sobre Y tales que T es τ_1-τ_2 continuo, (B_X, τ_1) es metrizable y compacto y la topología débil de Y es más fina que τ_2. Si T es débil compacto, entonces también lo es S.*

Antes de probar este resultado, merece la pena tener en mente que lo vamos a aplicar tomando $X = Y = H_1$, τ_1 la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, τ_2 la topología de la convergencia puntual y, por supuesto, T un operador de composición ponderado. Otras situaciones donde se verifican las hipótesis de manera automática es cuando el operador T es un operador adjunto y tomamos τ_1 y τ_2 las respectivas topologías débil-$*$, siendo el predual de X separable.

Demostración. Tomemos $\{x_n\}$ una sucesión en la bola unidad B_X. Debemos encontrar una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ tal que $\{Sx_{n_k}\}$ converja en la topología débil de Z.

Como (B_X, τ_1) es metrizable y compacto, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ y un punto $x \in B_X$ tal que $\{x_{n_k} - x\}$ converge a cero en la topología τ_1. Esta es la subsucesión que estamos buscando. Ahora, usando el Lema 2.45, vamos a probar que $\{S(x_{n_k} - x)\}$ es débil nula. Teniendo en cuenta que T es τ_1-τ_2 continuo, la topología débil de Y es más fina que τ_2, y que T es débil compacto, tenemos que $\{T(x_{n_k} - x)\}$ converge a cero en la topología débil de Y. Tomemos una subsucesión $\{y_k\}$ de $\{x_{n_k}\}$. Entonces existe una sucesión $\{z_k\}$ de combinaciones convexas de $\{y_k\}$ tal que $\|T(z_k - x)\| \to 0$. Como $\|S(z_k - x)\| \leq \|T(z_k - x)\|$, se tiene que $\|S(z_k - x)\| \to 0$. Resumiendo, para cada subsucesión $\{y_k\}$ de $\{x_{n_k}\}$, hemos encontrado una sucesión $\{z_k\}$ de combinaciones convexas de $\{y_k\}$ tal que $\|S(z_k - x)\| \to 0$. Por el Lema 2.45, $\{S(x_{n_k} - x)\}$ converge a cero en la topología débil de Z. ■

Teorema 2.47 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : H_1 \longrightarrow H_1$ *es compacto;*

(*ii*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : H_1 \longrightarrow H_1$ *es débil compacto;*

(*iii*) $\mu_{\varphi,\psi,1}$ *es una medida de Carleson compacta sobre* $\overline{\mathbb{D}}$.

Demostración. Es obvio que (*i*) implica (*ii*). El Teorema 2.37 afirma que (*i*) y (*iii*) son equivalentes. Por tanto es suficiente probar que (*ii*) implica (*iii*). Para ello vamos a aplicar la Proposición 2.46 con $X = Y = H_1$, τ_1 la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, τ_2 la topología de la convergencia puntual y $T = W_{\varphi,\psi}$. Es inmediato comprobar que $W_{\varphi,\psi}$ es un operador τ_1-τ_2 continuo. Consideremos la aplicación $S : H_1 \longrightarrow L_1\left(\overline{\mathbb{D}}, \mu_{\varphi,\psi,1}\right)$ dada por $S(f) = f$. Por el Lema 2.16, tenemos que $\|W_{\varphi,\psi}(h)\|_{H_1} = \|S(h)\|_{L_1\left(\overline{\mathbb{D}},\mu_{\varphi,\psi,1}\right)}$ para toda $h \in H_1$. Como $W_{\varphi,\psi}$ es débil compacto sobre H_1, por la Proposición 2.46, S también es débil compacto.

Por otro lado, supongamos que no se verifica (*iii*). Entonces existen $\beta > 0$, $r_n \rightarrow 0$ $(0 < r_n < 1)$ y $b_n \in \mathbb{T}$ tales que $\mu_{\varphi,\psi,1}(S(b_n, r_n)) \geq \beta r_n$ para todo n. Consideremos $a_n = (1 - r_n) b_n$ y $f_n(z) = 1/\left(1 - \overline{a_n} z\right)^2$. Entonces $f_n \in H_1$ y, por el Lema 2.25, se verifica que $\|f_n\|_{H_1} = \frac{1}{r_n(2-r_n)}$. Tomemos ahora $g_n = f_n / \|f_n\|_{H_1}$. Para obtener una contradicción, probaremos que para cada subsucesión $\{g_{n_k}\}$, la sucesión $\{S(g_{n_k})\}$ no es débil convergente. Por [90, pág. 137], será suficiente probar que el conjunto $\{S(g_{n_k}) : k \in \mathbb{N}\}$ no es uniformemente integrable, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\eta > 0$ existe un subconjunto medible E de $\overline{\mathbb{D}}$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_{\varphi,\psi,1}(E) \leq \eta$ y $\int_E |g_{n_k}| \, d\mu_{\varphi,\psi,1} \geq \varepsilon$. Tomemos $\varepsilon = \beta/4$ y fijemos un η arbitrario. Como $\mu_{\varphi,\psi,1}$ es una medida de Carleson sobre $\overline{\mathbb{D}}$, existe una constante M tal que $\mu_{\varphi,\psi,1}(S(b,r)) \leq Mr$ para todo $b \in \mathbb{T}$ y $0 < r < 1$. En particular, podemos tomar un k tal que $\mu_{\varphi,\psi,1}(S(b_{n_k}, r_{n_k})) \leq \eta$. Por otro lado, teniendo en cuenta que $|f_{n_k}(z)| \geq (2r_{n_k})^{-2}$ si $z \in S(b_{n_k}, r_{n_k})$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{S\left(b_{n_k}, r_{n_k}\right)} |g_{n_k}| \, d\mu_{\varphi,\psi,1} &\geq \frac{(2r_{n_k})^{-2}}{\|f_{n_k}\|_{H_1}} \mu_{\varphi,\psi,1}\left(S\left(b_{n_k}, r_{n_k}\right)\right) \\
&\geq \frac{r_{n_k}\left(2 - r_{n_k}\right)}{4r_{n_k}^2} \beta r_{n_k} \geq \frac{\beta}{4}. \blacksquare
\end{aligned}$$

La equivalencia entre la compacidad débil y la compacidad para operadores de composición en H_1 fue obtenido por D. Sarason en 1990 [74]. Nuestra prueba sigue ideas diferentes a las de Sarason. En su prueba él usa la dualidad entre H_1 y $BMOA$ y la acotación de C_φ como un operador en $L_1(\mathbb{T}, m)$. En 1998, H. Jarchow dio otra prueba del resultado de D. Sarason en la que ya usa medidas de Carleson [39, Theorem 4].

2.5 Continuidad Completa

Pasamos a estudiar cuándo los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_q$ son completamente continuos. Para $1 < p < \infty$ el espacio H_p es reflexivo. Por tanto, ser completamente continuo equivale a ser compacto si $1 < p < \infty$ y este problema ya lo hemos tratado en la Sección 2.3.

En cuanto al caso $p = \infty$, es bien conocido que un operador definido en H_∞ es completamente continuo si, y sólo si, es débil compacto. Este resultado fue probado por J. Bourgain a comienzos de los años 80 (véanse [11], [12] y [15]). Por tanto, la continuidad completa del operador $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_q$ ya ha sido estudiada en la sección anterior. De esta forma nos queda por estudiar la continuidad completa de $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_q$ para $1 \leq q \leq \infty$. Cuando $q > 1$, vamos a ver que la continuidad completa es, de hecho, *automática.*

Proposición 2.48 *Sea* $1 < q \leq \infty$. *Si el operador* $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_q$ *es continuo, entonces es completamente continuo.*

Demostración. Por el Teorema de Jarchow (Teorema 2.32), es suficiente ver que $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_q$ es compacto. Por un lado, si $q < \infty$, sabemos (Proposición 2.28) que esto equivale a que $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$. Basta ahora aplicar el Corolario 2.18. Por otro lado, si $q = \infty$, el Corolario 2.14 afirma que existe una constante M tal que

$$|\psi(z)| \leq M \left(1 - |\varphi(z)|^2\right)$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. De esta forma se tiene que $\lim_{|\varphi(z)| \to 1} |\psi(z)| = 0$. Por tanto, $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_\infty$ es compacto (véase [15, Proposition 2.3]). ■

Finalizamos esta breve sección caracterizando cuándo $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_1$ es completamente continuo. Notemos que ahora esto ya no es *automático.* Piénsese que, por ejemplo, el operador identidad en H_1 no es completamente continuo. Además, en el siguiente resultado obtenemos también una caracterización de la compacidad de los operadores $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_1$ con $1 < p \leq \infty$. Parte de la prueba de este resultado está inspirada en [39, Theorem 1].

Teorema 2.49 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_1$ tales que $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_1$ es continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) $m(\{z \in \mathbb{T} : \varphi(z) \in \mathbb{T}\}) = 0$;

(*ii*) *El operador $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_1$ es completamente continuo;*

(*iii*) *El operador $W_{\varphi,\psi} : H_p \to H_1$ es compacto, para todo $1 < p \leq \infty$.*

Demostración. La Proposición 2.27 afirma que (*iii*) implica (*i*). Por otro lado, la composición de un operador débil compacto con uno completamente continuo es compacto. De esta forma, teniendo en cuenta que la inclusión $i_{p,1}$ de H_p en H_1 es débil compacta si $1 < p \leq \infty$, si el operador $W_{\varphi,\psi} : H_1 \to H_1$ es completamente continuo, se tiene que $W_{\varphi,\psi} = W_{\varphi,\psi} \circ i_{p,1} : H_p \to H_1$ es compacto. Se tiene así que (*ii*) implica (*iii*).

Veamos finalmente que (*i*) implica (*ii*). Supongamos que

$$m(\{z \in \mathbb{T} : \varphi(z) \in \mathbb{T}\}) = 0$$

y sea $\{f_n\}$ una sucesión que converja a cero en la topología débil de H_1. Como $f_n(z) \to 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y $m(\{z \in \mathbb{T} : \varphi(z) \in \mathbb{T}\}) = 0$, se tiene que la sucesión de funciones $\{W_{\varphi,\psi}(f_n)\}$ tiende a cero casi por doquier en $\mathbb{T}$. En particular, esto implica que la sucesión $\{W_{\varphi,\psi}(f_n)\}$ converge a cero en medida en $L_1(\mathbb{T}, m)$ (véase [73, pág. 66]). Además, como el operador $W_{\varphi,\psi}$ es débil-débil continuo, $\{W_{\varphi,\psi}(f_n)\}$ tiende a cero en la topología débil de H_1 y, por tanto, en la topología débil de $L_1(\mathbb{T}, m)$. Finalmente, teniendo en cuenta que una sucesión en $L_1(\mathbb{T}, m)$ converge a cero en la topología de la norma cuando converge a cero en medida y en la topología débil (véase, por ejemplo, [24, pág. 295]), tenemos que $\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{H_1} \to 0$. ■

Para operadores de composición, la equivalencia entre (*i*) y (*ii*) fue obtenida por J. A. Cima y A. Matheson [14].

2.6 Operadores de composición en el semiplano

Finalizamos con una aplicación de los resultados obtenidos en este capítulo a uno de los ejemplos que motivó nuestro estudio de los operadores de composición ponderados y que ya comentamos en la introducción de esta memoria:

los operadores de composición en los espacios de Hardy del semiplano. Para ello necesitamos precisar antes alguna notación. Como ya indicamos en la introdución, denotamos por Π al semiplano superior complejo, es decir,

$$\Pi = \{\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(\omega) > 0\}.$$

Fijemos $1 \leq p < \infty$. Para cada $f : \Pi \longrightarrow \mathbb{C}$ analítica, $\|f\|_{H_p(\Pi)}$ se define mediante

$$\|f\|_{H_p(\Pi)} = \sup_{y>0} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Pues bien, el espacio de Hardy en el semiplano, espacio que denotamos mediante $H_p(\Pi)$, está formado por todas las funciones analíticas en Π para las que $\|f\|_{H_p(\Pi)}$ es finito. Si dotamos al espacio $H_p(\Pi)$ con la norma $\|\cdot\|_{H_p(\Pi)}$ obtenemos un espacio de Banach (véase el texto de Hoffman [35] para sus propiedades).

Si $\phi : \Pi \to \Pi$ es una función analítica, se define el operador de composición en $H(\Pi)$ (espacio de funciones analíticas en Π) mediante $C_\phi(f) = f \circ \phi$. Es bien conocido que, en general, el operador de composición C_ϕ no transforma $H_p(\Pi)$ en sí mismo. En la literatura se pueden encontrar diversos trabajos donde se estudia la continuidad de dichos operadores. En este sentido, el trabajo que nos parece más interesante es el publicado recientemente por V. Matache [52]. Más abajo comentamos el contenido de dicho trabajo.

Consideremos la aplicación conforme

$$\gamma(z) = i\frac{1+z}{1-z}$$

que transforma $\mathbb{D}$ sobre Π. Su inversa viene dada por

$$\gamma^{-1}(w) = \frac{w-i}{w+i},$$

que claramente transforma el semiplano en el disco. Fijado $1 \leq p < \infty$, las aplicaciones lineales $V_p : H_p \longrightarrow H_p(\Pi)$ y $W_p : H_p(\Pi) \longrightarrow H_p$ dadas por

$$V_p(f)(w) = \frac{1}{\pi^{1/p}(w+i)^{2/p}} f\left(\gamma^{-1}(w)\right)$$

para todo $w \in \Pi$, y

$$W_p(g)(z) = \frac{e^{i\pi/p}(4\pi)^{1/p}}{(1-z)^{2/p}} g(\gamma(z))$$

para todo $z \in \mathbb{D}$, son isometrías y cada una es inversa de la otra (véase, por ejemplo, [52, pág. 1487]). Teniendo esto en cuenta, se tiene que para $1 \leq p, q < \infty$, si $\phi : \Pi \to \Pi$ es una función analítica, el operador de composición C_ϕ es continuo (resp. compacto, débil compacto o completamente continuo) de $H_p(\Pi)$ en $H_q(\Pi)$ si, y sólo si, el operador $W_q \circ C_\phi \circ V_p$ es continuo (resp. compacto, débil compacto o completamente continuo) de H_p en H_q. Veamos quién es este último operador. Para simplificar este cálculo conviene introducir alguna notación previa. Concretamente las siguientes funciones aparecerán repetidas veces

$$\varphi = \gamma^{-1} \circ \phi \circ \gamma \qquad \text{y} \qquad \psi(z) = \frac{(1 - \varphi(z))^{2/p}}{(1 - z)^{2/q}}.$$

Es claro que tanto φ como ψ son funciones analíticas en $\mathbb{D}$ y que, de hecho, $\varphi \in \Phi$. Si ahora tomamos $f \in H_p$ y $z \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
W_q \circ C_\phi \circ V_p(f)(z) &= \frac{e^{i\pi/q}(4\pi)^{1/q}}{(1-z)^{2/q}} [C_\phi \circ V_p(f)](\gamma(z)) \\
&= \frac{e^{i\pi/q}(4\pi)^{1/q}}{(1-z)^{2/q}} [V_p(f)](\phi \circ \gamma(z)) \\
&= \frac{e^{i\pi/q}(4\pi)^{1/q}}{(1-z)^{2/q}} \frac{1}{\pi^{1/p}(\phi \circ \gamma(z) + i)^{2/p}} f\left(\gamma^{-1} \circ \phi \circ \gamma(z)\right) \\
&= \frac{e^{i\pi/q}(4\pi)^{1/q}}{(1-z)^{2/q}} \frac{1}{\pi^{1/p}(\gamma \circ \varphi(z) + i)^{2/p}} f(\varphi(z)) \\
&= \frac{e^{i\pi/q}(4\pi)^{1/q}}{(1-z)^{2/q}\pi^{1/p}} \left(\frac{1-\varphi(z)}{2i}\right)^{2/p} f(\varphi(z)) \\
&= e^{i\pi/q - i\pi/p}(4\pi)^{1/q-1/p} W_{\varphi,\psi}(f)(z).
\end{aligned}$$

Se obtiene así que C_ϕ es continuo (resp. compacto, débil compacto o completamente continuo) de $H_p(\Pi)$ en $H_q(\Pi)$ si, y sólo si, el operador de composición ponderado $W_{\varphi,\psi}$ es continuo (resp. compacto, débil compacto o completamente continuo) de H_p en H_q. Este resultado ya fue puesto de manifiesto por R. K. Singh [85] cuando $p = q = 2$ y por V. Matache [52] para el caso en que $p = q$. En realidad la prueba anterior es una simple adaptación al caso en que p no es necesariamente igual a q de la realizada en los mencionados trabajos.

Teniendo esto en cuenta y aplicando el Corolario 1.19 y la Proposición 1.4, se tiene que si C_ϕ es continuo desde $H_p(\Pi)$ en $H_q(\Pi)$, existe una constante M tal que

$$\frac{|1-\varphi(z)|^{2/p}}{|1-z|^{2/q}} \frac{\left(1-|z|^2\right)^{1/q}}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^{1/p}} \leq M \tag{1}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. En particular, tomando $r \in (0,1)$ se verifica que

$$|1-\varphi(r)|^{2q/p} \leq M^q \frac{\left(1-|\varphi(r)|^2\right)^{q/p}}{1-r^2} (1-r)^2 \leq M^q \frac{1-r}{1+r}.$$

De esta forma $\lim_{r\to 1} \varphi(r) = 1$. Es decir, φ tiene límite radial (de hecho, no tangencial) en $z=1$ y vale 1. En particular, se tiene que la función ϕ no puede estar acotada y que $\lim_{y\to\infty} \phi(iy) = \infty$. Es más, la desigualdad (1) muestra que

$$\varphi\left(\left\{z \in \mathbb{D} : |1-z|^2 < \lambda\left(1-|z|^2\right)\right\}\right)$$
$$\subseteq \left\{z \in \mathbb{D} : |1-z|^2 < M^p \lambda^{p/q}\left(1-|z|^2\right)\right\}.$$

En efecto, si $z \in \left\{z \in \mathbb{D} : |1-z|^2 < \lambda\left(1-|z|^2\right)\right\}$ entonces

$$\begin{aligned} |1-\varphi(z)|^2 &< M^p\left(1-|\varphi(z)|^2\right)\left(\frac{|1-z|^2}{1-|z|^2}\right)^{p/q} \\ &\leq M^p \lambda^{p/q}\left(1-|\varphi(z)|^2\right). \end{aligned}$$

En particular, si $p \geq q$ y $0 < \lambda < 1$ se verifica que

$$\varphi\left(\left\{z \in \mathbb{D} : |1-z|^2 < \lambda\left(1-|z|^2\right)\right\}\right) \subseteq \left\{z \in \mathbb{D} : |1-z|^2 < M^p \lambda\left(1-|z|^2\right)\right\}.$$

Si se analiza la prueba del Teorema de Julia-Carathéodory que aparece en el texto de J. H. Shapiro [83, pág. 57 y siguientes], se tiene que esto implica que φ tiene derivada angular en $z=1$ (este hecho ya fue observado por V. Matache en [52, Theorem 2.10] para el caso en que $p=q$). En particular, se tiene que

$$\lim_{r\to 1} \frac{1-\varphi(r)}{1-r} = \liminf_{r\to 1} \frac{1-|\varphi(r)|}{1-r} = \delta$$

para algún $\delta > 0$ (véase [83, pág. 57]). De esta forma,

$$\left|\frac{1-\varphi(z)}{1-z}\right|^2 \frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}$$

no puede converger a cero cuando $|z|$ tiende a 1. Centrándonos por el momento en el caso en que $p = q$, por la Proposición 1.22, $W_{\varphi,\psi}$ no es compacto en H_p para $1 \leq p < \infty$. Es decir, hemos probado el siguiente resultado debido a V. Matache [52].

Proposición 2.50 *Si* $1 \leq p < \infty$, *entonces no hay ningún operador de composición compacto en* $H_p(\Pi)$.

Además, con nuestro estudio podemos llegar un poco más lejos ya que, puesto que el Teorema 2.47 muestra que $W_{\varphi,\psi}$ es compacto en H_1 si, y sólo si, es débil compacto, se verifica que:

Proposición 2.51 *No hay ningún operador de composición débil compacto en* $H_1(\Pi)$.

Si miramos ahora al caso en que $p > q$, teniendo en cuenta la desigualdad (1) y tomando $r \in (0,1)$, se tiene que

$$\begin{aligned} M^q &\geq \frac{|1-\varphi(r)|^{2q/p}}{|1-r|^2} \frac{(1-r^2)}{\left(1-|\varphi(r)|^2\right)^{q/p}} \\ &= \left|\frac{1-\varphi(r)}{1-r}\right|^{2q/p} \left(\frac{1-r^2}{1-|\varphi(r)|^2}\right)^{q/p} \left(\frac{1-r^2}{(1-r)^2}\right)^{1-q/p} \\ &= \left|\frac{1-\varphi(r)}{1-r}\right|^{2q/p} \left(\frac{1-r^2}{1-|\varphi(r)|^2}\right)^{q/p} \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1-q/p}. \end{aligned}$$

Tentiendo en cuenta otra vez el hecho de que

$$\lim_{r\to 1}\left|\frac{1-\varphi(r)}{1-r}\right|^{2q/p} \left(\frac{1-r^2}{1-|\varphi(r)|^2}\right)^{q/p}$$

existe y es no nulo, llegamos a una contradicción. Por tanto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 2.52 *Si $p > q$, entonces no existen operadores de composición continuos de $H_p(\Pi)$ en $H_q(\Pi)$.*

Finalmente, la Proposición 2.48 y el Teorema 2.49 aplicados al operador $W_{\varphi,\psi}$ prueban que:

Proposición 2.53 (*i*) *Todo operador de composición continuo de $H_1(\Pi)$ en $H_q(\Pi)$ con $1 < q < \infty$ es completamente continuo.*

(*ii*) *Si $C_\phi : H_1(\Pi) \to H_1(\Pi)$ es continuo, entonces $C_\phi : H_1(\Pi) \to H_1(\Pi)$ es completamente continuo si, y sólo si, la medida de Lebesgue (en $\mathbb{R}$) del conjunto*

$$\{x \in \mathbb{R} : \phi^*(x) \in \mathbb{R}\}$$

es cero, donde

$$\phi^*(x) = \lim_{y \to 0^+} \phi(x + yi)$$

es la extensión de ϕ a la frontera del semiplano. (Recordemos que este límite existe en casi todo punto $x \in \mathbb{R}$ [35]).

Capítulo 3

Espacios de funciones con derivada en los espacios de Hardy

Dedicamos este capítulo al estudio de la continuidad y compacidad de los operadores de composición ponderados en los espacios de funciones con derivada en los espacios de Hardy, espacios que estamos denotando por S_p.

Los espacios S_p no se han estudiados de manera tan exhaustiva como los espacios de Hardy. No obstante, autores como S. C. Arora, B. D. MacCluer, M. Mukherjee, A. Panigrahi y R. C. Roan han estudiado los operadores de composición y los de composición ponderados en dichos espacios. Concretamente, R. C. Roan realiza el primer estudio de los operadores de composición en los espacios S_p en 1978 [71]. Obtuvo condiciones suficientes para la continuidad y compacidad y estudió cuándo los operadores de composición en los espacios S_p tienen rango cerrado. Posteriormente, B. D. MacCluer [54] caracterizó la continuidad y la compacidad de los operadores de composición en estos espacios en términos de medidas de Carleson. En cuanto a los operadores de composición ponderados, S. C. Arora, M. Mukherjee y A. Panigrahi [2] obtuvieron una condición suficiente para la continuidad y compacidad de los operadores de composición ponderados en los espacios S_p también en términos de medidas de Carleson. Además, C. C. Cowen y B. D. MacCluer recogen gran parte de estos resultados en su monografía sobre operadores de composición, englobando los espacios S_p dentro de lo que se conoce como *espacios pequeños* [20, Chapter 4].

Recordemos que las funciones de los espacios S_p son continuas en $\overline{\mathbb{D}}$ y, por tanto, pertenecen al álgebra del disco, A, siendo la inclusión continua para todo $p \in [1, \infty]$ (véase el Capítulo 1). Con la ayuda de este resultado caracterizamos la continuidad de los operadores de composición ponderados en los espacios S_p. Con respecto a la compacidad, probamos más adelante que, de hecho, esta inclusión es compacta cuando $1 < p \leq \infty$ y veremos que la inclusión de S_1 en A no lo es. Sin embargo, sí obtenemos que la inclusión de S_1 en H_1 es compacta. Con ambos resultados caracterizamos la compacidad de $W_{\varphi,\psi}$ en los espacios S_p. Esto se verá en las dos primeras secciones del capítulo. En la tercera y cuarta sección caracterizamos la compacidad débil y la continuidad completa de $W_{\varphi,\psi}$.

3.1 Continuidad

Comenzamos el capítulo centrándonos en el estudio de la continuidad del operador $W_{\varphi,\psi}$ en los espacios S_p. Como quedará de manifiesto a lo largo del capítulo, debido a que

$$(W_{\varphi,\psi}(f))' = \psi' f \circ \varphi + \psi\varphi' f' \circ \varphi,$$

el estudio del operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ "equivale" al estudio de los operadores

$$\begin{array}{rccc} W_{\varphi,\psi'} : & S_p & \to & H_q \\ & f & \to & \psi' f \circ \varphi \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc} W_{\varphi,\psi\varphi'} : & H_p & \to & H_q \\ & f & \to & \psi\varphi' f \circ \varphi. \end{array}$$

Probamos en el siguiente resultado que el primero de estos operadores es siempre continuo y, por tanto, la continuidad del operador $W_{\varphi,\psi}$ en los espacios S_p equivaldrá a la continuidad del segundo de ellos, $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$. Ahora bien, este operador no es más que un operador de composición ponderado con dominio y rango un espacio de Hardy. Esto nos permitirá aplicar gran parte de los resultados sobre la continuidad de los operadores de composición ponderados en los espacios H_p que obtuvimos en la Sección 2.2.

