UNIVERSIDAD DE SEVILLA

"ESPACIOS DE SUCESIONES Y SUMABILIDAD DE ABEL"

V°B°Catedrático Director

Fdo.D.Pedro Pérez Carreras
Catedrático de Matemáticas I
de la E.S.I.I.de Valencia

Memoria que presenta
D.Jesús Mario Bilbao Arrese
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

Fdo.Jesús Mario Bilbao Arrese.

V°B°Catedrático Ponente.

Fdo.D.Antonio de Castro Brzezicki. Catedrático de la Facultad de Ciencias de Sevilla.

Mi sincero agradecimiento al Prof.Dr.D. Pedro Pérez Carreras a quien, además de su constante orientación y estímulo en la elaboración de esta memoria, debo gran parte de mi formación.

A Niels Henrik Abel (1802-1829)

CONTENIDO

INTRODUCCION

Una sucesión de números reales o complejos $(x_i)=(x_0,x_1,\ldots)$ es sumable Abel a s cuando la serie de potencias $f(\rho)=\sum_{i=0}^{+\infty} x_i\rho^i$ converge para $0 \leq \rho < 1$ y existe $\lim_{\rho\to 1^-} f(\rho)=s$. Sea $(s_i)=(s_0,s_1\ldots)$ la sucesión de sumas parciales de (x_i); como $f(\rho)=(1-\rho)\sum_{i=0}^{+\infty} s_i\rho^i$; diremos que la sucesión (s_i) converge en sentido de Abel a s cuando existe $\lim_{\rho\to 1^-}(1-\rho)\sum_{i=0}^{+\infty} s_i\rho^i = s$.

N.H. Abel [1] demuestra, en 1826,:"Si la serie de potencias $f(\rho) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i\rho^i$ tiene radio de convergencia 1 y además existe $f(1)$, entonces existe $\lim_{\rho\to 1^-} f(\rho)=f(1)$".

Como consecuencia de este teorema de Abel todas las sucesiones sumables en sentido ordinario son sumables Abel al mismo número, y el método de Abel es regular.

En 1879, G.Frobenius [9], estudiando las sucesiones (x_i) tales que existe $\lim_{i\to+\infty} \frac{s_0+s_1+.+s_i}{i+1}$; que posteriormente E.Cesáro [5] definiría como sucesiones sumables Cesáro de orden 1:(C,1); establecía el siguiente resultado: "Si $f(\rho)=\sum_{i=0}^{+\infty} x_i\rho^i$ tiene radio de convergencia 1 y además existe $\lim_{i\to+\infty} \frac{s_0+s_1+..+s_i}{i+1} = s$; entonces existe $\lim_{\rho\to 1^-} f(\rho) = s$". Frobenius había probado que toda sucesión sumable (C,1) es sumable Abel.

Posteriormente O.Hölder [15], generaliza este resultado en 1882 para las medias aritméticas: $h_i^{(0)}= s_i,(i=0,1,\ldots),h_i^{(k)} = \frac{h_0^{(k-1)}+ h_1^{(k-1)}+..+ h_i^{(k-1)}}{i+1}$ $(i=0,1,..)$ con enteros $k\geq 1$, demostran do que, en las condiciones del teorema de Frobenius, la existencia de $\lim\limits_{i\to+\infty} h_i^{(k)} = s$ para algún $k \geq 1$ implica la existencia de $\lim\limits_{\rho\to 1^-} f(\rho) = s$.

En esta memoria estudiamos la dualidad que determina en los espacios de sucesiones la sumabilidad de Abel. Este concepto de dualidad, la ρ-dualidad, ha sido analizado por J.A.Antonino, en su memoria [2], utilizando métodos de invariancia. Posteriormente M.Florencio establece, en la memoria [8], la teoría de la C-dualidad dada por la sumabilidad de Césaro (C,1).

Nuestro estudio tiene pocos puntos de contacto con [2] y sigue la linea clásica de G.Köthe [18] para el estudio de la α-dualidad y las modificaciones a esta linea dadas por M.Florencio en [8], para el estudio de la C-dualidad.

En el primer capítulo se analiza el espacio base de nuestro estudio, formado por todas las sucesiones de números reales o complejos que son sumables Abel, que denominamos (sa). A diferencia de las demás dualidades los resultados clásicos que caracterizan los factores de sumabilidad de las sucesiones sumbles Abel están estrechamente relacionados con la topologia dada al espacio (sa). El primer estudio de dicho espacio es debido a S.Sidón [25] que sólo obtiene un resultado parcial. Posteriormente, K.Zeller [29] estudia las propiedades más importantes de este espacio, pero las pruebas de ellas no obran en la literatura, por lo que las pruebas aquí presentadas han sido dadas por nosotros. En el citado capítulo probamos que (sa) es un (FK)-espacio, que las secciones de cualquier elemento de (sa), convergen en el sentido de Abel al elemento del que provienen y que su dual topologico coincide con su ρ-dual. Estos resultados sustentan todo el desarrollo posterior.

En el segundo capítulo, trás obtener propiedades algebraicas para la ρ-dualidad similares a las que se verifican para la α-dualidad, se analizan las propiedades de espacios de sucesiones λ dotados de la topologia $\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})$. La topologización de los espacios de sucesiones λ y su ρ-dual λ^{ρ} mediante una sucesión fundamental de equicontinuos del dual topológico de (sa) nos proporciona resultados de completitud y separabilidad similares a los que se cumplen en la α-dualidad. Denominando a estas topológícas $\tau_{\rho}(\lambda,\lambda^{\rho})$ y $\tau_{\rho}(\lambda^{\rho},\lambda)$ obtenemos que el espacio $\lambda^{\rho}[\tau_{\rho}(\lambda^{\rho},\lambda)]$ es completo y un teorema de caracterización: "Un espacio de sucesiones $\lambda\supset\varphi$ es ρ-perfecto si y solo si $\lambda[\tau_{\rho}(\lambda,\lambda^{\rho})]$ es completo". Este resultado nos hace suponer que las ρ-topologias tienen, en el análisis de la ρ-dualidad, un papel similar al de las topologias normales en la α-dualidad. A continuación se establece la equivalencia de los subconjuntos compactos, numerablemente compactos y sucesionalmente compactos para topologias del par dual (λ,λ^{ρ}). Para analizar los subconjuntos relativamente compactos de (sa) se han establecido propiedades de aproximación en los compactos de (sa), mediante las cuales probamos:"Sea $C\subset$ sa, acotado. C es relativamente compacto en sa, si y solo si para toda $j\in N$ se verifican:

$$\lim_{t\to 1^-}\ \sup_{x\in C}\ \{(\|\ \| + q_j)(x-(x_i.t^i))\} = 0 \qquad y$$

$$\lim_{n\to+\infty}\ \sup_{x\in C}\ \{(\|\ \|+ q_j)((x_i t^i)-\sum_{i=0}^{n} x_i t^i e_i)\}= 0$$

para cada $t\in(0,1)$ fijo".

Mediante esta caracterización obtenemos una condición suficiente para que una clase de aplicación lineales y continuas de (sa) en (sa) sean compactas. Una vez establecidas propiedades de completitud y separabilidad para espacios de sucesiones dotados de la topologia de Mackey del par dual (λ,λ^{ρ}), obtenemos un teorema que caracteriza los espacios de sucesiones tonelados similar al dado por G.Kothe en ([18],pag.417). De dicho teorema obtetemos condiciones para la reflexividad y semireflexividad. Por último, se introducen los espacios que llamaremos ρ-escalonados

$$\lambda_{\rho}=\{x\in\omega:(\alpha_i^{(n)}x_i)\in sa,\ n=1,2,\dots\}$$

con la sucesión de escalones $\{\alpha_i^{(n)}\}_{n=1,2\dots}$ verificando determinadas condiciones. Dotamos al espacio vectorial λ_{ρ} de la topologia dada por la familia numerable de normas:

$$(\|\ \| + q_j)^{(n)}(x)=(\|\ \| +q_j)(\alpha_i^{(n)}x_i)),\ x\in\lambda_{\rho}\ ,\ n=1,2\dots;\ j=1,2,\dots$$

donde la sucesión de normas: $\{(\|\ \|+q_j)\}_{j=1,2..}$ es la que proporciona la topologia del espacio (sa). Damos una prueba directa de que λ_{ρ} dotado de dicha topologia es un (FK)-espacio y que esta topologia coincide con la $\tau_{\rho}(\lambda_{\rho},\lambda_{\rho}^{\rho})$; lo cual nos permite obtener directamente un conjunto de propiedades de λ_{ρ}. Dando condiciones al sistema de escalones obtenemos ρ-escalones que coinciden con los escalonados de Kothe.

NOTACIONES Y TERMINOLOGIA

Denotaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, y $\mathbb{C}$, a los conjuntos de números naturales, racionales, reales y complejos. Mediante $\mathbb{K}$ se denotará el cuerpo de los reales o complejos.

Los espacios vectoriales están definidos sobre $\mathbb{K}$. Para los subconjuntos A de un espacio vectorial, denotaremos por $[A]$ su envoltura lineal y por $\Gamma(A)$ su envoltura absolutamente convexa. El espacio vectorial de todas las sucesiones $x=(x_i)=(x_0,x_1,\ldots)$ con coordenadas en $\mathbb{K}$ se denomina ω y todo subespacio vectorial de ω se llama un espacio de sucesiones. Mediante 1^1 y 1^∞ representamos a los subespacios vectoriales de ω que forman las sucesiones absolutamente sumables y acotadas. Dadas dos sucesiones $x,y\in\omega$, escribimos $(x,y)=(x_i.y_i)_{i=0,1,\ldots}$

Si λ es un espacio de sucesiones y τ es una topologia localmente convexa y separada, $(\lambda[\tau])'$ es el dual topológico de $\lambda[\tau]$. La nomenclatura referente a la teoria general de espacios vectoriales topologicos es la misma que [16]. Siguiendo a Zeller, diremos que un espacio de sucesiones λ dotado de la topologia τ es un (FK)-espacio si $\lambda[\tau]$ es un espacio de Fréchet y todas las aplicaciones

$$\lambda[\tau] \to \mathbb{K}, \qquad i=0,1,\ldots$$
$$x=(x_i) \to \mathbb{K}$$

son formas lineales y continuas sobre $\lambda[\tau]$

Dada $c=(c_i)\in\omega$, tal que existen una constante $C>0$ y $\sigma\in R$, verificando: $|C_i| \leq C\,\sigma^i$, para $i=0,1,\ldots$, entonces escribimos $c_i= O(\sigma^i)$.

Si $\alpha:[0,1] \to \mathbb{K}$ es una función de variación acotada en $[0,1]$ y $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ es una función continua, denotamos por

$\int_0^1 f(t)\, d\alpha(t)$ al número real o complejo $\left(\int_0^1 f(t)d(\mathrm{Re}\alpha), \int_0^1 f(t)d(\mathrm{Im}\alpha)\right)$ cuyas coordenadas son las integrales de Riemann-Stieltjes de f respecto a las funciones reales de variación acotada $(\mathrm{Re}\alpha)$ y $(\mathrm{Im}\alpha)$. Diremos que $(\alpha_i) \in \omega$ es una sucesión de momentos constantes si existe una función de variación acotada en $[0,1]$, $\alpha:[0,1] \to \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha_i = \int_0^1 t^i \, d\alpha(t); \quad i = 0,1,\ldots,$$

CAPITULO I. SUMABILIDAD DE ABEL Y ρ-DUALIDAD .LOS ESPACIOS (sa) Y (da) .

