

21.744

LBS 1005954

043  
143

BA

# UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada II

al Sr. D. 170 62  
 en Sevilla, **28 ABR. 1997**  
 El Jefe del Departamento de Matemática Aplicada II  
*Francisco A. Ortega Riejos*

## LOCALIZACIÓN

Y

## TRAZADO DE REDES

**Francisco A. Ortega Riejos**

*Francisco A. Ortega Riejos*

Sevilla, abril de 1997.

**Memoria de Tesis** presentada por  
**Francisco A. Ortega Riejos**  
para optar al grado de  
**Doctor en Matemáticas**  
por la Universidad de Sevilla

**Sevilla, abril de 1997.**

**D. Juan A. Mesa López-Colmenar**, Catedrático de Universidad del  
Departamento de Matemática Aplicada II de la Universidad de Sevilla,

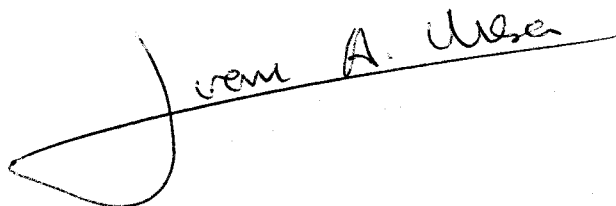
**CERTIFICA:**

Que la presente memoria titulada

**LOCALIZACIÓN Y TRAZADO DE REDES**

ha sido realizada bajo su dirección por el licenciado en Ciencias Matemáticas  
**Francisco Alonso Ortega Riejos** y constituye su tesis para optar al  
grado de **Doctor en Matemáticas** por la Universidad de Sevilla.

Vº Bº  
del Director de Tesis

A handwritten signature in black ink, reading "Juan A. Mesa". The signature is written in a cursive style and is positioned above a horizontal line that extends across the width of the signature.

**Fdo. Dr. D. Juan A. Mesa López-Colmenar**  
Catedrático de Universidad  
del Departamento de Matemática Aplicada II  
de la Universidad de Sevilla

Sevilla, abril de 1997.

## Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento hacia el profesor Dr. D. Juan A. Mesa López-Colmenar, por su sabia dirección y ayuda incondicional.

Quisiera también hacer constar mi gratitud hacia mis compañeros del Departamento de Matemática Aplicada I, por el continuo apoyo que han venido demostrándome. Especialmente al profesor D. Fernando Muñoz Ortega, por la paciencia y estímulo que me ha dedicado.

Deseo resaltar la comprensión y el aliento recibido por mi esposa, mis hijas, Lucía y Ana, mis padres y mis suegros, mis hermanos, Inmaculada y Pepe, y el resto de mi familia y amigos.

A todos MUCHAS GRACIAS.

Dedicado a:

*mi esposa* **REYES**

*mis padres* **FRANCISCO y CHARO**

*y mis hijas* **LUCÍA y ANA.**

# ÍNDICE

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Introducción</b> .....  | <b>1</b>  |
| <b>1 Medición de distancias de viaje</b> .....   | <b>5</b>  |
| 1.1 Normas y calibradores .....  | 5         |
| 1.2 Descripción de distancias en una red .....   | 13        |
| 1.3 Sesgos de las funciones $l_p$ , $p \in (0, \infty]$ .....  | 17        |
| 1.4 Estimación de distancias de viaje en una red plana .....   | 23        |
| <b>2 Un calibrador plano asociado a cada norma <math>l_p</math>, <math>p \in [1, 2)</math></b> ..... | <b>27</b> |
| 2.1 Norma asociada a una red densa $\phi$ -deformada .....   | 27        |
| 2.2 Interpolación de los sesgos en la malla básica $\phi$ -deformada .....                           | 32        |
| 2.3 Funciones $l_p$ , $p \in (0, 2)$ inducidas por los $\phi$ -sesgos .....                          | 35        |
| 2.4 Aproximación numérica del $p$ -sesgo mediante $\phi$ -sesgos .....                               | 39        |
| 2.5 Error de aproximación para $p \in [1, 2)$ .....  | 42        |
| 2.6 Comparación de aproximaciones. ....  | 56        |
| <b>3 Generalización <math>N</math>-dimensional</b> .....   | <b>61</b> |
| 3.1 Poliedros básicos en $\mathbb{R}^N$ .....  | 61        |
| 3.2 Aproximación en $\mathbb{R}^N$ del $p$ -sesgo mediante $\phi$ -sesgos .....                      | 70        |
| 3.3 El caso tridimensional .....   | 74        |
| <b>4 Modelación de distancias sobre una red plana</b> .....  | <b>81</b> |
| 4.1 Introducción .....   | 81        |
| 4.2 Una característica geométrica .....  | 84        |
| 4.3 Ajuste de la nube de puntos .....  | 87        |
| 4.4 Mezcla de los estimadores parciales .....  | 99        |
| 4.5 Ejemplos comparativos .....  | 100       |
| 4.6 Mezcla de estimadores basada en distancia esperada .....   | 108       |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>5</b> | <b>Trazado de una red plana sesgada en la norma <math>l_p</math>, <math>p \in [1, 2]</math> ....</b> | <b>113</b> |
| 5.1      | Introducción .....   | 113        |
| 5.2      | Asignación de refracciones a las funciones $l_p$ .....   | 114        |
| 5.3      | Determinación de una red aproximadamente $(p, q)$ -sesgada .....                                     | 122        |
| 5.4      | Determinación de una red aproximadamente $p$ -sesgada .....  | 125        |
| 5.5      | Un ejemplo que evalúa ambos diseños .....  | 127        |
| <b>6</b> | <b>Programación lineal aproximada en el problema de Weber</b>  |            |
|          | <b>con normas <math>l_p</math>, <math>p \in [1, 2)</math> .....</b>                                  | <b>129</b> |
| 6.1      | El problema 1-mediana .....  | 129        |
| 6.2      | Linealización y cuasilinealización .....   | 131        |
| 6.3      | Caracterización de óptimo .....  | 131        |
| 6.4      | Polaridad en las $\phi$ -normas .....  | 137        |
| 6.5      | Discretización aproximada en $\mathbb{R}^2$ .....  | 140        |
| 6.6      | Programación lineal aproximada .....   | 143        |
| 6.7      | Un ejemplo .....   | 151        |
|          | <b>Referencias .....</b>   | <b>153</b> |

# Introducción

El objetivo fundamental de los problemas de localización es determinar la posición de uno o más servidores con objeto de satisfacer la demanda de un conjunto de usuarios de forma que se optimicen medidas de la calidad del servicio.

En una gran cantidad de problemas de localización se asume que la demanda se sitúa en un conjunto discreto de puntos y que el servicio tiene una extensión lo suficientemente pequeña como para suponerlo también puntual.

Cuando los demandantes y los servidores puedan ubicarse en cualquier lugar, se dice que el modelo de localización es *continuo* y, dependiendo de los condicionantes del problema, se selecciona un *espacio ambiente continuo*, como pueden ser entre otros  $\mathbb{R}^2$  o  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 3$ ), donde modelizar matemáticamente el proceso de resolución.

Un espacio ambiente tipo grafo puede ser aproximado por el modelo continuo cuando el número de nodos y aristas sea grande. De esta forma, los recursos matemáticos habituales de la localización continua (*análisis, geometría, y programación lineal y no-lineal*) también se emplean como aproximación en los modelos discretos.

La interacción entre la demanda y el servicio suele formularse en términos económicos donde la distancia entre puntos es una componente esencial para la modelización del coste de interacción.

La forma más común de medir o estimar tiempos o distancias de viaje entre puntos de demanda y servicios consiste en utilizar alguna función matemática de sus coordenadas. En  $\mathbb{R}^N$  ( $N \geq 2$ ), la evaluación de las distancias de viaje se realiza en muchos contextos mediante una métrica inducida por una norma. Las normas con mayor presencia en la literatura de localización son la norma *euclídea*  $l_2$  (empleada en ambientes donde los desplazamientos son isotrópicos) y la norma *rectangular*  $l_1$  (usada al modelizar viajes cuyos trayectos son paralelos a los ejes coordenados). Ambas forman parte de la familia de funciones  $l_p$ ,  $p \in [1, \infty]$  que han sido frecuentemente utilizadas (junto al caso hiperrectilineal  $l_p$ ,  $p \in (0, 1)$ ) como estimadoras de las distancias reales existentes entre pares de puntos de un área plana de transporte. En dicha familia, las obtenidas para  $p \in (1, \infty)$  forman parte del conjunto de *normas circulares*, caracterizado por la diferenciabilidad de la frontera de la bola unidad asociada, mientras que los casos  $p = 1$  y  $p = \infty$



corresponden al de las *normas bloque*  $\|\cdot\|_B$  inducidas por un politopo  $B$  convexo y simétrico.

La adecuación del modelo continuo de localización a la realidad ha motivado otras generalizaciones de las normas bloque como son los *calibradores* (que permiten modelizar problemas con distancias asimétricas, ver Durier y Michelot [1986]) y los *calibradores sesgados* (ver Plastria [1993 b]).

Si la frontera diferenciable de una determinada norma circular se rectifica a trozos manteniendo la simetría en la partición, se obtiene la bola unidad correspondiente a una norma bloque. El grado de aproximación entre los valores de dicha norma bloque y los de la norma circular dependerá de la densidad de la discretización (*densidad* de las normas bloque en el conjunto de todas las normas).

El *problema de Fermat-Weber* en  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 2$ , consiste en encontrar un punto de  $\mathbb{R}^N$  que minimice la suma de distancias ponderadas a un conjunto de  $n \geq 3$  puntos de demanda (destinos)  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Formalmente

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \sum_{i=1}^n \omega_i d_i(\mathbf{x}, v_i)$$

donde las ponderaciones  $\omega_i$  transforman las distancias  $d_i(\mathbf{x}, v_i)$  en costes de desplazamiento; cuando el servicio a localizar se considera *atractivo*, dichos pesos habitualmente se formulan como escalares positivos  $\omega_i > 0$ .

Si bien la definición de distancia empleada entre el servicio y la demanda puede variar según el destino que se considere, la forma estándar del problema continuo de Fermat-Weber se formula sobre un único espacio métrico, por lo que la medida de distancia adoptada es global para todo el espacio ambiente.

La metodología de resolución del problema continuo de Fermat-Weber dependerá del tipo de distancia considerado. Cuando se trata de normas circulares, por ejemplo  $l_p$ ,  $p \in (1, \infty)$ , se emplean métodos iterativos de programación diferenciable convexa similares al establecido por Weiszfeld en 1936 (actualmente vive en los EEUU y publica con el nombre de Andrew Vasznyi), mientras que si se modeliza el problema con normas bloque, entre ellas  $l_1$  y  $l_\infty$ , entonces la búsqueda del óptimo puede llevarse a cabo mediante programación no diferenciable, incluyendo la programación lineal.

La *densidad* de las normas bloque en el conjunto de las normas  $l_p$ ,  $p \in (1, \infty)$ , permitiría formular problemas aproximados de Fermat-Weber usando una y otra definición de distancia. Así, la solución exacta obtenida mediante programación lineal, en el caso de la norma bloque, aproximaría a la solución del problema planteado con la norma circular. Para conseguir una aproximación aceptable, se necesitaría una partición numerosa en la frontera de la bola unidad asociada a la norma  $l_p$ , lo que, desgraciadamente, supondría un elevado tiempo de computación.

La *estimación de distancias de viaje* consiste en determinar, a partir de muestras, una función real sobre el plano que, aplicada a las coordenadas de los puntos de una zona de transporte, reproduzca de forma aproximada la distancia entre ellos sobre la red existente. Si la función obtenida es fiable, el modelo continuo que

emplea al estimador como medida de distancia aproximará al modelo discreto y, adicionalmente, aportará información sobre la disponibilidad de caminos de la zona.

La búsqueda de aproximantes fiables de las distancias de viaje ha sido insistente en los últimos años. En el contexto 2-dimensional, se han ensayado varios tipos de funciones biparamétricas convexas sometidas a criterios de minimización global de errores y se ha comprobado empíricamente su adecuación en áreas de transporte con y sin barreras. Los resultados ponen de manifiesto que las normas bloque generadas a partir de polítopos  $B$  cuya totalidad de vértices se hallan sobre la circunferencia unidad, y las funciones  $\tau l_p$  (donde  $\tau > 0$  es un factor de inflación que simula el alargamiento de los viajes debido a las adversidades orográficas) son los mejores estimadores.

Un aspecto poco tratado en teoría de localización es, en cierta forma, el inverso del problema de la búsqueda de un estimador asociado a una red dada, y que se podría enunciar como sigue:

*Dado un conjunto  $V$  de  $n \geq 3$  puntos del plano, determinar una red que conecte dichos puntos mediante caminos cuyas valoraciones se aproximen numéricamente usando un estimador  $l_p$ ,  $p \in [1, 2]$ , previamente fijado.*

Si la norma euclídea  $l_2$  fuera la función que tuviera que describir las distancias en la red entre cualquier par origen-destino del conjunto  $V$ , entonces los puntos tendrían que interconectarse necesariamente mediante segmentos rectilíneos, dando lugar a un grafo completo.

Si el descriptor de distancias de viaje previsto fuera la norma rectangular  $l_1$  entonces por cada vector origen-destino, que no fuera paralelo a los ejes coordenados, habría una infinidad de formas de alargar el camino haciendo coincidir la distancia en la red con el valor de  $l_1$ . Para mantener la unicidad en el patrón de diseño que goza la norma euclídea añadiremos dos restricciones: el camino que conecte cada par deberá ser poligonal y el número de codos será como máximo uno. Estas restricciones no excluyen el caso euclídeo antes comentado, y dan lugar a una pauta geométrica única para la construcción de la red: una malla rectangular que situara los puntos de  $V$  en las intersecciones de sus caminos rectilíneos.

La limitación del número de codos es una restricción habitual en el diseño de circuitos VSLI, en robótica y en el trazado de caminos entre obstáculos.

La norma  $l_1$  forma parte de la familia  $\mathcal{F}$  de normas bloque obtenidas a partir de un polítopo simétrico  $B_\phi$  de cuatro vértices situados sobre la circunferencia unidad, en las direcciones  $\theta = 0, \phi, \pi$  y  $\pi + \phi$ . Un vector de posición que apunte hacia cualquiera de estos vértices indicará una *dirección privilegiada (fundamental)*, ya que los desplazamientos con dicha inclinación se comportarían euclídeamente. Empleando caminos poligonales de direcciones privilegiadas exclusivamente, se puede lograr una *red regular* que conecte los puntos de  $V$  entre sí y conserve a la norma bloque inducida por  $B$  como función descriptora de las distancias sobre la red.

La característica diferenciadora en la familia  $\mathcal{F}$  es el ángulo  $\phi \in (0, \pi/2]$  entre dos de las direcciones fundamentales. Dicho ángulo aparece, junto con su suplementario, en los desvíos de trayectoria que se dan en cada codo de la red cuyas distancias son medibles con  $\|\cdot\|_B$ .

En esta memoria se investiga la aproximación entre cada norma  $l_p$ ,  $p \in [1, 2)$  y una cierta norma bloque  $\|\cdot\|_B$  caracterizada por el ángulo  $\phi \equiv \phi(p) \in (0, \pi/2]$ . La relación obtenida entre ambas permitirá:

(1) Resolver el problema del trazado de una red plana cuyas distancias sean estimables utilizando como función a  $l_p$ ,  $p \in [1, 2)$ .

(2) Abordar el problema de Fermat-Weber en el plano con distancias  $l_p$ ,  $p \in (1, 2)$ , mediante una aproximación resuelta con programación lineal.

Adicionalmente:

(3) Establecer la conexión existente entre los estimadores planos *estadísticamente superiores* de las familias  $\tau l_p$  y  $\tau \|\cdot\|_B$ .

(4) Verificar que la relación entre norma bloque y norma  $l_p$ ,  $p \in (1, 2)$  se mantiene en espacios  $N$ -dimensionales ( $N \geq 3$ ).

El **capítulo 1** se dedica a la descripción y estimación de distancias de viaje en una red plana. Especial relevancia tiene el concepto de *p-sesgo* y su aplicación en la noción de *preferencia*.

En el **capítulo 2** se establece la relación entre un calibrador plano y un par de funciones  $l_p$  y  $l_q$ , donde  $p \in [1, 2)$  y  $q \in (0, 1]$ , encontrándose una expresión algebraica, que asocia los valores de  $p$  y  $q$ . Se concluye el capítulo con el estudio del error de aproximación.

Se comprueba en el **capítulo 3** que la relación entre el índice  $p \in [1, 2)$  y el ángulo  $\phi(p)$  se generaliza a  $\mathbb{R}^N$ , obteniéndose las correspondientes fórmulas de aproximación.

El **capítulo 4** se dedica a la creación de una metodología de estimación que relacione regresión cuadrática y aproximación con normas bloque y normas  $l_p$ . Las muestras se estratificarán para conseguir estimadores parciales que, posteriormente, se mezclarán bajo hipótesis de uniformidad. Una nueva hipótesis sobre la distribución poblacional de los sesgos se efectuará, comprobándose empíricamente su adecuación.

En el **capítulo 5** se analiza el problema variacional que da lugar a que el diseño óptimo, para conectar dos puntos mediante poligonales y un sólo codo, tenga un desvío de trayectoria de ángulo  $\phi(p)$ . Completando el capítulo, se establecen algoritmos para la determinación de redes regulares con sesgos prefijados en la familia  $l_p$ ,  $p \in (0, 2)$ .

Un método exacto que proporciona una solución aproximada al problema de Weber generalizado se detalla en el **capítulo 6** tras analizar el algoritmo de Weiszfeld para normas  $l_p$ ,  $p \in (1, 2)$ . Este método, basado en programación lineal, consigue una rápida convergencia hacia la solución óptima en las primeras iteraciones, para después inmovilizarse en un entorno cercano a dicho óptimo.

# Capítulo 1

## Medición de distancias de viaje

### 1.1. NORMAS Y CALIBRADORES.

#### Métricas y cuasi-métricas.

##### Definición 1.1

Dado un conjunto  $\Omega$  no vacío, cuyos elementos denominaremos puntos, diremos que la aplicación  $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una *métrica* si  $\forall x, y \in \Omega$  se verifican las propiedades:

- (D1)  $d(x, y) \geq 0$ .
- (D2)  $d(x, x) = 0$ .
- (D3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ,  $\forall z \in \Omega$ .
- (D4)  $d(x, y) = 0$  implica  $x = y$ .
- (D5)  $d(x, y) = d(y, x)$ .

Muchos modelos teóricos de localización emplean como medida de distancia a una métrica. En ellos se asume que dos puntos que estén a distancia cero son el mismo (propiedades (D1), (D2) y (D4)), y que el camino más corto para ir de un punto a otro no requiere puntos intermedios (propiedad (D3) o *desigualdad triangular*). De las propiedades anteriores, la etiquetada (D5) o *ley de simetría* es la menos realista, debido a que numerosos contextos de localización la niegan.

Tomando la definición de métrica como final de un proceso de refinamiento, se destacan los siguientes estadios de otros posibles intermedios (ver Plastria [1992]).

##### Definición 1.2 (Witzgall [1964]).

Una *métrica débil* es toda aplicación  $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que  $\forall x, y \in \Omega$  verifica las propiedades:

- (D1)  $d(x, y) \geq 0$ .
- (D2)  $d(x, x) = 0$ .
- (D3)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ ,  $\forall z \in \Omega$ .

**Definición 1.3** (Witzgall [1964]).

Diremos que la métrica débil es una *cuasi-métrica* si además de (D1),(D2) y (D3), se verifica:

$$(D4) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \text{ implica } \mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Nótese que en la axiomática de una cuasi-métrica se prescinde de la simetría.

**Métricas generadas por normas.**

Supongamos en lo que sigue que el espacio ambiente  $\Omega$  es un espacio vectorial real de dimensión  $N$ , y por tanto isomorfo a  $\mathbb{R}^N$ .

**Definición 1.4**

Toda aplicación  $\| \cdot \|: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  que verifique las propiedades  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ :

$$(N1) \quad \| \mathbf{x} \| \geq 0.$$

$$(N2) \quad \| \mathbf{x} \| = 0 \text{ si y sólo si } \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

$$(N3) \quad \| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| \leq \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$$

$$(N4) \quad \| \lambda \mathbf{x} \| = |\lambda| \| \mathbf{x} \|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

se denomina una *norma* sobre  $\Omega$ .

Combinando las propiedades (N3) y (N4) se obtiene:

$$\| \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{y} \| \leq \lambda \| \mathbf{x} \| + (1 - \lambda) \| \mathbf{y} \|; \quad \forall \lambda \in [0, 1]$$

lo cual permite afirmar que toda norma sobre  $\mathbb{R}^N$  sea una función convexa.

**Teorema 1.1**

Existe una correspondencia entre normas sobre el espacio vectorial  $\mathbb{R}^N$  y métricas en el espacio afín asociado en el siguiente sentido:

(a) Dada una norma  $\| \cdot \|$ , la función  $d: \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \| \mathbf{x} - \mathbf{y} \|, \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$$

es una métrica (cumple (D1), (D2), (D3), (D4) y (D5)) que, adicionalmente, verifica (D6) y (D7), siendo:

$$(D6) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \Omega.$$

$$(D7) \quad d(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = |\lambda| d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

(b) Recíprocamente, dada una métrica  $d(\cdot, \cdot)$  que verifique (D6) y (D7), la función  $\| \cdot \|: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida

$$\| \mathbf{x} \| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

es una norma.

**Demostración:**

Veamos (b), ya que (a) es trivial.

Notemos que (D6) permite establecer al tomar  $\mathbf{z} = \mathbf{y}$ :

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{0}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$$

con lo que se tiene:

(N1)  $\| \mathbf{x} \| = d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \geq 0$  en virtud de (D1).

(N2)  $\| \mathbf{x} \| = 0$  si y sólo si  $d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  en virtud de (D2) y (D4).

(N3)  $\| \mathbf{x} + \mathbf{y} \| = d(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{0}) = d(\mathbf{x}, -\mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) + d(\mathbf{0}, -\mathbf{y}) =$   
 $= d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{0}) = \| \mathbf{x} \| + \| \mathbf{y} \|$

en virtud de (D3) y lo anterior.

(N4)  $\| \lambda \mathbf{x} \| = d(\lambda \mathbf{x}, \mathbf{0}) = | \lambda | d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = | \lambda | \| \mathbf{x} \|$   
 en virtud de (D7).

q.e.d.

La propiedad (D6) indica que la métrica inducida por una norma es independiente de las traslaciones que se realicen sobre el sistema de referencias considerado (no así de otras semejanzas como los giros).

**Ejemplos de normas**, que han aparecido en la literatura referida a Localización (ver Plastria [1993 a]) como consecuencia de la conocida *desigualdad de Minkowski*:

$$\left( \sum_{i=1}^N (x_i + y_i)^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{i=1}^N x_i^p \right)^{1/p} + \left( \sum_{i=1}^N y_i^p \right)^{1/p}; \quad \forall x_i, y_i \geq 0; \quad \forall p \geq 1$$

donde la igualdad se logra sólo en el caso de proporcionalidad entre  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  e  $(y_1, y_2, \dots, y_N)$ , son:

(Ej. 1) Norma euclídea ( $l_2$ ):

$$\| \mathbf{x} \|_2 = \left( x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 \right)^{1/2}$$

(Ej. 2) Norma rectangular ( $l_1$ , o de Manhattan):

$$\| \mathbf{x} \|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_N|$$

(Ej. 3) Norma de Tchebycheff ( $l_\infty$ ):

$$\| \mathbf{x} \|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|\}$$

(Ej. 4) Normas  $l_p$ ,  $p \in [1, \infty]$  (abarcando los casos anteriores, puesto que  $\| \cdot \|_p \rightarrow \| \cdot \|_\infty$  cuando  $p \rightarrow \infty$ ):

$$\| \mathbf{x} \|_p = \left( |x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_N|^p \right)^{1/p}$$

En la Fig.[1.1], análoga a la publicada en Love Morris y Wesolowsky [1988], se han incluido los casos  $p = \infty$ ,  $p = 10$ ,  $p = 2$ ,  $p = 1.5$ ,  $p = 1$  y  $p = 0.5$  en  $\mathbb{R}^2$  para ilustrar el aspecto gráfico de los trazados de las respectivas bolas unidad.

Nótese que la diferencia de distancias medidas con las diversas  $l_p$  está maximizada en la dirección diagonal de  $\theta = \pi/4$  respecto a los ejes, mientras que en las direcciones paralelas a los ejes coordenados (direcciones axiales) todas las gráficas concurren en los vértices  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, -1)$  y  $(-1, 0)$ .

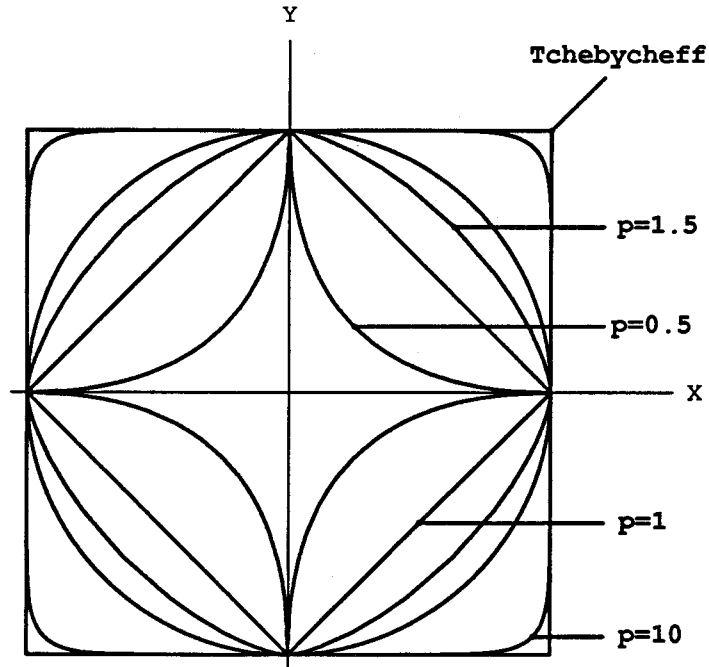


Fig.[1.1]: Lugares de distancia 1 para varias  $l_p$ .

(Ej. 5) Funciones  $l_p^K$ ,  $p \in [1, \infty]$ ,  $K > 0$  (ver Morris [1981]) definidas:

$$l_p^K(\mathbf{x}) = \left( |x_1|^p + |x_2|^p + \dots + |x_N|^p \right)^{K/p}$$

(Ej. 6) Normas  $l_{pb}$  (ver Cánovas [1994], o Brimberg y Love [1995] donde se denominan *sumas ponderadas de orden p*), siendo  $p$  un escalar,  $1 \leq p < \infty$  y  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_N) \in \mathbb{R}^N$  un vector de coordenadas positivas, de la siguiente forma:

$$l_{pb}(\mathbf{x}) = \left( b_1 |x_1|^p + b_2 |x_2|^p + \dots + b_N |x_N|^p \right)^{1/p}.$$

En la Fig.[1.2], análoga a la publicada en Cánovas [1994], se han trazado las bolas unidad relativas a los casos  $\mathbf{b} = (1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(1, 3)$ ,  $(1, 0.3)$ ,  $\in \mathbb{R}^2$  para  $p = 1.8$ .

(Ej. 7) Combinaciones de normas  $l_p$ ,  $p \in [1, \infty]$ , como la *uno-infinito* propuesta por Ward y Wendell [1980] o la combinación de  $l_1$  y  $l_2$  usada en Brimberg y Love [1992 a] para estimar distancias de viaje.

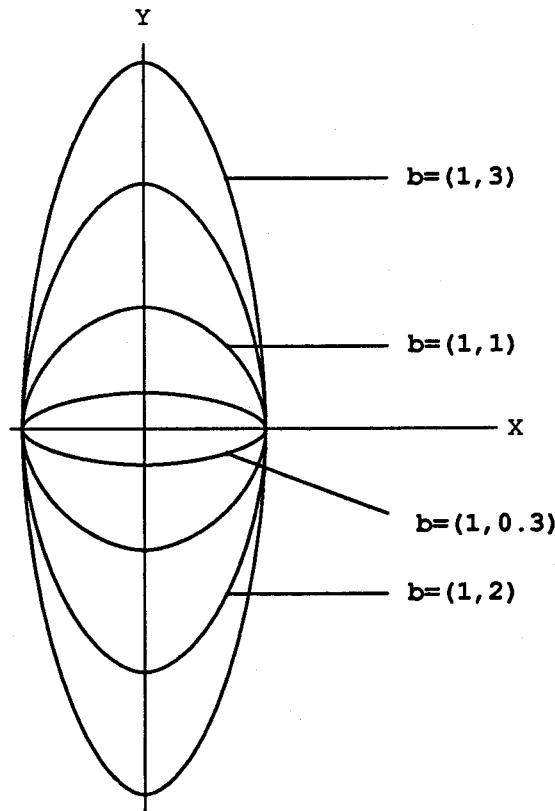


Fig.[1.2]: Lugares de distancia 1 para varias  $l_{pb}$ .

La desigualdad de Minkowski no ha sido la única vía de generación de normas de uso común en Teoría de Localización como veremos.

**Cuasi-métricas generadas por calibradores.**

**Definición 1.5**

Se denomina *calibrador (gauge)* a toda aplicación sobre un espacio vectorial real  $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , que verifique las propiedades  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ :

- (G1)  $\gamma(\mathbf{x}) \geq 0$ .
- (G2)  $\gamma(\mathbf{x}) = 0$  si y sólo si  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- (G3)  $\gamma(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq \gamma(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{y})$ .
- (G4)  $\gamma(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \gamma(\mathbf{x}), \forall \lambda \in \mathbb{R}^+$ .

**Teorema 1.2**

Existe una correspondencia entre calibradores sobre un espacio vectorial y cuasi-métricas sobre el espacio afín asociado en el siguiente sentido:

- (a) Dado un calibrador  $\gamma(\cdot)$ , la función  $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \gamma(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$$



es una cuasi-métrica (cumple (D1), (D2), (D3) y (D4)) que, adicionalmente, verifica (D6) y (D7), siendo:

$$(D6) \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x} - \mathbf{z}, \mathbf{y} - \mathbf{z}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \Omega.$$

$$(D7') \quad d(\lambda \mathbf{x}, \lambda \mathbf{y}) = \lambda d(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

(b) Recíprocamente, dada una cuasi-métrica  $d(\cdot, \cdot)$  que verifique (D6) y (D7'), la función  $\gamma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida

$$\gamma(\mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{0}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega$$

es un calibrador.

**Demostración:**

Análoga a la establecida para el teorema 1.1

q.e.d.

La definición de calibrador fue establecida por Minkowski en 1911 partiendo de un conjunto convexo y compacto en  $B \subset \Omega \equiv \mathbb{R}^N$  con el origen en su interior. La función  $\gamma_B : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ , definida:

$$\gamma_B(\mathbf{x}) = \inf \{ \lambda > 0 : \mathbf{x} \in \lambda B \}$$

se denomina *calibrador inducido* por  $B$ .

**Teorema 1.3**

Existe una correspondencia biunívoca entre calibradores y conjuntos convexos y compactos de  $\Omega$  con el origen en su interior.

(a) Dado un calibrador  $\gamma(\cdot)$ , el conjunto:

$$B = \{ \mathbf{x} \in \Omega : \gamma(\mathbf{x}) \leq 1 \}$$

es convexo, compacto y contiene al origen en su interior.

(b) Recíprocamente, dado un conjunto convexo y compacto  $B \subset \Omega$  que contiene al origen en su interior, la función  $\gamma_B : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  definida

$$\gamma_B(\mathbf{x}) = \inf \{ \lambda > 0 : \mathbf{x} \in \lambda B \}$$

es un calibrador al cumplir las propiedades (G1), (G2), (G3) y (G4).

Además, notemos que si  $B$  es simétrico con respecto al origen (*absolutamente convexo*), se tiene:

$$\gamma_B(-\mathbf{x}) = \gamma_B(\mathbf{x})$$

lo cual combinado con (G4) hace que  $\gamma_B$  sea una norma y  $B$  su correspondiente bola unidad (ver Belitskii y Lyubich (1988)).

Este resultado establece una nueva vía para definir calibradores (o normas): primero fijar un convexo, compacto y con el origen en su interior y a continuación adoptar dicho conjunto como la bola unidad del calibrador (norma). Dos grandes familias de calibradores surgen por este procedimiento:

- Cuando la frontera de la bola unidad sea diferenciable el calibrador asociado se denomina *circular*, mientras que

- Si dicha frontera es un polígono cerrado entonces el calibrador se dice *poliédrico*.

Los ejemplos antes vistos son normas circulares salvo el caso de  $l_1$  y  $l_\infty$ . Un tratamiento general para todas ellas se puede realizar mediante los denominados *calibradores sesgados* (ver Plastria [1993 b]), que abarca tanto situaciones de simetría como de asimetría para el modelado del coste de desplazamiento según la dirección.

**Teorema 1.4** (ver Rockafellar [1970]).

El calibrador  $\gamma_B$  asociado a un conjunto convexo y compacto  $B$ , con el origen en su interior, es una función convexa.

### Calibradores poliédricos.

Lo que sigue puede encontrarse en Rockafellar [1970].

Dado un subconjunto afin  $S$  de  $\mathbb{R}^N$ , se denomina *envolvente convexa* de  $S$ , representado mediante  $\text{conv}(S)$ , al conjunto de todas las combinaciones lineales convexas de puntos de  $S$ .

Cuando se trata de un subconjunto finito  $S = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k\} \subset \mathbb{R}^N$ , la envolvente convexa se denomina *politopo* y se expresa:

$$\begin{aligned} \text{conv}(S) &= \\ &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{b}_i, \text{ donde } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \text{ siendo } \lambda_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, k\}. \end{aligned}$$

Por su definición, todo politopo será convexo, cerrado, acotado y tendrá como máximo un número finito de puntos extremos y de direcciones extremas.

Sea  $B \subset \Omega \equiv \mathbb{R}^N$  un politopo con el origen en su interior y sean

$$\text{Ext}(B) = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k\} \text{ para un cierto } k \in \mathbb{N}$$

los puntos extremos del politopo  $B$ .

### Definición 1.6

El calibrador  $\gamma_B$  se denomina *poliédrico* si  $B$  se trata de un politopo con el origen en su interior.

### Definición 1.7

Dado el politopo  $B$  cuyo conjunto  $\text{Ext}(B) = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k\}$ , se denominan *direcciones fundamentales* a cada una de las semirrectas  $d_1, d_2, \dots, d_k$  del espacio afin asociado al espacio vectorial  $\Omega$  que parten del origen con vector de dirección  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k$  respectivamente.

### Nota 1.1

Cuando no haya posibilidad de confusión el calibrador  $\gamma_B$  inducido por el conjunto  $B$  se notará  $\gamma$ .

**Teorema 1.5** (ver Nickel [1995]).

Si  $B$  es un politopo con puntos extremos:  $\text{Ext}(B) = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k\}$ , entonces se puede redefinir la función  $\gamma$  como sigue:

$$\gamma(\mathbf{x}) = \min \left\{ \sum_{h=1}^k \lambda_h : \mathbf{x} = \sum_{h=1}^k \lambda_h \mathbf{g}_h, \lambda_h \geq 0 \right\}$$

**Definición 1.8** (Witzgall [1964]).

El calibrador poliédrico  $\gamma_B$  se denomina *norma bloque* si el politopo asociado  $B$  es simétrico. En ese caso, el conjunto  $\text{Ext}(B)$  se escribe

$$\text{Ext}(B) = \{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{\frac{k}{2}}, -\mathbf{g}_1, \dots, -\mathbf{g}_{\frac{k}{2}}\}$$

**Ejemplos** de normas bloque con presencia en la literatura sobre Localización (ver Ward y Wendell [1985]) son las obtenidas en el plano usando los siguientes conjuntos de puntos extremos:

(Ej.1)  $\text{Ext}(B) = \{(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)\}$ . Para este caso la función

$$\gamma_B(\mathbf{x}) = \min \{ |\lambda_1| + |\lambda_2| : \mathbf{x} = (x_1, x_2) = \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

da lugar a la norma  $l_1$  debido a que  $x_1 = \lambda_1$  y  $x_2 = \lambda_2$ . Por tanto:

$$\gamma_B(\mathbf{x}) = |x_1| + |x_2|.$$

(Ej.2)  $\text{Ext}(B) = \{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$ . Este caso da lugar a la norma  $l_\infty$ .

(Ej.3) La norma bloque *uno-infinito* se obtiene cuando  $\text{Ext}(B)$  es el conjunto de las raíces octavas de la unidad en el plano complejo. Es decir:

$$\text{Ext}(B) = \{e^{i0}, e^{i\frac{\pi}{4}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{3\pi}{4}}, e^{i\pi}, e^{-i\frac{3\pi}{4}}, e^{-i\frac{\pi}{2}}, e^{-i\frac{\pi}{4}}\}.$$

**Teorema 1.6** (ver Ward y Wendell [1985]).

Si  $B$  es un politopo simétrico, se puede definir su calibrador asociado  $\gamma(\mathbf{x})$  como:

$$\gamma(\mathbf{x}) = \min \left\{ \sum_{h=1}^{\frac{k}{2}} |\lambda_h| : \mathbf{x} = \sum_{h=1}^{\frac{k}{2}} \lambda_h \mathbf{g}_h \right\}$$

## 1.2. DESCRIPCIÓN DE DISTANCIAS EN UNA RED.

### Definición 1.9 (Harary [1969]).

Se define como *red no dirigida de transporte* a todo grafo  $G = (V, E)$  consistente en un conjunto no vacío  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  de  $n$  vértices o nodos y un conjunto  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  de  $m$  aristas que conectan pares de nodos distintos (no hay lazos), junto a una función de costo  $d_G : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida sobre cada arista.

Al ser la red no dirigida

$$\forall e_k \in E, \exists (v_i, v_j) \quad i \neq j, \text{ tal que } e_k \equiv (v_i, v_j) \equiv (v_j, v_i)$$

### Definición 1.10 (Harary [1969]).

Se define *matriz de adyacencia asociada a la red* a la matriz cuadrada de orden  $n$ ,  $A = \{a_{ij}\}$ , que verifica:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si existe la arista } (v_i, v_j) \text{ con } i \neq j \\ 0, & \text{si no existe la arista } (v_i, v_j) \end{cases}$$

Para extender la definición  $d_G : E \subseteq V \times V \rightarrow \mathbb{R}^+$  a todos los pares origen-destino, se amplía la definición a  $d_G^* : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  de forma que:

$$d_G^*(v_i, v_j) = \begin{cases} d_G(v_i, v_j), & \text{si } a_{ij} = 1 \\ \infty, & \text{si } a_{ij} = 0 \end{cases}$$

El costo mínimo para ir de un vértice  $v_i$  a otro  $v_j$  viene dado en primera instancia por la expresión:

$$c_{ij} = d_G^*(v_i, v_j).$$

Dicho valor puede ser modificado a la baja de acuerdo con la conectividad que presente el grafo durante el proceso de búsqueda de caminos más cortos en la red. (Para establecer los caminos más cortos en una red, ver *algoritmo de Dijkstra* en Aho, Hopcroft y Ullman [1974], por ejemplo).

Nótese que la existencia de casos  $c_{ij} = \infty$  al final del proceso pondría de manifiesto la desconexión de la red. Esta situación no puede darse si se exige que la red sea conexa, y a partir de este momento queda realizada. Por tanto,  $c_{ij} < \infty$  en todos los casos.

### Definición 1.11 (Harary [1969]).

Se denomina *camino* desde el nodo  $v_i$  hasta el nodo  $v_j$  a una secuencia de vértices y aristas incidentes, siendo el primer elemento de la lista el nodo  $v_i$  y el último el nodo  $v_j$ .

Denotemos por  $\Gamma_{ij}$  al conjunto de caminos posibles entre los vértices  $v_i$  y  $v_j$ . Cada  $k_{ij} \in \Gamma_{ij}$  tendrá una sucesión numérica de valoraciones de aristas mediante la función  $d_G$  y su suma la representaremos por  $S(k_{ij})$ .

**Definición 1.12** (Buckley y Harary [1990]).

Se define *matriz de costos* de los desplazamientos o *matriz de distancias*  $C = \{c_{ij}\}$ , a aquella matriz cuadrada de orden  $n$  cuyos elementos son:

$$c_{ij} = \min_{k_{ij} \in \Gamma_{ij}} S(k_{ij})$$

Cuando la red de transporte se sumerge (empotra) en el plano euclídeo se elige arbitrariamente un sistema de referencias métrico y con él se dota de coordenadas a cada nodo. Este sistema de referencias es susceptible de ser cambiado por otro, mediante un giro de ejes de ángulo  $\alpha$  y una traslación. Si cada nodo  $v_i$  es un punto del plano euclídeo, cada par origen-destino será un vector  $\vec{v}_{ij} = v_j - v_i \in \mathbb{R}^2$ . Dado que tanto los términos  $c_{ij}$  como la norma euclídea de los vectores  $\vec{v}_{ij}$  son invariantes a la elección del sistema de referencias que se haga, los cocientes entre los costos  $c_{ij}$  y las normas euclídeas estarán unívocamente definidos en la red con independencia de la orientación de la red.

Sea  $D = \{\vec{v}_{ij} \in \mathbb{R}^2 : i, j \in \{1, \dots, n\}, i \neq j\}$  el conjunto finito de vectores origen-destino de la red empotrada en el plano, y sea

$$D_\varphi = \{\varphi \in [0, 2\pi) : \exists \mathbf{x} \in D, \mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2 \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi)\}$$

el conjunto correspondiente de direcciones planas.

**Definición 1.13.**

Dada la red  $(G, d_G)$  y una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , se dice que dicha función es *descriptora de la red* si al restringir  $f(\cdot)$  a  $D \subset \mathbb{R}^2$ , existe coincidencia con los costos mínimos de desplazamiento sobre la red de transporte entre los pares posibles origen-destino. Es decir,

$$f(\vec{v}_{ij}) = c_{ij}, \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$$

Sobre el conjunto discreto  $D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ , una función descriptora  $f(\cdot)$  debe verificar, por ser cada  $f(\vec{v}_{ij}) = c_{ij}$  un mínimo coste de transporte sobre aristas de longitud no nula, las propiedades  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in D \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ :

$$(G1) f(\vec{x}) > 0; \forall \vec{x} \neq \vec{0}.$$

$$(G2) f(\vec{x}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}.$$

$$(G3) f(\vec{x} + \vec{y}) \leq f(\vec{x}) + f(\vec{y}).$$

Si, adicionalmente, se verifica que los costes mínimos de transporte son proporcionales a la distancia entonces tendríamos que:

$$(G4) f(\alpha \vec{x}) = \alpha f(\vec{x}) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

y la función descriptora restringida a  $D \subset \mathbb{R}^2$  cumpliría la axiomática propia de una gauge. Se tiene así el siguiente lema:

**Lema 1.1**

Para que la función  $f : \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  pueda ser descriptora de la red  $(G, d_G)$ , ha de verificar al menos las propiedades (G1), (G2) y (G3); y si los costes mínimos

de transporte son proporcionales a la distancia entre pares origen-destino entonces se verifica que  $f(\cdot)$  cumple la axiomática propia de un calibrador.

**Definición 1.14.**

Se denomina *sesgo* inducido por la función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  a la función  $r_f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  obtenida mediante el cociente:

$$r_f(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_2}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$$

**Lema 1.2**

Sea  $f : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función sobre el plano que verifica (G1), (G2), (G3). Entonces,  $f(\mathbf{x})$  verifica (G4) si y sólo si su sesgo  $r_f(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_2}$  depende exclusivamente del argumento, es decir:

$$r_f(\mathbf{x}) \equiv r_f(\varphi), \text{ con } \varphi = \text{Arctan}(x_2/x_1), \quad \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$$

y recíprocamente.

**Demostración.**

( $\Rightarrow$ ) Dado que

$$\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2 (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

por la propiedad (G4),

$$f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2 f((\cos \varphi, \sin \varphi))$$

y de ahí si se divide entre  $\|\mathbf{x}\|_2$ , sale

$$r_f(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_2} = f((\cos \varphi, \sin \varphi)) = r_f(\varphi)$$

( $\Leftarrow$ ) Recíprocamente, dado que  $\mathbf{x}$  y  $\alpha\mathbf{x}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ , comparten argumento  $\varphi$ :

$$\frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_2} = r_f(\mathbf{x}) = r_f(\varphi) = r_f(\alpha\mathbf{x}) = \frac{f(\alpha\mathbf{x})}{\|\alpha\mathbf{x}\|_2}$$

Luego

$$\frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{f(\alpha\mathbf{x})}{\alpha \|\mathbf{x}\|_2}$$

Simplificando

$$f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$$

q.e.d.

**Lema 1.3**

Si la función plana  $f(\mathbf{x})$  es un calibrador (verifica (G1),(G2),(G3) y (G4)) y además cumple:

(G5) Simetría respecto al origen:  $f(-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$

entonces el sesgo

$$r_f(\mathbf{x}) = r_f(\varphi), \forall \mathbf{x} = \|\vec{x}\|_2 \quad (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

es periódico de periodo  $\pi$ :

$$r_f(\varphi) = r_f(\varphi + \pi)$$

y recíprocamente.

**Demostración.**

Si el argumento de  $\mathbf{x}$  es  $\varphi$ , el argumento de  $-\mathbf{x}$  será  $\varphi + \pi$ , y dado que coinciden  $\|-\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{x}\|_2$ , tenemos que:

$$r_f(\varphi) = r_f(\mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{f(-\mathbf{x})}{\|-\mathbf{x}\|_2} = r_f(\varphi + \pi)$$

La validez del razonamiento se mantiene en sentido inverso.

q.e.d.

**Lema 1.4**

Supongamos que exista alguna función descriptora  $f(\cdot)$  para la red que verifica (G1),(G2) y (G3), y además cumpla:

$$(G4) + (G5): \quad f(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha| f(\mathbf{x}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

entonces el sesgo de  $\vec{x}$  y de  $\alpha\vec{x}$  debe ser el mismo, lo que implica que los vectores correspondientes a *nodos colineados deben estar sesgados de manera única.*

**Demostración.**

Partiendo de que  $\varphi$  sea el argumento de  $\mathbf{x}$ , tenemos que  $\varphi$  será también el argumento de  $\alpha\mathbf{x}$  si  $\alpha \in \mathbb{R}^+$  o por el contrario  $\varphi + \pi$ , si  $\alpha \in \mathbb{R}^-$ . En cualquier caso, el sesgo  $r_f(\varphi) = r_f(\varphi + \pi)$ , ya que estamos en las condiciones del lema anterior.

Tenemos por un lado  $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|_2 r_f(\varphi)$  y por otro  $f(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha| f(\mathbf{x})$ . En definitiva:

$$f(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha| \|\mathbf{x}\|_2 r_f(\varphi) = \|\alpha\mathbf{x}\|_2 r_f(\varphi)$$

Por tanto, el cociente:  $f(\alpha\mathbf{x}) / \|\alpha\mathbf{x}\|_2$  es el mismo para los vectores  $\mathbf{x}$  y  $\alpha\mathbf{x}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Además, si los vértices  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k$  están colineados:

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_k = \alpha \mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j$$

y si la función descriptora  $f(\mathbf{x})$  verifica:  $f(\alpha\mathbf{x}) = |\alpha| f(\mathbf{x}) \forall \alpha \in \mathbb{R}$ , entonces:

$$r_f(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_k) = \frac{f(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_k)}{\|\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_k\|_2} = \frac{|\alpha| f(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j)}{|\alpha| \|\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j\|_2} = r_f(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j)$$

q.e.d.

**Colorario 1.1: Redes sin un calibrador descriptor.**

Si existen nodos  $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k$  colineados:  $\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_k = \alpha \mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j$  y sin embargo  $r_f(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_k) \neq r_f(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j)$ , entonces la red no podría tener un calibrador descriptor, al haber varios valores de  $r_f(\varphi)$  para un mismo argumento.

### 1.3. SEGOS DE LAS FUNCIONES $l_p$ , $p \in (0, \infty]$ .

Consideremos sobre el plano polar el vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\vec{0}\}$ , y representemos por  $R = l_2(\mathbf{x})$  su módulo y por  $\varphi$  su argumento. Tendremos así :  $\mathbf{x} = R (\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Si suponemos constante el módulo  $R$ , cada vector  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\varphi)$  dependerá de su argumento exclusivamente.

En la familia  $l_p$ ,  $p \in (0, \infty]$ , hay una sola función (la norma euclídea  $l_2$ ) que no favorece ni perjudica la dirección del vector sobre el que se aplica. Es decir:

$$l_2(\mathbf{x}(\varphi)) = R, \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi)$$

Esto no ocurre para el resto de las  $l_p$ ,  $p \in (0, \infty) \setminus \{2\}$ :

$$l_p(\mathbf{x}(\varphi)) = R (|\cos \varphi|^p + |\sin \varphi|^p)^{1/p}$$

#### Definición 1.15

La función  $r_p(\varphi) = (|\cos \varphi|^p + |\sin \varphi|^p)^{1/p}$ , que representaremos preferentemente en su forma polar  $\rho = r_p(\varphi)$ , se denominará *p-sesgo* o *sesgo direccional de índice p*.

Esta es la función que proporciona direcciones privilegiadas y direcciones penalizadas, dependiendo del ángulo  $\varphi$  que indica la dificultad relativa de realizar viajes (ver Brimberg y Love [1991], pág. 253).

#### **Propiedades de los p-sesos.**

Las propiedades de los *p-sesos* fueron estudiadas en Brimberg y Love [1993]. A continuación enunciamos los resultados del artículo antes mencionado.

**P 1.** Existen cuatro direcciones insesgadas :

$$r_p(0) = r_p(\pi/2) = r_p(\pi) = r_p(3\pi/2) = 1; \quad \forall p \in (0, \infty]$$

dichas direcciones serán privilegiadas si  $p \in (0, 2)$  y serán las penalizadas si  $p \in (2, \infty]$ .

**P 2.** Además de la simetría central respecto al polo:

$$r_p(\varphi) = r_p(\varphi + \pi); \quad \forall p \in (0, \infty], \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi)$$

existe simetría respecto a cada dirección insesgada:

$$r_p(-\varphi + j\pi/2) = r_p(\varphi + j\pi/2); \quad \forall p \in (0, \infty], \quad \forall j \in \{0, 1, 2, 3\}$$

y existe simetría respecto a la bisectriz de cada par de direcciones insesgadas adyacentes:

$$r_p(-\varphi + j\pi/4) = r_p(\varphi + j\pi/4); \quad \forall p \in (0, \infty], \quad \forall j \in \{1, 3, 5, 7\}$$



**P 3.** En el intervalo  $\varphi \in [0, \pi/4]$  la función  $r_p(\varphi)$  es estrictamente creciente si  $p \in (0, 2)$  y es estrictamente decreciente si  $p \in (2, \infty]$ , alcanzándose el extremo en  $\varphi = \pi/4$ .

**P 4.** Fijado  $\varphi \in (0, \pi/4)$ ,

$$\forall p_1, p_2 \in (0, \infty] \quad p_1 < p_2 \implies r_{p_1}(\varphi) > r_{p_2}(\varphi)$$

En la Fig.[1.3] se ha representado algunos  $p$ -sesgos en coordenadas cartesianas.

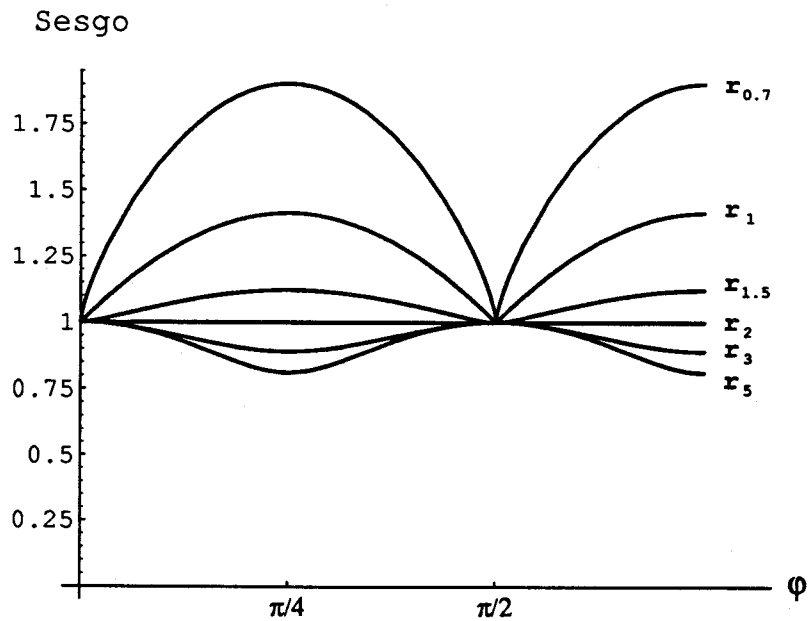


Fig.[1.3]:  $p$ -sesgos en coord. cartesianas.

En la Fig.[1.4] se observan las bolas unidad de distintas funciones  $l_p$  y sus sesgos.

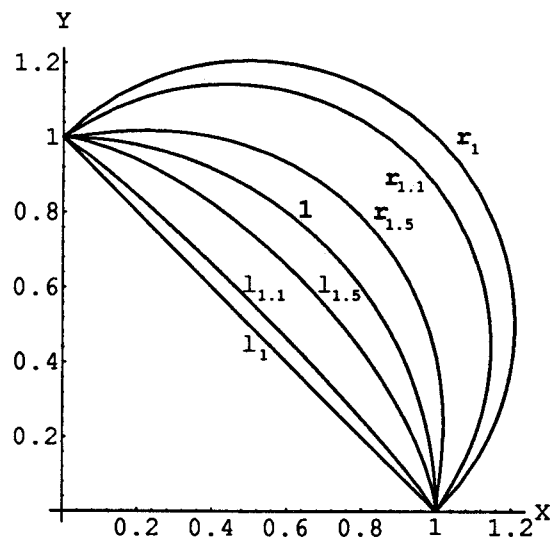


Fig.[1.4]: Bolas unidad y sus sesgos.