Lema 3.1 *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_q$. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to H_q$ es continuo.*

Demostración. Sea $f \in S_p$. Teniendo en cuenta que la inclusión de S_p en el álgebra del disco es siempre continua (véase el Capítulo 1), se concluye que

$$\|W_{\varphi,\psi}(f)\|_{H_q} = \|\psi f \circ \varphi\|_{H_q} \leq \|f\|_A \|\psi\|_{H_q} \leq \|i\|_{S_p \to A} \|f\|_{S_p} \|\psi\|_{H_q},$$

donde i denota al operador inclusión de S_p en A. ■

Con la ayuda del lema anterior probamos sin dificultad el resultado que relaciona la continuidad de los operadores de composición ponderados en los espacios S_p con la continuidad de los operadores de composición ponderados en los espacios de Hardy.

Teorema 3.2 *Fijados $1 \leq p, q \leq \infty$ y dadas $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_q$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ es continuo;

(ii) El operador $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$ es continuo.

Demostración. (i) implica (ii). Supongamos que $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ es continuo y probemos que el operador $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$ es continuo. Sea $g \in H_p$ y consideremos la función $f \in S_p$ tal que $f' = g$ y $f(0) = 0$. Entonces, teniendo en cuenta (i), que $\|f\|_{S_p} = \|g\|_{H_p}$ y el lema anterior, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|W_{\varphi,\psi\varphi'}(g)\|_{H_q} &= \|\psi\varphi' g \circ \varphi\|_{H_q} \\
&\leq \|\psi\varphi' g \circ \varphi + \psi' f \circ \varphi\|_{H_q} + \|\psi' f \circ \varphi\|_{H_q} \\
&= \left\|(\psi f \circ \varphi)'\right\|_{H_q} + \left\|W_{\varphi,\psi'}(f)\right\|_{H_q} \\
&\leq \|\psi f \circ \varphi\|_{S_q} + \left\|W_{\varphi,\psi'}\right\|_{S_p \to H_q} \|f\|_{S_p} \\
&\leq \|W_{\varphi,\psi}\|_{S_p \to S_q} \|f\|_{S_p} + \left\|W_{\varphi,\psi'}\right\|_{S_p \to H_q} \|f\|_{S_p} \\
&= \left(\|W_{\varphi,\psi}\|_{S_p \to S_q} + \left\|W_{\varphi,\psi'}\right\|_{S_p \to H_q}\right) \|f\|_{S_p} \\
&= \left(\|W_{\varphi,\psi}\|_{S_p \to S_q} + \left\|W_{\varphi,\psi'}\right\|_{S_p \to H_q}\right) \|g\|_{H_p}.
\end{aligned}$$

Luego, el operador $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$ es continuo.

(ii) implica (i). Supongamos ahora que el operador $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$ es continuo y probemos que $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ también lo es. Recordemos que los operadores de evaluación puntual δ_z son continuos en los espacios S_p para todo $z \in \mathbb{D}$ (véase la página 6). Así, por (ii) y el lema anterior, para cada $f \in S_p$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\|W_{\varphi,\psi}(f)\|_{S_q} &= |\psi(0) f(\varphi(0))| + \|\psi\varphi' f' \circ \varphi + \psi' f \circ \varphi\|_{H_q} \\
&\leq \left|\psi(0)\, \delta_{\varphi(0)}(f)\right| + \|\psi\varphi' f' \circ \varphi\|_{H_q} + \|\psi' f \circ \varphi\|_{H_q} \\
&\leq \|\psi\|_A \left\|\delta_{\varphi(0)}\right\|_{S_p^*} \|f\|_{S_p} + \|W_{\varphi,\psi\varphi'}\|_{H_p \to H_q} \|f'\|_{H_p} \\
&\quad + \left\|W_{\varphi,\psi'}\right\|_{S_p \to H_q} \|f\|_{S_p} \\
&\leq C \|f\|_{S_p}.
\end{aligned}$$

siendo la constante

$$C = \|\psi\|_A \left\|\delta_{\varphi(0)}\right\|_{S_p^*} + \|W_{\varphi,\psi\varphi'}\|_{H_p \to H_q} + \left\|W_{\varphi,\psi'}\right\|_{S_p \to H_q}. \blacksquare$$

Antes de pasar a enunciar algunas consecuencias de este resultado para los operadores de composición ponderados veamos qué implicaciones tiene sobre la continuidad de los operadores de multiplicación en los espacios S_p.

Corolario 3.3 *Fijados $1 \leq p, q \leq \infty$ y dada $\psi \in H(\mathbb{D})$, se tiene que:*

(i) Si $1 \leq q \leq p \leq \infty$, entonces $M_\psi : S_p \to S_q$ es continuo si, y sólo si, $\psi \in S_q$.

(ii) Si $1 \leq p < q \leq \infty$, entonces $M_\psi : S_p \to S_q$ es continuo si, y sólo si, ψ es la función nula.

Demostración. Antes de nada observemos que aplicando el Teorema 3.2 a la función $\varphi(z) = z$ se obtiene que si $\psi \in S_q$ entonces $M_\psi : S_p \to S_q$ es continuo si, y sólo si, $M_\psi : H_p \to H_q$ es continuo.

Comencemos probando (i). Es obvio que si $M_\psi : S_p \to S_q$ es continuo entonces $\psi \in S_q$. Para probar el recíproco recordemos que si $1 \leq q \leq p \leq \infty$ entonces el operador $M_\psi : H_p \to H_q$ es continuo si, y sólo si, $\psi \in H_r$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q}$ (se entiende que si $p = q$ entonces $r = \infty$). Puesto que $\psi \in S_q \subset H_r$ para todo r, se verifica que $M_\psi : S_p \to S_q$ es continuo. Esto prueba (i).

Para probar (ii) basta tener en cuenta que, cuando $1 \leq p < q \leq \infty$, $M_\psi : H_p \to H_q$ es continuo si, y sólo si, ψ es la función nula. $\blacksquare$

Volvamos de nuevo al tema central: los operadores de composición ponderados. A la vista del Teorema 3.2, podemos aplicar los resultados sobre continuidad para los operadores de composición ponderados en los espacios de Hardy vistos en el Capítulo 2 al estudio de la continuidad de los operadores de composición ponderados en los espacios S_p. Si el dominio es S_∞ se verifica que

Corolario 3.4 *Sean* $1 \leq q \leq \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_q$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_q$ *está acotado;*

(*ii*) *La función* $\psi\varphi'$ *pertenece a* H_q;

(*iii*) *La función* $\psi\varphi$ *pertenece a* S_q.

Demostración. La equivalencia entre (*i*) y (*ii*) es justamente la Proposición 2.12 junto con el Teorema 3.2. Por otro lado, la equivalencia entre (*ii*) y (*iii*) es inmediata pues

$$(\psi\varphi)' = \psi'\varphi + \psi\varphi'$$

y, bajo nuestras hipótesis, la función $\psi'\varphi$ siempre está en H_q. ■

Si el rango es S_∞, teniendo en cuenta el Corolario 2.14, se obtiene que

Corolario 3.5 *Sean* $1 \leq p < \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_\infty$. *Entonces el operador* $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_\infty$ *es continuo si, y sólo si,*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)\,\varphi'(z)|^p}{1-|\varphi(z)|^2} < \infty.$$

Supongamos ahora que ni el dominio ni el rango del operador es S_∞. Como consecuencia del Teorema 2.17 obtenemos la siguiente caracterización de la continuidad de $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ cuando $1 \leq p \leq q < \infty$ en términos de medidas de Carleson.

Corolario 3.6 *Sean* $1 \leq p \leq q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_q$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ *es continuo;*

(*ii*) *La medida* $\mu_{\varphi,\psi\varphi',q}$ *es de Carleson de orden* q/p *sobre* $\overline{\mathbb{D}}$.

Sabemos que es condición necesaria para que el operador $W_{\varphi,\psi}: S_p \to S_q$ esté bien definido que la función $\psi \in S_q$ y, por tanto, que ψ sea continua en la frontera del disco unidad. Además, debido a que la función χ_1 pertenece a S_p se tiene que $\psi\varphi \in S_q$ y, así, también es continua en la frontera del disco unidad. Por tanto, la función φ es continua en casi todo punto de la frontera. En el siguiente ejemplo mostramos que existen funciones $\varphi \notin A$ tales que el operador $W_{\varphi,\psi}: S_p \to S_q$ es continuo.

Ejemplo 3.7 Consideremos $\varphi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ y $\psi(z) = (1-z)^2$. Observemos que $\psi \in S_1$ (de hecho, $\psi \in S_\infty$) y que $\varphi \in \Phi$ pues $\varphi \in H(\mathbb{D})$ y

$$|\varphi(z)| = \exp\left(\operatorname{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\right) = \exp\left(\frac{|z|^2-1}{|1-z|^2}\right) \leq 1.$$

Además, el operador $W_{\varphi,\psi}: S_1 \to S_1$ es continuo ya que dada $f \in S_1$ y $z \in \mathbb{D}$ se tiene que

$$\begin{aligned}(\psi f \circ \varphi)'(z) &= \psi'(z) f(\varphi(z)) + \psi(z)\varphi'(z) f'(\varphi(z)) \\ &= 2(1-z) f(\varphi(z)) - 2\varphi(z) f'(\varphi(z))\end{aligned}$$

y, puesto que $2(\chi_0 - \chi_1) f \circ \varphi \in H_\infty$ y $2\varphi f' \circ \varphi \in H_1$ se tiene que $(\psi f \circ \varphi)' \in H_1$. Es decir, $\psi f \circ \varphi \in S_1$. En cambio, la función $\varphi \notin A$ ya que no es continua en $z = 1$ pues

$$\varphi\left(e^{i\theta}\right) = \cos\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 1}\right) + i\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 1}\right)$$

y

$$\lim_{\theta \to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - 1} = -\infty.$$

El objetivo del siguiente resultado es mostrar que si un operador de composición ponderado es continuo sobre algún espacio S_p con $p > 1$ entonces también es contino sobre S_1. Para ello probamos algo más general pues consideramos índices distintos en el dominio y el rango.

Proposición 3.8 *Sean $1 < p \leq q \leq \infty$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_q$. Si el operador $W_{\varphi,\psi}: S_p \to S_q$ es continuo, entonces el operador $W_{\varphi,\psi}: S_1 \to S_t$ es continuo donde t viene dado por*

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{t} + \frac{1}{p}.$$

Demostración. Recordemos que, como los operadores de composición en los espacios de Hardy son siempre continuos, por el Teorema 2.17,existe una constante $C > 0$ tal que $m\left(\varphi^{-1}(S(b,r)) \cap \mathbb{T}\right) \leq Cr$ para todo $b \in \mathbb{T}$ y $0 < r < 1$. Observemos también que como $1 < p \leq q$ entonces $1 \leq t < \infty$ y, por tanto, podemos aplicar el Corolario 3.6 para estudiar la continuidad del operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_t$.

En primer lugar, supongamos que $q < \infty$. Por el Corolario 3.6, $\mu_{\varphi,\psi\varphi',q}$ es una medida de Carleson de orden q/p y llamemos C_1 a la constante que aparece en la Definición 2.2 asociada a esta medida. Probemos que $\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}$ es una medida de Carleson de orden t. Sean $b \in \mathbb{T}$ y $0 < r < 1$. Por la Desigualdad de Hölder se verifica que

$$\begin{aligned}
\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}(S(b,r)) &= \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} |\psi\varphi'|^t \, dm \\
&\leq \left(\int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} |\psi\varphi'|^q \, dm\right)^{t/q} \left(\int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} dm\right)^{1-t/q} \\
&\leq \left(C_1 r^{q/p}\right)^{t/q} (Cr)^{1-t/q} = C_1^{t/q} C^{1-t/q} r^{1+t/p-t/q} \\
&= C_1^{t/q} C^{1-t/q} r^t.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}$ es una medida de Carleson de orden t y, teniendo en cuenta que $\psi \in S_t$ (ya que $t \leq q$), el Corolario 3.6 nos muestra que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_t$ es continuo.

Supongamos ahora que $q = \infty$ y que $1 < p < \infty$. Si el operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_\infty$ es continuo entonces, por el Corolario 3.5, se verifica que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)\varphi'(z)|^p}{1 - |\varphi(z)|^2} < \infty,$$

es decir, existe una constante $M > 0$ tal que $|\psi(z)\varphi'(z)|^p \leq M\left(1 - |\varphi(z)|^2\right)$ para todo $z \in \mathbb{D}$. De hecho, como los límites radiales de las funciones ψ, φ' y φ existen en casi todo punto de $\mathbb{T}$, la desigualdad anterior es cierta en casi todo punto $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Probemos que $\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}$ es una medida de Carleson de orden t. Sean $b \in \mathbb{T}$ y $0 < r < 1$. Se verifica que

$$\begin{aligned}
\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}(S(b,r)) &= \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} |\psi\varphi'|^t \, dm \\
&\leq M^{t/p} \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} \left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^{t/p} dm
\end{aligned}$$

$$\leq \; M^{t/p} r^{t/p} \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} dm \leq M^{t/p} r^{t/p} C r = C M^{t/p} r^t.$$

Esto prueba que $\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}$ es una medida de Carleson de orden t y, por el Corolario 3.6, que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_t$ es continuo.

Finalmente, supongamos que $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_\infty$ es continuo y probemos que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ es un operador acotado. Si $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_\infty$ es continuo, por el Corolario 3.4, se verifica que $\psi\varphi' \in H_\infty$. Si $f \in S_1$, teniendo en cuenta que

$$(\psi f \circ \varphi)' = \psi' f \circ \varphi + \psi\varphi' f' \circ \varphi,$$

que $\psi' \in H_\infty$, $f \circ \varphi \in H_\infty$, $\psi\varphi' \in H_\infty$ y $f' \circ \varphi \in H_1$, se tiene que $(\psi f \circ \varphi)' \in H_1$. Es decir, $\psi f \circ \varphi \in S_1$. Por tanto, $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ es continuo. ■

3.2 Compacidad

Como comentamos en la introducción, el estudio de la compacidad de $W_{\varphi,\psi}$ es relativamente simple cuando el dominio del operador es el espacio S_p con $1 < p \leq \infty$ y algo más complicado para el caso en que el dominio es S_1. Esto se debe a que, cuando $1 < p \leq \infty$, la inclusión de S_p en el álgebra del disco es compacta, mientras que esto deja de ser cierto para $p = 1$ (véase la Observación 3.10). No obstante, utilizando técnicas diferentes, caracterizamos la compacidad de los operadores de composición ponderados cuyo dominio es el espacio S_1.

Proposición 3.9 *Si $1 < p \leq \infty$, entonces el operador inclusión $i : S_p \to A$ es compacto.*

Demostración. Puesto que la inyección del álgebra del disco en $C(\mathbb{T})$ (el espacio de las funciones continuas en $\mathbb{T}$) es una isometría (no sobreyectiva) bastará probar que $i : S_p \to C(\mathbb{T})$ es un operador compacto. Para ello aplicaremos el Teorema de Ascoli. Como vimos en el Capítulo 1 la inclusión de S_p en A es continua y, por tanto, bastará probar que la bola unidad de S_p es equicontinua en $C(\mathbb{T})$.

En primer lugar, consideremos el caso en que $1 < p < \infty$. Sea q el exponente conjugado de p, es decir, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Fijado $\varepsilon > 0$ tomemos $\delta = \varepsilon^q / (2\pi)^{q/p}$. Consideremos ahora $x = e^{i\theta_0}$ e $y = e^{i\theta_1}$ dos puntos de $\mathbb{T}$

tales que $\theta_0 < \theta_1$ y $(\theta_1 - \theta_0) < \delta$. Fijemos $f \in B_{S_p}$ y $0 < r < 1$. Entonces se tiene que

$$\begin{aligned}
|f(rx) - f(ry)| &= \left| \int_{rx}^{ry} f'(z)dz \right| = \left| \int_{re^{i\theta_0}}^{re^{i\theta_1}} f'(z)dz \right| \\
&= \left| \int_{\theta_0}^{\theta_1} ire^{i\theta} f'(re^{i\theta})d\theta \right| \leq r \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \left| f'(re^{i\theta}) \right| \chi_{[\theta_0,\theta_1]}(\theta)\, d\theta \\
&\leq r \left(\int_0^{2\pi} \left| f'(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{1/p} \left(\int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \chi_{[\theta_0,\theta_1]}(\theta)\, d\theta \right)^{1/q} \\
&\leq (2\pi)^{1/p} r \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f'(re^{i\theta}) \right|^p d\theta \right)^{1/p} (\theta_1 - \theta_0)^{1/q} \\
&\leq (2\pi)^{1/p} r \, \|f'\|_{H_p} (\theta_1 - \theta_0)^{1/q} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Finalmente, como $f \in A$, podemos hacer tender r a 1 obteniendo que

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Esto prueba que B_{S_p} es equicontinua en $C(\mathbb{T})$.

Para ver que la inyección de S_∞ en A es compacta, basta observar que ésta factoriza a través de la inyección de S_∞ en S_2 y de la inyección de S_2 en A. ■

En el siguiente ejemplo probamos que la inclusión de S_1 en A no es débil compacta y, por tanto, tampoco es compacta.

Observación 3.10 Para probar que la inyección de S_1 en A no es débil compacta utilizaremos la caracterización de la Proposición 1.21. Así, construiremos una sucesión acotada de funciones en S_1 que converja a cero uniformemente sobre compactos y tal que no converja a cero en la topología débil de A. Para su construcción, tomemos $\{a_n\}$ una sucesión de números reales en $(0, 1)$ tal que $a_n \to 1$ y consideremos la sucesión de funciones

$$g_n(z) = \left(1 - a_n^2\right) \frac{z}{1 - a_n z}.$$

Entonces,

$$g_n'(z) = \frac{\left(1 - a_n^2\right)}{(1 - a_n z)^2}.$$

Así, por el Lema 2.25, se verifica que $\|g_n'\|_{H_1} = 1$. Por tanto, $\{g_n\}$ está en la bola unidad de S_1. Además, es inmediato comprobar que $\{g_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$ mientras que

$$g_n(1) = \left(1 - a_n^2\right) \frac{1}{1 - a_n} = 1 + a_n \to 2$$

cuando n tiende a infinito. En particular, $\{g_n\}$ no converge a cero en la topología débil de A. Por tanto, la inclusión de S_1 en A no es débil compacta.

A pesar de esta última observación se puede probar que

Proposición 3.11 *El operador inclusión de S_1 en H_1 es compacto.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en la bola unidad de S_1 que converja a cero uniformemente sobre compactos. Puesto que $f_n(0) \to 0$ podemos suponer que $f_n(0) = 0$ para todo n. Por otro lado, dado que $f_n' \in H_1$, por la Desigualdad de Fejér-Riesz [25, Theorem 3.13], la integral $\int_0^z f_n'(w)\,dw$ es convergente para cada $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Además, si $z \in \mathbb{D}$ es claro que $f_n(z) = \int_0^z f_n'(w)dw$. Así, por la continuidad de la función f_n y el Teorema de la Convergencia Dominada, concluimos que esta igualdad también es cierta para todo $z \in \mathbb{T}$. De esta forma,

$$f_n(z) = \int_0^z f_n'(w)dw = \int_0^1 f_n'(tz)zdt$$

para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Probemos que $\|f_n\|_{H_1} \to 0$. Por el Teorema de Fubini, se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f_n\|_{H_1} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_n\left(e^{i\theta}\right)\right| d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\int_0^1 f_n'(te^{i\theta})e^{i\theta}dt\right| d\theta \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left|f_n'(te^{i\theta})\right| dtd\theta = \int_0^1 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f_n'(te^{i\theta})\right| d\theta dt \\
&= \int_0^1 M_1\left(t, f_n'\right) dt.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$M_1\left(t, f_n'\right) \leq \|f_n'\|_{H_1} = \|f_n\|_{S_1} \leq 1.$$

Además, teniendo en cuenta que $\{f_n'\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$, para cada $t \in (0,1)$ se verifica que

$$M_1\left(t, f_n'\right) \to 0$$

cuando $n \to \infty$. De esta forma, por el Teorema de la Convergencia Dominada, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 M_1\left(t, f_n'\right) dt = 0.$$

Esto prueba que $\lim_n \|f_n\|_{H_1} = 0$ y, por tanto, que la inyección $S_1 \hookrightarrow H_1$ es compacta. ■

Como ya sugerimos al comienzo de la Sección 3.1, el operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ es la "suma" de dos operadores, uno de los cuales viene dado por $W_{\varphi,\psi'} : S_p \to H_q$. Vamos a ver que, salvo cuando $p = 1$ y $q = \infty$, este último operador es siempre compacto. No ocurre así con el operador $W_{\varphi,\psi'} : S_1 \to H_\infty$. La compacidad de este último operador será caracterizada posteriormente.

Lema 3.12 *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ con $(p,q) \neq (1,\infty)$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_q$. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to H_q$ es compacto.*

Demostración. Por el Lema 3.1, el operador $W_{\varphi,\psi}$ es continuo. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en la bola unidad de S_p que converja a cero uniformemente sobre compactos. Tenemos que probar que $\|\psi f_n \circ \varphi\|_{H_q} \to 0$. Teniendo en cuenta los resultado vistos hasta ahora debemos distinguir los siguientes casos: $p > 1$ y $p = 1$.

Supongamos que $p > 1$. En este caso, por las Proposiciones 3.9 y 1.21, se verifica que

$$\|f_n\|_A \to 0,$$

cuando $n \to \infty$. De esta forma, se concluye que

$$\|\psi f_n \circ \varphi\|_{H_q} \leq \|f_n\|_A \|\psi\|_{H_q} \to 0,$$

cuando $n \to \infty$.

Supongamos ahora que $p = 1$ y que $1 \leq q < \infty$. Entonces, por las Proposiciones 3.11 y 1.21, se verifica que $\|f_n\|_{H_1} \to 0$ y, por tanto, salvo tomar una subsucesión apropiada que notamos igual, $f_n(z) \to 0$ en casi todo

$z \in \mathbb{T}$. En particular, $\psi(z) f_n(\varphi(z)) \to 0$ en casi todo $z \in \mathbb{T}$. Finalmente, puesto que dado $z \in \mathbb{T}$ se tiene que

$$|\psi(z) f_n(\varphi(z))| \leq \|f_n\|_A |\psi(z)| \leq \|i\|_{S_1 \to A} \|f_n\|_{S_1} |\psi(z)| \leq \|i\|_{S_1 \to A} |\psi(z)|,$$

el Teorema de la Convergencia Dominada implica que

$$\|\psi f_n \circ \varphi\|_{H_q} \to 0. \blacksquare$$

Para el operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to H_\infty$ obtenemos la siguiente caracterización.

Proposición 3.13 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_\infty$. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to H_\infty$ es compacto si, y sólo si, o $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ o $\lim_{|\varphi(z)| \to 1} |\psi(z)| = 0$.*

Demostración. Si $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ o $\lim_{|\varphi(z)| \to 1} |\psi(z)| = 0$ entonces, por [15, Proposition 2.3], el operador $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \to H_\infty$ es compacto. Como S_1 está incluido de manera continua en H_∞, se tiene que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to H_\infty$ es compacto.

Recíprocamente, supongamos que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to H_\infty$ es un operador compacto, que $\|\varphi\|_{H_\infty} = 1$ y que $\lim_{|\varphi(z)| \to 1} |\psi(z)| \neq 0$. Entonces existen una sucesión $\{z_n\}$ en el disco unidad y un número $c > 0$ tales que $|\varphi(z_n)| \to 1$ y $|\psi(z_n)| \geq c$ para todo n. Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(z) = \left(1 - |\varphi(z_n)|^2\right) \frac{z}{1 - \overline{\varphi(z_n)} z}.$$

Puesto que

$$f_n'(z) = \frac{1 - |\varphi(z_n)|^2}{\left(1 - \overline{\varphi(z_n)} z\right)^2},$$

por el Lema 2.25, $\{f_n\}$ está en la bola unidad de S_1 y converge a cero uniformemente sobre compactos del disco unidad. En cambio

$$\begin{aligned}
\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{H_\infty} &= \sup_{z \in \mathbb{D}} |\psi(z) f_n(\varphi(z))| \geq |\psi(z_n) f_n(\varphi(z_n))| \\
&= \left| \psi(z_n) \left(1 - |\varphi(z_n)|^2\right) \frac{\varphi(z_n)}{1 - \overline{\varphi(z_n)} \varphi(z_n)} \right| \\
&= |\psi(z_n) \varphi(z_n)| \geq c |\varphi(z_n)| \to c > 0,
\end{aligned}$$

lo que, por la Proposición 1.21, contradice que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to H_\infty$ sea un operador compacto. ■

Observemos que, en particular, para los operadores de composición se obtiene que $C_\varphi : S_1 \to H_\infty$ es compacto si, y sólo si, $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$.

Con la ayuda de los resultados anteriores obtenemos una primera caracterización de la compacidad de $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ para todo p y q con $(p,q) \neq (1,\infty)$ en función de la compacidad de cierto operador de composición ponderado en los espacios de Hardy.

Teorema 3.14 *Fijemos $1 \leq p,q \leq \infty$ con $(p,q) \neq (1,\infty)$ y sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_q$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ es compacto;*

(*ii*) *El operador $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$ es compacto.*

Antes de demostrar este resultado comentemos algo sobre el caso $(p,q) = (1,\infty)$. Veremos posteriormente que en este caso sí se verifica que (i) implica (ii) pero que para llegar a obtener una equivalencia debemos añadir en (ii) la compacidad del operador $W_{\varphi,\psi'} : S_1 \to H_\infty$ (véase el Teorema 3.16).