1. PROPIEDADES DEL METODO DE SUMABILIDAD DE ABEL.

Sea ω el espacio vectorial de todas las sucesiones $x=(x_i)=(x_0,x_1,\ldots)$ cuyas coordenadas son números reales o -- complejos.

Diremos que la sucesión $x\in\omega$ es sumable Abel a s -- cuando:

1) la serie de potencias $f(\rho)=\sum_{i=0}^{+\infty} x_i\rho^i$ converge para $0\leq\rho<1$.

2) existe $\lim_{\rho\to 1^-} f(\rho)=s$.

El teorema de Abel asegura que si $x\in\omega$ es sumable en sentido ordinario, entonces es sumable Abel al mismo número.- Por tanto el método funcional de Abel es regular.

Existen sucesiones que no son sumables en sentido ordinario como $((-1)^i)$ y son sumables Abel dado que:

$$\lim_{\rho\to 1^-}\sum_{i=0}^{+\infty}(-1)^i\rho^i=\lim_{\rho\to 1^-}\frac{1}{1+\rho}=\frac{1}{2}$$

Más generalmente se demuestra que el método de Abel - es más potente que cualquier método de Cesáro de orden k. (ver [17] pag.490 y 498).

Vamos a desarrollar las propiedades elementales de - la sumabilidad de Abel.

Proposición 1.1

Si la sucesión $x \in \omega$ es sumable Abel, entonces $\limsup_{i \to +\infty} \sqrt[i]{|x_i|} \leq 1$.

Demostración.

Si $x \in \omega$ es sumable Abel, la serie de potencias $f(\rho) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i$ tiene como radio de convergencia: $R \geq 1$ ■

Proposición 1.2

Si $x \in \omega$ es sumable Abel y (S_i) es la sucesión de las sumas parciales de x, entonces:

$$\lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i = \lim_{\rho \to 1^-} (1-\rho) \sum_{i=0}^{+\infty} s_i \rho^i = s .$$

Demostración

Dado que $\sum_{i=0}^{+\infty} \rho^i = \frac{1}{1-\rho}$, $0 \leq \rho < 1$, tenemos que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i = (1-\rho) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \rho^i \right) \left(\sum_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i \right) = (1-\rho) \sum_{i=0}^{+\infty} s_i \rho^i \quad ■$$

Como consecuencia de esta proposición podemos introducir un nuevo concepto:

"Diremos que la sucesión $(S_i) \in \omega$ es convergente Abel a s cuando: $\lim_{\rho \to 1^-} (1-\rho) \sum_{i=0}^{+\infty} s_i \rho^i = s$ ".

Utilizando esta noción probamos una condición necesaria para la sumabilidad de Abel.

Proposición 1.3

Si $x \in \omega$ es sumable Abel, entonces la sucesión x es convergente Abel a cero.

Demostración.

Si $x \in \omega$ es sumable Abel, existe $\lim\limits_{\rho \to 1^-} \sum\limits_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i = s$

luego : $\lim\limits_{\rho \to 1^-} (1-\rho) \sum\limits_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i = 0$ ∎

Proposición 1.4

La sumabilidad de Abel verifica las siguientes propiedades:

1) Si $x, y \in \omega$ son sumables Abel, $x+y$ es sumable Abel.

2) Si $x \in \omega$ es sumable Abel y α es un número real ó complejo -- αx es sumable Abel.

3) Si $(x_0, x_1, x_2, \ldots) \in \omega$ es sumable Abel a s, entonces $(x_1, x_2 \ldots) \in \omega$) es sumable Abel a $(s-x_0)$ y reciprocamente.

Demostración.

Las dos primeras propiedades son consecuencia de que tanto - las series de potencias como los límites de funciones las verifican. Respecto a 3):

Dado que $(x_0, x_1, x_2 \ldots)$ es sumable Abel, $f(\rho) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i$ converge en $0 < \rho < 1$; luego $\frac{1}{\rho}\left(f(\rho) - x_0\right) = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} x_{i+1} \rho^i$ también converge en $0 < \rho < 1$ y además existe :

$$\lim_{\rho \to 1^-} \frac{1}{\rho}\left(f(\rho) - x_0\right) = s - x_0 \quad .$$

Recíprocamente si $(x_1, x_2, \ldots)$ es sumable Abel a $(s-x_0)$, la - serie de potencias $\sum\limits_{i=0}^{+\infty} x_{i+1} \rho^i$ converge para $0 \leq \rho < 1$, -- luego $\rho\left(\sum\limits_{i=0}^{+\infty} x_{i+1} \rho^i\right) + x_0 = \sum\limits_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i$ converge para $0 \leq \rho < 1$, siendo :

$$\lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i = (s - x_0) + x_0 = s \qquad ∎$$

2. LA ρ-DUALIDAD Y EL PAR DUAL (λ,λ^{ρ}). EL ESPACIO (sa)

Sea φ el subespacio de ω formado por todas las sucesiones que sólo tienen un número finito de coordenadas distintas de cero.

Consideramos subespacios vectoriales de ω, que denotaremos λ. Es conocido que a cada espacio de sucesiones λ le podemos asignar otro espacio de sucesiones λ^{α}, denominado su α-dual:

$\lambda^{\alpha} = \{u \in \omega : (u_i x_i)$ es absolutamente sumable para cada $x \in \lambda\}$; cuando $\varphi \subset \lambda \subset \omega$, se tiene que λ y λ^{α} forman un par dual con la forma bilineal dada por $(x,u) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i u_i$, $x \in \lambda$, $u \in \lambda^{\alpha}$.

De manera análoga y utilizando formas bilineales adecuadas se estudian la β-dualidad para la convergencia ordinaria y la c-dualidad para la convergencia Cesáro.

El método de sumabilidad de Abel permite definir un concepto de dualidad, debido a M.Valdivia, denominado ρ-dualidad:

Dado un espacio de sucesiones $\lambda \subset \omega$, le asociamos su ρ-dual:

$\lambda^{\rho} = \{u \in \omega : (u_i x_i)$ es sumable Abel para cada $x \in \lambda\}$

De la mayor potencia del método Abel se sigue que:

$\lambda^{\alpha} \subset \lambda^{\beta} \subset \lambda^{c} \subset \lambda^{\rho}$.

Es conocido (Antonino [2]) que λ^{ρ} es un espacio vectorial y que si $\varphi \subset \lambda \subset \omega$, los espacios de sucesiones λ y λ^{ρ} forman un par dual con la forma bilineal dada por:

$$\langle x, u \rangle = \lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i u_i \rho^i \quad . \quad x \in \lambda,\ u \in \lambda^\rho .$$

Además si dos espacios de sucesiones verifican $\lambda \subset \mu$, entonces $\lambda^\rho \supset \mu^\rho$. Si el espacio de sucesiones λ es normal se verifica que $\lambda^\alpha = \lambda^\rho$.

Vamos a analizar el espacio base para la sumabilidad de Abel, es decir el espacio de todas las sucesiones sumables Abel:

$$sa = \{x \in \omega : x \text{ es sumable Abel}\}.$$

la propiedad de regularidad nos asegura que $l^1 \subset sa$.

Caracterizamos algebraicamente al espacio (sa).

Proposición 2.1

El espacio (sa) es el ρ-dual del espacio de sucesiones $([e] \oplus \varphi)$, donde $[e]$ es la envoltura lineal de la sucesión $e=(1,1,1,\ldots..)$

Demostración

Si $x \in ([e] \oplus \varphi)^\rho$, dado que en particular $e \in ([e] \oplus \varphi)$ tenemos que $(x_i . 1) = (x_i) \in sa$.

Recíprocamente si $x \in sa$, tenemos que probar que $(x_i u_i) \in sa$ para cada $u \in ([e] \oplus \varphi)$. En efecto como $u = \alpha e + (\beta_i)$ con $\alpha \in \mathbb{K}$ y $(\beta_i) \in \varphi$ tenemos que $(x_i \cdot u_i) = \alpha (x_i \cdot 1) + (x_i \cdot \beta_i) =$ $= \alpha x + (x_i \beta_i)$ con $(x_i \beta_i) \in \varphi$ luego P.1.4 asegura que $(x_i u_i) \in sa$. ∎

Vamos a dotar al espacio vectorial (sa) de una topología estudiando sus propiedades y caracterizando el dual topológico. Karl Zeller, en [29], enuncia los resultados conteni dos en las proposiciones 2.3 y 2.4, y en los teoremas 2.1 y 3.1 sin que conozcamos las demostraciones. Por ello,las pruebas aquí presentadas han sido dadas por nosotros.

Proposición 2.2

En el espacio de sucesiones (sa) se verifica:

1) La aplicación $x \in sa \longmapsto \|x\| = \sup_{0 \leq \rho < 1} \left| \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i \right|$

es una norma.

2) Las sucesiones de aplicaciones: $x \in sa \longmapsto p_j(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i$

$x \in sa \longmapsto q_j(x) = \sup_i |x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \quad , \; j = 1, 2, \ldots\ldots$

son dos sucesiones crecientes de normas que definen la misma topologia en (sa).

Demostración.

1) Si $x \in$ sa, existe $\lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i = \lim_{\rho \to 1^-} f(\rho) = s$ luego

$\sup_{0 \leq \rho < 1} |f(\rho)| < +\infty$

definimos $\bar{f} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K} \; , \; \bar{f}(\rho) = \begin{cases} f(\rho) & 0 \leq \rho < 1 \\ s & \rho = 1 \end{cases}$

luego f es continua en $[0,1]$ por lo que $\sup_{0 \leq \rho \leq 1} |\bar{f}(\rho)|$

es una norma en sa.

Además, como $\lim_{\rho \to 1^-} |f(\rho)| \leq \sup_{0 \leq \rho < 1} |f(\rho)|$ tenemos

que : $\sup_{0 \leq \rho < 1} |f(\rho)| = \sup_{0 \leq \rho \leq 1} |\bar{f}(\rho)|$.

2) Si $x \in$ sa, la serie de potencias $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| \rho^i$ es convergente en $0 \leq \rho < 1$, luego para $j=1,2,\ldots$

$\left(|x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) \in l^1 \subset l^\infty$, luego $\{p_j\}_{j=1,2..}$ y $\{q_j\}_{j=1,2..}$ son ambas sucesiones de normas en sa. Como $\left(\frac{j}{j+1}\right)$ es una sucesión creciente tenemos que $p_1(x) \leq p_2(x) \leq \ldots\ldots$ y

$q_1(x) \leq q_2(x) \leq \ldots\ldots$ para cada $x \in sa$.

Por último probaremos que ambas sucesiones definen - la misma topologia en sa.

- Para cada q_j existe p_j tal que $q_j(x) \leq p_j(x)$, para $x \in sa$.
- Para cada p_j existen q_{j+1} y $C = (j+1)^2$ tales que:

$$p_j(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i = \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| \left(\frac{j+1}{j+2}\right)^i \left(\frac{j+2}{j+1}\cdot\frac{j}{j+1}\right)^i \leq$$

$$\leq \sup_i |x_i| \left(\frac{j+1}{j+2}\right)^i \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{j(j+2)}{(j+1)^2}\right)^i = q_{j+1}(x)\cdot \frac{1}{1-\frac{j(j+2)}{(j+1)^2}} =$$

$$= (j+1)^2 q_{j+1}(x) \,, \quad \forall x \in sa \,. \ \blacksquare$$

Denominamos $(e_i)_{i=0,1\ldots}$ a los vectores de φ que tienen todas las coordenadas cero, excepto la i-esima que vale - uno.