En la Fig.[1.5] se han representado algunos  $p$ -sesgos en coordenadas polares.

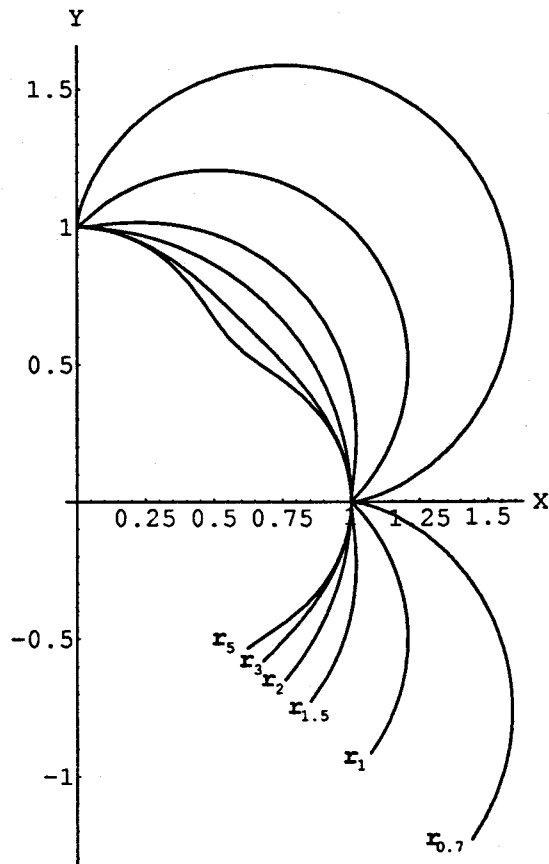


Fig.[1.5]:  $p$ -sesgos en coord. polares.

### Interpolación de un punto mediante $p$ -sesgos.

Consideremos la parte del plano cuyos puntos  $P(x_1, x_2)$  están a distancia  $\rho \geq 1$  del origen en cualquier argumento  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Los puntos del plano se representarán mediante la forma exponencial compleja.

#### Teorema 1.7

Todo punto  $A = R e^{i\varphi}$  tal que  $R \geq 1$  y  $\varphi \in [0, 2\pi)$  es interpolado por un único sesgo de índice  $p$  si y sólo si  $R > 1$  o, en caso de  $R = 1$ , cuando  $\varphi \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ . Dicho  $p$ -sesgo es la solución de:

$$|\cos(\varphi)|^p + |\sen(\varphi)|^p = R^p.$$

#### Demostración.

La resolución en la indeterminada  $p$  de la ecuación:

$$|\cos(\varphi)|^p + |\sen(\varphi)|^p = R^p$$

puede adaptarse al formato del teorema del punto fijo  $p = g(p)$  (ver Burden y Faires [1985], pág. 46).

Para ello factorizando:

$$|\cos(\varphi)|^p (1 + |\operatorname{tg}(\varphi)|^p) = R^p$$

y tomando logaritmos:

$$\log(1 + |\operatorname{tg}(\varphi)|^p) = p \log\left(\frac{R}{|\cos(\varphi)|}\right)$$

de donde:

$$p = \frac{\log(1 + |\operatorname{tg}(\varphi)|^p)}{\log\left(\frac{R}{|\cos(\varphi)|}\right)} = g(p)$$

Nótese que el segundo miembro es siempre positivo ya que según las condiciones del enunciado:  $R > 1$  o, en caso de  $R = 1$ , cuando  $\varphi \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$  y

$$\frac{R}{|\cos(\varphi)|} > 1$$

Además la derivada:

$$g'(p) = \frac{\log(|\operatorname{tg}(\varphi)|)}{\log\left(\frac{R}{|\cos(\varphi)|}\right)} \frac{|\operatorname{tg}(\varphi)|^p}{1 + |\operatorname{tg}(\varphi)|^p}$$

será inferior a la unidad (condición para la existencia y unicidad, según el teorema del punto fijo) cuando

$$\log(|\operatorname{tg}(\varphi)|) < \log\left(\frac{R}{|\cos(\varphi)|}\right)$$

lo cual queda garantizado si  $|\operatorname{sen}(\varphi)| < R$ , que está impuesto por el enunciado al afirmarse:  $R > 1$  o, en caso de  $R = 1$ ,  $\varphi \notin \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ .

La solución de  $|\cos(\varphi)|^p + |\operatorname{sen}(\varphi)|^p = R^p$  con  $R \geq 1$  y  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , debe verificar además  $p \in (0, 2]$ , por la pertenencia de  $A = R e^{i\varphi}$  al exterior del círculo unidad del plano polar.

**q.e.d.**

Para cada punto  $A = R e^{i\varphi}$  con  $R \geq 1$  y  $\varphi \in [0, \pi/4]$  se tienen las opciones de usar como interpolante:

1) El  $p$ -sesgo  $\rho = 1 r_p(\theta)$ , donde  $p$  es precisamente la solución de:

$$\frac{R}{(|\cos \varphi|^p + |\operatorname{sen} \varphi|^p)^{1/p}} = 1$$

2) Cualquiera de los  $q$ -sesgos inflados mediante un factor que depende del índice elegido. Es decir  $\rho = \tau(q) r_q(\theta)$ , donde

$$\tau(q) = \frac{R}{(|\cos \varphi|^q + |\operatorname{sen} \varphi|^q)^{1/q}}$$

Para que todo el trazado del  $q$ -sesgo inflado quede en el plano polar excluido el círculo unidad, es necesario descartar que  $\tau(q) < 1$ ; así cuando  $\theta$  sea 0, el trazado no penetrará en el círculo unidad. Nótese además que  $\tau(q) = 1$  se alcanza para  $q = p$  y dado que el cociente que define a  $\tau(q)$  está acotado superiormente por  $R$ , el rango de  $\tau(q)$  para  $q \in [p, 2]$  será  $\tau(q) \in [1, R]$ .

### Preferencia en la elección del interpolante.

Si se puede elegir, ¿qué función interpolante es preferible de usar?, ¿el  $p$ -sesgo o alguna función  $\tau(q) r_q(\theta)$  con  $q \in [p, 2]$ ?

Como, en realidad, el sesgo de índice  $p$ :  $\rho = r_p(\theta)$  es un caso particular de la familia  $\rho = \tau(q) r_q(\theta) = \frac{R}{r_q(\varphi)} r_q(\theta)$  ( precisamente para  $q = p$  ), la siguiente definición dada en Ortega [1995] pretende favorecer la elección de un interpolante por la proximidad al sesgo ideal ( $\rho = 1, \forall \theta$ ) contemplándolo de forma uniforme para todas las direcciones (de ahí el uso del área en polares).

### Definición 1.16

Diremos que la función  $\tau_q r_q(\theta)$  con  $q \in [p, 2]$  es *preferible a* (o *tiene preferencia sobre*) la función  $\tau_s r_s(\theta)$  con  $s \in [p, 2]$  si sus áreas respectivas para el primer octante

$$S(\tau_q, q) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\tau_q r_q(\theta))^2 d\theta; \quad S(\tau_s, s) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\tau_s r_s(\theta))^2 d\theta$$

verifican  $S(\tau_q, q) \leq S(\tau_s, s)$ .

Respecto a las funciones  $S(\tau, q)$  definidas  $\forall q \in (0, 2]$ , se tiene que, para  $\tau$  fijo,  $S(\tau, q)$  es decreciente en  $q \in (0, 2]$ , siendo  $S(1, 1) = \frac{\pi + 2}{8}$  y  $S(1, 2) = \frac{\pi}{8}$ .

### Teorema 1.8

De todas las funciones  $\tau(q) r_q(\theta)$  que interpolan el punto  $A = R e^{i0} = (0, R)$  del eje  $OX$ , la preferente es la que usa distancia euclídea:  $R r_2(\theta)$ .

### Demostración.

Para que se verifique la interpolación por parte de  $\tau(q) r_q(\theta)$  en el punto  $A$  ha de cumplirse que  $\tau(q) = R$ , debido a que en la dirección  $\theta = 0$  se verifica  $r_q(0) = 1, \forall q \in (0, 2]$ .

Por la propiedad **P4** de la sección anterior,  $\forall q \in (0, 2]$  se tiene que  $0 < r_2(\theta) \leq r_q(\theta), \forall \theta \in [0, \pi/4]$ , con lo que se tiene:

$$\min_q \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\tau_q r_q(\theta))^2 d\theta = R^2 \min_q \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (r_q(\theta))^2 d\theta = R^2 \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (r_2(\theta))^2 d\theta$$

q.e.d.

### Teorema 1.9

De todas las funciones  $\tau(q) r_q(\theta)$  que interpolan el punto  $A = R e^{i\frac{\pi}{4}}$  de la bisectriz, la preferente es la que usa un factor de inflación unidad:  $1 \cdot r_p(\theta)$  donde  $p$  es la solución de:

$$R = (|\cos(\pi/4)|^p + |\sin(\pi/4)|^p)^{1/p}.$$

**Demostración.**

Sea  $p$  la solución de:

$$R = (|\cos(\pi/4)|^p + |\sin(\pi/4)|^p)^{1/p}.$$

Entonces,  $\forall q \in [p, 2]$  y  $\forall \theta \in [0, \pi/4]$  se verifica:  $r_q(\theta) \leq r_p(\theta)$ .

De la propiedad **P3** de la sección anterior se tiene que el cociente  $\frac{r_p(\theta)}{r_q(\theta)} \geq 1$  alcanzará su máximo en  $\theta = \pi/4$ :

$$1 \leq \frac{r_p(\theta)}{r_q(\theta)} \leq \frac{r_p(\pi/4)}{r_q(\pi/4)}$$

Luego,  $\forall \theta \in [0, \pi/4]$ :

$$\frac{r_p(\theta)}{r_p(\pi/4)} \leq \frac{r_q(\theta)}{r_q(\pi/4)}$$

Elevando al cuadrado e integrando entre 0 y  $\pi/4$ , tenemos:

$$\frac{1}{r_p^2(\pi/4)} \int_0^{\pi/4} r_p^2(\theta) d\theta \leq \frac{1}{r_q^2(\pi/4)} \int_0^{\pi/4} r_q^2(\theta) d\theta$$

Multiplicando la desigualdad por  $R^2 \geq 1$ :

$$\frac{R^2}{r_p^2(\pi/4)} \int_0^{\pi/4} r_p^2(\theta) d\theta = 1 \int_0^{\pi/4} r_p^2(\theta) d\theta \leq \frac{R^2}{r_q^2(\pi/4)} \int_0^{\pi/4} r_q^2(\theta) d\theta$$

Tenemos, por la desigualdad, demostrado que  $1 \cdot r_p(\theta)$  es el interpolante preferente.

**q.e.d.**

**Caso general.**

Para todas las funciones  $\tau(q) r_q(\theta)$  que interpolan el punto  $A = R e^{i\varphi}$  con  $R \geq 1$  y  $\varphi \in (0, \pi/4)$  definimos  $\mathcal{T}(p) = \frac{R}{r_p(\varphi)}$ , junto con  $\mathcal{S}(p) = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\tau(p) r_p(\theta))^2 d\theta$ .

La interpolación preferente del punto  $A$  será la solución del problema:

$$\min_p \{\mathcal{T}(p) \mathcal{S}(p)\} = \min_p \left\{ \frac{R}{r_p(\varphi)} \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (\tau(p) r_p(\theta))^2 d\theta \right\}$$

**Definición 1.17**

Diremos que las funciones interpoladoras  $\tau_q r_q(\theta)$  y  $\tau_s r_s(\theta)$  con  $q, s \in [p, 2]$  son *equipreferentes* si coinciden sus áreas  $\mathcal{S}(\tau_q, q) = \mathcal{S}(\tau_s, s)$ .

Es inmediato comprobar que la *equipreferencia* es una relación de equivalencia, y que para cada familia biparamétrica  $\tau_q r_q(\theta)$  existe un único representante  $1 r_p(\theta)$  tal que haga recaer el área que rebasa del círculo unidad sobre la definición del  $p$ -sesgo, sin intervención del factor de inflación.

Una modificación en una red de transporte, que dé lugar a una nueva función interpolante, se considerará conveniente si la nueva función descriptora tiene preferencia sobre la anterior. La modificación será más adecuada cuanto más nos alejemos de la equipreferencia con la situación anterior. Como ejemplo inmediato, una red de cuatro vértices formando un paralelogramo reduciría más los tiempos de viaje si se creara una nueva conexión entre los vértices no adyacentes más cercanos.

#### 1.4. ESTIMACIÓN DE DISTANCIAS DE VIAJE EN UNA RED PLANA.

##### Estimadores habituales.

En la inmensa mayoría de los casos reales, no existe una función descriptora que reproduzca exactamente las distancias de viaje existentes entre puntos de una red plana real. La exactitud ha de dar paso a la *estimación*.

A partir de una red de transporte plana no dirigida se obtiene una matriz de distancias (o una matriz de sesgos) simétrica donde cada elemento se corresponde con un par origen-destino. El ajuste de estas distancias empíricas se ha venido realizando, desde Love y Morris [1979], tras la elección adecuada de un sistema de referencias que oriente hacia los ejes cartesianos la mayoría de los viajes (pares origen-destino) posibles en la red, combinando dos parámetros: un valor de  $p > 0$  sobre el que establecer la métrica  $l_p$  y un factor de inflación  $\tau$  cercano a la unidad que representa globalmente la adaptación de las medidas realizadas con  $l_p$  a las de la realidad.

Así:

a) En Berens [1988] se utiliza  $f(\mathbf{x}) = \tau l_2(\mathbf{x})$  donde el único parámetro  $\tau$  se ajusta mediante regresión de los datos empíricos.

b) En Love y Morris [1988] se emplean dos parámetros de ajuste en  $f(\mathbf{x}) = \tau l_p(\mathbf{x})$ : el factor de inflación  $\tau$  y el índice  $p > 0$ .

c) En Ward y Wendell [1980] se utilizan una combinación de las normas rectangular y de Tchebycheff:  $f(\mathbf{x}) = \alpha_1 l_1(\mathbf{x}) + \alpha_2 \sqrt{2} l_\infty(\mathbf{x})$ , con los parámetros  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ .

d) En Brimberg y Love [1993 a, 1993 b] la combinación biparamétrica es  $f(\mathbf{x}) = \alpha l_1(\mathbf{x}) + \beta l_2(\mathbf{x})$ . Los coeficientes son deducidos por regresión sobre los sesgos de los datos respecto a la distancia euclídea.

e) En Love y Walker [1994] se emplea un nuevo parámetro de ajuste al considerar un giro de ejes de ángulo  $\gamma$  respecto al cual, el vector  $\mathbf{x}'$  girado de  $\mathbf{x}$  aparece en la estimación junto al factor de inflación  $\tau$  y al índice  $p$ :  $f(\mathbf{x}) = \tau l_p(\mathbf{x}')$ .

Así pues, las funciones de estimación principalmente empleadas son ponderaciones de las normas bloque y las normas  $l_p$ . En términos de sesgos, la elección de las funciones estimadoras fue:

a) Berens utilizó  $r(\varphi) = \tau$ .

b) Love y Morris usaron  $r(\varphi) = \tau r_p(\varphi)$ .

c) Ward y Wendell:  $r(\varphi) = \alpha_1 r_1(\varphi) + \alpha_2 \sqrt{2} r_\infty(\varphi)$ .

d) Brimberg y Love:  $r(\varphi) = \alpha r_1(\varphi) + \beta$ .

e) Love y Walker:  $r(\varphi) = \tau r_p(\varphi + \gamma)$ .

### Primeros criterios de estimación.

La elección de la función estimadora  $f(\cdot)$  de la distancia (costo) entre cada pareja de nodos sobre la red  $d_G(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = c_{ij}$ ,  $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$ , se hace buscando, entre funciones candidatas de una misma familia, la que minimiza la suma de los errores de estimación.

En los trabajos de Love y Morris [1979], Love y Dowling [1985] y Love y Walker [1994], se emplean funciones:

$$f(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j) = \tau l_p(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j)$$

donde  $\tau$  y  $p$  se determinan con arreglo a alguno de los criterios:

#### Criterio 1

$$\min_{\tau, p} AD = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |f(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j) - c_{ij}|$$

#### Criterio 2

$$\min_{\tau, p} SD = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{|f(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j) - c_{ij}|^2}{c_{ij}}$$

Los parámetros  $\tau$  y  $p$  se determinan mediante una búsqueda exhaustiva sobre los valores de  $\tau$  y  $p$  factibles, hasta conseguir la minimización de  $AD$  o  $SD$ . Este procedimiento puede requerir un gran número de operaciones y tiempo de computación si se trabaja con grandes muestras.

La elección de  $\tau l_p(\cdot)$  como estimador se fundamenta en que suponemos que la red es no-dirigida y está suficiente desarrollada en el sentido de que la ruta real entre dos puntos de la red empotrada en el plano discurre sobre una trayectoria curvilínea sin retrocesos dentro del rectángulo cuya diagonal tiene a dichos puntos como vértices opuestos. Para asegurarse este contexto es necesario trabajar con grandes muestras o ser muy riguroso al admitir que una muestra escasa de puntos sea representativa de todo un área de transporte.

Las dudas sobre la idoneidad del uso de funciones  $l_p$  ponderadas como estimadores que aparecen en Berens [1988] son el fruto de una muestra escasa (la muestra española citada en Berens [1988] se refiere a doce ciudades) con un número significativo de pares origen-destino que necesitaban un factor de inflación mayor que la unidad casi exclusivamente cuando las trayectorias eran paralelas a los ejes. Las conclusiones de Berens fueron refutadas más tarde por Love y Morris [1988] sencillamente aumentando la muestra del área de transporte, con lo que los sesgos se distribuyeron más homogéneamente.

Aunque la suposición de *buen desarrollo* de la red induce a pensar que basta considerar para  $p$  un intervalo  $p \in [1, 2]$ , sin embargo en Love y Dowling [1985] se concluye que valores de  $l_p$ ,  $p < 1$ , pueden ser útiles en diferentes contextos en conjunción de un  $\tau$  adecuado. Por consiguiente, la forma típica de proceder (ver Brimberg y Love [1991]) es recorrer el intervalo  $p \in [0.5, 3]$  variando con  $\Delta p = 0.05$  para obtener los factores de inflación  $\tau_1^*(p)$  y  $\tau_2^*(p)$  que minimizan las funciones

$AD(\tau)$  y  $SD(\tau)$ , cuyo comportamiento es convexo (ver Brimberg y Love [1991]) una vez prefijado  $p$ . Las parejas  $(p_1^*, \tau_1^*(p))$  y  $(p_2^*, \tau_2^*(p))$  que minimizan  $AD(\tau, p)$  y  $SD(\tau, p)$  serán las adecuadas para estimar las distancias de la red.

Tal como se señala en Brimberg y Love [1991], los valores de  $p_1^*$  y  $p_2^*$  esperados estarán en el intervalo  $(0, 2]$  ya que la adecuación de los ejes coordenados garantiza que la solución no vaya a dar una norma  $l_p$  extraña (con  $p > 2$ ), en el sentido de que haya una medida de distancia entre dos puntos de la superficie terrestre inferior a la medida del segmento que une ambos puntos.

### Otros criterios de estimación.

Usando los sesgos direccionales respecto a la norma euclídea,

$$r_p(\theta) = \frac{l_p(\mathbf{x})}{l_2(\mathbf{x})}, \forall \mathbf{x} = (x_1, x_2) \text{ y } \theta = \arctan(x_2/x_1)$$

surge un tercer criterio:

#### Criterio 3

$$\min_{\tau, p} SND = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |\tau r_p(\theta_{ij}) - b_{ij}|^2$$

donde  $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2})$ ,  $\mathbf{v}_j = (v_{j1}, v_{j2})$ ,  $\theta_{ij} = \arctan\left(\frac{v_{i2} - v_{j2}}{v_{i1} - v_{j1}}\right)$  y  $b_{ij} = \frac{c_{ij}}{l_2(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j)}$ .

Este criterio ha sido usado para justificar la aproximación de una distancia  $l_q(x)$  con  $q > 2$  mediante  $hl_p(x^*)$  donde  $p \in (1, 2)$ ,  $h$  un factor de escala menor que uno y  $x^*$  son las coordenadas de  $x$  giradas 45 grados (ver Brimberg y Love [1993 b]).

#### Criterio 4

Además de los anteriores, en Brimberg y Love [1993 a, 1993 b] se aplicó un *modelo de regresión lineal* de coeficientes  $k_1, k_2 \in R$ , que aproxima la distancia de viaje  $c_{ij}$  entre dos puntos de la red a partir de la combinación:

$$k_1 l_1(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j) + k_2 l_2(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j) \quad \forall i, j; i \neq j$$

El sistema superdeterminado al que se llega es el compuesto por la relación de ecuaciones:

$$k_2 + k_1 \frac{l_1(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j)}{l_2(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j)} \triangleq \frac{c_{ij}}{l_2(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j)} \quad \forall i, j; i \neq j$$

La resolución del sistema lineal de ecuaciones resultante es más rápida que la búsqueda exhaustiva que supone el algoritmo de rejilla usado en Love y Brimberg [1991], por lo que puede considerarse esta aportación una mejora en el tiempo de computación.



# Capítulo 2

## Un calibrador plano asociado a cada norma $l_p$ , $p \in [1, 2)$

### 2.1. NORMA ASOCIADA A UNA RED DENSA $\phi$ -DEFORMADA.

#### Definición 2.1

Sea  $A = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_k; -\mathbf{g}_1, -\mathbf{g}_2, \dots, -\mathbf{g}_k\}$  un conjunto finito de  $2k$  vectores distintos de  $\mathbb{R}^2$  con norma euclídea unidad  $\|\mathbf{g}_i\|_2 = 1, \forall i$ . Diremos que existe sobre el plano una *red densa* en las direcciones de  $A$  si cada punto del plano se supone atravesado por los vectores de  $A$  y sólo por ellos.

En Ward y Wendell [1980] se analizan las redes densas generadas por los vectores:

a)  $[k = 2]: \mathbf{g}_1 = (1, 0), \mathbf{g}_2 = (0, 1)$

b)  $[k = 2]: \mathbf{g}_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbf{g}_2 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

c)  $[k = 4]: \mathbf{g}_1 = (1, 0), \mathbf{g}_2 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), \mathbf{g}_3 = (0, 1), \mathbf{g}_4 = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$

y se deduce que  $\|\cdot\|_1$  mide con exactitud en el primer caso el tiempo de viaje entre cada dos puntos del plano para dicha red densa,  $\|\cdot\|_\infty$  hace lo propio para el segundo caso y  $\|\cdot\|_1 + \sqrt{2} \|\cdot\|_\infty$  para el tercero.

#### Definición 2.2

Denominaremos *red densa  $\phi$ -deformada* a la red densa plana en las direcciones  $A = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2; -\mathbf{g}_1, -\mathbf{g}_2\}$  donde  $\mathbf{g}_1 = (1, 0), \mathbf{g}_2 = (\cos \phi, \sin \phi)$ .

En dicha red, cada viaje representado por el vector  $\mathbf{x}$  habrá de descomponerse como suma de un vector  $\mathbf{u}$  paralelo a  $(1, 0)$  y otro vector  $\mathbf{w}$  paralelo a  $(\cos \phi, \sin \phi)$ . El vector  $\mathbf{u}$  se puede obtener a partir de cualquier combinación lineal  $\lambda \mathbf{g}_1 + \mu (-\mathbf{g}_1)$  y la combinación que emplea menor suma  $|\lambda| + |\mu|$  de valores absolutos en sus coeficientes se consigue anulando una de sus componentes, es decir  $\mathbf{u} = \lambda(\pm \mathbf{g}_1)$ , con  $\lambda > 0$ , donde la elección del signo se hace apuntando al mismo semiplano

que el punto extremo del vector  $\mathbf{x}$ . Idéntico razonamiento es válido para la otra componente; con lo que se tiene garantizada la existencia de una descomposición:

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w} = \lambda_1(\pm \mathbf{g}_1) + \lambda_2(\pm \mathbf{g}_2)$$

de coeficientes positivos  $\lambda_i \geq 0$ , adoptando el signo  $(\pm \mathbf{g}_i)$  de forma que  $\mathbf{x}$  se encuentre en el cono convexo generado por los vectores seleccionados.

Para medir la longitud del desplazamiento total en el seno de la red densa plana  $\phi$ -deformada se utiliza la norma  $\|\cdot\|_B$ , donde el subíndice  $B$  denota el convexo compacto simétrico con origen en su interior asociado. Dicha norma genera unívocamente una métrica como la establecida en Widmayer, Yu y Wong [1987].

### Definición 2.3

Se define *norma asociada a la red  $\phi$ -deformada* a la función plana tal que  $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ :

$$\|\mathbf{x}\|_B = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_2 & ; \text{ si } \exists i : \mathbf{x} = \lambda \mathbf{g}_i, \lambda \in \mathbb{R}; \\ \min_{\text{s.a. } \mathbf{x}=\mathbf{u}+\mathbf{w}} \|\mathbf{u}\|_B + \|\mathbf{w}\|_B & ; \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

La aplicación  $\|\cdot\|_B$  está bien definida, a pesar de la recursividad de su expresión, y es inmediato probar que es una norma debido a que en los casos ya que una nueva partición en componentes agrandaría el resultado de  $\|\mathbf{x}\|_B$ , en virtud de la desigualdad triangular de la norma euclídea.

### Teorema 2.1

La bola unidad  $B$  de la norma  $\|\cdot\|_B$  es el politopo de vértices:

$$\{(1, 0), (\cos \phi, \sin \phi), (-1, 0), (-\cos \phi, -\sin \phi)\}.$$

### Demostración.

Consideremos que  $\varphi$  sea el argumento de un vector  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  cualquiera del plano y  $P \equiv (x_1, x_2)$  su afijo situado a distancia unidad desde el origen medido mediante  $\|\mathbf{x}\|_B$ . Dicho argumento tiene cuatro posibilidades:

**Caso 1:**  $\varphi \in [0, \phi)$  (ver Fig.[2.1]).

Proyectemos  $P \equiv (x_1, x_2)$  según la dirección del vector  $(\cos \phi, \sin \phi)$  sobre el eje OX y se obtiene el vector  $\mathbf{u}$  sobre el eje, y  $\mathbf{w}$  completando la ecuación vectorial que minimiza la norma  $\|\mathbf{x}\|_B$ :  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ .

Sean  $h = \| \mathbf{u} \|_2$  y  $d = \| \mathbf{w} \|_2$ , y sea  $\rho = \| \mathbf{x} \|_2$ .

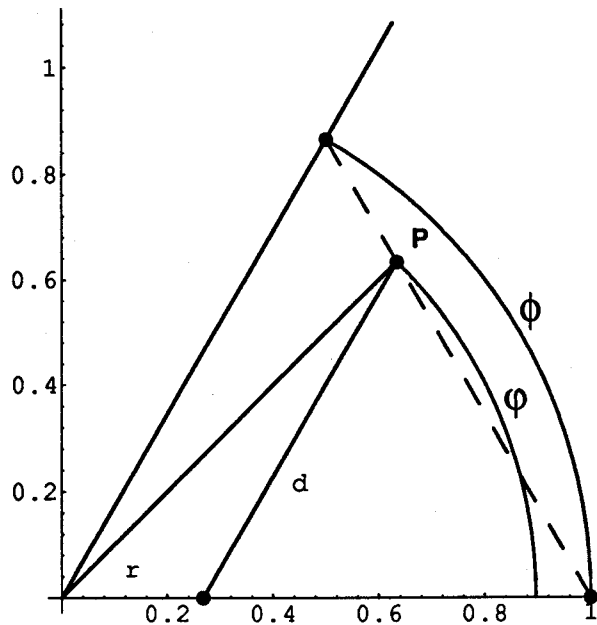


Fig.[2.1]: Descomposición  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ .

De esta forma,

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos(\varphi) \\ x_2 = \rho \operatorname{sen}(\varphi) \end{cases}$$

y por otro lado:

$$\begin{cases} x_1 = h + d \cos(\phi) \\ x_2 = d \operatorname{sen}(\phi) \end{cases}$$

Identificando:

$$\begin{cases} h + d \cos(\phi) = \rho \cos(\varphi) \\ d \operatorname{sen}(\phi) = \rho \operatorname{sen}(\varphi) \end{cases}$$

Imponiendo que la longitud del trayecto sea 1,  $h + d = 1$ , y despejando  $d$  en la segunda igualdad se obtiene tras sustituir en la primera:

$$d = \frac{\rho \operatorname{sen}(\varphi)}{\operatorname{sen}(\phi)}; \quad h = 1 - \frac{\rho \operatorname{sen}(\varphi)}{\operatorname{sen}(\phi)}$$

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema que eliminaba  $x_1$  y  $x_2$ :

$$1 - \frac{\rho \operatorname{sen}(\varphi)}{\operatorname{sen}(\phi)} + \frac{\rho \operatorname{sen}(\varphi) \cos(\phi)}{\operatorname{sen}(\phi)} = \rho \cos(\varphi)$$

Despejando  $\rho$  y teniendo en cuenta la definición de  $\operatorname{sen}(\phi - \varphi)$ :

$$\rho = \frac{\operatorname{sen}(\phi)}{\operatorname{sen}(\varphi) + \operatorname{sen}(\phi - \varphi)}$$

Observar que la relación en coordenadas polares obtenida representa la recta que pasa por los puntos  $(1, 0)$  y  $(\cos \phi, \text{sen} \phi)$ , por lo que la frontera de  $B$  es efectivamente rectilínea en lo que respecta al pseudocuartante  $\varphi \in [0, \phi)$ .

**Caso 2:**  $\varphi \in [\phi, \pi)$  (ver Fig.[2.2]).

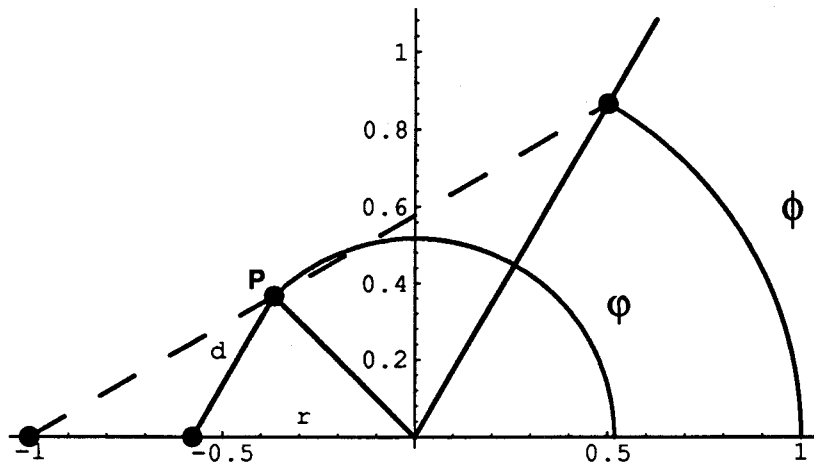


Fig.[2.2]: Descomposición  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ .

Proyectando  $P \equiv (x_1, x_2)$  sobre el eje OX según la dirección del vector  $(\cos \phi, \text{sen} \phi)$ , se obtiene el vector  $\mathbf{u}$  sobre el eje, y  $\mathbf{w}$  completando la ecuación vectorial:  $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ . Sean  $h = \|\mathbf{u}\|_2$  y  $d = \|\mathbf{w}\|_2$ , y sea  $\rho = \|\mathbf{x}\|_2$ . De esta forma,

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos(\varphi) \\ x_2 = \rho \text{sen}(\varphi) \end{cases}$$

y por otro lado:

$$\begin{cases} x_1 = -h + d \cos(\phi) \\ x_2 = d \text{sen}(\phi) \end{cases}$$

Identificando ambos resultados:

$$\begin{cases} -h + d \cos(\phi) = \rho \cos(\varphi) \\ d \text{sen}(\phi) = \rho \text{sen}(\varphi) \end{cases}$$

Despejando  $d$  en la segunda igualdad se obtiene:  $d = \frac{\rho \text{sen}(\varphi)}{\text{sen}(\phi)}$ . E imponiendo que  $h + d = 1$  la longitud del trayecto sea 1,  $h = 1 - \frac{\rho \text{sen}(\varphi)}{\text{sen}(\phi)}$ .

Sustituyendo en la primera ecuación del sistema que eliminaba  $x_1$  y  $x_2$ :

$$-1 + \frac{\rho \text{sen}(\varphi)}{\text{sen}(\phi)} + \frac{\rho \text{sen}(\varphi) \cos(\phi)}{\text{sen}(\phi)} = \rho \cos(\varphi)$$

Despejando  $\rho$  y teniendo en cuenta la definición de  $\text{sen}(\varphi - \phi)$ :

$$\rho = \frac{\text{sen}(\phi)}{\text{sen}(\varphi) + \text{sen}(\varphi - \phi)}$$

Observar que la relación en coordenadas polares obtenida representa la recta que pasa por los puntos  $(-1, 0)$  y  $(\cos(\phi), \text{sen}(\phi))$ , por lo que la frontera de  $B$  es efectivamente rectilínea en lo que respecta al pseudocuartante  $\varphi \in [\phi, \pi)$ .

**Casos 3 y 4:**  $\varphi \in [\pi, \pi + \phi)$  y  $\varphi \in [\pi + \phi, 2\pi)$ .

La simetría respecto al origen de la norma hace innecesario verificar estos casos.  
q.e.d.

En Fig.[2.3] se observan el politopo unidad de la norma  $\|\cdot\|_B$  y su sesgo asociado.

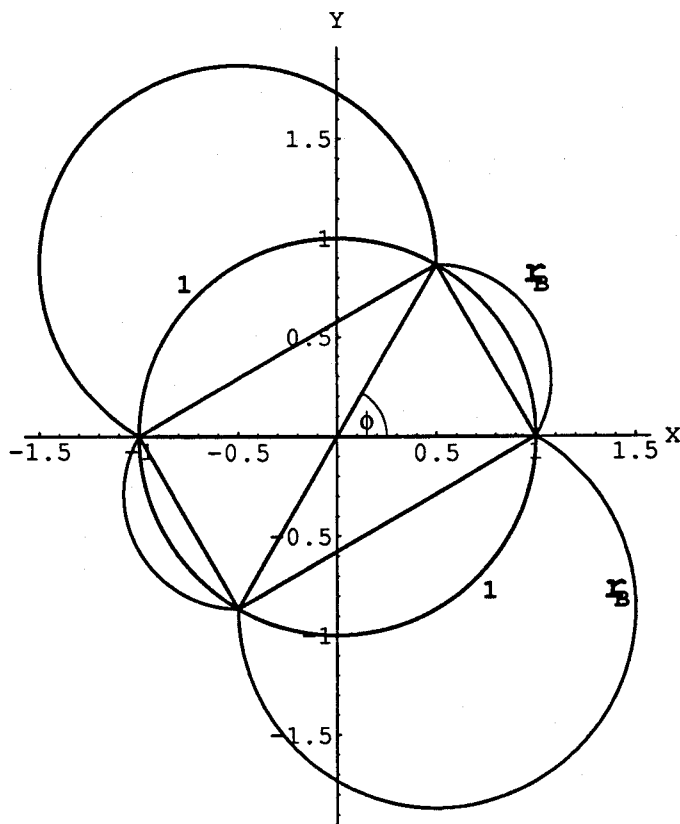


Fig. [2.3]: Politopo unidad y su sesgo.

## 2.2. INTERPOLACIÓN DE LOS SESGOS EN LA MALLA BÁSICA $\phi$ -DEFORMADA.

El teorema anterior garantiza que  $\|\cdot\|_B$  sea una norma bloque y su correspondiente sesgo, que denominaremos  $\phi$ -sesgo es:

$$r_B(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x}\|_B}{\|\mathbf{x}\|_2}$$

### Expresión analítica del $\phi$ -sesgo.

Si  $\mathbf{x} = \rho(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \in \partial B$ , es decir la frontera de la bola unidad, con  $\varphi \in [0, \pi)$ , tenemos que:

$$\rho = \begin{cases} \frac{\sin(\phi)}{\sin(\varphi) + \sin(\phi - \varphi)} & \text{si } \varphi \in [0, \phi) \\ \frac{\sin(\phi)}{\sin(\varphi) + \sin(\varphi - \phi)} & \text{si } \varphi \in [\phi, \pi) \end{cases}$$

Además, por ser  $\mathbf{x} \in \partial B$ , se tiene que  $\|\mathbf{x}\|_B = 1$ , y por tanto:

$$r_B(\mathbf{x}) = r_B(\varphi) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2} = \frac{1}{\rho} = \begin{cases} \frac{\sin(\varphi) + \sin(\phi - \varphi)}{\sin(\phi)} & \text{si } \varphi \in [0, \phi) \\ \frac{\sin(\varphi) + \sin(\varphi - \phi)}{\sin(\phi)} & \text{si } \varphi \in [\phi, \pi) \end{cases}$$

Desarrollando  $\sin(\phi - \varphi)$  y  $\sin(\varphi - \phi)$ , se tiene tras simplificar:

$$r_B(\mathbf{x}) = r_B(\varphi) = \begin{cases} \cos(\varphi) + \frac{1 - \cos(\phi)}{\sin(\phi)} \sin(\varphi) & \text{si } \varphi \in [0, \phi) \\ -\cos(\varphi) + \frac{1 + \cos(\phi)}{\sin(\phi)} \sin(\varphi) & \text{si } \varphi \in [\phi, \pi) \end{cases}$$

Y factorizando las sumas mediante

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

se tiene, tras simplificar, una tercera forma de expresar el sesgo:

$$r_B(\mathbf{x}) = r_B(\varphi) = \begin{cases} \frac{\cos(\varphi - \phi/2)}{\cos(\phi/2)} & \text{si } \varphi \in [0, \phi) \\ \frac{\sin(\varphi - \phi/2)}{\cos(\phi/2)} & \text{si } \varphi \in [\phi, \pi) \end{cases}$$

**Propiedades del  $\phi$ -sesgo.**

**P 1.** Existen cuatro direcciones insesgadas privilegiadas en la primera vuelta:

$$r_B(0) = r_B(\phi) = r_B(\pi) = r_B(\pi + \phi) = 1$$

**P 2.** Además de la simetría central respecto al polo:

$$r_B(\varphi) = r_B(\varphi + \pi); \forall \varphi \in [0, 2\pi]$$

existe simetría respecto a la bisectriz de cada par de direcciones insesgadas adyacentes, es decir los ejes:  $\theta = \phi/2$ ,  $\theta = (\pi + \phi)/2$ ,  $\theta = \pi + \phi/2$  y  $\theta = \pi + (\pi + \phi)/2$ .

**P 3.** En el intervalo  $\varphi \in [0, \phi/2]$  la función  $r_B(\varphi)$  es estrictamente creciente y alcanza el máximo en el extremo  $\varphi = \phi/2$ .

**Malla básica  $\phi$ -deformada.**

Consideremos la malla básica  $M$  en forma de paralelepípedo determinada por los vértices (ver Fig.[2.4]):

$$v_1 \equiv (0, 0), v_2 \equiv (x_1, 0), v_3 \equiv (x_2 \cos \phi, x_2 \operatorname{sen} \phi), v_4 \equiv (x_1 + x_2 \cos \phi, x_2 \operatorname{sen} \phi)$$

En esta sección veremos que, excepto cuando  $\phi = \pi/2$ , no existe ninguna función  $rr_p(\varphi)$  que interpole los sesgos correspondientes a las posibles direcciones de la malla básica.

La matriz de direcciones de los pares de nodos origen-destino es:

$$(\theta_{ij}) = \begin{pmatrix} - & 0 & \phi & \beta \\ \pi & - & \gamma & \phi \\ \pi + \phi & \pi + \gamma & - & 0 \\ \pi + \beta & \pi + \phi & \pi & - \end{pmatrix}$$

donde:

$$\beta = \arctan\left(\frac{x_2 \operatorname{sen}(\phi)}{x_2 \cos(\phi) + x_1}\right), \quad \gamma = \arctan\left(\frac{x_2 \operatorname{sen}(\phi)}{x_2 \cos(\phi) - x_1}\right)$$

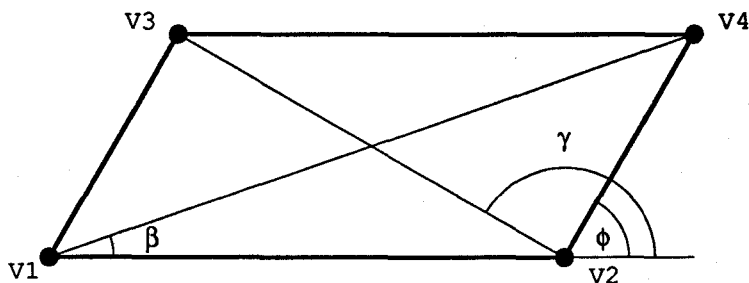


Fig. [2.4]: Malla patrón.

La matriz de sesgos  $R_M = (r_{ij}) = (\| \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \|_B / \| \mathbf{v}_i \mathbf{v}_j \|_2)$  de las razones entre distancias en el grafo  $M$  y distancias en el plano es:

$$(r_{ij}) = \begin{pmatrix} - & 1 & 1 & r_M(\beta) \\ 1 & - & r_M(\gamma) & 1 \\ 1 & r_M(\pi + \gamma) & - & 1 \\ r_M(\pi + \beta) & 1 & 1 & - \end{pmatrix}$$

donde

$$r_M(\beta) = r_M(\pi + \beta) = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{(x_2 \cos(\phi) + x_1)^2 + (x_2 \sin(\phi))^2}}$$

y

$$r_M(\gamma) = r_M(\pi + \gamma) = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{(x_2 \cos(\phi) - x_1)^2 + (x_2 \sin(\phi))^2}}$$

Los correspondientes sesgos resultantes de utilizar distancia rectangular son:

$$r_1(\beta) = \frac{x_1 + x_2(\cos(\phi) + \sin(\phi))}{\sqrt{(x_2 \cos(\phi) + x_1)^2 + (x_2 \sin(\phi))^2}}$$

y

$$r_1(\gamma) = \frac{-x_1 + x_2(\cos(\phi) + \sin(\phi))}{\sqrt{(x_2 \cos(\phi) - x_1)^2 + (x_2 \sin(\phi))^2}}$$

Así:

$$r_M(\beta) < r_1(\beta), r_M(\gamma) > r_1(\gamma); \quad \forall \phi \in (0, \pi/2)$$

Veremos que, excepto cuando  $\phi = \pi/2$ , no hay ninguna función biparamétrica  $\tau r_p(\varphi)$  que interpole los valores del sesgo correspondientes a la malla, donde  $\tau > 0$  es un factor de inflación usado para estimar distancias de viaje (ver Love and Morris [1972]).

### **Lema 2.1**

Si la deformación de la malla básica es nula ( $\phi = \pi/2$ ) entonces la función interpolante de los puntos  $(\theta_{ij}, r_{ij})$  correspondientes a los elementos de la matriz de sesgos es  $1 r_1(\varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$ .

### **Demostración.**

Dado que  $\phi = \pi/2$ , implica que  $r_M(\varphi) = r_1(\varphi) = 1$  cuando  $\varphi = 0, \phi, \pi, \phi + \pi$ , entonces, las siguientes igualdades justifican el lema:

$$r_M(\pi/2) = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = r_1(\pi/2)$$

$$r_M(\beta) = r_M(\pi + \beta) = r_1(\beta) = r_1(\pi + \beta)$$

$$r_M(\gamma) = r_M(\pi + \gamma) = r_1(\gamma) = r_1(\pi + \gamma)$$

**q.e.d.**



**Lema 2.2**

Si la deformación de la malla básica es no nula ( $\phi \neq \pi/2$ ), entonces no hay ninguna función  $\tau r_p(\varphi)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi)$  que interpole los puntos  $(\theta_{ij}, r_{ij})$  correspondientes a los elementos de la matriz de sesgos.

**Demostración.**

Puesto que el caso 1-sesgo da lugar a:

$$r_1(\beta) = \frac{x_1 + x_2(\cos \phi + \operatorname{sen} \phi)}{\sqrt{(x_2 \cos \phi + x_1)^2 + (x_2 \operatorname{sen} \phi)^2}} ; r_1(\gamma) = \frac{-x_1 + x_2(\cos \phi + \operatorname{sen} \phi)}{\sqrt{(x_2 \cos \phi - x_1)^2 + (x_2 \operatorname{sen} \phi)^2}}$$

entonces las desigualdades:

$$r_M(\beta) < r_1(\beta), r_M(\gamma) > r_1(\gamma); \quad \forall \phi \in (0, \pi/2)$$

$$r_M(\beta) < r_1(\beta), r_M(\gamma) > r_1(\gamma), \quad \forall \phi \in (0, \pi/2)$$

indican que para  $r_M(\beta)$  el valor  $p$  del interpolante tipo  $\tau r_p(\phi)$  habría que buscarlo en  $p \in (1, 2)$  con  $\tau = 1$  para que los casos insesgados queden ajustados. Sin embargo, para interpolar  $r_M(\gamma)$  es necesario emplear un valor de  $p$  en el intervalo  $p \in (0, 1)$ .

q.e.d.

**2.3 FUNCIONES  $l_p$ ,  $p \in (0, 2)$ , INDUCIDAS POR LOS  $\phi$ -SESGOS.**

En esta sección buscaremos un valor de  $p$  tal que el sesgo  $r_p$  correspondiente se aproxime al de la norma  $\| \cdot \|_B$ . Sin embargo, los resultados de la sección anterior indican que no es suficiente un único  $p$  sino que hay que buscar un  $p \in (1, 2)$  y un  $q \in (0, 1)$  correspondiendo respectivamente a los intervalos  $[0, \phi]$  y  $[\phi, \pi]$  respectivamente.

Dado que  $r_B(0) = r_p(0) = 1$ ;  $r_B(\phi) = r_p(\pi/2) = 1 \quad \forall p \in (0, 2]$ , podemos usar interpolación para ajustar el punto medio que corresponde al máximo de la función sesgo; es decir, imponiendo:

$$r_B(\phi/2) = r_p(\pi/4)$$

Esta técnica de interpolación es análoga a la empleada en integración numérica para la regla de Simpson (ver Burden y Faires [1985], pág. 175) y, en teoría de Localización, se ha usado en el artículo de Brimberg y Wesolowsky [1992], pág. 69, para anular la denominada *diferencia normalizada* en el punto  $\theta = \pi/4$  y así determinar un parámetro  $\alpha$  con el que aproximar  $l_p(\mathbf{x})$  mediante la combinación  $\alpha l_2(\mathbf{x}) + (1 - \alpha) l_{p_L}(\mathbf{x})$ , siendo  $p_L \in (0, 2)$ .

**Definición 2.3**

Se dice que la norma  $l_p(\cdot)$  aproxima a la norma  $\| \cdot \|_B$  en términos del  $p$ -sesgo cuando  $p$  es la solución de la ecuación:

$$r_p(\pi/4) = r_B(\phi/2).$$

De esta forma

$$l_p(\mathbf{x}) = l_2(\mathbf{x}) r_p(\omega) \approx l_2(\mathbf{x}) r_B(\omega), \quad \text{para } \omega \in [0, 2\pi)$$

### **Teorema 2.2**

La función  $l_p$  con  $p \in (1, 2)$  que, para desplazamientos de inclinación  $\varphi \in [0, \phi]$ , aproxima a  $\|\cdot\|_B$  en términos del  $p$ -sesgo es la que se obtiene para:

$$p = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{2}{\cos^2(\phi/2)}\right)}$$

### **Demostración.**

Sea el polítopo  $B$  de vértices:  $(1, 0)$ ,  $(\cos \phi, \sin \phi)$ ,  $(-1, 0)$  y  $(-\cos \phi, -\sin \phi)$ .

El punto  $P \equiv \left(\frac{1+\cos(\phi)}{2}, \frac{\sin(\phi)}{2}\right)$  es el punto medio del segmento del polítopo  $B$  correspondiente al intervalo  $[0, \phi]$ .

La norma euclídea del vector  $\vec{OP}$  asociado es:

$$r = \|\vec{OP}\|_2 = \sqrt{\left(\frac{1+\cos(\phi)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\phi)}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2+2\cos(\phi)}{4}} = \cos(\phi/2)$$

mientras que  $\|\vec{OP}\|_B = 1$ .

Imponiendo la condición interpoladora  $r_B(\phi/2) = r_p(\pi/4)$  resulta que:

$$\left(\left(r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^p + \left(r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^p\right)^{1/p} = 1$$

es decir:

$$\left(r\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2^{1/p} = 1$$

Sustituyendo  $r$  por  $\cos(\phi/2)$  resulta:

$$2^{1/p-1/2} = \frac{1}{\cos(\phi/2)}, \quad \text{es decir } p = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{2}{\cos^2(\phi/2)}\right)}$$

**q.e.d.**

### **Teorema 2.3**

La función  $l_q$  con  $q \in (0, 1)$  tal que para desplazamientos de inclinación  $\varphi \in [\phi, \pi]$ , aproxima a  $\|\cdot\|_B$  en términos del  $q$ -sesgo es la que se obtiene para:

$$q = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{2}{\sin^2(\phi/2)}\right)}$$

### **Demostración.**

Consideremos el punto medio del segmento del polítopo  $B$  correspondiente al intervalo  $[\phi, \pi]$ . Es decir,  $P \equiv \left(\frac{-1+\cos(\phi)}{2}, \frac{\sin(\phi)}{2}\right)$ .

La norma euclídea del vector  $\vec{OP}$  asociado es ahora:

$$r = \|\vec{OP}\|_2 = \sqrt{\left(\frac{-1 + \cos(\phi)}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sin(\phi)}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2 - 2\cos(\phi)}{4}} = \sin(\phi/2)$$

y, por estar en la frontera de  $B$ ,  $\|\vec{OP}\|_B = 1$ .

Imponiendo la condición  $r_B(\frac{\pi+\phi}{2}) = r_q(\frac{3\pi}{4})$  resulta:

$$\left(\left(r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^q + \left(r\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^q\right)^{1/q} = 1$$

de donde:

$$\left(r\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot 2^{\frac{1}{q}} = 1$$

Y sustituyendo  $r$  por  $\sin(\phi/2)$  resulta:

$$2^{1/q-1/2} = \frac{1}{\sin(\phi/2)}, \text{ es decir } q = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{2}{\sin^2(\phi/2)}\right)}$$

**q.e.d.**

Obsérvese que de

$$\begin{cases} p = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{2}{\cos^2(\phi/2)}\right)} \in [1, 2] \\ q = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{2}{\sin^2(\phi/2)}\right)} \in (0, 1) \end{cases}$$

se deduce

$$\begin{cases} \cos(\phi/2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[p]{2}} \\ \sin(\phi/2) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[q]{2}} \end{cases}$$

Eliminando  $\phi$  resulta la ecuación:

$$1 = 2^{\frac{p-2}{p}} + 2^{\frac{q-2}{q}}$$

Dado que la función  $y = 2^{\frac{x-2}{x}}$ ,  $x \in (0, 2]$  es estrictamente creciente en dicho intervalo, admite inversa y por tanto: dado  $p \in (1, 2]$  existe un único  $q \in [0, 1)$  tal que verifique dicha ecuación. La representación gráfica de  $y = 2^{\frac{x-2}{x}}$ ,  $x \in (0, 2]$  puede ayudar al cálculo del correspondiente  $q \in [0, 1)$  para un valor dado de  $p \in (1, 2]$ .

Ver Fig.[2.5] e interpretar la entrada al eje  $OY$  y la salida de dicho eje siguiendo la flecha.

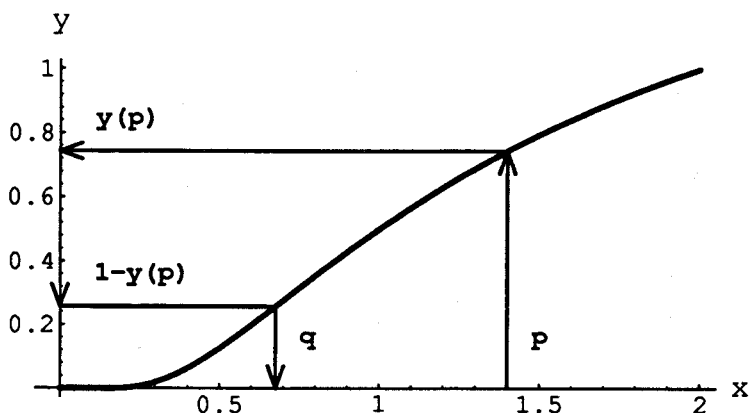


Fig.[2.5]: Valores asociados de  $p$  y  $q$ .

### Nota 2.1

La relación entre  $p$  y  $q$  obtenida:

$$1 = 2^{\frac{p-2}{p}} + 2^{\frac{q-2}{q}}$$

es diferente de la dualidad habitual:

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

### El ajuste de cuadrantes.

Denotemos por  $\varphi = \text{Arg}(x) \in [-\pi, \pi]$  a la orientación del vector. Con objeto de reducir el dominio de direcciones  $\varphi$  de  $[-\pi, \pi]$  a  $[0, \pi]$ , vamos a realizar un reajuste de los cuadrantes mediante las transformaciones  $z_k$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ . Clasificaremos la posición de la variable  $\varphi$  en alguna de las porciones circulares:  $[0, \phi]$ ,  $[\phi, \pi]$ ,  $[\pi, \phi + \pi]$  y  $[\phi + \pi, 2\pi]$ , y mediante la correspondiente  $z_k(\varphi)$  se transformará en el ángulo  $\omega$  perteneciente al cuadrante asociado:  $[0, \pi/2)$ ,  $[\pi/2, \pi)$ ,  $[\pi, 3\pi/2)$  o  $[3\pi/2, 2\pi)$ .