Demostración. (i) implica (ii). Supongamos que $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ es compacto y probemos que $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$ también lo es. Consideremos una sucesión $\{f_n\}$ en H_p que converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$ y tal que $\|f_n\|_{H_p} \leq 1$. Considerando, para cada n, la función g_n tal que $g_n' = f_n$ y $g_n(0) = 0$ se tiene que $g_n \in S_p$, $\|g_n\|_{S_p} = \|f_n\|_{H_p} \leq 1$ y $\{g_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos. Esto último se debe a que

$$g_n(z) = \int_0^z f_n(\xi)\, d\xi$$

y $\{f_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos. Entonces, por (i) y la Proposición 1.21,

$$\|\psi g_n \circ \varphi\|_{S_q} \to 0.$$

En particular, $\left\|(\psi g_n \circ \varphi)'\right\|_{H_q} \to 0$. Además, por el Lema 3.12,

$$\left\|W_{\varphi,\psi'}(g_n)\right\|_{H_q} \to 0.$$

Por tanto, como

$$\begin{aligned}\|W_{\varphi,\psi\varphi'}(f_n)\|_{H_q} &= \|\psi\varphi' f_n\circ\varphi\|_{H_q}\\ &\le \|\psi\varphi' f_n\circ\varphi+\psi' g_n\circ\varphi\|_{H_q}+\|\psi' g_n\circ\varphi\|_{H_q}\\ &= \left\|(\psi g_n\circ\varphi)'\right\|_{H_q}+\left\|W_{\varphi,\psi'}(g_n)\right\|_{H_q},\end{aligned}$$

se sigue que $\|W_{\varphi,\psi\varphi'}(f_n)\|_{H_q}\to 0$. Luego, el operador $W_{\varphi,\psi\varphi'}: H_p\to H_q$ es compacto.

(ii) implica (i). Supongamos que $W_{\varphi,\psi\varphi'}: H_p\to H_q$ es compacto. Sea $\{f_n\}$ una sucesión acotada en S_p que converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$ tal que $\|f_n\|_{S_p}\le 1$. Entonces la sucesión $\{f_n'\}$ está acotada en H_p y converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$. Además, se verifica que

$$\begin{aligned}\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{S_q} &= |\psi(0)\,f_n(\varphi(0))|+\|\psi\varphi' f_n'\circ\varphi+\psi' f_n\circ\varphi\|_{H_q}\\ &\le |\psi(0)\,f_n(\varphi(0))|+\|\psi\varphi' f_n'\circ\varphi\|_{H_q}+\|\psi' f_n\circ\varphi\|_{H_q}.\end{aligned}$$

Puesto que cada uno de estos tres sumandos converge a cero (el primero porque $\{f_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$, el segundo por hipótesis y el tercero por el Lema 3.12) se tiene que $\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{S_q}\to 0$ cuando $n\to\infty$. Esto prueba que el operador $W_{\varphi,\psi}: S_p\to S_q$ es compacto. ■

A la vista del teorema anterior podemos aplicar los resultados sobre la compacidad obtenidos en el Capítulo 2 para los espacios de Hardy. Obtenemos entonces que como consecuencia del Teorema 2.37, las Proposiciones 2.26 y 2.28 y [15, Proposition 2.3] se tiene el siguiente corolario.

Corolario 3.15 (i) *Sean $1\le p\le q<\infty$, $\varphi\in\Phi$ y $\psi\in S_q$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) El operador $W_{\varphi,\psi}: S_p\to S_q$ es compacto;

(b) La medida $\mu_{\varphi,\psi\varphi',q}$ es de Carleson compacta de orden q/p sobre $\overline{\mathbb{D}}$.

(ii) *Sean $1\le q<\infty$, $\varphi\in\Phi$ y $\psi\in S_q$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) El operador $W_{\varphi,\psi}: S_\infty\to S_q$ es compacto;

(b) $m(\{z\in\mathbb{T}:|\varphi(z)|=1\})=0$.

(*iii*) *Sean* $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_\infty$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_\infty$ *es compacto;*

(*b*) *O* $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ *o*

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)\varphi'(z)| = 0.$$

(*iv*) *Sean* $1 < p < \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_\infty$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*a*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_\infty$ *es compacto;*

(*b*) *O* $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ *o*

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{|\psi(z)\varphi'(z)|^p}{1 - |\varphi(z)|^2} = 0.$$

El Teorema 3.14 deja abierta la compacidad del operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_\infty$. Pasamos a estudiarla.

Teorema 3.16 *Sean* $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_\infty$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_\infty$ *es compacto;*

(*ii*) *O* $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ *o se verifica que*

(*a*) $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi'(z)| = 0$

y

(*b*) $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{|\psi(z)\varphi'(z)|}{1-|\varphi(z)|^2} = 0.$

Demostración. (*i*) implica (*ii*). Supongamos que $\|\varphi\|_{H_\infty} = 1$. Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{D}$ tal que $|\varphi(z_n)| \to 1$. Para cada n, consideremos la función

$$f_n(z) = 2\frac{1 - |\varphi(z_n)|^2}{1 - \overline{\varphi(z_n)}z} - \left(\frac{1 - |\varphi(z_n)|^2}{1 - \overline{\varphi(z_n)}z}\right)^2.$$

Entonces, como

$$f_n'(z) = 2\overline{\varphi(z_n)}\frac{1-|\varphi(z_n)|^2}{\left(1-\overline{\varphi(z_n)}z\right)^2} - 2\overline{\varphi(z_n)}\frac{\left(1-|\varphi(z_n)|^2\right)^2}{\left(1-\overline{\varphi(z_n)}z\right)^3},$$

teniendo en cuenta [20, Exercise 2.1.4 (a)], existen constantes $C_1, C_2 > 0$ (independientes de n) tales que

$$\begin{aligned}\|f_n'\|_{H_1} &\leq 2\left(1-|\varphi(z_n)|^2\right)\int_{\mathbb{T}}\frac{dm(z)}{\left|1-\overline{\varphi(z_n)}z\right|^2} \\ &\quad +2\left(1-|\varphi(z_n)|^2\right)^2\int_{\mathbb{T}}\frac{dm(z)}{\left|1-\overline{\varphi(z_n)}z\right|^3} \\ &\leq 2C_1+2C_2<\infty.\end{aligned}$$

Además, $|f_n(0)| = \left|2\left(1-|\varphi(z_n)|^2\right)-\left(1-|\varphi(z_n)|^2\right)^2\right| \leq 3$. Por tanto, $\{f_n\}$ es una sucesión acotada en S_1 que converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$. Entonces, por hipótesis, $\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{S_\infty} \to 0$. Teniendo en cuenta que

$$f_n(\varphi(z_n)) = 1, \quad f_n'(\varphi(z_n)) = 0$$

para todo n, deducimos que

$$\begin{aligned}\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{S_\infty} &= |\psi(0)f_n(\varphi(0))| + \|\psi' f_n\circ\varphi + \psi\varphi' f_n'\circ\varphi\|_{H_\infty} \\ &\geq |\psi'(z_n)f_n(\varphi(z_n)) + \psi(z_n)\varphi'(z_n)f_n'(\varphi(z_n))| \\ &= |\psi'(z_n)|.\end{aligned}$$

Por tanto $|\psi'(z_n)| \to 0$. Esto prueba (a).

Para probar (b) basta considerar ahora la sucesión

$$g_n(z) = \left(\frac{1-|\varphi(z_n)|^2}{1-\overline{\varphi(z_n)}z}\right)^2 - \frac{1-|\varphi(z_n)|^2}{1-\overline{\varphi(z_n)}z}$$

cuya derivada es

$$g_n'(z) = 2\overline{\varphi(z_n)}\frac{\left(1-|\varphi(z_n)|^2\right)^2}{\left(1-\overline{\varphi(z_n)}z\right)^3} - \overline{\varphi(z_n)}\frac{1-|\varphi(z_n)|^2}{\left(1-\overline{\varphi(z_n)}z\right)^2}.$$

Argumentando de manera análoga a como se ha hecho anteriormente con la sucesión $\{f_n\}$ se tiene que la sucesión $\{g_n\}$ está acotada en S_1 y converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$. Por tanto, verifica que $\|W_{\varphi,\psi}(g_n)\|_{S_\infty} \to 0$. Pero, en esta ocasión, la sucesión $\{g_n\}$ verifica que

$$g_n(\varphi(z_n)) = 0, \qquad g_n'(\varphi(z_n)) = \frac{\overline{\varphi(z_n)}}{1 - |\varphi(z_n)|^2}$$

para todo n. Así, se tiene que

$$\begin{aligned}\|W_{\varphi,\psi}(g_n)\|_{S_\infty} &\geq |\psi'(z_n) g_n(\varphi(z_n)) + \psi(z_n)\varphi'(z_n) g_n'(\varphi(z_n))| \\ &= \frac{\left|\psi(z_n)\varphi'(z_n)\overline{\varphi(z_n)}\right|}{1 - |\varphi(z_n)|^2}.\end{aligned}$$

Esto prueba que $\frac{|\psi(z_n)\varphi'(z_n)|}{1-|\varphi(z_n)|^2} \to 0$ y, por tanto, se verifica (b).

(ii) implica (i). Por la Proposición 2.26, $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_1 \to H_\infty$ es compacto si, y sólo si, o bien $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ o bien

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{|\psi(z)\varphi'(z)|}{1 - |\varphi(z)|^2} = 0$$

y, por la Proposición 3.13, $W_{\varphi,\psi'} : S_1 \to H_\infty$ es compacto si, y sólo si, o bien $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ o bien

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi'(z)| = 0.$$

Por tanto, (a) y (b) implican que $W_{\varphi,\psi'} : S_1 \to H_\infty$ y $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_1 \to H_\infty$ son operadores compactos respectivamente. Se concluye sin dificultad con un argumento similar al ya usado en repetidas ocasiones que el operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_\infty$ es compacto. ■

Comentamos en la sección anterior que no es necesario que φ sea continua en $\mathbb{T}$ para que existan operadores de composición ponderados continuos. En el siguiente ejemplo vemos que lo mismo ocurre si lo que buscamos es un operador compacto. Para ello damos dos funciones $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_1$ tales que $\varphi \notin A$ y $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ es compacto.

Ejemplo 3.17 Consideremos $\varphi(z) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ y $\psi(z) = (1-z)^2$. Argumentando como en el Ejemplo 3.7 se tiene que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ es continuo y $\varphi \notin A$. Además, como $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$, se tiene de manera inmediata la compacidad del operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$.

Otras consecuencias del Teorema 3.14 son los siguientes corolarios que se obtienen de manera inmediata, y en este orden, a partir de la Proposición 2.27, el Teorema 2.30, el Corolario 2.31, el Teorema 2.35 y el Corolario 2.36.

Corolario 3.18 *Sean* $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_q$. *Si el operador* $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ *es compacto, entonces*

$$m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0.$$

Corolario 3.19 *Sean* $1 \leq p, q < \infty$ *y supongamos que* $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_r$ *es continuo para algún* $r > q$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ *es compacto;*

(*ii*) $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$.

Corolario 3.20 *Sean* $1 \leq p, q < \infty$ *y supongamos que* $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_r$ *es continuo para algún* $r > \max\{p, q\}$. *Entonces el operador* $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ *es compacto.*

Corolario 3.21 *Sean* $1 \leq p, q < \infty$ *y supongamos que* $W_{\varphi,\psi} : S_r \to S_q$ *es continuo para algún* $r < p$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ *es compacto;*

(*ii*) $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$.

Corolario 3.22 *Sean* $1 \leq p, q < \infty$ *y supongamos que* $W_{\varphi,\psi} : S_r \to S_q$ *es continuo para algún* $r < \min\{p, q\}$. *Entonces el operador* $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ *es compacto.*

Para el caso particular de los operadores de multiplicación se tiene que

Corolario 3.23 *Sean* $1 \leq p, q \leq \infty$ *y* $\psi \in S_q$. *El operador* $M_\psi : S_p \to S_q$ *es compacto si, y sólo si,* ψ *es la función nula.*

Demostración. Obviamente, si ψ es la función nula entonces el operador $M_\psi : S_p \to S_q$ es compacto. Probemos el recíproco. Si $q < \infty$ entonces es obvio a partir del Corolario 3.18 ya que en esta situación $\varphi(z) = z$. Si $q = \infty$ y $p < \infty$, por el Corolario 3.15(*iv*) y el Teorema 3.16, se tiene que

$\lim_{|z|\to 1} \frac{|\psi(z)|^p}{1-|z|^2} = 0$. En particular, $\lim_{|z|\to 1} |\psi(z)| = 0$ y, por el Principio del Módulo Máximo, ψ es la función nula. Si $p = q = \infty$, por el Corolario 3.15(iii), se verifica que $\lim_{|z|\to 1} |\psi(z)| = 0$ y concluimos como antes. ■

B. D. MacCluer probó en [54, Lemma 2.2] que si un operador de composición es compacto sobre S_p para algún $p > 1$ entonces es también compacto sobre S_1. En el siguiente resultado generalizamos dicho resultado para operadores de composición ponderados.

Proposición 3.24 *Sean $1 < p \leq q \leq \infty$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_q$ tales que el operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ es compacto. Entonces $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_t$ es compacto donde t viene dado por la expresión*

$$1 + \frac{1}{q} = \frac{1}{t} + \frac{1}{p}.$$

Demostración. En primer lugar observemos que podemos suponer que $\|\varphi\|_{H_\infty} = 1$. Recordemos que, como los operadores de composición en los espacios de Hardy son siempre continuos existe una constante $C > 0$ tal que $m\left(\varphi^{-1}\left(S\left(b,r\right)\right) \cap \mathbb{T}\right) \leq Cr$ para todo $b \in \mathbb{T}$ y $0 < r < 1$ (véase el Teorema 2.17).

En primer lugar, supongamos que $1 < p \leq q < \infty$. Para probar la compacidad de $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_t$ aplicaremos el Corolario 3.15(i). Es decir, tenemos que ver que $\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}$ es una medida de Carleson compacta de orden t. Fijemos $\varepsilon > 0$. Por hipótesis y el Corolario 3.15(i), $\mu_{\varphi,\psi\varphi',q}$ es una medida de Carleson compacta de orden q/p, en particular, existe $r_0 \in (0,1)$ tal que $\int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} |\psi\varphi'|^q \, dm \leq \varepsilon r^{q/p}$ para todo $r \leq r_0$ y para todo $b \in \mathbb{T}$. Sean $b \in \mathbb{T}$ y $r \leq r_0$. Por la Desigualdad de Hölder se verifica que

$$\begin{aligned}
\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}\left(S\left(b,r\right)\right) &= \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} |\psi\varphi'|^t \, dm \\
&\leq \left(\int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} |\psi\varphi'|^q \, dm\right)^{t/q} \left(\int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} dm\right)^{1-t/q} \\
&\leq \left(\varepsilon r^{q/p}\right)^{t/q} (Cr)^{1-t/q} = \varepsilon^{t/q} C^{1-t/q} r^{1+t/p-t/q} \\
&= \varepsilon^{t/q} C^{1-t/q} r^t.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}$ es una medida de Carleson compacta de orden t y, por el Corolario 3.15(i), que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_t$ es compacto.

Supongamos ahora que $q = \infty$ y que $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_\infty$ es compacto para algún $1 < p < \infty$. En este caso $1 = \frac{1}{t} + \frac{1}{p}$. Probemos que $\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}$ es una medida de Carleson compacta de orden t. Por el Corolario 3.15(iv), se verifica que

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{|\psi(z)\varphi'(z)|^p}{1-|\varphi(z)|^2} = 0.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Existe $r_0 \in (0,1)$ tal que si $|\varphi(z)| > 1 - r_0$, entonces

$$|\psi(z)\varphi'(z)|^p \leq \varepsilon\left(1-|\varphi(z)|^2\right) \leq 2\varepsilon\left(1-|\varphi(z)|\right).$$

Sean $b \in \mathbb{T}$ y $0 < r < r_0$. Entonces se verifica que

$$\begin{aligned}
\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}(S(b,r)) &= \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} |\psi\varphi'|^t\, dm \\
&\leq (2\varepsilon)^{t/p} \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} (1-|\varphi(z)|)^{t/p}\, dm \\
&\leq (2\varepsilon r)^{t/p} \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} dm \\
&= (2\varepsilon r)^{t/p}\, m\left(\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}\right) \\
&\leq (2\varepsilon r)^{t/p}\, Cr \leq (2\varepsilon)^{t/p}\, Cr^{t/p+1} = \varepsilon^{t/p} C r^t.
\end{aligned}$$

Esto prueba que $\mu_{\varphi,\psi\varphi',t}$ es una medida de Carleson compacta de orden t y, por el Corolario 3.15(i), que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_t$ es compacto.

Supongamos ahora que $p = q = \infty$. En este caso $t = 1$. Probemos que $\mu_{\varphi,\psi\varphi',1}$ es una medida de Carleson compacta. Por el Corolario 3.15(iii), se verifica que

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)\varphi'(z)| = 0.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Existe $r_0 \in (0,1)$ tal que si $|\varphi(z)| > 1 - r_0$, entonces

$$|\psi(z)\varphi'(z)| \leq \varepsilon.$$

Sean $b \in \mathbb{T}$ y $0 < r < r_0$. Entonces se verifica que

$$\mu_{\varphi,\psi\varphi',1}(S(b,r)) = \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} |\psi\varphi'|\, dm \leq \varepsilon \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} dm \leq \varepsilon C r.$$

Esto prueba que $\mu_{\varphi,\psi\varphi',1}$ es una medida de Carleson compacta y, por el Corolario 3.15(i), que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ es compacto. ■

Corolario 3.25 *Sean $1 < p \leq \infty$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_p$ tales que el operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \longrightarrow S_p$ es compacto. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \longrightarrow S_1$ también lo es.*

A continuación damos dos condiciones suficientes sobre los símbolos φ y ψ para obtener la compacidad del operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \longrightarrow S_q$. En primer lugar, como consecuencia de la Proposición 2.40 se verifica el siguiente resultado.

Proposición 3.26 *Sean $1 \leq p, q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_q$. Si*

$$\int_0^{2\pi} \frac{\left|\psi\left(e^{i\theta}\right)\varphi'\left(e^{i\theta}\right)\right|^q}{\left(1-\left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right|^2\right)^{q/p}} d\theta < \infty$$

entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \longrightarrow S_q$ es compacto.

Demostración. Por la Proposición 3.14, el operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \longrightarrow S_q$ es compacto si, y sólo si, lo es $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \longrightarrow H_q$. Basta aplicar ahora la Proposición 2.40. ■

Con los mismos argumentos que los usados en el Ejemplo 2.39 se obtiene que si consideramos $\varphi(z) = \frac{z+1}{2}$ y $\psi(z) = 1 - z$, entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \longrightarrow S_1$ es compacto. Por otro lado, $\int_0^{2\pi} \frac{\left|\psi\left(e^{i\theta}\right)\varphi'\left(e^{i\theta}\right)\right|}{1-\left|\varphi\left(e^{i\theta}\right)\right|^2} d\theta = \infty$. Por tanto, el recíproco de la proposición anterior no es cierto.

La segunda de las condiciones suficientes que mostramos únicamente es válida cuando $1 \leq p \leq q < \infty$.

Proposición 3.27 *Sean $1 \leq p \leq q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_q$. Si*

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} \frac{\left|\psi(z)\varphi'(z)\right|^q}{\left(1-|\varphi(z)|\right)^{q/p-1}} = 0,$$

entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \longrightarrow S_q$ es compacto.

Demostración. Probemos que $\mu_{\varphi,\psi\varphi',q}$ es una medida de Carleson compacta de orden q/p sobre $\overline{\mathbb{D}}$. Fijemos $\varepsilon > 0$. Por hipótesis, existe $r_0 > 0$ tal que cuando $|\varphi(z)| > 1 - r_0$ se tiene que $|\psi(z)\varphi'(z)|^q < \varepsilon\left(1 - |\varphi(z)|\right)^{q/p-1}$. Así, si $r < r_0$ y $z \in \overline{\mathbb{D}}$ es tal que $|\varphi(z)| > 1 - r$ entonces $|\psi(z)\varphi'(z)|^q < \varepsilon r^{q/p-1}$.

Por otro lado, teniendo en cuenta que $C_\varphi : H_1 \longrightarrow H_1$ es continuo, por el Teorema 2.17, existe una constante $C > 0$ tal que $m\left(\varphi^{-1}\left(S(b,r)\right) \cap \mathbb{T}\right) \leq Cr$

para todo $b \in \mathbb{T}$ y $0 < r < 1$. Además, si $z \in \varphi^{-1}(S(b,r)) \cap \mathbb{T}$ entonces $|\varphi(z) - b| \leq r$ y así $|\varphi(z)| > 1 - r$.

Por todo lo anterior, si $r < r_0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} |\psi(z)\,\varphi'(z)|^q\, dm(z) &\leq \varepsilon r^{q/p-1} \int_{\varphi^{-1}(S(b,r))\cap\mathbb{T}} dm \\ &= \varepsilon r^{q/p-1} m\left(\varphi^{-1}(S(b,r)) \cap \mathbb{T}\right) \\ &\leq \varepsilon r^{q/p-1} C r = \varepsilon C r^{q/p} \end{aligned}$$

para todo $b \in \mathbb{T}$. Esto prueba que la medida $\mu_{\varphi,\psi\varphi',q}$ es de Carleson compacta de orden q/p sobre $\overline{\mathbb{D}}$. ■

El siguiente ejemplo muestra que en la proposición anterior la condición suficiente para la compacidad no es necesaria.

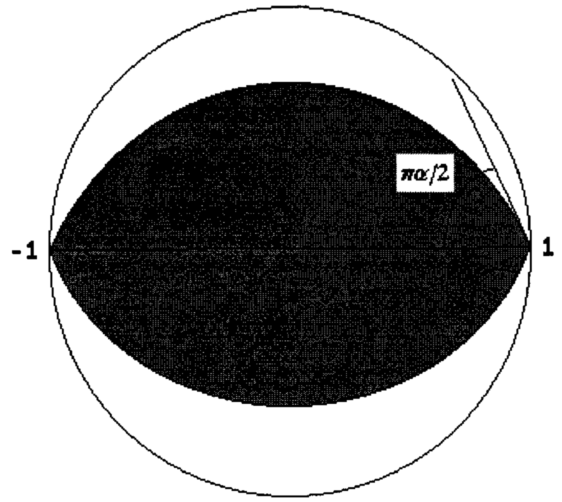
Ejemplo 3.28 Consideremos la transformación de Möbius

$$\sigma(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

que lleva el disco unidad $\mathbb{D}$ sobre el semiplano derecho y para $0 < \alpha < 1$ la aplicación conforme $\pi_\alpha(z) = z^\alpha$ del semiplano derecho en sí mismo. Tomemos la pareja de funciones

$$\varphi(z) = \sigma^{-1} \circ \pi_\alpha \circ \sigma(z) \quad y \quad \psi(z) = (1-z)^2 \sigma(z)^{1-\alpha}$$

para cada $z \in \mathbb{D}$. Es claro que $\varphi \in \Phi$, $\psi \in S_1$ y que la imagen de φ es de la siguiente forma:



Veamos que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ es compacto y que

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)\varphi'(z)| \neq 0.$$

Esto último es inmediato ya que, como $\sigma'(z) = \frac{2}{(1-z)^2}$, se verifica que

$$\psi(z)\varphi'(z) = \alpha(1-\varphi(z))^2.$$

Así, $\psi(z)\varphi'(z)$ no tiende a cero cuando z tiende a -1.

Por otro lado, por [83, pág. 27], se tiene que

$$\int_0^{2\pi} \frac{|\psi(e^{i\theta})\varphi'(e^{i\theta})|}{1-|\varphi(e^{i\theta})|^2} d\theta \leq 4\alpha \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-|\varphi(e^{i\theta})|^2} < \infty.$$

Por tanto, la Proposición 3.26 nos muestra que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ es compacto.

Acabamos de obtener dos condiciones suficientes para la compacidad del operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$. Finalizamos la sección obteniendo una condición necesaria. Observemos que, por el Corolario 3.25, podemos suponer que $p = 1$.

Lema 3.29 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_1$. Supongamos que $\varphi(0) = 0$ y $\|\psi\|_A = 1$. Si $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ es compacto entonces φ no es un automorfismo del disco y si llamamos $Y_0 = \{f \in S_1 : f(0) = 0\}$, entonces*

$$\left\| W_{\varphi,\psi}^n |_{Y_0} \right\| \to 0$$

donde $W_{\varphi,\psi}^n$ denota la composición de $W_{\varphi,\psi}$ n-veces consigo mismo.

Demostración. Supongamos, por reducción al absurdo, que φ es un automorfismo del disco. Esto es, $\varphi(z) = \lambda\frac{z-p}{1-\bar{p}z}$ para cierto $p \in \mathbb{D}$ y $\lambda \in \mathbb{T}$. Ahora bien, como estamos suponiendo que $\varphi(0) = 0$, entonces $p = 0$. Esto es $\varphi(z) = \lambda z$. Por tanto, el operador $W_{\varphi,\psi} = M_\psi : S_1 \to S_1$ es compacto. Así, por el Corolario 3.23, $\psi \equiv 0$ lo que contradice que $\|\psi\|_A = 1$. De esta forma hemos probado que φ no es un automorfismo. (Obsérvese que la hipótesis $\varphi(0) = 0$ no es necesaria para llegar a obtener la misma conclusión).

Puesto que φ no es un automorfismo y $\varphi(0) = 0$, el Teorema de Denjoy-Wolff [83, pág. 79] garantiza que $\{\varphi_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$ donde φ_n denota la composición de φ n-veces consigo mismo.