<u>Proposición 2,3</u>

Para todo $x = (x_i) \in sa(\|\ \|)$ se verifica:

$$\lim_{t\to 1^-} \left[\lim_{K\to+\infty} \sum_{i=0}^{K} x_i t^i e_i \right] = (x_i)$$

en la topologia dada por la norma

<u>Demostración</u>.

Fijado $x \in sa$, probaremos en primer lugar que la función $\{(x_i t^i) : 0 < t < 1\} \subset sa$ verifica: $\lim_{t\to 1^-} (x_i t^i) = (x_i)$ y después que para cada t fijo $0 < t < 1$ la sucesión $\left(\sum_{i=0}^{K} x_i t^i e_i\right)_{K=0,1,\ldots}$ converge al vector $(x_i t^i)$.

Dado $\varepsilon > 0$ hay que encontrar un $t_0 \in (0,1)$ tal que -

si $t_0 \leq t < 1$, entonces $||(x_i)-(x_i t^i)|| = \sup_{0\leq\rho<1} |f(\rho)-f(t\rho)| < \varepsilon$ donde $f(\rho) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i$.

Como f es uniformemente continua en $[0,c]$ para cualquier $c<1$, para el anterior $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que si $|\rho_1-\rho_2|<\delta$, entonces $|f(\rho_1)-f(\rho_2)| < \varepsilon$. Con el $\delta>0$ fijamos $t_0 \in (o,1)$ tal que $1-t_0<\delta$.

Entonces si $t_0 \leq t < 1$ tenemos que $\rho - t\rho = \rho(1-t) \leq \rho(1-t_0) < (1-t_0) < \delta$ para todo $\rho \in [0,1)$ y en consecuencia : $\sup_{0\leq\rho<1} |f(\rho)-f(t\rho)| < \varepsilon$.

Demostramos ahora que la sucesión $\{(x_0, x_1 t, \ldots, x_K t^K, 0, \ldots)\}_{K=0,1\ldots}$ $\| \|$- converge a $(x_i t^i)$ para cada $t \in (0,1)$ fijo.

Dado $\varepsilon>0$ hay que encontrar $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $K \geq K_0$, entonces $\|(x_i t^i)-(x_0, x_1 t, \ldots, x_K t^K, 0, \ldots)\| < \varepsilon$ para $t \in (0,1)$ fijo.

Fijados $\varepsilon>0$ y $t \in (0,1)$, la sucesión de funciones $\{f_k\}_{k=0,1\ldots}$, $f_K(\rho) = \sum_{i=0}^{K} x_i \rho^i$ converge uniformemente a $f(\rho) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i$ en el intervalo $[0,t]$, luego para todo $\rho \in [0,1)$, como $t\rho \in [0,t)$, se verifica que dado $\varepsilon>0$ existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $K \geq K_0$ tenemos

$$\sup_{0\leq\rho<1} |f(t\rho)-f_K(t\rho)| = \|(x_i t^i)-(x_0, x_1 t, \ldots, x_K t^K, 0, \ldots)\| < \varepsilon$$

con lo cual $\lim_{K\to+\infty} \left(\sum_{i=0}^{K} x_i t^i e_i \right) = (x_i t^i)$. ∎

Proposición 2.4

Para todo $x=(x_i) \in sa(q_j)$ se verifica que

$$\lim_{t\to 1^-}\left[\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=0}^{k} x_i t^i e_i\right]=(x_i)$$

en la topologia dada por la sucesión de normas $\{q_j\}$.

Demostración.

De manera análoga a la proposición anterior veamos - que $\lim_{t\to 1^-}(x_i t^i)=(x_i)$ para $x\in$ sa fijo.

Dados $\varepsilon>0$ y $j\in\mathbb{N}$ buscamos $t_0 \in (0,1)$ tal que si -- $t_0 \leqslant t < 1$, entonces :

$$q_j\left(x-(x_i t^i)\right)=\sup_i |x_i - x_i t^i|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i < \varepsilon$$

Como $x\in$ sa, para $j\in\mathbb{N}$ tenemos que $\sum_{i=0}^{+\infty}|x_i|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i$ converge, luego $\lim_{i\to+\infty}|x_i|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i=0$ y dado que $\lim_{i\to+\infty}(1-t^i)=1$ para todo $t\in(0,1)$ podemos afirmar que : $\lim_{i\to+\infty}|x_i|(1-t^i)\left(\frac{j}{j+1}\right)^i=0$ para todo $t\in(0,1)$

Entonces dado $\varepsilon>0$ existe $i_0\in N$ tal que si $i>i_0$, $|x_i|(1-t_1^i)\left(\frac{j}{j+1}\right)^i<\varepsilon$ para $t_1\in(0,1)$ fijo.

Se trata de asegurar que: existe $t_0 \in (0,1)$ con $t_1\leqslant$ $\leqslant t_0<1$ tal que :

$$\max\left\{|x_1|(1-t_0)\left(\frac{j}{j+1}\right),\ldots\ldots\ldots,|x_{i_0}|(1-t_0)^{i_0}\left(\frac{j}{j+1}\right)^{i_0}\right\}<\varepsilon$$

lo cual es consecuencia de que para $i=1,2,\ldots\, i_0$ fijos:

$$\lim_{t\to 1^-}(1-t^i)=0$$

De esta manera para $\varepsilon>0$ y $j\in\mathbb{N}$ fijos existe $t_0\in(0,1)$

verificando que $\sup_i |x_i|(1-t_0^i)\left(\frac{j}{j+1}\right)^i < \varepsilon$ de lo cual se sigue que si $t_0 \leqslant t < 1$: $\sup_i |x_i|(1-t^i)\left(\frac{j}{j+1}\right)^i < \varepsilon$ porque $(1-t^i) \leqslant (1-t_0^i)$ para $i=0,1,\ldots$

Veamos ahora que con $t \in (0,1)$ fijo, la sucesión: $\{(x_0, x_1t, \ldots, x_kt^k, 0, \ldots)\}_{k=0,1,\ldots}$ converge a (x_it^i).

Dados $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ hay que encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geqslant k_0$, entonces:

$$q_j\left((x_it^i) - (x_0, x_1t, \ldots, x_kt^k, 0, \ldots)\right) = \sup_{i>k} |x_i|t^i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i < \varepsilon$$

Como $x \in sa$ tenemos que $\sup_i |x_i|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i = M < +\infty$ y para $t \in (0,1)$ fijado anteriormente $\lim_{i\to+\infty} t^i = 0$ por lo que existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $i \geqslant i_0$: $t^i < \frac{\varepsilon}{M}$; pero como $\frac{\varepsilon}{M} \leqslant \frac{\varepsilon}{|x_i|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i}$ para $i=0,1,\ldots$ podemos afirmar que si $i \geqslant i_0$ entonces:

$$|x_i|t^i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i < \varepsilon$$

En conclusión con $k_0 = i_0$ tenemos que si $k \geqslant k_0$:

$$\sup_{i>k} |x_i|t^i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leqslant \sup_{i\geqslant i_0} |x_i|t^i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i < \varepsilon \qquad \blacksquare$$

Para caracterizar el dual topologico de sa $(\|\ \|)$ vamos a basarnos en un teorema de S.Sidon [25] que afirma: "Una sucesión $\alpha = (\alpha_i) \in \mathbb{K}$ verifica que $(\alpha_i \cdot x_i) \in sa$ y $\left|\lim_{\rho\to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i x_i \rho^i\right| \leqslant C\|x\|$ para todo $x \in sa$, con $C > 0$ que sólo depende de α, si y solo si, $\alpha_i = \int_0^1 t^i d\alpha(t)$ siendo $\alpha : [0,1] \to \mathbb{K}$ una función de variación acotada en $[0,1]$."

Proposición 2.5

El dual topologico de sa($\| \|$) es el espacio de las sucesiones (α_i), donde $\alpha_i = \int_0^1 t^i d\alpha(t)$, $i=0,1,\dots$ siendo $\alpha: [0,1] \to \mathbb{K}$ una función de variación acotada en $[0,1]$.

Demostración

Si α es una forma lineal continua sobre sa($\| \|$), la P.2.3 asegura que para cada $x \in$ sa:

$$\alpha(x) = \alpha\left(\lim_{\rho\to 1^-}\left[\lim_{K\to+\infty}\sum_{i=0}^{K} x_i \rho^i e_i\right]\right) = \lim_{\rho\to 1^-}\left[\lim_{K\to+\infty}\sum_{i=0}^{K} x_i \alpha(e_i)\rho^i\right] =$$
$$= \lim_{\rho\to 1^-}\sum_{i=0}^{+\infty} x_i \alpha_i \rho^i \quad , \quad \alpha_i = \alpha(e_i) \quad i=0,1,\dots$$

Entonces $(x_i \cdot \alpha_i) \in$ sa para todo $x \in$ sa.

Además como α es $\| \|$-continua, existe $C > 0$, que sólo depende de α , tal que : $|\alpha(x)| \leqslant C \|x\|$ para todo $x \in$ sa. Estamos en condiciones de aplicar el teorema de Sidón obteniendo el resultado.

Recíprocamente si $\alpha = (\alpha_i)$ con $\alpha_i = \int_0^1 t^i d\alpha(t)$, $i=0,1,\dots$ para una función $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ de variación acotada en $[0,1]$ Sidón afirma que $\alpha(x) = \lim_{\rho\to 1^-}\sum_{i=0}^{+\infty} x_i \alpha_i \rho^i$ es una forma lineal y continua sobre sa($\| \|$). ■

Proposición 2.6

El dual topologico de sa(q_j) es el espacio de las sucesiones $c=(c_i)$, donde $c_i = O(\sigma^i)$, para $0 < \sigma < 1$.

Demostración.

Sea c una forma lineal continua sobre $sa(q_j)$, la P. 2.4 asegura que para todo $x \in$ sa se verifica:

$$c(x) = \lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i c_i \rho^i \quad , \quad c_i = c(e_i) \ , \ i=0,1,\ldots.$$

Como c es continua existen $j \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que:

$$|c(e_i)| = |c_i| \leq C\, q_j(e_i) = C \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \quad , \ i=0,1,\ldots.$$

luego $c_i = O(\sigma^i)$, $\sigma = \left(\frac{j}{j+1}\right)$ siendo $\sigma \in (0,1)$.

Recíprocamente si $c=(c_i)$, con $c_i = O(\sigma^i)$ para algún $0 < \sigma < 1$ probaremos que $c(x) = \lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i c_i \rho^i$ es una forma lineal continua sobre sa.

En primer lugar veamos que $(x_i c_i) \in$ sa para todo --- $x \in$ sa: si $c_i = O(\sigma^i)$ existe $C > 0$ tal que $|c_i| \leq C \sigma^i$, $i=0,1..$ luego : $\sqrt[i]{|c_i|} \leq \sigma \sqrt[i]{C}$, $i=0,1,\ldots.$ y en consecuencia:

$$\limsup_{i \to +\infty} \sqrt[i]{|c_i|} \leq \sigma \limsup_{i \to +\infty} \sqrt[i]{C} = \sigma < 1$$

Entonces,

$$\limsup_{i \to +\infty} \sqrt[i]{|x_i||c_i|} \leq \limsup_{i \to +\infty} \sqrt[i]{|x_i|} \cdot \limsup_{i \to +\infty} \sqrt[i]{|c_i|} \leq \sigma < 1$$

lo cual asegura que la serie de potencias $\sum_{i=0}^{+\infty} (x_i c_i) \rho^i$ es absolutamente convergente en $\rho = 1$. Es decir $(x_i c_i) \in l^1$ para todo $x \in$ sa. Con lo que $c=(c_i)$ es una forma lineal sobre (sa).