Los cambios de variable necesarios son:

a)  $\varphi \in [0, \phi) \implies \omega = z_1(\varphi) = (\pi/2) \cdot \frac{\varphi}{\phi} \in [0, \pi/2)$ .

b)  $\varphi \in [\phi, \pi) \implies \omega = z_2(\varphi) = (\pi/2) \cdot \frac{\pi + \varphi - 2\phi}{\pi - \phi} \in [\pi/2, \pi)$ .

c)  $\varphi \in [\pi, \phi + \pi) \implies \omega = z_3(\varphi) = (\pi/2) \cdot \frac{-\pi + \varphi + 2\phi}{\phi} \in [\pi, 3\pi/2)$ .

d)  $\varphi \in [\phi + \pi, 2\pi) \implies \omega = z_4(\varphi) = (\pi/2) \cdot \frac{2\pi + \varphi - 4\phi}{\pi - \phi} \in [3\pi/2, 2\pi)$ .

### Lema 2.3

Si  $r(\varphi)$  es un sesgo del tipo  $\tau \cdot r_p(\varphi)$ , entonces si  $\varphi' = \varphi + \pi$  con  $\varphi \in [0, \phi)$  se verifica que

$$r(z_3(\varphi')) = r(z_1(\varphi))$$

**Demostración.**

$$z_3(\varphi') = z_3(\varphi + \pi) = (\pi/2) \cdot \frac{\varphi + 2\phi}{\phi} = (\pi/2) \cdot \frac{\varphi}{\phi} + \pi = z_1(\varphi) + \pi$$

La simetría central asegura  $r(z_3(\varphi')) = r(z_1(\varphi))$ .

**q.e.d.**

**Lema 2.4**

Si  $r(\varphi)$  es un sesgo del tipo  $\tau \cdot r_p(\varphi)$ , entonces si  $\varphi' = \varphi + \pi$  con  $\varphi \in [\phi, \pi)$  se verifica que

$$r(z_4(\varphi')) = r(z_2(\varphi))$$

**Demostración.**

$$z_4(\varphi') = z_2(\varphi + \pi) = (\pi/2) \cdot \frac{3\pi + \varphi - 4\phi}{\pi - \phi} = (\pi/2) \cdot \frac{\pi + \varphi - 2\phi}{\pi - \phi} + \pi = z_2(\varphi) + \pi$$

La simetría central asegura  $r(z_4(\varphi')) = r(z_2(\varphi))$ .

**q.e.d.**

La función que recoge los cambios definidos y que permite reducir el dominio a  $[0, \pi]$  es:

$$z_\phi(\varphi) = \begin{cases} z_1(|\varphi|), & \text{si } |\varphi| \in [0, \phi] \\ z_2(|\varphi|), & \text{si } |\varphi| \in (\phi, \pi] \end{cases}$$

## 2.4 APROXIMACIÓN NUMÉRICA DEL $p$ -SESGO, $p \in (0, 2)$ , MEDIANTE $\phi$ -SESGOS.

La correspondencia biunívoca entre la deformación  $\phi$  y su función  $l_p$  interpolante hace que se pueda plantear el problema a la inversa.

Sea  $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|_2 (\cos \omega, \sin \omega)$  y supongamos que deseamos calcular aproximadamente el valor  $l_p(\vec{x})$  para un cierto  $p \in (0, 2)$ . Como  $l_p(\mathbf{x}) = l_2(\mathbf{x}) r_p(\omega)$ , vamos a aproximar la componente  $r_p(\omega)$ ,  $\omega \in [0, 2\pi)$ .

Continuando con la notación anterior, emplearemos el subíndice  $p$  cuando en general  $p \in (0, 2)$  y particularmente si  $p \in [1, 2)$ . Cuando específicamente el subíndice se encuentre en el intervalo  $(0, 1)$  lo representaremos por  $q \in (0, 1)$ .

El primer paso será calcular la deformación asociada tras aplicar inversamente una de las ecuaciones:

$$\text{a) } p = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{2}{\cos^2(\phi/2)}\right)} \quad \text{si } p \in [1, 2] ; \text{ es decir:}$$

$$\phi = 2 \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2^p}}\right)$$

b) o  $q = \frac{\log(4)}{\log(\frac{2}{\sin^2(\phi/2)})}$  si  $q \in (0, 1)$ ; es decir:

$$\phi = 2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{q}\right)$$

Vimos que el politopo bola unidad de la malla  $\phi$ -deformada tenía un primer pseudocuadrante asociado a valores de  $p \in [1, 2]$  y un segundo pseudocuadrante asociado a valores de  $p \in (0, 1]$ .

Vimos también que  $\omega = z_1(\varphi) = (\pi/2) \cdot \frac{\varphi}{\phi}$  trasladaba valores de  $\varphi \in [0, \phi]$  al intervalo  $\omega \in [0, \pi/2)$  y que  $\omega = z_2(\varphi) = (\pi/2) \cdot \frac{\pi + \varphi - 2\phi}{\pi - \phi}$  convertía valores de  $\varphi \in [\phi, \pi)$  al intervalo  $\omega \in [\pi/2, \pi)$ .

En el ámbito de valores de  $p \in [1, 2]$ , por un procedimiento a la inversa  $\varphi = z_1^{-1}(\omega) = \phi \cdot \frac{\omega}{\pi/2}$  trasladará valores de  $\omega \in [0, \pi/2)$  hacia el argumento  $\varphi \in [0, \phi]$ . Para extender a  $\omega \in [0, 2\pi)$ , basta retocar la ecuación anterior mediante:

$$\varphi = \gamma_p(\omega) = \phi \cdot \left( \frac{\omega}{\pi/2} - E\left(\frac{\omega}{\pi/2}\right) \right), \quad \forall \omega \in [0, 2\pi)$$

donde  $E(t)$  representa la parte entera de  $t \in \mathbb{R}$ .

En la Fig. [2.6] se observa la aproximación de la función  $r_{1.4}$  con esta técnica.

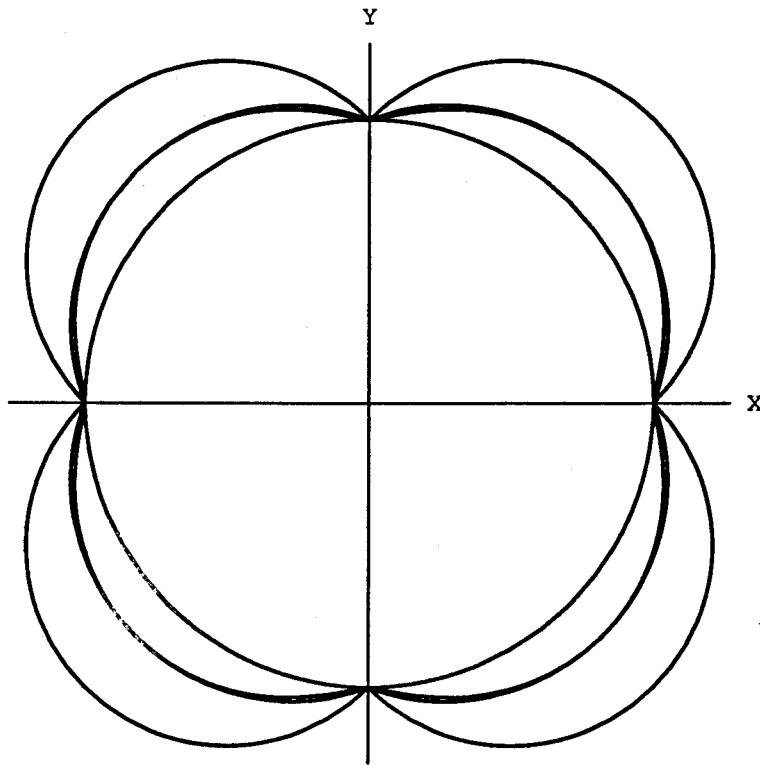


Fig.[2.6]: Aproximando  $r_p$  con  $p = 1.4$ .

En el ámbito de valores de  $p \in (0, 1]$ , por un procedimiento a la inversa,

$$\varphi = z_2^{-1}(\omega) = (\pi - \phi) \frac{\omega}{\pi/2} + (2\phi - \pi)$$

se trasladarían valores de  $\omega \in [\pi/2, \pi)$  hacia el argumento  $\varphi \in [\phi, \pi)$ . Se extiende al resto de cuadrantes mediante:

$$\varphi = \gamma_q(\omega) = (\pi - \phi) \left( \frac{\omega}{\pi/2} - E\left(\frac{\omega}{\pi/2}\right) \right) + \phi, \quad \forall \omega \in [0, 2\pi)$$

En la Fig. [2.7] se observa la aproximación de la función  $r_{0.6}$  con esta técnica.

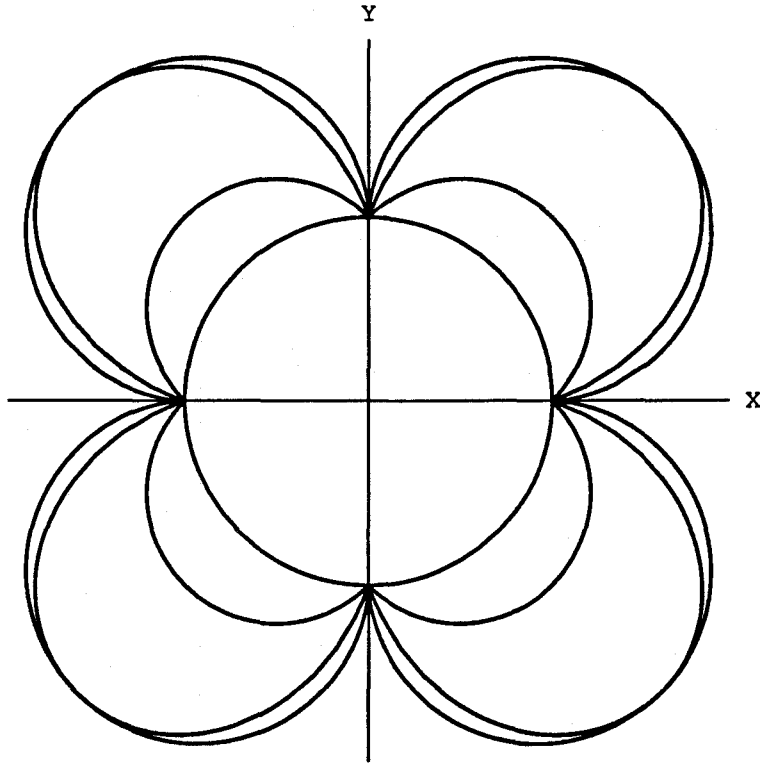


Fig.[2.7]: Aproximando  $r_q$  con  $q = 0.6$ .

La discriminación  $q < 1$  o  $p \geq 1$  hace que se obtenga primeramente el valor de  $\phi$  correspondiente, y posteriormente se aplique la expresión analítica del  $\phi$ -sesgo correspondiente:

a) Primero  $\phi = 2 \arccos \left( \frac{\sqrt{2}}{p/2} \right)$  y después:

$$l_p(\mathbf{x}) = l_2(\mathbf{x}) r_p(\omega) \approx l_2(\mathbf{x}) \frac{\cos(\gamma_p(\omega) - \phi/2)}{\cos(\phi/2)}, \quad \text{para } \omega \in [0, 2\pi)$$

b) Primero  $\phi = 2 \arcsen \left( \frac{\sqrt{2}}{q/2} \right)$  y después:

$$l_q(\mathbf{x}) = l_2(\mathbf{x}) r_q(\omega) \approx l_2(\mathbf{x}) \frac{\sen(\gamma_q(\omega) - \phi/2)}{\sen(\phi/2)}, \quad \text{para } \omega \in [0, 2\pi)$$

### Unificación de criterios.

Definamos la función:

$$\phi(p) = \begin{cases} 2 \operatorname{arcsen} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[p]{2}} \right) & \text{si } p \in (0, 1) \\ 2 \operatorname{arccos} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[p]{2}} \right) & \text{si } p \in [1, 2) \end{cases}$$

Además,

$$\gamma_p(\omega) = \begin{cases} (\pi - \phi(p)) \left( \frac{\omega}{\pi/2} - E\left(\frac{\omega}{\pi/2}\right) \right) + \phi(p) & \text{si } p \in (0, 1) \\ \phi(p) \left( \frac{\omega}{\pi/2} - E\left(\frac{\omega}{\pi/2}\right) \right) & \text{si } p \in [1, 2) \end{cases}$$

Teniendo en cuenta que:

$$|E(p-1)| = \begin{cases} 1 & \text{si } p \in (0, 1) \\ 0 & \text{si } p \in [1, 2) \end{cases}$$

Concluimos que para  $p \in (0, 2)$ :

$$\begin{aligned} r_p(\omega) &= \sqrt[p]{|\cos \omega|^p + |\operatorname{sen} \omega|^p} \approx \\ &\approx E(p) \frac{\cos(\gamma_p(\omega) - \phi/2)}{\cos(\phi/2)} + |E(p-1)| \frac{\operatorname{sen}(\gamma_p(\omega) - \phi/2)}{\operatorname{sen}(\phi/2)} \end{aligned}$$

### 2.5 ERROR DE APROXIMACIÓN PARA $p \in [1, 2)$

Dada la periodicidad de las funciones que intervienen, podemos restringirnos a suponer que el argumento  $\omega$  de un vector cualquiera  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$  se encuentre en el intervalo  $\omega \in [0, \pi/2]$ . Entonces se obtiene para cada  $p \in [1, 2)$  un ángulo  $\phi(p) = 2 \cdot \operatorname{arccos} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[p]{2}} \right)$ .

#### Notación

Mediante  $\phi$  se sobreentenderá:

$$\phi \equiv \phi(p) = 2 \cdot \operatorname{arccos} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[p]{2}} \right)$$

Puesto que la suposición de  $\omega \in [0, \pi/2]$  implica  $\gamma(\omega) = \frac{2\phi}{\pi}\omega$ , el error de aproximar, para cada  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ , el valor de  $l_p(\mathbf{x}) = l_2(\mathbf{x}) r_p(\omega)$  mediante

$$l_2(\mathbf{x}) \frac{\cos(\gamma_p(\omega) - \phi/2)}{\cos(\phi/2)} = l_2(\mathbf{x}) \frac{\cos\left(\frac{2\phi}{\pi}\omega - \phi/2\right)}{\cos(\phi/2)}$$

se puede estudiar a través del error absoluto:

$$\epsilon_p(\omega) = \left| \frac{\cos\left(\frac{2\phi}{\pi}\omega - \phi/2\right)}{\cos(\phi/2)} - r_p(\omega) \right|$$



**Propiedades de la función  $\phi(p)$ .****Lema 2.5**

Para la función  $\phi(p)$ , cuando  $p \in [1, 2]$ , se verifican:

- (a) Continuidad en el intervalo, con  $\phi(1) = \pi/2$  y  $\phi(2) = 0$ .
- (b) Derivabilidad y decrecimiento en  $p \in (1, 2)$ .
- (c) Existencia de un punto de inflexión ( $p \approx 1.51$ ) caracterizado por la solución de

$$\frac{p^2 \log 2}{2^p - 2} = 4p - 2$$

**Demostración.**

(a) Es continua por ser composición de funciones continuas. Y tomando límites, se tiene trivialmente  $\phi(1) = \pi/2$  y  $\phi(2) = 0$ .

(b) Denotando:

$$A(p) = \frac{\log(2) \sqrt{2}}{p 2^{1/p} \sqrt{1 - 2^{\frac{p-2}{p}}}}$$

se tiene sin más que operar:

$$\phi'(p) = \frac{-2 A(p)}{p}$$

Cuando  $p \in (1, 2)$  ya vimos que la función  $2^{\frac{p-2}{p}}$  era estrictamente creciente y tomaba valores en  $(0, 1)$ ; por tanto,  $A(p) > 0$ , y se tiene que  $\phi'(p) < 0$  en  $p \in (1, 2)$ , lo cual prueba que  $\phi(p)$  es estrictamente decreciente.

(c) Con la notación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi''(p) &= (-2) \frac{p A'(p) - A(p)}{p^2} = \\ &= \frac{A(p)}{(4 \log 2) p^4} \left( (p^2 A(p))^2 - 4 \log 2 (2p - 1) \right) \end{aligned}$$

Para que  $\phi''(p) = 0$ , es necesario que:

$$(p^2 A(p))^2 - 4 \log 2 (2p - 1) = 0$$

Dado que la función  $f(p) = (p^2 A(p))^2 - 4 \log 2 (2p - 1)$  es continua en  $[1, 2^-]$  y tiene un cambio de signo en el intervalo  $[1.5, 1.6]$ , existirá un punto de inflexión en el interior caracterizado por ser la solución de la ecuación:

$$\frac{p^2 \log 2}{2^p - 2} = 4p - 2$$

sin más que sustituir el valor de  $A(p)$  y simplificar.

**q.e.d.**

En Fig.[2.8] se recoge la gráfica de  $\phi(p)$  para valores de  $p \in [1, 2]$ .

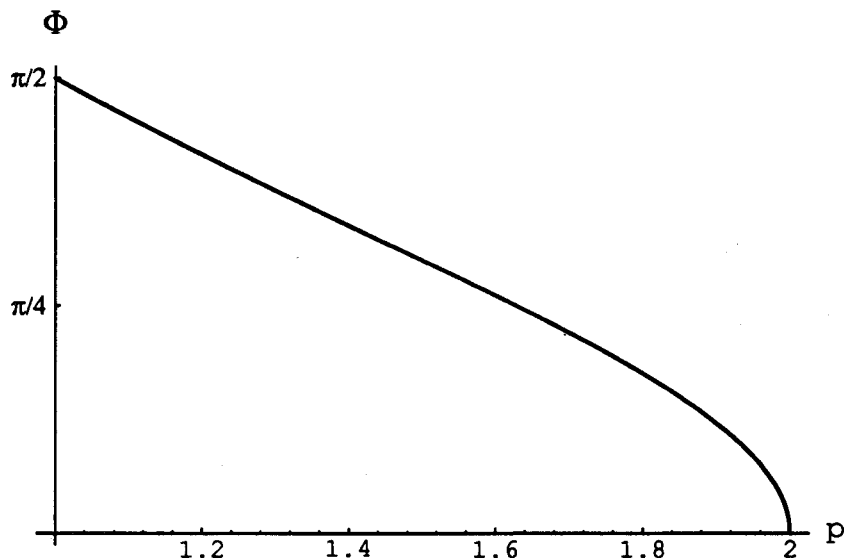


Fig.[2.8]: Gráfica de  $\phi(p)$  para  $p \in [1, 2]$ .

### Propiedades de la función error.

El error absoluto de aproximación en función del ángulo:

$$\epsilon_p(\omega) = \left| \frac{\cos\left(\frac{2\phi}{\pi}\omega - \phi/2\right)}{\cos(\phi/2)} - r_p(\omega) \right|$$

tiene las siguientes propiedades.

#### Lema 2.6

Se puede prescindir del valor absoluto en la definición de  $\epsilon_p(\omega)$ , ya que

$$\frac{\cos\left(\frac{2\phi}{\pi}\omega - \phi/2\right)}{\cos(\phi/2)} \geq r_p(\omega)$$

para cualquier valor de  $\omega \in [0, \pi/2]$

#### Demostración.

La transformación de coordenadas que supone la igualdad:

$$r_p(\pi/4) = r_B(\phi/2), \quad p \in [1, 2)$$

es la que sobre el plano polar se realiza al cambiar los ejes cartesianos ortogonales ( $\theta = 0$  como eje OX,  $\theta = \pi/2$  como eje OY) por otros oblicuos ( $\theta = 0$  como eje OX,  $\theta = \phi$  como nuevo eje OY). Analíticamente se puede expresar, tal como se muestra en Maravall [1965], mediante:

$$(x', y') = (x + y \cos \phi, y \operatorname{sen} \phi)$$

donde  $(x, y)$  son las coordenadas de un punto respecto al sistema ortogonal original y  $(x', y')$  las del punto transformado.

Nótese que si el punto  $Q \equiv (x, y) = (\rho \cos \omega, \rho \operatorname{sen} \omega)$  se encuentra a distancia  $\rho$  del origen, entonces su transformado  $Q' \equiv (x', y')$  está a una distancia:

$$\rho' = \sqrt{(x + y \cos \phi)^2 + (y \operatorname{sen} \phi)^2} = \rho \sqrt{1 + \operatorname{sen}(2\omega) \cos(\phi)}$$

En otras palabras, puntos alineados sobre el eje  $\theta = \omega$  se transforman en puntos alineados sobre el eje  $\theta = \frac{2\phi\omega}{\pi}$  conservando la ordenación y aumentando la distancia al origen multiplicando por  $\sqrt{1 + \operatorname{sen}(2\omega) \cos(\phi)}$ .

Dado que el factor anterior es mayor o igual a uno, se tiene que la distancia transformada de  $r_p(\omega)$  es

$$r_p(\omega) \sqrt{1 + \operatorname{sen}(2\omega) \cos(\phi)} = \frac{\cos\left(\frac{2\phi}{\pi}\omega - \phi/2\right)}{\cos(\phi/2)} \geq r_p(\omega)$$

q.e.d.

### **Lema 2.7**

Se verifican las propiedades:

(1)  $\epsilon_p(0) = 0$

(2)  $\epsilon_p(\pi/2) = 0$

(3)  $\epsilon_p(\pi/4) = 0$

### **Demostración.**

(1)  $\epsilon_p(0) = \frac{\cos(-\phi/2)}{\cos(\phi/2)} - r_p(0) = 0$

(2)  $\epsilon_p(\pi/2) = \frac{\cos(\phi - \phi/2)}{\cos(\phi/2)} - r_p(\pi/2) = 0$

(3)  $\epsilon_p(\pi/4) = \frac{\cos(\phi/2 - \phi/2)}{\cos(\phi/2)} - r_p(\pi/4) = \frac{1}{\cos(\phi/2)} - r_p(\pi/4)$

Considerando que la condición  $\phi = 2 \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  implica

$$\cos\left(\frac{\phi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y, por otro lado  $r_p(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , entonces se tendría el enunciado.

q.e.d.

**Lema 2.8**

La función  $\epsilon_p$  es simétrica respecto a  $\theta = \pi/4$ :

$$\epsilon_p(\pi/4 - t) = \epsilon_p(\pi/4 + t) \quad , \forall t \in [0, \pi/4]$$

**Demostración.**

$$\begin{aligned} \epsilon_p(\pi/4 - t) &= \frac{\cos\left(\frac{2\phi}{\pi}(\pi/4 - t) - \phi/2\right)}{\cos(\phi/2)} - r_p(\pi/4 - t) = \\ &= \frac{\cos\left(-\frac{2\phi}{\pi}t\right)}{\cos(\phi/2)} - r_p(\pi/4 - t) \end{aligned}$$

Análogamente

$$\begin{aligned} \epsilon_p(\pi/4 + t) &= \frac{\cos\left(\frac{2\phi}{\pi}(\pi/4 + t) - \phi/2\right)}{\cos(\phi/2)} - r_p(\pi/4 + t) = \\ &= \frac{\cos\left(\frac{2\phi}{\pi}t\right)}{\cos(\phi/2)} - r_p(\pi/4 + t) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la paridad de la función coseno y que el  $p$ -sesgo es simétrico:

$$r_p(\pi/4 - t) = r_p(\pi/4 + t) \quad , \forall t \in (0, \pi/4)$$

se comprueba la igualdad.

**q.e.d.**

En Fig.[2.9] aparece la gráfica de  $\epsilon_p(t)$  ,  $\forall t \in [0, \pi/2]$ .

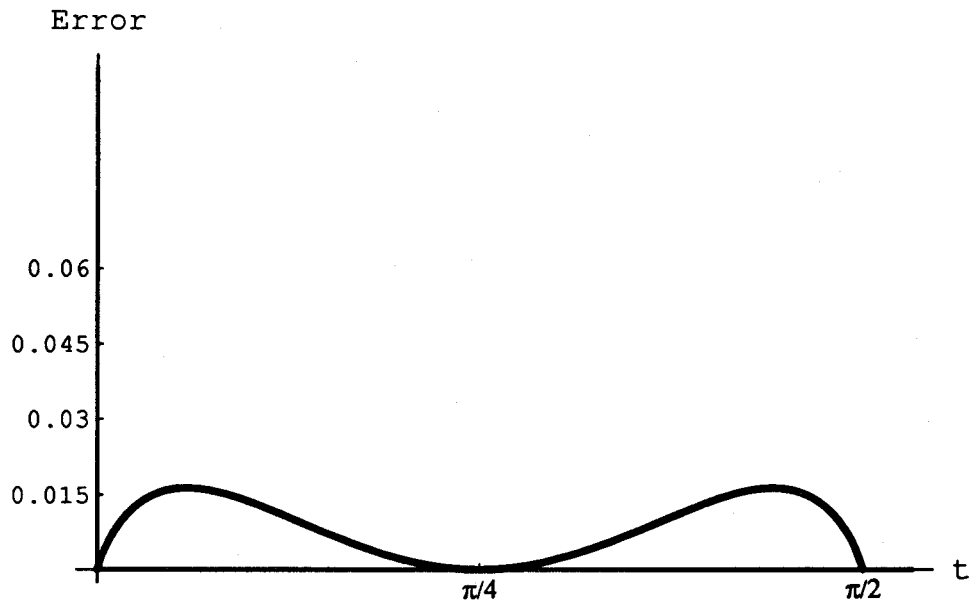


Fig.[2.9]: Gráfica de  $\epsilon_p(t)$ ,  $\forall t \in [0, \pi/2]$ .

**Lema 2.9**

La función dependiente del parámetro  $\lambda \in [0, 1)$ :

$$b(\lambda; p) = \frac{p(p-1)}{2} \lambda + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24} \lambda^2$$

tiene su rango en  $[0, 1)$  para valores de  $p \in [1, 2)$ .

**Demostración.**

El caso  $\lambda = 0$  es trivial. En el resto,  $\lambda \in (0, 1)$ , el comportamiento de la función  $b(\lambda; p)$  es el de un polinomio de cuarto grado que sólo tiene las raíces reales 0 y 1, dándose el mínimo de  $b(\lambda; p)$  en el punto  $p^* \in (0, 1)$ , solución de la derivación en:

$$b'(\lambda; p) = \frac{\lambda^2 p^4 - 6\lambda^2 p^3 + (11\lambda^2 + 12\lambda)p^2 - 6\lambda^2 p - 12\lambda p}{24}$$

respecto a  $p$ , igualada a cero.

$$b'(\lambda; p) = \frac{4\lambda^2}{24} \left( p^3 - \frac{9}{2}p^2 + \left(\frac{11}{2} + \frac{6}{\lambda}\right)p - \frac{3}{2} - \frac{3}{\lambda} \right)$$

En cualquier caso,  $b(\lambda; p)$  es creciente para  $p \in [1, 2)$  obteniéndose  $b(\lambda; p) \in [0, 1)$ .

**q.e.d.**

**Teorema 2.4**

Fijado un valor de  $p \in [1, 2)$ , se verifica para todo  $t \in (-\pi/4, \pi/4)$ :

$$r_p(\pi/4 + t) = \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left( 1 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) t^2 \right) + o(t^2)$$

**Demostración.**

Para cualquier  $\forall t \in (-\pi/4, \pi/4)$  se tiene que el  $p$ -sesgo es desarrollable por Taylor siguiendo el procedimiento:

$$\begin{aligned} r_p(\pi/4 + t) &= \left( (\cos(\pi/4 + t))^p + (\sin(\pi/4 + t))^p \right)^{1/p} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( (\cos t - \sin t)^p + (\cos t + \sin t)^p \right)^{1/p} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \left( (1 - \tan t)^p + (1 + \tan t)^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Dado que  $t \in (-\pi/4, \pi/4)$  se tiene que  $\tan(t) \in (-1, 1)$ , y se puede desarrollar por Taylor mediante la serie binomial:

$$\begin{aligned} (1 \pm \tan(t))^p &= 1 \pm p \tan(t) + \frac{p(p-1)}{2} \tan^2(t) \pm \frac{p(p-1)(p-2)}{6} \tan^3(t) + \\ &+ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24} \tan^4(t) \pm \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{120} \tan^5(t) + O(\tan^6(t)) \end{aligned}$$

Con lo que

$$(1 - \tan t)^p + (1 + \tan t)^p = 2 \left( 1 + \frac{p(p-1)}{2} \tan^2(t) + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24} \tan^4(t) \right) + O(\tan^6(t))$$

Sea  $b(t) = \frac{p(p-1)}{2} \tan^2(t) + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24} \tan^4(t)$ , se tiene:

$$\left( (1 - \tan t)^p + (1 + \tan t)^p \right)^{1/p} = 2^{1/p} (1 + b(t))^{1/p}$$

Puesto que  $p \in (1, 2)$  y  $\tan(t) \in (-1, 1)$ , se tiene por el lema anterior que  $b(t) \in (-1, 1)$ . Por lo que desarrollando una vez más la serie binomial correspondiente:

$$\begin{aligned} (1 + b(t))^{1/p} &= 1 + \frac{1}{p} b(t) + \frac{\frac{1}{p} \left( \frac{1}{p} - 1 \right)}{2} b^2(t) + \\ &+ \frac{\frac{1}{p} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \left( \frac{1}{p} - 2 \right)}{6} b^3(t) + \frac{\frac{1}{p} \left( \frac{1}{p} - 1 \right) \left( \frac{1}{p} - 2 \right) \left( \frac{1}{p} - 3 \right)}{24} b^4(t) + O(b^5(t)) \end{aligned}$$

Dado que  $b(t) = \frac{p(p-1)}{2} \tan^2(t) \left( 1 + \frac{(p-2)(p-3)}{12} \tan^2(t) \right)$ , el desarrollo anterior queda:

$$\begin{aligned} (1 + b(t))^{1/p} &= 1 + \frac{1}{p} \frac{p(p-1)}{2} \tan^2(t) + \\ &+ \left( \frac{1}{p} \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24} + \left( \frac{\frac{1}{p} \left( \frac{1}{p} - 1 \right)}{2} \right) \left( \frac{p(p-1)}{2} \right)^2 \right) \tan^4(t) + \\ &+ o(\tan^4(t)) \end{aligned}$$

Por último,

$$\tan(t) = t + \frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{15} t^5 + O(t^7)$$

Con lo que sustituyendo

$$\begin{aligned} (1 + b(t))^{1/p} &= 1 + \frac{1}{p} \frac{p(p-1)}{2} t^2 + \\ &+ \left( \frac{2}{3p} \frac{p(p-1)}{2} + \frac{1}{p} \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24} + \left( \frac{\frac{1}{p} \left( \frac{1}{p} - 1 \right)}{2} \right) \left( \frac{p(p-1)}{2} \right)^2 \right) t^4 + \\ &+ o(t^4) \end{aligned}$$

Simplifiquemos cada coeficiente:

$$\frac{1}{p} \frac{p(p-1)}{2} = \frac{(p-1)}{2}$$

$$\frac{2}{3p} \frac{p(p-1)}{2} + \frac{1}{p} \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24} + \left( \frac{\frac{1}{p} \left( \frac{1}{p} - 1 \right)}{2} \right) \left( \frac{p(p-1)}{2} \right)^2 =$$

$$= \frac{(p-1)}{3} + \frac{(p-1)(p-2)(p-3)}{24} - \frac{(p-1)^3}{8} = \frac{(p-1)}{24} (-3(p-1)^2 + (p-2)(p-3) + 8) =$$

$$= \frac{(p-1)}{24} h(p)$$

Donde  $h(p) = -2p^2 + p + 11$  es una función cuadrática cóncava, que alcanza su máximo en  $p = 1/4$ . Por tanto,  $h(p)$  es decreciente en  $p \in (1, 2)$ , verificándose:

$$5 = h(2) < h(p) < h(1) = 10$$

Recapitulando,

$$(1 + b(t))^{1/p} = 1 + \frac{(p-1)}{2} t^2 + \frac{(p-1)}{24} h(p) t^4 + o(t^4)$$

Dado que

$$\cos(t) = 1 - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{24} t^4 + o(t^4)$$

se tiene que

$$r_p(\pi/4 + t) = \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \cos(t) (1 + b(t))^{1/p}$$

Y operando el producto de series

$$r_p(\pi/4 + t) = \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left( 1 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) t^2 + \frac{(p-1)(h(p) - 6) + 1}{24} t^4 \right) + o(t^4)$$

La acotación de los coeficientes para  $p \in (1, 2)$  es:

$$\frac{p}{2} - 1 \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right); \quad \frac{(p-1)(h(p) - 6) + 1}{24} \in \left(-\frac{(p+3)}{24}, \frac{(4p+2)}{24}\right)$$

Notar que dichos coeficientes se anulan para  $p = 2$  como era de esperar.

**q.e.d.**

### **Lema 2.10**

Se verifica que el error de aproximación en un entorno de  $\pi/4$  es de segundo orden:

$$\epsilon_p(\pi/4 + t) = \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left( 1 - \frac{p}{2} - \frac{2\phi^2}{\pi^2} \right) t^2 + o(t^2)$$

### **Demostración.**

Partiendo de:

$$\epsilon_p(\pi/4 + t) = \frac{\cos\left(\frac{2\phi t}{\pi}\right)}{\cos(\phi/2)} - r_p(\pi/4 + t)$$

Y recordando que

$$r_p(\pi/4 + t) = \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left( 1 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) t^2 + \frac{(p-1)(h(p) - 6) + 1}{24} t^4 \right) + o(t^4)$$

Junto con

$$\frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\cos(\phi/2)}$$

Y el desarrollo:

$$\cos\left(\frac{2\phi t}{\pi}\right) = 1 - \frac{1}{2} \frac{4\phi^2}{\pi^2} t^2 + \frac{1}{24} \frac{16\phi^4}{\pi^4} t^4 + o(t^4)$$

Se tiene que:

$$\begin{aligned} \epsilon_p(\pi/4 + t) &= \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left( \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{4\phi^2}{\pi^2} t^2 + \frac{1}{24} \frac{16\phi^4}{\pi^4} t^4 \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) t^2 + \frac{(p-1)(h(p)-6)+1}{24} t^4 \right) \right) + o(t^4) \end{aligned}$$

Y simplificando:

$$\begin{aligned} \epsilon_p(\pi/4 + t) &= \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left( \left( 1 - \frac{p}{2} - \frac{2\phi^2}{\pi^2} \right) t^2 + \frac{1}{24} \left( \frac{16\phi^4}{\pi^4} - (p-1)(h(p)-6) - 1 \right) t^4 \right) + \\ &\quad + o(t^4) \end{aligned}$$

Esta relación demuestra el lema.

**q.e.d.**

**Lema 2.11** (*Signos de los primeros coeficientes del error*).

Se verifica que:

- (a) El coeficiente de segundo grado es positivo.
- (b) El coeficiente de cuarto grado es negativo.

**Demostración.**

(a) El coeficiente de segundo grado es positivo:

$$\begin{aligned} \text{sign}\left( 1 - \frac{p}{2} - \frac{2\phi^2}{\pi^2} \right) &= \text{sign}\left( \frac{2\pi^2 - p\pi^2 - 4\phi^2}{2\pi^2} \right) = \\ &= \text{sign}\left( \pi^2(2-p) - 4\phi^2 \right) = \text{sign}\left( \left(\frac{\pi}{2}\right)^2(2-p) - \phi^2 \right) \end{aligned}$$

Y como  $p \in (1, 2)$  y  $\phi \in [0, \pi/2]$ , se tiene que el coeficiente de  $t^2$  es positivo.

(b) El coeficiente de cuarto grado es negativo:

$$\begin{aligned} \text{sign}\left( \frac{16\phi^4}{\pi^4} - (p-1)(h(p)-6) - 1 \right) &= \text{sign}\left( \frac{16\phi^4 - \pi^4(p-1)(h(p)-6) - \pi^4}{\pi^4} \right) = \\ &= \text{sign}\left( \phi^4 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^4 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^4(p-1)(h(p)-6) \right) \end{aligned}$$

Dado que  $h(p) - 6 = -2p^2 + p + 5$  es una función cóncava que alcanza su máximo en  $p = 1/4$ , tenemos que:

$$h(p) - 6 > h(2) = -1$$



Analizando la función:

$$\begin{aligned} K(p) &= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^4(p-1)(-2p^2+p+5) + \left(\phi^4 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\right) = \\ &= -\left(\frac{\pi}{2}\right)^4(-2p^3+3p^2+4p-5) + \left(\phi^4 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^4\right) \end{aligned}$$

resulta ser

$$K(p) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^4 \left( -2p^3 + 3p^2 + 4p - 4 - \left(\frac{\phi}{\pi/2}\right)^4 \right)$$

Por tanto:

$$\text{sign}(K(p)) = \text{sign}\left(2p^3 - 3p^2 - 4p + 4 + \left(\frac{\phi}{\pi/2}\right)^4\right)$$

La función  $\left(\frac{\phi(p)}{\pi/2}\right)^4$  es desarrollable por Taylor en el entorno  $p = 2$ . Empleando el recurso informático que ofrece *Mathematica* (ver Wolfram [1991]), se obtiene numéricamente que dicho desarrollo es:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\phi}{\pi/2}\right)^4 &= 5.0507(p-2)^2 + 7.38462(p-2)^3 + 5.24888(p-2)^4 + \\ &\quad + o((p-2)^4) \end{aligned}$$

Utilizando los dos primeros términos del desarrollo anterior (el siguiente es positivo también) tenemos:

$$\text{sign}(C(p)) = \text{sign}\left(2p^3 - 3p^2 - 4p + 4 + 5.0507(p-2)^2 + 7.38462(p-2)^3 + 5.24888(p-2)^4\right)$$

Y, dado que la función  $C(p) = 2p^3 - 3p^2 - 4p + 4 + 5.0507(p-2)^2 + 7.38462(p-2)^3 + 5.24888(p-2)^4$  en  $p \in (1, 2)$  es negativa (ver Fig.[2.10]), se tiene probado que el coeficiente de cuarto grado es negativo.

q.e.d.

En Fig.[2.10] aparece la gráfica de la función  $C(p)$  para  $p \in (1, 2)$ .

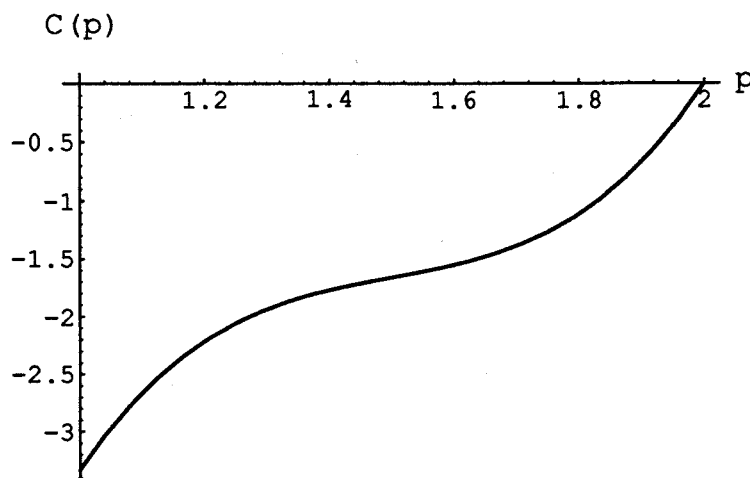


Fig.[2.10]: Coeficiente  $C(p)$ .

**Lema 2.12**

Se verifica que el error de aproximación en un entorno de  $t = 0^+$  es de primer orden:

$$\epsilon_p(t) = \frac{2\phi \tan(\phi/2)}{\pi} t + o(t)$$

y el coeficiente que aparece tras el de primer grado es negativo.

**Demostración.**

Partiendo de:

$$\epsilon_p(t) = \left( \cos\left(\frac{2\phi t}{\pi}\right) + \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\phi t}{\pi}\right) \right) - r_p(t)$$

Definamos  $\alpha = \frac{2\phi}{\pi} \in (0, 1)$  y  $\beta = \tan\left(\frac{\phi}{2}\right) \in (0, 1)$ . De esta forma  $\cos(\alpha t) + \beta \operatorname{sen}(\alpha t)$  es desarrollable por serie de Taylor en el entorno de  $t = 0$ , dando lugar a:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha t) + \beta \operatorname{sen}(\alpha t) &= 1 + (\alpha\beta) t - \frac{\alpha^2}{2} t^2 - \frac{\beta\alpha^3}{16} t^3 + \frac{\alpha^4}{24} t^4 + \\ &+ o(t^4) \end{aligned}$$

Dado que

$$r_p(t) = \left( (\cos(t))^p + (\operatorname{sen}(t))^p \right)^{1/p} = \cos(t) \left( 1 + \tan^p(t) \right)^{1/p}$$

Para cualquier  $t \in (0, \pi/4)$  se tiene que  $\tan(t) \in (-1, 1)$ , y se puede desarrollar por Taylor mediante la serie binomia:

$$\begin{aligned} (1 + \tan(t))^p &= 1 + p \tan(t) + \frac{p(p-1)}{2} \tan^2(t) + \frac{p(p-1)(p-2)}{6} \tan^3(t) + \\ &+ \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24} \tan^4(t) + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)(p-4)}{120} \tan^5(t) + o(\tan^5(t)) \end{aligned}$$

para luego sustituir

$$\tan(t) = t + \frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{15} t^5 + o(t^5)$$

quedando tras operar y agrupar términos homogéneos:

$$\begin{aligned} r_p(t) &= \left( 1 + \frac{1}{p} t^p - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1-p}{2p^2} t^{2p} + \frac{2p-3}{6p} t^{2+p} + \frac{(1-p)(1-2p)}{6p^3} t^{3p} + \frac{1}{24} t^4 \right) + \\ &+ o(t^4) \end{aligned}$$

El orden de los sumandos depende del valor de  $p \in (1, 2)$ . Definiendo:

$$B_p(t) = \begin{cases} \frac{(1-p)(1-2p)}{6p^3} t^{3p} + \frac{1}{24} t^4 & ; \text{ si } p \in (1, 4/3) \\ \frac{4(1-p)(1-2p)+1}{24p^3} t^4 + \frac{1}{24} t^4 & ; \text{ si } p = 4/3 \\ \frac{1}{24} t^4 & ; \text{ si } p \in (4/3, 2) \end{cases}$$

se tiene que:

$$r_p(t) = \left( 1 + \frac{1}{p} t^p - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1-p}{2p^2} t^{2p} + \frac{2p-3}{6p} t^{2+p} \right) + B_p(t) + o(t^4)$$

Con todo ello,

$$\begin{aligned} \epsilon_p(t) = & \left(1 + (\alpha\beta) t - \frac{\alpha^2}{2} t^2 - \frac{\beta\alpha^3}{16} t^3 + \frac{\alpha^4}{24} t^4\right) - \\ & - \left(1 + \frac{1}{p} t^p - \frac{1}{2} t^2 + \frac{1-p}{2p^2} t^{2p} + \frac{2p-3}{6p} t^{2+p} + B_p(t)\right) + \\ & + o(t^4) \end{aligned}$$

concluimos que:

$$\epsilon_p(t) = (\alpha\beta) t - \frac{1}{p} t^p + \frac{1-\alpha^2}{2} t^2 + o(t^2)$$

demostrando el lema. Además, la recta:

$$y = (\alpha\beta) t = \frac{2\phi \tan(\phi/2)}{\pi} t$$

es tangente, en el plano  $TY$ , a la curva  $y = \epsilon_p(t)$  en el entorno de  $t = 0^+$ .

Notar que tanto el coeficiente de  $t^p$  como el de  $t^2$  son negativos.

**q.e.d.**

En Fig.[2.11] aparece la gráfica del comportamiento del error  $\epsilon_p(t)$  en entornos de  $t = 0^+$  y  $t = \pi/4$ . La parábola de vértice  $t = \pi/4$  y la recta que parte de  $t = 0$  están por encima de la función error, al tener dicha función coeficientes negativos en lo inmediato que sigue del desarrollo de Taylor sobre los respectivos entornos.

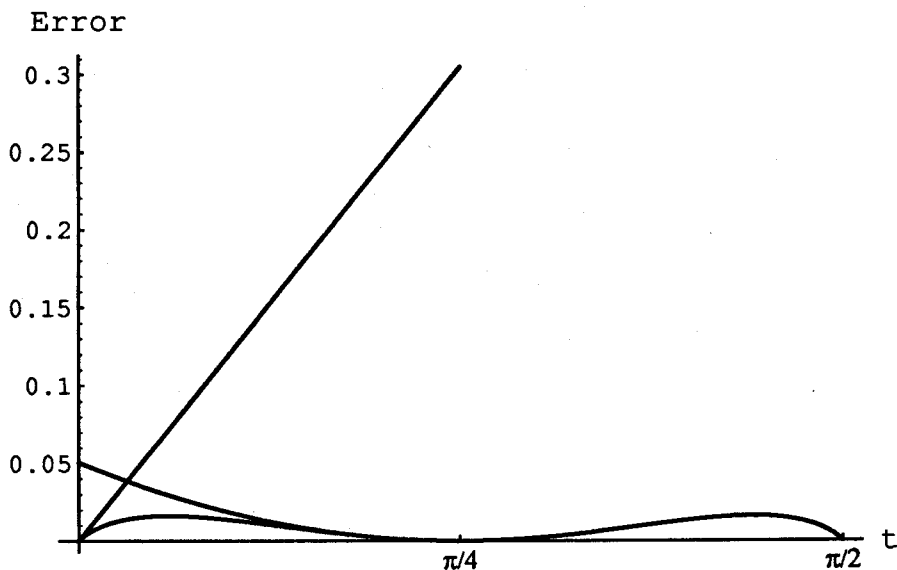


Fig.[2.11]: Comportamiento del error.

La acotación de la función error en el intervalo  $t \in [0, \pi/2]$  a través de su máximo es inviable, ya que la obtención explícita del valor  $t^*$  para el que se alcanza

el máximo de  $\epsilon_p(t)$  es algebraicamente imposible. Una cota muy grosera se puede obtener teniendo en cuenta:

$$r_2(t) \leq r_p(t) \leq r_1(t), \quad \forall t \in [0, \pi/2], \quad \forall p \in [1, 2]$$

Y dado que el valor máximo de  $r_1(t)$ ,  $\forall t \in [0, \pi/2]$ , es  $r_1(\pi/4) = \sqrt{2}$ , la anterior cadena queda:

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad \forall p \in [1, 2], \quad 1 \leq r_p(t) \leq \sqrt{2} \quad (1)$$

Por otro lado,

$$\forall t \in [0, \pi/2], \quad \text{implica } \frac{2\phi t}{\pi} \in [0, \phi]$$

y dado que las funciones  $\cos(x)$  y  $\text{sen}(x)$  son decreciente y creciente respectivamente en  $t \in [0, \pi/2]$ , se tiene:

$$\cos(\phi) \leq \cos\left(\frac{2\phi t}{\pi}\right) \leq 1 \quad (2)$$

y también:

$$0 \leq \text{sen}\left(\frac{2\phi t}{\pi}\right) \leq \text{sen}(\phi)$$

Multiplicando esta desigualdad por  $\tan(\phi/2) > 0$ :

$$0 \leq \tan(\phi/2) \text{sen}\left(\frac{2\phi t}{\pi}\right) \leq 2\text{sen}^2(\phi/2) \quad (3)$$

Sumando (2) y (3):

$$\cos(\phi) \leq r_B(t) \leq 1 + 2\text{sen}^2(\phi/2)$$

Restando con la cadena (1), se tiene:

$$\cos(\phi) - \sqrt{2} \leq \epsilon_p(t) \leq 2\text{sen}^2(\phi/2) = 1 - \cos(\phi)$$

La cota superior:

$$\epsilon_p(t) \leq 1 - \cos(\phi(p))$$

sólo es fina para valores pequeños de  $\phi(p)$ , lo cual implica la cercanía de  $p$  a 2. En el resto de los casos, esta acotación es grosera.

### **Teorema 2.5**

Si denominamos

$$b = 1 - \frac{p}{2} - \frac{2\phi^2}{\pi^2}; \quad a = \frac{\phi}{4} + \frac{\phi \text{sen}(\phi/2)}{\pi b}$$

entonces se verifica que el error de aproximación  $\epsilon_p(t)$  está acotado por:

$$\epsilon_p(t) \leq \frac{2\phi \tan(\phi/2)}{\pi} t^*$$

siendo:

$$t^* = a - \sqrt{a^2 - \left(\frac{\phi}{4}\right)^2}$$

**Demostración.**

Teniendo en cuenta los signos de los coeficientes de los desarrollos de Taylor de  $\epsilon_p(t)$  en los entornos de  $t = 0$  y  $t = \pi/4$ , podemos asegurar que la altura del punto de intersección de la recta tangente  $\mathcal{R}$  en  $t = 0$  y la parábola  $\mathcal{P}$  de vértice en  $t = \pi/4$ , mayora a la función error en cualquier punto  $t \in [0, \pi/4]$ .

Si la recta  $\mathcal{R}$  tiene de ecuación en el plano  $TY$ :

$$y = \frac{2\phi \tan(\phi/2)}{\pi} t$$

y la parábola  $\mathcal{P}$  es:

$$y = \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{p}{2} - \frac{2\phi^2}{\pi^2}\right) (t - \pi/4)^2$$

procedamos a resolver el sistema entre ambas para deducir el punto de intersección.

Dado que  $\frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\cos(\phi/2)}$ , la parábola se reescribe:

$$y = \frac{b}{\cos(\phi/2)} (t - \pi/4)^2$$

Igualando la variable  $y$  para la recta y la parábola:

$$\frac{b}{\cos(\phi/2)} t^2 - \frac{b\pi}{2\cos(\phi/2)} t + (\pi/4)^2 = \frac{2\phi \tan(\phi/2)}{\pi} t$$

Lo cual nos lleva a la ecuación de segundo grado:

$$b t^2 - \left(\frac{b\pi}{2} - \frac{2\phi \sin(\phi/2)}{\pi}\right) t + b(\pi/4)^2 = 0$$

La raíz negativa de dicha ecuación es:

$$t^* = \frac{1}{2b} \left( \left(\frac{b\pi}{2} - \frac{2\phi \sin(\phi/2)}{\pi}\right) - \sqrt{\left(\frac{b\pi}{2} - \frac{2\phi \sin(\phi/2)}{\pi}\right)^2 - \frac{\pi^2 b^2}{4}} \right)$$

Con la notación del enunciado  $a = \frac{\phi}{4} + \frac{\phi \sin(\phi/2)}{\pi b}$ , se tiene:

$$t^* = a - \sqrt{a^2 - \left(\frac{\phi}{4}\right)^2}$$

y la cota de error será:

$$\epsilon_p(t) \leq \frac{2\phi \tan(\phi/2)}{\pi} t^*$$

**q.e.d.**

La obtención de  $t^*$  es muy artificiosa debido a lo complejo de los coeficientes de la parábola  $\mathcal{P}$ . Podemos considerar otra parábola  $\mathcal{P}^*$  con el mismo vértice en

$t = \pi/4$  y que mayor a  $\mathcal{P}$  para cualquier valor de  $t$ . Dicha parábola  $\mathcal{P}^*$  se deduce teniendo en cuenta que

$$-\frac{1}{2} \leq b = 1 - \frac{p}{2} - \frac{2\phi^2}{\pi^2} \leq \frac{1}{2}$$

con lo que se define  $\mathcal{P}^*$ :

$$y = \frac{1}{\cos(\phi/2)} (t - \pi/4)^2$$

Y la intersección con la recta  $\mathcal{R}$  da lugar a:

$$t^{**} = a^* - \sqrt{(a^*)^2 - \left(\frac{\phi}{4}\right)^2}$$

siendo  $a^* = \frac{\phi}{4} + \frac{2\phi \text{sen}(\phi/2)}{\pi}$ .

En Fig.[2.12] aparecen las parábolas  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}^*$  en su intersección con la recta  $\mathcal{R}$ , dando lugar a cotas del error.

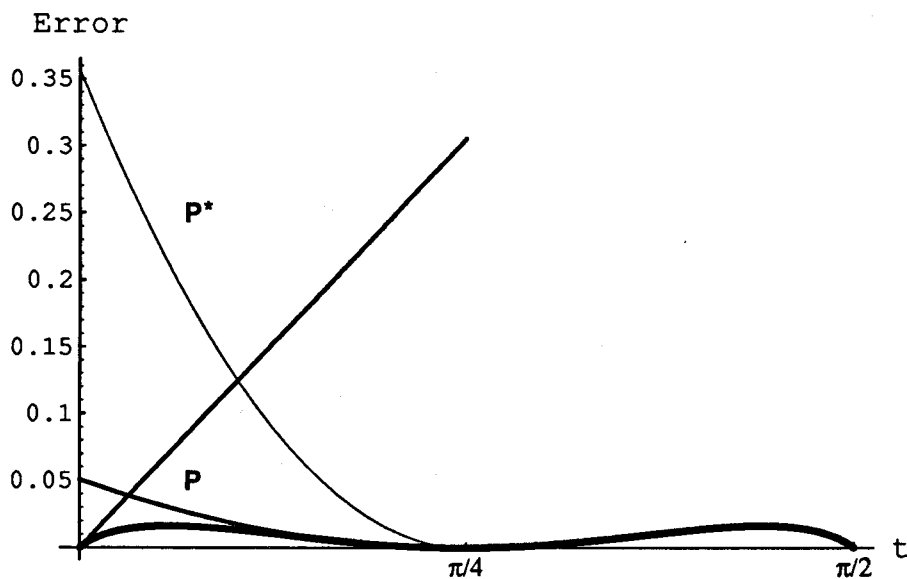


Fig.[2.12]: Cotas del error.

## 2.6 COMPARACIÓN DE APROXIMACIONES

Al objeto de comparar la bondad de las aproximaciones del  $p$ -sesgo,  $p \in [1, 2)$ , mediante su  $\phi(p)$ -sesgo correspondiente por un lado y, a través de la aproximación que resulta de la discretización de la frontera continua de la bola unidad asociada a la norma  $l_p$  por otro, se ha considerado para el caso  $p = 1.5$  la partición en las direcciones  $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, 3\pi/4, \pi, 5\pi/4, 3\pi/2, 7\pi/4$ . Uniendo los vértices resultantes se

obtiene un recinto poligonal de ocho lados  $B^*$  inscrito en la curva plana de ecuación implícita:

$$|x|^p + |y|^p = 1.$$

En la Fig.[2.13] se aprecian dentro del círculo unidad ( $l_2(\mathbf{x}) \leq 1$ ) el contorno  $l_p(\mathbf{x}) = 1$  y el polígono  $B^*$ .