Consideremos el operador $T = W_{\varphi,\psi}\,|_{Y_0}$ y sea λ un autovalor de T. Entonces existe $f \in Y_0$ no nula tal que $W_{\varphi,\psi}(f) = \lambda f$, es decir, $\psi(z)\, f(\varphi(z)) = \lambda f(z)$ para todo z de $\mathbb{D}$. Veamos que $|\lambda| < 1$. Para ello, consideremos el operador $W^n_{\varphi,\psi}$ y observemos que

$$\lambda^n f = W^n_{\varphi,\psi}(f) = \psi\,(\psi \circ \varphi)\,(\psi \circ \varphi_2) \cdots \left(\psi \circ \varphi_{n-1}\right)(f \circ \varphi_n)\,.$$

Entonces, fijado $z \in \mathbb{D}$ tal que $f(z) \neq 0$, como $\|\psi\|_A = 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} |\lambda^n f(z)| &= \left|\psi(z)\,(\psi(\varphi(z))) \cdots \left(\psi\left(\varphi_{n-1}(z)\right)\right)(f(\varphi_n(z)))\right| \\ &\leq \|\psi\|_A^n\, |f(\varphi_n(z))| = |f(\varphi_n(z))|\,. \end{aligned}$$

Así, como $|f(\varphi_n(z))| \to |f(0)| = 0$ cuando $n \to \infty$, se sigue que $|\lambda^n f(z)| \to 0$ lo cual solo ocurre cuando $|\lambda| < 1$. Resumiendo, hemos probado que todos los autovalores de T tienen módulo menor estricto que 1. De esta forma el radio espectral de T cumple que $r(T) < 1$. Por tanto, $\lim_{n\to\infty} \|T^n\| = 0$. ■

Teorema 3.30 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_1$ tales que el operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ es compacto. Entonces*

$$\{b \in \mathbb{T} : |\varphi(b)| = 1\} \subseteq \{b \in \mathbb{T} : |\psi(b)| < \|\psi\|_A\}\,.$$

Demostración. Obviamente podemos suponer que $\|\psi\|_A = 1$. Supongamos en primer lugar que $\varphi(0) = 0$. Consideremos un punto $b \in \mathbb{T}$ tal que $|\varphi(b)| = 1$. Claramente podemos suponer que $\psi(b) \neq 0$. En estas condiciones existen una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ y un punto $a \in \mathbb{T}$ tales que $z_n \to b$ y $\varphi(z_n) \to a$. Además, como la función $\varphi\psi \in A$ y $\psi(b) \neq 0$, se tiene que φ es continua en b. En particular, $\varphi(b) = a$. Es más, podemos suponer que $\varphi(b) = b$ ya que, considerando el giro $\widetilde{\varphi}(z) = b\overline{a}z$, como el operador $W_{\varphi,\psi}$ es compacto entonces también lo es el operador $W_{\varphi,\psi} \circ C_{\widetilde{\varphi}}$. Pero, $W_{\varphi,\psi} \circ C_{\widetilde{\varphi}} = W_{\widetilde{\varphi}\circ\varphi,\psi}$ y $\widetilde{\varphi}(\varphi(b)) = b$. Con lo que basta tomar la función $\widetilde{\varphi} \circ \varphi$.

Por el Lema 3.29, se tiene que

$$\begin{aligned} |\psi(b)|^n &= |\psi(b)|^n\, |b| = |\psi(b)|^n\, |\varphi(b)| = \left|W^n_{\varphi,\psi}(\chi_1)(b)\right| \\ &\leq \left\|W^n_{\varphi,\psi}(\chi_1)\right\|_A \leq \|i\|_{S_1 \hookrightarrow A} \left\|W^n_{\varphi,\psi}(\chi_1)\right\|_{S_1} \to 0. \end{aligned}$$

Por tanto concluimos que $|\psi(b)| < 1$.

Supongamos ahora que $\varphi(0) = \alpha \neq 0$. Consideremos la transformación de Möbius $\varphi_\alpha(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$. Entonces $\varphi_\alpha \circ \varphi(\mathbb{D}) \subseteq \mathbb{D}$, $\varphi_\alpha(\varphi(0)) = 0$ y si $b \in \mathbb{T}$

se verifica que $|\varphi_\alpha(\varphi(b))| = 1$ si, y sólo si, $|\varphi(b)| = 1$. Además, el operador $W_{\varphi_\alpha \circ \varphi, \psi} = W_{\varphi,\psi} \circ C_{\varphi_\alpha}$ es compacto si $W_{\varphi,\psi}$ lo es. De esta forma,

$$\begin{aligned} \{b \in \mathbb{T} : |\varphi(b)| = 1\} &= \{b \in \mathbb{T} : |\varphi_\alpha(\varphi(b))| = 1\} \\ &\subseteq \{b \in \mathbb{T} : |\psi(b)| < \|\psi\|_A\} . \blacksquare \end{aligned}$$

Si aplicamos el anterior resultado a un operador de composición C_φ se obtiene el siguiente debido a B. D. MacCluer [54, Theorem 2.3].

Corolario 3.31 *Sean $1 \leq p \leq \infty$ y $\varphi \in \Phi$ tales que $\varphi \in S_p$. El operador $C_\varphi : S_p \to S_p$ es compacto si, y sólo si, $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$.*

3.3 Compacidad débil

A continuación caracterizamos la compacidad débil de los operadores de composición ponderados en los espacios S_p. En primer lugar, dado que los espacios S_p son reflexivos cuando $1 < p < \infty$, la compacidad débil de estos operadores es inmediata a partir de la continuidad. Es por ello que, de nuevo, los únicos casos no triviales surgen con los espacios S_1 y S_∞. De los cuatro casos posibles tres de ellos son inmediatos teniendo en cuenta el Lema 3.12. A la vista de dicho resultado se verifica que los operadores de composición ponderados $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to H_1$, $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to H_1$ y $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to H_\infty$ son débil compactos (siempre que $\psi \in H_1$ en los dos primeros casos y $\psi \in H_\infty$ en el tercero). Es por esto que se verifica la siguiente caracterización de la compacidad débil en función de la compacidad débil de $W_{\varphi,\psi\varphi'}$ en los espacios de Hardy.

Proposición 3.32 *Sean $p, q \in \{1, \infty\}$ con $(p,q) \neq (1,\infty)$, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_q$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ es débil compacto;

(ii) El operador $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$ es débil compacto.

Demostración. La prueba es similar a la que realizamos en el Teorema 3.14 teniendo en cuenta lo siguiente. Como el operador

$$\begin{array}{rccc} T: & S_p & \to & H_p \times \mathbb{C} \\ & f & \to & (f', f(0)) \end{array}$$

es una isometría si dotamos al espacio $H_p \times \mathbb{C}$ de la norma $|f(0)| + \|f'\|_{H_p}$ se verifica que: Una sucesión $\{f_n\}$ en S_p converge a cero en la topología débil de S_p si, y sólo si, la sucesión $\{f'_n\}$ converge a cero en la topología débil de H_p y $f_n(0) \to 0$. ■

Como consecuencia de este resultado, el Teorema 2.47 y los resultados de J. Bourgain, M. D. Contreras y S. Díaz Madrigal que comentamos al principio de la Sección 2.4 tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.33 *(i) Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_1$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ es débil compacto;

(b) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ es compacto;

(c) $\mu_{\varphi,\psi\varphi',1}$ es una medida de Carleson compacta sobre $\overline{\mathbb{D}}$.

(ii) Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_\infty$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_\infty$ es débil compacto;

(b) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_\infty$ es compacto;

(c) O $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ o $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)\varphi'(z)| = 0$.

(iii) Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in S_1$. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_1$ es débil compacto.

Para el último de los casos, es decir, el operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_\infty$, hay que hacer las siguientes consideraciones. Ya sabemos que si $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_\infty$ es continuo entonces $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_1 \to H_\infty$ también lo es (Teorema 3.2). Entonces, teniendo en cuenta el Teorema 2.43, el operador $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_1 \to H_\infty$ es débil compacto. Así, nos resta estudiar la compacidad débil de $W_{\varphi,\psi'} : S_1 \to H_\infty$.

Proposición 3.34 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_\infty$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to H_\infty$ es compacto;

(ii) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to H_\infty$ es débil compacto;

(iii) *O* $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ *o* $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| = 0$.

Demostración. Es inmediato que *(i)* implica *(ii)*. Además, ya vimos en la Proposición 3.13 que *(i)* y *(iii)* son equivalentes. Por tanto, bastará probar que *(ii)* implica *(iii)*. Supongamos que $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to H_\infty$ es débil compacto, que $\|\varphi\|_{H_\infty} = 1$ y que $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| \neq 0$. Entonces existen una sucesión $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ y $c > 0$ tales que $|\varphi(z_n)| \to 1$ y $|\psi(z_n)| \geq c$ para todo n. Podemos suponer, salvo tomar subsucesiones, que $\varphi(z_n) \to b \in \mathbb{T}$ y que $\psi(z_n) \to a \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$. Consideremos la sucesión de funciones

$$f_n(z) = \left(1 - |\varphi(z_n)|^2\right) \frac{\bar{b}z}{1 - |\varphi(z_n)|\, \bar{b}z}.$$

Puesto que

$$f_n'(z) = \left(1 - |\varphi(z_n)|^2\right) \frac{\bar{b}}{\left(1 - |\varphi(z_n)|\, \bar{b}z\right)^2},$$

el Lema 2.25 implica que la sucesión $\{f_n\}$ está en la bola unidad de S_1 y que $\{f_n'\}$ y, por tanto, $\{f_n\}$ converge a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$. Entonces, por hipótesis, $\{W_{\varphi,\psi}(f_n)\}$ converge a cero en la topología débil de H_∞. En cambio

$$\begin{aligned} \lim_m W_{\varphi,\psi}(f_n)(z_m) &= \lim_m \psi(z_m) f_n(\varphi(z_m)) \\ &= \left(1 - |\varphi(z_n)|^2\right) \lim_m \frac{\psi(z_m)\, \bar{b}\varphi(z_m)}{1 - |\varphi(z_n)|\, \bar{b}\varphi(z_m)} \\ &= \left(1 - |\varphi(z_n)|^2\right) \frac{a\bar{b}b}{1 - |\varphi(z_n)|\, \bar{b}b} \\ &= \left(1 + |\varphi(z_n)|\right) a. \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\lim_n \lim_m W_{\varphi,\psi}(f_n)(z_m) = 2a \neq 0.$$

Esto, junto con el Lema 2.42, contradice que $\{W_{\varphi,\psi}(f_n)\}$ converja a cero en la topología débil de H_∞. Por tanto, $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| = 0$. ■

La anterior proposición nos permite cerrar el estudio de la compacidad débil con la siguiente caracterización.

Proposición 3.35 *Sean* $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_\infty$ *tales que* $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_\infty$ *es continuo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_\infty$ *es compacto;*

(ii) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_\infty$ *es débil compacto;*

(iii) O $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ *o* $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi'(z)| = 0$.

3.4 Continuidad completa

Ya comentamos en el Capítulo 2 que cuando el dominio de un operador es un espacio reflexivo la continuidad completa equivale a la compacidad (en norma). Por tanto, cuando el dominio es el espacio S_p con $1 < p < \infty$ basta con que nos remitamos a la Sección 3.2. Así, queda estudiar la continuidad completa cuando el dominio es S_1 o S_∞.

Recordemos que en el Lema 3.12 se probó que el operador $W_{\varphi,\psi} : S_p \to H_q$ es compacto para todo $(p, q) \neq (1, \infty)$ y, en particular, son completamentes continuos. Este resultado se basa en que la inclusión de S_p en A es compacta para $p > 1$. Vimos en su momento que la inclusión de S_1 en A no es débil compacta (y, por tanto, tampoco compacta). En cambio, vamos a ver que el operador inclusión de S_1 en A sí es completamente continuo.

Proposición 3.36 *El operador inclusión de* S_1 *en* A *es completamente continuo.*

Demostración. Consideremos el operador $T : H_1 \to S_1$ que a cada función $f \in H_1$ le asocia $T(f)(z) = \int_0^z f(\xi)\, d\xi$, para cada $z \in \mathbb{D}$. Obviamente T es una isometría sobre un subespacio de codimensión 1 de S_1 y, por tanto, la inclusión de S_1 en A es completamente continua si, y sólo si, el operador $S : H_1 \to A$ definido por $S(f)(z) = \int_0^z f(\xi)\, d\xi$, para cada $z \in \mathbb{D}$, lo es. Por [25, Theorem 3.11], S es un operador lineal y continuo. Por tanto, teniendo en cuenta el Teorema 2.32, la continuidad completa de S equivale a que el operador $S \circ i_{\infty,1} : H_\infty \to A$ sea compacto. Para probar esto último, basta ver que el operador $S \circ i_{\infty,1}$ es composición de otros dos operadores: uno continuo y otro compacto. Dichos operadores son la isometría $\widetilde{S} : H_\infty \to S_\infty$, $\widetilde{S}(f)(z) = \int_0^z f(\xi)\, d\xi$, para cada $z \in \mathbb{D}$ y la inclusión compacta $S_\infty \hookrightarrow A$ (Proposición 3.9). ■

Lema 3.37 *Sean* $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in H_\infty$. *Entonces* $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to H_\infty$ *es completamente continuo.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión acotada en S_1 que converge a cero en la topología débil de S_1 y probemos que $\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{H_\infty} \to 0$. Por la proposición anterior, se verifica que $\|f_n\|_{H_\infty} \to 0$. De aquí se deduce que

$$\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{H_\infty} = \|\psi f_n \circ \varphi\|_{H_\infty} \leq \|\psi\|_{H_\infty} \|f_n\|_{H_\infty} \to 0. \blacksquare$$

El lema anterior y el Lema 3.12 nos permite relacionar la continuidad completa de los operadores de composición ponderados en los espacios S_p con la continuidad completa de los operadores de composición ponderados en los espacios de Hardy.

Proposición 3.38 *Sean* $1 \leq p, q \leq \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_q$. *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : S_p \to S_q$ *es completamente continuo;*

(*ii*) *El operador* $W_{\varphi,\psi\varphi'} : H_p \to H_q$ *es completamente continuo.*

Demostración. (*i*) implica (*ii*). Sea $\{g_n\}$ una sucesión en H_p que converge a cero en la topología débil de H_p. Probemos que $\|W_{\varphi,\psi\varphi'}(g_n)\|_{H_q} \to 0$. Para ello, consideremos para cada n la función $f_n \in S_p$ tal que $f_n' = g_n$ y $f_n(0) = 0$. Debido a la isometría existente entre H_p y un hiperplano de S_p (véase la demostración de la Proposición 3.32) se verifica que la sucesión $\{f_n\}$ converge débilmente a cero en S_p. Así, por (*i*), se verifica que

$$\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{S_q} = |\psi(0) f_n(\varphi(0))| + \|\psi' f_n \circ \varphi + \psi\varphi' g_n \circ \varphi\|_{H_q} \to 0.$$

Teniendo en cuenta los Lemas 3.12 y 3.37, se verifica que $\|\psi' f_n \circ \varphi\|_{H_q} = \|W_{\varphi,\psi'}(f_n)\|_{H_q} \to 0$. Por tanto, $\|W_{\varphi,\psi\varphi'}(g_n)\|_{H_q} \to 0$.

(*ii*) implica (*i*). Sea $\{f_n\}$ una sucesión en S_p que converge débilmente a cero en dicho espacio. Probemos que $\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{S_q} \to 0$. Teniendo en cuenta otra vez la isometría descrita en la Proposición 3.32 se verifica que la sucesión $\{f_n'\}$ converge débilmente a cero en H_p. Así, por (*ii*), se verifica que $\|W_{\varphi,\psi\varphi'}(f_n')\|_{H_q} \to 0$. Además, por los Lemas 3.12 y 3.37, se verifica que $\|W_{\varphi,\psi'}(f_n)\|_{H_q} \to 0$. Finalmente, se tiene también que $|\psi(0) f_n(\varphi(0))| \to 0$. Por tanto,

$$\|W_{\varphi,\psi}(f_n)\|_{S_q} \leq |\psi(0) f_n(\varphi(0))| + \|\psi' f_n \circ \varphi\|_{H_q} + \|\psi\varphi' f_n' \circ \varphi\|_{H_q} \to 0. \blacksquare$$

Como consecuencia de este resultados y los probados en las Secciones 2.4 y 2.5 obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.39 *(i) Sean* $1 \leq q < \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_q$ *tales que* $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \longrightarrow S_q$ *es continuo. Entonces el operador* $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \longrightarrow S_q$ *es completamente continuo.*

(ii) Sean $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_\infty$ *tales que* $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_\infty$ *es continuo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_\infty$ *es completamente continuo;*

(b) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_\infty$ *es débil compacto;*

(c) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_\infty \to S_\infty$ *es compacto;*

(d) O $\|\varphi\|_{H_\infty} < 1$ *o* $\lim\limits_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)\,\varphi'(z)| = 0$.

(iii) Sean $1 < q \leq \infty$, $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_q$ *tales que* $W_{\varphi,\psi} : S_1 \longrightarrow S_q$ *es continuo. Entonces el operador* $W_{\varphi,\psi} : S_1 \longrightarrow S_q$ *es completamente continuo.*

(iv) Sean $\varphi \in \Phi$ *y* $\psi \in S_1$ *tales que* $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ *es continuo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) El operador $W_{\varphi,\psi} : S_1 \to S_1$ *es completamente continuo;*

(b) $m(\{z \in \mathbb{T} : |\varphi(z)| = 1\}) = 0$.

Capítulo 4

Espacios de funciones con crecimiento controlado en la frontera

Dedicamos este capítulo al estudio de los operadores de composición ponderados en los espacios H_v^0 y H_v^∞ (véase el Capítulo 1 para las definiciones y sus propiedades). Estos espacios han sido ampliamente estudiados y aparecen de manera natural en el estudio del crecimento de las funciones analíticas.

En [8] y [10], J. Bonet, P. Domański, M. Lindström y J. Taskinen estudian, entre otras propiedades, la continuidad y compacidad de los operadores de composición entre los espacios H_v^0 y H_v^∞. Además, en el trabajo [9], J. Bonet, P. Domański y M. Lindström estudian los operadores de multiplicación entre dichos espacios. A lo largo del capítulo iremos comentando estas aportaciones.

Este último capítulo lo hemos estructurado en cuatro secciones con los siguientes contenidos. Dedicamos la primera sección al estudio de la continuidad de $W_{\varphi,\psi}$ en los espacios H_v^0 y H_v^∞. Una novedad con respecto a los capítulos anteriores es que para estos espacios calculamos la norma del operador. Finalizamos la sección calculando las funciones φ y ψ tales que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ (respectivamente, $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_v^0$) es continuo independientemente del peso v (resp. peso típico v) que consideremos.

La segunda sección del capítulo la dedicamos a la compacidad. De nuevo aparecen novedades con respecto al estudio que hemos realizado de la compacidad en los capítulos anteriores ya que para estos espacios calculamos la norma esencial del operador cuando el peso es típico. Esto nos permitirá caracterizar la compacidad de $W_{\varphi,\psi}$ en dichos espacios. Al igual que hicimos para la continuidad, finalizamos la sección caracterizando las funciones φ y ψ tales que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ (resp. $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_v^0$) es compacto para todo peso v (resp. peso típico v).

En la tercera sección probamos que si el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_w^0$ (resp. $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_w^\infty$) no es compacto entonces dicho operador actúa como un isomorfismo sobre un subespacio de H_v^0 (resp. H_v^∞) isomorfo a c_0 (resp. a ℓ_∞). Esto nos permite obtener la equivalencia entre la compacidad, compacidad débil y la continuidad completa de los operadores de composición ponderados en H_v^0 y H_v^∞.

En la última sección aplicamos los resultados previamente obtenidos para estudiar la continuidad y compacidad de los operadores de composición en los espacios de tipo Bloch $\mathcal{B}_p$ y los espacios pequeños de tipo Bloch $\mathcal{B}_p^0$, incluyendo el espacio clásico de Bloch ($p = 1$) y los espacios de funciones analíticas y lipschitzianas ($0 < p < 1$). Así, caracterizamos la continuidad, compacidad, compacidad débil y la continuidad completa de los operadores de composición C_φ de $\mathcal{B}_p$ en $\mathcal{B}_q$ (resp. de $\mathcal{B}_p^0$ en $\mathcal{B}_q^0$), calculamos la norma esencial y probamos que o bien son compactos o un isomorfismo sobre un subespacio de $\mathcal{B}_p$ (resp. $\mathcal{B}_p^0$) isomorfo a ℓ_∞ (resp. c_0). Los resultados que presentamos en esta última sección incluyen los ya obtenidos por K. Madigan [58], K. Madigan y A. Matheson [59] y A. Montes Rodríguez [61].

Merece la pena mencionar que el cálculo de la norma esencial fue obtenido también por A. Montes Rodríguez en [62, Theorem 2.3 and 2.4] con una prueba ligeramente diferente. Tanto nuestros resultados como los del autor antes mencionado aparecen publicados en el año 2000 y como aplicación se obtenían caracterizaciones de la compacidad de los operadores de composición en los espacios de tipo Bloch. Posteriormente, B. D. MacCluer, S. Ohno, K. Stroethoff y R. Zhao han extendido dichos resultados sobre los espacios de tipo Bloch a operadores de composición ponderados (véanse [67], [57]).

Finalmente, introducimos algunos convenios que usaremos en este capítulo. En lo que sigue reservaremos las letras v y w para indicar a los pesos. Cuando $A \subseteq \mathbb{R}_+^0$ es el conjunto vacío fijaremos el convenio $\sup A = 0$.

4.1 Continuidad

En esta sección caracterizamos la continuidad de los operadores de composición ponderados en H_v^∞ y H_v^0 y calculamos la norma de éstos. Como ya hemos indicado, estos resultados fueron obtenidos para los operadores de composición por J. Bonet, P. Domański, M. Lindström y J. Taskinen en [10]. De hecho, las pruebas que presentamos están fuertemente inspiradas en las allí realizadas.

Proposición 4.1 *Sean v y w pesos, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H(\mathbb{D})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_w^\infty$ es continuo;*

(*ii*) $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} < \infty$.

En este caso se verifica que

$$\|W_{\varphi,\psi}\|_{H_v^\infty \to H_w^\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}.$$

Demostración. (*i*) implica (*ii*). Por el Corolario 1.19,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{\left\|\delta_{\varphi(z)}\right\|_{(H_v^\infty)^*}}{\|\delta_z\|_{(H_w^\infty)^*}} \leq \|W_{\varphi,\psi}\|_{H_v^\infty \to H_w^\infty}.$$

Así, teniendo en cuenta la Proposición 1.11, se tiene que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{\left\|\delta_{\varphi(z)}\right\|_{(H_v^\infty)^*}}{\|\delta_z\|_{(H_w^\infty)^*}} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{\widetilde{w}(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \geq \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))},$$

luego se verifica (*ii*). Esto prueba además que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \leq \|W_{\varphi,\psi}\|_{H_v^\infty \to H_w^\infty}. \tag{4.1}$$

(*ii*) implica (*i*). Supongamos que se verifica (*ii*) y denotemos

$$M = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}.$$

Entonces $|\psi(z)| w(z) \leq M\widetilde{v}(\varphi(z))$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Así,

$$\begin{aligned} w(z) |W_{\varphi,\psi}(f)(z)| &= w(z) |\psi(z)| |f(\varphi(z))| \\ &\leq M\widetilde{v}(\varphi(z)) |f(\varphi(z))| \\ &\leq M \|f\|_{\widetilde{v}} = M \|f\|_v, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad hemos usado que los espacios H_v^∞ y $H_{\widetilde{v}}^\infty$ son isométricos (véase la Proposición 1.11). Por tanto, el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_w^\infty$ está acotado. Además, los cálculos anteriores muestran que

$$\|W_{\varphi,\psi}\|_{H_v^\infty \to H_w^\infty} \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}$$

que junto a (4.1) prueban que

$$\|W_{\varphi,\psi}\|_{H_v^\infty \to H_w^\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}. \blacksquare$$

Antes de estudiar la continuidad para el espacio H_v^0 recordemos el siguiente resultado debido a L. A. Rubel y A. L. Shields sobre la dualidad de dicho espacio [72, Theorem 1]: Si v es un peso típico, entonces $(H_v^0)^*$ es isométrico al espacio $L_1(\mathbb{D})/N$, donde $L_1(\mathbb{D})$ es el espacio de funciones integrables en $\mathbb{D}$ (con la medida de Lebesgue en $\mathbb{D}$) y

$$N = \left\{ g \in L_1(\mathbb{D}) : \int_{\mathbb{D}} g(z) f(z) v(z)\, dA(z) = 0, \text{ para todo } f \in H_v^\infty \right\},$$

siendo A la medida de Lebesgue normalizada sobre $\mathbb{D}$. Además, dada $f \in H_v^0$ y $[g] \in L_1(\mathbb{D})/N$ se tiene que la dualidad viene dada por

$$\langle [g], f\rangle := \int_{\mathbb{D}} g(z) f(z) v(z)\, dA(z).$$

Se verifica también que $(H_v^0)^{**}$ es isométrico a H_v^∞, donde la inclusión es la inyección canónica de un espacio de Banach en su bidual.