Veamos que c es continua:

$$|c(x)| = \left| \lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i c_i \rho^i \right| = \left| \sum_{i=0}^{+\infty} x_i c_i \right| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| |c_i|$$

como $c=(c_i)$, $c_i = O(\sigma^i)$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma \leq \left(\frac{j}{j+1}\right)$

por lo que $|c_i| \leq C \left(\frac{j}{j+1}\right)^i$, $i=0,1,\dots$ y entonces

existe $\sup_i |c_i| \left(\frac{j+1}{j}\right)^i \leq C$.

Dada $c=(c_i)$ existe $j \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|c(x)| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i||c_i| = \sum_{i=0}^{+\infty} |c_i| \left(\frac{j+1}{j}\right)^i \cdot |x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leq C \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i =$$
$$= C\, p_j(x) \leq C\,(j+1)^2 q_{j+1}(x)$$

para todo $x \in$ sa.

En consecuencia si $c=(c_i)$ es tal que $c_i = O(\sigma^i)$ para $0 < \sigma < 1$ existen q_j+1 y $C^*=C(j+1)^2 > 0$ tales que:

$$|c(x)| \leq C^* q_{j+1}(x) \qquad \text{para cada } x \in \text{sa.} \quad \blacksquare$$

A partir de la caracterización de los duales topologicos de sa($\|\ \|$) y sa(q_j) obtenida podemos analizar la relación entre estas dos topologias definidas en (sa) mediante:

Proposición 2.7

En el espacio de sucesiones (sa) las topologias dadas por la norma ($\|\ \|$) y la sucesión de normas $\{q_j\}$ no son comparables.

Demostración.

Es suficiente demostrar que ninguno de los duales topologicos de sa($\|\ \|$) y de sa(q_j) está contenido en el otro.

Si consideramos el vector $e=(1,1,\dots)$, se trata de un momento constante para la función de variación acotada:

$$\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{definida por} \quad \alpha(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t=1 \\ 0 & \text{si } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

porque $\int_0^1 t^i d\alpha(t) = 1$ para $i = 0,1,\ldots$

Entonces $e \in (sa(\|\,\|))'$ y sin embargo es evidente que $e \notin (sa(q_j))'$.

Si consideramos ahora el vector $(\frac{1}{i!}) \in (sa(q_j))'$ porque $\frac{1}{i!} \leq \sigma^i$, i =0,1,... para $0<\sigma<1$, pero $(\frac{1}{i!}) \notin (sa(\|\,\|))'$, véase la observación de Hardy([12] .pag.267). ■

Estamos en condiciones de dotar a (sa) de la topologia dada por la sucesión creciente de normas $\{\|\,\| + q_j\}_{j=1,2,\ldots}$ y demostramos que:

Teorema 2.1

El espacio de sucesiones sa($\|\,\|$ +q_j) es un FK-espacio.

Demostración

Con la topologia dada por la sucesión de normas el espacio (sa) es localmente convexo metrizable. Para probar que es un espacio de Fréchet es suficiente probar que cualquier sucesión $\{x^n\}_{n=1,2..} \subset$ sa de Cauchy es convergente a un elemento de sa.

Sea $\{x^n\}$ de Cauchy en sa, entonces dados $\varepsilon>0$ y $j \in \mathbb{N}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq n_0$, entonces:

$$\|x^m - x^n\| + q_j(x^m - x^n) = \|x^m - x^n\| + \sup_i |x_i^m - x_i^n| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i < \varepsilon$$

Para cada coordenada i=0,1,... fija tenemos que:

$$|x_i^m - x_i^n| < \left(\frac{j+1}{j}\right)^i \varepsilon \quad , \quad m > n \geq n_0$$

luego cada una de las sucesiones $\{x_i^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ es de Cauchy en el cuerpo completo $\mathbb{K}$ por lo que convergen a un $x_i^o \in K$. Consideramos la sucesión $x^o = (x_i^o) \in \omega$; probando que $x^o \in$ sa y posteriormente que: $\{x^n\} \longrightarrow x^o$ en la topologia dada por las normas $(\| \| + q_j)$.

Probamos que $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i^o \rho^i$ converge en $0 \leq \rho < 1$ y que existe $\lim_{\rho\to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^o \rho^i$.

Dado que : $\left| \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^o \rho^i \right| \leq \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i^o| \rho^i$, es suficiente demostrar que para todo $j \in \mathbb{N}$: $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i^o| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i$ converge.

En efecto, fijado $j \in \mathbb{N}$ sabemos por P.2.2 que:

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i^o| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leq (j+1)^2 \sup_i |x_i^o| \left(\frac{j+1}{j+2}\right)^i$$

y además que:

$$\sup_i |x_i^o| \left(\frac{j+1}{j+2}\right)^i \leq \sup_i |x_i^o - x_i^n| \left(\frac{j+1}{j+2}\right)^i + \sup_i |x_i^n| \left(\frac{j+1}{j+2}\right)^i$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo.

Dado que $(x_i^n) \in$ sa el segundo sumando es finito, y como la sucesión es de Cauchy, fijados $\varepsilon > 0$; $(j+1) \in \mathbb{N}$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq n_o$: $\sup_i |x_i^m - x_i^n| \left(\frac{j+1}{j+2}\right)^i < \varepsilon$

luego haciendo $m \to +\infty$, como $(x_i^m) \to x_i^o$ para $i=0,1,\ldots$ obtenemos que el primer sumando es menor o igual que ε .

Para demostrar que existe $\lim_{\rho\to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^o \rho^i$ tenemos en cuenta que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que si $m > n \geq n_o$ entonces:

$$\| x^m - x^n \| = \sup_{0\leq\rho<1} \left| \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^m \rho^i - \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^n \rho^i \right| < \varepsilon$$

si hacemos que $m \to +\infty$ tenemos que: $\sup_{0\leq\rho<1} \left| \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^o \rho^i - \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^n \rho^i \right| \leq \varepsilon$ si $n \geq n_o$.

Por tanto la sucesión de funciones $\{f^n\}_{n\in\mathbb{N}}$: $f^n(\rho) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^n \rho^i$ para $\rho \in [0,1)$ converge uniformemente a $f(\rho) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i^o \rho^i$ en el conjunto $[0,1)$.

Como $(x_i^n) \in$ sa, existe $\lim_{\rho\to 1^-} f^n(\rho)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ luego, en virtud de la convergencia uniforme de $\{f^n\} \longrightarrow f$ en $[0,1)$, existe

$$\lim_{\rho\to 1^-} f(\rho) = \lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{\rho\to 1^-} f^n(\rho)\right)$$

y en conclusión $x^o \in$ sa.

Por último, para probar que $\{x^n\}\to x^o \in$ sa, basta considerar que fijados $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que

$$\| x^m - x^n \| + q_j(x^m - x^n) < \varepsilon \quad , \quad m > n \geqslant n_o .$$

Si hacemos que $m \longrightarrow +\infty$, como $(x^o - x^n) \in$ sa, concluimos que

$$\| x^o - x^n \| + q_j(x^o - x^n) \leqslant \varepsilon \quad , \quad n \geqslant n_o .$$

Una vez probado que (sa) es un espacio de Fréchet, veamos que es un K-espacio.

Fijado $j \in \mathbb{N}$ cualquiera: $|x_k| \left(\frac{j}{j+1}\right)^k \leqslant q_j(x)$

para k=0,1,... luego

$$|x_k| \leqslant \left(\frac{j+1}{j}\right)^k q_j(x) \leqslant C_{k,j}\,(\|x\| + q_j(x))$$

para todo $x \in$ sa, siendo $C_{k,j} > 0$ una constante que sólo depende de la coordenada k y de la norma j fijadas. ∎

Si $x \in$ sa, denominamos sección enésima de $x=(x_i)$ al vector $x^n = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i = (x_0, x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots) \in \varphi \subset$ sa, para n=0,1.

Vamos a analizar la convergencia en (sa), para la topologia dada por ($\| \|$ + q_j), de las sucesiones de un vector cualquiera:

Proposición 2.8

Existen vectores de (sa) cuyas secciones no convergen a dichos vectores.

Demostración

Sea el vector $x=((-1)^i) \in$ sa, probamos que la sucesión de sus secciones $\left\{ \sum_{i=0}^{K} (-1)^i e_i \right\}_{K=0,1,\ldots}$ no es de Cauchy en (sa).

Para cualquier k=0,1,2... tenemos:

$$\left\| \sum_{i=0}^{K} (-1)^i e_i - \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^i e_i \right\| + q_j\left(\sum_{i=0}^{K} (-1)^i e_i - \sum_{i=0}^{K-1} (-1)^i e_i \right) =$$

$$= \|e_K\| + q_j(e_K) = 1 + \left(\frac{j}{j+1}\right)^K . \qquad \blacksquare$$

Sin embargo teniendo en cuenta P.1.2 podemos introducir un nuevo concepto de convergencia, que denominamos ρ-convergencia:

Dada una sucesión $\{x^n\}_{n=0,1,\ldots}$ de vectores de sa, diremos que ρ-converge a $x \in$ sa si:

$$\lim_{\rho \to 1^-} \left[\lim_{K \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{K} (x^n - x^{n-1}) \rho^n + x^0 \right) \right] = x$$

estando ambos límites tomados en la topologia dada por ($\| \|$ + q_j).

Entonces, las secciones $\{x^n\}_{n=0,1,..}$ de un vector - $x \in sa$ ρ-convergen a x cuando:

$$\lim_{\rho\to 1^-} \left[\lim_{K\to +\infty} \left(\sum_{i=0}^{K} x_i \rho^i e_i \right) \right] = (x_i) = x$$

Por lo tanto es inmediato:

<u>Proposición 2.9</u>

Las secciones de cualquier vector $x \in sa$, ρ-convergen a x.

<u>Demostración</u>

Es suficiente unir la P.2.3 y la P.2.4 ∎

3. EL ESPACIO (da)

Caracterizamos el dual topologico de sa($\|\ \|$ $+q_j$) y su relación con el ρ-dual mediante el siguiente:

Teorema 3.1

Las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) $u \in (sa)'$.

b) Para cada $x \in$ sa: $u(x) = \lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i u_i \rho^i$ donde

$u_i = u(e_i) = \int_0^1 t^i d\alpha + c_i$, $i = 0, 1, \ldots$. $\alpha : [0,1] \to \mathbb{K}$, función de variación acotada en $[0,1]$ y $c_i = O(\sigma^i)$, para $0 < \sigma < 1$.

c) $u \in (sa)^\rho$.

Demostración:

(a) $\Rightarrow$ (b) : Si $u \in (sa)'$; para cada $x \in$ sa tenemos que

$$x = \lim_{\rho \to 1^-} \left[\lim_{K \to +\infty} \sum_{i=0}^{K} x_i e_i \rho^i \right] \qquad \text{entonces:}$$

$$u(x) = \lim_{\rho \to 1^-} \left[\lim_{K \to +\infty} \sum_{i=0}^{K} x_i u(e_i) \rho^i \right] = \lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i u_i \rho^i \quad , \; u_i = u(e_i),\ i = 0, 1, \ldots$$

porque u es lineal y ($\|\ \|$ $+q_j$)-continua.