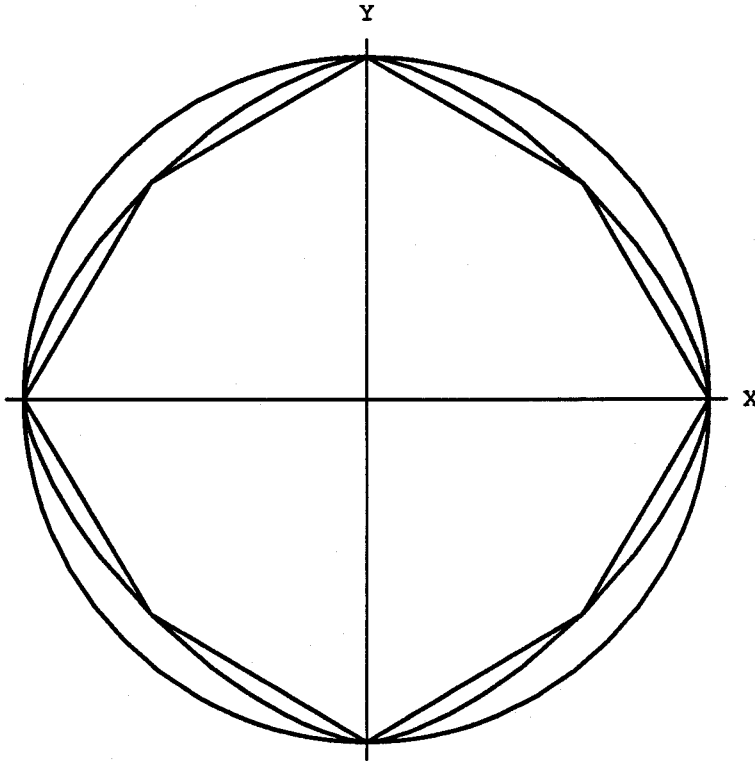


Fig.[2.13]: Discretización de la frontera de  $l_p(\mathbf{x}) = 1$ .

Centrando el estudio en el primer cuadrante, los sesgos resultantes de las normas  $\|\cdot\|_{B^*}$  y  $l_p(\cdot)$  coinciden puntualmente en las direcciones  $\theta = 0, \pi/4, \pi/2$ , y en general:

$$r_{B^*}(\varphi) \geq r_p(\varphi); \quad \forall \varphi \in [0, \pi/2).$$

La Fig.[2.14] muestra la curva  $\rho = r_{1.5}(\varphi)$  (exterior a la circunferencia unidad  $\rho = 1$ ) junto al sesgo  $\rho = r_{B^*}(\varphi)$ .

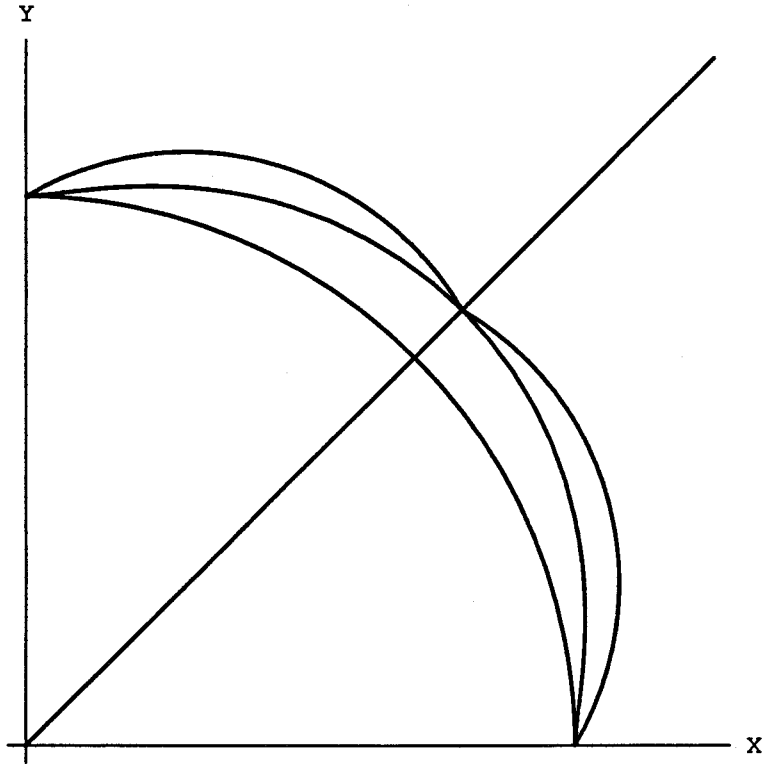


Fig.[2.14]:  $p$ -Sesgo aproximado por discretización.

Si comparamos la gráfica anterior con la que resulta del  $\phi$ -sesgo correspondiente al valor de  $p = 1.5$  (ver Fig.[2.15]), se observa una notoria ganancia en el grado de aproximación.

Concretamente, para  $\varphi = \pi/6$ , el valor del  $p$ -sesgo es de 1.10368. Su aproximación mediante discretización es:

$$r_{B^*}(\pi/6) = 1.15973,$$

mientras que a través del  $\phi$ -sesgo asociado

$$r_{B(\phi)}(\pi/6) = 1.10863$$

se consigue un error en la aproximación diez veces inferior al primeramente establecido.



La gráfica del  $\phi$ -sesgo reafirma visualmente lo anterior.

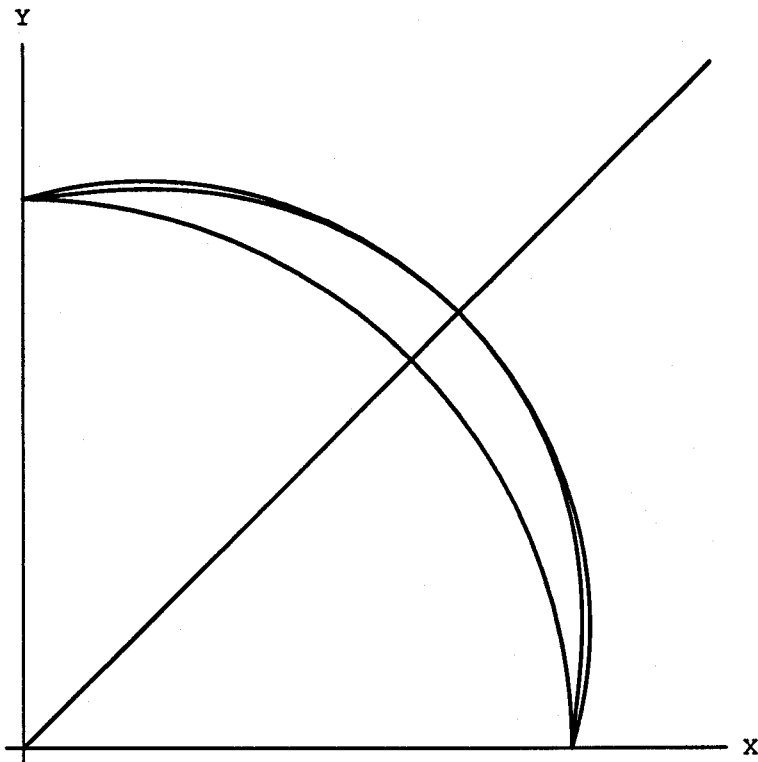


Fig.[2.15]:  $p$ -Sesgo aproximado por su correspondiente  $\phi$ -Sesgo.

# Capítulo 3

## Generalización $N$ -dimensional

### 3.1. POLIEDROS BÁSICOS EN $\mathbb{R}^N$ .

#### Coordenadas esféricas en $\mathbb{R}^3$ .

Sea el espacio vectorial euclídeo  $\mathbb{R}^3$  y su base ortonormalizada:

$$\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1, 0), \mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)\}$$

Cada vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  tiene asignado unas únicas coordenadas  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  respecto a dicha base. Este vector genérico, además, forma un ángulo con el plano  $OX_1X_2$  que representaremos por  $\gamma_3$  y la proyección anterior crea otro ángulo, denotado mediante  $\gamma_2$ , en el eje  $OX_1$ .

Denotando  $\rho = \|\mathbf{x}\|_2$ , se tienen las siguientes relaciones entre las coordenadas cartesianas  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  y las llamadas coordenadas esféricas  $\mathbf{x} = (\rho, \gamma_2, \gamma_3)$ :

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos(\gamma_3) \cos(\gamma_2) \\ x_2 = \rho \cos(\gamma_3) \operatorname{sen}(\gamma_2) \\ x_3 = \rho \operatorname{sen}(\gamma_3) \end{cases}$$

Recíprocamente, se tiene:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \gamma_3 = \operatorname{Arc} \cos\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}\right) \\ \gamma_2 = \operatorname{Arc} \cos\left(\frac{\sqrt{x_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \end{cases}$$

### Coordenadas hiperesféricas en $\mathbb{R}^N$ , $N > 3$ .

Con la notación elegida, las ecuaciones anteriores son fáciles de generalizar a  $\mathbb{R}^N$ ,  $N > 3$ .

Sea ahora el espacio vectorial euclídeo  $\mathbb{R}^N$  y su base ortonormalizada:

$$\{\mathbf{u}_1 = (1, 0, \dots, 0), \mathbf{u}_2 = (0, 1, \dots, 0), \dots, \mathbf{u}_N = (0, 0, \dots, 1)\}$$

Cada vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  tendrá unas únicas coordenadas  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  respecto a dicha base. Además se generarán los siguientes ángulos y sus respectivas denominaciones:

- (1) Con el hiperplano  $OX_1X_2 \dots X_{N-1}$  el ángulo que representaremos por  $\gamma_N$ .
- (2) La anterior proyección, a su vez, formará con la variedad  $OX_1X_2 \dots X_{N-2}$  el ángulo que representaremos por  $\gamma_{N-1}$ .
- (3) La proyección de la etapa (2) creará con la variedad  $OX_1X_2 \dots X_{N-3}$  el ángulo  $\gamma_{N-2}$ .
- ...
- ( $N - 2$ ) La proyección de la etapa ( $N - 3$ ) creará con la variedad plana  $OX_1X_2$  el ángulo  $\gamma_3$ .
- ( $N - 1$ ) La proyección de la etapa ( $N - 2$ ) formará con la variedad lineal  $OX_1$  el ángulo  $\gamma_2$ .

Denotando mediante  $\rho = \|\mathbf{x}\|_2$ , se tienen las siguientes relaciones entre las coordenadas cartesianas  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  y las llamadas coordenadas hiperesféricas  $\mathbf{x} = (\rho, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_N)$ :

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos(\gamma_N) \cos(\gamma_{N-1}) \dots \cos(\gamma_3) \cos(\gamma_2) \\ x_2 = \rho \cos(\gamma_N) \cos(\gamma_{N-1}) \dots \cos(\gamma_3) \operatorname{sen}(\gamma_2) \\ x_3 = \rho \cos(\gamma_N) \cos(\gamma_{N-1}) \dots \operatorname{sen}(\gamma_3) \\ \dots \\ x_{N-2} = \rho \cos(\gamma_N) \cos(\gamma_{N-1}) \operatorname{sen}(\gamma_{N-2}) \\ x_{N-1} = \rho \cos(\gamma_N) \operatorname{sen}(\gamma_{N-1}) \\ x_N = \rho \operatorname{sen}(\gamma_N) \end{cases}$$

Recíprocamente, se tiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{N-1}^2 + x_N^2} \\ \gamma_N = \text{Arc cos} \left( \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{N-1}^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{N-1}^2 + x_N^2}} \right) \\ \gamma_{N-1} = \text{Arc cos} \left( \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{N-2}^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{N-1}^2}} \right) \\ \dots \\ \gamma_3 = \text{Arc cos} \left( \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}} \right) \\ \gamma_2 = \text{Arc cos} \left( \frac{\sqrt{x_1^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \end{array} \right.$$

En general:

$$\gamma_j = \text{Arc cos} \left( \frac{\left( \sum_{k=1}^{j-1} x_k^2 \right)^{1/2}}{\left( \sum_{k=1}^j x_k^2 \right)^{1/2}} \right), \quad \forall j = 2, \dots, N.$$

**Baricentro del polígono cuyos vértices son los extremos del triedro básico en  $\mathbb{R}^3$ .**

El baricentro  $\mathbf{b}$  del triángulo de vértices:

$$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

tiene las coordenadas cartesianas:

$$\mathbf{b} = \left( \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

mientras que sus coordenadas esféricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{1}{3} \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \gamma_3 = \text{Arc cos} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \\ \gamma_2 = \text{Arc cos} \left( \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \right) \end{array} \right.$$

Lo cual implica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\gamma_3) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad \text{sen}(\gamma_3) = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos(\gamma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \text{sen}(\gamma_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right.$$

El cálculo de una norma  $l_p$  sobre el vector  $\mathbf{b}$  da lugar a:

$$\|\mathbf{b}\|_p = \frac{1}{3} \sqrt[3]{3}$$

Y, por otro lado:

$$\|\mathbf{b}\|_p = \|\mathbf{b}\|_2 \quad r_p(\mathbf{b}) = \frac{\sqrt{3}}{3} r_p(\mathbf{b})$$

De donde igualando:

$$r_p(\mathbf{b}) = \frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3}}$$

**Baricentro del polígono cuyos vértices son los extremos del poliedro básico en  $\mathbb{R}^N$ .**

El baricentro  $\mathbf{b}$  del polígono de vértices:

$$\{(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)\}$$

es ahora cartesianamente:

$$\mathbf{b} = \left( \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \dots, \frac{1}{N} \right)$$

y sus coordenadas hipersféricas siguen una curiosa regla de formación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \frac{\sqrt{N}}{N} \\ \gamma_N = \text{Arc cos} \left( \frac{\sqrt{N-1}}{\sqrt{N}} \right) \\ \gamma_{N-1} = \text{Arc cos} \left( \frac{\sqrt{N-2}}{\sqrt{N-1}} \right) \\ \dots \\ \gamma_3 = \text{Arc cos} \left( \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \\ \gamma_2 = \text{Arc cos} \left( \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}} \right) \end{array} \right.$$

La norma  $l_p$  sobre el vector  $\mathbf{b}$  vale:

$$\|\mathbf{b}\|_p = \frac{1}{N} \sqrt[p]{N}$$

Y, por otro lado:

$$\|\mathbf{b}\|_p = \|\mathbf{b}\|_2 \quad r_p(\mathbf{b}) = \frac{\sqrt{N}}{N} r_p(\mathbf{b})$$

De donde igualando:

$$r_p(\mathbf{b}) = \frac{\sqrt[p]{N}}{\sqrt{N}}$$

**Triedro básico  $\phi$ -deformado en  $\mathbb{R}^3$ .**

**Definición 3.1**

Se denominará *triedro básico  $\phi$ -deformado* en  $\mathbb{R}^3$  al conjunto de vectores

$$V^{(3)} = \{v_1^{(3)}, v_2^{(3)}, v_3^{(3)}\}$$

de módulo unidad tal que guardan entre sí un ángulo  $\phi$  orientado positivamente, siendo  $v_1^{(3)} = (1, 0, 0)$  y el resto de los vectores hacen que la matriz de sus componentes cartesianas sea triangular.

Nótese que esta definición extiende al caso plano donde los vectores de componentes positivas que se consideraron para la red plana densa  $\phi$ -deformada fueron:

$$v_1 = (1, 0) \equiv v_1^{(2)}, \quad v_2 = (\cos(\phi), \text{sen}(\phi)) \equiv v_2^{(2)}$$

Denotemos mediante  $A^{(3)}$  la matriz de componentes  $\alpha_{ij}^{(3)}$   $i, j = 1, 2, 3$ , cuyas filas son las coordenadas cartesianas de los vectores del triedro básico  $\phi$ -deformado. Los criterios para identificar los elementos de la matriz serán por un lado el tener módulo 1 y por otro que el producto escalar de dos filas distintas dé como resultado  $\cos(\phi)$ . Así, partiendo de una primera fila:

$$A_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

la siguiente

$$A_2^{(3)} = \begin{pmatrix} \alpha_{21}^{(3)} & \alpha_{22}^{(3)} & \alpha_{23}^{(3)} \end{pmatrix}$$

deberá verificar

$$\begin{cases} A_1^{(3)} \cdot A_2^{(3)} = \alpha_{21}^{(3)} = \cos(\phi) \\ A_2^{(3)} \cdot A_2^{(3)} = (\alpha_{21}^{(3)})^2 + (\alpha_{22}^{(3)})^2 + (\alpha_{23}^{(3)})^2 = 1 \end{cases}$$

Asignando el valor cero a  $\alpha_{23}^{(3)}$  para que la matriz resultante sea triangular, tenemos:

$$A_2^{(3)} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) & 0 \end{pmatrix}$$

Comparando:

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \end{pmatrix}$$

con

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) & 0 \\ \alpha_{31}^{(3)} & \alpha_{32}^{(3)} & \alpha_{33}^{(3)} \end{pmatrix}$$

se tiene que la matriz  $A^{(3)}$  se obtiene de  $A^{(2)}$  orlando la fila última  $A_3^{(3)}$  y completando con ceros los restantes términos de la última columna. La deducción de los tres

elementos de la fila  $A_3^{(3)}$  se realiza imponiendo  $(3 - 1)$  condiciones de producto escalar igual a  $\cos(\phi)$  con cada una de las  $(3 - 1)$  filas precedentes y una condición de módulo unidad para la nueva fila. La independencia de los vectores fila de la matriz garantiza una solución única al sistema de ecuaciones obtenido.

Es fácil de ver que:

$$\begin{cases} A_1^{(3)} \cdot A_3^{(3)} = \alpha_{31}^{(3)} = \cos(\phi) \\ A_2^{(3)} \cdot A_3^{(3)} = \cos(\phi)\alpha_{31}^{(3)} + \sin(\phi)\alpha_{32}^{(3)} = \cos(\phi) \\ A_3^{(3)} \cdot A_3^{(3)} = (\alpha_{31}^{(3)})^2 + (\alpha_{32}^{(3)})^2 + (\alpha_{33}^{(3)})^2 = 1 \end{cases}$$

da lugar a:

$$\begin{cases} \alpha_{31}^{(3)} = \cos(\phi) \\ \alpha_{32}^{(3)} = \frac{\cos(\phi) - (\cos(\phi))^2}{\sin(\phi)} = \cos(\phi) \tan(\phi/2) \\ \alpha_{33}^{(3)} = (\sin^2(\phi) - (\alpha_{32}^{(3)})^2)^{1/2} = \tan(\phi/2) \end{cases}$$

**Poliedro básico  $\phi$ -deformado en  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$ .**

### Definición 3.2

Se denominará *poliedro básico  $\phi$ -deformado* en  $\mathbb{R}^N$ ,  $N \geq 3$  al conjunto de vectores

$$V^{(N)} = \{\mathbf{v}_1^{(N)}, \mathbf{v}_2^{(N)}, \dots, \mathbf{v}_N^{(N)}\}$$

de módulo unidad tal que guardan entre sí un ángulo  $\phi$  orientado positivamente, siendo  $\mathbf{v}_1^{(N)} = (1, 0, \dots, 0)$  y el resto de los vectores hacen que la matriz de sus componentes cartesianas sea triangular.

### **Notación**

Denotemos mediante  $A^{(N)}$  la matriz de componentes  $\alpha_{ij}^{(N)}$   $i, j = 1, 2, \dots, N$ , cuyas filas son las coordenadas cartesianas de los vectores del poliedro básico  $\phi$ -deformado.

La construcción de la matriz se realiza por bloques y recurrentemente sobre la matriz de la etapa anterior  $A^{(N-1)}$  de componentes  $\alpha_{ij}^{(N-1)}$   $i, j = 1, 2, \dots, N$ . Se tiene que:

(1) La caja cuadrada de orden  $(N - 1)$  de la esquina superior izquierda es copia de la matriz de la etapa anterior:

$$\forall i, j = 1, 2, \dots, N : \alpha_{ij}^{(N)} = \alpha_{ij}^{(N-1)}$$

(2) La nueva matriz es triangular, es decir la última columna verifica:

$$\forall i = 1, 2, \dots, N : \alpha_{iN}^{(N)} = 0$$

(3) El primer término de la última fila siempre vale  $\cos(\phi)$

$$\forall N \geq 2: \alpha_{N1}^{(N)} = \cos(\phi)$$

(4) Los términos de la última fila que van del segundo al penúltimo:

$$\alpha_{N2}^{(N)}, \alpha_{N3}^{(N)}, \dots, \alpha_{N(N-1)}^{(N)}$$

verifican la ley de formación:

$$\forall j = 2, 3, \dots, N: \alpha_{Nj}^{(N)} = \frac{\cos(\phi) - \left(\sum_{k=1}^{j-1} \alpha_{jk}^{(N)} \alpha_{Nk}^{(N)}\right)}{\alpha_{jj}^{(N)}}$$

La comprobación sólo requiere razonar bajo la condición de producto escalar igual a  $\cos(\phi)$  entre las filas  $N$  y  $j$ .

(5) El último término de la última fila:

$$\alpha_{NN}^{(N)} = \left(\text{sen}^2(\phi) - \sum_{k=2}^{N-1} (\alpha_{Nk}^{(N)})^2\right)^{1/2}$$

Usando las fórmulas de transformación de coordenadas cartesianas en hiperesféricas se tiene para cada vector

$$\mathbf{v}_i^{(N)} = (\alpha_{i1}^{(N)}, \alpha_{i2}^{(N)}, \dots, \alpha_{iN}^{(N)}), \forall i = 1, 2, \dots, N$$

la expresión equivalente

$$\mathbf{v}_i^{(N)} \equiv (\rho_i^{(N)}, \omega_{i2}^{(N)}, \dots, \omega_{iN}^{(N)}), \forall i = 1, 2, \dots, N$$

donde  $\rho_i^{(N)} = 1$  y

$$\omega_{ij}^{(N)} = \text{Arc cos}\left(\frac{\left(\sum_{k=1}^{j-1} (\alpha_{ik}^{(N)})^2\right)^{1/2}}{\left(\sum_{k=1}^j (\alpha_{ik}^{(N)})^2\right)^{1/2}}\right), \forall j = 2, \dots, N.$$

En el caso tridimensional

|                      | cartesianas   | esféricas  |
|----------------------|---|--|
| $\mathbf{v}_1^{(3)}$ | (1, 0, 0)   | (1, 0, 0)  |
| $\mathbf{v}_2^{(3)}$ | ( $\cos(\phi)$ , $\text{sen}(\phi)$ , 0)                      | (1, $\phi$ , 0)  |
| $\mathbf{v}_3^{(3)}$ | ( $\cos(\phi)$ , $\cos(\phi) \tan(\phi/2)$ , $\tan(\phi/2)$ ) | (1, $\phi$ , $\text{Arc cos}\left(\frac{\cos \phi}{\cos(\phi/2)}\right)$ ) |



**Baricentro del polígono cuyos vértices son los extremos del poliedro básico  $\phi$ -deformado en  $\mathbb{R}^N$ .**

Para obtener la expresión cartesiana del vector  $\mathbf{b}_\phi$ , cuyo extremo es el baricentro del polígono contenido en el hiperplano que pasa por los extremos de los vectores que componen el poliedro básico  $\phi$ -deformado, basta calcular la media aritmética de las filas de la matriz  $A^{(N)}$ :

$$\mathbf{b}_\phi = \left( \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_{i1}^{(N)}}{N}, \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_{i2}^{(N)}}{N}, \dots, \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_{iN}^{(N)}}{N} \right)$$

Nótese que dependiendo de la dimensión de  $N$  es posible obtener los respectivos baricentros:  $\mathbf{b}_\phi^{(2)}$ ,  $\mathbf{b}_\phi^{(3)}$ ,  $\mathbf{b}_\phi^{(4)}$ , ...

**Ejemplos:**

( $N = 2$ ): El baricentro sería:

|   |  |
|---|--|
| $A^{(2)}$   | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \end{pmatrix}$                                   |
| $\sum_{i=1}^2 \alpha_{ij}^{(2)}$                            | $\left( 1 + \cos \phi \quad \text{sen } \phi \right)$  |
| $\frac{1}{2} \left( \sum_{i=1}^2 \alpha_{ij}^{(2)} \right)$ | $\rightarrow \mathbf{b}_\phi^{(2)} = \left( \frac{1 + \cos \phi}{2}, \frac{\text{sen } \phi}{2} \right)$ |

( $N = 3$ ): El baricentro sería:

|   |  |
|---|--|
| $A^{(3)}$   | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) & 0 \\ \cos(\phi) & \cos(\phi) \tan(\phi/2) & \tan(\phi/2) \end{pmatrix}$                        |
| $\sum_{i=1}^3 \alpha_{ij}^{(3)}$                            | $\left( 1 + 2 \cos \phi \quad \text{sen } \phi + \cos(\phi) \tan(\phi/2) \quad \tan(\phi/2) \right)$   |
| $\frac{1}{3} \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_{ij}^{(3)} \right)$ | $\rightarrow \mathbf{b}_\phi^{(3)} = \left( \frac{1 + 2 \cos \phi}{3}, \frac{\text{sen } \phi + \cos(\phi) \tan(\phi/2)}{3}, \frac{\tan(\phi/2)}{3} \right)$ |

El módulo en  $\mathbb{R}^N$  del vector baricentro  $\mathbf{b}_\phi^{(N)}$  vale:

$$\| \mathbf{b}_\phi^{(N)} \| = \frac{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^N \alpha_{i1}^{(N)} \right)^2 + \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{i2}^{(N)} \right)^2 + \dots + \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{iN}^{(N)} \right)^2}}{N}$$

El término  $\sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{ij}^{(N)} \right)^2$  de la fórmula anterior se construye siguiendo el proceso que vamos a describir para  $N = 2$ :

(a) Partiendo de la matriz  $A^{(N)}$ , sumar por filas sus términos obteniendo una nueva fila.

(b) Elevar al cuadrado cada término de la nueva fila.

(c) Acumular los cuadrados obtenidos.

|  |  |
|--|--|
| $A^{(N)}$  | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \end{pmatrix}$ |
| $\sum_{i=1}^N \alpha_{ij}^{(N)}$                               | $(1 + \cos \phi \quad \text{sen} \phi)$                                |
| $\left( \sum_{i=1}^N \alpha_{ij}^{(N)} \right)^2$              | $\left( (1 + \cos \phi)^2 \quad \text{sen}^2 \phi \right)$             |
| $\sum_{j=1}^N \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{ij}^{(N)} \right)^2$ | $\rightarrow 2(1 + \cos \phi)$   |

Se tiene así que la relación entre  $p \in (1, 2)$  y  $\phi \in (0, \pi/2)$  para  $\mathbb{R}^2$  es la dada por la ecuación:

$$p = \frac{2 \log(2)}{3 \log(2) - \log(2(1 + \cos \phi))} = \frac{2 \log(2)}{2 \log(2) - \log(1 + \cos \phi)}$$

que si se escribe en términos del ángulo  $\phi/2$  queda:

$$p = \frac{\log(4)}{\log\left(\frac{2}{\cos^2(\phi/2)}\right)}$$

expresión que coincide con la del **Teorema 2.2**.

### 3.2. APROXIMACIÓN EN $\mathbb{R}^N$ DEL $p$ -SESGO, $p \in [1, 2)$ , MEDIANTE $\phi$ -SESGOS.

Ecuación que relaciona  $p \in [1, 2)$  con  $\phi \in (0, \pi/2]$  en  $\mathbb{R}^N$ .

Si identificamos el  $p$ -sesgo del vector  $\mathbf{b}$  y el sesgo  $r_B(\mathbf{b}_\phi)$  del vector baricentro generalizado del poliedro  $\phi$ -deformado en la norma asociada  $\|\cdot\|$  al convexo compacto  $B$  que se deduce de la envolvente convexa de los puntos extremos del poliedro  $\phi$ -deformado, tenemos:

$$\frac{\sqrt[p]{N}}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\|\mathbf{b}_\phi^{(N)}\|}$$

De donde es fácil deducir:

$$p = \frac{2 \log(N)}{\log(N) - 2 \log(\|\mathbf{b}_\phi^{(N)}\|)}$$

En Fig.[3.1] se traza la curva que relaciona el ángulo de deformación  $\phi \in [0, \pi/2]$  y el valor de  $p$  correspondiente en  $\mathbb{R}^2$ .

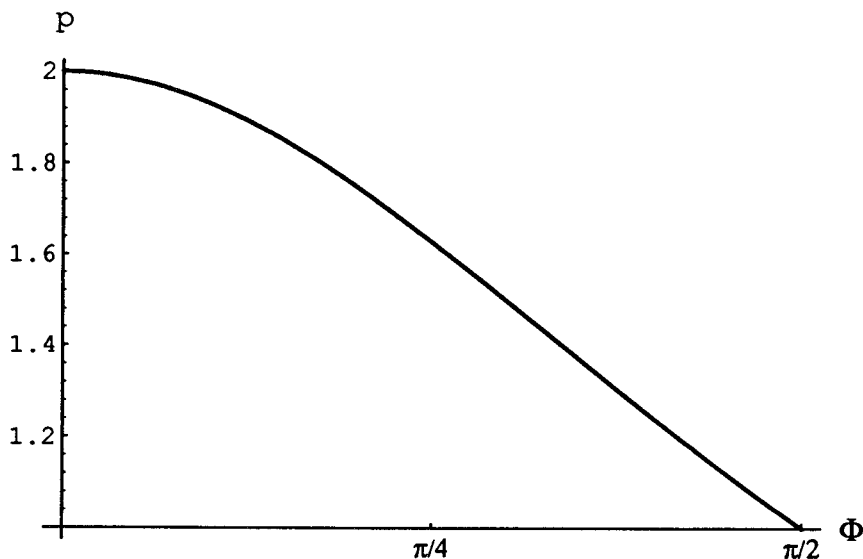


Fig.[3.1]: Relación entre  $p$  y  $\phi(p)$  en  $\mathbb{R}^2$ .

El proceso de generalización seguido genera una sucesión de baricentros en espacios vectoriales diferentes que conservan la siguiente propiedad:

**Teorema 3.1**

La sucesión de vectores baricentro:

$$\mathbf{b}_\phi^{(2)}, \mathbf{b}_\phi^{(3)}, \dots, \mathbf{b}_\phi^{(N)}, \dots$$

verifica que el cociente de logaritmos:

$$\frac{\log(\|\mathbf{b}_\phi^{(N)}\|)}{\log(N)}, \forall N \geq 2$$

es constante.

**Demostración:**

Basta reescribir la ecuación anterior en la forma:

$$\frac{\log(\|\mathbf{b}_\phi^{(N)}\|)}{\log(N)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} = \frac{p-2}{2p}$$

y se tiene que fijado  $p$ , el cociente  $\frac{\log(\|\mathbf{b}_\phi^{(N)}\|)}{\log(N)}$  será constante  $\forall N \geq 2$ .

**q.e.d.**

En Fig.[3.2] se han representado las gráficas que relacionan el índice  $p$  y el ángulo  $\phi$  tanto en  $\mathbb{R}^2$  como en  $\mathbb{R}^3$ . El trazo más grueso observable se debe a errores de redondeo en la computación numérica de una y otra gráfica.

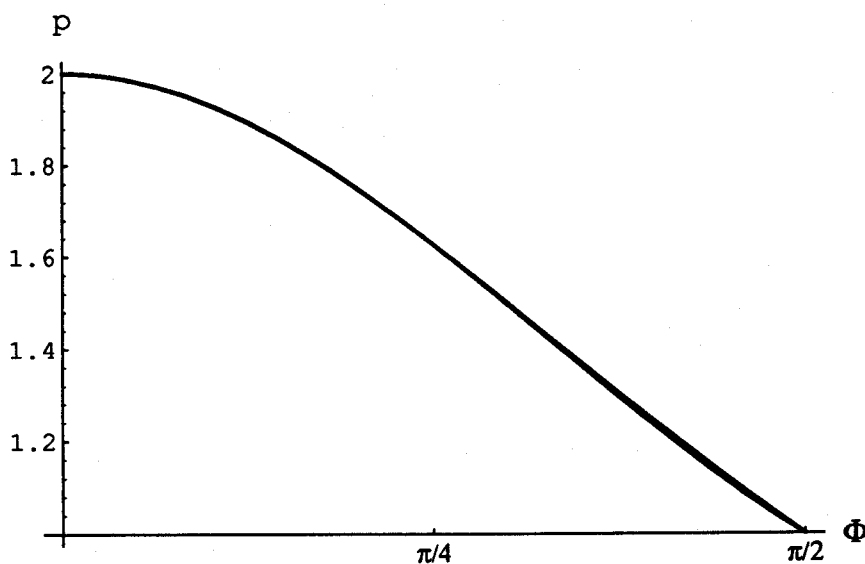


Fig.[3.2]: Relación  $p$  y  $\phi(p)$  en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ .

### Expresión analítica del $\phi$ -sesgo en $\mathbb{R}^N$ .

El hiperplano que se apoya en los vértices del poliedro básico  $\phi$ -deformado es el conjunto de puntos  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  que satisfacen

$$\begin{vmatrix} x_1 - 1 & \alpha_{21}^{(N)} - 1 & \cdots & \alpha_{N1}^{(N)} - 1 \\ x_2 & \alpha_{22}^{(N)} & \cdots & \alpha_{N2}^{(N)} \\ x_3 & 0 & \cdots & \alpha_{N3}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & 0 & \cdots & \alpha_{NN}^{(N)} \end{vmatrix} = 0$$

Consideremos sólo el caso  $x_i \geq 0, \forall i = 1, \dots, N$ .

Si en el anterior determinante descomponemos la primera columna:

$$\begin{vmatrix} x_1 & \alpha_{21}^{(N)} - 1 & \cdots & \alpha_{N1}^{(N)} - 1 \\ x_2 & \alpha_{22}^{(N)} & \cdots & \alpha_{N2}^{(N)} \\ x_3 & 0 & \cdots & \alpha_{N3}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_N & 0 & \cdots & \alpha_{NN}^{(N)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_{21}^{(N)} - 1 & \cdots & \alpha_{N1}^{(N)} - 1 \\ 0 & \alpha_{22}^{(N)} & \cdots & \alpha_{N2}^{(N)} \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{N3}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_{NN}^{(N)} \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^N \alpha_{jj}^{(N)}$$

donde hemos usado  $\alpha_{11}^{(N)} = 1$ .

Pasando a coordenadas hiperesféricas cada  $x_i$  y despejando:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\prod_{j=1}^N \alpha_{jj}^{(N)}} \begin{vmatrix} \cos(\varphi_N) \cos(\varphi_{N-1}) \cdots \cos(\varphi_3) \cos(\varphi_2) & \alpha_{21}^{(N)} - 1 & \cdots & \alpha_{N1}^{(N)} - 1 \\ \cos(\varphi_N) \cos(\varphi_{N-1}) \cdots \cos(\varphi_3) \operatorname{sen}(\varphi_2) & \alpha_{22}^{(N)} & \cdots & \alpha_{N2}^{(N)} \\ \cos(\varphi_N) \cos(\varphi_{N-1}) \cdots \operatorname{sen}(\varphi_3) & 0 & \cdots & \alpha_{N3}^{(N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \operatorname{sen}(\varphi_N) & 0 & \cdots & \alpha_{NN}^{(N)} \end{vmatrix}$$

#### Notación.

Denotemos por  $\Delta_{\phi}^{(N)}(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N)$  el determinante anterior.

#### Teorema 3.2

La expresión del  $\phi$ -sesgo en la dirección generada por los ángulos  $\{\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N\}$ , para  $\varphi_i \in [0, \phi], \forall i = 2, \dots, N$ , viene dada por

$$r_B(\mathbf{x}) \equiv r_B(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N) = \frac{\Delta_{\phi}^{(N)}(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N)}{\prod_{j=1}^N \alpha_{jj}^{(N)}}$$

#### Demostración:

Dado que los puntos  $\mathbf{x}$  del hiperplano anterior para  $\varphi_i \in [0, \phi], \forall i = 2, \dots, N$ , verifican que  $\|\mathbf{x}\|_B = 1$  por estar en la envolvente convexa de los extremos del

poliedro básico  $\phi$ -deformado, la ecuación:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\Delta_{\phi}^{(N)}(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N)}{\prod_{j=1}^N \alpha_{jj}^{(N)}} \implies 1 = \rho \frac{\Delta_{\phi}^{(N)}(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N)}{\prod_{j=1}^N \alpha_{jj}^{(N)}}$$

al compararse con:

$$\| \mathbf{x} \|_B = \| \mathbf{x} \|_2 r_B(\mathbf{x}) \implies 1 = \rho r_B(\mathbf{x})$$

da lugar a:

$$r_B(\mathbf{x}) \equiv r_B(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N) = \frac{\Delta_{\phi}^{(N)}(\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N)}{\prod_{j=1}^N \alpha_{jj}^{(N)}}$$

que es el  $\phi$ -sesgo en la dirección  $\{\varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_N\}$ .

q.e.d.

**Fórmula de aproximación de  $l_p$ , en  $\mathbb{R}^N$ .**

**Teorema 3.3**

El valor de la norma  $\| \mathbf{x} \|_p$ , para  $\mathbf{x} = (\rho, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}^N$ , expresado en coordenadas hipersféricas y donde  $\omega_i \in [0, \pi/2]$ ,  $\forall i = 2, \dots, N$ , puede aproximarse en el sentido del sesgo  $r_p(\mathbf{x}) \approx r_B(\mathbf{x}^*)$  resultando:

$$\begin{aligned} \| \mathbf{x} \|_p &= \| \mathbf{x} \|_2 r_p(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_N) \approx \\ &\approx \| \mathbf{x} \|_2 r_B(\mathbf{x}^*) = \| \mathbf{x} \|_2 \frac{\Delta_{\phi}^{(N)}(\frac{2\phi}{\pi}\omega_2, \frac{2\phi}{\pi}\omega_3, \dots, \frac{2\phi}{\pi}\omega_N)}{\det(A^{(N)})} \end{aligned}$$

**Demostración:**

Partiendo de un punto  $\mathbf{x} = (\rho, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}^N$ , expresado en coordenadas hipersféricas, donde  $\omega_i \in [0, \pi/2]$ ,  $\forall i = 2, \dots, N$ , se pretende conocer aproximadamente :

$$\begin{aligned} \| \mathbf{x} \|_p &= \| \mathbf{x} \|_2 r_p(\mathbf{x}) = \rho \left( |\cos(\omega_N) \cos(\omega_{N-1}) \dots \cos(\omega_3) \cos(\omega_2)|^p + \right. \\ &+ |\cos(\omega_N) \cos(\omega_{N-1}) \dots \cos(\omega_3) \sin(\omega_2)|^p + |\cos(\omega_N) \cos(\omega_{N-1}) \dots \cos(\omega_3) \sin(\omega_3)|^p + \\ &\left. + \dots + |\cos(\omega_N) \sin(\omega_{N-1})|^p + |\sin(\omega_N)|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Para ello, determinemos un ángulo  $\phi$  solución de:

$$p = \frac{2 \log(N)}{\log(N) - 2 \log(\| \mathbf{b}_{\phi}^{(N)} \|)}$$

En virtud del **Teorema 3.1**, la relación entre  $p$ -sesgo y  $\phi$ -sesgo se mantiene constante en cualquier dimensión  $N = 2, 3, \dots$ . Concretamente en  $N = 2$ , el valor de  $\phi$  es:

$$\phi = 2 \arccos \frac{\sqrt{2}}{p\sqrt{2}}$$

Con la intervención del ángulo  $\phi$  obtenido de la relación anterior, se deducen los términos  $\alpha_{ij}^{(N)}$  correspondientes a la matriz  $A^{(N)}$ .

Dado que el sistema:

$$\begin{cases} \varphi_2 = \frac{2\phi}{\pi} \omega_2 \\ \varphi_3 = \frac{2\phi}{\pi} \omega_3 \\ \dots \\ \varphi_N = \frac{2\phi}{\pi} \omega_N \end{cases}$$

establece la correspondencia biunívoca entre el punto  $\mathbf{x} = (\rho, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}^N$  y el punto  $\mathbf{x}^* = (\rho, \frac{2\phi}{\pi}\omega_2, \frac{2\phi}{\pi}\omega_3, \dots, \frac{2\phi}{\pi}\omega_N) \in \mathbb{R}^N$  con lo que la aproximación en el sentido de los sesgos queda:

$$r_p(\mathbf{x}) \approx r_B(\mathbf{x}^*)$$

con lo que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_p &= \|\mathbf{x}\|_2 \cdot r_p(\omega_2, \omega_3, \dots, \omega_N) \approx \\ &\approx \|\mathbf{x}\|_2 \cdot r_B(\mathbf{x}^*) = \|\mathbf{x}\|_2 \frac{\Delta_\phi^{(N)}(\frac{2\phi}{\pi}\omega_2, \frac{2\phi}{\pi}\omega_3, \dots, \frac{2\phi}{\pi}\omega_N)}{\det(A^{(N)})} \end{aligned}$$

q.e.d.

### 3.3. EL CASO TRIDIMENSIONAL.

Ecuación que relaciona  $p \in (1, 2)$  con  $\phi \in (0, \pi/2)$  en  $\mathbb{R}^3$ .

Sea  $\mathbf{x} = (\rho, \omega_2, \omega_3) \in \mathbb{R}^3$ , expresado en coordenadas esféricas y donde  $\omega_i \in [0, \pi/2]$ ,  $i = 2, 3$ . El  $p$ -sesgo relativo a dicho vector tiene como parámetros dos direcciones:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_p &= \|\mathbf{x}\|_2 \cdot r_p(\mathbf{x}) = \rho \left( |\cos(\omega_3) \cos(\omega_2)|^p + \right. \\ &\quad \left. + |\cos(\omega_3) \sin(\omega_2)|^p + |\sin(\omega_3)|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

En Fig.[3.3] se representa el  $p$ -sesgo tridimensional en función de los ángulos que describen las coordenadas esféricas.

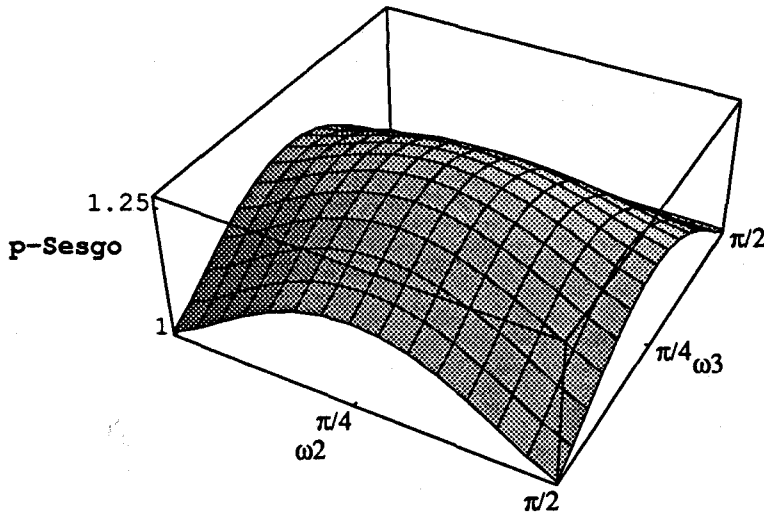


Fig.[3.3]:  $p$ -sesgo tridimensional.

Sea  $\phi$  solución de:

$$p = \frac{2 \log(N)}{\log(N) - 2 \log(\| \mathbf{b}_\phi^{(N)} \|)}$$

Con dicho ángulo se construye la matriz

$$A^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) & 0 \\ \cos(\phi) & \cos(\phi) \tan(\phi/2) & \tan(\phi/2) \end{pmatrix}$$

y se obtiene el determinante  $\det(A^{(3)}) = \text{sen}(\phi) \tan(\phi/2) = 2\text{sen}^2(\phi/2)$ .

Consideremos un vector  $\mathbf{z} = (z_1, z_2, z_3) \equiv (\| \mathbf{z} \|_2, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathbb{R}^3$ , expresado en coordenadas esféricas y donde  $\varphi_i \in [0, \phi]$ ,  $i = 2, 3$ . El cálculo del determinante:

$$D_\phi^{(3)}(z_1, z_2, z_3) = \begin{vmatrix} z_1 & \alpha_{21}^{(3)} - 1 & \alpha_{31}^{(3)} - 1 \\ z_2 & \alpha_{22}^{(3)} & \alpha_{32}^{(3)} \\ z_3 & 0 & \alpha_{33}^{(3)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & \cos(\phi) - 1 & \cos(\phi) - 1 \\ z_2 & \text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \tan(\phi/2) \\ z_3 & 0 & \tan(\phi/2) \end{vmatrix}$$

da el siguiente resultado:

$$D_\phi^{(3)}(z_1, z_2, z_3) = 2\text{sen}^2(\phi/2) (z_1 + z_2 \tan(\phi/2) + z_3 \tan(\phi/2))$$

Por lo tanto,

$$\| \mathbf{z} \|_B = \| \mathbf{z} \|_2 \ r_B(\varphi_2, \varphi_3) = \| \mathbf{z} \|_2 \frac{\Delta_\phi^{(3)}(\varphi_2, \varphi_3)}{\det(A^{(3)})} =$$



$$= \| \mathbf{z} \|_2 \left( \cos(\varphi_3) \cos(\varphi_2) + \cos(\varphi_3) \operatorname{sen}(\varphi_2) \tan(\phi/2) + \operatorname{sen}(\varphi_3) \tan(\phi/2) \right)$$

Haciendo operaciones queda:

$$r_B(\varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{\cos(\phi/2)} \left( \cos(\varphi_2 - \phi/2) \cos(\varphi_3) + \operatorname{sen}(\varphi_3) \operatorname{sen}(\phi/2) \right)$$

La transformación tridimensional

$$\begin{cases} \varphi_2 = \frac{2\phi}{\pi} \omega_2 \\ \varphi_3 = \frac{2\phi}{\pi} \omega_3 \end{cases}$$

permite la asignación biyectiva entre un vector del primer octante:  $\mathbf{x} = (\rho, \omega_2, \omega_3)$ ,  $\omega_i \in [0, \pi/2]$ ,  $i = 2, 3$  y otro del primer octante  $\phi$ -deformado  $\mathbf{z} = (\rho, \varphi_2, \varphi_3)$ ,  $\varphi_i \in [0, \phi]$ ,  $i = 2, 3$  generándose un valor del  $B$ -sesgo tal que:

$$r_B\left(\frac{2\phi}{\pi} \omega_2, \frac{2\phi}{\pi} \omega_3\right) \approx r_p(\omega_2, \omega_3)$$

y que vale:

$$r_B\left(\frac{2\phi}{\pi} \omega_2, \frac{2\phi}{\pi} \omega_3\right) = \frac{1}{\cos(\phi/2)} \left( \cos\left(\frac{2\phi}{\pi} \omega_2 - \phi/2\right) \cos\left(\frac{2\phi}{\pi} \omega_3\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\phi}{\pi} \omega_3\right) \operatorname{sen}(\phi/2) \right)$$

En Fig.[3.4] se representa el  $B$ -sesgo tridimensional en función de los ángulos que describen las coordenadas esféricas.

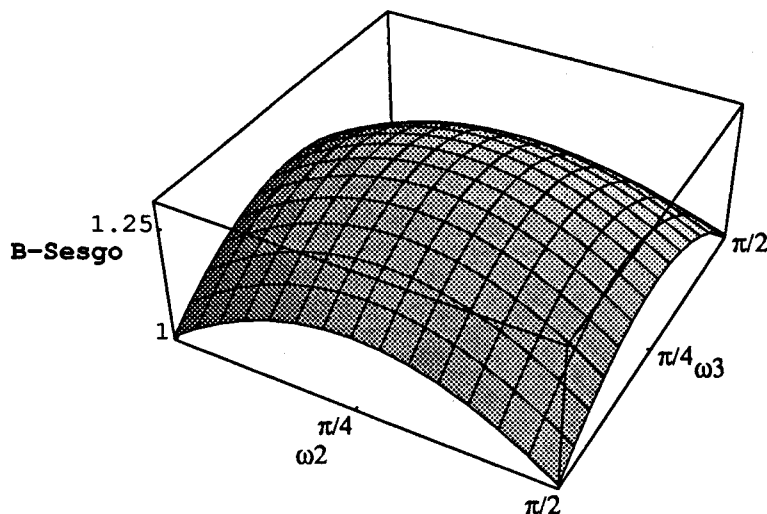


Fig.[3.4]:  $B$ -sesgo tridimensional.

En Fig.[3.5] se han reunido ambos sesgos para comparar visualmente la aproximación.

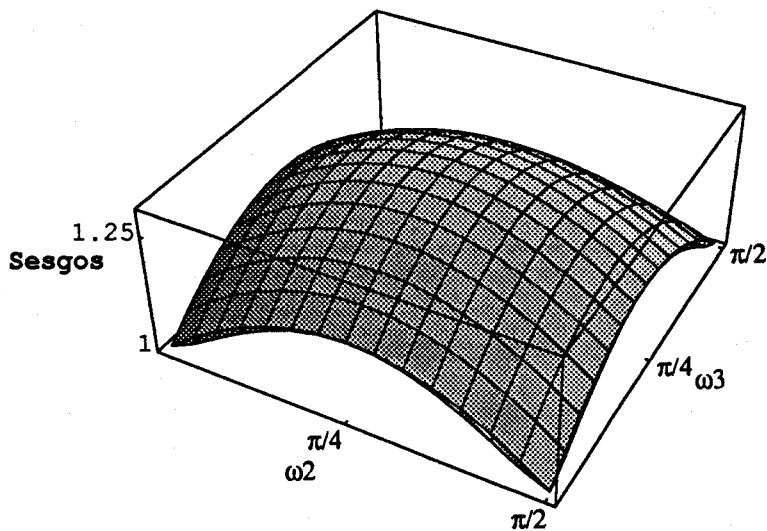


Fig.[3.5]: Sesgos norma  $l_p$  y bloque.

Definiendo mediante  $\epsilon_p^{(3)}(\omega_2, \omega_3)$  el error de aproximación cometido en el punto del primer octante caracterizado por el par de direcciones  $(\omega_2, \omega_3)$ :

$$\epsilon_p^{(3)}(\omega_2, \omega_3) = \left| r_B\left(\frac{2\phi}{\pi} \omega_2, \frac{2\phi}{\pi} \omega_3\right) - r_p(\omega_2, \omega_3) \right|$$

se puede visualizar en Fig.[3.6] cómo para  $\omega_2 = 0$  (idem  $\omega_3 = 0$ ) volvemos al error bidimensional  $\epsilon_p(\omega) \equiv \epsilon_p^{(2)}(\omega_2) = \epsilon_p^{(3)}(\omega_2, 0)$  anteriormente estudiado.

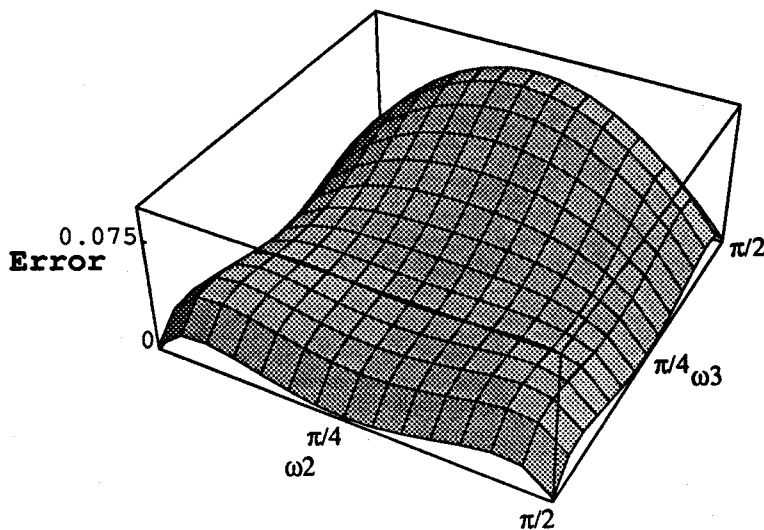


Fig.[3.6]: Error de aproximación tridimensional.

### Ordenación previa.

En la figura [3.6] se aprecia un crecimiento del error cuando el ángulo correspondiente a la tercera coordenada esférica se aproxima a  $\pi/2$ . Esto se debe a que las secciones planas del  $\phi$ -sesgo tridimensional:

$$r_B(\varphi_2, \varphi_3) = \frac{1}{\cos(\phi/2)} \left( \cos(\varphi_2 - \phi/2) \cos(\varphi_3) + \sin(\varphi_3) \sin(\phi/2) \right)$$

coinciden con el sesgo bidimensional correspondiente salvo en el caso  $\varphi_3 = \phi/2$ . Es decir, para  $\varphi_2 = 0$  se tiene un sesgo bidimensional (ver sección 2.2) en la variable  $\varphi_3$ :

$$r_B(0, \varphi_3) = \cos(\varphi_3) + \sin(\varphi_3) \tan(\phi/2);$$

análogamente para  $\varphi_2 = \phi$  se tiene el mismo sesgo:

$$r_B(\phi, \varphi_3) = \cos(\varphi_3) + \sin(\varphi_3) \tan(\phi/2).$$

En lo referente a la sección  $\varphi_3 = 0$ , se llega al sesgo bidimensional en la variable  $\varphi_2$ :

$$r_B(\varphi_2, 0) = \frac{\cos(\varphi_2 - \phi/2)}{\cos(\phi/2)},$$

pero para  $\varphi_3 = \phi$  esta propiedad no se conserva, por lo que error crece en el entorno de  $\varphi_3 = \phi$ .