Como consecuencia de los resultados de L. A. Rubel y A. L. Shields podemos calcular el biadjunto de $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_w^0$. Observemos que si $f \in H_v^\infty$ y $r_n \nearrow 1$, entonces la función $f_{r_n}(z) = f(r_n z)$ está en H_v^0, verifica que $\|f_{r_n}\|_v \leq \|f\|_v$ y f_{r_n} converge a f en la topología débil-$*$ de H_v^∞ (lo que denotaremos como $w^*\text{-}\lim_n f_{r_n} = f$). En efecto, si $g \in L_1(\mathbb{D})$, entonces $|g f_{r_n} v| \leq |g| \|f\|_v \in L_1(\mathbb{D})$ y así, por el Teorema de la Convergencia Dominada, se tiene que

$$\langle [g], f_{r_n}\rangle = \int_{\mathbb{D}} g f_{r_n} v\, dA \to \int_{\mathbb{D}} g f v\, dA = \langle [g], f\rangle.$$

De esta forma,

$$W_{\varphi,\psi}^{**}(f) = w^{*}\text{-}\lim_{n\to\infty} W_{\varphi,\psi}^{**}(f_{r_n}) = w^{*}\text{-}\lim_{n\to\infty} W_{\varphi,\psi}(f_{r_n}) = w^{*}\text{-}\lim_{n\to\infty} \psi f_{r_n} \circ \varphi.$$

En particular, para todo $z \in \mathbb{D}$ se cumple que

$$\begin{aligned} W_{\varphi,\psi}^{**}(f)(z) &= \lim_{n\to\infty} \psi(z) f_{r_n}(\varphi(z)) = \lim_{n\to\infty} \psi(z) f(r_n\varphi(z)) \\ &= \psi(z) f(\varphi(z)) = W_{\varphi,\psi}(f)(z). \end{aligned}$$

Es decir, $W_{\varphi,\psi}^{**}(f) = W_{\varphi,\psi}(f)$ para toda $f \in H_v^\infty$.

Proposición 4.2 *Sean v y w pesos típicos, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H(\mathbb{D})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \longrightarrow H_w^0$ es continuo;

(ii) $\psi \in H_w^0$ y $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} < \infty$.

En este caso, se verifica que

$$\|W_{\varphi,\psi}\|_{H_v^0\to H_w^0} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}.$$

Demostración. (i) implica (ii). Supongamos que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \longrightarrow H_w^0$ es continuo. Entonces $W_{\varphi,\psi}(\chi_0) = \psi \in H_w^0$ y el operador $W_{\varphi,\psi}^{**} = W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_w^\infty$ también es continuo. Así, por la Proposición 4.1, se verifica (ii) y que

$$\|W_{\varphi,\psi}\|_{H_v^0\to H_w^0} = \left\|W_{\varphi,\psi}^{**}\right\|_{H_v^\infty\to H_w^\infty} = \|W_{\varphi,\psi}\|_{H_v^\infty\to H_w^\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}.$$

(ii) implica (i). Basta probar que $W_{\varphi,\psi}(f)$ pertenece a H_w^0 para cada f en H_v^0. Tomemos $f \in H_v^0$. Puesto que los espacios H_v^0 y $H_{\widetilde{v}}^0$ son isométricos, $f \in H_{\widetilde{v}}^0$ y, por tanto, $\lim_{|z|\to 1} \widetilde{v}(z) |f(z)| = 0$. De esta forma, dado $\varepsilon > 0$ existe $r_1 \in (0,1)$ tal que $\widetilde{v}(z) |f(z)| < \varepsilon/M$ para cada $|z| > r_1$ siendo $M = \sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}$. Por otro lado, como $\psi \in H_w^0$, existe $r_2 \in [r_1, 1)$ tal que $w(z)|\psi(z)| < \varepsilon / \sup_{|\zeta|\le r_1} |f(\zeta)|$ cuando $|z| \ge r_2$. Podemos ya probar que

$W_{\varphi,\psi}(f) \in H_w^0$. Para ello, consideremos $z \in \mathbb{D}$ tal que $|z| \geq r_2$ y distingamos dos casos. Si $|\varphi(z)| > r_1$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} w(z)|\psi(z)||f(\varphi(z))| &= |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \widetilde{v}(\varphi(z))|f(\varphi(z))| \\ &\leq M\widetilde{v}(\varphi(z))|f(\varphi(z))| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Y si $|\varphi(z)| \leq r_1$, entonces

$$w(z)|\psi(z)||f(\varphi(z))| \leq w(z)|\psi(z)| \sup_{|\xi| \leq r_1} |f(\xi)| < \varepsilon.$$

Así, $w(z)|W_{\varphi,\psi}(f)(z)| < \varepsilon$ para todo punto z tal que $|z| \geq r_2$. ■

Observación 4.3 Teniendo en cuenta las afirmaciones *(ii)* de las Proposiciones 4.1 y 4.2, y si $\psi \in H_w^0$, se verifica que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_w^\infty$ es continuo si, y sólo si, lo es el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \longrightarrow H_w^0$.

En general no se puede sustituir en las afirmaciones *(ii)* de las Proposiciones 4.1 y 4.2 el peso $\widetilde{v}$ por el peso v. Esto fue puesto de manifiesto para los operadores de composición por J. Bonet, P. Domański, M. Lindström y J. Taskinen en [10]. Basta tomar como ejemplo de operador de composición el operador identidad, un peso v no esencial y $w = \widetilde{v}$. Es claro que el operador es continuo y en cambio

$$\limsup_{|z| \to 1} \frac{w(z)}{v(z)} = \infty.$$

Sin embargo, cuando el peso es esencial, se verifica que $\sup_{z \in \mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} < \infty$ si, y sólo si, $\sup_{z \in \mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{v(\varphi(z))} < \infty$. Por lo que se verifica el siguiente resultado.

Corolario 4.4 *Sean v y w pesos tales que v es esencial, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H(\mathbb{D})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_w^\infty$ es continuo;

(ii) $\sup_{z \in \mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{v(\varphi(z))} < \infty$.

Si además v y w son pesos típicos y $\psi \in H_w^0$, entonces las anteriores afirmaciones equivalen a (*iii*) *El operador* $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \longrightarrow H_w^0$ *es continuo.*

Nuestro siguiente resultado caracteriza las funciones φ y ψ tales que el operador $W_{\varphi,\psi}$ es continuo para todo peso v. Para su prueba necesitamos el siguiente lema que es una generalización de [10, Lemma 2.5]. En este lema mostramos que existen funciones analíticas en el disco unidad con un crecimiento previamente establecido.

Lema 4.5 *Para cada par de sucesiones positivas* $\{r_n\} \to 1$, $\{R_n\} \to 1$, *tales que* $r_0 < R_0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < \ldots$ *y para toda sucesión positiva* $\{\alpha_n\}$, *existe una función* $f \in H(\mathbb{D})$ *verificando que*

$$\frac{M(f, R_n)}{M(f, r_n)} \geq \alpha_n.$$

Demostración. La función f que buscamos será la suma de una serie de funciones $\sum_{n \geq 0} f_n$. Construiremos dichas funciones f_n por inducción. Definamos $f_0 \equiv 1$ y supongamos que hemos encontrado polinomios $f_1, \ldots, f_{n-1}$ tales que, para $k = 1, \ldots, n-1$, se cumple que

(*a*) $|f_k(z)| \leq 2^{-k}$ para todo $z \in r_k\mathbb{D}$,

(*b*) $M(f_k, R_k) > M_k$,

donde

$$M_k := \left(M\left(\sum_{i=0}^{k-1} f_i, r_k \right) + 1 \right) \alpha_k + \sum_{i=0}^{k-1} \|f_i\|_{H_\infty} + 1.$$

Definamos $\widetilde{f}_n(z) = \frac{A}{(1+\varepsilon)R_n - z}$, siendo

$$A = \frac{2M_n(R_n - r_n)}{2^{2n+1}M_n + 1} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \frac{R_n - r_n}{R_n\left(2^{2n+1}M_n + 1\right)}.$$

Si $|z| \leq r_n$, entonces

$$\begin{aligned} \left|\widetilde{f}_n(z)\right| &\leq \frac{A}{(1+\varepsilon)R_n - |z|} \leq \frac{A}{(1+\varepsilon)R_n - r_n} \\ &= \frac{\frac{2M_n(R_n - r_n)}{2^{2n+1}M_n + 1}}{\left(1 + \frac{R_n - r_n}{R_n(2^{2n+1}M_n + 1)}\right) R_n - r_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2M_n(R_n - r_n)}{R_n\left(2^{2n+1}M_n + 1\right) + R_n - r_n - r_n\left(2^{2n+1}M_n + 1\right)} \\ &= \frac{2M_n(R_n - r_n)}{(R_n - r_n)\left(2^{2n+1}M_n + 2\right)} = \frac{M_n}{2^{2n}M_n + 1} < \frac{1}{2^{2n}}. \end{aligned}$$

Además, $\widetilde{f}_n(R_n) = \frac{A}{\varepsilon R_n} = 2M_n$. Puesto que $\widetilde{f}_n$ es analítica en un abierto que contiene a $\overline{R_n\mathbb{D}}$, dado $\delta \leq \min\{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{2n}}, M_n\}$, por el Teorema de Runge para compactos, existe un polinomio f_n tal que

$$\left|f_n(z) - \widetilde{f}_n(z)\right| < \delta$$

para todo $z \in \overline{R_n\mathbb{D}}$. Veamos que f_n verifica (a) y (b). Comenzamos por (a) : Si z es tal que $|z| \leq r_n$, entonces

$$|f_n(z)| \leq \left|f_n(z) - \widetilde{f}_n(z)\right| + \left|\widetilde{f}_n(z)\right| < \delta + \frac{1}{2^{2n}} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Por otro lado, para ver que se verifica (b), puesto que $\delta \leq M_n$, se tiene que

$$\begin{aligned} M(f_n, R_n) &= \sup_{|z|=R_n} |f_n(z)| \geq |f_n(R_n)| \\ &\geq \left|\widetilde{f}_n(R_n)\right| - \left|f_n(R_n) - \widetilde{f}_n(R_n)\right| > 2M_n - \delta \geq M_n. \end{aligned}$$

Finalmente, consideremos la función $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$. Veamos que f es analítica en el disco unidad. Para ello basta encontrar una sucesión de funciones analíticas en $\mathbb{D}$ que converja a f uniformemente sobre compactos. Lógicamente, dicha sucesión vendrá dada por $g_N := \sum_{n=0}^{N} f_n$. Sea K un compacto contenido en $\mathbb{D}$. Como $r_n \to 1$, existe un r_m tal que $K \subset r_m\mathbb{D}$. Si $N > m$ y $z \in K$ entonces

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(z)\right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f_n(z)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

y, por tanto, $f - g_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} f_n$ converge a cero uniformemente en K.

Para terminar, tenemos que probar que $\frac{M(f,R_n)}{M(f,r_n)} \geq \alpha_n$. Puesto que

$$M(f, R_n) \geq M(f_n, R_n) - \sum_{i=0}^{n-1} M(f_i, R_n) - \sum_{i=n+1}^{\infty} M(f_i, R_n)$$

$$\begin{aligned} &> M_n - \sum_{i=0}^{n-1} \|f_i\|_{H_\infty} - \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \geq M_n - \left(\sum_{i=0}^{n-1} \|f_i\|_{H_\infty} + 1 \right) \\ &= \left(M\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i, r_n \right) + 1 \right) \alpha_n \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} M(f, r_n) &\leq M\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i, r_n \right) + \sum_{i=n}^{\infty} M(f_i, r_n) \\ &\leq M\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i, r_n \right) + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{2^i} \leq M\left(\sum_{i=0}^{n-1} f_i, r_n \right) + 1, \end{aligned}$$

concluimos que $M(f, R_n) \geq \alpha_n M(f, r_n)$. ■

Teorema 4.6 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H(\mathbb{D})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ es continuo para todo peso v;

(ii) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ es continuo para todo peso típico v;

(iii) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_v^0$ es continuo para todo peso típico v;

(iv) Se verifica que $\psi \in H_\infty$ y existe un número $r \in (0,1)$ tal que $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ con $|z| \geq r$.

Demostración. (i) implica (ii) es inmediato.

(ii) implica (iv). Por (ii), se verifica que $W_{\varphi,\psi}(\chi_0) = \psi \in H_v^\infty$ para todo peso típico v. Supongamos que $\psi \notin H_\infty$. Entonces existe una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ tal que $|\psi(z_n)| \to \infty$. Además, podemos suponer que $\sup_{|w|=|z_n|} |\psi(w)| = |\psi(z_n)|$. Por tanto, si consideramos el peso típico $v(z) = M(\psi, |z|)^{-1/2}$ se verifica que

$$\begin{aligned} \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z) |\psi(z)| &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \frac{|\psi(z)|}{\left(\sup_{|w|=|z|} |\psi(w)|\right)^{1/2}} \geq \frac{|\psi(z_n)|}{\left(\sup_{|w|=|z_n|} |\psi(w)|\right)^{1/2}} \\ &= \frac{|\psi(z_n)|}{|\psi(z_n)|^{1/2}} = |\psi(z_n)|^{1/2} \to \infty, \end{aligned}$$

es decir, $\psi \notin H_v^\infty$. Esto contradice (ii) y, por tanto, $\psi \in H_\infty$.

Para probar la segunda afirmación de (iv) haremos una reducción al absurdo y utilizaremos el lema anterior para construir un peso típico v con el que llegar a una contradicción. Supongamos que existe una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1$ y $|\varphi(z_n)| > |z_n|$ para todo n. Como $\psi \neq 0$, podemos considerar $\{z_n\}$ tal que $|\psi(z_n)| \neq 0$. Llamemos $r_n = |z_n|$ y $R_n = |\varphi(z_n)|$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer también que $r_0 < R_0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < \ldots$ Tomemos finalmente la sucesión $\alpha_n = n/|\psi(z_n)|$. Observemos que $\alpha_n \to \infty$ pues $\psi \in H_\infty$. Entonces, por el Lema 4.5, existe una función no acotada $f \in H(\mathbb{D})$ tal que $M(f, R_n) \geq \alpha_n M(f, r_n)$ para todo n. Consideremos el peso típico $v(z) = M(f, |z|)^{-1}$. Es claro que $f \in B_{H_v^\infty}$. Por otro lado, para cada n, escojamos $\theta_n \in \mathbb{R}$ tal que $M(f, R_n) = \left|f\left(e^{i\theta_n}\varphi(z_n)\right)\right|$. Consideremos también para cada n el giro $\rho_{\theta_n}(z) = e^{i\theta_n}z$. Entonces, debido a que $W_{\rho_{\theta_n}\circ\varphi,\psi} = W_{\varphi,\psi} \circ C_{\rho_{\theta_n}}$ y $C_{\rho_{\theta_n}} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ está acotado con $\left\|C_{\rho_{\theta_n}}\right\|_{H_v^\infty \to H_v^\infty} = 1$ (basta tener en cuenta que v es un peso radial y la Proposición 4.1), se tiene que el operador $W_{\rho_{\theta_n}\circ\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ está acotado y

$$\left\|W_{\rho_{\theta_n}\circ\varphi,\psi}\right\|_{H_v^\infty \to H_v^\infty} \leq \left\|W_{\varphi,\psi}\right\|_{H_v^\infty \to H_v^\infty}$$

para todo n. Esto implica que

$$\begin{aligned}
\left\|W_{\varphi,\psi}\right\|_{H_v^\infty \to H_v^\infty} &\geq \left\|W_{\rho_{\theta_n}\circ\varphi,\psi}(f)\right\|_v \geq |\psi(z_n)| \left|f\left(\rho_{\theta_n}(\varphi(z_n))\right)\right| \frac{1}{M(f, |z_n|)} \\
&= |\psi(z_n)| \frac{M(f, R_n)}{M(f, r_n)} \geq n,
\end{aligned}$$

para todo n y obtenemos, por tanto, una contradicción con el hecho de que el operador $W_{\varphi,\psi}$ esté acotado.

(ii) implica (iii). Supongamos que se verifica (ii) y consideremos un peso típico v. Entonces, como ya sabemos que (ii) implica (iv) se verifica que $\psi \in H_\infty$ y, por tanto, que $\psi \in H_v^0$. Así, teniendo en cuenta la Observación 4.3, se obtiene sin dificultad (iii).

(iii) implica (ii). Supongamos que se verifica (iii) y consideremos un peso típico v. Entonces $W_{\varphi,\psi}(\chi_0) = \psi \in H_v^0$. Así, teniendo en cuenta la Observación 4.3, obtenemos (ii).

(iv) implica (i). Por la Proposición 4.1, el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ es continuo para todo peso v ya que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{v(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \leq \|\psi\|_{H_\infty} \frac{v(0)}{\widetilde{v}(r)} < \infty$$

donde hemos utilizado la Proposición 1.11. ■

En [10], J. Bonet, P. Domański, M. Lindström y J. Taskinen obtuvieron varias caracterizaciones interesantes de funciones φ verificando que existe un $r \in (0,1)$ tal que $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ con $|z| \geq r$.

4.2 Compacidad

En esta sección caracterizamos la compacidad de los operadores de composición ponderados en los espacios H_v^∞ y H_v^0. Para ello, acotamos la norma esencial para un peso general y obtenemos dicha norma para los pesos típicos. Entre otros argumentos usamos ideas del trabajo de A. Montes Rodríguez [61] donde se calcula la norma esencial de los operadores de composición en el espacio de Bloch.

Recordemos que si X es un espacio de Banach, la *norma esencial* de un operador continuo $T : X \to X$ se define como

$$\|T\|_e = \inf\{\|T - K\|_{X \to X} : \quad K : X \to X \text{ es un operador compacto}\}.$$

Es decir, la norma esencial mide la distancia de un operador al espacio de los operadores compactos. Por tanto, $\|T\|_e = 0$ si, y sólo si, T es compacto.

Para obtener la norma esencial haremos uso de la siguiente sucesión de operadores de composición: dado $k \in \mathbb{N}$ consideremos la función $\varphi_k(z) = \frac{k}{k+1}z$ y el operador $T_k = C_{\varphi_k}$. Puesto que $\|\varphi\|_{H_\infty} = \frac{k}{k+1} < 1$, los operadores $T_k : H_v^\infty \to H_v^\infty$ son compactos (véase [10, Theorem 3.3]). Por otro lado, la monotonía con respecto al módulo de z de la función $\widetilde{v}$ y las Proposiciones 1.11(i) y 4.1 implican que

$$\|T_k\|_{H_v^\infty \to H_v^\infty} = \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{v(z)}{\widetilde{v}\left(\frac{k}{k+1}z\right)} \leq \sup_{z \in \mathbb{D}} \frac{v(z)}{\widetilde{v}(z)} \leq 1$$

y

$$\|T_k\|_{H_v^\infty \to H_v^\infty} \geq \left\| T_k \left(\frac{1}{v(0)} \chi_0 \right) \right\|_v = \left\| \frac{1}{v(0)} \chi_0 \right\|_v = 1.$$

Es decir, $\|T_k\|_{H_v^\infty \to H_v^\infty} = 1$.

Además, la sucesión $\{T_k\}$ converge al operador identidad Id en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de $\mathbb{D}$. De aquí se deduce que $\{Id - T_k\}$ converge a cero uniformemente sobre los subconjuntos compactos de $H(\mathbb{D})$ cuando se le dota de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos (véase la prueba de [8, Theorem 4]).

Por otro lado, es inmediato comprobar que $\{T_k\}$ converge a la identidad en la topología fuerte de operadores. Nuestro siguiente lema mostrará que la sucesión de operadores adjuntos $\{T_k^*\}$ sigue siendo una "buena" aproximación a la identidad en $(H_v^0)^*$.

Lema 4.7 *La sucesión $\{T_k^*\}$ converge a la identidad en la topología fuerte de operadores sobre $\mathcal{L}((H_v^0)^*)$, es decir,*

$$\|T_k^*(h) - h\| \to 0,$$

para todo $h \in (H_v^0)^*$.

Demostración. Tomemos $[g] \in L_1(\mathbb{D})/N = (H_v^0)^*$. Tenemos que probar que

$$\|T_k^*([g]) - [g]\| \longrightarrow 0.$$

Fijemos $\varepsilon > 0$. Como $g \in L_1(\mathbb{D})$, por el Teorema de la Convergencia Monótona, existe r_0 tal que $\left\|g\chi_{r_0\overline{\mathbb{D}}}\right\|_{L_1(\mathbb{D})} > \|g\|_{L_1(\mathbb{D})} - \varepsilon/4$, es decir, $\int_{|z|>r_0} |g|\, dA < \varepsilon/4$. Así, como v es decreciente con respecto al módulo de z, para cada $f \in B_{H_v^0}$ se verifica que

$$\begin{aligned}
&\int_{|z|>r_0} v(z) \left| g(z) \left(f\left(\frac{k}{k+1}z\right) - f(z)\right)\right| dA \\
&\quad \le \int_{|z|>r_0} v(z) \left| g(z) f\left(\frac{k}{k+1}z\right)\right| dA + \int_{|z|>r_0} v(z) \left| g(z) f(z)\right| dA \\
&\quad \le \int_{|z|>r_0} v\left(\frac{k}{k+1}z\right) \left| f\left(\frac{k}{k+1}z\right)\right| |g(z)|\, dA + \|f\|_v \int_{|z|>r_0} |g(z)|\, dA \\
&\quad \le 2\|f\|_v \int_{|z|>r_0} |g|\, dA \le 2 \int_{|z|>r_0} |g|\, dA < 2\frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Puesto que la bola unidad de H_v^0 es un conjunto relativamente compacto en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos en $H(\mathbb{D})$, la convergencia a cero de $\{Id - T_k\}$ sobre los subconjuntos compactos del espacio de Fréchet $H(\mathbb{D})$ implica que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{f\in B_{H_v^0}} \sup_{|\xi|\le r_0} |(Id - T_k)(f)(\xi)| = 0.$$

Luego existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ se tiene que

$$\sup_{|z|\leq r_0} \left| f\left(\frac{k}{k+1}z\right) - f(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2\,\|g\|_{L_1(\mathbb{D})}\, v(0)},$$

para toda $f \in B_{H_v^0}$. Obtenemos, por tanto, que

$$\int_{|z|\leq r_0} v(z)\,|g(z)| \left|\left(f\left(\frac{k}{k+1}z\right) - f(z)\right)\right| dA < \frac{\varepsilon}{2}$$

para toda $f \in B_{H_v^0}$. Así, si $k \geq k_0$ se verifica que

$$\begin{aligned}
\|T_k^*([g]) - [g]\| &= \sup_{f\in B_{H_v^0}} |\langle (T_k^*([g]) - [g], f\rangle| \\
&= \sup_{f\in B_{H_v^0}} \left| \int_{\mathbb{D}} v(z) g(z) \left(f\left(\frac{k}{k+1}z\right) - f(z)\right) dA\right| \\
&\leq \sup_{f\in B_{H_v^0}} \int_{\mathbb{D}} v(z) \left| g(z) \left(f\left(\frac{k}{k+1}z\right) - f(z)\right)\right| dA \\
&\leq \sup_{f\in B_{H_v^0}} \int_{|z|>r_0} v(z) \left| g(z) \left(f\left(\frac{k}{k+1}z\right) - f(z)\right)\right| dA \\
&\quad + \sup_{f\in B_{H_v^0}} \int_{|z|\leq r_0} v(z) \left| g(z) \left(f\left(\frac{k}{k+1}z\right) - f(z)\right)\right| dA \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Es decir, $\lim_{k\to\infty} \|T_k^*([g]) - [g]\| = 0$. ■

W. Lusky prueba en [50, Corollary 2.4] que el espacio H_v^0 es siempre isomorfo a un subespacio de c_0. En el siguiente resultado mostramos que, de hecho, el espacio H_v^0 es casi isométrico a un subespacio de c_0. Este resultado fue puesto de manifiesto por N. J. Kalton y D. Werner para el espacio de Bloch pequeño [41, Corollary 5.9] y observaron que la prueba que realizan es también válida para el espacio H_v^0. Pensamos que merece la pena incluir una prueba de este resultado ya que no aparece de forma explícita en el trabajo de N. J. Kalton y D. Werner y es esencial en nuestros argumentos. No obstante, destacamos que seguimos casi literalmente sus ideas.

Recordemos que la *distancia de Banach-Mazur* entre dos espacios de Banach isomorfos X e Y se define como

$$d(X,Y) = \inf\left\{\|T\|\,\left\|T^{-1}\right\| : \ T : X \to Y \text{ isomorfismo}\right\}.$$

Lema 4.8 *Sea v un peso típico. Entonces el espacio H_v^0 es casi isométrico a un subespacio de c_0, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un subespacio X_0 de c_0 (con su norma usual) tal que $d(X_0, H_v^0) < 1 + \varepsilon$.*

Demostración. Veamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ tal que el operador $T : H_v^0 \to c_0$ dado por $T(f) = \{v(z_n) f(z_n)\}$ verifica que

$$(1-\varepsilon) \|f\|_v \le \|T(f)\|_{c_0} \le \|f\|_v \tag{4.2}$$

para toda $f \in H_v^0$.

Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $r_n = 1 - 2^{-n}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Dada $f \in H_v^0$ tal que $\|f\|_v = 1$ se verifica que

$$1 = \|f\|_v = \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z) |f(z)| \ge \sup_{|z|\le r_n} v(z) |f(z)| \ge v(r_n) \sup_{|z|\le r_n} |f(z)|;$$

es decir, $|f(z)| \le 1/v(r_n)$ para todo $|z| \le r_n$.

De esta forma, si z es tal que $|z| \le r_n$ entonces los valores de la función f en el disco centrado en z y de radio $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}$ están acotados por $\frac{1}{v(r_{n+1})}$. Por tanto, teniendo en cuenta las acotaciones de Cauchy (véase [73, Teorema 10.4.9]), se verifica que

$$|f'(z)| \le \frac{2^{n+1}}{v(r_{n+1})}$$

para todo $|z| \le r_n$.