Además por ser u continua existen $j \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que

$$|u(x)| \leq C \left(\|x\| + q_j(x) \right) \quad \text{para todo } x \in \text{sa}.$$

Un resultado general, (Zeller [31] .Pag.25), asegura que en estas condiciones existen dos formas lineales sobre (sa): u_1, u_2 tales que:

$u=u_1+u_2$, verificando: $|u_1(x)| \leqslant C\,\|x\|$ y $|u_2(x)| \leqslant Cq_j(x)$ para todo $x \in$ sa.

Entonces u_1 es una forma lineal continua sobre sa($\|\ \|$) por lo que $u_1(e_i) = \int_0^1 t^i d\alpha(t)$, $i=0,1,\ldots$ con $\alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{K}$ función de variación acotada en $[0,1]$. Análogamente u_2 lo será sobre sa(q_j) por lo que $u_2(e_i)=O(\sigma^i)$ con $0 < \sigma < 1$.

En consecuencia: $u_i=u_1(e_i)+u_2(e_i)$, $i=0,1,\ldots$

(b) $\Rightarrow$ (c): como consecuencia de las P.2.5 y 2.6 si $u=(u_i)$ con

$u_i = \int_0^1 t^i d\alpha(t) + c_i$, $i=0,1,\ldots$, entonces $(x_i u_i) \in$ sa para todo $x \in$ sa. Por tanto $u \in (\text{sa})^\rho$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Tenemos que demostrar que cualquier $u \in (\text{sa})^\rho$ es una forma lineal y ($\|\ \|+q_j$)-continua sobre sa.

Para cualquier $x \in$ sa, existe $u(x)=\lim_{\rho\to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i u_i \rho^i$

luego de P.1.4 se deduce que u es una forma lineal sobre (sa).

Para probar que u es ($\|\ \|+q_j$)-continua, consideramos la sucesión $\{u_j\}_{j=1,2\ldots}$ de formas lineales sobre (sa):

$$\begin{aligned} u_j : \text{sa} &\longrightarrow \mathbb{K} \qquad\qquad , j=1,2,\ldots \\ x &\longmapsto \sum_{i=0}^{+\infty} x_i u_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \end{aligned}$$

que están bien definidas porque $(x_i u_i) \in$ sa para todo $x \in$ sa.

Para cada $j \in \mathbb{N}$:

$$|u_j(x)| = \left|\sum_{i=0}^{+\infty} x_i u_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i||u_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leqslant$$

$$\leqslant \sup_i |u_i| \cdot \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i$$ para cada $x \in$ sa; porque $(sa)^\rho \subset (1^1)^\rho = (1^1)^\alpha = 1^\infty$ al ser el espacio de sucesiones 1^1-normal.

Entonces: $|u_j(x)| \leqslant \sup_i |u_i| \cdot p_j(x) \leqslant C\,(\|x\| + p_j(x))$ para todo $x \in$ sa.

Dado que las sucesiones de normas$(\|\;\| + p_j)$ y $(\|\;\| + q_j)$ son equivalentes podemos afirmar que $\{u_j\}$ es una sucesión de formas lineales y continuas sobre el Fréchet sa$(\|\;\| + q_j)$.

Además existe el límite puntual de $\{u_j\}$ porque para cada $x \in$ sa:

$$\lim_{j\to+\infty} u_j(x) = \lim_{j\to+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i u_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i = \lim_{\rho\to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i u_i \rho^i$$

y este último límite existe al ser $(x_i u_i) \in$ sa para cada $x \in$ sa

Como $u(x) = \lim_{j\to+\infty} u_j(x)$, para cada $x \in$ sa; y sa$(\|\;\| + q_j)$ es un Fréchet, el teorema de Banach-Steinhaus asegura que u es una forma lineal y continua sobre sa$(\|\;\| + q_j)$. ■

Dado que el anterior teorema establece:

$$\left(sa\,(\|\;\| + q_j)\right)' = (sa)^\rho$$

denominamos a ese espacio vectorial: dual de Abel, denotándolo (da). Entonces la topologia dada en (sa) es compatible con el par dual (sa, da) .

Mediante el espacio (da) vamos a analizar una --

clase de aplicaciones lineales continuas definidas en sa.

Teniendo en cuenta que $(sa)^{\rho} = (da)$, es inmediato probar:

Proposición 3.1

Sea la aplicación lineal $T_u : sa \longrightarrow sa$, $x \longmapsto (u_i \cdot x_i)$ donde $u \in \omega$

Entonces T_u : sa $\longrightarrow$ sa si y sólo si $u \in$ da.

Proposición 3.2

La aplicación lineal T_u: sa$\longrightarrow$sa es continua para cada $u \in$ da.

Demostración.

Sea $u \in$ da, entonces $u_i = \int_0^1 t^i d\alpha + c_i$, $i=0,1,\ldots$ $\int_0^1 |d\alpha| < +\infty$, $c_i = O(\sigma^i)$, $0<\sigma<1$.

Por tanto existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma \leq \left(\frac{j_0}{j_0+1}\right)$, luego existe $M > 0$ con $|c_i| \leq M \left(\frac{j_0}{j_0+1}\right)^i$, $i=0,1,\ldots$ por lo que $\sup_i |c_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i \leq M$.

Para probar que T_u es continua, para cada $j \in \mathbb{N}$ vamos a encontrar $M_j > 0$ y $j^* \in \mathbb{N}$ tales que:

$$(\|\,\| + p_j)(u_i x_i) \leq M_j (\|\,\| + p_{j^*})(x) \qquad \text{para cada } x \in \text{sa}$$

Calculamos :

$$(\|\,\| + p_j)(u_i x_i) = \|(u_i x_i)\| + p_j(u_i x_i) \leq \left\|\left(\int_0^1 x_i t^i d\alpha\right)\right\| + \|(c_i x_i)\| + p_j(u_i x_i)$$

$$\left\|\left(\int_0^1 x_i t^i d\alpha\right)\right\| = \sup_{0\leq\rho<1}\left|\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 x_i t^i \rho^i d\alpha\right)\right| = \sup_{0\leq\rho<1}\left|\int_0^1\left(\sum_{i=0}^{+\infty} x_i (t\rho)^i\right) d\alpha\right|$$

dado que $\sum_{i=0}^{+\infty} x_i (t\rho)^i$ converge uniformemente en ---- $0 \leq t \leq 1$ para $\rho \in [0,1)$ fijo. Además :

$$\sup_{0\leq\rho<1}\left|\int_0^1\left(\sum_{i=0}^{+\infty} x_i (t\rho)^i\right) d\alpha\right| \leq \sup_{0\leq\rho<1}\left\{\sup_{0\leq t\leq 1}\left|\sum_{i=0}^{+\infty} x_i (t\rho)^i\right|\right\}\cdot \int_0^1 |d\alpha|$$

luego

$$\left\|\left(\int_0^1 x_i t^i d\alpha\right)\right\| \leq \int_0^1 |d\alpha| \cdot \|x\| .$$

$$\|(c_i\cdot x_i)\| = \sup_{0\leq\rho<1}\left|\sum_{i=0}^{+\infty} c_i x_i \rho^i\right| \leq \sup_{0\leq\rho<1}\sum_{i=0}^{+\infty}|c_i||x_i|\rho^i = \sum_{i=0}^{+\infty}|c_i||x_i| < +\infty$$

porque $(c_i\cdot x_i) \in l^1$;

sabemos que para (c_i) existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que : $\sup_i |c_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i \leq M$

Entonces si $j \in \mathbb{N}$ con $j \geq j_0$:

$$\|(c_i x_i)\| \leq \sum_{i=0}^{+\infty}|c_i||x_i| = \sum_{i=0}^{+\infty}|c_i||x_i|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\left(\frac{j+1}{j}\right)^i \leq$$

$$\leq \sup_i |c_i| \left(\frac{j+1}{j}\right)^i \cdot p_j(x) \leq M\, p_j(x)$$

dado que $\left(\frac{j+1}{j}\right) \leq \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)$

En el caso en que $j < j_0$ tenemos:

$$\|(c_i x_i)\| \leq \sum_{i=0}^{+\infty}|c_i||x_i|\left(\frac{j_0}{j_0+1}\right)^i\left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i \leq M\cdot p_{j_0}(x)$$

Por último acotamos : $p_j(u_i x_i) = \sum_{i=0}^{+\infty}|u_i||x_i|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leq \sup_i |u_i|\cdot p_j(x)$

dado que $(u_i) \in l^\infty$;

además si $j < j_0$ tenemos que $p_j(u_i x_i) \leq \sup_i |u_i|\cdot p_{j_0}(x)$

En consecuencia hemos probado que dada u $\in$ da:

Si $j \geqslant j_0$: $(\| \| + p_j)(u_i x_i) \leqslant \int_0^1 |d\alpha| \cdot \|x\| + M\, p_j(x) + \sup_i |u_i| \cdot p_j(x)$

para cada x $\in$ sa.

Si $j < j_0$: $(\| \| + p_j)(u_i x_i) \leqslant \int_0^1 |d\alpha| \cdot \|x\| + M \cdot p_{j_0}(x) + \sup_i |u_i| \cdot p_{j_0}(x)$

para cada x $\in$ sa

lo cual nos permite afirmar que T_u es continua. ■

CAPITULO II. EL PAR DUAL $\langle\lambda,\lambda^\rho\rangle$.PROPIEDADES ALGEBRAICAS Y TOPOLOGICAS. ESPACIOS ρ-ESCALONADOS

1. PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LA ρ-DUALIDAD.

Si $\lambda\supset\varphi$ es un espacio de sucesiones sabemos que $\langle\lambda,\lambda^\rho\rangle$ es un par dual con la forma bilineal : $\langle x,u\rangle=\lim_{\rho\to 1^-}\sum_{i=0}^{+\infty} x_i u_i \rho^i$

En relación con las dualidades estudiadas sabemos que $\lambda^\alpha\subset\lambda^\beta\subset\lambda^c\subset\lambda^\rho$. y que estos espacios coinciden si λ es normal.

Diremos que un espacio de sucesiones λ es ρ-perfecto si $\lambda=(\lambda^\rho)^\rho=\lambda^{\rho\rho}$.

Propiedades algebraicas análogas a las establecidas por Köthe [18] para la α-dualidad se demuestran para la ρ-dualidad:

Proposición 1.1

Si λ y μ son espacios de sucesiones:

(a) $\lambda\subset\mu$ implica $\mu^\rho\subset\lambda^\rho$.

(b) $\lambda^{\rho\rho}\supset\lambda$.

(c) λ^ρ es ρ-perfecto.

(d) $\lambda^{\rho\rho}$ es el menor espacio ρ-perfecto que contiene a λ .

(e) Si λ es ρ-perfecto, entonces $\lambda\supset\varphi$.

Demostración:

(a) Si $u\in\mu^\rho$, $(u\cdot x)\in Sa$ para cualquier $x\in\mu\supset\lambda$, luego $u\in\lambda^\rho$.

(b) Como $\lambda^{\rho\rho} = (\lambda^{\rho})^{\rho}$, para cada $x \in \lambda$, y $u \in \lambda^{\rho}$,$(ux) \in sa$ con lo que $x \in \lambda^{\rho\rho}$.

(c) $(\lambda^{\rho})^{\rho\rho} \supset \lambda^{\rho}$ por (b) y como $\lambda^{\rho\rho} \supset \lambda$,(a) asegura que $(\lambda^{\rho\rho})^{\rho} \subset \lambda^{\rho}$.

(d) Si existe μ , ρ-perfecto tal que $\mu \supset \lambda$, de (a) se sigue que $\mu = \mu^{\rho\rho} \supset \lambda^{\rho\rho}$.