La simetría de la expresión algebraica del  $p$ -sesgo permite que se pueda considerar cualquier vector  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  en el primer octante

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \equiv (\rho, \omega_2, \omega_3), \quad \omega_i \in [0, \pi/2], \quad i = 2, 3$$

Además, dado que

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( |x_1|^p + |x_2|^p + |x_3|^p \right)^{1/p}$$

es una función homogénea de sus componentes, se tiene que:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \|(x_i, x_j, x_k)\|_p$$

pudiéndose elegir arbitrariamente los subíndices distintos  $\{i, j, k\}$  en  $\{1, 2, 3\}$ .

La aproximación establecida para

$$r_p(\omega_2, \omega_3) = \left( |\cos(\omega_3) \cos(\omega_2)|^p + |\cos(\omega_3) \sin(\omega_2)|^p + |\sin(\omega_3)|^p \right)^{1/p}$$

se realiza usando el  $\phi(p)$ -sesgo asociado, cuya expresión es

$$r_B\left(\frac{2\phi}{\pi} \omega_2, \frac{2\phi}{\pi} \omega_3\right) = \frac{1}{\cos(\phi/2)} \left( \cos\left(\frac{2\phi}{\pi} \omega_2 - \phi/2\right) \cos\left(\frac{2\phi}{\pi} \omega_3\right) + \sin\left(\frac{2\phi}{\pi} \omega_3\right) \sin(\phi/2) \right),$$

donde  $\phi \equiv \phi(p)$ . Se pueden evitar valores de  $\omega_3$  superiores a  $\pi/4$  sin más que reordenar las coordenadas de mayor a menor, con lo que los errores de aproximación serán próximos a los del caso bidimensional.

Sea por ejemplo  $p = 1.5$  y consideremos el vector  $\mathbf{x} = (1, 2, 5)$ . Sus coordenadas esféricas son:

$$\rho = 5.47723, \omega_2 = 1.10715, \omega_3 = 1.15026$$

y el sesgo correspondiente a:

$$r_p(1.10715, 1.15026) = 1.11089$$

se aproxima mediante el  $\phi(p)$ -sesgo asociado, dando  $r_{B(\phi)} = 1.17396$ , con un error de 0.0630776.

Consideremos ahora el vector  $\mathbf{x} = (5, 2, 1)$  cuyas coordenadas esféricas son:

$$\rho = 5.47723, \omega_2 = 0.380506, \omega_3 = 0.183604$$

y el sesgo correspondiente vuelve a ser:

$$r_p(0.380506, 0.183604) = 1.11089.$$

Sin embargo la aproximación a través del mismo  $\phi(p)$ -sesgo es ahora  $r_{B(\phi)} = 1.13894$ , con un error de 0.0280508 mucho menor.

# Capítulo 4

## Modelación de distancias sobre una red plana

### 4.1. INTRODUCCIÓN.

El propósito de la estimación de distancias de viaje es determinar, a partir de muestras, una función real sobre el plano que, aplicada a las coordenadas de los puntos de una zona de transporte, reproduzca aproximadamente la distancia entre ellos sobre la red existente.

Cuando la red de transporte es no dirigida y está bien desarrollada, podemos formular *una hipótesis de proximidad* entre las distancias medidas sobre la red y los valores que proporcione alguna métrica sobre el plano.

Bajo esta hipótesis, se selecciona, en el seno de familias de métricas bi y tri-paramétricas, un estimador determinando la identidad de los parámetros mediante algún criterio de minimización global de errores. Una relación de familias de funciones puede encontrarse en Love, Morris y Wesolowsky [1988] (1-6) y en Brimberg y Love [1993] (7), enumeradas a continuación:

(1)  $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau, \theta) = \tau l_1(\mathbf{x}_\theta \bar{\mathbf{y}}_\theta)$ , donde  $\tau > 0$ ,  $\theta$  es ángulo de giro que se ha aplicado a los ejes cartesianos y  $(\mathbf{x}_\theta, \mathbf{y}_\theta)$  son los puntos  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  girados.

(2)  $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau) = \tau l_2(\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}})$ , con  $\tau > 0$ .

(3)  $d_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau, p) = \tau l_p(\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}})$ , donde  $\tau > 0$  y  $p \in [1, \infty)$ .

(4)  $d_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau, p, s) = \tau (l_p(\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}))^{p/s}$ , donde  $\tau > 0$  y  $p \in [1, \infty)$  y  $p \geq s$ .

(5)  $d_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}; m_1, m_2, m_3) = \tau (m_1(x_1 - y_1)^2 + m_2(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) + m_3(x_2 - y_2)^2)^{1/2}$ , donde  $m_1 > 0$  y  $4m_1m_3 - m_2^2 > 0$ , para garantizar que la forma cuadrática sea definida positiva.

(6)  $d_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_1, \tau_2) = \tau_1 l_1(\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}) + \sqrt{2}\tau_2 l_\infty(\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}})$ , donde  $\tau_1, \tau_2 > 0$ .

(7)  $d_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau_1, \tau_2) = \tau_1 l_1(\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}}) + \tau_2 l_2(\bar{\mathbf{x}}\bar{\mathbf{y}})$ , con  $\tau_1, \tau_2 > 0$ .

En la práctica, se suele buscar el ángulo  $\theta$  tal que el error global de aproximación entre las distancias en la red y las distancias medidas con la función  $d_1(\cdot; \theta)$  sea mínimo. Aplicando un giro de ejes de ángulo  $\theta$ , se definen las nuevas coordenadas de los puntos de la red que adoptarán los demás estimadores de la lista anterior.

La determinación de los parámetros puede efectuarse mediante una rejilla de búsqueda cuando la función error que se pretende minimizar no tenga garantizada la convexidad.

La distancia sobre la red entre dos puntos  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  se denota por  $d_G(\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}})$ , y  $\eta(\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}})$  representa el sesgo asociado respecto a la distancia euclídea

$$d_G(\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}) = \|\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}\|_2 \eta(\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}).$$

Teniendo en cuenta que el sesgo de la norma de un vector sólo depende del ángulo de dicho vector, se puede establecer una nube de puntos

$$\mathcal{N} \equiv \{(\varphi_i, s_i) : i = 1, \dots, M\}$$

generada por una muestra de  $M$  pares origen-destino en la red, donde  $\varphi_i$  es la dirección y  $s_i$  el sesgo de las distancias en la red respecto a la euclídea,  $\forall i = 1, \dots, M$ .

La estimación ahora consistirá en aproximar los puntos de  $\mathcal{N}$  mediante regresión, utilizando alguna función  $s(\varphi)$ , definida en  $\varphi \in [0, 2\pi)$ , cuyo producto con la norma euclídea no ponga en peligro la convexidad del estimador. Es decir se aproximará

$$d_G(\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}) = \|\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}\|_2 \eta(\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}) \approx \|\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}}\|_2 s(\arg(\mathbf{x}\bar{\mathbf{y}})) \text{ siendo una función convexa}$$

Éste es el motivo de no tratar la estimación de distancias de viaje como un proceso de regresión polinómica de mínimos cuadrados usando las curvas aproximantes de carácter general que se emplean habitualmente en el *ajuste de puntos* (una relación de tales funciones puede encontrarse en Burden y Faires [1985], cap. 7). Se pretende que el estimador óptimo resultante sea una función convexa, para poder aplicar las técnicas de programación convexa en la resolución de problemas de localización cuya medida de distancia se calcule utilizando el estimador.

En cada punto  $\mathbf{v}_i$  de la red de transporte, existe un conjunto  $\Gamma_{ik}$  de caminos directos (denotamos con  $K_i$  el cardinal de  $\Gamma_{ik}$ ) que parten hacia otros puntos adyacentes representados por  $\mathbf{v}_{ik}$ ;  $k = 1, \dots, K_i$ . Las direcciones  $\varphi_{ik} \in [0, 2\pi)$  de los vectores  $\mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_{ik}$  se pueden considerar *privilegiadas* dentro del rango discreto de orientaciones posibles entre pares origen-destino, ya que los sesgos correspondientes  $r_{ik}$  sobrepasarán la unidad debido tan sólo a ligeros desvíos (*ruidos*) en las trayectorias euclídeas.

#### **Definición 4.1**

Sea  $\eta(\varphi)$  el sesgo de la red total en la dirección  $\varphi$ . Se dice que la red de transporte tiene un *patrón dominante euclídeo* cuando se verifica:

$$\eta(\varphi) = \tau \cdot 1 + \epsilon(\varphi)$$

donde el coeficiente  $\tau \geq 1$  se determina mediante un análisis de regresión sobre los datos de la muestra y  $\epsilon(\varphi)$  es la variable aleatoria de distribución normal independiente, que representa al error, de media cero y varianza constante.

Cuando observemos en la red una gran proporción de caminos directos, podremos formular la *hipótesis* de que el patrón dominante es euclídeo y que las distancias en la red de transporte pueden ser estimadas usando

$$d_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \tau) = \tau l_2(\vec{\mathbf{x}\mathbf{y}})$$

donde  $\tau \geq 1$  se determina mediante un análisis de regresión sobre los datos de la muestra.

Sin embargo, las redes reales de transporte salvan barreras orográficas y sus caminos no son homogéneos (hay vías rápidas para el transporte y carreteras comarcales). Estas dos características hacen que el viaje entre dos puntos sufra una desviación de trayectoria, con lo que la hipótesis de que el patrón dominante sea euclídeo no parece adecuada.

**Definición 4.2** (Brimberg y Love [1993]).

Sea  $\eta(\varphi; \theta)$  el sesgo de la red total en la dirección  $\varphi$ , acumulada sobre un giro de ejes de amplitud  $\theta$ . Diremos que la red de transporte tiene un *patrón dominante rectangular* cuando se verifica:

$$\eta(\varphi; \theta) = \tau_2 \cdot 1 + \tau_1 R(\varphi; \theta) + \epsilon(\varphi; \theta)$$

donde los coeficientes  $\tau_1 \geq 0$  y  $\tau_2$  se determinan mediante un análisis de regresión sobre los datos de la muestra,  $\epsilon(\varphi; \theta)$  es la variable aleatoria independiente que representa al error, distribuída normalmente de media cero y varianza constante, y  $R(\varphi; \theta)$  denota una función que verifica las mismas propiedades que los  $p$ -sesgos girados un ángulo  $\theta$  (es decir: periodicidad de periodo  $\pi/2$  en el hallazgo de direcciones privilegiadas, simetría respecto a las direcciones penalizadas ubicadas en cada punto medio del periodo y monotonía en los semi-intervalos del periodo).

La *hipótesis* de que el patrón dominante sea rectangular es más general que la anterior. De hecho, todas las funciones de distancia anteriores (salvo  $d_5$ ) responden a esta hipótesis (ver sección 1.3).

- (1)  $d_1$  se obtiene para  $R(\varphi; \theta) \equiv r_1(\varphi + \theta)$  y  $\tau_2 \equiv 0$ .
- (2)  $d_2$  es el caso  $R(\varphi; \theta) \equiv r_2(\varphi + \theta)$  y  $\tau_1 \equiv 0$ .
- (3)  $d_3$  emplea  $R(\varphi; \theta) \equiv r_p(\varphi + \theta)$  y  $\tau_2 \equiv 0$ .
- (4)  $d_4$  se define para  $R(\varphi; \theta) \equiv r_p^{p/s}(\varphi + \theta)$  y  $\tau_2 \equiv 0$ .
- (5)  $d_6$  es el caso  $R(\varphi; \theta) \equiv r_1(\varphi + \theta) + \frac{\tau_\infty}{\tau_1} r_\infty(\varphi + \theta)$  y  $\tau_2 \equiv 0$ .
- (6)  $d_7$  se logra para  $R(\varphi; \theta) \equiv r_1(\varphi + \theta)$ .

La técnica de muestreo seguida en todos los trabajos citados en la bibliografía del capítulo 10, *Mathematical Models of Travel Distances*, de Love, Morris y Wesolowsky [1988] ha sido aleatoria irrestricta. Sobre una única nube de puntos se ha prefijado el estimador (en cada paso de la rejilla de búsqueda), y se ha determinado el factor de inflación por minimización.

El diseño de muestreo que desarrollaremos en este capítulo será *aleatorio estratificado*. Separaremos los  $M$  puntos  $(\varphi, s)$  de la muestra en dos *estratos*  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$ , según que  $s \leq r_1(\varphi)$  o  $s > r_1(\varphi)$  respectivamente y, contrariamente al proceso antes mencionado, no se fijarán los estimadores *a priori*. Cualquier función distancia de la familia  $R(\varphi; \theta)$  puede ser candidata a estimador de la parte  $\mathcal{P}$ , mientras que para el estrato  $\mathcal{Q}$ , se precisaría una función periódica de periodo  $\pi$  en la ocurrencia de direcciones privilegiadas, simétrica respecto a las direcciones penalizadas ubicadas en cada punto medio del periodo y monótona en los semi-intervalos del periodo (familia que caracterizaremos por  $A(\varphi; \theta)$ ).

### **Definición 4.3**

Sea  $\eta(\varphi; \theta)$  el sesgo de la red total en la dirección  $\varphi$ , acumulada sobre un giro de ejes de amplitud  $\theta$ . Diremos que la red de transporte tiene un *patrón dominante rectangular-gran angular* cuando se verifica:

$$\eta(\varphi; \theta) = \tau_0 A(\varphi; \theta) + \tau_1 R(\varphi; \theta) + \epsilon(\varphi; \theta)$$

con  $\epsilon(\varphi; \theta)$  definido como en **Definición 4.2**.

La determinación de los parámetros  $\tau_0$  y  $\tau_1$ , si bien pudieran establecerse por regresión, se realizará *mezclando* los estimadores insesgados representativos de  $R(\varphi; \theta)$  y  $A(\varphi; \theta)$  diferentes.

Por último, se efectuará una hipótesis sobre la distribución poblacional de los sesgos, y se comprobará empíricamente su adecuación.

## **4.2. UNA CARACTERÍSTICA GEOMÉTRICA.**

Dados dos puntos del plano  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$ , que son vértices de una cierta red  $G$ , se denotará por  $d_G(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$  la distancia sobre el grafo inducido por la red, y  $f(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$  el valor de una cierta función de  $\mathbb{R}^2$  sobre  $\mathbb{R}$ , que será la aproximación numérica del valor anterior.

Una red  $G$  con  $n$  nodos genera  $M = \binom{n}{2}$  pares origen-destino; por lo tanto, disponemos de  $M$  valores reales de la función  $d_G(\cdot)$ .

### **Lema 4.1**

El ángulo de mínimo desvío de trayectoria  $\phi$  entre las dos aristas de la poligonal que conecta dos puntos  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$ , y cuya distancia total sea  $d_G(\mathbf{F}, \mathbf{F}')$ , verifica la igualdad:

$$\phi \equiv \phi(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = \arccos \left( \frac{2 \|\mathbf{F}\mathbf{F}'\|_2^2}{d_G(\mathbf{F}, \mathbf{F}')^2} - 1 \right)$$

### **Demostración**

Sean dos puntos del plano euclídeo  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$  que representan dos vértices cualesquiera de la red de transporte. La distancia sobre dicha red se denotará por  $2a$  mientras que la distancia euclídea será  $2c$ .

$$d_G(\mathbf{F}, \mathbf{F}') = 2a; \quad \|\mathbf{F}\mathbf{F}'\|_2 = 2c$$



El conjunto de puntos  $P(x, y)$  del plano tales que verifican:

$$\| \vec{PF}' \|_2 + \| \vec{PF} \|_2 = 2a$$

crean caminos poligonales de dos aristas para conectar los nodos  $F$  y  $F'$  con una longitud total equivalente a  $d_G(F, F')$ . Cualquier punto  $P(x, y)$  de la elipse anterior que se elija verifica la propiedad de la estimación exacta. Veamos el valor del ángulo  $\gamma$  entre los vectores  $\vec{PF}$  y  $\vec{PF}'$ ; es decir, el ángulo desde el cual se abarca la distancia focal.

Dado que el resultado será invariante de la elección que se haga del sistema de referencias, consideremos la elipse en su forma reducida.

Sean  $F(c, 0)$  y  $F'(-c, 0)$ ; y la ecuación:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

Los vectores  $\vec{PF} = (c - x, -y)$  y  $\vec{PF}' = (-c - x, -y)$  verifican:

$$\vec{PF} \cdot \vec{PF}' = x^2 + y^2 - c^2$$

$$\| \vec{PF} \|_2 = \sqrt{(c - x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + c^2 - 2cx}$$

$$\| \vec{PF}' \|_2 = \sqrt{(c + x)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + c^2 + 2cx}$$

Por lo tanto:

$$\cos(\gamma) = \frac{x^2 + y^2 - c^2}{\sqrt{(x^2 + y^2 + c^2)^2 - (2cx)^2}}$$

Vamos a parametrizar el ángulo  $\gamma$  dependiendo de  $x \in (-a, a)$ . Para ello, tenemos en cuenta que  $y^2 = (a^2 - x^2)b^2/a^2$  y que  $b^2 = a^2 - c^2$  y se llega a  $y^2 = (a^2 - x^2)(a^2 - c^2)/a^2$ , que se aplica en el siguiente modo:

$$x^2 + y^2 = a^2 - c^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2$$

$$x^2 + y^2 + c^2 = a^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2$$

$$x^2 + y^2 - c^2 = a^2 - 2c^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2$$

$$(x^2 + y^2 + c^2)^2 = \left(a^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2\right)^2 = a^4 + \left(\frac{c}{a}\right)^4 x^4 + 2(cx)^2$$

$$(x^2 + y^2 - c^2)^2 = \left(a^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2\right)^2$$

$$\cos(\gamma) = \frac{a^2 - 2c^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2}{\left| a^2 - \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2 \right|}$$

Denominemos el sesgo  $r = \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c}$ . De donde  $\frac{c}{a} = \frac{1}{r}$ , quedando finalmente:

$$\cos(\gamma) = \frac{x^2 + (r a)^2 - 2a^2}{\left| x^2 - (r a)^2 \right|}$$

Son evidentes las siguientes propiedades:

(Prop. 1). Simetría respecto a  $x$ . Por lo que consideraremos el dominio  $x \in [0, a]$ .

(Prop. 2). Si  $x = a$ , entonces  $\gamma = 0$ , y si  $x = 0$  entonces  $\gamma$  es máximo.

(Prop. 3). La relación entre el máximo ángulo  $\gamma \in [0, \pi)$  y el sesgo  $r \geq 1$  es biunívoca en los rangos considerados:

$$\cos(\gamma) = \frac{(ra)^2 - 2a^2}{(ra)^2} = 1 - \frac{2}{r^2}$$

Si se considera su suplementario,  $\phi = \pi - \gamma$ , se tiene la expresión analítica del ángulo mínimo desvío de trayectoria  $\phi$  entre las dos aristas de la poligonal que conecta dos puntos  $F$  y  $F'$ :

$$\cos(\phi) = \frac{2}{r^2} - 1$$

El resto de la demostración es sólo despejar.

q.e.d.

#### Teorema 4.1

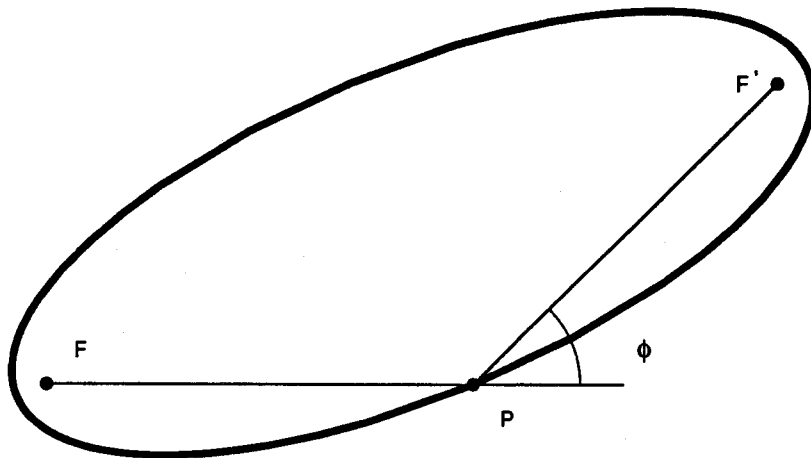
La distancia entre dos puntos  $F$  y  $F'$  de una red plana puede expresarse en términos del  $\phi$ -sesgo mediante:

$$d_G(F, F') = \|\vec{FF}'\|_2 r_B(\phi/2)$$

siendo  $\phi \equiv \phi(F, F') = \arccos\left(\frac{2\|\vec{FF}'\|_2^2}{d_G(F, F')^2} - 1\right)$  el ángulo que genera la malla  $B$  básica  $\phi$ -deformada, cuyo sesgo es  $r_B(\cdot)$ .

#### Demostración

Considerar la mediatriz del segmento  $\overline{FF'}$  que cortará a la elipse del lema anterior en dos puntos  $P$  y  $P'$



Con cualquiera de ellos, por ejemplo  $P$  (ver figura explicativa), se tiene que la poligonal  $FPF'$  es una trayectoria en la malla  $\phi$ -deformada; por lo que la longitud vendrá dada por la norma  $\|\cdot\|_B$  (ver sección 2.1), verificándose el enunciado.

q.e.d.

**Teorema 4.2**

La distancia entre dos puntos  $F$  y  $F'$  de una red plana puede expresarse en términos del  $\theta$ -sesgo,  $\theta \in [\phi, \pi)$ , mediante:

$$d_G(F, F') = \| \vec{FF'} \|_2 \tau_{B(\theta)} r_{B(\theta)}(\theta/2)$$

siendo  $\phi \equiv \phi(F, F') = \arccos \left( \frac{2 \| \vec{FF'} \|_2^2}{d_G(F, F')^2} - 1 \right)$ ,  $r_{B(\theta)}(\cdot)$  es el sesgo de la norma bloque inducida por  $B(\theta)$  básica  $\theta$ -deformada, y  $\tau_{B(\theta)} \geq 1$  es un factor de inflación.

**Demostración**

Manteniendo los focos de la elipse del lema anterior, se considera la familia de elipses que son interiores a la anterior. Una cualquiera de la elipses de dicha familia vendrá caracterizada por el ángulo  $\theta \in [\phi, \pi)$  que se origina en el desvío de trayectoria de la poligonal  $\overline{FP_\theta F'}$  que se apoya en un punto  $P_\theta$  intersección con la mediatriz del segmento  $\overline{FF'}$  con la elipse considerada.

Dado que  $\phi$  es mínimo en el rango de  $\theta$ , y los  $\theta$ -sesgos, calculados en su punto medio, son decrecientes respecto al ángulo  $\theta$

$$r_{B(\theta)}(\theta/2) \leq r_{B(\phi)}(\phi/2),$$

se tiene que mediante el factor de inflación  $\tau_{B(\theta)} \geq 1$  adecuado, se consigue la igualdad.

q.e.d.

**4.3. AJUSTE DE LA NUBE DE PUNTOS.**

Supongamos que la muestra seleccionada de pares origen-destino en la red de transporte proporciona una nube de puntos:

$$\mathcal{N} \equiv \{(\varphi_i, s_i) : i = 1, \dots, M\}$$

donde cada  $\varphi_i$  es el ángulo de la trayectoria origen-destino respecto al sistema de referencias prefijado,  $s_i$  es el sesgo resultante de comparar la distancia de viaje para el par origen-destino sobre la red de carreteras y su respectiva distancia euclídea, y  $M$  es el número total de parejas posibles sin repetir entre los nodos de la muestra.

El rango de valores para  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , será  $[0, 2\pi)$  y el rango de  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , es  $[1, \infty)$  porque se considera que la distancia más corta entre dos puntos se mide euclídeamente.

A partir de la colección  $\mathcal{N}$  se genera la partición:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_p \cup \mathcal{N}_q$$

a base de comparar el ángulo de mínimo desvío de trayectoria con  $\pi/2$ . Así, denominando:

$$\phi(s) = \arccos \left( \frac{2}{s^2} - 1 \right)$$

se obtiene,

$$\mathcal{N}_p = \{(\varphi, s) \in \mathcal{N} : \phi(s) \leq \pi/2\}$$

Sea  $\mathcal{I}_p$  el cardinal de  $\mathcal{N}_p$ . Mientras que

$$\mathcal{N}_q = \{(\varphi, s) \in \mathcal{N} : \phi(s) > \pi/2\}$$

tiene a  $\mathcal{I}_q$  como cardinal.

Se va a tratar por separado cada parte, efectuando un ajuste polinomial de segundo grado, sugerido por el comportamiento cuadrático del  $p$ -sesgo en un entorno de  $\pi/4$ , como así se demostraba en el **Lema 2.9** para el caso  $p \in [1, 2)$ :

$$r_p(\pi/4 + t) = \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left(1 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) t^2\right) + o(t^2)$$

Una traslación de las primeras componentes de los pares de  $\mathcal{N}_p$  al intervalo  $[0, \pi/2]$  centrado en el punto de abscisa  $\pi/4$  se logra mediante:

$$\mathcal{P} = \{(t, s) : t = \text{mod}(\varphi, \pi/2) - \pi/4, \text{ y } (\varphi, s) \in \mathcal{N}_p\}$$

donde  $\text{mod}(x, y)$  representa el resto de la división entera entre  $x$  e  $y$ .

Sobre este conjunto de puntos se va a obtener el valor de los coeficientes  $a$  y  $b$  tales que minimicen la suma de cuadrados siguiente:

$$\min_{a,b} E_H(a, b; t) := \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} (s_i - a(1 + bt_i^2))^2$$

**Lema 4.2 (Existencia y unicidad de los coeficientes)**

La función  $H(a, b; t) = a(1 + bt^2)$  que aproxima al conjunto de datos  $\mathcal{P}$  en el sentido de mínimos cuadrados se obtiene para:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i\right) \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^4\right) - \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i t_i^2\right)}{\mathcal{I}_p \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^4\right) - \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2\right)^2} \\ b = \frac{\mathcal{I}_p \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i t_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i\right) \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2\right)}{\left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i\right) \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^4\right) - \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i t_i^2\right)} \end{array} \right.$$

siempre que  $\mathcal{I}_p \geq 2$  y haya dos valores de  $t_i$  distintos al menos.

**Demstración**

Efectuando las respectivas derivadas parciales:

$$\frac{\partial E_H}{\partial a} = 2a \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} (1 + 2bt_i^2 + b^2 t_i^4) - 2 \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i - 2b \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i t_i^2$$

$$\frac{\partial E_H}{\partial b} = a^2 \sum_{i=1}^{I_p} (2bt_i^4 + 2t_i^2) - 2a \sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2$$

y se igualan a cero, resultando el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_p a + 2 \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right) ab + \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^4 \right) ab^2 = \sum_{i=1}^{I_p} s_i + \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2 \right) b \\ \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right) a + \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^4 \right) ab = \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2 \right) \end{array} \right.$$

Si la primera ecuación se modifica restándole la segunda por  $b$ , resulta el sistema equivalente de *ecuaciones normales* (ver Burden y Faires [1985]):

$$\left\{ \begin{array}{l} I_p a + \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right) ab = \sum_{i=1}^{I_p} s_i \\ \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right) a + \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^4 \right) ab = \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2 \right) \end{array} \right.$$

La solución de dicho sistema, ver Nota final, es:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{\left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i \right) \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^4 \right) - \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2 \right)}{I_p \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^4 \right) - \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right)^2} \\ ab = \frac{I_p \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i \right) \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right)}{I_p \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^4 \right) - \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right)^2} \end{array} \right.$$

De donde,

$$b = \frac{I_p \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i \right) \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right)}{\left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i \right) \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^4 \right) - \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2 \right)}$$

q.e.d.

### Nota final

La compatibilidad del sistema queda garantizada con el siguiente razonamiento:

Consideremos el sistema lineal homogéneo cuya matriz es la de coeficientes del sistema de ecuaciones normales. Veamos que dicho sistema sólo tiene la solución

trivial, con lo que la matriz debe ser no singular. Sea  $(x_1, x_2)$  una solución de:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{I}_p & \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2 \\ \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2 & \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La forma cuadrática asociada a la matriz anterior sobre el vector con  $(x_1, x_2)$  dará lugar a una expresión nula:

$$\mathcal{I}_p x_1^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2 \right) x_1 x_2 + \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^4 \right) x_2^2 = 0$$

agrupando en cuadrados:

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} (x_1^2 + 2t_i^2 x_1 x_2 + t_i^4 x_2^2) = \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} (x_1 + t_i^2 x_2)^2 = 0$$

De donde se obtiene tras igualar cada sumando a cero un sistema sobredeterminado si  $\mathcal{I}_p \geq 2$  y entre los  $t_i$  hay al menos dos distintos. Dado que estas condiciones se recogen en el enunciado, se tiene necesariamente que  $x_1 = x_2 = 0$ , con lo que la única solución al sistema homogéneo era la trivial.

q.e.d.

#### Lema 4.3 (Signo del coeficiente $a$ )

El valor del coeficiente  $a$  de la función  $H(a, b; t) = a + (ab)t^2$  que aproxima por mínimos cuadrados a la nube de puntos  $\mathcal{N}_p$  está en el intervalo  $a \in [1, \sqrt{2}]$ .

#### Demostración

Dado que los puntos que se aproximan  $(t_i, s_i)$ ;  $i = 1, \dots, \mathcal{I}_p$  verifican  $s_i \in [1, \max_{\varphi} r_1(\varphi)] \equiv [1, \sqrt{2}]$ , se deduce que la ordenada en el origen  $a$  de la función que minimiza la aproximación por mínimos cuadrados, debe cumplir:  $a \in [1, \sqrt{2}]$ ; ya que de lo contrario,  $a \in (0, 1) \cup (\sqrt{2}, \infty)$ , siempre habría otra función  $H'(a', b; t) = a' + (a'b)t^2$ , con  $a' \in [1, \sqrt{2}]$  tal que aproximara mejor la nube de puntos, en contra de que  $H(a, b; t)$  fuera la función minimizadora.

q.e.d.

#### Lema 4.4

En las condiciones:

- (1)  $\mathcal{I}_p \geq 2$ .
  - (2)  $s_i \in [1, \sqrt{2}]$ .
  - (3) Existen dos  $t_i$  diferentes, al menos, entre las  $\mathcal{I}_p$  posibilidades ( $\mathcal{I}_p \geq 2$ ).
- se tiene que

$$\left( \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i \right) \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^4 \right) \geq \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i t_i^2 \right)$$

**Demostración**

En virtud del Lema 4.3 se tiene que:

$$0 < 1 \leq \frac{\left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i\right) \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^4\right) - \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i t_i^2\right)}{\mathcal{I}_p \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^4\right) - \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2\right)^2} \leq \sqrt{2}$$

Y dado que  $a \neq 0$  y  $a \neq \infty$ , ni el numerador ni el denominador se anularán. En lo que respecta al denominador, aplicando la desigualdad de Hölder:

$$\sum_{i=1}^m x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^m x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^m y_i^q\right)^{1/q}; \quad x_i, y_i \geq 0; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; \quad p > 1$$

en el caso

$$x_i = 1; \quad y_i = t_i^2; \quad p = 2$$

se tiene

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} 1\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^4\right)^{1/2}$$

de donde el denominador de  $a$ , verificará (al no ser nulo):

$$\mathcal{I}_p \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^4\right) - \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2\right)^2 > 0$$

La desigualdad del enunciado (numerador de  $a$ ) se prueba sin más que recordar que la expresión de  $a$  es positiva, en virtud del Lema 4.3 y acabamos de ver que su denominador es positivo.

**q.e.d.**

**Lema 4.5 (Signo del coeficiente  $b$ )**

En las condiciones:

- (1)  $\mathcal{I}_p \geq 2$ .
- (2)  $s_i \in [1, \sqrt{2}]$ .
- (3) Existen dos  $t_i$  diferentes, al menos, entre las  $\mathcal{I}_p$  posibilidades ( $\mathcal{I}_p \geq 2$ ).

El signo del coeficiente  $b$  de la función  $H(a, b; t) = a + (ab)t^2$  que aproxima por mínimos cuadrados a la nube de puntos  $\mathcal{N}_p$  es negativo si y sólo si la media aritmética de los cuadrados de las abscisas de los puntos de la muestra mayor estrictamente a la media ponderada con los sesgos de esos mismos términos, es decir

(4)

$$\frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i t_i^2}{\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} s_i} < \frac{\sum_{i=1}^{\mathcal{I}_p} t_i^2}{\mathcal{I}_p}$$

(5) Si añadimos la condición:

$$\frac{\sum_{i=1}^{I_p} (1 - t_i^2) t_i^2}{\sum_{i=1}^{I_p} (1 - t_i^2)} < \frac{\sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2}{\sum_{i=1}^{I_p} s_i}$$

entonces la negatividad de  $b$  se limita al intervalo:  $b \in (-1, 0)$ .

(Se tiene así que la función  $H(a, b; t) = a + (ab)t^2$  es una parábola cóncava).

### Demostración

En la expresión del coeficiente  $b$  del **Lema 4.2** se tenía que el denominador coincidía con el numerador de  $a$  cuya positividad fue demostrada en el lema anterior. Bastaría comprobar que el numerador de  $b$  es negativo, para tener el lema. Es decir verificar que

$$\left( \sum_{i=1}^{I_p} 1 \right) \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2 \right) < \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i \right) \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right)$$

lo cual es equivalente a

$$\sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2 < \sum_{i=1}^{I_p} s_i \frac{\sum_{j=1}^{I_p} t_j^2}{I_p} = \sum_{i=1}^{I_p} s_i \bar{t}^2$$

Finalmente, la condición queda:

$$\frac{\sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2}{\sum_{i=1}^{I_p} s_i} < \bar{t}^2$$

es decir, la media aritmética de los términos  $t_i^2$  debe mayorar la media ponderada de dichos términos, donde los pesos son  $s_i \in [1, \sqrt{2}]$ .

Para comprobar que la condición (5), junto con la (4), implica  $b \in (-1, 0)$ , basta con quitar denominadores y agrupar convenientemente a partir de:

$$b = \frac{\mathcal{I}_p \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2 \right) - \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i \right) \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right)}{\left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i \right) \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^4 \right) - \left( \sum_{i=1}^{I_p} t_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^{I_p} s_i t_i^2 \right)} > -1$$

q.e.d.

Este **Lema 4.5** delimita el contexto en que la muestra seleccionada puede ajustarse por mínimos cuadrados con una parábola simétrica de coeficiente de segundo grado negativo.



Cuando el conjunto de datos  $\mathcal{P}$  verifique las condiciones del **Lema 4.5**, veremos que es posible convertir el aproximante polinómico a otras funciones estimadoras tipo  $\tau l_p$  y normas bloque ponderadas. En lo que sigue, supondremos que la muestra obtenida garantiza  $b \in (-1, 0)$ .

El **Lema 4.2** establece un procedimiento de estimación en el sentido de mínimos cuadrados para las distancias en la red: dados dos puntos  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$  de la red cuyo vector  $\vec{\mathbf{F}\mathbf{F}'}$  tiene de argumento  $\varphi$ , se tiene que:

$$d_G(\mathbf{F}, \mathbf{F}') \triangleq \|\vec{\mathbf{F}\mathbf{F}'}\|_2 H(a, b; \text{mod}(\varphi, \pi/2) - \pi/4)$$

donde  $a$  y  $b$  se obtienen mediante las expresiones dadas en el **Lema 4.2**.

**Teorema 4.3**

La función  $\tau l_p(\cdot)$  que aproxima al conjunto de datos  $\mathcal{P}$  en el sentido de mínimos cuadrados se obtiene para:

$$\begin{cases} p = 2(1 + b) \\ \tau = a \frac{\sqrt{2}}{2^{1/p}} \end{cases}$$

donde  $a$  y  $b$  vienen dados por el **Lema 4.2**.

**Demostración**

El **Lema 2.2** establecía que el desarrollo del  $p$ -sesgo,  $p \in [1, 2)$ , en un entorno de  $\pi/4$  era aproximadamente cuadrático:

$$r_p(\pi/4 + t) = \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left( 1 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) t^2 \right) + o(t^2), \forall t \in [-\pi/4, \pi/4]$$

Multiplicando la igualdad por el parámetro  $\tau$  se obtiene, al despreciar el error de orden superior a 2, un polinomio de segundo grado cuyos coeficientes pueden identificarse al que en el **Lema 4.2** propicia el ajuste de mínimos cuadrados. Se tiene así, sin necesidad de readaptar intervalos:

$$\begin{cases} b = \frac{p}{2} - 1 \\ a = \frac{\tau 2^{1/p}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

de donde, al despejar se tiene el teorema.

q.e.d.

Este resultado establece un procedimiento de estimación mediante una norma  $l_p$  inflada con el factor  $\tau$  restringido a trayectorias cuyo ángulo mínimo de desvío es inferior a  $\pi/2$ . Así, dados dos puntos  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$  de la red cuyo vector  $\vec{\mathbf{F}\mathbf{F}'}$  tiene de argumento  $\varphi$ , se tiene que:

$$d_G(\mathbf{F}, \mathbf{F}') \triangleq \|\vec{\mathbf{F}\mathbf{F}'}\|_2 \tau r_p(\text{mod}(\varphi, \pi/2))$$

donde  $p$  y  $\tau$  se obtienen según el **Teorema 4.3**.

**Teorema 4.4**

Sea  $B$  un politopo simétrico de vértices:

$$\{ \pm(1, 0), \pm(\cos \phi, \operatorname{sen} \phi) \}.$$

La función  $\tau r_B(\cdot)$  que aproxima al conjunto de datos  $\mathcal{P}$  en el sentido de mínimos cuadrados se obtiene para:

$$\begin{cases} \phi = \pi \sqrt{\frac{-b}{2}} \\ \tau = a \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \end{cases}$$

donde  $a$  y  $b$  vienen dados por el **Lema 4.2**.

**Demostración**

En la **sección 2.2** vimos que la expresión del  $\phi$ -sesgo para ángulos  $\omega \in [0, \phi]$  viene dada:

$$r_B(\omega) = \frac{\cos(\omega - \phi/2)}{\cos(\phi/2)}$$

La trayectoria  $\varphi \in [0, 2\pi)$  puede llevarse al primer cuadrante mediante el empleo de la función resto:

$$\operatorname{mod}(\varphi, \pi/2) = \pi/4 + t, \text{ con } t \in [-\pi/4, \pi/4]$$

De forma análoga, el ángulo  $\omega \in [0, \phi]$  es susceptible de ser expresado

$$\omega = \phi/2 + t^*, \text{ con } t^* \in [-\phi/2, \phi/2].$$

Mediante la transformación

$$t^* = \frac{2\phi}{\pi} t = \frac{2\phi t}{\pi}$$

convertimos continuamente un intervalo en otro. Por lo que:

$$r_B(\phi/2 + t^*) = \frac{\cos(t^*)}{\cos(\phi/2)} = \frac{\cos\left(\frac{2\phi t}{\pi}\right)}{\cos(\phi/2)}$$

Desarrollando en serie de Taylor en el entorno de  $t = 0$  la función coseno:

$$r_B(\phi/2 + t^*) = \frac{1}{\cos(\phi/2)} \left( 1 - \frac{2\phi^2}{\pi^2} t^2 + o(t^2) \right)$$

Multiplicando la igualdad por el parámetro  $\tau$  e identificando coeficientes con el polinomio de segundo grado obtenido en el **Lema 4.2**:

$$\begin{cases} b = \frac{-2\phi^2}{\pi^2} \\ a = \frac{\tau}{\cos(\phi/2)} \end{cases}$$

Al despejar se tiene el teorema.

q.e.d.

Este teorema permite estimar distancias en la red mediante una norma bloque  $B$  inflada con el factor  $\tau$  restringido a trayectorias cuyo ángulo mínimo de desvío es inferior a  $\pi/2$ . Así, dados dos puntos  $F$  y  $F'$  de la red cuyo vector  $\vec{FF'}$  tiene de argumento  $\varphi$ , se verifica que:

$$d_G(F, F') \triangleq \| \vec{FF'} \|_2 \tau r_B\left(\frac{2\phi \bmod(\varphi, \pi/2)}{\pi}\right) = \\ = \| \vec{FF'} \|_2 \tau \frac{\cos\left(\frac{2\phi \bmod(\varphi, \pi/2)}{\pi} - \phi/2\right)}{\cos(\phi/2)}$$

donde  $\phi$  y  $\tau$  se obtienen según el Teorema 4.4.

Consideremos ahora la nube complementaria de la muestra:

$$\mathcal{N}_q = \{(\varphi, s) \in \mathcal{N} : \phi(s) > \pi/2\}$$

Realizamos una traslación al intervalo  $[0, \pi]$  centrado en el punto de abscisa  $\pi/2$  mediante:

$$\mathcal{Q} = \{(t, s) : t = \bmod(\varphi, \pi) - \pi/2, (\varphi, s) \in \mathcal{N}_q\}$$

Sobre este conjunto de puntos se obtendrán nuevos valores para los coeficientes  $a$  y  $b$  de la función cuadrática  $H(a, b; t)$  tales que minimicen la suma de cuadrados:

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{I_p} (s_i - a(1 + bt_i^2))^2$$

La expresión de los coeficientes se obtiene tal como se expone en el Lema 4.2 y el procedimiento de estimación de distancias entre los puntos  $F$  y  $F'$  de la red cuyo vector  $\vec{FF'}$  tiene de argumento  $\varphi$  se establece en el sentido de mínimos cuadrados como sigue:

$$d_G(F, F') \triangleq \| \vec{FF'} \|_2 H(a, b; \bmod(\varphi, \pi) - \pi/2)$$

donde  $a$  y  $b$  se obtienen a través del Lema 4.2.

En el contexto del conjunto de datos  $\mathcal{Q}$ , necesitaremos en posteriores teoremas que  $b \in (-1/4, 0)$ . Para ello habría que imponer la condición:

$$\frac{\sum_{i=1}^{I_q} (4 - t_i^2)t_i^2}{\sum_{i=1}^{I_q} (4 - t_i^2)} < \frac{\sum_{i=1}^{I_q} s_i t_i^2}{\sum_{i=1}^{I_q} s_i} < \frac{\sum_{i=1}^{I_q} t_i^2}{I_q}$$

siguiendo un razonamiento análogo al del Lema 4.5.

En lo que sigue, supondremos que la muestra verifica dicha condición.

**Lema 4.6**

Fijado un valor de  $p \in (0, 2)$ , se verifica para todo  $t \in (-\pi/4, \pi/4)$ :

$$r_p(\pi/4 + t) = \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left( 1 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) t^2 \right) + o(t^2)$$

**Demostración.**

La demostración es análoga a la realizada para el Teorema 2.4, pero se precisa comprobar que la función auxiliar:

$$b(t; p) = \frac{p(p-1)}{2} \tan^2(t) + \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{24} \tan^4(t)$$

tenga su rango en  $(-1, 1)$  cuando  $p \in (0, 1)$  y  $\tan(t) \in (-1, 1)$ . El caso  $p = 1$  es trivial y en el citado teorema se probó el resultado para  $p \in (1, 2)$ .

La función  $b(t; p)$  es un polinomio de grado cuarto en la variable  $p$ , usando  $t$  como parámetro, con sólo dos raíces reales en  $p = 0$  y  $p = 1$ . En dicho intervalo alcanzará el mínimo, que pretendemos que no sea inferior a  $-1$ , para probar el lema.

La comprobación de que  $|b(t; p)| < 1$ , se puede efectuar acotando el polinomio de cuarto grado con uno de segundo que lo mayor en el intervalo  $(0, 1)$ .

Así,

$$\begin{aligned} |b(t; p)| &= \frac{p(1-p)}{2} \tan^2(t) \left( 1 + \frac{(2-p)(3-p)}{12} \tan^2(t) \right) \leq \\ &\leq \frac{p(1-p)}{2} \left( 1 + \frac{(2-p)(3-p)}{12} \right) \end{aligned}$$

debido a que  $\tan(t) \in (-1, 1)$ . Además, el segundo factor en:

$$|b(t; p)| \leq \frac{p(1-p)}{24} (p^2 - 5p + 18)$$

es un polinomio de segundo grado decreciente en el intervalo  $[0, 1]$ , por lo que el valor que alcanza en  $p = 0$  mayor a al resto:

$$|b(t; p)| \leq \frac{18p(1-p)}{24} \leq \max_{p \in (0,1)} \frac{18p(1-p)}{24} = \frac{9}{48} < 1$$

sin más que calcular en  $p = 1/2$  el valor máximo de la parábola  $\frac{18p(1-p)}{24}$

Salvada esta dificultad, el resto de la demostración del Teorema 2.4, valida la de este lema.

**q.e.d.**

**Teorema 4.5**

La función  $\tau l_p(\cdot)$  que aproxima al conjunto de datos  $\mathcal{Q}$  en el sentido de mínimos cuadrados se obtiene para:

$$\begin{cases} p = 2(1 + 4b) \\ \tau = a \frac{\sqrt{2}}{2^{1/p}} \end{cases}$$

donde  $a$  y  $b$  vienen dados por el Lema 4.2.

**Demostración**

El Lema 4.3 extiende la expresión cuadrática aproximada del desarrollo del  $p$ -sesgo a valores de  $p \in (0, 2)$ , en un entorno de  $\pi/4$ :

$$r_p(\pi/4 + t^*) = \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left( 1 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) t^{*2} \right) + o(t^{*2}), \quad \forall t^* \in [-\pi/4, \pi/4]$$

Notemos que ahora la variable de la función  $H(a, b; t)$  verifica

$$t = \text{mod}(\varphi, \pi) - \pi/2 \in [-\pi/2, \pi/2]$$

por lo que es necesario establecer la transformación continua  $t^* = t/2$ , antes de identificar coeficientes entre  $H(a, b; t) = a(1 + bt^2)$  y  $r_p(\pi/4 + t^*) = r_p(\pi/4 + t/2)$ . Puesto que

$$r_p(\pi/4 + t/2) = \frac{2^{1/p}}{\sqrt{2}} \left( 1 + \left(\frac{p}{2} - 1\right) (t/2)^2 \right) + o(t^2), \quad \forall t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

bastaría con multiplicar la igualdad por el parámetro  $\tau$  y despreciar el error de orden superior a 2 para llegar a:

$$\begin{cases} b = \frac{p}{8} - \frac{1}{4} \\ a = \frac{\tau 2^{1/p}}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

de donde, al despejar se tiene el teorema.

q.e.d.

Este resultado establece un procedimiento de estimación mediante una función  $l_p$  inflada con el factor  $\tau$  aplicado a trayectorias cuyo ángulo de desvío mínimo es superior a  $\pi/2$ . El valor de  $p$  puede estar en  $(0, 2]$ . Así, los puntos  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{F}'$  de la red cuyo vector  $\vec{\mathbf{F}\mathbf{F}'}$  tiene de argumento  $\varphi$  tendrán aproximada su distancia sobre la red en el sentido de mínimos cuadrados:

$$\begin{aligned} d_G(\mathbf{F}, \mathbf{F}') &\triangleq \|\vec{\mathbf{F}\mathbf{F}'}\|_2 \tau r_p\left(\frac{1}{2} (\text{mod}(\varphi, \pi) - \pi/2) + \pi/4\right) = \\ &= \|\vec{\mathbf{F}\mathbf{F}'}\|_2 \tau r_p(\text{mod}(\varphi/2, \pi/2)) \end{aligned}$$

donde  $p$  y  $\tau$  se obtienen según el **Teorema 4.5**.

### **Teorema 4.6**

Sea  $B$  un politopo simétrico de vértices:

$$\{ \pm(1, 0), \pm(\cos \phi, \operatorname{sen} \phi) \}.$$

La función  $\tau r_B(\cdot)$  que aproxima al conjunto de datos  $\mathcal{Q}$  en el sentido de mínimos cuadrados se obtiene para:

$$\begin{cases} \phi = \pi\sqrt{-2b} \\ \tau = a \cos(\frac{\phi}{2}) \end{cases}$$

donde  $a$  y  $b$  vienen dados por el **Lema 4.2**.

### **Demostración**

En la **sección 2.2** vimos que la expresión del  $\phi$ -sesgo para ángulos  $\omega \in [0, \phi]$  viene dada:

$$r_B(\omega) = \frac{\cos(\omega - \phi/2)}{\cos(\phi/2)}$$

La trayectoria  $\varphi \in [0, 2\pi)$  puede llevarse al intervalo  $[0, \pi)$  mediante  $\operatorname{mod}(\varphi, \pi) \in [0, \pi)$  y, a su vez, expresarse:

$$\operatorname{mod}(\varphi, \pi) = \pi/2 + t, \text{ con } t \in [-\pi/2, \pi/2)$$

De forma análoga, el ángulo  $\omega \in [0, \phi]$  es susceptible de ser expresado

$$\omega = \phi/2 + t^*, \text{ con } t^* \in [-\phi/2, \phi/2).$$

Mediante la transformación

$$t^* = \frac{\phi t}{\pi}$$

convertimos continuamente un intervalo en otro. Por lo que:

$$r_B(\phi/2 + t^*) = \frac{\cos(t^*)}{\cos(\phi/2)} = \frac{\cos(\frac{\phi t}{\pi})}{\cos(\phi/2)}$$

Desarrollando en serie de Taylor en el entorno de  $t = 0$  la función coseno:

$$r_B(\phi/2 + t^*) = \frac{1}{\cos(\phi/2)} \left( 1 - \frac{\phi^2}{2\pi^2} t^2 + o(t^2) \right)$$

Multiplicando la igualdad por el parámetro  $\tau$  e identificando coeficientes con el polinomio de segundo grado obtenido en el **Lema 4.2**:

$$\begin{cases} b = \frac{-\phi^2}{2\pi^2} \\ a = \frac{\tau}{\cos(\phi/2)} \end{cases}$$

Basta despejar para tener el teorema.

q.e.d.

Este resultado es útil para estimaciones en trayectorias en la red cuyo ángulo de mínimo desvío sea superior a  $\pi/2$  mediante una norma bloque  $B$  inflada con el factor  $\tau$ . Así, dados dos puntos  $F$  y  $F'$  de la red cuyo vector  $F\vec{F}'$  tiene de argumento  $\varphi$ , se tiene que:

$$d_G(F, F') \triangleq \| F\vec{F}' \|_2 \tau r_B\left(\frac{\phi \bmod(\varphi, \pi)}{\pi}\right) = \\ = \| F\vec{F}' \|_2 \tau \frac{\cos\left(\frac{\phi \bmod(\varphi, \pi)}{\pi} - \phi/2\right)}{\cos(\phi/2)}$$

donde  $\phi$  y  $\tau$  se obtienen según el Teorema 4.6.

#### 4.4. MEZCLA DE LOS ESTIMADORES PARCIALES.

La partición de la nube de puntos  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_p \cup \mathcal{N}_q$  generada por la muestra seleccionada de pares origen-destino en la red de transporte origina un estimador para cada parte, que habrán de combinarse mediante ponderación de las frecuencias dadas por los cardinales de cada subconjunto.

Así, dispondremos de tres estimadores que analíticamente se definen usando los coeficientes  $a_p$  y  $b_p$  deducidos de aplicar el Lema 4.2 sobre la nube de puntos

$$\mathcal{P} = \{(t, s) : t = \bmod(\varphi, \pi/2) - \pi/4, (\varphi, s) \in \mathcal{N}_p\}$$

y los coeficientes  $a_q$  y  $b_q$  obtenidos de forma análoga con el conjunto

$$\mathcal{Q} = \{(t, s) : t = \bmod(\varphi, \pi) - \pi/2, (\varphi, s) \in \mathcal{N}_q\}$$

Un trayecto sobre la red representado por el vector  $x$ , cuya argumento sea  $\varphi \in [0, 2\pi)$  será aproximado en el sentido de mínimos cuadrados por:

#### Estimador polinómico de segundo grado.

Si denotamos  $H_p(a_p, b_p; t) = a_p(1 + b_p t^2)$  y  $H_q(a_q, b_q; t) = a_q(1 + b_q t^2)$  entonces

$$d_G(x) \triangleq \| x \|_2 \left( \frac{\mathcal{I}_p}{\mathcal{I}_p + \mathcal{I}_q} H_p(a_p, b_p; \bmod(\varphi, \pi/2) - \pi/4) + \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{I}_q}{\mathcal{I}_p + \mathcal{I}_q} H_q(a_q, b_q; \bmod(\varphi, \pi) - \pi/2) \right)$$

#### Estimador mediante una combinación convexa de dos funciones $\tau l_p$ .

Si denotamos

$$\begin{cases} p = 2(1 + b_p) \\ \tau_p = a_p \frac{\sqrt{2}}{2^{1/p}} \end{cases} \quad \begin{cases} q = 2(1 + 4b_q) \\ \tau_q = a_q \frac{\sqrt{2}}{2^{1/q}} \end{cases}$$

entonces

$$d_G(\mathbf{x}) \triangleq \|\mathbf{x}\|_2 \left( \frac{\mathcal{I}_p}{\mathcal{I}_p + \mathcal{I}_q} \tau_p r_p(\text{mod}(\varphi, \pi/2)) + \frac{\mathcal{I}_q}{\mathcal{I}_p + \mathcal{I}_q} \tau_q r_q(\text{mod}(\varphi/2, \pi/2)) \right)$$

**Estimador mediante una combinación convexa de dos normas bloque.**

Si denotamos

$$\begin{cases} \phi_p = \pi \sqrt{\frac{-b_p}{2}} \\ \tau_p = a_p \cos\left(\frac{\phi_p}{2}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} \phi_q = \pi \sqrt{-2b_q} \\ \tau_q = a_q \cos\left(\frac{\phi_q}{2}\right) \end{cases}$$

entonces

$$d_G(\mathbf{x}) \triangleq \|\mathbf{x}\|_2 \left( \frac{\mathcal{I}_p}{\mathcal{I}_p + \mathcal{I}_q} \tau_p \frac{\cos\left(\frac{2\phi_p}{\pi} \text{mod}(\varphi, \pi/2) - \phi_p/2\right)}{\cos(\phi_p/2)} + \frac{\mathcal{I}_q}{\mathcal{I}_p + \mathcal{I}_q} \tau_q \frac{\cos\left(\frac{\phi_q}{\pi} \text{mod}(\varphi, \pi) - \phi_q/2\right)}{\cos(\phi_q/2)} \right)$$

#### 4.5. EJEMPLOS COMPARATIVOS.

##### (1) Una típica red de transporte.

Supongamos una red como la de la Fig[4.1] donde las coordenadas de los nodos y su distancia de viaje en la red se recojen en la tabla a continuación de la figura.