Por otro lado, consideremos los anillos $A_n := \{z \in \mathbb{D} : r_{n-1} \le |z| \le r_n\}$. Es claro que

$$A_n \subseteq \bigcup_{z\in A_n} \{z' \in \mathbb{D} : |z' - z| < \delta_n \text{ y } |v(z') - v(z)| < \delta_n\}$$

donde δ_n es tal que $\left(\frac{1}{v(r_n)} + \frac{2^{n+1}v(0)}{v(r_{n+1})}\right)\delta_n < \varepsilon$. Entonces, por la compacidad de A_n, existe un subconjunto finito de puntos de A_n, que llamamos F_n, tal que

$$A_n \subseteq \bigcup_{z\in F_n} \{z' \in \mathbb{D} : |z' - z| < \delta_n \text{ y } |v(z') - v(z)| < \delta_n\}.$$

Así, para cada $z \in A_n$ existe $w \in F_n$ tal que $|w - z| < \delta_n$ y $|v(w) - v(z)| < \delta_n$. Por tanto, existe un punto ξ con $|\xi| \le r_n$ tal que

$$\begin{aligned} |f(z)| &\le |f(z) - f(w)| + |f(w)| \le |f'(\xi)| |z - w| + |f(w)| \\ &\le \frac{2^{n+1}}{v(r_{n+1})}\delta_n + |f(w)|. \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} v(z)|f(z)| &\leq (v(z)-v(w))|f(z)|+v(w)|f(z)| \\ &\leq (v(z)-v(w))|f(z)|+v(w)\left(\frac{2^{n+1}}{v(r_{n+1})}\delta_n+|f(w)|\right) \\ &\leq \delta_n\frac{1}{v(r_n)}+\frac{2^{n+1}v(0)}{v(r_{n+1})}\delta_n+v(w)|f(w)| \\ &< \varepsilon+v(w)|f(w)|. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que

$$\sup_{z\in A_n} v(z)|f(z)| \leq \varepsilon+\max_{w\in F_n} v(w)|f(w)|.$$

Así, si $F=\cup_n F_n$ se concluye que

$$1\leq \varepsilon+\sup_{w\in F} v(w)|f(w)|.$$

Si vemos ahora el conjunto F como una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ tal que $|z_n|\to 1$ y tomamos $f\in H_v^0$, $f\neq 0$, entonces

$$\left\|\frac{f}{\|f\|_v}\right\|_v = 1 \leq \varepsilon+\left\|T\left(\frac{f}{\|f\|_v}\right)\right\|_{c_0}.$$

Por tanto, $\|f\|_v\leq \varepsilon\|f\|_v+\|T(f)\|_{c_0}$. ■

Ya sabemos que los operadores $\{T_k\}$ y sus adjuntos son buenas aproximaciones a la identidad y que el espacio H_v^0 es casi isométrico a un subespacio de c_0. Nuestro próximo objetivo es reemplazar los operadores T_k por una sucesión de combinaciones convexas suyas con la propiedad adicional de que sus distancias al operador identidad esté "controlada por 1".

Lema 4.9 *Sea v un peso típico. Entonces existe una sucesión de operadores compactos $\{L_k\}$ en H_v^0 tal que*

$$\lim_{k\to\infty}\|L_k(f)-f\|_v=0,$$

para toda $f\in H_v^0$, y

$$\limsup_{k\to\infty}\|I-L_k\|_{H_v^0\to H_v^0}\leq 1.$$

De hecho, para cada k, el operador L_k es una combinación convexa de $\{T_n : n\geq k\}$.

Demostración. Antes de comenzar la prueba merece la pena comentar dos puntos claves en ésta. El primero de ellos es el Lema 4.8 de N. J. Kalton y D. Werner que afirma que el espacio H_v^0 es casi isométrico a un subespacio de c_0. El segundo es un resultado de N. J. Kalton que afirma que si los adjuntos de una sucesión de operadores compactos converge a cero en la topología de la convergencia fuerte de operadores, entonces éstas tienen combinaciones convexas de norma arbitrariamente pequeña.

Será suficiente probar que dado $\varepsilon > 0$ existe un número natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ existe una combinación lineal convexa de $\{T_m : m \geq n\}$, que llamaremos L_n, tal que $\|I - L_n\| < 1 + \varepsilon$.

Fijemos un $\varepsilon > 0$. Por el Lema 4.8, existe un subespacio cerrado X_0 de c_0 tal que la distancia de Banach-Mazur de X_0 a H_v^0 es menor estrictamente que $\sqrt{1+\varepsilon}$. Es decir, existe un isomorfismo $T : H_v^0 \to X_0$ tal que $\|T\| \, \|T^{-1}\| < \sqrt{1+\varepsilon}$.

Tomemos ahora los operadores $K_n = TT_nT^{-1} : X_0 \to X_0$. Es claro que $K_n^* = (T^{-1})^* \circ T_n^* \circ T^*$. Por el Lema 4.7, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n^* x^* - x^*\|_{X_0^*} = 0 \tag{4.3}$$

para cada $x^* \in X_0^*$. Por otro lado, si P_n es la proyección en c_0 dada por $P_n(\{x_n\}) = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$, y tomamos $x^* \in c_0^* \, (= \ell_1)$ entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n^* x^* - x^*\|_{\ell_1} = 0. \tag{4.4}$$

Denotemos por J a la inclusión de X_0 en c_0. Es claro que $JK_n - P_nJ \in \mathcal{K}(X_0, c_0)$. Además, la convergencia tanto de $\{K_n^*\}$ como de $\{P_n^*\}$ a la identidad en la topología fuerte de operadores implican

$$|\langle (JK_n - P_nJ)^* \, x^*, y^{**} \rangle| \leq \|y^{**}\| \, \|(JK_n - P_nJ)^* \, x^*\| \longrightarrow 0$$

para cada $x^* \in c_0^*$ e $y^{**} \in X_0^{**}$. Así, por [40, Corollary 3], existe una sucesión de combinaciones convexas de $\{JK_n - P_nJ\}$ que converge a cero en la topología de la norma. Es decir, existen dos sucesiones $\{K_n^c\}$ y $\{P_n^c\}$ con K_n^c y P_n^c combinaciones convexas de $\{K_m : m \geq n\}$ y $\{P_m : m \geq n\}$, respectivamente, tales que

$$\lim_{n\to\infty} \|JK_n^c - P_n^c J\| = 0. \tag{4.5}$$

Tomemos n_0 tal que $\left\|JK_{n_0}^c - P_{n_0}^c J\right\| < \sqrt{1+\varepsilon} - 1$.

Por otro lado, un sencillo cálculo muestra que $\|I - P_n^c\|_{c_0 \to c_0} \leq 1$ para todo n. Luego, por (4.5), para $n \geq n_0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|I - K_n^c\|_{X_0 \to X_0} &= \|J(I - K_n^c)\|_{X_0 \to c_0} \\ &\leq \|(I - P_n^c)J\|_{X_0 \to c_0} + \|JK_n^c - P_n^c J\|_{X_0 \to c_0} \\ &\leq 1 + \|JK_n^c - P_n^c J\|_{X_0 \to c_0} < \sqrt{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Finalmente, si definimos $L_n := T^{-1}K_n^c T$ se tiene que L_n es una combinación convexa de los operadores $\{T_m : m \geq n\}$ y para todo $n \geq n_0$

$$\|I - L_n\|_{H_v^0 \to H_v^0} = \left\|T^{-1}(I - K_n^c)T\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|(I - K_n^c)\| \|T\| < 1 + \varepsilon. \blacksquare$$

Observemos que seguimos teniendo que $\limsup_{k\to\infty} \|(I - L_k)^{**}\|_{H_v^\infty \to H_v^\infty} \leq 1$ y que $(I - L_k)^{**} = I - L_k$. Este hecho se usará en la prueba del siguiente teorema.

Podemos ya calcular la norma esencial de los operadores de composición ponderados en H_v^∞.

Teorema 4.10 *Sean v y w pesos, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_w^\infty$. Supongamos que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_w^\infty$ es continuo. Entonces*

$$\|W_{\varphi,\psi}\|_e \leq 2 \lim_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}.$$

Además, si v es un peso típico, entonces se tiene que

$$\|W_{\varphi,\psi}\|_e = \lim_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}.$$

Demostración. Comencemos probando la estimación superior suponiendo que v es un peso típico. Para ello, consideremos la sucesión de operadores compactos $\{L_n\}$ que proporciona el Lema 4.9. Así, fijando $r \in (0,1)$, tenemos que

$$\begin{aligned} \|W_{\varphi,\psi}\|_e &\leq \|W_{\varphi,\psi} - W_{\varphi,\psi}L_k\| \\ &= \sup_{f\in B_{H_v^\infty}} \sup_{z\in\mathbb{D}} w(z)\,|\psi(z)|\,|(Id - L_k)(f)(\varphi(z))| \\ &\leq I_{r,k} + J_{r,k}, \end{aligned}$$

donde

$$I_{r,k} := \sup_{f\in B_{H_v^\infty}} \sup_{|\varphi(z)|>r} w(z) |\psi(z)| |(Id - L_k)(f)(\varphi(z))|$$

y

$$J_{r,k} := \sup_{f\in B_{H_v^\infty}} \sup_{|\varphi(z)|\le r} w(z) |\psi(z)| |(Id - L_k)(f)(\varphi(z))| .$$

Ahora estimamos $I_{r,k}$ y $J_{r,k}$. Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned} I_{r,k} &= \sup_{f\in B_{H_v^\infty}} \sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \widetilde{v}(\varphi(z)) |(Id - L_k)(f)(\varphi(z))| \\ &\le \sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \sup_{f\in B_{H_v^\infty}} \sup_{z\in\mathbb{D}} \widetilde{v}(z) |(Id - L_k)(f)(z)| \\ &\le \sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \|Id - L_k\|_{H_v^\infty \to H_v^\infty} , \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad hemos utilizado que los espacios H_v^∞ y $H_{\widetilde{v}}^\infty$ son isométricos y, por tanto,

$$\sup_{f\in B_{H_v^\infty}} \sup_{z\in\mathbb{D}} \widetilde{v}(z) |(Id - L_k)(f)(z)| = \|Id - L_k\|_{H_v^\infty \to H_v^\infty} .$$

Por otro lado, tenemos que

$$J_{r,k} \le \|\psi\|_w \sup_{f\in B_{H_v^\infty}} \sup_{|\xi|\le r} |(Id - L_k)(f)(\xi)| .$$

Además, teniendo en cuenta que la bola unidad de H_v^∞ es un conjunto relativamente compacto en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos en $H(\mathbb{D})$, la convergencia a cero de $\{Id - T_k\}$ sobre los subconjuntos compactos del espacio de Fréchet $H(\mathbb{D})$ implica que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{f\in B_{H_v^\infty}} \sup_{|\xi|\le r} |(Id - T_k)(f)(\xi)| = 0.$$

Así, como los operadores L_k son combinaciones convexas de los operadores $\{T_k\}$, también se verifica que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{f\in B_{H_v^\infty}} \sup_{|\xi|\le r} |(Id - L_k)(f)(\xi)| = 0.$$

Por tanto, para cada $r<1$ se tiene que

$$\begin{aligned}\|W_{\varphi,\psi}\|_e &\leq \limsup_{k\to\infty}\|W_{\varphi,\psi}-W_{\varphi,\psi}L_k\| \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} I_{r,k}+\limsup_{k\to\infty} J_{r,k} \\ &\leq \sup_{|\varphi(z)|>r}|\psi(z)|\frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}\limsup_{k\to\infty}\|Id-L_k\| \\ &\leq \sup_{|\varphi(z)|>r}|\psi(z)|\frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Por consiguiente,

$$\|W_{\varphi,\psi}\|_e\leq\lim_{r\to1}\sup_{|\varphi(z)|>r}|\psi(z)|\frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}.$$

Si el peso v no es típico, se pueden seguir estos mismos argumentos con la sucesión de operadores $\{T_k\}$ en vez de $\{L_k\}$. La única diferencia está en que ahora tenemos que usar la acotación $\|Id-T_k\|_{H_v^\infty\to H_v^\infty}\leq 2$ en la desigualdad (4.6).

Continuamos la prueba en el caso en que el peso v es típico y probemos la estimación inferior de la norma esencial. Procederemos por reducción al absurdo. Supongamos que existen constantes $b>c>0$, un operador compacto $K:H_v^\infty\to H_w^\infty$ y una sucesión $\{z_n\}\subset\mathbb{D}$ tales que $|\varphi(z_n)|\to1$ y

$$\|W_{\varphi,\psi}-K\|<c<b<|\psi(z_n)|\frac{w(z_n)}{\widetilde{v}(\varphi(z_n))}$$

para cada n. Como el peso v es típico, y teniendo en cuenta la definición de peso asociado a v y la Proposición 1.11, existe $f_n\in B_{H_v^0}$ tal que $|f_n(\varphi(z_n))|\,\widetilde{v}(\varphi(z_n))\geq\left(\frac{c}{b}\right)^{1/2}$ y una sucesión de números naturales $\{\alpha_n\}$ tendiendo a infinito tal que $|\varphi(z_n)|^{\alpha_n}\geq\left(\frac{c}{b}\right)^{1/2}$ (podemos tomar, por ejemplo, α_n la parte entera de $\left(\ln(c/b)^{1/2}/\ln|\varphi(z_n)|\right)+1$). Definamos $g_n(z):=z^{\alpha_n}f_n(z)$. Es claro que $\|g_n\|_v\leq1$, pues $\|f_n\|_v\leq1$. También se verifica que $g_n\in H_v^0$, pues $f_n\in H_v^0$. Además $\{g_n\}$ converge a cero en la topología de la convergencia uniforme sobre compactos. En efecto, sea C un compacto en $\mathbb{D}$, entonces existe $r\in(0,1)$ tal que $C\subset D(0,r)=\{z\in\mathbb{D}:|z|<r\}$. De esta forma se cumple que

$$|g_n(z)| \;=\; |z|^{\alpha_n}|f_n(z)|=|z|^{\alpha_n}v(z)\,|f_n(z)|\frac{1}{v(z)}$$

$$\leq \; |z|^{\alpha_n} \frac{1}{v(z)} \leq r^{\alpha_n} \frac{1}{v(r)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

uniformemente en C. Veamos que, además, $\{g_n\}$ converge a cero en la topología débil de H_v^0. Consideremos $[f] \in (H_v^0)^* = L_1(\mathbb{D})/N$. Entonces, como $\langle f, g_n \rangle = \int v g_n f \, dA$, se verifica que $|v g_n f| \leq |f| \in L_1(\mathbb{D})$ y $v(z) g_n(z) f(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $z \in \mathbb{D}$, por el Teorema de la Convergencia Dominada, se concluye que $\langle f, g_n \rangle \to 0$. Como la inyección de H_v^0 en H_v^∞ es una aplicación norma-norma continua entonces también lo es débil-débil continua. Por tanto, la sucesión $\{g_n\}$ también converge a cero en la topología débil de H_v^∞. Finalmente, como K es un operador compacto se tiene que lleva sucesiones que convergen a cero en la topología débil a sucesiones que convergen a cero en la topología de la norma. Por tanto, $\{K(g_n)\}$ converge a cero en la topología de la norma. De esta forma, como

$$\|W_{\varphi,\psi} - K\|_{H_v^\infty \to H_w^\infty} \geq \|(W_{\varphi,\psi} - K)(g_n)\|_w \geq \|W_{\varphi,\psi}(g_n)\|_w - \|K(g_n)\|_w,$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
c \;&>\; \|W_{\varphi,\psi} - K\| \geq \limsup_{n\to\infty} \|W_{\varphi,\psi}(g_n)\|_w \\
&= \limsup_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{D}} w(z) |\psi(z)| |g_n(\varphi(z))| \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} w(z_n) |\psi(z_n)| |g_n(\varphi(z_n))| \\
&= \limsup_{n\to\infty} w(z_n) |\psi(z_n)| |\varphi(z_n)|^{\alpha_n} |f_n(\varphi(z_n))| \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{w(z_n) |\psi(z_n)|}{\widetilde{v}(\varphi(z_n))} |\varphi(z_n)|^{\alpha_n} |f_n(\varphi(z_n))| \, \widetilde{v}(\varphi(z_n)) \\
&\geq b \left(\frac{c}{b}\right)^{1/2} \left(\frac{c}{b}\right)^{1/2} = c,
\end{aligned}$$

con lo que llegamos a una contradicción. ■

En la demostración de la estimación inferior de $\|W_{\varphi,\psi}\|_e$ que aparece en el Teorema 4.10 es necesario que v sea un peso típico. En cualquier caso se puede obtener el siguiente resultado válido para cualesquiera pesos v y w.

Corolario 4.11 *Sean v y w pesos, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H(\mathbb{D})$. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_w^\infty$ es compacto si, y sólo si, $\psi \in H_w^\infty$ y*

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} = 0.$$

Cuando v es esencial, $\widetilde{v}$ puede ser reemplazado por v.

Demostración. Supongamos que $W_{\varphi,\psi}$ es compacto. Entonces $W_{\varphi,\psi}$ es continuo y, por tanto, $W_{\varphi,\psi}(\chi_0) = \psi \in H_w^\infty$. Si $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} > \varepsilon > 0$, entonces existe una sucesión $\{z_n\} \subset \mathbb{D}$ tal que $|\varphi(z_n)| \to 1$ y $|\psi(z_n)| \, w(z_n) \geq \varepsilon \widetilde{v}(\varphi(z_n))$, para todo n. Tomemos, para cada n, una función f_n en la bola unidad de H_v^∞ tal que $|f_n(\varphi(z_n))| \, \widetilde{v}(\varphi(z_n)) \geq 1/2$ y $\alpha_n \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi(z_n)|^{\alpha_n} \geq 1/2$ con α_n tendiendo a infinito. Vimos en la demostración del Teorema 4.10 que, para cada n, las funciones $g_n(z) := z^{\alpha_n} f_n(z)$ están en la bola unidad de H_v^∞ y convergen a cero uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D}$. Como $W_{\varphi,\psi}$ es compacto, por la Proposición 1.21, $\|W_{\varphi,\psi}(g_n)\|_w \to 0$. Pero, para todo n,

$$\begin{aligned}
\|W_{\varphi,\psi}(g_n)\|_w &\geq w(z_n) \, |\psi(z_n)| \, |g_n(\varphi(z_n))| \\
&= w(z_n) \, |\psi(z_n)| \, |\varphi(z_n)^{\alpha_n}| \, |f_n(\varphi(z_n))| \\
&\geq \varepsilon \widetilde{v}(\varphi(z_n)) \, |\varphi(z_n)^{\alpha_n}| \, |f_n(\varphi(z_n))| \geq \frac{\varepsilon}{4},
\end{aligned}$$

lo que es una contradicción.

Recíprocamente, por el Teorema 4.10, bastará probar que si

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} = 0$$

entonces el operador $W_{\varphi,\psi}$ es continuo. Teniendo en cuenta la Proposición 4.1, es suficiente probar que $\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} < \infty$. Sea $r \in (0,1)$ tal que $\sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \leq 1$. Como también

$$\sup_{|\varphi(z)|\leq r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \leq \frac{\|\psi\|_w}{\widetilde{v}(r)},$$

se sigue que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \leq \max\left\{1, \frac{\|\psi\|_w}{\widetilde{v}(r)}\right\} < \infty. \blacksquare$$

Una simple adaptación de la demostración del Teorema 4.10 nos permite probar un resultado análogo para los operadores de composición ponderados en los espacios H_v^0.

Teorema 4.12 *Sean v y w pesos típicos, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_w^0$. Supongamos que $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_w^0$ es continuo, entonces*

$$\left\|W_{\varphi,\psi}\right\|_e = \lim_{r\to 1} \sup_{|z|\geq r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}.$$

Demostración. Es inmediato comprobar que la prueba realizada para el Teorema 4.10 también sirve para los espacios H_v^0. Bastará, por tanto, probar que cuando $\psi \in H_w^0$ se cumple que

$$\lim_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} = \lim_{r\to 1} \sup_{|z|\geq r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}.$$

Es claro que si $|\varphi(z_n)| \to 1$, entonces también se verifica que $|z_n| \to 1$. De esta forma,

$$\lim_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \leq \lim_{r\to 1} \sup_{|z|\geq r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))}.$$

Sea ahora $z_n \in \mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1$ y

$$\lim_{r\to 1} \sup_{|z|\geq r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} = \lim_{n\to\infty} |\psi(z_n)| \frac{w(z_n)}{\widetilde{v}(\varphi(z_n))}.$$

Supongamos que existe una constante $c < 1$ tal que $|\varphi(z_n)| \leq c$ para todo n, entonces se verifica que $\widetilde{v}(\varphi(z_n)) \geq \widetilde{v}(c) > 0$ y, por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} |\psi(z_n)| \frac{w(z_n)}{\widetilde{v}(\varphi(z_n))} = 0.$$

Así, ambos límites son iguales a cero y se tiene la igualdad. En caso contrario, existe una subsucesión de $\{z_n\}$ que denotamos igual, tal que $|\varphi(z_n)| \to 1$. De esta forma,

$$\lim_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} \geq \lim_{n\to\infty} |\psi(z_n)| \frac{w(z_n)}{\widetilde{v}(\varphi(z_n))}$$

obteniendo nuevamente la igualdad deseada. ■

El teorema anterior nos proporciona una caracterización de la compacidad de los operadores de composición ponderados en H_v^0.

Corolario 4.13 *Sean v y w pesos típicos, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_w^0$. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_w^0$ es compacto si, y sólo si,*

$$\lim_{|z|\to 1} |\psi(z)| \frac{w(z)}{\widetilde{v}(\varphi(z))} = 0.$$

Cuando v es esencial, $\widetilde{v}$ puede ser reemplazado por v.

Finalizamos la sección caracterizando las parejas de funciones analíticas φ y ψ tales que el operador de composición ponderado $W_{\varphi,\psi}$ es siempre compacto.

Corolario 4.14 *Sean $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H(\mathbb{D})$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ es compacto para todo peso v;*

(*ii*) *El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_v^0$ es compacto para todo peso típico v;*

(*iii*) *La función ψ pertenece a H_∞, $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| = 0$ y existe $r_0 \in (0,1)$ tal que $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ con $|z| \geq r_0$.*

Demostración. (*i*) implica (*iii*) y (*ii*) implica (*iii*). Por el Teorema 4.6, ψ pertence a H_∞ y se verifica que existe $r_0 \in (0,1)$ tal que $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ con $|z| \geq r_0$.

Supongamos que $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| \neq 0$. En este caso vamos a encontrar un peso típico v tal que $W_{\varphi,\psi}$ no es compacto sobre H_v^0 ni sobre H_v^∞.

Fijemos $\delta > 0$. Entonces existen $c > 0$ y una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ tales que $|z_n| \to 1$, $|\varphi(z_n)| \to 1$, $|\psi(z_n)| \geq c$, $|z_n| < |z_{n+1}|^\delta$ y $|z_n| < |\varphi(z_{n+1})|$ para todo n. Sea $r_n = |z_n|$. Definamos una función creciente $u : [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ que es igual a 1 sobre $[0, r_1]$, $u(r_n) = 2^n$ y es afín sobre cada intervalo $[r_{n-1}, r_n]$. Tomemos el peso típico $v(z) = 1/u(|z|)$. Además, el peso v es esencial (véase la prueba de [10, Theorem 3.7]). Por hipótesis, el operador $W_{\varphi,\psi}$ es continuo sobre H_v^0 y H_v^∞. Por otro lado,

$$|\psi(z_n)| \frac{v(z_n)}{v(\varphi(z_n))} \geq c \frac{u(|\varphi(z_n)|)}{u(r_n)} \geq c \frac{u(r_{n-1})}{u(r_n)} = \frac{c}{2},$$

de donde se sigue, teniendo en cuenta el Corolario 4.13, que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \to H_v^0$ no es compacto. Además, como $W_{\varphi,\psi}^{**} = W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_v^\infty$, el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \to H_v^\infty$ tampoco es compacto.

(iii) implica (i). Observemos que, como los espacios H_v^∞ y $H_{\tilde{v}}^\infty$ son isométricos (Proposición 1.11 (iii)), basta probar (i) para pesos esenciales. Fijemos un peso esencial v. Aplicaremos el Corolario 4.11. Por un lado, $\psi \in H_\infty$, luego $\psi \in H_v^\infty$. De esta forma, queda por probar que

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| \frac{v(z)}{v(\varphi(z))} = 0. \tag{4.7}$$

Tomemos una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ tal que $|\varphi(z_n)| \to 1$. Por hipótesis, podemos suponer que $|\varphi(z_n)| \leq |z_n|$, luego $v(|\varphi(z_n)|) \geq v(|z_n|)$. Esto muestra que $\frac{|\psi(z_n)|v(z_n)}{v(\varphi(z_n))} \leq |\psi(z_n)|$. Por otro lado, teniendo en cuenta $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| = 0$, se verifica que $|\psi(z_n)|$ tiende a cero. Esto prueba (4.7).

(iii) implica (ii). De nuevo, basta probar (ii) para pesos esenciales. Fijemos un peso típico y esencial v. Es claro que $\psi \in H_v^0$. Por el Corolario 4.13, debemos probar que

$$\lim_{|z|\to 1} |\psi(z)| \frac{v(z)}{v(\varphi(z))} = 0.$$

Tomemos una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ tal que $|z_n| \to 1$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que o bien $|\varphi(z_n)| \to 1$ o existe una constante $c < 1$ tal que $|\varphi(z_n)| \leq c$ para todo n. Por un lado, si $|\varphi(z_n)| \to 1$, por (iii), podemos suponer que $|\varphi(z_n)| \leq |z_n|$ para todo n, luego $v(|\varphi(z_n)|) \geq v(|z_n|)$. Así,

$$|\psi(z_n)| \frac{v(z_n)}{v(\varphi(z_n))} \leq |\psi(z_n)|.$$

Pero, como $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| = 0$, se tiene que $|\psi(z_n)|$ tiende a cero. Por otro lado, si $|\varphi(z_n)| \leq c$, entonces

$$|\psi(z_n)| \frac{v(z_n)}{v(\varphi(z_n))} \leq \|\psi\|_\infty \frac{v(z_n)}{v(c)}$$

y, como $v(z_n)$ tiende a cero, se verifica que $\lim_{|z|\to 1} |\psi(z)| \frac{v(z)}{v(\varphi(z))} = 0$. ■

Ya sabemos del Capítulo 2 que M. D. Contreras y S. Díaz Madrigal probaron que un operador de composición ponderado $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \longrightarrow H_\infty$ es compacto si, y sólo si, ψ pertence a H_∞ y para toda sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ tal que $\varphi(z_n) \to b$ con $b \in \mathbb{T}$, se verifica que $\psi(z_n) \to 0$ [15, Proposition 2.3]. Como el hecho de que $\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\psi(z)| = 0$ no implica que exista $r_0 \in (0,1)$ tal que $|\varphi(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$ con $|z| \geq r_0$, se tiene que el hecho de ser compacto el operador $W_{\varphi,\psi} : H_\infty \longrightarrow H_\infty$ no es equivalente al hecho de que, para todo peso v, el operador $W_{\varphi,\psi}$ sea compacto sobre H_v^∞. Merece la pena destacar que esto sí es cierto para los operadores de composición y fue puesto de manifiesto por J. Bonet, P. Domański, M. Lindström y J. Taskinen probando que $C_\varphi : H_\infty \longrightarrow H_\infty$ es compacto si, y sólo si, para todo peso v, el operador C_φ es compacto sobre H_v^∞ [10, Corollary 3.8].