(e) Como $\lambda^{\rho\rho} = \lambda$, λ es el ρ-dual de λ^{ρ} ; por otro lado si $u \in \varphi, (u \cdot x) \in sa$ para todo $x \in \lambda^{\rho}$, por lo que $u \in \lambda$. ■

Como el espacio de sucesiones $sa = ([e] \oplus \varphi)^{\rho}$, tenemos un ejemplo de espacio ρ-perfecto. Además sa no es normal debido a que la sucesión $(1,-2,+3,\ldots) \in sa$ y sin embargo tomando sus valores absolutos $(1,2,3,\ldots) \notin sa$. En consecuencia (sa) es un espacio ρ-perfecto que no es α-perfecto.

Sea $R = \left\{ (t^i)_{i=0,1\ldots} \; 0 \leq t \leq 1 \right\}$ el conjunto formado por estas sucesiones de variación acotada. Para un espacio de sucesiones λ denotamos $R(\lambda) = \{ y \in \omega : (y_i) = (x_i t^i)$ con $(t^i) \in R$, $(x_i) \in \lambda \}$ siguiendo la notación de Antonino [2] .

Proposición 1.2

$\langle [R(\lambda)], \lambda^{\rho} \rangle$ es un par dual con la forma bilineal de Abel.

Demostración

Como $e \in R$, $\lambda \subset [R(\lambda)]$, luego $[R(\lambda)]^{\rho} \subset \lambda^{\rho}$. Por otro lado si $u \in \lambda^{\rho}$, para todo $x \in [R(\lambda)]$

$$x = \sum_{K=1}^{p} \lambda_K x^K \qquad \text{con} \qquad x^K \in R(\lambda)$$ hay que probar

existe $\langle x, u\rangle = \sum_{K=1}^{p} \lambda_K \langle x^K, u\rangle$

Es suficiente que exista $\langle x, u\rangle$ para todo $x = (y_i t^i)$ con $y \in \lambda$, $0 \leq t \leq 1$; $\langle x, u\rangle = \lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} u_i y_i (t\rho)^i$

existe dado que $y \in \lambda$, $u \in \lambda^\rho$. ■

<u>Proposición 1.3</u>

El ρ-dual de cualquier espacio de sucesiones verifica $\lambda^\rho = R(\lambda^\rho)$.
Si λ es un espacio de sucesiones ρ-perfecto, $\lambda = R(\lambda)$.

<u>Demostración</u>

Como $e \in R$, $\lambda^\rho \subseteq R(\lambda^\rho)$. Si $u \in R(\lambda^\rho)$ hay que probar $(ux) \in sa$ para todo $x \in \lambda$. Dado que $u = (v_i t^i)$, $0 \leq t$ $v \in \lambda^\rho$; cuando $t=1$, $u \in \lambda^\rho$ y cuando $0 \leq t < 1$, la sucesión $(v_i t^i) \in \lambda^\alpha$ porque existe $\lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} x_i v_i \rho^i$ y entonc $(x_i v_i t^i) \in l^1$ si $0 \leq t < 1$ para todo $x \in \lambda$. En consecuencia $u \in \lambda^\rho$. ■

Teniendo en cuenta las observaciones de M.Flo cio en [8] :
Diremos que un espacio de sucesiones λ es (da)-invariante $da(\lambda) = \{(u_i x_i) : u \in da, x \in \lambda\} \subseteq \lambda$; donde (da) es el espac ρ-dual de sa. Como $e_i \in da, i=0,1\ldots$, si λ es (da)-invaria $\lambda \supset \varphi$.

Dado que $e \in$ da, cualquier espacio de sucesio verifica $\lambda \subseteq da(\lambda)$, por otro lado como $l^1 \subset$ sa, da $\subset$ (l

$= l^{\infty}$, tenemos que todo espacio normal (l^{∞}-invariante) es - (da)-invariante.

Proposición 1.4

El ρ-dual de un espacio de sucesiones es (da)-invariante. En particular todo espacio ρ-perfecto es (da)-invariante.

Demostración

Para un $\lambda \subset \omega$ hay que probar $da(\lambda^{\rho}) \subseteq \lambda^{\rho}$, sea (d.u) $\in da(\lambda^{\rho})$, $d \in da$ y $u \in \lambda^{\rho}$, entonces para cada $x \in \lambda$,$(u.x) \in sa$ con lo que $(d.u.x) \in sa$, en consecuencia $(du) \in \lambda^{\rho}$. ∎

Sea $\{\lambda_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de espacios de sucesiones, considerados como subespacios vectoriales de ω. Vamos a estudiar las propiedades de los espacios de sucesiones que obtenemos mediante :

$$\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha = \left[\bigcup_{\alpha \in A} \lambda_\alpha\right] \quad , \quad \bigcap_{\alpha \in A} \lambda_\alpha$$

Proposición 1.5

(a) Si todos los $\lambda_\alpha \supset \varphi$, entonces $\left(\sum_\alpha \lambda_\alpha\right)^{\rho} = \bigcap_\alpha \lambda_\alpha^{\rho}$

(b) Si todos los λ_α son ρ-perfectos, $\left(\bigcap_\alpha \lambda_\alpha\right)^{\rho} = \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha^{\rho}\right)^{\rho\rho}$

(c) Si todos los λ_α son ρ-perfectos, $\bigcap_\alpha \lambda_\alpha$ es también - ρ-perfecto.

Demostración.

(a) Si $u \in \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha\right)^{\rho}$, $ux \in sa$ para todo $x \in \sum_\alpha \lambda_\alpha \supseteq \bigcup_\alpha \lambda_\alpha$

luego $(ux) \in sa$ para cada $x \in \lambda_\alpha$ y para cada α, luego -- $u \in \bigcap_\alpha \lambda_\alpha^\rho$.

Si $u \in \bigcap_\alpha \lambda_\alpha^\rho$, $(ux) \in sa$, para cada $x \in \lambda_\alpha$ y para cada α; por lo que $(uy) \in sa$, siendo y una combinación lineal finita de elementos de los espacios λ_α con lo que $u \in \left(\sum_\alpha \lambda_\alpha\right)$

(b) $\left\{\left(\sum_\alpha \lambda_\alpha^\rho\right)^\rho\right\}^\rho = \left\{\bigcap_\alpha \lambda_\alpha^{\rho\rho}\right\}^\rho = \left(\bigcap_\alpha \lambda_\alpha\right)^\rho$ por ser los λ_α espacios ρ-perfectos.

(c) $\left(\sum_\alpha \lambda_\alpha^\rho\right)^\rho = \bigcap_\alpha \lambda_\alpha^{\rho\rho} = \bigcap_\alpha \lambda_\alpha$, luego este espacio es ρ-dual de $\sum_\alpha \lambda_\alpha^\rho$ por lo que P 1.1 asegura que es ρ-perfecto. ■

<u>Proposición 1.6</u>

Si todos los espacios λ_α contienen a φ o son -- (da)-invariantes, los espacios $\sum_\alpha \lambda_\alpha$, $\bigcap_\alpha \lambda_\alpha$ tienen la misma propiedad.

<u>Demostración</u>

Si los $\lambda_\alpha \supset \varphi$, es inmediato lo mismo para los dos espacios.

Si los λ_α son (da)-invariantes; para cualquier $x \in \bigcap_\alpha \lambda_\alpha$ y $d \in da$, tenemos que $(d.x) \in \lambda_\alpha$, para cada α por lo que $(dx) \in \bigcap_\alpha \lambda_\alpha$.

Para cualquier $x \in \sum_\alpha \lambda_\alpha$, $x = \sum_{K=1}^{p} x^K$ con $x^K \in \lambda_{\alpha_K}$, si $d \in da$, $(d.x) = \sum_{K=1}^{p} (d.x^K) \in \sum_\alpha \lambda_\alpha$ porque cada $(d.x^K) \in \lambda_{\alpha_K}$, $K=1,\dots p$. ■

Teniendo en cuenta que el espacio sa es ρ-dual de la envoltura lineal de e mas el subespacio φ; podemos obtener de cada sucesión $a=(a_i)\in\omega$ el siguiente espacio de sucesiones

$$\lambda_a = \{ (x_i)\in\omega \ : \ (a_i x_i)\in sa \}$$

Es inmediato comprobar que $\lambda_a = ([a]\oplus\varphi)^{\rho}$ y por tanto es ρ-perfecto. Estos espacios λ_a nos proporcionan una representación de los espacios ρ-perfectos:

Proposición 1.7

Si λ es un espacio de sucesiones ρ-perfecto:

(a) $\lambda = \bigcap_{u\in\lambda^{\rho}} \lambda_u$

(b) $\lambda^{\rho} = \sum_{u\in\lambda^{\rho}} \lambda_u^{\rho}$

Demostración.

Si $x\in\lambda = \lambda^{\rho\rho}$, $ux\in sa$ para cada $u\in\lambda^{\rho}$, luego $x\in\lambda_u$ para cada $u\in\lambda^{\rho}$ con lo que $x\in\bigcap_{u\in\lambda^{\rho}}\lambda_u$. El recíproco es análogo.

Todos los λ_u son espacios ρ-perfectos, luego $\left(\sum_{u\in\lambda^{\rho}} \lambda_u^{\rho}\right)^{\rho\rho} = \left(\bigcap_{u\in\lambda^{\rho}}\lambda_u\right)^{\rho} = \lambda^{\rho}$ por lo que $\sum_{u\in\lambda^{\rho}}\lambda_u^{\rho} \subseteq \lambda^{\rho}$. Recíprocamente si $u\in\lambda^{\rho}$, como todo $u\in(\lambda_u)^{\rho}$, tenemos que $u\in\sum_{u\in\lambda^{\rho}}\lambda_u^{\rho}$. ■

2. TOPOLOGIAS DEBILES DEL PAR DUAL

Dado un espacio de sucesiones $\lambda \supset \varphi$ y su ρ-dual λ^ρ, podemos topologizar ambos porque $\langle \lambda, \lambda^\rho \rangle$, forman par -- dual con la forma bilineal de Abel. Vamos a estudiar las topo logias débiles: $\sigma(\lambda, \lambda^\rho), \sigma(\lambda^\rho, \lambda)$.

Hemos definido en el espacio (sa), el concepto de -- ρ-convergencia para analizar el comportamiento de las sec-- ciones de un vector. En el espacio $\lambda \supset \varphi$, diremos que las secciones $\{x^n\}_K$ de un $x \in \lambda$, ρ-convergen a x cuando $\lim_{\rho \to 1^-} \left[\lim_{K \to +\infty} \sum_{i=0}^{K} x_i \rho^i e_i \right] = x$; estando ambos límites tomados en el sentido de la topologia que tenga λ.

Análogamente se define este concepto para el ρ-dual λ^ρ.

Proposición 2.1

Para cada $u \in \lambda^\rho$, las secciones ρ-convergen a u en la topologia $\sigma(\lambda^\rho, \lambda)$.

Demostración.

En primer lugar probamos que la función definida en (0,1) con valores $\{ (u_i t^i) : 0 < t < 1 \}$, para $u \in \lambda^\rho$ fijo verifica: $\lim_{t \to 1^-} (u_i t^i) = (u_i)$ y después que la suce sión $\left(\sum_{i=0}^{K} u_i t^i e_i \right)_{K=0,1,\dots} \longrightarrow (u_i t^i)$ para cada t fijo, 0 < t < 1; ambos límites para la topologia $\sigma(\lambda^\rho, \lambda)$.