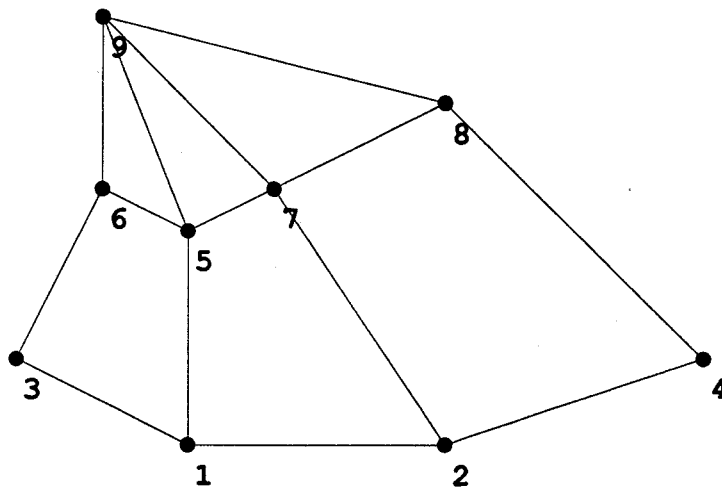


Fig.[4.1]: Una red típica de transporte.



| Nodos | Coord.   |  |
|-------|----------|--|
| 1     | (2,0)    | $\begin{pmatrix} 0 & 3.5 & 3 & 7.5 & 3 & 4.5 & 4.5 & 7.5 & 6.5 \\ - & 0 & 6.5 & 4 & 5.5 & 7 & 4 & 7 & 7.5 \\ - & - & 0 & 10.5 & 4 & 2.5 & 5.5 & 8.5 & 5 \\ - & - & - & 0 & 9.5 & 11 & 8 & 6 & 11.5 \\ - & - & - & - & 0 & 1.5 & 1.5 & 4.5 & 3.5 \\ - & - & - & - & - & 0 & 3 & 6 & 2.5 \\ - & - & - & - & - & - & 0 & 3 & 3.5 \\ - & - & - & - & - & - & - & 0 & 6 \\ - & - & - & - & - & - & - & - & 0 \end{pmatrix}$ |
| 2     | (5,0)    |  |
| 3     | (0,1)    |  |
| 4     | (8,1)    |  |
| 5     | (2,2.25) |  |
| 6     | (1,3)    |  |
| 7     | (3,3)    |  |
| 8     | (5,4)    |  |
| 9     | (1,5)    |  |

La elección del sistema de referencias se ha realizado de forma que la mayoría de trayectorias sean cartesianas (ver Brimberg, Love y Walker [1995]), favoreciendo el encuentro de un estimador fiable entre los  $\tau l_p(\cdot)$ . La orientación final se dedujo tras establecer una rejilla de búsqueda de paso  $\frac{\pi}{180}$  (un grado sexagesimal), y obtener que, para el sistema de referencias actual, se lograba un error mínimo de 5.40341 al comparar los sesgos en la red con el sesgo de  $l_1$ .

Mediante el procedimiento de búsqueda exhaustiva que se recoge en el artículo de Brimberg y Love [1991], recorriendo el intervalo  $p \in [0.5, 3]$  con un paso  $\Delta p = 0.05$ , se obtiene el valor mínimo de la función:

$$AD(\tau, p) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n | \tau \| \mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_j \|_p - d_G(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) |; \text{ donde } \mathbf{v}_i \text{ denota los nodos.}$$

Dicho valor resultó ser  $\min AD(\tau = 1.25792, p = 1.45) = 15.2789$ , como así se recoge en la gráfica Fig [4.2], que enfrenta los valores mínimos de  $AD(\tau, p)$  (eje  $OY$ ) y los valores de  $p$ .

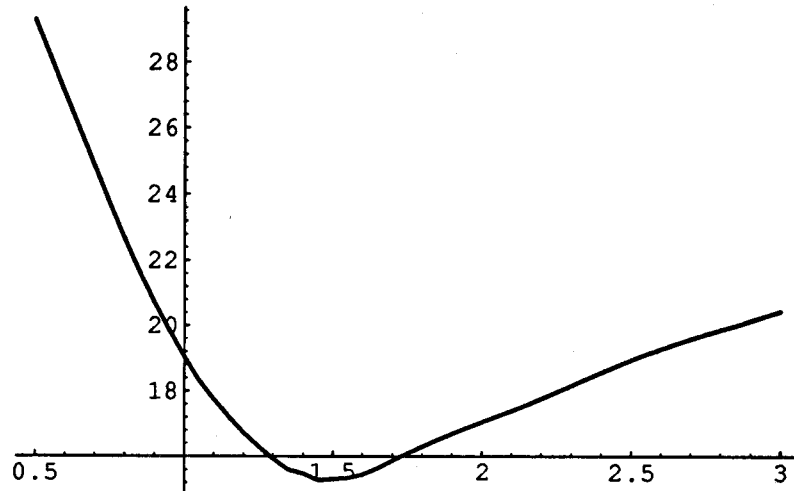


Fig.[4.2]:  $AD(\tau, p)$  mínima frente a  $p$ .

Al testar los errores que provoca la estimación de los sesgos de los viajes en la red de inclinación  $\omega$  mediante la función aproximadora  $\tau r_p(\omega)$ , se tiene que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left| \tau r_p(\omega) - \frac{d_G(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|_2} \right| = 4.04713$$

Lo cual indica una media de error de 0.11242.

Apliquemos la metodología anterior a la muestra y separemos, con arreglo a la deformación de la trayectoria sugerida por el sesgo, en dos partes la nube de puntos (ángulo, sesgo) =  $(\omega, R)$ .

En el subconjunto que denominamos, como antes,  $\mathcal{P}$  cuya cardinalidad es 22, la nube de puntos se ajusta parabólicamente por la función

$$H_p(t) = 1.30229(1 - 0.0928454 t^2), \quad t \in [-\pi/4, \pi/4]$$

como se aprecia en Fig.[4.3].

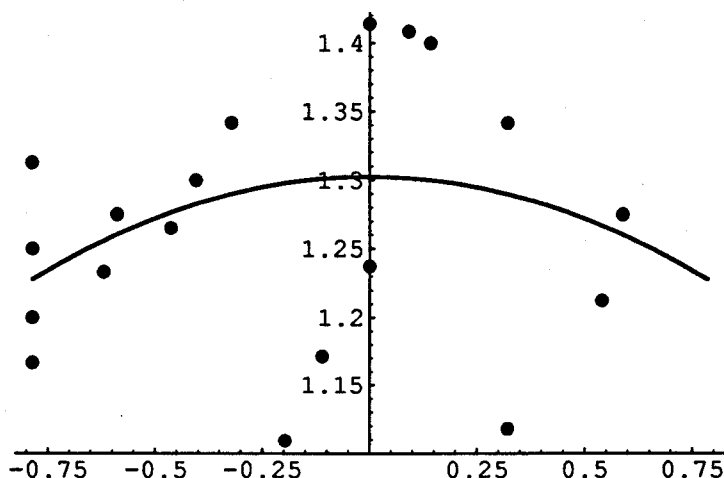


Fig.[4.3]: Ajuste de los puntos tipo  $\mathcal{P}$ .

Deduciendo los coeficientes correspondientes para la estimación mediante una norma  $\tau_p l_p$  y también mediante una norma bloque  $\phi(p)$ -deformada, ponderada con  $\tau_{\phi(p)}$ , se llega a:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = 1.81431 \\ \tau_p = 1.25691 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \phi(p) = 0.67688 \text{ (38.7827 grados sexag.)} \\ \tau_{\phi(p)} = 1.22842 \end{array} \right.$$

Los correspondientes estimadores, actuando restringidamente en la parte  $\mathcal{P}$ , originan un error total, en el caso de norma  $\tau_p r_p$ :

$$\sum_{(\omega_i, R_i) \in \mathcal{P}} | \tau_p r_p(\omega_i + \pi/4) - R_i | = 1.47505$$

que en media, repartiendo entre  $|\mathcal{P}| = 22$ , supone 0.06704, sensiblemente mejor que la anteriormente obtenida.

En el caso de la norma bloque  $\tau_\phi r_\phi$ , donde  $\phi \equiv \phi(p)$ , se consigue:

$$\sum_{(\omega_i, R_i) \in \mathcal{P}} | \tau_\phi r_B\left(\frac{2\phi\omega_i}{\pi}\right) - R_i | = 1.75294$$

cuya media es 0.079679, también mejor que la primera.

Una situación análoga se tiene para el conjunto de puntos  $\mathcal{Q}$ , cuyo cardinal es 14, complementando la anterior. El ajuste de los puntos, se muestra en Fig.[4.4], y se consigue para

$$H_q(t) = 1.53076(1 - 0.01616 t^2), t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

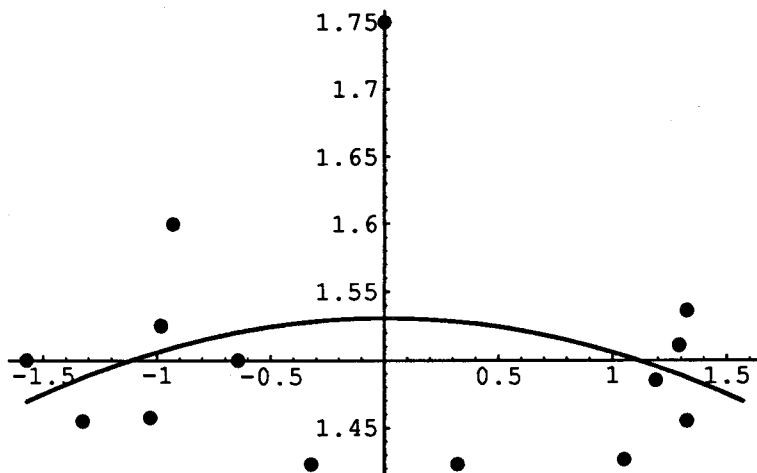


Fig.[4.4]: Ajuste de los puntos tipo  $\mathcal{Q}$ .

Los coeficientes correspondientes para la estimación mediante una función  $\tau_q l_q$  y mediante una norma bloque de sesgo  $\tau_{\phi(p)} \phi(q)$ , dan para esta ocasión:

$$\left\{ \begin{array}{l} q = 1.87072 \\ \tau_q = 1.49453 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \phi(q) = 0.56478 \text{ (32.36 grados sexag.)} \\ \tau_{\phi(q)} = 1.47013 \end{array} \right.$$

Sobre el subconjunto  $\mathcal{Q}$ , los correspondientes estimadores originan un error total de:

$$\sum_{(\omega_i, R_i) \in \mathcal{Q}} |\tau_q r_q(\omega_i/2 + \pi/4) - R_i| = 0.844882$$

que, repartiendo entre  $|\mathcal{Q}| = 14$ , supone una media de 0.060348.

Para la norma bloque  $\tau_{\phi} r_{\phi}$ , donde  $\phi \equiv \phi(q)$ , se tiene:

$$\sum_{(\omega_i, R_i) \in \mathcal{Q}} |\tau_{\phi} r_B(\frac{\phi \omega_i}{\pi}) - R_i| = 0.919363$$

cuya media es 0.065667.

La bondad del ajuste realizado se pierde, en gran medida, al combinar estimadores parciales ponderados según la frecuencia de trayectos tipo  $\mathcal{P}$  (veintidós) y tipo  $\mathcal{Q}$  (catorce) observada en la muestra. Ahora, el rango de cada  $\omega_i$  se supone

en  $[0, 2\pi)$  ya que desconocemos su pertenencia. Así, al combinar las normas  $\tau_p l_p$ , el valor final de la suma de errores en los sesgos es:

$$\sum_{i=1}^{36} \left| \left( \frac{22}{36} \tau_p r_p(\text{mod}(\omega_i, \pi/2)) + \frac{14}{36} \tau_q r_q(\text{mod}(\omega_i/2, \pi/2)) \right) - R_i \right| = 4.13848$$

Lo cual indica una media de error de 0.11495, similar a la mejor encontrada por el procedimiento exhaustivo.

Análogamente, cuando se combinan las normas bloque anteriores, la acumulación de errores:

$$\sum_{i=1}^{36} \left| \left( \frac{22}{36} \tau_{\phi(p)} r_B \left( \frac{2\phi(p) \text{ mod } (\omega_i, \pi/2)}{\pi} \right) + \frac{14}{36} \tau_{\phi(q)} r_B \left( \frac{\phi(q) \text{ mod } (\omega_i, \pi)}{\pi} \right) \right) - R_i \right| = 4.08999$$

está de acuerdo con la mejor posible, ya que su media es 0.113610.

**(2) Una red que salva una barrera para el transporte.**

Sea una red como la de la Fig[4.4] donde las coordenadas de los nodos y su distancia de viaje en la red vienen dadas por la siguiente tabla:

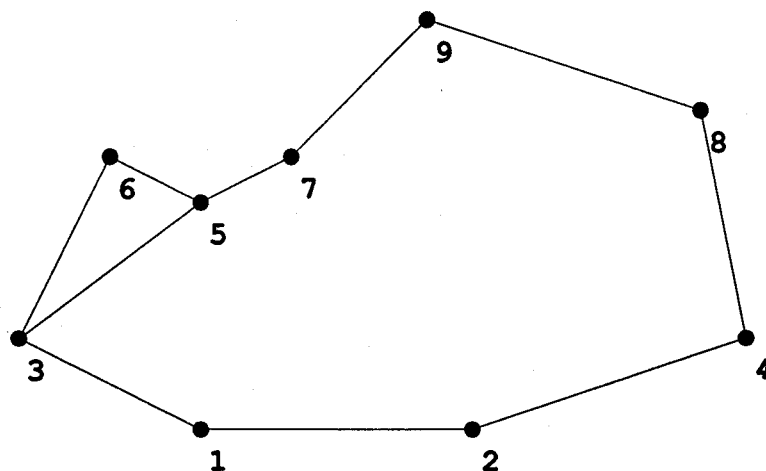


Fig.[4.4]: Una red que salva una barrera.

| Nodos | Coord.    |  | 0 | 3.5 | 3   | 7.5  | 6.5 | 5.5 | 8    | 11.5 | 11   |
|-------|-----------|--|---|-----|-----|------|-----|-----|------|------|------|
| 1     | (2,0)     |  |   |     |     |      |     |     |      |      |      |
| 2     | (5,0)     |  | - | 0   | 6.5 | 4    | 10  | 9   | 11.5 | 8    | 12.5 |
| 3     | (0,1)     |  | - | -   | 0   | 10.5 | 3.5 | 2.5 | 5    | 13   | 8    |
| 4     | (8,1)     |  | - | -   | -   | 0    | 13  | 13  | 11.5 | 4    | 9    |
| 5     | (2,2.25)  |  | - | -   | -   | -    | 0   | 1.5 | 1.5  | 9.5  | 4.5  |
| 6     | (1,3)     |  | - | -   | -   | -    | -   | 0   | 3    | 11   | 6    |
| 7     | (3,3)     |  | - | -   | -   | -    | -   | -   | 0    | 8    | 3    |
| 8     | (7.5,3.5) |  | - | -   | -   | -    | -   | -   | -    | 0    | 5    |
| 9     | (4.5,4.5) |  | - | -   | -   | -    | -   | -   | -    | -    | 0    |

El sistema de referencias elegido consigue un error mínimo de 17.2012 al comparar los sesgos en la red con el sesgo de  $l_1$ .

Mediante el procedimiento de rejilla de búsqueda (Brimberg y Love [1991]), recorriendo el intervalo  $p \in [0.5, 3]$  con un paso  $\Delta p = 0.05$ , se obtiene que el valor mínimo de la función anterior, resultando  $\min AD(\tau = 1.6736, p = 1.7) = 50.7581$ . La gráfica que enfrenta los valores mínimos de en el eje de  $AD(\tau, p)$  (eje  $OY$ ) y los valores de  $p$  tiene un comportamiento estacionario alrededor del mínimo (ver Fig. [4.5]).

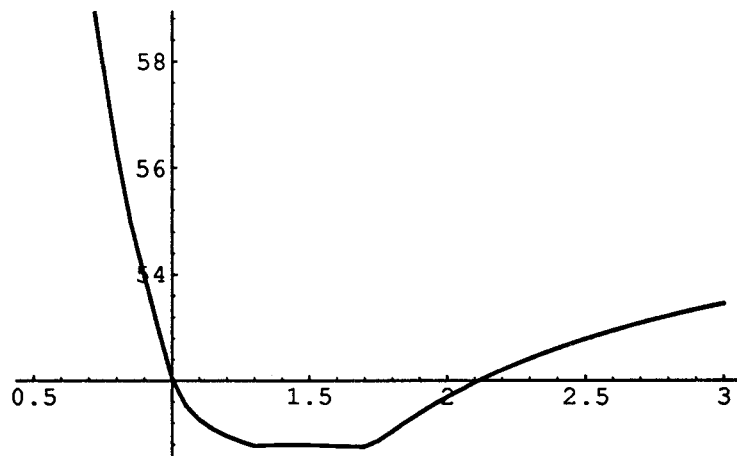


Fig.[4.5]:  $AD(\tau, p)$  mínima frente a  $p$ .

Los errores al estimar los sesgos mediante la función aproximadora  $\tau r_p(\omega)$ , totalizan:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \left| \tau r_p(\omega) - \frac{d_G(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)}{\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\|_2} \right| = 13.1504$$

Establecemos la partición antes comentada, y se llega a un subconjunto  $\mathcal{P}$  de 14 puntos y a otro  $\mathcal{Q}$  de cardinal 22. Las funciones polinómicas de ajuste resultaron:

$$H_p(t) = 1.36299(1 - 0.185413 t^2), \quad t \in [-\pi/4, \pi/4];$$

$$H_q(t) = 2.30711(1 - 0.133364 t^2), \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Los coeficientes correspondientes para la estimación mediante el sesgo  $\tau_p r_p$  y mediante  $\tau \phi(p) r_{B(\phi(p))}$ , fueron en cada caso:

$$\begin{aligned} \text{Muestra } \mathcal{P} & \left\{ \begin{array}{l} p = 1.62917 \\ \tau_p = 1.2596 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \phi(p) = 0.95654 \text{ (54.806 grados sexag.)} \\ \tau_{\phi(p)} = 1.21005 \end{array} \right. \\ \text{Muestra } \mathcal{Q} & \left\{ \begin{array}{l} p = 0.933085 \\ \tau_p = 1.55227 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \phi(p) = 1.62249 \text{ (92.9624 grados sexag.)} \\ \tau_{\phi(p)} = 1.58866 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Los errores parciales fueron:

$$\sum_{(\omega_i, R_i) \in \mathcal{P}} \left| \tau_p r_p(\omega_i + \pi/4) - R_i \right| = 0.707134$$

$$\sum_{(\omega_i, R_i) \in \mathcal{P}} \left| \tau_{\phi} r_{B\left(\frac{2\phi\omega_i}{\pi}\right)} - R_i \right| = 1.56913$$

$$\sum_{(\omega_i, R_i) \in \mathcal{Q}} \left| \tau_q r_q(\omega_i/2 + \pi/4) - R_i \right| = 6.54733$$

$$\sum_{(\omega_i, R_i) \in \mathcal{Q}} \left| \tau_{\phi} r_{B\left(\frac{\phi\omega_i}{\pi}\right)} - R_i \right| = 11.4851$$

El ajuste final combinado:

$$\sum_{i=1}^{36} \left| \left( \frac{22}{36} \tau_p r_p(\text{mod}(\omega_i, \pi/2)) + \frac{14}{36} \tau_q r_q(\text{mod}(\omega_i/2, \pi/2)) \right) - R_i \right| = 12.1989$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{36} \left| \left( \frac{22}{36} \tau_{\phi(p)} r_{B\left(\frac{2\phi(p) \text{mod}(\omega_i, \pi/2)}{\pi}\right)} + \frac{14}{36} \tau_{\phi(q)} r_{B\left(\frac{\phi(q) \text{mod}(\omega_i, \pi)}{\pi}\right)} \right) - R_i \right| \\ = 12.2293 \end{aligned}$$

parece que incluso mejora el estimador anterior, cuya suma fue 13.1504.

#### 4.6. MEZCLA DE ESTIMADORES BASADA EN DISTANCIA ESPERADA.

El diseño de muestreo aleatorio estratificado anterior da como resultado dos estimadores  $e_p \equiv e_p(\varphi)$  y  $e_q \equiv e_q(\varphi)$  del sesgo  $\eta \equiv \eta(\varphi)$  generado en la red. Cada uno de los estimadores  $e_p$  y  $e_q$  aproxima en el sentido de mínimos cuadrados a su respectiva nube de puntos, obtenida de la partición que se establece al considerar el sesgo  $r_1 \equiv r_1(\varphi)$  como separador. La población muestral normalizada de cada parte se denota  $a_p = \frac{I_p}{M}$  y  $a_q = \frac{I_q}{M}$  respectivamente ( $a_p + a_q = 1$ ).

En la sección anterior se procedió a combinar linealmente los estimadores parciales para encontrar un estimador del total poblacional:

$$\eta(\varphi) \approx a_p e_p(\varphi) + a_q e_q(\varphi).$$

Esta forma de mezclar es la que se aplica para deducir un estimador poblacional insesgado a partir de estimadores muestrales también insesgados. Los errores de estimación se suman, por lo que la estimación se desvirtúa en parte.

Fijemos una dirección  $\varphi$ . El rango de los sesgos en la red se considerará fragmentado en:

$$[1, \infty) = [1, e_p) \cup [e_p, e_q) \cup [e_q, \infty).$$

El estimador  $a_p e_p + a_q e_q$  podría ser el resultado de calcular la media en la función de probabilidad  $a_p f_p(\eta) + a_q f_q(\eta)$ , donde  $f_p(\eta)$  es, a su vez, una función de probabilidad de media  $e_p$  y  $f_q(\eta)$  es otra función de probabilidad de media  $e_q$ . Por ejemplo, una función triangular en el primer estrato (cuya media sea  $e_p$ ):

$$f_p(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta < 1 \\ \frac{h_p}{e_p - 1} (\eta - 1) & \text{si } 1 \leq \eta < e_p \\ h_p + \frac{-h_p}{e_p - 1} (\eta - e_p) & \text{si } e_p \leq \eta < (2e_p - 1) \\ 0 & \text{si } \eta > (2e_p - 1) \end{cases}$$

(donde  $h_p$  se determina exigiendo que la función  $f_p(\eta)$  sea efectivamente de densidad) y una función exponencial negativa en el segundo (cuya media sea  $e_q$ )

$$f_q(\eta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \eta < r_1 \\ \frac{1}{e_q - 1} \text{Exp}\left[\frac{-(\eta - r_1)}{e_q - 1}\right] & \text{si } \eta \geq e_q \end{cases}$$

Basándonos en los estimadores parciales anteriormente hallados, se establece sobre el rango de los sesgos en la red  $\eta \in [1, \infty)$  una función de densidad de probabilidad  $f(\eta)$  definida a trozos en los intervalos  $[1, e_p) \cup [e_p, e_q) \cup [e_q, \infty)$  y que sea del mismo tipo que  $f_p(\eta)$  en el primer intervalo y similar a  $f_q(\eta)$  en el último.



El primer intervalo  $[1, e_p)$  recoge el caso puntual  $\eta = 1$ . La probabilidad de que exista un viaje *real*  $\eta(\varphi) = 1$  en la red, medido euclídeamente, es tan pequeña que podríamos considerarla nula. Suponiendo que la distribución es lineal para  $\eta \in [1, e_p(\varphi))$ , asignaremos a  $f(\eta)$  el valor que toma la recta que pasa por los puntos  $(1, 0)$  y  $(e_p, h_p)$ , donde  $h_p$  se determinará (de nuevo) exigiendo que la función  $f(\eta)$  sea efectivamente de densidad.

El segundo intervalo  $[e_p, e_q)$  concentra la mayoría de los sesgos observados en la red. Consideraremos que la función de densidad  $f(\eta)$  sigue la distribución lineal correspondiente a la recta que une los puntos  $(e_p, h_p)$  y  $(e_q, h_q)$ , donde  $h_q$  se determinará más adelante para que la función  $f(\eta)$  sea de densidad.

Finalmente, los sesgos  $\eta \in [e_q, \infty)$  serán menos frecuentes a medida que nos desplazemos hacia el infinito. Supondremos que la distribución de dichos sesgos es exponencial negativa.

Así, la función de densidad  $f(\eta)$  para  $\eta \in [e_q, \infty)$  se considerará:

$$f(\eta) = \begin{cases} \frac{h_p}{e_p - 1}(\eta - 1) & \text{si } 1 \leq \eta < e_p \\ h_p + \frac{h_q - h_p}{e_q - e_p}(\eta - e_p) & \text{si } e_p \leq \eta < e_q \\ h_q \text{Exp}[e_q - \eta] & \text{si } \eta \geq e_q \end{cases}$$

Se puede comprobar fácilmente que las áreas encerradas entre la función  $f(\eta)$  y el eje OX son:

$$A_1 = \int_1^{e_p} \frac{h_p}{e_p - 1} (\eta - 1) d\eta = \frac{(e_p - 1)}{2} h_p$$

$$A_2 = \int_{e_p}^{e_q} \left( h_p + \frac{h_q - h_p}{e_q - e_p} (\eta - e_p) \right) d\eta = \frac{(e_q - e_p)}{2} h_p + \frac{(e_q - e_p)}{2} h_q$$

$$A_3 = \int_{e_q}^{\infty} h_q \text{Exp}[e_q - \eta] d\eta = h_q$$

### Condiciones de normalización y sensibilidad

Sabiendo que la media de la función de densidad  $g(x) = \lambda \text{Exp}[-\lambda x]$ , con  $x \in [0, \infty)$  y  $\lambda > 0$ , es  $1/\lambda$ , y la proporción sobre el total del área encerrada entre  $g(x)$  y el eje de abscisas a partir de su media,  $x \in [1/\lambda, \infty)$ , es  $\text{Exp}[-1]$ , impondremos que la suma de áreas correspondiente a cada parte sea la unidad y que  $A_3 = h_q$  coincida con  $\frac{k}{\text{Exp}[1]} a_q$ , donde el parámetro  $k \in (0, 1]$  representa el porcentaje de sesgos que se escapan del intervalo  $[1, e_q)$ . Es decir

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = a_p + a_q = 1 \\ A_3 = \frac{k}{\text{Exp}[1]} a_q \end{cases}$$

Sustituyendo por su valor cada área:

$$\begin{cases} \left( \frac{e_p - 1}{2} + \frac{e_q - e_p}{2} \right) h_p + \left( \frac{e_q - e_p}{2} \right) h_q = 1 - h_q \\ h_q = \frac{k}{\text{Exp}[1]} a_q \end{cases}$$

La solución del sistema proporcionará los valores de  $h_p = h_p(\varphi)$  y  $h_q = h_q(\varphi)$  necesarios para que  $f(\eta(\varphi))$  sea una función de densidad probabilística. La expresión está parametrizada dependiendo de  $k \in (0, 1]$ :

$$\begin{cases} h_q = \frac{k}{\text{Exp}[1]} a_q \\ h_p = \frac{2 - (2 + e_q - e_p)h_q}{e_q - 1} \end{cases}$$

En la Fig.[4.6] se ha representado gráficamente una típica función de densidad para los sesgos, siguiendo el esquema anterior con los valores:

$$e_p = 1.15; e_q = 1.55; a_q = 14/36; k = 1$$

resultando:

$$h_q = 0.143064; h_p = 3.01208$$

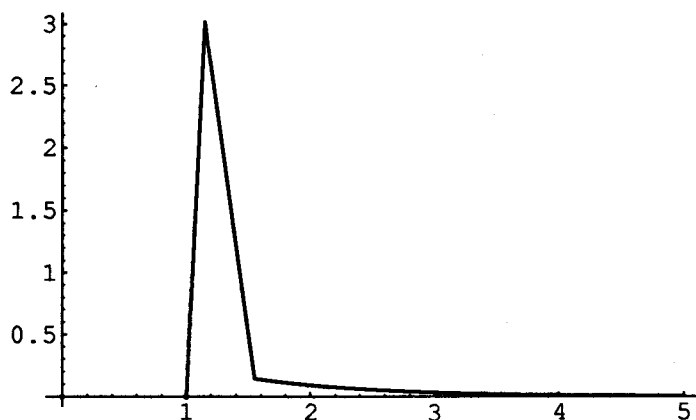


Fig.[4.6]: Una función de densidad para los sesgos.

Si con los mismos datos, se invierte la proporción de viajes tipos  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{Q}$

$$e_p = 1.15; e_q = 1.55; a_q = 22/36; k = 1,$$

resulta:

$$h_q = 0.224815; h_p = 2.65535$$

lo que gráficamente representa la Fig.[4.7].

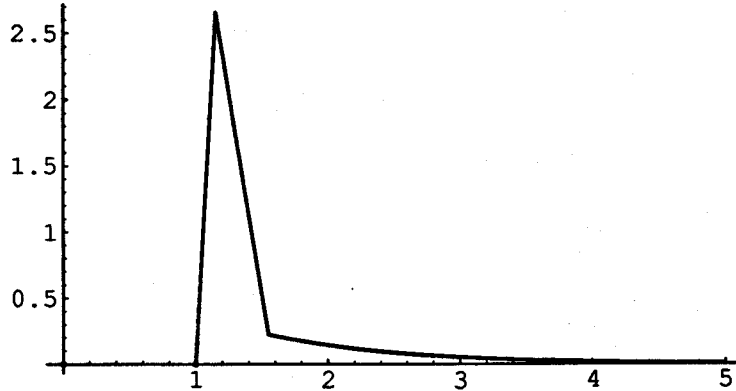


Fig.[4.7]: Una nueva distribución de los sesgos.

### Sesgo esperado

El sesgo esperado  $E[\eta]$ :

$$E[\eta] = \int_1^{\infty} \eta f(\eta) d\eta$$

se puede interpretar como la distancia esperada (ver concepto en Larson y Odoni [1981] y aplicaciones en Muñoz y Puerto [1996]) del origen del plano polar al intervalo  $[1, \infty)$  en la dirección  $\varphi$ , donde el valor  $\eta(\varphi) \in [1, \infty)$  es ponderado por la medida de probabilidad  $f(\eta(\varphi))$ .

La descomposición de la esperanza, intervalo a intervalo, da lugar a:

$$E_1(\eta) = \int_1^{e_p} \frac{h_p}{e_p - 1} (\eta^2 - \eta) d\eta = \frac{h_p(2e_p^2 - e_p - 1)}{6}$$

$$E_2(\eta) = \int_{e_p}^{e_q} \left( h_p + \frac{h_q - h_p}{e_q - e_p} (\eta - e_p) \right) \eta d\eta = \left( \frac{e_q^2 - e_p^2}{2} - \frac{2e_q^2 - e_p e_q - e_p^2}{6} \right) h_p +$$

$$+ \left( \frac{2e_q^2 - e_p e_q - e_p^2}{6} \right) h_q$$

$$E_3(\eta) = \int_{e_q}^{\infty} h_q \eta \text{Exp}[e_q - \eta] d\eta = h_q(1 + e_q)$$

Reuniendo las sumas parciales y expresando explícitamente el resultado respecto a los estimadores parciales:

$$E(\eta) = E_1(\eta) + E_2(\eta) + E_3(\eta) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e_p & e_q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{6h_q - h_p}{6} & \frac{-h_p}{12} & \frac{h_q}{2} \\ \frac{-h_p}{12} & \frac{-h_q}{6} & \frac{h_p - h_q}{12} \\ \frac{h_q}{2} & \frac{h_p - h_q}{12} & \frac{h_p + 2h_q}{6} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ e_p \\ e_q \end{pmatrix}$$

resulta que, con las suposiciones sobre la distribución de los sesgos, el sesgo poblacional se estima combinando cuadráticamente los estimadores de cada muestra.

A modo de ejemplo, se ha considerado la primera red y los estimadores derivados del  $\phi$ -sesgo:

$$e_p(\varphi) = \tau_{\phi(p)} r_B \left( \frac{2\phi(p) \bmod (\omega_i, \pi/2)}{\pi} \right)$$

$$e_q(\varphi) = \tau_{\phi(q)} r_B \left( \frac{\phi(q) \bmod (\omega_i, \pi)}{\pi} \right)$$

Se ha aplicado la combinación cuadrática  $E(\eta(\varphi))$  de estimadores sobre la red para distintos valores del parámetro  $k$ , resultando:

| valores de $k$ | errores totales $AD$ |
|----------------|----------------------|
| 1              | 4.7096               |
| 0.65           | 4.1637               |
| 0.5            | 4.1075               |
| 0.45           | 4.08877              |
| 0.35           | 4.23853              |

Nótese que el valor obtenido en el caso  $k = 0.45$  mejora el resultado de la combinación convexa de estimadores muestrales, que fue 4.08999.

# Capítulo 5

## Trazado de una red plana sesgada en la norma $l_p$ , $p \in [1, 2)$

### 5.1. INTRODUCCIÓN.

Un problema de conexión entre puntos del plano como el del árbol minimal de Steiner (ver Hwang [1991] y, en otro ámbito, Okabe, Boots y Sugihara [1992]):

*“Dado un cierto número de puntos fijos  $V$  en el plano euclídeo, se desea minimizar la longitud de los segmentos rectilíneos que conectarían dichos puntos. Para ello, se añaden nuevos puntos si con esto se puede reducir la longitud. El problema es encontrar el número de puntos adicionales (puntos de Steiner) y sus localizaciones que minimicen la longitud de los segmentos que conectan tanto los puntos dados como los adicionales. La solución será evidentemente un árbol denominado árbol minimal de Steiner en el plano”*

da lugar a configuraciones de redes que, posteriormente, son usadas en el contexto de problemas de localización y de transporte. La sensibilidad de las soluciones óptimas en los problemas de localización en relación al aspecto de las configuraciones ha sido planteada en Peeters y Thomas [1993].

En el libro de Mosler [1987] se consideran redes planas construidas con polígonos regulares (cubriendo el plano con triángulos, hexágonos cuadrados y cuadrados con diagonales), y la efectividad de dichas redes se mide comparando el valor de un indicador numérico característico (*average detour factor*) en cada red respecto al teórico grafo completo, que permitiría desplazamientos euclídeos en el plano.

La solución del problema del árbol minimal de Steiner pretende un diseño que minimice el coste total de construcción de la red, pero no da un procedimiento de cálculo para distancias sobre la red entre los pares de nodos originales. Por el contrario, en este capítulo consideraremos diseños que respeten patrones de medida prefijados (*regularidad*) para las distancias internodales sin tener en cuenta optimalidad en la longitud total.

Consideremos el siguiente problema:

“Dada una norma  $l_p$  con  $p \in [1, 2]$  y un conjunto  $V$  de  $n$  puntos prefijados, construir una red regular que los conecte mediante segmentos rectilíneos de tal manera que las distancias entre los nodos de  $V$  a lo largo de la red puedan estimarse con el uso de la función  $l_p$ . Por cada par de nodos se podrá incluir un punto adicional (de Steiner) como máximo, para asegurar una correcta estimación”.

Para  $p = 2$  la red completa con aristas rectilíneas conectando pares de nodos sería la solución (sin la inclusión de ningún punto adicional), mientras que para  $p = 1$  una malla rectangular lograría conectar los puntos respetando la medición de distancias en la red con  $l_1$ ; aquí, sería necesario añadir un punto adicional por cada trayecto que no coincida con la dirección de los ejes del sistema de referencias elegido. En la Fig.[5.1] se han representado las soluciones para  $p = 2$  y  $p = 1$  sobre un mismo conjunto de puntos de demanda. Los nodos etiquetados son los originales, mientras que los menos gruesos son los puntos de Steiner.

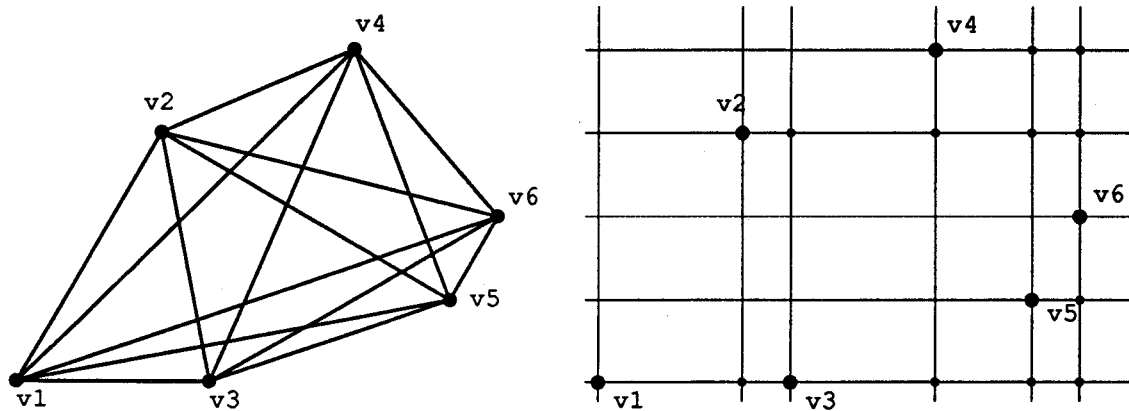


Fig.[5.1]: a) El grafo completo.

b) La malla rectangular.

Mientras que para  $p = 2$  el rango de direcciones de las trayectorias es un segmento continuo  $[0, 2\pi)$ , en el caso de  $p = 1$ , las aristas resultantes tienen direcciones en el conjunto finito  $\{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ . Exigiremos para el caso  $p \in (1, 2)$  que los enlaces de la red, cuyas longitudes pueden ser estimadas mediante  $l_p$ , tengan direcciones tomadas de un conjunto de direcciones discreto, con lo que podremos catalogar, en cierto sentido, a la solución obtenida como una *red regular*.

## 5.2. ASIGNACIÓN DE REFRACCIONES A LAS FUNCIONES $l_p$ .

En la sección 4.2 vimos una característica geométrica para cada sesgo  $r \geq 1$ , surgido de comparar distancias en red y distancias euclídeas. Cada valor de  $r \geq 1$  generaba un ángulo de desvío de trayectoria  $\phi$  tal que

$$\phi = \arccos \left( \frac{2}{r^2} - 1 \right)$$

Veamos ahora una justificación en términos económicos, que son los que intervienen en el diseño, para un desvío de trayectoria. Iremos desde el planteamiento más general al particular.

**Definición 5.1**

Entenderemos por *área de transporte* a un subconjunto del plano  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  abierto, conexo y acotado, preferentemente con el origen de coordenadas en su interior. En dicha área de transporte situamos dos puntos  $A(a_1, a_2)$  y  $B(b_1, b_2)$  que suponemos distintos en el sentido de no coincidencia de abscisas:  $a_1 \neq b_1$ .

Sea  $\Gamma(A, B)$  el conjunto de arcos de Jordan rectificables que pueden parametrizarse mediante:

$$\alpha : t \in [0, 1] \rightarrow \alpha(t) = (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

siendo

$$\begin{cases} \alpha(0) = (a_1, a_2) = A \\ \alpha(1) = (b_1, b_2) = B \end{cases}$$

Además se pedirá que la función  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  sea continua  $\forall t \in [0, 1]$ , con derivadas continuas a trozos:

$$\dot{\alpha}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)), \quad \forall t \in (0, 1)$$

verificando

$$\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 \neq 0, \quad \forall t \in (0, 1)$$

**Definición 5.2**

Se define el *coste puntual de transferencia* como una función no negativa  $c : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ , homogénea de grado cero respecto a su segundo argumento, es decir

$$c(\mathbf{x}, k\mathbf{v}) = k^0 c(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = c(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \forall k > 0$$

**Notación**

Sea  $\Gamma_\Omega$  el conjunto de curvas continuas rectificables sin puntos múltiples cuyo trazado está contenido en  $\Omega$  y sea  $\Gamma_\Omega(A, B)$  el conjunto de curvas de  $\Gamma_\Omega$  con origen en  $A$  y final en  $B$ .

**Definición 5.3**

Se denomina *coste total de transferencia* al valor del funcional

$$f(\alpha) = \int_0^1 c(\alpha, \dot{\alpha}) \|\dot{\alpha}\|_2 dt, \quad \forall \alpha \in \Gamma_\Omega(A, B) \quad \text{donde}$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\alpha}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)), \quad \|\dot{\alpha}\|_2 = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2},$$

que representa el coste total del transporte desde el punto  $A$  hasta el punto  $B$  usando el camino  $\alpha$  contenido en el área de transporte  $\Omega$ .

**Definición 5.4**

Cualquier curva  $\alpha^* \in \Gamma_\Omega(A, B)$  que minimice el problema variacional

$$\min_{\alpha \in \Gamma_\Omega(A, B)} \int_0^1 c(\alpha, \dot{\alpha}) \|\dot{\alpha}\|_2 dt \quad (1)$$

se denominará *línea de transporte* que conecta  $A$  con  $B$  sobre el área de transporte  $\Omega$ .

### Tratamiento paramétrico del problema

Si se parametriza el integrando de (1) mediante:

$$F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = c(x, y, \dot{x}, \dot{y})\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

se garantiza (dado que el integrando no contiene explícitamente al parámetro  $t$ ) la independencia de la parametrización efectuada. Además, como la función coste era homogénea de grado cero, el integrando

$$\begin{aligned} F(x, y, k\dot{x}, k\dot{y}) &= c(x, y, k\dot{x}, k\dot{y})\sqrt{(k\dot{x})^2 + (k\dot{y})^2} = kc(x, y, \dot{x}, \dot{y})\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \\ &= kF(x, y, \dot{x}, \dot{y}) \end{aligned}$$

será homogéneo de grado uno.

En estas condiciones, la solución del problema variacional (ver Krasnov, Makarenko y Kiseliyov [1992]):

$$\min_{\alpha \in \Gamma_{\Omega}(A, B)} f(\alpha) := \int_0^1 F(x, y, \dot{x}, \dot{y}) dt$$

es una curva  $\alpha^* \in \Gamma_{\Omega}(A, B)$  que verifica el sistema de ecuaciones de Euler:

$$\begin{cases} F_x - \frac{d}{dt}(F_{\dot{x}}) = 0 \\ F_y - \frac{d}{dt}(F_{\dot{y}}) = 0 \end{cases}$$

Dichas ecuaciones no son independientes y pueden expresarse mediante una sólo ecuación donde la caracterización de  $\alpha^*$  se hace a través de su radio de curvatura en la forma de Weierstrass.

### Tratamiento cartesiano del problema

Si la función coste  $c(x, y, \dot{x}, \dot{y})$  viene dada cartesianamente  $c = c(x, y, y')$  entonces el problema variacional correspondiente se expresará:

$$\begin{cases} \min & f(y(x)) := \int_{a_1}^{b_1} F(x, y, y') dx \\ y(a_1) = a_2 \\ y(b_1) = b_2 \end{cases} \quad (2)$$

donde el integrando es  $F = F(x, y, y') = c(x, y, y')\sqrt{1 + y'^2}$ .

Existe una serie de resultados (ver Krasnov, Makarenko y Kiseliyov [1992]) relativos a las soluciones del problema (2):

#### Teorema 5.1

La condición necesaria para que el problema variacional (2), definido sobre el conjunto de funciones  $y = y(x)$  con derivada continua  $\forall x \in (a_1, b_1)$  a trozos que



satisfacen las condiciones de frontera  $y(a_1) = a_2$  y  $y(b_1) = b_2$ , alcance su valor extremo en  $y^*(x)$  es que verifique la ecuación de Euler:

$$F_y - \frac{d}{dx}(F_{y'}) = 0$$

Las curvas integrales de la ecuación de Euler se denominan *extremales* o *curvas de Lagrange*. Y, desarrollando lo anterior, llegamos a:

$$y''(x)F_{y'y'} + y'(x)F_{yy'} + F_{xy'} - F_y = 0 \quad (3)$$

que es una ecuación diferencial de segundo orden siempre que:  $F_{y'y'} \neq 0$ . En general, la solución de (3) contendrá dos constantes arbitrarias cuyos valores se podrían determinar usando las condiciones frontera.

### Teorema 5.2

Siempre que  $F$  tenga derivadas parciales continuas hasta segundo orden inclusive, la curva extremal  $y^*(x)$  tendrá segunda derivada continua en todos los puntos que  $F_{y'y'} \neq 0$ , y puede tener puntos angulares sólo en aquellos en los que  $F_{y'y'} = 0$ .

Los puntos angulares  $x_0 \in (a_1, b_1)$  satisfacen en ese caso las condiciones de Weierstrass-Erdmann:

$$\begin{cases} F_{y'}(x_0^-) - F_{y'}(x_0^+) = 0 \\ (F - y'F_{y'})(x_0^-) - (F - y'F_{y'})(x_0^+) = 0 \end{cases}$$

Estas ecuaciones junto a las condiciones de continuidad,  $y(x_0^-) = y(x_0^+)$ , de la curva extremal permiten determinar las coordenadas del punto angular.

En cada segmento  $[a_1, x_0]$  y  $[x_0, b_1]$  la extremal debe satisfacer la ecuación de Euler. La resolución de cada ecuación diferencial en su respectivo intervalo da lugar a dos constantes y la identidad de las cuatro constantes se despeja mediante las condiciones frontera y las condiciones de Weierstrass-Erdmann.

Hay que añadir que cuando el integrando  $F(x, y, y')$  sea discontinuo a lo largo de una curva  $y = \Phi(x)$  y tenga un valor diferente:

$$\begin{cases} F = F_1(x, y, y') \text{ si estamos a un lado de la curva } y = \Phi(x) \\ F = F_2(x, y, y') \text{ si estamos al otro lado} \end{cases}$$

entonces la curva extremal, caso de existir, se compone de dos trozos:

$$\begin{cases} y = y_1(x) \text{ si estamos a un lado de la curva } y = \Phi(x) \\ y = y_2(x) \text{ si estamos al otro lado} \end{cases}$$

que se encontrarán en un cierto punto  $(x_0, \Phi(x_0))$  verificándose la condición:

$$(F_1 + (\Phi' - y')F_{1y'})(x_0^-) = (F_2 + (\Phi' - y')F_{2y'})(x_0^+) \quad (4)$$

### Coste independiente de la posición.

Si el coste es independiente de la posición, es decir  $c(x, y, y') = c(y')$ , entonces:

$$F = F(x, y, y') = c(y')\sqrt{1 + y'^2} = F(y')$$

y la ecuación de Euler tiene la forma:

$$F_{y'y'}y'' = 0 \rightarrow y'' = 0 \rightarrow y = k_1x + k_2$$

Por lo tanto las funciones extremales son rectas. Imponiendo la verificación de las condiciones frontera, se deduce que la solución al problema variacional es la recta que conecta los puntos  $A$  y  $B$ :

$$y = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}(x - a_1) + a_2$$

Obsérvese que este caso incluye el  $c(x, y, y') = K$  (constante). Por lo tanto, siempre que el coste de transferencia sea constante en  $\Omega$  o un subdominio de  $\Omega$  las líneas de transporte serán rectas.

### Coste constante escalonado en dos niveles.

Supongamos que la función coste toma dos valores constantes, uno en cada semiplano a izquierda y derecha de la recta  $y = \Phi(x)$ .

$$c(x, y, y') = \begin{cases} k_1, & \forall (x, y) \text{ tal que } y < \Phi(x) \text{ (zona 1)} \\ k_2, & \forall (x, y) \text{ tal que } y > \Phi(x) \text{ (zona 2)} \end{cases}$$

Si descomponemos la integral en:

$$\int_{a_1}^{b_1} c(x, y, y')\sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{a_1}^{x_0} k_1\sqrt{1 + y'^2} dx + \int_{x_0}^{b_1} k_2\sqrt{1 + y'^2} dx$$

entonces el problema variacional será el de minimizar cada parte, ya que la descomposición es la de una cantidad positiva en suma de otras dos.

La solución de cada parte será una recta, tal como vimos en el caso anterior, o mejor dicho serán dos semirectas que, por la necesaria continuidad de la solución extremal, habrán de reunirse en un punto  $(x_0, y_0)$ .

Las rectas a conectar serán:

$$y = \frac{y_0 - a_2}{x_0 - a_1}(x - a_1) + a_2; \text{ y } y = \frac{y_0 - b_2}{x_0 - b_1}(x - b_1) + b_2$$

Ambas se encuentran en un punto angular que verificará las ecuaciones de Weierstrass-Erdmann:

$$\begin{cases} F_1 - y_1' \frac{\partial F_1}{\partial y_1} = k_1\sqrt{1 + y_1'^2} - \frac{k_1 y_1'^2}{\sqrt{1 + y_1'^2}} = \frac{k_1}{\sqrt{1 + y_1'^2}} \\ F_2 - y_2' \frac{\partial F_2}{\partial y_2} = \frac{k_2}{\sqrt{1 + y_2'^2}} \end{cases}$$

Imponiendo la condición (4):

$$\frac{k_1(1 + \Phi'y_1')}{\sqrt{1 + y_1'^2}} = \frac{k_2(1 + \Phi'y_2')}{\sqrt{1 + y_2'^2}}$$

Sean  $\tan(\gamma)$ ,  $\tan(\alpha)$  y  $\tan(\beta)$  las pendientes de las rectas  $y = \Phi(x)$ ,  $y = y_1(x)$  e  $y = y_2(x)$  respectivamente. En ese caso la ecuación anterior es:

$$\frac{k_1(1 + \tan(\gamma)\tan(\alpha))}{\sqrt{1 + \tan(\alpha)^2}} = \frac{k_2(1 + \tan(\gamma)\tan(\beta))}{\sqrt{1 + \tan(\beta)^2}}$$

lo cual da lugar a:

$$k_1 \cos(\gamma - \alpha) = k_2 \cos(\gamma - \beta) \quad (5)$$

Si se consideran los ángulos entre los rayos incidentes y la recta de separación  $y = \Phi(x)$  tenemos:

$$k_1 \cos(\gamma_1) = k_2 \cos(\gamma_2) \quad (6)$$

donde  $\gamma_1 = \gamma - \alpha$  y  $\gamma_2 = \gamma - \beta$ . La relación (6) es conocida como ley de refracción de la luz cuando adopta la forma:

$$\frac{\cos(\gamma_2)}{\cos(\gamma_1)} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

### Sesgo inducido por la refracción. Medición de distancias interzonales.

Observemos la Fig.[5.2]. Hemos representado el plano cartesiano separado en dos semiplanos, mediante la recta  $y = \Phi(x)$ , donde el coste de transferencia es diferente en cada semiplano ( $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente). La recta que separa los semiplanos tiene una inclinación  $\gamma$  respecto a la horizontal, mientras que la inclinación del rayo incidente es  $\alpha$  y la del refractado se denota por  $\beta$ . Sea  $D$  el ángulo de desviación entre la trayectoria rectilínea de incidencia y la de refracción.

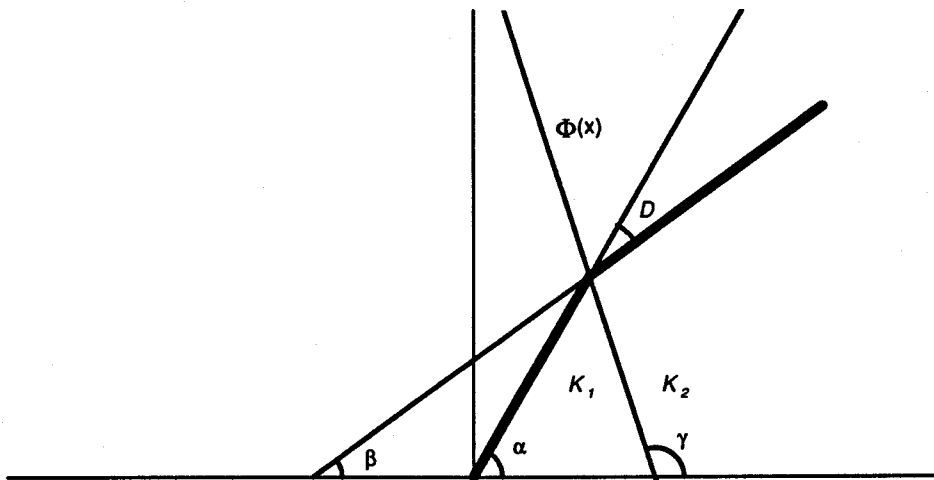


Fig.[5.2]: Refracción en la trayectoria.

Para expresar  $D$  en función de las inclinaciones respecto a la horizontal:  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , comenzaremos por analizar el signo:

$$D = \begin{cases} +(\cdot) & \text{si } \alpha < \beta < \gamma, \beta < \gamma < \alpha, \gamma < \alpha < \beta \\ -(\cdot) & \text{si } \gamma < \beta < \alpha, \alpha < \gamma < \beta, \beta < \alpha < \gamma \end{cases}$$

En resumen, si hacemos la siguiente asignación:  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $\beta \rightarrow 2$  y  $\gamma \rightarrow 3$ , entonces

$$\text{Sign}(D) = \text{Signo}(\text{permutación del orden de menor a mayor})$$

Si lo que interesa es el coseno de  $D$ , entonces el signo del ángulo  $D$  sería irrelevante por la paridad de la función coseno. El valor absoluto de  $D$  tiene dos posibilidades:

$$|D| = \begin{cases} \pi - (\beta - \alpha) & \text{si 3 se interpone } \beta < \gamma < \alpha, \alpha < \gamma < \beta \\ \beta - \alpha & \text{si 3 no se interpone} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\cos\left(\frac{|D|}{2}\right) = \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi - (\beta - \alpha)}{2}\right) = \sin\left(\frac{(\beta - \alpha)}{2}\right) & \text{si 3 se interpone } \beta < \gamma < \alpha, \alpha < \gamma < \beta \\ \cos\left(\frac{(\beta - \alpha)}{2}\right) & \text{si 3 no se interpone} \end{cases}$$

Consideremos que  $D \in [0, \pi)$  y eliminemos el papel del ángulo refractado en la relación (5), expresando  $\beta = \alpha + D$ ; de donde,  $\gamma - \beta = \gamma - \alpha - D$  y desarrollando:

$$k_1 \cos(\gamma - \alpha) = k_2 \cos(\gamma - \alpha - D)$$

tenemos:

$$k_1 \cos(\gamma - \alpha) = k_2 \left( \cos(\gamma - \alpha) \cos(D) + \sin(\gamma - \alpha) \sin(D) \right)$$

de donde:

$$\left( k_1 - k_2 \cos(D) \right) \cos(\gamma - \alpha) = k_2 \sin(\gamma - \alpha) \sin(D) \quad (7)$$

Esta igualdad tiene sentido, en principio, para  $D \in [0, \pi)$ , ya que un valor fuera de ese intervalo implicaría que el rayo incidente no atravesara de una zona a otra. En muchos casos, este intervalo se verá reducido.