4.3 Operadores de composición ponderados no compactos

En esta sección probamos que si un operador de composición ponderado no es compacto entonces actúa como un isomorfismo sobre un cierto subespacio isomorfo a c_0 o a ℓ_∞ y obtenemos como consecuencia que las tres propiedades de compacidad que estamos estudiando (compacidad, compacidad débil y continuidad completa) son equivalentes tanto para H_v^0 como para H_v^∞. Estos resultados fueron probados para los operadores de composición por J. Bonet, P. Domański y M. Lindström [8].

Si bien la prueba para H_v^0 y H_v^∞ es bastante similar, hemos optado por detallar solamente la de H_v^0 ya que ésta presenta una dificultad adicional: la construcción del subespacio donde el operador de composición ponderado actúa como un isomorfismo requiere comprobar que una serie es débil incondicionalmete convergente. Como queda claro en la prueba del siguiente teorema, este hecho requiere menos esfuerzo en H_v^∞ que en H_v^0.

Teorema 4.15 *Sean v y w pesos típicos, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_w^0$ tales que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \longrightarrow H_w^0$ es continuo. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \longrightarrow H_w^0$ es compacto o un isomorfismo sobre un subespacio isomorfo a c_0.*

Demostración. Supongamos que $W_{\varphi,\psi}$ no es compacto. Entonces, por el Corolario 4.13, existen una constante $c > 0$ y una sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{D}$ tales que $|z_n| \to 1$ y $|\psi(z_n)| w(z_n) \geq c\widetilde{v}(\varphi(z_n))$ para todo n. Puesto que $\psi \in H_w^0$, se verifica que $|\psi(z_n)| w(z_n) \to 0$ y, por consiguiente, $\widetilde{v}(\varphi(z_n)) \to 0$. Por ser $\widetilde{v}$ un peso típico, concluimos que $|\varphi(z_n)| \to 1$. Así, por [35, pág. 204], existe una subsucesión de $\{\varphi(z_n)\}$ (que denotamos igual) que es una sucesión interpolante. Por otro lado, por la definición de peso asociado a v y la Proposición 1.11, para cada n existe $f_n \in B_{H_v^0}$ tal que $\widetilde{v}(\varphi(z_n)) |f_n(\varphi(z_n))| > 1/2$.

En la demostración de [90, Theorem III.E.4] se obtiene que asociada a una sucesión interpolante (en nuestro caso $\{\varphi(z_n)\}$) existe una sucesión $\{h_k\}$

en H_∞ y una constante $M > 0$ tal que

$$h_k(\varphi(z_n)) = \delta_{k,n} \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |h_k(z)| \leq M \tag{4.8}$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Puesto que $f_k \in H_v^0$ y $h_k \in H_\infty$, es inmediato comprobar que $f_k h_k \in H_v^0$. Observemos también que para toda suceción $\{\xi_k\}$ en c_0, se verifica que

$$\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{D}} v(z) \left| \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(z) h_k(z) \right| &\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z) \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k f_k(z) h_k(z)| \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_v |\xi_k h_k(z)| \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_k |\xi_k|\right) |h_k(z)| \\
&\leq \left(\sup_k |\xi_k|\right) M,
\end{aligned}$$

es decir, la función $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k h_k$ pertenece a H_v^∞. El hecho de que esta función pertenece a H_v^0 no es evidente. Para probar esto, tengamos en cuenta que, dada $g \in L_1(\mathbb{D})$, se verifica que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, f_k h_k \rangle| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{D}} v |g f_k h_k| \, dA \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_v \int_{\mathbb{D}} |g h_k| \, dA \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{D}} |g h_k| \, dA = \int_{\mathbb{D}} |g| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |h_k| \right) dA \\
&\leq M \|g\|_{L_1(\mathbb{D})},
\end{aligned}$$

donde el sumatorio y la integral se pueden intercambiar debido a (4.8) y al Teorema de la Convergencia Dominada. En particular, dada $[g] \in L_1(\mathbb{D})/N = (H_v^0)^*$, deducimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle [g], f_k h_k \rangle| \leq M \|[g]\|.$$

Así, la serie $\sum f_k h_k$ es débil incondicionalmente de Cauchy en H_v^0. Concluimos así que el operador $T : c_0 \to H_v^0$ dado por

$$T(\{\xi_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k h_k$$

está bien definido, es lineal y continuo (véase [23, pág. 44]).

Por otro lado, observemos que si $f \in H_w^0$, entonces

$$\left| \frac{f(z_n)}{\psi(z_n) f_n(\varphi(z_n))} \right| \leq 2 \left| \frac{f(z_n)\widetilde{v}(\varphi(z_n))}{\psi(z_n)} \right| \leq \frac{2}{c} |w(z_n) f(z_n)|$$

y

$$\lim_{n\to\infty} |w(z_n) f(z_n)| = 0.$$

De esta forma, el operador $S : H_w^0 \to c_0$ dado por

$$S(f) = \left\{ \frac{f(z_n)}{\psi(z_n) f_n(\varphi(z_n))} \right\}$$

está bien definido, es lineal y continuo y $\|S\|_{H_w^0 \to c_0} \leq \frac{2}{c}$.

Finalmente, por (4.8), se verifica que

$$\begin{aligned}
(S \circ W_{\varphi,\psi} \circ T)(\{\xi_k\}) &= (S \circ W_{\varphi,\psi}) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k h_k \right) \\
&= S \left(\psi \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (f_k \circ \varphi)(h_k \circ \varphi) \right) \\
&= \left\{ \frac{\psi(z_n) \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k f_k(\varphi(z_n)) h_k(\varphi(z_n))}{\psi(z_n) f_n(\varphi(z_n))} \right\} \\
&= \left\{ \frac{\xi_n f_n(\varphi(z_n))}{f_n(\varphi(z_n))} \right\} = \{\xi_n\}.
\end{aligned}$$

Es decir, $S \circ W_{\varphi,\psi} \circ T = Id_{c_0}$. Veamos en dos pasos que de esto se deduce que $W_{\varphi,\psi}$ es un isomorfismo sobre el subespacio isomorfo a c_0 generado por $\{f_k h_k : k \in \mathbb{N}\}$:

1. Sea $\{e_n\}$ la base canónica de c_0. Observemos que $T(e_n) = f_n h_n$. Ahora, probemos que $\{T(e_n)\}$ y $\{e_n\}$ son equivalentes, es decir, existen constantes p, $P > 0$ tales que para todo elemento $\{a_n\}$ de c_0 se tiene que

$$p \sup_n |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(e_n) \right\|_v \leq P \sup_n |a_n|.$$

Fijemos $N \in \mathbb{N}$. Por un lado,

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=1}^{N} a_n T(e_n) \right\|_v &= \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z) \left| \sum_{n=1}^{N} a_n \left(T(e_n)\right)(z) \right| \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}} v(z) \left| \sum_{n=1}^{N} a_n f_n(z) h_n(z) \right| \\
&\leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \sum_{n=1}^{N} |a_n| \, \|f_n\|_v \, |h_n(z)| \\
&\leq \left(\sup_n |a_n| \right) \sup_{z\in\mathbb{D}} \sum_{n=1}^{N} |h_n(z)| \\
&\leq M \sup_n |a_n| .
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sup_{n=1,\dots,N} |a_n| &= \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right\|_{c_0} = \left\| (S \circ W_{\varphi,\psi} \circ T) \left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right) \right\|_{c_0} \\
&\leq \|S\|_{H_w^0 \to c_0} \left\| (W_{\varphi,\psi} \circ T) \left(\sum_{n=1}^{N} a_n e_n \right) \right\|_w \\
&\leq \frac{2}{c} \left\| W_{\varphi,\psi} \left(\sum_{n=1}^{N} a_n T(e_n) \right) \right\|_w \\
&\leq \frac{2}{c} \|W_{\varphi,\psi}\| \left\| \sum_{n=1}^{N} a_n T(e_n) \right\|_v .
\end{aligned}$$

Además, se verifica que

$$\sum_{n=1}^{N} a_n T(e_n) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(e_n)$$

en H_v^0 y, por tanto,

$$p \sup_n |a_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(e_n) \right\|_v \leq P \sup_n |a_n| ,$$

siendo $P = M$ y $p = \frac{c}{2\|W_{\varphi,\psi}\|}$.

2. Análogamente se prueba que $\{W_{\varphi,\psi}(T(e_n))\}$ es equivalente a la base canónica de c_0.

De esta forma, el operador $W_{\varphi,\psi}$ actúa como un isomorfismo sobre el subespacio isomorfo a c_0 generado por la sucesión $\{f_n h_n : n \in \mathbb{N}\}$. ■

Corolario 4.16 *Sean v y w pesos típicos, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_w^0$ tales que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \longrightarrow H_w^0$ es continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \longrightarrow H_w^0$ es compacto;

(ii) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \longrightarrow H_w^0$ es débil compacto;

(iii) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \longrightarrow H_w^0$ es completamente continuo.

Demostración. (i) implica (ii) y (i) implica (iii) son inmediatos.

(ii) implica (i) y (iii) implica (i). Si suponemos que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^0 \longrightarrow H_w^0$ no es compacto, por el teorema anterior, existe un subespacio E isomorfo a c_0 tal que $W_{\varphi,\psi|E}$ es un isomorfismo. Puesto que c_0 no es reflexivo, $W_{\varphi,\psi|E}$ no es débil compacto. Además, puesto que la base canónica de c_0 converge a cero en la topología débil y no en la topología de la norma, los isomorfismos de c_0 no son completamente continuos. En particular, $W_{\varphi,\psi|E}$ no es completamente continuo. De esta forma, $W_{\varphi,\psi}$ no es ni débil compacto ni completamente continuo. Esto contradice (ii) y (iii). ■

De manera análoga a como se argumentó en la prueba del Teorema 4.15 obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.17 *Sean v y w pesos, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_w^\infty$. Supongamos que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_w^\infty$ es continuo. Entonces el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_w^\infty$ es compacto o un isomorfismo sobre un subespacio isomorfo a ℓ_∞.*

Corolario 4.18 *Sean v y w pesos, $\varphi \in \Phi$ y $\psi \in H_w^\infty$ tales que el operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_w^\infty$ es continuo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_w^\infty$ es compacto;

(ii) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_w^\infty$ es débil compacto;

(iii) El operador $W_{\varphi,\psi} : H_v^\infty \longrightarrow H_w^\infty$ *es completamente continuo.*

La equivalencia entre (i) y (ii) del corolario anterior fue obtenida por J. Bonet, P. Domański y M. Lindström para operadores de composición [8] y por M. D. Contreras y S. Díaz Madrigal para operadores de composición ponderados sobre H_∞ [15].

Merece la pena destacar que el espacio H_v^0 tiene la propiedad (V) (véase, por ejemplo, [34, Exercise III.1.4(i), Theorem III.3.4]). Esto es, para todo espacio de Banach Y, cada operador $T : H_v^0 \to Y$ es débil compacto o un isomorfismo sobre un subespacio isomorfo a c_0. Además, J. Bourgain obtuvo que H_∞ también tiene la propiedad (V) (véase [11]), pero no sabemos si H_v^∞ la tiene para todo peso v.

4.4 Operadores de composición en los espacios de tipo Bloch

Finalizamos el capítulo aplicando los resultados vistos en las secciones anteriores sobre la continuidad y compacidad de los operadores de composición ponderados sobre los espacios H_v^0 y H_v^∞ para estudiar estas mismas propiedades en los operadores de composición en los espacios de tipo Bloch $\mathcal{B}_p$ y $\mathcal{B}_p^0$ con $0 < p < \infty$.

Para poder aplicar los resultados anteriores, usaremos que para un cierto peso v los espacios H_v^∞ y H_v^0 son isométricos a un hiperplano de $\mathcal{B}_p$ y $\mathcal{B}_p^0$ respectivamente. Estos hiperplanos vienen dados por

$$\widetilde{\mathcal{B}}_p = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : f(0) = 0 \text{ y } \sup_{z \in \mathbb{D}} |f'(z)| \left(1 - |z|^2\right)^p < \infty \right\}$$

y

$$\widetilde{\mathcal{B}}_p^0 = \left\{ f \in H(\mathbb{D}) : f(0) = 0 \text{ y } \lim_{|z| \to 1} |f'(z)| \left(1 - |z|^2\right)^p = 0 \right\}.$$

Estos espacios también se denominan espacios de tipo Bloch en la literatura.

Consideremos el peso $v_p(z) = \left(1 - |z|^2\right)^p$ con $0 < p < \infty$. Obviamente, v_p es un peso típico. Además, vimos en el Ejemplo 1.14 que el peso v_p es esencial y que, de hecho, $\widetilde{v_p} = v_p$.

Obviamente el operador $\Phi_p : \widetilde{\mathcal{B}}_p \longrightarrow H_{v_p}^\infty$ dado por $\Phi_p(f) = f'$ es una isometría sobreyectiva y $\Phi_{p|\widetilde{\mathcal{B}}_p^0}$ también es una isometría sobreyectiva sobre $H_{v_p}^0$.

El siguiente lema es elemental y debe ser bien conocido. Incluimos su prueba ya que no hemos encontrado una referencia adecuada de él.

Lema 4.19 *Dado $\alpha \in \mathbb{D}$, el operador de composición $C_{\varphi_\alpha} : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_p$ es un isomorfismo, su inverso es $C_{\varphi_{-\alpha}}$ y $C_{\varphi_\alpha|\mathcal{B}_p^0}$ es también un isomorfismo sobre $\mathcal{B}_p^0$.*

Demostración. Haremos la prueba en el caso en que $0 < p \leq 1$. De forma análoga se hace cuando $p > 1$.

Obviamente $C_{\varphi_\alpha} : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_p$ es lineal. Además, teniendo en cuenta que

$$1 - |\varphi_\alpha(z)|^2 = \frac{\left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |\alpha|^2\right)}{|1 - \overline{\alpha} z|^2} = |\varphi_\alpha'(z)|\left(1 - |z|^2\right),$$

se sigue que

$$\begin{aligned}
\left\|C_{\varphi_\alpha}(f)\right\|_{\mathcal{B}_p} &= \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1 - |z|^2\right)^p \left|(f \circ \varphi_\alpha)'(z)\right| \qquad (4.9)\\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1 - |z|^2\right)^p |\varphi_\alpha'(z)|\, |f'(\varphi_\alpha(z))| \\
&= \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1 - |\varphi_\alpha(z)|^2\right)^p |f'(\varphi_\alpha(z))| \left(\frac{\left(1 - |\alpha|^2\right)}{|1 - \overline{\alpha} z|^2}\right)^{1-p} \\
&\leq \left(\frac{1 + |\alpha|}{1 - |\alpha|}\right)^{1-p} \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1 - |\varphi_\alpha(z)|^2\right)^p |f'(\varphi_\alpha(z))| \\
&\leq \left(\frac{1 + |\alpha|}{1 - |\alpha|}\right)^{1-p} \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(1 - |z|^2\right)^p |f'(z)| \\
&\leq \left(\frac{1 + |\alpha|}{1 - |\alpha|}\right)^{1-p} \|f\|_{\mathcal{B}_p}
\end{aligned}$$

para toda $f \in \mathcal{B}_p$. Más aún, como $C_{\varphi_\alpha} \circ C_{\varphi_{-\alpha}} = C_{\varphi_{-\alpha} \circ \varphi_\alpha}$ y

$$\begin{aligned}
\varphi_{-\alpha} \circ \varphi_\alpha(z) &= \varphi_{-\alpha}\left(\frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}\right) = \frac{\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z} + \alpha}{1 + \overline{\alpha}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}} \\
&= \frac{z - \alpha + \alpha(1 - \overline{\alpha} z)}{1 - \overline{\alpha} z + \overline{\alpha}(z - \alpha)} = z,
\end{aligned}$$

se deduce que $C_{\varphi_{-\alpha}}$ es el inverso de C_{φ_α}. Por otro lado, de igual manera que se ha hecho para C_{φ_α} se prueba que $C_{\varphi_{-\alpha}} : \mathcal{B}_p \to \mathcal{B}_p$ es continuo. Por tanto, $C_{\varphi_\alpha} : \mathcal{B}_p \to \mathcal{B}_p$ es un isomorfismo.

Para finalizar la demostración basta probar que $C_{\varphi_\alpha}(f) \in \mathcal{B}_p^0$ si $f \in \mathcal{B}_p^0$. Para ello fijemos $f \in \mathcal{B}_p^0$. Siguiendo los mismos pasos que los dados en (4.9), se obtiene que

$$\left(1-|z|^2\right)^p \left|(f\circ\varphi_\alpha)'(z)\right| \leq \left(\frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}\right)^{1-p} \left(1-|\varphi_\alpha(z)|^2\right)^p |f'(\varphi_\alpha(z))|$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Además, como φ_α es un automorfismo del disco, se cumple que $|\varphi_\alpha(z)| \to 1$ cuando $|z| \to 1$ y, por tanto,

$$\lim_{|z|\to 1} \left(1-|\varphi_\alpha(z)|^2\right)^p |f'(\varphi_\alpha(z))| = \lim_{|w|\to 1} \left(1-|w|^2\right)^p |f'(w)| = 0.$$

Así, se concluye que

$$\lim_{|z|\to 1} \left(1-|z|^2\right)^p \left|(f\circ\varphi_\alpha)'(z)\right| = 0. \blacksquare$$

Teorema 4.20 *Sean* $0 < p, q < \infty$ *y* $\varphi \in \Phi$. *Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

(*i*) *El operador* $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ *es continuo si, y sólo si,*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p} < \infty.$$

(*ii*) *Si* $q \geq p \geq 1$, *entonces* $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ *es siempre continuo.*

(*iii*) *El operador* $C_\varphi : \mathcal{B}_p^0 \longrightarrow \mathcal{B}_q^0$ *es continuo si, y sólo si,* $\varphi \in \mathcal{B}_q^0$ *y*

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p} < \infty.$$

(*iv*) *Si* $q \geq p \geq 1$, *entonces* $C_\varphi : \mathcal{B}_p^0 \longrightarrow \mathcal{B}_q^0$ *es continuo si, y sólo si,* $\varphi \in \mathcal{B}_q^0$.

Demostración. (*i*). Tomemos $\alpha = \varphi(0)$. Por el Lema 4.19, el operador $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ es continuo si, y sólo si, el operador $C_{\varphi_\alpha\circ\varphi} = C_\varphi \circ C_{\varphi_\alpha} : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ es continuo. Como $\varphi_\alpha \circ \varphi(0) = 0$, el operador $C_{\varphi_\alpha\circ\varphi}$ es continuo si, y sólo si, lo es $C_{\varphi_\alpha \circ \varphi|\tilde{\mathcal{B}}_p}$. Además, $C_{\varphi_\alpha \circ \varphi|\tilde{\mathcal{B}}_p}$ es continuo si, y sólo si, $\Phi_q \circ C_{\varphi_\alpha \circ \varphi|\tilde{\mathcal{B}}_p} \circ (\Phi_p)^{-1} : H_{v_p}^\infty \longrightarrow H_{v_q}^\infty$ es continuo. Pero,

$$\begin{aligned}
\Phi_q \circ C_{\varphi_\alpha \circ \varphi|\tilde{\mathcal{B}}_p} \circ (\Phi_p)^{-1} (f)(z) &= \Phi_q \circ C_{\varphi_\alpha \circ \varphi|\tilde{\mathcal{B}}_p} \left(\int_0^z f(w)\, dw \right) \\
&= \Phi_q \left(\int_0^{(\varphi_\alpha \circ \varphi)(z)} f(w)\, dw \right) \\
&= (\varphi_\alpha \circ \varphi)'(z) \left(f(\varphi_\alpha \circ \varphi) \right)(z) \\
&= W_{\varphi_\alpha \circ \varphi, (\varphi_\alpha \circ \varphi)'}(f)(z),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\Phi_q \circ C_{\varphi_\alpha \circ \varphi|\tilde{\mathcal{B}}_p} \circ (\Phi_p)^{-1} = W_{\varphi_\alpha \circ \varphi, (\varphi_\alpha \circ \varphi)'} : H_{v_p}^\infty \longrightarrow H_{v_q}^\infty.$$

Por otro lado, por la Proposición 4.1, este operador de composición ponderado es continuo si, y sólo si,

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} \left| (\varphi_\alpha \circ \varphi)'(z) \right| \frac{\left(1 - |z|^2\right)^q}{\left(1 - |(\varphi_\alpha \circ \varphi)(z)|^2\right)^p} < \infty. \tag{4.10}$$

En primer lugar, observemos que

$$1 - |(\varphi_\alpha \circ \varphi)(z)|^2 = \frac{\left(1 - |\varphi(z)|^2\right)\left(1 - |\alpha|^2\right)}{|1 - \overline{\alpha}\varphi(z)|^2}.$$

Además,

$$(\varphi_\alpha \circ \varphi)'(z) = \varphi'(z)\, \varphi_\alpha'(\varphi(z)) = \varphi'(z) \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha}\varphi(z))^2}.$$

Obtenemos así que

$$\begin{aligned}
&\left| (\varphi_\alpha \circ \varphi)'(z) \right| \frac{\left(1 - |z|^2\right)^q}{\left(1 - |(\varphi_\alpha \circ \varphi)(z)|^2\right)^p} = \qquad (4.11) \\
&= |\varphi'(z)| \frac{1 - |\alpha|^2}{|1 - \overline{\alpha}\varphi(z)|^2} \frac{\left(1 - |z|^2\right)^q |1 - \overline{\alpha}\varphi(z)|^{2p}}{\left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^p \left(1 - |\alpha|^2\right)^p} \\
&= |\varphi'(z)| \frac{\left(1 - |z|^2\right)^q}{\left(1 - |\varphi(z)|^2\right)^p} \left(\frac{1 - |\alpha|^2}{|1 - \overline{\alpha}\varphi(z)|^2} \right)^{1-p}.
\end{aligned}$$

Pero, por (4.11) y el hecho de que $0 < 1 - |\alpha| \leq |1 - \overline{\alpha}\varphi(z)| \leq 1 + |\alpha|$, la desigualdad (4.10) se verifica si, y sólo si,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p} < \infty.$$

(iii). Argumentando como en la prueba de (i), el operador $C_\varphi : \mathcal{B}_p^0 \longrightarrow \mathcal{B}_q^0$ es continuo si, y sólo si, el operador de composición ponderado $W_{\varphi_\alpha\circ\varphi,(\varphi_\alpha\circ\varphi)'} : H_{v_p}^0 \longrightarrow H_{v_q}^0$ es continuo siendo $\alpha = \varphi(0)$. Entonces, por la Proposición 4.2 y teniendo en cuenta los cálculos realizados en (i), la continuidad del operador equivale a que

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p} < \infty$$

y a que $(\varphi_\alpha \circ \varphi)' \in H_{v_q}^0$. Por tanto, para finalizar la prueba de la afirmación (iii), basta probar que $(\varphi_\alpha \circ \varphi)' \in H_{v_q}^0$ si, y sólo si, $\varphi \in \mathcal{B}_q^0$. Pero esto es inmediato ya que de la sobreyectividad de la isometría $\Phi_q : \widetilde{\mathcal{B}}_q^0 \to H_{v_q}^0$ se sigue que $(\varphi_\alpha \circ \varphi)' \in H_{v_q}^0$ si, y sólo si, $\varphi_\alpha \circ \varphi \in \widetilde{\mathcal{B}}_q^0$ y esto último equivale a que $\varphi \in \mathcal{B}_q^0$.

(ii) y (iv). Supongamos que $\varphi(0) = 0$. Entonces se verifica que $\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2} \leq 1$. Además, el Lema de Pick-Schwarz implica que $|\varphi'(z)| \leq \frac{1-|\varphi(z)|^2}{1-|z|^2}$ para todo z en $\mathbb{D}$. Luego,

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p} \leq \sup_{z\in\mathbb{D}} \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^{p-1} \left(1-|z|^2\right)^{q-p} \leq 1,$$

y aplicando (i) y (iii) finalizamos la prueba en este caso.

Si $\varphi(0) \neq 0$ entonces tomemos $\alpha = \varphi(0)$. Como $\varphi_\alpha \circ \varphi(0) = 0$, del caso anterior se sigue que el operador $C_{\varphi_\alpha\circ\varphi}$ está acotado. Finalizamos la prueba aplicando de nuevo el Lema 4.19. ■

La continuidad del operador $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_p$ ya fue estudiada por K. Madigan [58] cuando $p < 1$ y por K. Madigan y A. Matheson para el caso $p = 1$ [59].

Pasemos ahora al estudio de la compacidad. Antes de establecer el siguiente resultado tenemos que introducir alguna terminología. Dados dos espacios de Banach X e Y, con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente, denotamos por $X \oplus_1 Y$ al espacio de Banach $X \oplus Y$ dotado con la norma $\|(x,y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Lema 4.21 *Sean X e Y dos espacios de Banach con normas $\|\cdot\|_X$ y $\|\cdot\|_Y$ respectivamente. Si $S : X \longrightarrow X$ es un operador continuo y $K : Y \longrightarrow Y$ es un operador compacto, entonces*

$$\|S \oplus K\|_e = \|S\|_e ,$$

donde $S \oplus K : X \oplus_1 Y \longrightarrow X \oplus_1 Y$ se define como $(S \oplus K)(x,y) = (S(x), K(y))$.