Para cada $\sigma(\lambda^\rho, \lambda)$ -entorno de 0, U, hay que encontrar un t_0 tal que si $t_0 \leqslant t < 1$, entonces $(u_i) - (u_i t^i) \in U$. Es decir:

Dados $\varepsilon > 0$, $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \lambda$ hay que encontrar $t_0 \in (0,1)$ tal que si $t_0 \leq t < 1$, entonces $\left|\left\langle (u_i)-(u_it^i), x^h \right\rangle\right| < \varepsilon$ para h=1,2,...n.

$$\left|\left\langle (u_i)-(u_it^i), x^h \right\rangle\right| = \left| \lim_{t\to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} u_ix_i^h t^i - \sum_{i=0}^{+\infty} u_ix_i^h t^i \right|$$

porque como $(u.x^h) \in$ sa, entonces $(u_ix_i^ht^i) \in 1^1$ para h=1,2,..n cuando $0 < t < 1$.

Para $\varepsilon > 0$, escogemos el mayor $t_0 \in (0,1)$ para h=1, 2,...n tal que si $t_0 \leq t < 1$, entonces:

$$\left| \lim_{t\to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} u_ix_i^h t^i - \sum_{i=0}^{+\infty} u_ix_i^h t^i \right| < \varepsilon$$

para h=1,2,...n.

Además para cada $t \in (0,1)$ fijo, probamos que:

$$\left(\sum_{i=0}^{K} u_it^ie_i \right) \xrightarrow{\sigma(\lambda^\rho,\lambda)} (u_it^i)$$

Dados $\varepsilon > 0$ y $x^1, x^2, \ldots, x^n \in \lambda$, hay que encontrar $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $K \geq K_0$, entonces:

$$\left| \left\langle (u_it^i) - (u_0, u_1t, \ldots, u_Kt^K, 0, \ldots), x^h \right\rangle \right| =$$

$$= \left| \lim_{\rho\to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} u_ix_i^h (t\rho)^i - \sum_{i=0}^{K} u_ix_i^h t^i \right| = \left| \sum_{i=0}^{+\infty} u_ix_i^h t^i - \sum_{i=0}^{K} u_ix_i^h t^i \right| < \varepsilon$$

para h=1,2,...n, si elegimos el mayor $K_0 \in \mathbb{N}$, dado que se trata de restos de series convergentes porque $(u_ix_i^h t^i) \in 1^1$. ∎

Observemos que, como $\lambda^\rho = R(\lambda^\rho)$ el dominio de la función, $\{(u_it^i) : 0 < t < 1\} \subset \lambda^\rho$; pero en cualquier espacio de sucesiones no podemos garantizarlo.

Entonces, de la anterior proposición se sigue.

Proposición 2.2

Si $\lambda \supset \varphi$ es un espacio de sucesiones tal que $R(\lambda)=\lambda$; para cada $x\in\lambda$, las secciones ρ-convergen a x en la topologia $\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})$.

Proposición 2.3

Si la sucesión $(x^n)\subset\lambda$ converge a $x^o\in\lambda$ para la topología $\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})$, o para topologias más finas del par dual, la sucesión (x^n) converge coordenada a coordenada a x^o.

Demostración.

Considero la aplicación $x\in\lambda\longrightarrow x_i\in\mathbb{K}$; viene dada por e_i porque $\langle x,e_i\rangle = x_i$, como $e_i\in\lambda^{\rho}$ esta aplicación es -- $\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})$-continua; y será continua para cualquier topologia del par dual.

Si $(x^n)\xrightarrow{\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})} x^o$ entonces $\langle x^n,e_i\rangle \xrightarrow{\mathbb{K}} \langle x^o,e_i\rangle$ para cada i fijo; entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} x_i^n = x_i^o$ para cada i fijo. ■

Vamos a probar una condición suficiente para que un espacio de sucesiones sea ρ-perfecto.

Proposición 2.4

Si un espacio de sucesiones $\lambda\supset\varphi$ es $\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})$--sucesionalmente completo, entonces λ es ρ-perfecto.

Demostración.

Es suficiente probar que $\lambda^{\rho\rho}\subset\lambda$. Si $x\in\lambda^{\rho\rho}$, entonces P.2.2 asegura que

$$x = \lim_{\rho\to 1^-}\left[\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=0}^{k} x_i\rho^i e_i\right] = \lim_{j\to+\infty}\left[\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=0}^{k} x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i\right] =$$

$$= \lim_{j\to+\infty}\left[\lim_{k\to+\infty}\alpha^{kj}(x)\right] \quad ; \quad \alpha^{kj}(x) = \sum_{i=0}^{k} x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i =$$

$$= \left(x_0, x_1\left(\frac{j}{j+1}\right), \cdots\cdots\cdots x_k\left(\frac{j}{j+1}\right)^k, 0, \ldots\right) \in \varphi \subset \lambda$$

Entonces $\{\alpha^{kj}(x)\}_{k=0,1,\ldots} \subset \lambda$ es $\sigma(\lambda^{\rho\rho}, \lambda^{\rho})$ -Cauchy, como la topologia débil del par $\langle \lambda^{\rho\rho}, \lambda^{\rho}\rangle$ induce en λ la topologia débil del par $\langle \lambda, \lambda^{\rho}\rangle$ tenemos que $\{\alpha^{kj}(x)\}_{k=0,1,\ldots}$ es una sucesión $\sigma(\lambda, \lambda^{\rho})$-Cauchy, y por hipótesis será convergente a un elemento de λ que debe ser exactamente

$$\left(x_0, x_1\left(\frac{j}{j+1}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots \right) \in \lambda$$

porque P.2.3 asegura que se da la convergencia coordenada a - coordenada.

Para cada j tenemos que $\beta_j(x) = \left(x_0, x_1\left(\frac{j}{j+1}\right), \ldots\ldots \right) \in \lambda$ y que $\{\beta_j(x)\} \longrightarrow x$ en la topología $\sigma(\lambda^{\rho\rho}, \lambda^{\rho})$; análogamente será de Cauchy en $\sigma(\lambda, \lambda^{\rho})$ por lo que converge a cierto elemento de λ que necesariamente es x por P.2.3.

Entonces $x \in \lambda$. ■

Proposición 2,5

Si $\lambda \supset \varphi$ es un espacio de sucesiones tal que $\lambda = R(\lambda)$ entonces λ es $\sigma(\lambda, \lambda^{\rho})$-separable.

Demostración.

Vamos a probar que el conjunto numerable

$N = \{ \sum_{i=0}^{K} \rho_i^{(K)} \left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i$ con $\rho_i^{(K)}$ de coordenadas racionales:

$K=0,1,\dots;\ j=1,2,\dots\} \subset \varphi \subset \lambda$ es denso en λ ; es decir que para todo $x\in\lambda$ existe una sucesión doble $\{x^{(K,j)}\}_{\substack{K=0,1,\dots\\ j=1,2,\dots}} \subset N$ tal que en la topología $\sigma(\lambda,\lambda^\rho)$ se verifica: $\lim_{j\to+\infty}\left[\lim_{K\to+\infty} x^{(K,j)}\right] = x$.

Dado $x\in\lambda$, para k=0,1,... y j=1,2,... consideramos la sucesión $x^{(K,j)} = \sum_{i=0}^{K} \rho_i^{(K)} \left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i \in N$ con $|x_i - \rho_i^{(K)}| \leqslant \frac{|x_i|}{K}$;i=0,1,...k.

La P.2.2 asegura que en la topologia $\sigma(\lambda,\lambda^\rho)$: $\lim_{t\to 1^-}(x_i t^i) = (x_i)$ por lo que en particular $\lim_{j\to+\infty}\left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) = (x_i)$

Entonces, es suficiente probar que para cada j=1,2.. fijo tenemos : $\lim_{K\to+\infty} x^{(K,j)} = \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right)$ en la topología $\sigma(\lambda,\lambda^\rho)$.

En efecto: $\forall\, \varepsilon>0$; $\forall\, u^1,\dots\dots,u^n \in \lambda^\rho$, hay que encontrar $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $K \geqslant K_0$ entonces,

$$\left|\left\langle \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - x^{(K,j)}, u^h\right\rangle\right| \leqslant \left|\left\langle \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - \sum_{i=0}^{K} x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i, u^h\right\rangle\right| +$$

$$+\left|\left\langle \sum_{i=0}^{K} x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i - \sum_{i=0}^{K}\rho_i^{(K)}\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i, u^h\right\rangle\right| < \varepsilon \ ;\ h=1,\dots,n.$$

Dado que en P.2.2.se asegura que la sucesión $\left(\sum_{i=0}^{K} x_i t^i e_i\right)_{K=0,1,..} \xrightarrow{\sigma(\lambda,\lambda^\rho)} (x_i t^i)$ para cada t fijo, $0 < t < 1$

tenemos que en particular dados $\varepsilon > 0$ y $u^1, \ldots\ldots, u^n \in \lambda^\rho$, existe $K_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $K \geqslant K_1$, entonces

$$\left|\left\langle \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - \sum_{i=0}^{K} x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i \,,\, u^h \right\rangle\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

h=1,2,...n, para cada j =1,2,...fijo.

Por otro lado: $\left|\left\langle \sum_{i=0}^{K} x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i - \sum_{i=0}^{K} \rho_i^{(K)}\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i \,,\, u^h \right\rangle\right| =$

$$= \left|\sum_{i=0}^{K} (x_i - \rho_i^{(K)})\, u_i^h \left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{K} |x_i - \rho_i^{(K)}|\,|u_i^h| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leqslant \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|\,|u_i^h| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i$$

como $x \in \lambda$; $u^1, \ldots\ldots, u^n \in \lambda^\rho$

entonces existe : $\max_{h=1,\ldots,n} \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i|\cdot|u_i^h| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i = M$

y dado que $\frac{M}{K} < \frac{\varepsilon}{2}$ si $K \geqslant K_2$, tenemos que $K_0 = \max\{K_1, K_2\}$

porque si $K \geqslant K_0$: $\left|\left\langle \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - x^{(K,j)} \,,\, u^h \right\rangle\right| < \varepsilon$, $h = 1,..n$; $j \in \mathbb{N}$.

3. LAS φ-TOPOLOGIAS.

Dado un espacio de sucesiones $\lambda \supset \varphi$, podemos definir las topologias débil, de Mackey y fuerte del par dual $\langle \lambda, \lambda^{\varphi} \rangle$

Vamos a topologizar λ y λ^{φ} a partir de la topología original de (sa), obteniendo topologias que jugarán un papel similar a la topologia normal.

Consideramos la base de entornos de 0 absolutamente convexos y cerrados en sa:

$$\frac{1}{j} U_j = \left\{ x \in sa \; : \; \|x\| + q_j(x) \leq \frac{1}{j} \right\} \quad , \; j = 1, 2, \ldots$$

Sus polares $\{ j \cdot U_j^{o} \}_{j=1,2,..}$ constituyen una sucesión fundamental de equicontinuos en (da), son absolutamente convexos y σ(da,sa)-compactos por el teorema de Alaouglu-Bourbaki.

Esta familia de conjuntos trasladada a los espacios λ^{φ} y λ permitirá definir topologias en λ y λ^{φ} compatibles con los pares $\langle \lambda, \lambda^{\varphi} \rangle$ y $\langle \lambda^{\varphi}, \lambda \rangle$ respectivamente.