Clasificaremos de acuerdo con los valores de  $(\gamma - \alpha) \in [0, \pi)$ , que representa el ángulo de incidencia sobre la recta de separación.

(a) Un primer caso extremo  $(\gamma - \alpha) \rightarrow 0$  lograría que (7) adopte la expresión:

$$k_1 - k_2 \cos(D) = 0$$

que es la ley de conexión de líneas de Launhart (ver Mosler [1987]).

(b) El otro caso extremo  $(\gamma - \alpha) \rightarrow \pi/2$  daría lugar a:

$$k_2 \sin D = 0 \Rightarrow D = 0$$

lo que implica que si se pretende atravesar perpendicularmente la barrera interzonal, entonces la trayectoria extremal sería rectilínea, sean cuales sean  $k_1$  y  $k_2$ .

(c) Sea  $\varphi = \gamma - \alpha \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$  un caso no extremo de incidencia y representemos por  $\lambda = \frac{k_1}{k_2}$  la razón de costes de transporte. La ecuación (7) que caracteriza la optimalidad resulta:

$$(\lambda - \cos D) = \tan(\varphi) \operatorname{sen}(D) \Rightarrow \lambda \cos(\varphi) = \cos(\varphi - D) \quad (8)$$

(c.1) Notar que si  $\lambda = 1$  entonces  $D = 0$ . Si los costes de transferencia son iguales, no hay desviación en las trayectorias sea cual sea el ángulo incidente  $\varphi$ .

(c.2) El caso más general  $\varphi \in (0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$  y  $\lambda \in (1, \infty)$ . Obteniendo a partir de (8) el valor de la razón de costes:

$$\lambda(\varphi, D) = \frac{\cos(D - \varphi)}{\cos \varphi}$$

y obligando a que dicha razón sea función exclusivamente del desvío  $D$  (y no dependa del ángulo incidente  $\varphi$ ) se llega, tras descartar el caso ya estudiado  $D = 0$ , que debe ocurrir  $D = \varphi$ , es decir que la recta separación de zonas sea la mediatriz entre el rayo incidente y el refractado. En ese caso:

$$\lambda = \frac{1}{\cos D} = \frac{1}{2 \cos^2(D/2) - 1}$$

Identifiquemos  $\phi = D$ , que fue la notación usual del ángulo desvío de trayectoria del capítulo anterior. La relación establecida en el Teorema 2.2 entre un ángulo  $D \in [0, \pi/2]$  y un valor de  $p \in [1, 2]$  fue:

$$\cos(D/2) = \frac{2^{1/2}}{2^{1/p}}$$

cuando se supone que la recta separadora de los semiplanos es vertical y la trayectoria incidente es horizontal. Si eliminamos el parámetro  $D$  en las dos últimas igualdades tendremos que la razón de costes  $\lambda$  entre dos zonas de costes de transferencia constantes y la función  $l_p$  que actuaría como estimador de las distancias en la red es:

$$\lambda = \frac{1}{\frac{4}{4^{1/p}} - 1}$$

Despejando tenemos:

$$p = \frac{2 \log(2)}{2 \log(2) - \log(1 - 1/\lambda)}$$

Nótese que si  $\lambda \rightarrow \infty$  entonces  $p \rightarrow 1$ ; es decir, si el coste de la zona que se pretende atravesar es infinito (una barrera) entonces la trayectoria extremal se medirá (estimaré) mediante  $l_1$ , como era de esperar. Y si  $\lambda \rightarrow 1$  (igualdad de costes de

transferencias entre las zonas) entonces la poligonal extremal será medible usando  $p \rightarrow 2$ , como es lógico.

Tenemos así demostrado el siguiente teorema, en virtud de la inyectividad en la relación entre  $\lambda$  y  $p$ .

### **Teorema 5.3**

Las trayectorias extremales entre dos semiplanos cuyos costes de transporte tienen por cociente  $\lambda \in [1, \infty]$ , son poligonales de dos aristas y las distancias entre puntos de dichas aristas son evaluables (estimables) mediante una función  $l_p$ , donde:

$$p = \frac{2 \log(2)}{2 \log(2) - \log(1 - 1/\lambda)} \in [1, 2]$$

### **5.3. DETERMINACIÓN DE UNA RED APROXIMADAMENTE $(p, q)$ -SESGADA.**

En esta sección, dado un conjunto de  $n$  puntos en el plano:

$$V = \{ \mathbf{v}_i = (x_i, y_i) : i = 1, 2, \dots, n \}$$

y un valor prefijado de  $p \in [1, 2)$ , determinamos una red  $G = (W, A, d)$  empotrada en el plano donde  $V \subset W$  tal que la distancia sobre la red entre los nodos  $d_G(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$   $i = 1, 2, \dots, n; i \neq j$  sea aproximadamente  $d_f(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$  donde  $d_f(\cdot)$  es un estimador de  $d_G(\cdot)$  que utiliza, en su definición, funciones tipo  $l_p(\cdot)$ .

Para ello, supongamos que los puntos de  $V$  están ordenados lexicográficamente, es decir:

$$\text{Si } i < j \text{ entonces } x_i \leq x_j; \text{ o si } x_i = x_j \text{ entonces } y_i < y_j$$

De la **sección 2.3** se deduce que dado  $p \in [1, 2)$  existe  $q \in (0, 1]$  tal que:

$$2 \frac{p-2}{p} + 2 \frac{q-2}{q} = 1$$

y que existe una deformación  $\phi$  asociada a  $l_p$  y  $l_q$  tal que:

$$\phi = 2 \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[2]{2}}\right)$$

(o también  $\phi = 2 \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[2]{2}}\right)$ )

Denotemos por  $\varphi_{ij} = | \text{Arg}(\mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_j) |$  a la orientación del vector  $\mathbf{v}_i \bar{\mathbf{v}}_j$  con  $i < j$ . Por similitud, emplearemos la variable  $\varphi$  para describir el ángulo en las porciones circulares:  $[0, \phi)$ ,  $[\phi, \pi)$ ,  $[\pi, \phi + \pi)$  y  $[\phi + \pi, 2\pi)$ , que se transformarán respectivamente en los cuadrantes a  $[0, \pi/2)$ ,  $[\pi/2, \pi)$ ,  $[\pi, 3\pi/2)$  y  $[3\pi/2, 2\pi)$ , con los cambios de variable dados en la **sección 2.3**, donde la función  $z_\phi(\varphi)$  reunía los cambios de variable necesarios para que se puedan aproximar los valores del  $p$ -sesgo y los del  $\phi$ -sesgo, representado por  $r_B$ , donde  $B$  es el politopo unidad de la norma bloque asociada.

Al conectar los nodos  $\mathbf{v}_i$  y  $\mathbf{v}_j$  surgen las inclinaciones  $\varphi_{ij}$  respecto a la horizontal correspondientes. Las aproximaciones al valor del sesgo  $r_B(\varphi_{ij})$  se clasificarán según el valor de  $\varphi_{ij}$  como sigue:

1) Si  $\varphi_{ij} = 0$ , entonces cualquier  $l_p$  mide la distancia exacta entre los puntos  $\mathbf{v}_i$  y  $\mathbf{v}_j$ .

2) Si  $\varphi_{ij} \in (0, \phi)$ , entonces  $l_p$  actúa como aproximante si se calcula sobre el vector de la distancia en la red  $N$  cuyo argumento es  $z_\phi(\varphi_{ij})$ .

3) Si  $\varphi_{ij} = \phi$ , entonces tanto  $l_p$  como  $l_q$  mide exactamente la distancia entre ellos usando como argumento un vector del mismo módulo en la orientación  $z_\phi(\varphi_{ij})$ .

4) Si  $\varphi_{ij} \in (\phi, \pi]$ , entonces  $l_q$  actúa como aproximante si se calcula sobre el vector de la distancia en la red  $N$  cuyo argumento es  $z_\phi(\varphi_{ij})$ .

(En realidad este caso se reduce a considerar el intervalo  $\varphi_{ij} \in (\phi, \pi/2)$ , debido a la ordenación previa de los puntos).

El conjunto de puntos  $U$  a añadir a  $V$  para obtener  $W$  son los siguientes:

$$\mathbf{u}_{ij} \equiv \left(x_j - \frac{y_j - y_i}{\tan(\phi)}, y_j\right) \text{ para cada } \varphi_{ij} \in (0, \phi)$$

y

$$\mathbf{u}_{ij} \equiv \left(x_i + \frac{y_j - y_i}{\tan(\phi)}, y_j\right) \text{ para cada } \varphi_{ij} \in (\phi, \pi/2)$$

El conjunto de aristas  $A$  se obtiene añadiendo aristas rectilíneas que unen cada par de vértices  $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$  cada vez que el vector asociado forme un ángulo  $\varphi_{ij} \in \{0, \phi\}$ . Si, por el contrario,  $\varphi_{ij} \in (0, \phi) \cup (\phi, \pi/2)$ , entonces se incluirán en  $A$  dos nuevas aristas: la que resulta de unir rectilíneamente los puntos  $\mathbf{v}_i$  con  $\mathbf{u}_{ij}$  y la que conecta  $\mathbf{u}_{ij}$  con  $\mathbf{v}_j$ .

Obsérvese que en el primer caso

$$d_G(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = l_2(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j) = l_p(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j), \quad \forall p \in (0, \infty]$$

y en el segundo

$$d_G(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = l_2(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{u}}_{ij}) + l_2(\mathbf{u}_{ij} \vec{\mathbf{v}}_j)$$

Para este segundo caso no existe un valor  $l_p(\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j)$ ,  $\forall p \in (0, \infty]$  que iguale la suma. Cuando el argumento del vector  $\mathbf{v}_i \vec{\mathbf{v}}_j$  se encuentre en  $(0, \phi)$  encontraremos una estimación empleando  $l_p$ , con  $p \in (1, 2)$ . En cambio, si dicho argumento se halla en  $(\phi, \pi)$  entonces la función empleada para la estimación deberá ser la hiperrectilínea correspondiente:  $l_q$ , con  $q \in (0, 1)$ .

En el siguiente algoritmo se determina la red  $N$  y se evalúa el error de aproximación entre la distancia sobre la red y el estimador.

**ALGORITMO I**

**Generación de una red cuyas aristas se estimen usando**

$p \in [1, 2)$ , y  $q \in (0, 1]$ .

**begin**

1. **read**  $p \in [1, 2)$

2. **compute**

$$\begin{aligned} \phi &\leftarrow 2 \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{p}\right) \\ q &\leftarrow \frac{2 \log(2)}{\log(2) - \log(1 - 2 \frac{p-2}{p})} \in (0, 1] \\ U &\leftarrow \emptyset \end{aligned}$$

3. **for** cada arista  $(v_i, v_j)$  **do**

3.1. **compute**

$$\varphi_{ij} \leftarrow |\text{Arg}(v_i \vec{v}_j)|$$

3.2. **if**  $\varphi_{ij} = 0$  **or**  $\varphi_{ij} = \phi$  **then**

3.2.1. Conectar los puntos  $v_i$  y  $v_j$  mediante la arista  $(v_i, v_j)$ .

3.2.2.  $d(v_i, v_j) \leftarrow l_2(v_i \vec{v}_j)$ .

3.2.3.  $d_f(v_i, v_j) \leftarrow l_2(v_i \vec{v}_j) \cdot r_p(z_\phi(\varphi_{ij}))$ .

[ Nota: por ser  $r_p(z_\phi(\varphi_{ij})) = 1$ , se tiene que  $d(v_i, v_j) = d_f(v_i, v_j)$  ].

3.3. **if**  $\varphi_{ij} \in (0, \phi)$  **then**

3.3.1. Añadir a la red el punto  $u_{ij} \equiv (x_j - \frac{y_j - y_i}{\tan(\phi)}, y_j)$ .  $U \leftarrow U \cup \{u_{ij}\}$

Conectar los puntos  $v_i$  y  $v_j$  mediante la poligonal  $\overline{v_i u_{ij}} \cup \overline{u_{ij} v_j}$ .

3.3.2.  $d(v_i, v_j) \leftarrow l_2(v_i \vec{u}_{ij}) + l_2(u_{ij} \vec{v}_j)$ .

3.3.3.  $d_f(v_i, v_j) \leftarrow l_2(v_i \vec{v}_j) \cdot r_p(z_\phi(\varphi_{ij}))$ .

[ Nota: por ser  $\|v_i \vec{v}_j\|_2 = d(v_i, v_j)$ , se tiene que  $d(v_i, v_j) \approx d_f(v_i, v_j)$  ].

3.4. **if**  $\varphi_{ij} \in (\phi, \pi/2)$  **then**

3.4.1. Añadir a la red el punto  $u_{ij} \equiv (x_i + \frac{y_j - y_i}{\tan(\phi)}, y_j)$ .  $U \leftarrow U \cup \{u_{ij}\}$

Conectar los puntos  $v_i$  y  $v_j$  mediante la poligonal  $\overline{v_i u_{ij}} \cup \overline{u_{ij} v_j}$ .

3.4.2.  $d(v_i, v_j) \leftarrow l_2(v_i \vec{u}_{ij}) + l_2(u_{ij} \vec{v}_j)$ .

3.4.3.  $d_f(v_i, v_j) \leftarrow l_2(v_i \vec{v}_j) \cdot r_q(z_\phi(\varphi_{ij}))$ .

[ Nota: por ser  $\|v_i \vec{v}_j\|_2 = d(v_i, v_j)$ , se tiene que  $d(v_i, v_j) \approx d_f(v_i, v_j)$  ].

4. **compute** el error de aproximación mediante:

$$AD_f \leftarrow \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |d_f(v_i, v_j) - d(v_i, v_j)|$$

**end**



#### 5.4. DETERMINACIÓN DE UNA RED APROXIMADAMENTE $p$ -SESGADA.

Si queremos eliminar el papel que juega  $l_q$  tenemos de evitar que haya aristas incidentes con un ángulo de desvío fuera del intervalo  $[0, \phi]$ .

El argumento  $\varphi_{ij}$  de cada vector  $v_i \vec{v}_j$  que representa un par origen destino esta contenido en un cierto intervalo  $[k\phi, (k+1)\phi) \subset [0, \pi)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , donde  $k = E(\frac{\varphi_{ij}}{\phi})$  es la parte entera del cociente  $\frac{\varphi_{ij}}{\phi}$ .

Restringido a cada uno de esos intervalos, la norma  $l_p$ , con  $p \in (1, 2)$ , actúa de aproximante de la norma bloque siempre que el eje de abscisas se considere en la inclinación  $k\phi$ . Por ello, usaremos  $l_p$  sobre las coordenadas resultantes de aplicar un giro que restaure la orientación al intervalo  $[0, \phi]$ .

Los puntos a añadir a  $V$  son ahora los siguientes:

$$u_{ij} \equiv (x_i + h, y_i + r)$$

donde

$$h = \frac{|y_j - y_i| - \tan((k+1)\phi) |x_j - x_i|}{\tan(k\phi) - \tan((k+1)\phi)}$$

y

$$r = \text{sg}(\text{Arg}(v_i \vec{v}_j)) h \tan(k \cdot \phi)$$

La red diseñada con este procedimiento sigue manteniendo un patrón regular, en el sentido de que sus aristas se trazan en las orientaciones múltiplos de  $\phi$ .

La longitud de los viajes en dicha red se miden exactamente usando rotaciones  $G_{\mp k\phi}(\vec{x})$ , cuando no sea necesario la inclusión de  $u_{ij}$ , mediante:

$$d_G(v_i, v_j) = l_p(z_\phi(G_{\mp k\phi}(v_i \vec{v}_j)))$$

Cuando sí sea preciso incluir puntos adicionales, las distancias se medirán aproximadamente

$$d_G(v_i, v_j) = d_G(v_i, u_{ij}) + d_G(u_{ij}, v_j)$$

$$d(v_i, v_j)_G \approx l_2(z_\phi(G_{\mp k\phi}(v_i \vec{u}_{ij}))) + l_2(z_\phi(G_{\mp k\phi}(u_{ij} \vec{v}_j)))$$

Así pues

$$d_G(v_i, v_j) \approx l_p(z_\phi(G_{\mp k\phi}(v_i \vec{v}_j)))$$

Este procedimiento asocia a  $l_p(z_\phi(G_{\mp k\phi}(\vec{x})))$  con el calibrador poliédrico de obtenido en las direcciones  $k\phi \in [0, 2\pi)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Dicho calibrador será norma bloque si  $\phi$  fuera un divisor entero de  $\pi$ . En este sentido, los correspondientes valores de  $p$ , cuya norma  $l_p$  es aproximada con el calibrador poliédrico, tienen un especial interés.

El siguiente algoritmo determina la red  $N$  y evalúa el error de aproximación. Los puntos a añadir a  $V$  son ahora los siguientes:

$$u_{ij} \equiv (x_i + h, y_i + r)$$

donde

$$h = \frac{|y_j - y_i| - \tan((k+1)\phi) |x_j - x_i|}{\tan(k\phi) - \tan((k+1)\phi)}$$

y

$$r = \text{sg}(\text{Arg}(v_i \vec{v}_j)) h \tan(k \cdot \phi)$$

siendo  $k = E(\frac{\varphi_{ij}}{\phi})$ , la parte entera del cociente  $\frac{\varphi_{ij}}{\phi}$ .

### ALGORITMO II

Generación de una red cuyas aristas se estimen usando  $p \in [1, 2)$ .

begin

1. read  $p \in [1, 2)$

2. compute

$$\phi \leftarrow 2 \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{p}\right)$$

$$U \leftarrow \emptyset$$

3. for cada arista  $(v_i, v_j)$  do

3.1. compute

$$\varphi_{ij} \leftarrow |\text{Arg}(v_i \vec{v}_j)|$$

$$\sigma \leftarrow \text{sg}(\text{Arg}(v_i \vec{v}_j))$$

$$k \leftarrow E\left(\frac{\varphi_{ij}}{\phi}\right)$$

$$\theta \leftarrow \sigma(\varphi_{ij} - k \cdot \phi)$$

3.2. if  $\theta = 0$  then

3.2.1. Conectar los puntos  $v_i$  y  $v_j$  mediante la arista  $(v_i, v_j)$ .

3.2.2.  $d(v_i, v_j) \leftarrow l_2(v_i \vec{v}_j)$ .

3.2.3.  $d_f(v_i, v_j) \leftarrow l_2(g_{-\sigma \cdot k \cdot \phi} \cdot v_i \vec{v}_j) \cdot r_p(z_\phi(|\theta|))$ .

3.3. if  $\theta \neq 0$  then

3.3.1. Añadir a la red el punto  $u_{ij} \equiv (x_i + h, y_i + r)$ , donde

$$h \leftarrow \frac{|y_j - y_i| - \tan((k+1)\phi) \cdot |x_j - x_i|}{\tan(k\phi) - \tan((k+1)\phi)} \quad \text{y}$$

$$r \leftarrow \sigma h \cdot \tan(k \cdot \phi)$$

Conectar los puntos  $v_i$  y  $v_j$  mediante la poligonal  $\overline{v_i u_{ij}} \cup \overline{u_{ij} v_j}$ .

$$U \leftarrow U \cup \{u_{ij}\}.$$

3.3.2.  $d(v_i, v_j) \leftarrow l_2(v_i \vec{v}_j)$ .

3.3.3.  $d_f(v_i, v_j) \leftarrow l_2(g_{-\sigma \cdot k \cdot \phi} \cdot v_i \vec{v}_j) \cdot r_p(z_\phi(|\theta|))$ .

4. compute el error de aproximación mediante:

$$AD_f \leftarrow \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n |d_f(v_i, v_j) - d(v_i, v_j)|$$

end

### 5.5. UN EJEMPLO QUE EVALÚA AMBOS DISEÑOS.

Supongamos el conjunto de  $n = 6$  puntos en el plano:

$$V = \left\{ (0, 0), \left(1.5, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right), (2, 0), (3.5, 2\sqrt{3}), \left(4.5, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), (5, \sqrt{3}) \right\}$$

y un valor prefijado  $p = 1.41339$ . La elección de  $p$  se ha realizado buscando que la deformación  $\phi$  resulte  $\pi/3$  que es un valor gráfico fácil de identificar; mientras que las coordenadas de los puntos se han tomado de modo que se contemplan todos los casos posibles en el algoritmo.

Tras aplicar el algoritmo I que genera una red aproximadamente  $(p, q)$ -sesgada (con  $q = 0.666667$ ), resulta la Fig.[5.3]

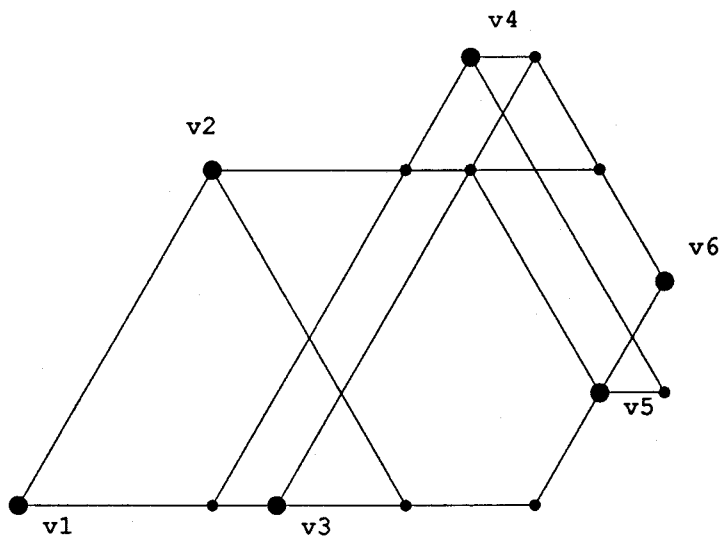


Fig.[5.3]: Red  $(p, q)$ -sesgada .

Si llevamos a cabo el algoritmo de Brimberg-Love (ver Brimberg y Love[1991]) con una rejilla de búsqueda de  $\Delta p = 0.05$  tenemos que para la red obtenida la estimación aconsejable tipo  $\tau \cdot l_p$  se daría en  $\tau^* = 1.02384$  y  $p^* = 1.35$ , lo cual arroja un error absoluto total  $AD_f = 3.48168$ . Sin embargo, al estimar usando  $l_p$  con  $p = 1.41339$  y  $l_q$  con  $q = 0.666667$  según sea la orientación del viaje, se consigue un valor para el error absoluto total más bajo:  $AD_f = 1.23746$ .

Por otro lado, si aplicamos el algoritmo II que genera una red aproximadamente  $p$ -sesgada, se consigue el grafo de la Fig.[5.4].

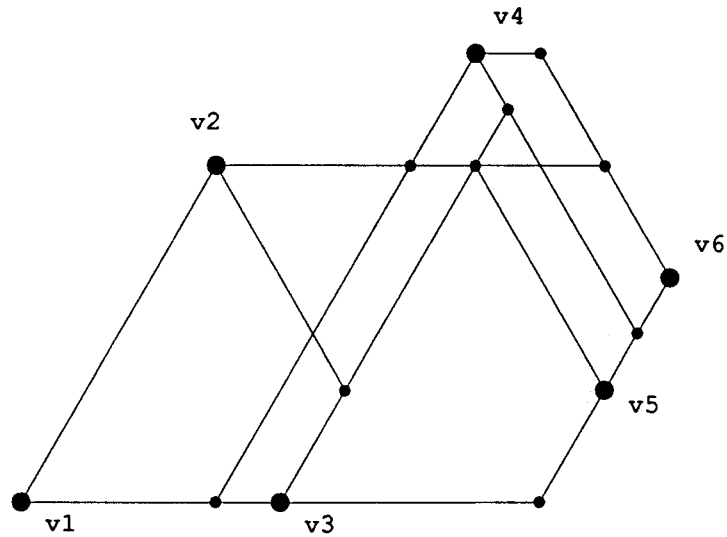


Fig.[5.4]: Red  $p$ -sesgada .

Si repetimos para esta caso el algoritmo de Brimberg-Love con idéntica rejilla de búsqueda ( $\Delta p = 0.05$ ) tenemos que para esta otra red la estimación aconsejable tipo  $\tau \cdot l_p$  sería  $\tau^* = 0.99955$  y  $p^* = 1.35$ , lo cual arroja un error absoluto total  $AD_f = 2.22907$ . Sin embargo, al estimar usando  $l_p$  con  $p = 1.41339$  sobre vectores con argumentos en  $[0, \phi]$ , tenemos de nuevo un valor más bajo:  $AD_f = 0.366265$ .

# Capítulo 6

## Programación lineal aproximada para el problema de Weber con normas $l_p$ , $p \in [1, 2]$

### 6.1. EL PROBLEMA 1-MEDIANA.

El problema generalizado de Fermat-Weber trata de situar un nuevo servicio de manera que se minimice la suma de las distancias ponderadas a un conjunto de puntos fijos de demanda  $V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . Los puntos de demanda tienen localizaciones fijas y conocidas, y las distancias se miden usando una norma  $l_p$  ( $p \in [1, \infty]$ ), de ahí el contexto general. Una formulación del problema minisum para el espacio euclídeo  $N$ -dimensional ( $\mathbb{R}^N$ ) es:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} W_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p$$

donde  $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iN})$  son las coordenadas del  $i$ -ésimo punto de demanda,  $n$  es el total de dichos puntos y  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$  es la posición desconocida del nuevo punto de servicio.

El esquema habitual del análisis de éste problema minisum consiste en:

(1) Comprobar la convexidad (o estricta convexidad) de la función  $W_p(\mathbf{x})$ . Tiene especial importancia la definición empleada de distancia entre  $\mathbf{x}$  y cada punto de demanda  $\mathbf{v}_i$ .

(2) Anular el gradiente de  $W_p(\mathbf{x})$ , dando lugar a un esquema de iteración definido mediante la función  $T$ .

$$\mathbf{x}^{(k)} \longrightarrow \mathbf{x}^{(k+1)} = T(\mathbf{x}^{(k)})$$

(3) Estudiar el dominio y las singularidades de  $T$ . Para preparar un enunciado sobre la convergencia global, analizar la continuidad de  $T$  y comprobar que  $T(\mathbf{x})$  recae sobre un compacto.

(4) Caracterizar la solución  $\mathbf{x}^*$  como el único caso que cumple  $T(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ . Comprobar si dicho punto se encuentra en la envoltura convexa de los puntos de demanda.

(5) Verificar la contractividad del proceso iterativo  $W_p(T(\mathbf{x})) < W_p(\mathbf{x})$ .

(6) Convergencia global del proceso: Identificar o al menos contabilizar los puntos desde los que no se alcanza la solución mediante el esquema iterativo. Enunciar el teorema correspondiente.

(7) Convergencia local: velocidad de convergencia del proceso según que la solución sea o no una posible singularidad. Enunciar el teorema correspondiente.

El problema de Weber, para el caso euclídeo ( $p = 2$ ), ha sido estudiado considerablemente en localización continua. Un algoritmo iterativo fue propuesto por Weiszfeld [1937] y redescubierto varios años después por Miehle [1958]. La convergencia global del algoritmo de Weiszfeld fue probada por Kuhn [1973], bajo la suposición de que ninguna de las iteraciones en la secuencia coincida con alguno de los puntos fijos  $a_i$ . Cuando esto ocurre, la función de iteración está indefinida. En este mismo trabajo, Kuhn [1973] demuestra que el proceso de iteración queda atrapado en uno de los puntos de demanda si el punto de partida elegido pertenece a un conjunto numerable de  $\mathbb{R}^N$ ; así pues, se concluye que la probabilidad de que el algoritmo falle es despreciable si la precisión utilizada en el proceso es suficientemente alta. Sobre este aspecto, Chandrasekaran y Tamir [1989] demuestran, por el contrario, con contraejemplos que la convergencia del algoritmo de Weiszfeld puede no ocurrir para un conjunto continuo de puntos de partida en el caso de que los puntos de demanda estén contenidos en un subespacio afín propio de  $\mathbb{R}^N$ . Brimberg [1995] recoge esta idea y redacta correctamente las condiciones para convergencia global. Anteriormente, Ostresh [1978] había garantizado la convergencia global para  $p = 2$  al modificar la longitud del paso de iteración, y al tiempo proporciona una aceleración hacia la convergencia.

La utilización de normas  $l_p$  para la estimación de distancias de viaje en una red de transporte (ver Love y Morris [1972], Love y Morris [1979]), hace que tenga interés plantear el problema de Weber en el rango  $p \in [1, 2]$ . En este ámbito, Brimberg [1989] demuestra que la convergencia global del correspondiente algoritmo está garantizada si ninguna de las iteraciones coincide con las singularidades de la función de iteración. Una forma de eliminar dichas singularidades es aproximar hiperbólicamente la función  $l_p$ , con lo que se garantiza la convergencia global partiendo desde cualquier punto (ver Morris [1981]).

El estudio de la velocidad de convergencia del algoritmo de Weiszfeld se aborda primeramente por Katz [1974] en el caso euclídeo ( $p = 2$ ), y posteriormente por Brimberg y Love [1992 b] en el caso generalizado ( $p \in [1, 2]$ ).

Las conclusiones del trabajo de Katz [1974] confirman que la convergencia local es siempre lineal si la solución óptima  $\mathbf{x}^*$  no está sobre ningún punto de demanda; además, para el caso  $N = 2$ , la cota superior de la convergencia es un valor del intervalo  $[1/2, 1)$ , y si  $\mathbf{x}^*$  fuera un punto de demanda la velocidad de convergencia

sería lineal en la mayoría de los casos pero, bajo ciertas condiciones, podría llegar a ser sublineal o cuadrática.

Las aportaciones de Brimberg y Love [1992] pueden resumirse en:

(a) Cuando  $p \in (1, 2]$  y  $\mathbf{x}^*$  no está sobre el conjunto de las singularidades de la función de iteración, la convergencia es siempre lineal. Además, la velocidad de convergencia tiende a decrecer hacia la sublinealidad cuando el valor de  $p$  decrece hacia 1.

(b) Cuando  $p \in [1, 2]$  y  $\mathbf{x}^*$  ocurre en un punto de demanda, la razón de convergencia puede ser sublineal, lineal o cuadrática.

(c) La convergencia local del procedimiento de Weiszfeld no está garantizada cuando  $p > 2$ .

## 6.2. LINEALIZACIÓN Y CUASILINEALIZACIÓN.

La función  $W_p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p$  para  $p \in [1, 2)$  no es lineal salvo en el caso  $p = 1$ . Para la resolución del problema minisum correspondiente, se subdivide el modelo en  $N$  subproblemas de programación lineal, uno por cada  $x_j$ , que se pueden resolver de manera exacta (ver Love, Morris y Wesolowsky [1988]).

La linealización de  $W_p(\mathbf{x})$  para  $p = 2$  y  $N = 2$  es estudiada en Love, Morris y Wesolowsky [1988] aproximando hiperbólicamente la función mediante:

$$W_2(\mathbf{x}) \approx Wh_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_i \left( (x_1 - v_{i1})^2 + (x_2 - v_{i2})^2 + \epsilon^2 \right)^{1/2}$$

para eliminar las discontinuidades de las derivadas de  $W_2(\mathbf{x})$ .

Usando las  $3n$  variables duales  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i; i = 1, \dots, n$ , se convierte cada sumando en

$$\omega_i \left( (x_1 - v_{i1})^2 + (x_2 - v_{i2})^2 + \epsilon^2 \right)^{1/2} = \max_{(\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2)^{1/2} = \omega_i} \left( (x_1 - v_{i1})\alpha_i + (x_2 - v_{i2})\beta_i - \epsilon\gamma_i \right)$$

con lo que el problema de Weber, para  $p = 2$ , se convierte en un modelo aproximado de programación no lineal.

Este modelo aproximado, al no ser de programación lineal (ya que las restricciones no lo son), no facilita el estudio de la *sensibilidad de las soluciones* respecto al valor de  $p$  considerado.

## 6.3. CARACTERIZACIÓN DEL ÓPTIMO.

**Teorema 6.1** (Love, Morris y Wesolowsky [1988])

(a) La función  $W_p(\mathbf{x})$ ,  $p \in (1, \infty)$  es convexa.

(b) Si los puntos de demanda no son colineales,  $W_p(\mathbf{x})$ ,  $p \in (1, \infty)$  es estrictamente convexa.

Demostración:

(a) Por la propiedad que afirma que una combinación lineal de coeficientes positivos de funciones convexas es también convexa, y un cambio de variable tal que  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{v}$  basta demostrar que la función:

$$f(\mathbf{z}) = (z_1^p + z_2^p + \dots + z_N^p)^{1/p}$$

es convexa. Para ello consideremos dos vectores:

$$\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_N); \mathbf{z}' = (z'_1, z'_2, \dots, z'_N)$$

y construimos:

$$\lambda\mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{z}' = (\lambda z_1 + (1 - \lambda)z'_1, \lambda z_2 + (1 - \lambda)z'_2, \dots, \lambda z_N + (1 - \lambda)z'_N)$$

Aplicando la definición de  $f(\cdot)$ :

$$f(\lambda\mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{z}') = (|\lambda z_1 + (1 - \lambda)z'_1|^p + |\lambda z_2 + (1 - \lambda)z'_2|^p + \dots + |\lambda z_N + (1 - \lambda)z'_N|^p)^{1/p}$$

Si en cada paréntesis aplicamos la desigualdad triangular:

$$f(\lambda\mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{z}') \leq (|\lambda z_1|^p + |(1 - \lambda)z'_1|^p + \dots + |\lambda z_N|^p + |(1 - \lambda)z'_N|^p)^{1/p}$$

y a continuación, la desigualdad de Minkowski:

$$f(\lambda\mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{z}') \leq (|\lambda z_1|^p + \dots + |\lambda z_N|^p)^{1/p} + (|(1 - \lambda)z'_1|^p + \dots + |(1 - \lambda)z'_N|^p)^{1/p}$$

Extrayendo los factores positivos  $\lambda$  y  $(1 - \lambda)$ :

$$f(\lambda\mathbf{z} + (1 - \lambda)\mathbf{z}') \leq \lambda f(\mathbf{z}) + (1 - \lambda)f(\mathbf{z}')$$

(b) La igualdad en la relación anterior se da sólo en el caso de dependencia lineal entre  $\mathbf{z}$  y  $\mathbf{z}'$ , lo que traducido a puntos supone la colinealidad entre los puntos de demanda.

**q.e.d.**

Supongamos que los puntos de demanda  $\mathbf{v}_i$  no son colineales, ya que la consideración de todos los puntos colineales nos llevaría a un caso trivial. Esta suposición garantiza la convexidad (estricta en el caso  $p \in (1, \infty)$ ) y por lo tanto, la existencia de solución al problema generalizado de Fermat-Weber está asegurada en  $\mathbb{R}^N$  (y es única para  $p \in (1, \infty)$ ).

Supongamos  $p \in (1, \infty)$ , y sea  $\mathbf{x}^*$  el punto donde se alcanza la optimalidad. Por la caracterización de *punto crítico* deberá verificarse:  $\vec{\nabla} W_p(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$

Teniendo en cuenta que:

$$\forall i = 1, 2, \dots, n \quad (x_t - v_{it}) = \text{sign}(x_t - v_{it}) |x_t - v_{it}|; \forall t = 1, 2, \dots, N$$



llegamos al sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial W_p}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega_i \operatorname{sign}(x_1 - v_{i1}) \frac{|x_1 - v_{i1}|^{p-1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p^{p-1}} = 0 \\ \frac{\partial W_p}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega_i \operatorname{sign}(x_2 - v_{i2}) \frac{|x_2 - v_{i2}|^{p-1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p^{p-1}} = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial W_p}{\partial x_N} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \omega_i \operatorname{sign}(x_N - v_{iN}) \frac{|x_N - v_{iN}|^{p-1}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p^{p-1}} = 0 \end{cases}$$

Antes de proceder a despejar, analicemos los primeros miembros para estudiar el dominio de la función gradiente. El conjunto de singularidades queda reducido a:

$$S \equiv V = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

cuando  $p \geq 2$ . En el caso  $p \in (1, 2)$  hay que añadir cada hiperplano de  $\mathbb{R}^N$ :

$$H_{it} = \{\mathbf{x} : x_t - v_{it} = 0\}; \quad \forall i = 1, \dots, n; \quad \forall t = 1, \dots, N$$

Queda finalmente que el conjunto de singularidades del gradiente  $\vec{\nabla} W_p(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$  es:

$$S = \begin{cases} \bigcup_{i,t} H_{it} & \text{si } p \in (1, 2) \\ \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\} & \text{si } p \geq 2 \end{cases}$$

Nótese que cuando  $p \in (1, 2)$  la singularidad de la función iteración está constituida por  $nN$  hiperplanos, mientras que cuando  $p \geq 2$  las singularidades se reducen al conjunto de medida nula de los  $n$  puntos de demanda.

Si el punto óptimo  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$  no perteneciera al conjunto de singularidades  $S$  entonces se podría asegurar que verifica el sistema:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \omega_i (x_t^* - v_{it}) \frac{|x_t^* - v_{it}|^{p-2}}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{v}_i\|_p^{p-1}} = 0 \Rightarrow x_t^* = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i |x_t^* - v_{it}|^{p-2} v_{it}}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{v}_i\|_p^{p-1}}}{\sum_{i=1}^n \frac{\omega_i |x_t^* - v_{it}|^{p-2}}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{v}_i\|_p^{p-1}}} \\ \forall t = 1, 2, \dots, N. \end{cases}$$

La búsqueda del punto óptimo para el problema generalizado de Fermat-Weber se reduce a resolver por algún método iterativo la ecuación de punto fijo:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$$

donde  $\mathbf{T} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \setminus S \rightarrow \mathbb{R}^N$  se define para cada componente:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = (\mathbf{T}_1(\mathbf{x}), \mathbf{T}_2(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{T}_N(\mathbf{x}))$$

$$\mathbf{T}_t(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{it}(\mathbf{x}) v_{it}}{\sum_{i=1}^n Y_{it}(\mathbf{x})}; \quad \forall t = 1, 2, \dots, N$$

donde

$$Y_{it}(\mathbf{x}) = \frac{\omega_i |x_t - v_{it}|^{p-2}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p^{p-1}}; \quad \forall t = 1, 2, \dots, N, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

El esquema iterativo:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{T}(\mathbf{x}^{(k)})$$

extiende el algoritmo de Weiszfeld (ver Weiszfeld (1937)) para  $p = 2$ .

El estudio de la *sensibilidad de las iteraciones* respecto al valor de  $p$  considerado en dicho esquema es poco menos que imposible, debido a la complejidad de las expresiones. Sólo el caso  $p = 1$  puede tratarse como un problema de programación lineal, que es el marco apropiado para un estudio de estas características.

La aportación de este capítulo es la de acercar el problema generalizado de Weber al ámbito de la programación lineal, en términos numéricos aproximados, donde poder evaluar sensibilidades respecto del índice  $p \in (1, 2)$  tanto de la solución final como de las iteraciones.

### Ubicación del punto óptimo.

#### Teorema 6.2. (teorema de la mayoría.)

La función  $W_p(\mathbf{x})$ ,  $p \in [1, \infty)$  alcanza su mínimo en el punto de demanda  $\mathbf{v}_k$  si se verifica la siguiente desigualdad entre los pesos:

$$\omega_k \geq \sum_{i \neq k} \omega_i$$

#### Demostración:

Supongamos que  $k = n$  el punto de demanda sea correspondiente al último índice. Veamos que  $W_p(\mathbf{v}_n) \leq W_p(\mathbf{x})$ .

Para ello, aplicaremos la definición de  $W_p(\mathbf{v}_n)$  y la desigualdad triangular:

$$\|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n\|_p \leq \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|_p + \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_n\|_p; \quad i \neq n$$

Es decir:

$$\begin{aligned} W_p(\mathbf{v}_n) &= \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n\|_p \leq \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|_p + \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_n\|_p \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \omega_i \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|_p + \omega_n \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_n\|_p = W_p(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

q.e.d.

Una *condición necesaria y suficiente* para que  $W_p(\mathbf{x})$  alcance su mínimo en el punto de demanda  $\mathbf{v}_k$  se encuentra en Love, Morris y Wesolowsky [1988]:

**Teorema 6.3.**

La función  $W_p(\mathbf{x})$  alcanza su mínimo en el punto de demanda  $\mathbf{v}_k$  si y sólo si se verifica la siguiente desigualdad:

$$\|G_k\| \leq \omega_k; \text{ donde } G_k = \begin{cases} \left(\sum_{t=1}^N |R_{kt}|^{p/(p-1)}\right)^{(p-1)/p} & \text{si } p > 1 \\ \max\{|R_{kt}| : t = 1, 2, \dots, N\} & \text{si } p = 1 \end{cases}$$

siendo

$$R_{kt} = \sum_{j=1, j \neq k}^n \frac{\omega_j \text{sign}(v_{kt} - v_{jt}) (|v_{kt} - v_{jt}|^{p-1})}{\|\mathbf{v}_k - \mathbf{v}_j\|_p^{p-1}}$$

**Teorema 6.4.**

El mínimo  $\mathbf{x}^*$  de la función  $W_p(\mathbf{x})$ ;  $p \in [1, \infty)$  se encuentra en el hipercubo:

$$[\min\{v_{i1}\}, \max\{v_{i1}\}] \times [\min\{v_{i2}\}, \max\{v_{i2}\}] \times \dots \times [\min\{v_{iN}\}, \max\{v_{iN}\}]$$

Demostración:

Distinguiremos los casos:

(1) Si  $p = 1$  entonces el problema de Weber es de programación lineal, y las soluciones están en la envolvente convexa de los puntos de demanda, que a su vez está trivialmente contenida en el hipercubo anterior.

(2) Si  $\mathbf{x}^*$  fuera alguno de los vértices de demanda, ya estaría demostrado.

(3) Si  $\mathbf{x}^*$  no fuera ninguno de ellos, aplicando la condición de punto estacionario:

$$x_i^* = T_i(\mathbf{x}^*) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{it}(\mathbf{x}^*) v_{it}}{\sum_{i=1}^n Y_{it}(\mathbf{x}^*)}; \forall t = 1, 2, \dots, N$$

donde

$$Y_{it}(\mathbf{x}^*) = \frac{\omega_i |x_i^* - v_{it}|^{p-2}}{\|\mathbf{x}^* - \mathbf{v}_i\|_p^{p-1}}; \forall t = 1, 2, \dots, N, \forall i = 1, 2, \dots, n$$

se tiene que cada componente de  $\mathbf{x}^*$  es una combinación convexa de las correspondientes componentes de los puntos de demanda.

q.e.d.

**Singularidades del algoritmo.**

Continuidad de la función iteración.

Distinguiremos dos casos:

(A) En el caso  $p \in [1, 2)$ , el conjunto de singularidades es  $S = \bigcup_{k,t} H_{kt}$ . Por lo que la ampliación del dominio implica calcular  $\forall t = 1, 2, \dots, N$ :

$$\lim_{x_i \rightarrow v_{kt}} T_i(\mathbf{x}) = v_{kt}, \forall k = 1, 2, \dots, n$$

por lo que se puede extender el dominio de la función iteración a cada punto de los hiperplanos  $H_{kt}$ :

$$\forall t = 1, 2, \dots, N; \quad \mathbf{T}_t(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n Y_{it}(\mathbf{x}) v_{it}}{\sum_{i=1}^n Y_{it}(\mathbf{x})} & \text{si para todo } k \text{ y todo } t, x_t \neq v_{kt} \\ v_{kt} & \text{si para algún } k \text{ y algún } t, x_t = v_{kt} \end{cases}$$

(B) En el caso  $p \in [2, +\infty]$ , el conjunto de singularidades se reduce a  $S = V$ . Un simple cálculo llevaría a que:

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{v}_k} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_k, \quad \forall i$$

por lo que se puede extender el dominio de la función iterativa a cada punto de demanda:

$$\forall t = 1, 2, \dots, N; \quad \mathbf{T}_t(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{\sum_{i=1}^n Y_{it}(\mathbf{x}) v_{it}}{\sum_{i=1}^n Y_{it}(\mathbf{x})} & \text{si para todo } k, \mathbf{x} \neq \mathbf{v}_k \\ v_{kt} & \text{si para algún } k, \mathbf{x} = \mathbf{v}_k \end{cases}$$

Esta ampliación, que asegura la continuidad, hace que la propiedad de punto fijo  $\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{x})$ ;  $k = 0, 1, \dots$  no sea exclusiva del punto óptimo. Así, cuando la iteración recae en el mismo punto precedente, no se sabría si es por el éxito del esquema (se llegó a  $\mathbf{x}^*$ ) o porque la iteración queda atrapada en una singularidad.

### Teorema 6.5

Cada imagen mediante la aplicación extendida  $\mathbf{T} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  del punto de la iteración  $k$ -ésima  $\mathbf{x}^{(k)}$  pertenece a un conjunto compacto en  $\mathbb{R}^N$ .

#### Demostración:

La ampliación del dominio de  $\mathbf{T}$  indica que la imagen del punto de la iteración  $k$ -ésima  $\mathbf{x}^{(k)}$  bien sea una combinación convexa de los puntos de demanda, o bien alguna de sus componentes coincida con la correspondiente componente de algún punto de demanda. En cualquiera de los casos:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) \in [\min_i \{v_{i1}\}, \max_i \{v_{i1}\}] \times \dots \times [\min_i \{v_{iN}\}, \max_i \{v_{iN}\}]$$

la imagen está en el hipercubo, que es un compacto.

q.e.d.

### Teorema 6.6 (Brimberg y Love [1992 b])

- (a) Si  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  entonces  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  (idem para las siguientes iteraciones).
- (b) Si  $\mathbf{x} \notin S$  y  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  entonces  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ .

#### Demostración

- (a.1) Supongamos que  $\mathbf{x}^* \notin S$ ; entonces existe su gradiente y vale:

$$\vec{\nabla} W_p(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

lo cual implica  $\mathbf{x}^* = \mathbf{T}(\mathbf{x}^*)$

Así pues, si  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  entonces aplicando en la igualdad  $\mathbf{T}(\cdot)$ :

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^* = \mathbf{x}$$

Y análogamente en las demás iteraciones.

(a.2) Supongamos que  $\mathbf{x}^* \in S$ .

(a.2.1) Si  $p \in [2, +\infty]$  entonces para algún  $k = 1, 2, \dots, n$   $\mathbf{x}^* = \mathbf{v}_k$ . Por la ampliación del dominio,

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{T}(\mathbf{v}_k) = \mathbf{v}_k = \mathbf{x}^*$$

(a.2.2) Si  $p \in [1, 2)$  entonces denominemos:

$$\mathbf{H}_t = \bigcup_{i=1}^n \mathbf{H}_{it} = \bigcup_{i=1}^n \{\mathbf{x} : x_t = v_{it}\}; \quad t = 1, 2, \dots, N$$

al conjunto de hiperplanos que pasan por los puntos de  $\mathbb{R}^N$  que coinciden en la coordenada  $t$ -ésima con la correspondiente coordenada  $t$ -ésima de algún punto de demanda.

El punto  $\mathbf{x}^*$  genera una partición en el conjunto de subíndices  $I = \{1, 2, \dots, N\} = I_0 \cup I_1$ :

$$I_0 = \{t : \mathbf{x}^* \notin \mathbf{H}_t\}; \quad I_1 = \{t : \mathbf{x}^* \in \mathbf{H}_t\}$$

Está claro que  $I_1 \neq \emptyset$ . De hecho, las componentes de  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*)$  verifican:

$$\forall t \in I_1, x_t^* = v_{it}; \quad \forall t \in I_0, x_t^* = \mathbf{T}_t(\mathbf{x}^*)$$

Dado que la extensión efectuada al dominio verifica:

$$\forall t \in I_1, \mathbf{T}_t(\mathbf{x}^*) = v_{it}$$

podemos concluir que, en cualquier caso,

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$

(b) Supongamos que  $\mathbf{x} \notin S$  y que  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ ; eso implica:

$$\vec{\nabla} W_p(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$$

lo cual concluye que  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ .

q.e.d.

#### 6.4 POLARIDAD EN LAS $\phi$ -NORMAS.

En la sección 2.1 se establece el concepto de red plana densa  $\phi$ -deformada ( $\phi \in (0, \pi/2]$ ), donde los trayectos factibles son combinaciones de los vectores que generan las direcciones fundamentales

$$A = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2; -\mathbf{g}_1, -\mathbf{g}_2\} \quad \text{donde } \mathbf{g}_1 = (1, 0), \quad \mathbf{g}_2 = (\cos \phi, \sin \phi)$$

Para medir la longitud del desplazamiento total en el seno de la red densa plana  $\phi$ -deformada se utiliza la norma bloque  $\|\cdot\|_B$  obtenida a partir del politopo  $B$  de vértices

$$\{(1, 0), (\cos \phi, \sin \phi), (-1, 0), (-\cos \phi, -\sin \phi)\}$$

definida en la forma usual:

$$\|\mathbf{x}\|_B = \inf \left\{ \beta > 0 : \frac{\mathbf{x}}{\beta} \in B \right\}.$$

Las siguientes definiciones y resultados pueden encontrarse en Hiriart-Urruty y Lemairechal [1993].

**Definición 6.1.**

Dado el conjunto convexo y compacto con el origen en su interior  $B \subset \mathbb{R}^2$  se denomina *conjunto polar*  $B^0$  asociado a  $B$  al subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  definido así:

$$B^0 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \leq 1, \forall \mathbf{x} \in B\}$$

donde  $\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}$  representa el producto escalar en  $\mathbb{R}^2$ .

**Lema 6.1.**

$B^0$  es también un conjunto convexo y compacto con el origen en su interior.

**Definición 6.2.**

Dado el conjunto convexo y compacto con el origen en su interior  $B \subset \mathbb{R}^2$  y su correspondiente norma  $\|\cdot\|_B$ , se denomina *norma polar asociada* a la norma definida a través de  $B^0$  y que se representará  $\|\cdot\|_{B^0}$ .

**Lema 6.2.**

Se puede redefinir la norma bloque  $\|\cdot\|_B$  de la siguiente forma:

$$\|\mathbf{x}\|_B = \max_{\mathbf{y} \in B^0} \{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}\}$$

**Lema 6.3.**

Si  $B$  es un poliedro, entonces  $B^0$  es también un conjunto poliédrico.

**Lema 6.4.**

Sea  $A^0$  el conjunto de puntos extremos del poliedro  $B^0$ . Se puede redefinir la norma bloque  $\|\cdot\|_B$  en el sentido del **lema 6.2** pero restringiendo el rango:

$$\|\mathbf{x}\|_B = \max_{\mathbf{y} \in A^0} \{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}\}$$

El **lema 6.4** proporciona la interpretación geométrica siguiente: elongaciones en cada dirección fundamental de  $A^0$  se corresponden con una contracción de su polar, y viceversa.

**Lema 6.5.**

Cada vector que parte del origen hacia un vértice de  $B$ , es un vector normal a una cara (arista en  $\mathbb{R}^2$ ) de  $B^0$ .

La demostración del siguiente teorema se deduce fácilmente del **lema 6.5**.

**Teorema 6.7.**

Si  $A$  es el conjunto de direcciones fundamentales del politopo asociado a la  $\phi$ -norma, entonces el politopo polar es

$$A^0 = \left\{ \left(1, \tan(\phi/2)\right), \left(-1, \frac{1}{\tan(\phi/2)}\right); \left(-1, -\tan(\phi/2)\right), \left(1, -\frac{1}{\tan(\phi/2)}\right) \right\}$$

donde cada dirección fundamental es normal a una arista de  $B$  y el módulo de cada vector de  $A^0$  coincide con el sesgo máximo obtenido en la arista de  $A$  correspondiente.

En la Fig.[6.1] se observan el politopo unidad de la norma  $\|\cdot\|_B$ , su sesgo asociado  $r_B$  y el politopo unidad  $B^0$  de la norma polar de  $\|\cdot\|_B$ .

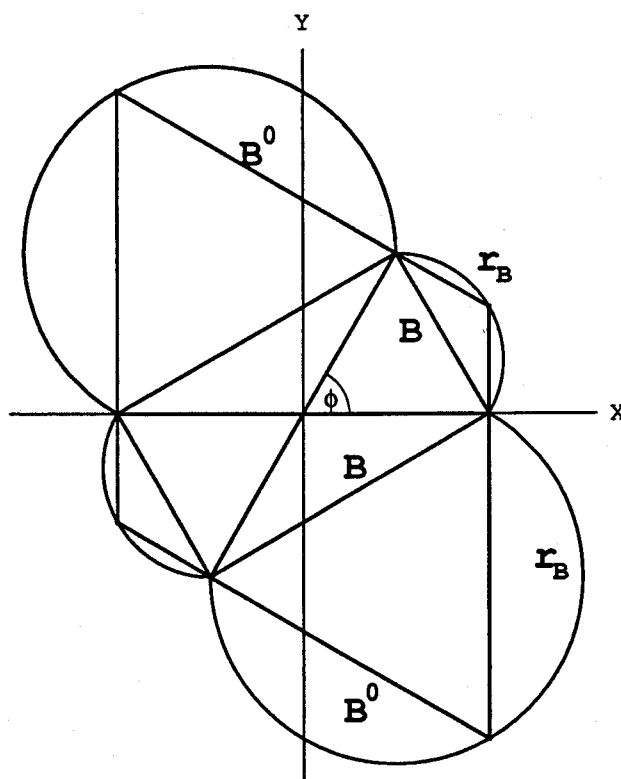


Fig. [6.1]: Politopos unidad de  $\|\cdot\|_B$  y su polar.