Demostración. Sea $T : X \to X$ un operador compacto. Como $K : Y \to Y$ es también compacto, es inmediato comprobar que el operador $T \oplus K$ es compacto. Por tanto, se verifica que

$$\begin{aligned}\|S \oplus K\|_e &\leq \|S \oplus K - T \oplus K\| \\ &= \sup\{\|(S \oplus K - T \oplus K)(x,y)\| : \|(x,y)\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|(S - T)(x)\|_X : \|x\|_X \leq 1\} = \|S - T\| .\end{aligned}$$

Tomando ínfimo en T se concluye que $\|S \oplus K\|_e \leq \|S\|_e$. Probemos la otra desigualdad. Sea $P : X \oplus_1 Y \to X \oplus_1 Y$ un operador compacto. Es bien conocido que P tiene una expresión matricial de la forma

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{pmatrix}$$

donde $P_1 : X \to X$, $P_2 : Y \to X$, $P_3 : X \to Y$ y $P_4 : Y \to Y$ son operadores compactos. Entonces, teniendo en cuenta que

$$S \oplus K - P = \begin{pmatrix} S - P_1 & -P_2 \\ -P_3 & K - P_4 \end{pmatrix},$$

se verifica que

$$\begin{aligned}\|S\|_e &\leq \|S - P_1\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|(S - P_1)(x)\| \\ &\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|(S - P_1)(x)\| + \|-P_3(x)\|\} \\ &\leq \sup_{\|x\| + \|y\| \leq 1} \{\|(S - P_1)(x) - P_2(y)\| + \|-P_3(x) + (K - P_4)(y)\|\} \\ &= \|S \oplus K - P\| .\end{aligned}$$

Tomando ínfimo en P se concluye que $\|S\|_e \leq \|S \oplus K\|_e$. ■

Teorema 4.22 *Sean $0 < p, q < \infty$ y $\varphi \in \Phi$ tales que el operador $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ está acotado. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) Si $\varphi(0) = 0$, entonces la norma esencial de $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ viene dada por

$$\|C_\varphi\|_e = \lim_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p}.$$

(ii) El operador $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ es compacto si, y sólo si,

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p} = 0.$$

(iii) Si $q > p \geq 1$, entonces $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ es siempre compacto.

(iv) El operador C_φ o bien es compacto o un isomorfismo sobre un subespacio isomorfo a ℓ_∞.

Demostración. (i). Para poder aplicar los resultados de las secciones anteriores haremos uso de las isometrías $\Phi_p : \widetilde{\mathcal{B}}_p \to H^\infty_{v_p}$ introducidas al comienzo de esta sección. Previo a ello haremos una redución del problema a los espacios $\widetilde{\mathcal{B}}_p$. Observemos que el operador $\Psi_p : \widetilde{\mathcal{B}}_p \oplus_1 \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{B}_p$ dado por $\Psi_p(f, \lambda) = \lambda + f$ es una isometría. Así, como $\varphi(0) = 0$, para cada $f \in \widetilde{\mathcal{B}}_p$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned}\Psi_q^{-1} \circ C_\varphi \circ \Psi_p(f,\lambda) &= \Psi_q^{-1} \circ C_\varphi(f+\lambda) = \Psi_q^{-1}\left(C_\varphi(f) + \lambda\right)\\ &= \left(C_\varphi(f), \lambda\right).\end{aligned}$$

Luego, $\Psi_q^{-1} \circ C_\varphi \circ \Psi_p = C_{\varphi|\widetilde{\mathcal{B}}_p} \oplus Id_{\mathbb{C}}$. De esta forma, por el Lema 4.21, se tiene que

$$\|C_\varphi\|_e = \left\|\Psi_q^{-1} \circ C_\varphi \circ \Psi_p\right\|_e = \left\|C_{\varphi|\widetilde{\mathcal{B}}_p} \oplus Id_{\mathbb{C}}\right\|_e = \left\|C_{\varphi|\widetilde{\mathcal{B}}_p}\right\|_e.$$

Por otro lado, vimos en la demostración del Teorema 4.20 que

$$\Phi_q \circ C_{\varphi|\widetilde{\mathcal{B}}_p} \circ (\Phi_p)^{-1} = W_{\varphi,\varphi'} : H^\infty_{v_p} \longrightarrow H^\infty_{v_q}$$

(obsérvese que ahora $\alpha = 0$). Por consiguiente, se verifica que

$$\left\|C_{\varphi|\widetilde{\mathcal{B}}_p}\right\|_e = \left\|\Phi_q \circ C_{\varphi|\widetilde{\mathcal{B}}_p} \circ (\Phi_p)^{-1}\right\|_e = \|W_{\varphi,\varphi'}\|_e.$$

Finalmente, podemos aplicar el Teorema 4.10 y concluir que

$$\left\|W_{\varphi,\varphi'}\right\|_e = \lim_{r\to 1} \sup_{|\varphi(z)|>r} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p}.$$

(ii). Tomemos $\alpha = \varphi(0)$ y consideremos el operador de composición $C_{\varphi_\alpha \circ \varphi} : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$. Por el Lema 4.19, C_φ es compacto si, y sólo si, el operador $C_{\varphi_\alpha \circ \varphi}$ lo es. Por (i), el operador $C_{\varphi_\alpha \circ \varphi}$ es compacto si, y sólo si, se verifica que

$$\lim_{|\varphi_\alpha \circ \varphi(z)|\to 1} \left|(\varphi_\alpha \circ \varphi)'(z)\right| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|(\varphi_\alpha \circ \varphi)(z)|^2\right)^p} = 0. \tag{4.12}$$

Ahora bien, en (4.11) vimos que

$$\left|(\varphi_\alpha \circ \varphi)'(z)\right| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|(\varphi_\alpha \circ \varphi)(z)|^2\right)^p} = \frac{|\varphi'(z)|\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p} \left(\frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\varphi(z)|^2}\right)^{1-p}$$

y, como $\frac{1-|\alpha|}{1+|\alpha|} \le \frac{1-|\alpha|^2}{|1-\overline{\alpha}\varphi(z)|^2} \le \frac{1+|\alpha|}{1-|\alpha|}$, se sigue que (4.12) equivale a que

$$\lim_{|\varphi_\alpha \circ \varphi(z)|\to 1} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p} = 0. \tag{4.13}$$

Finalmente, como φ_α es un automorfismo del disco, se tiene que $|\varphi_\alpha \circ \varphi(z)| \to 1$ si, y sólo si, $|\varphi(z)| \to 1$. De esta forma, (4.13) equivale a

$$\lim_{|\varphi(z)|\to 1} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p} = 0.$$

(iii). Por el Teorema 4.20(ii), el operador $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_p$ está acotado. De esta forma, será suficiente probar que la inyección de $\mathcal{B}_q$ en $\mathcal{B}_p$ es compacta. Pero esta inyeción es trivialmente compacta pues puede ser vista como el operador de composición $C_\psi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ con la función $\psi(z) = z$. Y puesto que

$$\lim_{|\psi(z)|\to 1} |\psi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\psi(z)|^2\right)^p} = \lim_{|z|\to 1} \left(1-|z|^2\right)^{q-p} = 0,$$

C_ψ es compacto por el apartado (ii).

(iv). Si el operador C_φ no es compacto, entonces el operador $C_{\varphi_\alpha \circ \varphi|\tilde{\mathcal{B}}_p}$ tampoco puede serlo. Por tanto, el operador de composición ponderado

$$\Phi_q \circ C_{\varphi_\alpha \circ \varphi|\tilde{\mathcal{B}}_p} \circ (\Phi_p)^{-1} = W_{\varphi_\alpha \circ \varphi, (\varphi_\alpha \circ \varphi)'} : H_{v_p}^\infty \longrightarrow H_{v_q}^\infty$$

no es compacto y, por el Teorema 4.17, el operador $C_{\varphi_\alpha \circ \varphi|\tilde{\mathcal{B}}_p}$ debe ser un isomorfismo sobre un subespacio isomorfo a ℓ_∞. Pero entonces, C_φ tiene la misma propiedad. ■

La compacidad del operador $C_\varphi : \mathcal{B}_1 \longrightarrow \mathcal{B}_1$ fue estudiada por K. Madigan y A. Matheson [59]. Por otro lado, A. Montes Rodríguez [61] obtuvo la norma esencial del operador de composición definido sobre el espacio de Bloch. Destaquemos también que J. H. Shapiro obtuvo una caracterización diferente de la compacidad del operador de composición $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_p$, cuando $0 < p < 1$ (véase [82]).

Usando el Teorema 4.22 *(iv)* y con una prueba análoga a la realizada para el Corolario 4.16 se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.23 *Sean $0 < p, q < \infty$ y $\varphi \in \Phi$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) El operador $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ es compacto;

(ii) El operador $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ es débil compacto;

(iii) El operador $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_q$ es completamente continuo.

Cuando $0 < p < 1$, K. Madigan obtuvo en [58, Theorem B] que si $\lim_{|z|\to 1} |\varphi'(z)| \left(\frac{1-|z|^2}{1-|\varphi(z)|^2}\right)^p = 0$, entonces $C_\varphi : \mathcal{B}_p \longrightarrow \mathcal{B}_p$ es completamente continuo y dio un ejemplo donde no se verifica el recíproco (compárese con la afirmación *(ii)* del Teorema 4.22 y el corolario anterior). Además, la equivalencia entre *(i)* y *(ii)* fue obtenida para el caso $p = q = 1$ por P. Liu, E. Saksman y H.-O. Tylli [49, Corollary 5].

La prueba del Teorema 4.22 se puede adaptar para obtener el siguiente resultado.

Teorema 4.24 *Sean $0 < p, q < \infty$ y $\varphi \in \Phi$ tales que el operador C_φ : $\mathcal{B}_p^0 \longrightarrow \mathcal{B}_q^0$ es continuo. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

(*i*) *Si* $\varphi(0) = 0$, *la norma esencial de* $C_\varphi : \mathcal{B}_p^0 \longrightarrow \mathcal{B}_q^0$ *viene dada por*

$$\|C_\varphi\|_e = \lim_{r\to 1} \sup_{|z|\geq r} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p}.$$

(*ii*) *El operador* $C_\varphi : \mathcal{B}_p^0 \longrightarrow \mathcal{B}_q^0$ *es compacto si, y sólo si,*

$$\lim_{|z|\to 1} |\varphi'(z)| \frac{\left(1-|z|^2\right)^q}{\left(1-|\varphi(z)|^2\right)^p} = 0.$$

(*iii*) *Si* $q > p \geq 1$, *entonces* $C_\varphi : \mathcal{B}_p^0 \longrightarrow \mathcal{B}_q^0$ *es siempre compacto.*

(*iv*) *El operador* $C_\varphi : \mathcal{B}_p^0 \longrightarrow \mathcal{B}_q^0$ *o bien es compacto o un isomorfismo sobre un subespacio isomorfo a* c_0.

La compacidad del operador $C_\varphi : \mathcal{B}_1^0 \longrightarrow \mathcal{B}_1^0$ fue estudiada por K. Madigan y A. Matheson [59] y A. Montes-Rodríguez [61] calculó la norma esencial del operador de composición definido sobre el espacio pequeño de Bloch.

De nuevo, por el Teorema 4.24 (*iv*) e imitando la prueba del Corolario 4.16, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.25 *Sean* $0 < p, q < \infty$ *y* $\varphi \in \Phi$ *tales que* $\varphi \in \mathcal{B}_q^0$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *El operador* $C_\varphi : \mathcal{B}_p^0 \longrightarrow \mathcal{B}_q^0$ *es compacto;*

(*ii*) *El operador* $C_\varphi : \mathcal{B}_p^0 \longrightarrow \mathcal{B}_q^0$ *es débil compacto;*

(*iii*) *El operador* $C_\varphi : \mathcal{B}_p^0 \longrightarrow \mathcal{B}_q^0$ *es completamente continuo.*

La equivalencia entre (*i*) y (*ii*) ya fue obtenida por K. Madigan y A. Matheson [59] para el caso $p = q = 1$.

Para finalizar, nos gustaría volver a recordar que los resultados que acabamos de presentar en esta sección han sido generalizados recientemente para operadores de composición ponderados por S. Ohno, K. Stroethoff y R. Zhao [67]. También recientemente, B. D. MacCluer y R. Zhao [57] han estimado, y calculado en algunos casos, la norma esencial de los operadores de composición ponderados en los espacios de tipo Bloch.

Bibliografía

[1] J. M. Anderson, J. Clunie y Ch. Pommerenke, *On Bloch functions and normal functions*, J. Reine Angew. Math. **270** (1974), 12–37.

[2] S. C. Arora, M. Mukherjee y A. Panigrahi, *Weighted composition operators on the space $S^p(\mathbb{D})$*, Bull. Calcutta Math. Soc. **88** (1996), 151–154.

[3] K. R. M. Attele, *Multipliers of composition operators*, Tokyo J. Math. **15** (1992), 185–198.

[4] S. Axler, *Multiplication operators on Bergman spaces*, J. Reine Angew. Math. **336** (1982), 26–44.

[5] E. Berkson, *Composition operators isolated in the uniform operator topology*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 230–232.

[6] E. Berkson y H. Porta, *The groups of isometries on Hardy spaces of the n-ball and the polydisc*, Glasgow Math. J. **21** (1980), 199–204.

[7] K. D. Bierstedt, J. Bonet y J. Taskinen, *Associated weights and spaces of holomorphic functions,* Studia Math. **127** (1998), 137–168.

[8] J. Bonet, P. Domański y M. Lindström, *Essential norm and weak compactness of composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions,* Canad. Math. Bull. **42** (1999), 139–148.

[9] J. Bonet, P. Domański y M. Lindström, *Pointwise multiplication operators on weighted Banach spaces of analytic functions,* Studia Math. **137** (1999), 177–194.

[10] J. Bonet, P. Domański, M. Lindström y J. Taskinen, *Composition operators between weighted Banach spaces of analytic functions*, J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) **64** (1998), 101–118.

[11] J. Bourgain, *H^∞ is a Grothendieck space*, Studia Math. **75** (1983), 193–216.

[12] J. Bourgain, *New Banach space properties of the disc algebra and H^∞*, Acta Math. **152** (1984), 1–48.

[13] J. A. Cima, *The basic properties of Bloch functions*, Internat. J. Math. Math. Sci. **2** (1979), 369–413.

[14] J. A. Cima y A. Matheson, *Completely continuous composicion operators,* Trans. Amer. Math. Soc. **344** (1994), 849–856.

[15] M. D. Contreras y S. Díaz-Madrigal, *Compact-type operators defined on H^∞*, Contemp. Math. **232** (1999), 111–118.

[16] M. D. Contreras y A. G. Hernández-Díaz, *Weighted composition operators in weighted Banach spaces of analytic functions,* J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) **69** (2000), 41–60.

[17] M. D. Contreras y A. G. Hernández-Díaz, *Weighted composition operators on Hardy spaces,* J. Math. Anal. Appl. **263** (2001), 224–233.

[18] M. D. Contreras y A. G. Hernández-Díaz, *Weighted composition operators between different Hardy spaces,* aparecerá en Integral Equations Operator Theory.

[19] C. C. Cowen, *Subnormality of the Cesàro operator and a semigroup of composition operators*, Indiana Univ. Math. J. **33** (1984), 305–318.

[20] C. C. Cowen y B. D. McCluer, *Composition operators on spaces of analytic functions,* CRS Press, Boca Raton, 1995.

[21] E. Diamantopoulos y A. G. Siskakis, *Composition operators and the Hilbert matrix*, Studia Math. **140** (2000), 191–198.

[22] S. Díaz, *Weak compactness in $L^1(\mu, X)$*, Proc. Amer. Math. Soc. **124** (1996), 2685–2693.

[23] J. Diestel, *Sequences and series in Banach spaces,* Grad. Texts in Math. **92,** Springer-Verlag, Nueva York, 1984.

[24] N. Dunford y J. T. Schwartz, *Linear operators, Part I: General theory,* Wiley-Interscience, Nueva York, Chichester, Brisbane, 1988.

[25] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces*, Academic Press, Nueva York, 1970.

[26] M. Engliš, *A class of weighted composition operators on H^2*, Časopis Pěst. Mat. **115** (1990), 405–423.

[27] N. S. Feldman, *Pointwise multipliers from the Hardy space to the Bergman space*, Illinois J. Math. **43** (1999), 211–221.

[28] S. D. Fisher, *Function theory in planar domains. A second course in complex analysis,* Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience Publication, Nueva York, 1983.

[29] K. Floret, *Weakly compact sets*, Lecture Notes in Math. **801**, Springer-Verlag, Berlín, 1980.

[30] F. Forelli, *The isometries on H^p*, Canad. J. Math. **16** (1964), 721–728.

[31] J. B. Garnett, *Bounded analytic functions*, Academic Press, Nueva York, 1981.

[32] T. E. Goebeler, *Composition operators acting between Hardy spaces,* Integral Equations Operator Theory **41** (2001), 389–395.

[33] P. R. Halmos, *Measure theory*, Grad. Texts in Math. **18**, Springer-Verlag, Nueva York, 1974.

[34] P. Harmand, D. Werner y W. Werner, *M-ideals in Banach spaces and Banach algebras,* Lecture Notes in Math. **1547**, Springer-Verlag, Berlín, 1993.

[35] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1962.

[36] W. E. Hornor y J. E. Jamison, *Properties of isometry-inducing maps of the unit disc*, Complex Variables Theory Appl. **38** (1999), 69–84.

[37] T. Hosokawa, K. Izuchi y D. Zheng, *Isolated points and essential components of composition operators on H^∞*, aparecerá en Proc. Amer. Math. Soc.

[38] H. Hunziker y H. Jarchow, *Composition operator which improve integrability*, Math. Nachr. **152** (1991), 83–99.

[39] H. Jarchow, *Compactness properties of composition operators*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. **56** (1998), 91–97.

[40] N. J. Kalton, *Spaces of compact operators*, Math. Ann. **208** (1974), 267–278.

[41] N. J. Kalton y D. Werner, *Property* (M), M*-ideals, and almost isometric structure of Banach spaces*, J. Reine Angew. Math. **461** (1995), 137–178.

[42] H. Kamowitz, *The spectra of a class of operators on the disc algebra*, Indiana Univ. Math. J. **27** (1978), 581–610.

[43] H. Kamowitz, *Compact operators of the form* uC_φ, Pacific J. Math. **80** (1979), 205–211.

[44] S. V. Kisliakov, *Interpolation of* H^p*-spaces: some recent developments*, Israel Math. Conf. Proc., **13**, Bar-Iland Univ., Ramat Gan, 1999, 102–140.

[45] C. J. Kolaski, *Isometries of Bergman spaces over bounded Runge domains*, Canad. J. Math. **33** (1981), 1157–1164.

[46] C. J. Kolaski, *Isometries of weighted Bergman spaces*, Canad. J. Math. **34** (1982), 910–915.

[47] P. Koosis, *Introduction to* H_p *spaces, second edition*, Cambridge Tracts. in Math. **115**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[48] J. E. Littlewood, *On inequalities in the theory of functions*, Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1925), 481–519.

[49] P. Liu, E. Saksman y H.-O. Tylli, *Small composition operators on analytic vector-valued function spaces*, Pacific J. Math. **184** (1998), 295–309.

[50] W. Lusky, *On the structure of* $H_{v_0}(D)$ *and* $h_{v_0}(D)$, Math. Nachr. **159** (1992), 279–289.

[51] W. Lusky, *On weighted spaces of harmonic and holomorphic functions,* J. London Math. Soc. (2) **51** (1995), 309–320.

[52] V. Matache, *Composition operators on Hardy spaces of a half-plane,* Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1483–1491.

[53] B. D. MacCluer, *Compact composition operators on $H^p(B_N)$*, Michigan Math. J. **32** (1985), 237–248.

[54] B. D. MacCluer, *Composition operators on S^p*, Houston J. Math. **13** (1987), 245–254.

[55] B. D. MacCluer, *Components in the space of composition operators,* Integral Equations Operator Theory **12** (1989), 725–738.

[56] B. D. MacCluer, S. Ohno y R. Zhao, *Topological structure of the space of composition operators on H^∞*, Integral Equations Operator Theory **40** (2001), 481–494.

[57] B. D. MacCluer y R. Zhao, *Essential norm of weighted composition operators between Bloch-type spaces*, por aparecer.

[58] K. Madigan, *Composition operators on analytic Lipschitz spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), 465–473.

[59] K. Madigan y A. Matheson, *Compact composition operators on the Bloch space*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), 2679–2687.

[60] G. Mirzakarimi y K. Seddighi, *Weighted composition operators on Bergman and Dirichlet spaces,* Georgian Math. J. **4** (1997), 373–383.

[61] A. Montes-Rodríguez, *The essential norm of a composition operator on Bloch spaces,* Pacific J. Math. **188** (1999), 339–351.

[62] A. Montes-Rodríguez, *Weighted composition operators on weighted Banach spaces of analytic functions,* J. London. Math. Soc. (2) **61** (2000), 872–884.

[63] J. Moorhouse y C. Toews, *A note on differences of composition operators*, por aparecer.

[64] E. A. Nordgren, *Composition operators*, Canad. J. Math. **20** (1968), 442–449.

[65] S. Ohno, *Weighted composition operators between H^∞ and the Bloch space*, Taiwanese J. Math. **5** (2001), 555–563.

[66] S. Ohno y K. Stroethoff, *Weighted composition operators into Bloch spaces*, por aparecer.

[67] S. Ohno, K. Stroethoff y R. Zhao, *Weighted composition operators between Bloch-type spaces*, por aparecer.

[68] S. Ohno y H. Takagi, *Some properties of weighted composition operators on algebras of analytic functions*, J. Nonlinear Convex Anal. **2** (2001), 369–380.

[69] S. Ohno y R. Zhao, *Weighted composition operators on the Bloch space*, Bull. Austral. Math. Soc. **63** (2001), 177–185.

[70] V. Pták, *Isometries in H^2, generating functions and extremal problems,* Časopis Pěst. Mat. **110** (1985), 33–57.

[71] R. Roan, *Composition operators on the space of functions with H^p-derivative*, Houston J. Math. **4** (1978), 423–438.

[72] L. A. Rubel y A. L. Shields, *The second duals of certain spaces of analytic functions,* J. Austral. Math. Soc. **11** (1970), 276–280.

[73] W. Rudin, *Análisis Real y Complejo,* Ed. Alhambra, Madrid, 1979.

[74] D. Sarason, *Weak compactness of holomorphic composition operators in H^1*, Funcional Analysis and Operator Theory (New Delhi, 1990), 75–79, Springer-Verlag, Berlín, 1992.

[75] G. Schlüchtermann, *Weak Cauchy sequences in $L_\infty(\mu, X)$*, Studia Math. **116** (1995), 271–281.

[76] A. I. Shakhbazov, *The spectrum of a compact weighted composition operator in some Banach spaces of holomorphic functions*, J. Soviet Math. **48** (1990), 696–701.

[77] A. I. Shakhbazov y Y. N. Dehghan, *Compactness and nuclearity of weighted composition operators on uniform spaces*, Bull. Iranian Math. Soc. **23** (1997), 49–62.

[78] S. D. Sharma, *Compact and Hilbert-Schmidt composition operators on Hardy spaces of the upper half-plane*, Acta. Sci. Math. (Szeged) **46** (1983), 197–202.

[79] S. D. Sharma y R. Kumar, *Compact composition operators and Carleson measure in the upper half-plane*, Extracta Math. **15** (2000), 175–180.

[80] S. D. Sharma y R. K. Singh, *Composition operators on a functional Hilbert space*, Bull. Austral. Math. Soc. **20** (1979), 377–384.

[81] S. D. Sharma y R. K. Singh, *Non-compact composition operators*, Bull. Austral. Math. Soc. **21** (1980), 125–130.

[82] J. H. Shapiro, *Compact composition operators on spaces of boundary-regular holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 49–57.

[83] J. H. Shapiro, *Composition operators and classical function theory*, Springer-Verlag, Nueva York, 1993.

[84] J. H. Shapiro y C. Sundberg, *Isolation amongst the composition operators*, Pacific J. Math. **145** (1990), 117–152.

[85] R. K. Singh, *A relation between composition operators on $H^2(D)$ and $H^2(\pi^+)$*, Pure Appl. Math. Sci. **1** (1974), 1–5.

[86] A. G. Siskakis, *Composition semigroups and the Cesàro operator on H^p*, J. London Math. Soc. (2) **36** (1987), 153–164.

[87] A. G. Siskakis, *Semigroups of composition operators on spaces of analytic functions, a review*, Contemp. Math. **213** (1996), 229–252.

[88] H. Takagi, *Compact weighted composition operators on function algebras*, Tokyo J. Math. **11** (1988), 119–128.

[89] D. Vukotić, Pointwise multiplication operators between Bergman spaces on simply connected domains, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 793–803.

[90] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **25**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[91] K. Zhu, *Bloch type spaces of analytic functions,* Rocky Mountain J. Math. **23** (1993), 1143–1177.

[92] K. Zhu, *Reducing subspaces for a class of multiplication operators,* J. London Math. Soc. (2) **62** (2000), 553–568.

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Reunido el Tribunal integrado por los abajo firmantes en el día de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de D. Alfredo García Hernández Díaz

titulada Operadores de Composición Ponderados en Espacios de Funciones Analíticas

acordó otorgarle la calificación de Sobresaliente cum Laude por unanimidad

Sevilla, 24 de Junio de 2002

El Vocal, El Vocal, El Vocal,

El Presidente El Secretario, El Doctorado,