## 6.5 DISCRETIZACIÓN APROXIMADA EN $\mathbb{R}^2$ .

### Teorema 6.8

El problema de Weber con normas  $l_p$ ,  $p \in [1, 2)$ ,

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n \omega_i \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p$$

puede resolverse aproximadamente por métodos discretos a través de la relación entre el  $p$ -sesgo y el  $\phi$ -sesgo.

### Demostración.

Para cada vector  $\mathbf{v}_i - \mathbf{x}$ , denotemos con  $\varphi_i \in [0, 2\pi)$  su argumento. El argumento genera un cociente y un resto al realizar la división entera entre  $\pi/2$ . Así,

$$\varphi_i = E\left[\frac{\varphi_i}{\pi/2}\right]\pi/2 + \text{Mod}[\varphi_i, \pi/2] = k_i (\pi/2) + \theta_i$$

Dado que el  $p$ -sesgo es periódico, de periodo  $\pi/2$ , tenemos que:

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p = \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|_p = \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|_2 r_p(\varphi_i) = \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|_2 r_p(\theta_i)$$

siendo  $\theta_i$  el ángulo del primer cuadrante que verifica

$$\cos(\theta_i) = |\cos(\varphi_i)|; \quad \text{sen}(\theta_i) = |\text{sen}(\varphi_i)|$$

Como cada término se factoriza  $\|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p = \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_2 r_p(\theta_i)$ , el problema de Weber adopta la forma

$$\min_{\mathbf{X}} \sum_{i=1}^n \omega_i \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p = \min_{\mathbf{X}} \sum_{i=1}^n \omega_i \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_2 r_p(\theta_i)$$

Usemos el  $\phi$ -sesgo asociado a  $p \in [1, 2)$ , donde  $\phi$  es:

$$\phi \equiv \phi(p) = 2 \arccos \frac{\sqrt{2}}{p^{1/2}}$$

y establezcamos la aproximación en el sentido del sesgo:

$$r_p(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) = r_p(\theta_i) \approx r_B\left(\frac{2\phi}{\pi} \theta_i\right)$$

Recordemos, por el lema 2.6 que además:

$$r_p(\varphi) = r_p(\theta_i) \leq r_B\left(\frac{2\phi}{\pi} \theta_i\right)$$

con lo cual,

$$\min_{\mathbf{X}} \sum_{i=1}^n \omega_i \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|_2 r_p(\theta_i) \approx \min_{\mathbf{X}} \sum_{i=1}^n \omega_i \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}\|_2 r_B\left(\frac{2\phi}{\pi} \theta_i\right)$$



y además, en virtud del lema 2.6, la función de Weber con normas bloque mayor a la que emplea normas  $l_p$ .

Para cada  $i = 1, \dots, n$ , se quiere obtener un punto  $\mathbf{v}_i^B$  tal que coincidan los módulos:

$$\| \mathbf{v}_i^B - \mathbf{x} \|_2 = \| \mathbf{v}_i - \mathbf{x} \|_2$$

y que, además, el argumento del vector  $\mathbf{v}_i^B - \mathbf{x}$  verifique:

$$r_B(\text{Arg}(\mathbf{v}_i^B - \mathbf{x})) = r_p(\theta_i)$$

No existe un único punto  $\mathbf{v}_i^B$  de esas características. Dado que la periodicidad del  $p$ -sesgo es  $\pi/2$ , y la transformación

$$\varphi \in [0, \pi/2) \longrightarrow \frac{2\phi\varphi}{\pi} \in [0, \phi) \subset [0, \pi/2)$$

es interna en el cuadrante, podemos generar un único  $\mathbf{v}_i^B$  por cada  $\mathbf{v}_i$  si no cambiamos a otro cuadrante diferente del que corresponde al argumento de  $\mathbf{v}_i - \mathbf{x}$ .

Para ello, bastaría considerar como argumento:

$$\text{Arg}(\mathbf{v}_i^B - \mathbf{x}) = E\left[\frac{\varphi_i}{\pi/2}\right]\pi/2 + \frac{2\phi \text{Mod}[\varphi_i, \pi/2]}{\pi} = k_i(\pi/2) + \frac{2\phi\theta_i}{\pi}$$

Es decir

$$\text{Arg}(\mathbf{v}_i^B - \mathbf{x}) = \text{Arg}(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) + \left(\frac{2\phi}{\pi} - 1\right)\theta_i$$

Si denotamos con  $G_\phi^{(i)}$  la transformación que consigue generar el punto  $\mathbf{v}_i^B$ ,  $i = 1, \dots, n$ , vemos que dicha transformación es un giro sobre el vector  $\mathbf{x}$  de ángulo  $\left(\frac{2\phi}{\pi} - 1\right)\theta_i$ , cuya matriz sería:

$$G_\phi^{(i)} = \begin{pmatrix} \cos\left(\left(\frac{2\phi}{\pi} - 1\right)\theta_i\right) & \text{sen}\left(\left(\frac{2\phi}{\pi} - 1\right)\theta_i\right) \\ -\text{sen}\left(\left(\frac{2\phi}{\pi} - 1\right)\theta_i\right) & \cos\left(\left(\frac{2\phi}{\pi} - 1\right)\theta_i\right) \end{pmatrix}$$

Cada sumando de la función de Weber:

$$\begin{aligned} \| \mathbf{v}_i - \mathbf{x} \|_p &= \| \mathbf{v}_i - \mathbf{x} \|_2 r_p(\varphi_i) = \| \mathbf{v}_i - \mathbf{x} \|_2 r_p(\theta_i) \approx \\ &\approx \| \mathbf{v}_i - \mathbf{x} \|_2 r_B\left(\frac{2\phi\theta_i}{\pi}\right) = \| \mathbf{v}_i - \mathbf{x} \|_2 r_B\left(\theta_i + \left(\frac{2\phi}{\pi} - 1\right)\theta_i\right) \end{aligned}$$

En virtud de la invariancia de la norma euclídea a las semejanzas planas, el problema generalizado de Weber se aproxima por:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n \omega_i \| G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) \|_2 r_B(G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}))$$

Y por tanto:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n \omega_i \| \mathbf{x} - \mathbf{v}_i \|_p \approx \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n \omega_i \| G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) \|_B$$

q.e.d.

Los procedimientos numéricos discretos para resolver el problema de Weber con este tipo de norma bloque se basan en:

**Método 1:** Utilización de la bola polar y el producto escalar de acuerdo con el lema 6.4:

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n \omega_i \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p \approx \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2} \sum_{i=1}^n \omega_i \max_{\mathbf{y} \in A^0} \{\mathbf{y} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i - \mathbf{x})\}$$

el cual es equivalente al problema de Programación matemática:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^n \omega_i z_i \\ & \text{sujeto a} && \begin{cases} z_i \geq \mathbf{y} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) \\ \forall \mathbf{y} \in A^0 \\ \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

donde, junto a las dos variables  $x_1, x_2$  que definen la posición actual del punto  $\mathbf{x}$ , se introducen  $n$  variables adicionales  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Puesto que el cardinal  $|A^0|$  es 4, el número total de restricciones será  $4n$ .

**Método 2:** Utilización del teorema 1.6:

$$\|\mathbf{w}\|_B = \min \left\{ \sum_{k=1}^2 |\lambda_k| : \mathbf{w} = \sum_{k=1}^2 \lambda_k \mathbf{g}_k \right\}$$

Expresando cada valor absoluto como diferencia de dos positivos:

$$\|\mathbf{w}\|_B = \min \left\{ \sum_{k=1}^2 (\lambda_k^+ - \lambda_k^-) : \mathbf{w} = \sum_{k=1}^2 (\lambda_k^+ \mathbf{g}_k - \lambda_k^- \mathbf{g}_k) \right\}$$

se tiene la aproximación entre el problema:

$$\min_{\mathbf{x}} \sum_{i=1}^n \omega_i \|\mathbf{x} - \mathbf{v}_i\|_p$$

y el de Programación lineal equivalente:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{k=1}^2 (\lambda_{ki}^+ - \lambda_{ki}^-) \\ & \text{sujeto a} && \begin{cases} G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^2 (\lambda_{ki}^+ \mathbf{g}_k - \lambda_{ki}^- \mathbf{g}_k) \\ \text{donde } \lambda_{ki}^+, \lambda_{ki}^- \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \forall k = 1, 2 \\ \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

Este procedimiento añade a las variables  $x_1, x_2$  las adicionales  $\lambda_{ki}^+, \lambda_{ki}^-$  que totalizan  $4n$ . Por lo que el número final de variables será  $4n + 2$  definitivamente. El número de restricciones lineales, sin incluir la no negatividad de las variables, es  $2n$ .

## 6.6 PROGRAMACIÓN LINEAL APROXIMADA.

Desarrollemos el primer método de Programación matemática:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^n \omega_i z_i \\ & \text{sujeto a} && \begin{cases} z_i \geq \mathbf{y} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}) \\ \forall \mathbf{y} \in A^0 \\ \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

La función objetivo es lineal, mientras que las restricciones, lo serán si y sólo si las matrices  $G_\phi^{(i)}$ ,  $\forall i = 1, \dots, n$ , son independientes del ángulo  $\theta_i \equiv \theta_i(\mathbf{x})$ . Esto sólo ocurre cuando  $\frac{2\phi}{\pi} - 1 = 0$ , lo cual implica que  $\phi \equiv \phi(p) = \frac{\pi}{2}$ , sólo cierto para el caso  $p = 1$ , en virtud del lema 2.5.

Tengamos en cuenta que los vectores  $\mathbf{y}^{(k)} \in A^0$ ;  $k = 1, 2, -1, -2$  verifican:

$$\mathbf{y}^{(-k)} = -\mathbf{y}^{(k)}; \forall k = 1, 2$$

y procedamos como sigue:

(1) Reunir las variables en el miembro izquierdo del conjunto de restricciones:

$$z_i + \mathbf{y}^{(k)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{x}) \geq \mathbf{y}^{(k)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i); \forall i = 1, \dots, n; \quad k = \pm 1, \pm 2$$

(2) Cambiar de signo las desigualdades:

$$-z_i - \mathbf{y}^{(k)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{x}) \leq -\mathbf{y}^{(k)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i); \forall i = 1, \dots, n; \quad k = \pm 1, \pm 2$$

(3) Denotar con  $s(i)$ , para cada  $i = 1, \dots, n$ , el superíndice  $k_0$  tal que

$$-\mathbf{y}^{(k_0)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i) \leq 0; \quad \text{y} \quad -\mathbf{y}^{(k_0)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i) \leq -\mathbf{y}^{(k)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i); \quad k = \pm 1, \pm 2$$

Análogamente, sea  $m(i)$ , en cada  $i = 1, \dots, n$ , el superíndice  $k_1$  tal que

$$-\mathbf{y}^{(k_1)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i) \leq 0; \quad \text{y} \quad -\mathbf{y}^{(k_1)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i) \geq -\mathbf{y}^{(k_0)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i)$$

Los superíndices  $m(i)$  y  $s(i)$  permiten ordenar los bloques de restricciones, con lo que el problema queda formulado:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^n \omega_i z_i \\ & \text{sujeto a} && \begin{cases} -z_i \mp \mathbf{y}^{s(i)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{x}) \leq \mp \mathbf{y}^{s(i)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i) \\ -z_i \mp \mathbf{y}^{m(i)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{x}) \leq \mp \mathbf{y}^{m(i)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i) \\ \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \end{aligned}$$

(4) Dado que la matriz  $G_\phi^{(i)}$  es ortogonal, se tiene que:

$$\left(G_\phi^{(i)}\right)^{-1} = \left(G_\phi^{(i)}\right)^T = \begin{pmatrix} \cos\left(\left(1 - \frac{2\phi}{\pi}\right)\theta_i\right) & \text{sen}\left(\left(1 - \frac{2\phi}{\pi}\right)\theta_i\right) \\ -\text{sen}\left(\left(1 - \frac{2\phi}{\pi}\right)\theta_i\right) & \cos\left(\left(1 - \frac{2\phi}{\pi}\right)\theta_i\right) \end{pmatrix}$$

Cada producto escalar se expresa matricialmente:

$$\mathbf{y} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{x}) \equiv Y^T \cdot G_\phi^{(i)} \cdot X = \left( (G_\phi^{(i)})^T \cdot Y \right)^T \cdot X = \left( (G_\phi^{(i)})^{-1} \cdot Y \right)^T \cdot X \equiv (G_\phi^{(i)})^{-1}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{x}$$

Y análogamente para:

$$\mathbf{y} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i) = (G_\phi^{(i)})^{-1}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{v}_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

En  $\mathbb{R}^2$  cada vector  $\mathbf{y} \in A^0$  puede enumerarse:

$$\mathbf{y}^{(k)} = (y_1^{(k)}, y_2^{(k)}); \quad \forall k = 1, 2; -1, -2$$

donde

$$\mathbf{y}^{(-k)} = -\mathbf{y}^{(k)}; \quad \forall k = 1, 2$$

Sin más que operar:

$$(G_\phi^{(i)})^{-1}(\mathbf{y}^{(k)}) = \begin{pmatrix} \cos\left(\left(1 - \frac{2\phi}{\pi}\right)\theta_i\right)y_1^{(k)} + \sin\left(\left(1 - \frac{2\phi}{\pi}\right)\theta_i\right)y_2^{(k)} \\ -\sin\left(\left(1 - \frac{2\phi}{\pi}\right)\theta_i\right)y_1^{(k)} + \cos\left(\left(1 - \frac{2\phi}{\pi}\right)\theta_i\right)y_2^{(k)} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \alpha_{ik} \\ \beta_{ik} \end{pmatrix}$$

Nótese que:  $-(\alpha_{ik} \ \beta_{ik})^T = (\alpha_{i(-k)} \ \beta_{i(-k)})^T$ .

La definición de cada  $\alpha_{ik}$  y  $\beta_{ik}$  lleva implícita la dependencia respecto al vector  $\mathbf{x}$  considerado y respecto al ángulo  $\phi$ , pero no se han representado  $\alpha_{ik}(\mathbf{x}, \phi)$ ,  $\beta_{ik}(\mathbf{x}, \phi)$  para evitar engorros en la notación.

Denominando por

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik}v_{i1} + \beta_{ik}v_{i2}$$

se tiene finalmente que el problema aproximado se define:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \sum_{i=1}^n \omega_i z_i \\ \text{sujeto a} & \begin{cases} -z_i \pm \alpha_{is(i)}x_1 \pm \beta_{is(i)}x_2 \leq \pm \gamma_{is(i)} \\ -z_i \pm \alpha_{im(i)}x_1 \pm \beta_{im(i)}x_2 \leq \pm \gamma_{im(i)} \\ \forall i = 1, \dots, n \end{cases} \end{array}$$

(5) Introducir una variable de holgura positiva para cada restricción  $(i, k)$ ,  $k = \pm s(i), \pm m(i)$ .

Dada la existencia de restricciones análogas que sólo se diferencian en signos, hablaremos explícitamente de las correspondientes a  $k = s(i), m(i)$  (es decir las que tienen término independiente negativo) y daremos por sentado que cada tabla de simplex debe duplicarse en tamaño para acoger el resto de restricciones.

Con la observación anterior, denotaremos  $h_{is}, h_{im} \geq 0$  a las variables positivas de holgura, según el caso. Así, tendremos un problema de programación no lineal (debido a la dependencia de los coeficientes  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}$ , con  $k = s(i), m(i)$ ) respecto al vector  $\mathbf{x}$  considerado, expresado en forma muy similar a la estándar que utiliza el método dual del simplex.

Si suponemos que el origen de coordenadas estuviera situado en el punto  $\mathbf{x}$ , cada argumento  $\varphi_i$  del vector  $\mathbf{x} - \mathbf{v}_i$  sería independiente del punto  $\mathbf{x}$ , con lo que el ángulo  $\theta_i$  que verificaba:

$$\cos(\theta_i) = |\cos(\varphi_i)|; \quad \text{sen}(\theta_i) = |\text{sen}(\varphi_i)|$$

es también independiente, dando valor puramente numérico a los coeficientes  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}$  de la tabla.

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^n \omega_i z_i$$

sujeto a TABLA

|          |          | $z_1$       | $\dots$  | $z_n$       | $h_{11}$ | $\dots$  | $h_{n1}$ | $h_{12}$ | $\dots$  | $h_{n2}$ | $x_1$            | $x_2$           | <b>b</b>         |
|----------|----------|-------------|----------|-------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|------------------|-----------------|------------------|
| $h_{11}$ | 0        | -1          | $\dots$  | 0           | 1        | $\dots$  | 0        | 0        | $\dots$  | 0        | $\alpha_{1s(1)}$ | $\beta_{1s(1)}$ | $\gamma_{1s(1)}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$    | $\ddots$ | $\vdots$    | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$         | $\vdots$        | $\vdots$         |
| $h_{n1}$ | 0        | 0           | $\dots$  | -1          | 0        | $\dots$  | 1        | 0        | $\dots$  | 0        | $\alpha_{ns(n)}$ | $\beta_{ns(n)}$ | $\gamma_{ns(n)}$ |
| $h_{12}$ | 0        | -1          | $\dots$  | 0           | 0        | $\dots$  | 0        | 1        | $\dots$  | 0        | $\alpha_{1m(1)}$ | $\beta_{1m(1)}$ | $\gamma_{1m(1)}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$    | $\ddots$ | $\vdots$    | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$         | $\vdots$        | $\vdots$         |
| $h_{n2}$ | 0        | 0           | $\dots$  | -1          | 0        | $\dots$  | 0        | 0        | $\dots$  | 1        | $\alpha_{nm(n)}$ | $\beta_{nm(n)}$ | $\gamma_{nm(n)}$ |
|          |          | $-\omega_1$ | $\dots$  | $-\omega_n$ | 0        | $\dots$  | 0        | 0        | $\dots$  | 0        | 0                | 0               | 0                |

La solución de este problema  $\mathbf{x}^{(t+1)} = (x_1^{(t+1)}, x_2^{(t+1)})$ , ahora sí de programación lineal origina el desplazamiento que debe tener el vector anterior  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^{(t)}$  para conseguir minimizar la función objetivo. El punto  $\mathbf{x}^{(t)}$  anterior permitió definir las direcciones hacia los puntos de demanda para generar los coeficientes de la tabla.

El nuevo mínimo obtenido  $\mathbf{x}^{(t+1)}$  será el nuevo centro de coordenadas respecto del cual se expresarán los puntos de demanda iniciales, para volver a repetir el proceso hasta que un test de parada ponga fin a la iteración.

Para estandarizar totalmente la tabla, introducimos las variables auxiliares:

$$x_1^+, x_1^- \geq 0; \quad \text{tal que } x_1 = x_1^+ - x_1^-$$

y

$$x_2^+, x_2^- \geq 0; \quad \text{tal que } x_2 = x_2^+ - x_2^-$$

con lo que definitivamente la tabla es:

|          |          | $z_1$       | $\dots$  | $z_n$       | $h_{11}$ | $\dots$  | $h_{n2}$ | $x_1^+$          | $x_2^+$         | $x_1^-$           | $x_2^-$          | <b>b</b>         |
|----------|----------|-------------|----------|-------------|----------|----------|----------|------------------|-----------------|-------------------|------------------|------------------|
| $h_{11}$ | 0        | -1          | $\dots$  | 0           | 1        | $\dots$  | 0        | $\alpha_{1s(1)}$ | $\beta_{1s(1)}$ | $-\alpha_{1s(1)}$ | $-\beta_{1s(1)}$ | $\gamma_{1s(1)}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$    | $\ddots$ | $\vdots$    | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$         | $\vdots$        | $\vdots$          | $\vdots$         | $\vdots$         |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$    | $\ddots$ | $\vdots$    | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$         | $\vdots$        | $\vdots$          | $\vdots$         | $\vdots$         |
| $h_{n2}$ | 0        | 0           | $\dots$  | -1          | 0        | $\dots$  | 1        | $\alpha_{nm(n)}$ | $\beta_{nm(n)}$ | $-\alpha_{nm(n)}$ | $-\beta_{nm(n)}$ | $\gamma_{nm(n)}$ |
|          |          | $-\omega_1$ | $\dots$  | $-\omega_n$ | 0        | $\dots$  | 0        | 0                | 0               | 0                 | 0                | 0                |

La forma de obtener los índices  $s(i)$  y  $m(i)$  asegura que

$$\gamma_{is(i)} \leq \gamma_{im(i)} \leq 0; \forall i = 1, \dots, n$$

por lo que la resolución del problema de programación lineal ha de llevarse a cabo usando el método dual del simplex, a menos que cambiemos de signo las ecuaciones e introduzcamos nuevas variables de holgura.

El método dual del simplex consiste en:

(1) Seleccionar la fila donde se encuentra el mínimo de las términos independientes. Supongamos que sea la primera (si no lo fuera, bastaría reindexar los puntos de demanda):

$$\gamma_{1s(1)} \leq \gamma_{is(i)}; \forall i = 2, \dots, n \quad \text{y} \quad \gamma_{1s(1)} \leq \gamma_{im(i)} \leq 0; \forall i = 1, \dots, n$$

(2) Seleccionar la columna de manera que se obtenga el mínimo entre todos los cocientes positivos con numerador en la última fila y denominador en la fila seleccionada en el paso anterior. Si la fila del paso (1) fue la primera, entonces la columna también será la primera, debido a que sólo hay un cociente que comparar

$$\min\left\{\frac{-\omega_1}{-1}\right\} = \omega_1$$

(3) Pivotando sobre el término que ocupa la posición (fila, columna) seleccionada, se llega a la nueva tabla:

|          |          |          |          |             |             |          |          |         |
|----------|----------|----------|----------|-------------|-------------|----------|----------|---------|
|          |          | $z_1$    | $\dots$  | $z_n$       | $h_{11}$    | $\dots$  | $h_{n2}$ |         |
| $z_1$    | 0        | 1        | $\dots$  | 0           | -1          | $\dots$  | 0        |         |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$    | $\vdots$    | $\ddots$ | $\vdots$ |         |
| $h_{n1}$ | 0        | 0        | $\dots$  | 1           | 0           | $\dots$  | 0        |         |
| $h_{12}$ | 0        | 0        | $\dots$  | 0           | -1          | $\dots$  | 0        | (sigue) |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$    | $\vdots$    | $\ddots$ | $\vdots$ |         |
| $h_{n2}$ | 0        | 0        | $\dots$  | -1          | 0           | $\dots$  | 1        |         |
|          |          | 0        | $\dots$  | $-\omega_n$ | $-\omega_1$ | $\dots$  | 0        |         |

|                                   |                                 |                                   |                                 |                                   |
|-----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|
| $x_1^+$                           | $x_2^+$                         | $x_1^-$                           | $x_2^-$                         | <b>b</b>                          |
| $-\alpha_{1s(1)}$                 | $-\beta_{1s(1)}$                | $+\alpha_{1s(1)}$                 | $+\beta_{1s(1)}$                | $-\gamma_{1s(1)}$                 |
| $\vdots$                          | $\vdots$                        | $\vdots$                          | $\vdots$                        | $\vdots$                          |
| $\alpha_{1m(1)} - \alpha_{1s(1)}$ | $\beta_{1m(1)} - \beta_{1s(1)}$ | $\alpha_{1s(1)} - \alpha_{1m(1)}$ | $\beta_{1s(1)} - \beta_{1m(1)}$ | $\gamma_{1m(1)} - \gamma_{1s(1)}$ |
| $\vdots$                          | $\vdots$                        | $\vdots$                          | $\vdots$                        | $\vdots$                          |
| $\alpha_{nm(n)}$                  | $\beta_{nm(n)}$                 | $-\alpha_{nm(n)}$                 | $-\beta_{nm(n)}$                | $\gamma_{nm(n)}$                  |
| $-\omega_1 \alpha_{1s(1)}$        | $-\omega_1 \beta_{1s(1)}$       | $\omega_1 \alpha_{1s(1)}$         | $\omega_1 \beta_{1s(1)}$        | $-\omega_1 \gamma_{1s(1)}$        |

Con esta transformación, se consigue que la variable  $z_1$  entre en la base y salga  $h_{11}$ . La solución sugerida por la tabla actual:

$$z_1 = -\gamma_{1s(1)}; z_2 = z_3 = \dots = 0; x_1^+ = x_2^+ = x_1^- = x_2^- = 0$$

no puede ser la óptima porque el resto de variables básicas  $h_{21}, \dots, h_{n1}, h_{12}, \dots, h_{n2}$ , son negativas. Tenemos que seleccionar un nuevo mínimo entre los restantes términos de la columna independiente que todavía son negativos:

$$\min\{\gamma_{2s(2)}, \gamma_{3s(3)}, \dots, \gamma_{ns(n)}, \gamma_{2m(2)}, \dots, \gamma_{nm(n)}\} = \min\{\gamma_{2s(2)}, \gamma_{3s(3)}, \dots, \gamma_{ns(n)}\}$$

y repetir las operaciones anteriores.

(4) Al final del proceso, desaparecen de la base las variables de holgura  $h_{i1}$  y son sustituidas por las respectivas  $z_i$ ;  $\forall i = 1, \dots, n$ .

La columna independiente sólo tiene términos positivos donde los  $n$  primeros

$$\{-\gamma_{1s(1)}, -\gamma_{2s(2)}, \dots, -\gamma_{ns(n)}\}$$

son mayores que los  $n$  últimos:

$$\{\gamma_{1m(1)} - \gamma_{1s(1)}, \gamma_{2m(2)} - \gamma_{2s(2)}, \dots, \gamma_{nm(n)} - \gamma_{ns(n)}\}$$

por lo que, en caso de iterar alguna vez más sobre la tabla, la variable que saldrá de la base será una de las de holgura (permaneciendo las  $z_i$  de la función objetivo).

La siguiente tabla no recoge las variables de holgura  $h_{i1}$ ;  $\forall i = 1, \dots, n$ , que fueron excluidas de la base y que, en la última fila, tienen coeficientes negativos  $-\omega_i$ ;  $\forall i = 1, \dots, n$ , respectivamente:

|          |            |          |          |          |          |          |          |         |
|----------|------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------|
|          |            | $z_1$    | $\dots$  | $z_n$    | $h_{12}$ | $\dots$  | $h_{n2}$ |         |
| $z_1$    | $\omega_1$ | 1        | $\dots$  | 0        | 0        | $\dots$  | 0        |         |
| $\vdots$ | $\vdots$   | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |         |
| $z_n$    | $\omega_n$ | 0        | $\dots$  | 1        | 0        | $\dots$  | 0        |         |
| $h_{12}$ | 0          | 0        | $\dots$  | 0        | 1        | $\dots$  | 0        | (sigue) |
| $\vdots$ | $\vdots$   | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |         |
| $h_{n2}$ | 0          | 0        | $\dots$  | 0        | 0        | $\dots$  | 1        |         |
|          |            | 0        | $\dots$  | 0        | 0        | $\dots$  | 0        |         |

|   |  |   |  |   |
|---|--|---|--|---|
| $x_1^+$                                 | $x_2^+$                                | $x_1^-$                                 | $x_2^-$                                | <b>b</b>                                |
| $-\alpha_{1s(1)}$                       | $-\beta_{1s(1)}$                       | $\alpha_{1s(1)}$                        | $\beta_{1s(1)}$                        | $-\gamma_{1s(1)}$                       |
| $\vdots$                                | $\vdots$                               | $\vdots$                                | $\vdots$                               | $\vdots$                                |
| $-\alpha_{ns(n)}$                       | $-\beta_{ns(n)}$                       | $\alpha_{ns(n)}$                        | $\beta_{ns(n)}$                        | $-\gamma_{ns(n)}$                       |
| $\alpha_{1m(1)} - \alpha_{1s(1)}$       | $\beta_{1m(1)} - \beta_{1s(1)}$        | $\alpha_{1s(1)} - \alpha_{1m(1)}$       | $\beta_{1s(1)} - \beta_{1m(1)}$        | $\gamma_{1m(1)} - \gamma_{1s(1)}$       |
| $\vdots$                                | $\vdots$                               | $\vdots$                                | $\vdots$                               | $\vdots$                                |
| $\alpha_{nm(n)} - \alpha_{ns(n)}$       | $\beta_{nm(n)} - \beta_{ns(n)}$        | $\alpha_{ns(n)} - \alpha_{nm(n)}$       | $\beta_{ns(n)} - \beta_{nm(n)}$        | $\gamma_{nm(n)} - \gamma_{ns(n)}$       |
| $-\sum_{i=1}^n \omega_i \alpha_{is(i)}$ | $-\sum_{i=1}^n \omega_i \beta_{is(i)}$ | $+\sum_{i=1}^n \omega_i \alpha_{is(i)}$ | $+\sum_{i=1}^n \omega_i \beta_{is(i)}$ | $-\sum_{i=1}^n \omega_i \gamma_{is(i)}$ |

**Teorema 6.9**

Si se verifica para un cierto  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  que los coeficientes  $\alpha_{ik} = \alpha_{ik}(\mathbf{x}, \phi)$  y  $\beta_{ik} = \beta_{ik}(\mathbf{x}, \phi)$  verifican las condiciones:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \omega_i \alpha_{is(i)} = 0 \\ \sum_{i=1}^n \omega_i \beta_{is(i)} = 0 \end{cases}$$

donde  $s(i)$  es, para cada  $i = 1, \dots, n$ , el superíndice  $k_0$  tal que

$$\mathbf{y}^{(k_0)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i) \leq 0; \quad \text{y} \quad \mathbf{y}^{(k_0)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i) \leq \mathbf{y}^{(k)} \cdot G_\phi^{(i)}(\mathbf{v}_i); \quad k = \pm 1, \pm 2,$$

entonces  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  es la solución óptima del problema discreto aproximado en el sentido del  $\phi$ -sesgo.

**Demostración.**

Compruébese que la correspondiente tabla del simplex verifica poseer todos los términos nulos o negativos en su última fila.

q.e.d.

En el caso de que no se den las condiciones de optimalidad, alguna de las sumas

$$\begin{cases} \pm \sum_{i=1}^n \omega_i \alpha_{is(i)} > 0 \\ \text{o bien} \\ \pm \sum_{i=1}^n \omega_i \beta_{is(i)} > 0 \end{cases}$$

será positiva, y por tanto la solución factible actual

$$z_1 = -\gamma_{1s(1)}, \dots, z_n = -\gamma_{ns(n)}; \quad x_1^+ = x_2^+ = x_1^- = x_2^- = 0$$

no será la óptima. Necesariamente, habrá que iterar en la tabla una vez más, sacando de la base una de las variables de holgura  $h_{12}, \dots, h_{n2}$  e introduciendo alguna de las  $x_1^+, x_2^+, x_1^-, x_2^-$ . El signo contrario entre parejas de coeficientes de la última fila de la tabla indica que si, por ejemplo,  $x_1^+$  entra en la base (su coeficiente era positivo), entonces  $x_1^-$  no podrá entrar también ya que su coeficiente fue negativo. Esta mutua exclusión, hace que el avance desde la iteración  $\mathbf{x}^{(t)}$  hasta  $\mathbf{x}^{(t+1)} = \mathbf{x}^{(t)} + (x_1, x_2)$ , se haga hacia el cuadrante cuyos coordenadas tienen los signos de las variables que entraron en la base.

Para el último tramo del razonamiento, reduzcamos la tabla a la mitad y cambiemos la notación para simplificarla. Sean:

$$a_i = \alpha_{im(i)} - \alpha_{is(i)}, \quad b_i = \beta_{im(i)} - \beta_{is(i)}, \quad c_i = \gamma_{im(i)} - \gamma_{is(i)}; \quad \forall i = 1, \dots, n$$

y las respectivas sumas

$$\alpha = -\sum_{i=1}^n \omega_i \alpha_{is(i)}, \quad \beta = -\sum_{i=1}^n \omega_i \beta_{is(i)}, \quad \gamma = -\sum_{i=1}^n \omega_i \gamma_{is(i)}$$



Con lo que la parte de la tabla que nos interesa es:

|          |          |          |          |          |          |          |           |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|----------|----------|
|          |          | $h_{12}$ | $\cdots$ | $h_{n2}$ | $x_1^+$  | $x_2^+$  | $x_1^-$   | $x_2^-$  | <b>b</b> |
| $h_{12}$ | 0        | 1        | $\cdots$ | 0        | $a_1$    | $b_1$    | $-a_1$    | $-b_1$   | $c_1$    |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $h_{n2}$ | 0        | 0        | $\cdots$ | 1        | $a_n$    | $b_n$    | $-a_n$    | $-b_n$   | $c_n$    |
|          |          | 0        | $\cdots$ | 0        | $\alpha$ | $\beta$  | $-\alpha$ | $-\beta$ | $\gamma$ |

Esta fase final utiliza el método primal del simplex. Para ello, supongamos que  $\alpha \geq \beta > 0$ , y que

$$\min_{i=1, \dots, n} \{c_i/a_i : a_i > 0, c_i > 0\} = c_1/a_1$$

En este contexto, la variable  $x_1^+$  entraría en la base y saldría la variable de holgura  $h_{21}$ . Quedando una nueva tabla tras el pivoteo correspondiente:

|          |          |               |          |          |          |                          |          |                           |                           |
|----------|----------|---------------|----------|----------|----------|--------------------------|----------|---------------------------|---------------------------|
|          |          | $h_{12}$      | $\cdots$ | $h_{n2}$ | $x_1^+$  | $x_2^+$                  | $x_1^-$  | $x_2^-$                   | <b>b</b>                  |
| $x_1^+$  | 0        | $1/a_1$       | $\cdots$ | 0        | 1        | $b_1/a_1$                | -1       | $-b_1/a_1$                | $c_1/a_1$                 |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$      | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$                 | $\vdots$ | $\vdots$                  | $\vdots$                  |
| $h_{n2}$ | 0        | $-a_n/a_1$    | $\cdots$ | 1        | 0        | $b_n - a_n b_1/a_1$      | 0        | $-b_n + a_n b_1/a_1$      | $c_n - a_n c_1/a_1$       |
|          |          | $-\alpha/a_1$ | $\cdots$ | 0        | 0        | $\beta - \alpha b_1/a_1$ | 0        | $-\beta + \alpha b_1/a_1$ | $\gamma - \alpha c_1/a_1$ |

De nuevo estamos ante una solución factible, que será óptima en el caso de  $\beta - \alpha b_1/a_1 = 0$ , y en otro caso, renombrando:

$$b_1^* = b_1/a_1, b_i^* = b_i - a_i b_1/a_1; \forall i = 2, \dots, n$$

junto con

$$c_1^* = c_1/a_1, c_i^* = c_i - a_i c_1/a_1; \forall i = 2, \dots, n$$

y los respectivos términos de la última fila:

$$\beta^* = \beta - \alpha b_1/a_1, \gamma^* = \gamma - \alpha c_1/a_1$$

tenemos la última tabla previa a la obtención de la solución óptima.

|          |          |               |          |          |          |           |          |            |            |
|----------|----------|---------------|----------|----------|----------|-----------|----------|------------|------------|
|          |          | $h_{12}$      | $\cdots$ | $h_{n2}$ | $x_1^+$  | $x_2^+$   | $x_1^-$  | $x_2^-$    | <b>b</b>   |
| $x_1^+$  | 0        | $1/a_1$       | $\cdots$ | 0        | 1        | $b_1^*$   | -1       | $-b_1^*$   | $c_1^*$    |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$      | $\ddots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$  | $\vdots$ | $\vdots$   | $\vdots$   |
| $h_{n2}$ | 0        | $-a_n/a_1$    | $\cdots$ | 1        | 0        | $b_n^*$   | 0        | $-b_n^*$   | $c_n^*$    |
|          |          | $-\alpha/a_1$ | $\cdots$ | 0        | 0        | $\beta^*$ | 0        | $-\beta^*$ | $\gamma^*$ |

La entrada en la base de la variable  $x_2^+$  en sustitución de alguna de las variables de holgura  $h_{2i}$  hace que se llegue a la solución óptima. Si la sustitución de  $x_2^+$  en la base es a costa de  $x_1^+$ , entonces estamos de nuevo en el paso anterior. Este ciclo no se puede repetir indefinidamente debido a que el correspondiente término de la columna independiente irá rebajándose a cada iteración y, en virtud de la propiedad arquimediana de los números reales, la salida del aparente ciclo está asegurada.

El siguiente algoritmo recoge el proceso de iteración, basado en programación lineal, que aproxima el problema de Weber con  $l_p, p \in [1, 2)$ .

**ALGORITMO III**

**Método Iterativo Aproximado para el Problema de Weber con  $l_p$ ,  $p \in [1, 2)$ .**

**begin**

1. **read**

$$p \in [1, 2)$$

puntos  $\mathbf{v}_i = (v_{i1}, v_{i2})$  y pesos  $\omega_i > 0$ ;  $i = 1, \dots, n$

$\epsilon > 0$  (para el test de parada)

2. **compute**

$$\phi = 2 \cdot \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\mathbf{y}^{(\pm 1)} = (\pm 1, \pm \tan(\phi/2))$$

$$\mathbf{y}^{(\pm 2)} = (\mp 1, \pm \frac{1}{\tan(\phi/2)})$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \left( \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i v_{i1}}{\sum_{i=1}^n \omega_i}, \frac{\sum_{i=1}^n \omega_i v_{i2}}{\sum_{i=1}^n \omega_i} \right)$$

$$t = 0$$

3. **(LOOP) for cada punto  $\mathbf{v}_i$  do**

3.1. **compute**

$$r_i = \|\mathbf{v}_i - \mathbf{x}^{(t)}\|_2; \varphi_i = \text{Arg}(\mathbf{v}_i - \mathbf{x}^{(t)})$$

$$\theta_i = \varphi_i + (2\phi/\pi - 1) \text{Mod}(\varphi_i, \pi/2)$$

Sea  $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, a_{i2})$ ;  $a_{i1} = r_i \cos \theta_i$ ,  $a_{i2} = r_i \sin \theta_i$

$$\theta_i = (1 - 2\phi/\pi) \text{Mod}(\arg(\mathbf{a}_i), \pi/2)$$

3.2. **for  $k = \pm 1, \pm 2$  do**

$$\alpha_{ik} = -y_1^{(k)}; \beta_{ik} = -y_2^{(k)}$$

$$\gamma_{ik} = \alpha_{ik} a_{i1} + \beta_{ik} a_{i2}$$

3.3. **compute**

$s(i) =$  índice del menor  $\gamma_{ik}$ ;  $m(i) =$  índice del segundo menor  $\gamma_{ik}$

$$b_{i1} = \alpha_{im(i)} - \alpha_{is(i)}; b_{(n+i)1} = -\alpha_{im(i)} - \alpha_{is(i)}; b_{(2n+i)1} = -2\alpha_{is(i)}$$

$$b_{i2} = \beta_{im(i)} - \beta_{is(i)}; b_{(n+i)2} = -\beta_{im(i)} - \beta_{is(i)}; b_{(2n+i)2} = -2\beta_{is(i)}$$

$$b_{i3} = -b_{i1}; b_{(n+i)3} = -b_{(n+i)1}; b_{(2n+i)3} = -b_{(2n+i)1}$$

$$b_{i4} = -b_{i2}; b_{(n+i)4} = -b_{(n+i)2}; b_{(2n+i)4} = -b_{(2n+i)2}$$

$$b_{i5} = \gamma_{im(i)} - \gamma_{is(i)}; b_{(n+i)5} = -\gamma_{im(i)} - \gamma_{is(i)}; b_{(2n+i)5} = -2\gamma_{is(i)}$$

4. **compute**

$$b_{(n+1)1} = -\sum_{i=1}^n \omega_i \alpha_{is(i)}; b_{(n+1)3} = -b_{(n+1)1}$$

$$b_{(n+1)2} = -\sum_{i=1}^n \omega_i \beta_{is(i)}; b_{(n+1)4} = -b_{(n+1)2}$$

$$b_{(n+1)5} = -\sum_{i=1}^n \omega_i \gamma_{is(i)}$$

5. **If  $b_{(n+1)1} = b_{(n+1)2} = 0$  then soluc. :=  $\mathbf{x}^{(t)}$ ; go to END else**

5.1. **compute SIMPLEX** de matriz  $b_{ik}$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $k = 1, \dots, 5$

(la última columna son restricciones  $\leq$ ), obteniéndose  $\Delta \mathbf{x} = (x_1 - x_3, x_2 - x_4)$ .

5.2. **compute soluc. :=  $\mathbf{x}^{(t)} + \Delta \mathbf{x}$**

5.3. **If  $\|\Delta \mathbf{x}\| < \epsilon$  then go to END**

**else compute  $t := t + 1$ ;  $\mathbf{x}^{(t)} = \text{soluc.}$ ; go to LOOP**

6. (END) Print la solución aproximada es soluc. end.

### 6.7 UN EJEMPLO.

Hemos probado el algoritmo con el ejemplo publicado en Love, Morris y Wesolowsky [1988], página 26, donde se resuelve el problema de Weber en el plano para cinco puntos y  $p = 1.5$ . El proceso iterado del algoritmo de Weiszfeld se puede seguir visualmente en la figura Fig. [6.2].

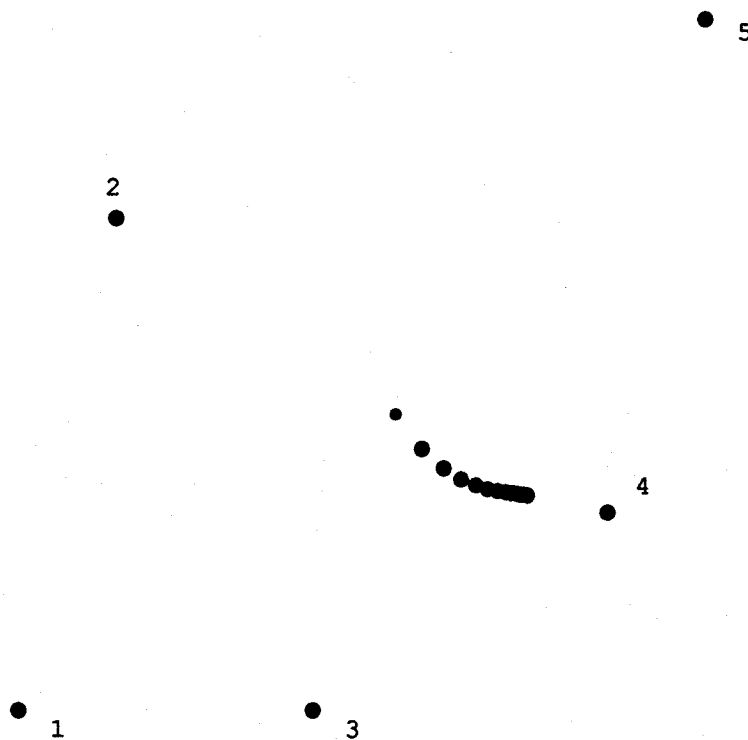


Fig. [6.2]: Proceso iterado de Weiszfeld.

La convergencia es sin embargo algo lenta, como lo demuestra la tabla en la página citada. Comparando dicha tabla con la que resulta de aplicar el **algoritmo III**

| núm. iter. | puntos             | Soluc. Factible Inic. | Soluc. Simplex | $W_p(\mathbf{x})$ |
|------------|--------------------|-----------------------|----------------|-------------------|
| 0          | (4.84615, 4.)      | .                     | .              | 54.849            |
| 1          | (6.33583, 2.44167) | 72.5125               | 63.2232        | 55.4132           |
| 2          | (7.05809, 2.9225)  | 67.9879               | 65.2681        | 53.8567           |
| 3          | (7.00826, 3.00555) | 67.4647               | 66.1993        | 53.0962           |
| 4          | (6.99951, 3.0008)  | 66.0822               | 66.0217        | 53.029            |
| 5          | (6.99993, 2.99996) | 66.0092               | 66.0049        | 53.0286           |
| 6          | (7., 2.99999)      | 66.0066               | 66.0064        | 53.0285           |
| 7          | (7., 3.)           | 66.0066               | 66.0065        | 53.0285           |

vemos que en cada iteración, salvo la primera cuya elección fue hecha por ser el centro de gravedad del sistema, se rebaja el valor de  $W_p(\mathbf{x})$ . En cada paso, mediante programación lineal se minimiza la función lineal aproximadora tomando como origen de coordenadas el punto de la iteración anterior. El descenso para la función de Weber con normas bloque se verifica en la columna de soluciones factibles iniciales. La resolución de cada problema de programación lineal consigue rebajar la función objetivo y encontrar un nuevo punto donde realizar la siguiente iteración. No se garantiza el descenso en la columna de soluciones finales, ya que éstas sólo dependen del planteamiento inicial en cada paso. Sin embargo, la función de Weber con normas  $l_p$ , al estar mayorada por la función de Weber con normas bloque, descenderá en cada iteración acompañando a su aproximación (*arrastrada* por su aproximación mayorante).

La convergencia del proceso es rápida. En las primeras iteraciones se consiguen resultados tan buenos como los que logra el algoritmo de Weiszfeld más adelante (ver tabla 2.6a en Love, Morris y Wesolowsky [1988]). En la cercanía de la solución, este método no es *fino*, quedando atrapado debido a que la *guía* que representa la norma bloque aproximada no encuentra una mejora de su propia función objetivo.

Comparativamente con el método de resolución que emplea aproximación hiperbólica (ver tabla 2.6b en Love, Morris y Wesolowsky [1988]) para  $\epsilon = 0.01$ , hay que señalar que el valor de la función de Weber al cabo de 30 iteraciones sólo fue 53.107, mientras que con el método presentado en este trabajo se logra un valor inferior a ése para la función de Weber a partir de la tercera iteración.

## REFERENCIAS

- Aho A.V., J.E. Hopcroft y J.D. Ullman (1974). "The Design and Analysis of Computer Algorithms". *Addison-Wesley*. Reading, MA (EEUU).
- Belitskii G.R. y Y.I. Lyubich (1988). "Matrix Norms and their Applications". *Birkhäuser Verlag*. Berlín (Alemania).
- Berens W. (1988). "The Suitability of the Weighted  $l_p$  Norm in Estimating Actual Road Distances". *European Journal of Operational Research* **34**, 39–43.
- Brimberg J. (1995). "The Fermat-Weber Location Problem Revisited". *Math. Progr.* **71**, 71–76.
- Brimberg J. y R.F. Love (1991). "Estimating Travel Distances by the Weighted  $l_p$  Norm". *Naval Research Logistics* **38**, 241–259.
- Brimberg J. y R.F. Love (1992 a). "A New Distance Function for Modeling Travel Distances in a Transportation Network". *Transportation Science* **26**, 129–137.
- Brimberg J. y R.F. Love (1992 b). "Local Convergence in a Generalized Fermat-Weber Problem". *Annals of Operations Research* **40**, 33–66.
- Brimberg J. y R.F. Love (1993 a). "General Considerations on the Use of the Weighted  $l_p$  Norm as an Empirical Distance Measure". *Transportation Science* **27**, 341–349.
- Brimberg J. y R.F. Love (1993 b). "Directional Bias of the  $l_p$ -Norm". *European Journal of Operational Research* **67**, 287–294.
- Brimberg J. y R.F. Love (1995). "Properties of Ordinary and Weighted Sums of Order  $p$  Used for Distance Estimation". *Recherche Operationnelle / Operations Research* **29**, 59–72.
- Brimberg J. y G.O. Wesolowsky (1992). "Probabilistic  $l_p$  Distances in Location Models". *Annals of Operations Research* **40**, 67–75.
- Buckley F. y F. Harary (1990). "Distance in Graphs". *Addison-Wesley*. Reading, MA (EEUU).
- Burden R.L. y J.D. Faires (1985). "Análisis Numérico". *Grupo Editorial Iberoamericana S.A.* México D.F. (México).
- Cánovas L. (1994). "El problema del  $k$ -centro en  $\mathbb{R}^n$  con normas  $l_{pb}$  estrictas". *Tesis Doctoral*. *Universidad de Murcia*. Murcia (España).

- Chandrasekaran R. y A. Tamir (1989). "Open questions concerning Weiszfeld's algorithm for the Fermat-Weber location problem". *Math. Progr.* **44**, 293–295.
- Durier R. y C. Michelot (1985). "Geometrical Properties of the Fermat-Weber Problems". *European Journal of Operational Research* **20**, 332–343.
- Harary F. (1969). "Graph Theory". *Addison-Wesley*. Reading, MA (EEUU).
- Hiriart-Urruty J-B. y C. Lemaréchal (1993). "Convex Analysis and Minimization Algorithms". *Springer-Verlang*. New York (EEUU).
- Hwang F. K. (1991). "A Primer of the Euclidean Steiner Problem". *Annals of Operations Research* **33**, 73–84.
- Katz I.N. (1974). "Local convergence in Fermat's problem". *Math. Progr.* **6**, 89–104.
- Kuhn H.W. (1973). "A note on Fermat's problem". *Math. Progr.* **4**, 98–107.
- Krasnov M.L., G.I. Makarenko y A.I. Kiseliiov (1992). "Cálculo Variacional". *Mir*. Moscú (Rusia).
- Larson R.C. y A.R. Odoni (1981). "Urban Operations Research". *Prentice-Hall*. Princeton, New Jersey (EEUU).
- Love R.F. y J.G. Morris (1972). "Modelling inter-city road distances by mathematical functions". *Oper. Res. Quarterly* **23**, 61–71.
- Love R.F. y J.G. Morris (1979). "Mathematical models of road travel distances". *Manag. Sci.* **25**, 130–139.
- Love R.F. y P.D. Dowling (1985). "Optimal Weighted  $l_p$  Norm Parameters for Facilities Layout Distance Characterizations". *Manag. Sci.* **31**, 200–206.
- Love R.F. y J.G. Morris (1988). "On Estimating Road Distances by Mathematical Functions". *European Journal of Operational Research* **36**, 251–253.
- Love R.F., J.G. Morris y G.O. Wesolowsky (1988). "Facilities Location: Models and Methods". *North-Holland*. New York (EEUU).
- Love R.F. y J.H. Walker (1994). "An Empirical Comparison of Block and Round Norms for Modeling Actual Distances". *Location Science* **2**, 1, 21–43.
- Maravall D. (1965). "Geometría Analítica y Proyectiva del Plano". *Dossat S.A.* Madrid (España).
- Miehle W. (1958). "Link-length minimization in networks". *Oper. Res.* **6**, 232–243.

- Morris J.G. (1981). "Convergence of the Weiszfeld Algorithm for Weber Problems Using a Generalized Distance Function". *Oper. Res.* **29**, 37–48.
- Mosler K.C. (1987). "Continuous Location of Transportation Networks". *Springer-Verlag*. Berlín (Alemania).
- Muñoz M. y J. Puerto (1996). "Problemas de Localización Estocástica Continua". *Lecturas en Teoría de Localización*, 167–195. Universidad de Sevilla. Sevilla (España).
- Nickel S. (1995). "Discretization of Planar Location Problems". *Diploma Thesis, Department of Mathematics. University of Kaiserslautern. Verlag Shaker*. Aachen (Alemania).
- Okabe A., B. Boots y K. Sugihara (1992). "Spatial Tessellations Concepts and Applications of Voronoi Diagrams". *Wiley*. New York (EEUU).
- Ortega F.A. (1995). "Estimación de distancias ponderadas  $l_p$  en contexto urbano", *Actas del Seminario en Teoría de Localización*, 65–81. Universidad de Sevilla. Sevilla (España).
- Ostresh L.M. (1978). "On the convergence of a class of iterative methods for solving the Weber location problem". *Oper. Res.* **26**, 597–609.
- Peeters D. and I. Thomas (1993). "The Effect of the Spatial Structure on Location-Allocation Results". *Studies in Locational Analysis* **4**, 237–240.
- Plastria F. (1992). "A Majority Theorem for Fermat-Weber Problems in Quasimetric Spaces with Applications to Semidirected Networks". *Proceedings of the VIth meeting of the EWGLA. Puerto de la Cruz. Tenerife (España)*.
- Plastria F. (1993 a). "Continuous Location Anno 1992; a Progress Report". *Studies in Locational Analysis* **5**, 85–128.
- Plastria F. (1993 b). "On Destination Optimality in Assymmetric Distance Fermat-Weber Problems". *Annals of Operations Research* **40**, 355–369.
- Rockafellar R.T. (1970). "Convex Analysis". *University Press*. Princeton, New Jersey (EEUU).
- Ward J.E. y R.E. Wendell (1980). "A New Norm for Measuring Distance which Yields Linear Location Problems". *Operations Research* **28**, 836–844.
- Ward J.E. y R.E. Wendell (1985). "Using Block Norms for Location Modeling". *Operations Research* **33**, 1074–1090.
- Weiszfeld E. (1937). "Sur le point le quel la somme des distances de  $n$  points donnés est minimum". *Tohoku Math. J.* **43**, 355–386.

- Widmayer P., Y. F. Yu y C.K. Wong (1987). "On Some Distance Problems in Fixed Orientations". *SIAM J. Comput.* **16**, 4, 728-746.
- Witzgall C.J. (1965). "Optimal Location of a Central Facility: Mathematical Models and Concepts". *Technical Report 8388, National Bureau of Standards*. Washington, D.C. (EEUU).
- Wolfram S. (1991). "Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer". *Addison-Wesley*. Reading, MA (EEUU).



Francisco A. Ortega Rojas  
localidad con y tamaño de  
redes

APTO Com. Llanos

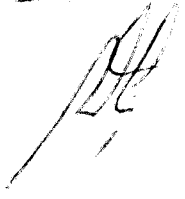
13 Junio

97

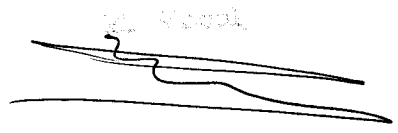
El Vocal



El Presidente



El Secretario



El Doctorado