En primer lugar topologizamos λ , como λ^{φ} es un espacio (da)-invariante, podemos definir para cada $u \in \lambda^{\varphi}$ la aplicación lineal:
$$f_u : da \longrightarrow \lambda^{\varphi}$$
$$(\alpha_i) \longmapsto (\alpha_i u_i)$$

Proposición 3.1

La aplicación lineal $f_u : da\,[\sigma(da, sa)] \longrightarrow \lambda^{\varphi}[\sigma(\lambda^{\varphi}, \lambda)]$ es continua para cada $u \in \lambda^{\varphi}$.

Demostración

Sea U , $\sigma(\lambda^{\varphi}, \lambda)$-entorno de 0 cualquiera, hay que encontrar un $\sigma(da,sa)$-entorno de 0 : V tal que $f_u(V) \subseteq U$

Dados $\varepsilon > 0$ y $x^1, x^2, \ldots x^n \in \lambda$, como $u \in \lambda^\rho$ tenemos que $(x_i^h \cdot u_i) \in sa$, h=1,2,...n, por lo que sus polares: $(x_i^h \cdot u_i)^o$, h=1,2,...n, son $\sigma(da,sa)$-entornos de 0 y en consecuencia $V = \varepsilon \bigcap_{h=1}^{n} (x_i^h \cdot u_i)^o$ es un $\sigma(da,sa)$-entorno de 0 .

Vamos a probar que $f_u(V) \subseteq U$; para h=1,2,...n sea $y \in (x_i^h \cdot u_i)^o$ entonces, $|\langle y, (x^h \cdot u)\rangle| = |\langle (y \cdot u), x^h\rangle| \leq 1$ por lo que : $|\langle (\varepsilon y \cdot u), x^h\rangle| \leq \varepsilon$ para h=1,2,...n

Por tanto $f_u(\varepsilon y) = (\varepsilon y \cdot u) \in U$. ■

De este resultado se sigue inmediatamente:

Corolario: La familia de subconjuntos de λ^ρ : $\{f_u(U_j^o)\}_{\substack{u \in \lambda^\rho \\ j=1,2,\ldots}}$ son absolutamente convexos y $\sigma(\lambda^\rho, \lambda)$-compactos.

Esta familia se caracteriza introduciendo un nuevo concepto:

Para cada $u \in \lambda^\rho$ y para cada $j \in \mathbb{N}$ la $(da)_j$-envoltura de u es el subconjunto:

$$\{u\}_j^{da} = \{(\alpha_i u_i) : (\alpha_i) \in U_j^o \subseteq da\} = f_u(U_j^o)$$

Entonces la familia $\left(\{u\}_j^{da}\right)_{\substack{u \in \lambda^\rho \\ j=1,2,\ldots}}$ con todos sus subconjuntos y las envolturas absolutamente convexas de las uniones finitas de elementos de dicha familia permiten definir una topologia polar en λ .

Los polares $\left[\left(\{u\}_j^{da}\right)^o\right]_{\substack{u \in \lambda^\rho \\ j=1,2,\ldots}}$ y todas sus intersecciones finitas forman una base de entornos de 0 para una topologia localmente convexa en λ compatible con el par --

dual $\langle \lambda, \lambda^{\rho} \rangle$ que denominamos ρ-topologia de λ, denotándola $\tau_{\rho}(\lambda, \lambda^{\rho})$.

Para topologizar el espacio λ^{ρ}, teniendo en cuenta que $\lambda^{\rho\rho}$ es da-invariante, mediante el mismo proceso obtenemos la topologia $\tau_{\rho}(\lambda^{\rho}, \lambda^{\rho\rho})$.

Sin embargo cuando el espacio de sucesiones λ es (da)-invariante; para cada $x \in \lambda$ podemos definir la aplicación lineal:

$$g_x : da \longrightarrow \lambda$$
$$(\alpha_i) \longmapsto (\alpha_i \cdot x_i)$$

Dado que trivialmente se verifica que esta aplicación es continua para las topologias débiles $\sigma(da, sa)$ y $\sigma(\lambda, \lambda^{\rho})$ los subconjuntos $g_x(U_j^{\circ}) = \{x\}_j^{da}$, $x \in \lambda$, $j = 1, 2, \ldots$ son absolutamente convexos y $\sigma(\lambda, \lambda^{\rho})$-compactos.

Mediante esta familia podemos definir una topologia polar en λ^{ρ}, compatible con el par $(\lambda^{\rho}, \lambda)$ que denotamos $\tau_{\rho}(\lambda^{\rho}, \lambda)$. Es inmediato que $\tau_{\rho}(\lambda^{\rho}, \lambda)$ es menos fina que $\tau_{\rho}(\lambda^{\rho}, \lambda^{\rho\rho})$.

Proposición 3.2

En el espacio (sa) coinciden la ρ-topologia y su topologia original.

Demostración

Como (sa) es un Fréchet, su topologia original dada por las normas $\{ \|\| + q_j \}_{j=1,2,\ldots}$ coincide con la topologia --- fuerte $\beta(sa,da)$ y dado que τ_ρ es compatible con el par - $\langle sa, da \rangle$, es suficiente probar que la ρ-topologia es más fina que la original. En efecto: los subconjuntos $\left(\frac{1}{j} U_j\right)_{j=1,2,\ldots}$

forman una base de entornos de 0 para la topologia original de sa,

$\left(\frac{1}{j} U_j\right)^o = j\, U_j^o = \{je\}_j^{da}$; $je = (j, j, \ldots\ldots) \in da$ con lo que:

$$\frac{1}{j} U_j = \left(\frac{1}{j} U_j\right)^{oo} = \left(\{je\}_j^{da}\right)^o \quad \text{es un } \tau_\rho(sa,da)\text{-entorno de } 0.$$

Proposición 3.3

Si $\lambda \supset \varphi$ es un espacio de sucesiones tal que ----- $R(\lambda) = \lambda$, para cada $x \in \lambda$ las secciones ρ-convergen a x en la topologia $\tau_\rho(\lambda, \lambda^\rho)$.

Demostración

Primero probamos que la función definida en (0,1) cuyos valores son $\{ (x_i t^i) : 0 < t < 1 \}$ verifica $\lim_{t \to 1^-} (x_i t^i) = (x_i)$ y después que para cada t fijo, $0 < t < 1$, $\lim_{k \to +\infty} \sum_{i=0}^{k} x_i t^i e_i = (x_i t^i)$ con ambos límites para la topologia $\tau_\rho(\lambda, \lambda^\rho)$.

Para cada $\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)$-entorno de 0 : U, hay que encontrar t_o tal que si $t_0 \leqslant t < 1$, entonces $(x_i) - (x_i t^i) \in U$, como U es intersección finita de entornos de 0 de la forma $\left[\{u\}_j^{da}\right]^o$, $u \in \lambda^\rho$, j=1,2,...,n; es suficiente probar que $\left| \langle (x_i) - (x_i t^i), (\alpha_i u_i) \rangle \right| \leqslant 1$ para todo $(\alpha_i) \in U_j^o$; lo que equivale a demostrar que $\left| \left\langle (x_i u_i) - (x_i u_i t^i) , (\alpha_i) \right\rangle \right| \leq 1$ para $(\alpha_i) \in U_j^\circ$, para lo que es suficiente que $(x_i u_i) - (x_i u_i t^i) \in U_j$ teniendo en cuenta que $(x_i \cdot u_i) \in$ sa.

Dado que en el espacio (sa) ρ-convergen las secciones de cualquier elemento, tenemos que para $\varepsilon = 1$ y para cualquier $j \in \mathbb{N}$ existe t_0 tal que si $t_0 \leq t < 1$, $(x_i u_i) - (x_i u_i t^i) \in U_j$ lo cual asegura el resultado.

Suponiendo $0 < t < 1$, fijo, probaremos

$$\left(\sum_{i=0}^{K} x_i t^i e_i \right) \xrightarrow{\tau_\rho(\lambda, \lambda^\rho)} (x_i t^i)$$

dado un τ_ρ-entorno de 0 de la forma $\left[\{u\}_j^{da} \right]^\circ$, $u \in \lambda^\rho$, $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $(x_i u_i) \in$ sa por lo que : $\lim\limits_{K \to +\infty} \sum_{i=0}^{K} x_i u_i t^i e_i = (x_i u_i t^i)$ en la topologia de (sa), por lo que para $\varepsilon = 1$ y $j \in \mathbb{N}$ existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $K \geq K_0$, entonces : $(x_i u_i t^i) - (x_0 u_0, \ldots, x_K u_K, 0, \ldots) \in U_j$ con lo que para todo $(\alpha_i) \in U_j^\circ$ tenemos que:

$$\left| \left\langle (x_i u_i t^i) - \sum_{i=0}^{K} x_i u_i t^i e_i , (\alpha_i) \right\rangle \right| = \left| \left\langle (x_i t^i) - \sum_{i=0}^{K} x_i t^i e_i , (\alpha_i u_i) \right\rangle \right| \leq 1$$

entonces : $(x_i t^i) - \sum_{i=0}^{K} x_i t^i e_i \in \left(\{u\}_j^{da} \right)^\circ$, $K \geq K_0$.

Como todo $\tau_\rho(\lambda, \lambda^\rho)$-entorno de 0 es intersección finita de los anteriores el resultado es inmediato. ∎

<u>Proposición 3.4</u>

Si un espacio de sucesiones $\lambda \supset \varphi$ es $\tau_\rho(\lambda, \lambda^\rho)$-sucesionalmente completo, entonces λ es ρ-perfecto.

<u>Demostración</u>

Tenemos que probar que si $x \in \lambda^{\rho\rho}$, entonces $x \in \lambda$. La P.3.3 afirma que para cualquier $x \in \lambda^{\rho\rho}$, las secciones

ρ- convergen a x en la topologia $\tau_\rho(\lambda^{\rho\rho},\lambda^\rho)$ luego :

$$x = \lim_{\rho\to 1^-}\left[\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=0}^{k} x_i\rho^i e_i\right] = \lim_{j\to+\infty}\left[\lim_{k\to+\infty}\sum_{i=0}^{k} x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i\right] =$$

$$= \lim_{j\to+\infty}\left[\lim_{k\to+\infty}\alpha^{kj}(x)\right]$$

Como $\alpha^{kj}(x)\subset\varphi\subset\lambda$, tenemos que $\{\alpha^{kj}(x)\}_{k=0,1,..}$ converge en la topologia τ_ρ del par $\langle\lambda^{\rho\rho},\lambda^\rho\rangle$ y dado que esta topologia induce en λ la topologia τ_ρ del par $\langle\lambda,\lambda^\rho\rangle$, tenemos que $\{\alpha^{kj}(x)\}_{k=0,1,..}$ es una sucesión $\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)$ - Cauchy en λ . Entonces, por hipótesis, la sucesión converge a un elemento de λ que es: $\left(x_0,\ x_1\left(\frac{j}{j+1}\right),\ x_2\left(\frac{j}{j+1}\right)^2,\ldots\ldots\right)$ dado que en P.2.3 asegura que τ_ρ-convergencia implica convergencia coordenada. Entonces la sucesión: $\{\beta_j(x)\}_{j=1,2,}=\left\{\left(x_0,\ x_1\left(\frac{j}{j+1}\right),\ x_2\left(\frac{j}{j+1}\right)^2,\ldots\right)\right\}_{j=1,2,..}\subset\lambda$ y como converge en la topologia τ_ρ del par $\langle\lambda^{\rho\rho},\lambda^\rho\rangle$, tenemos que $\{\beta_j(x)\}_{j=1,2,..}$ es de Cauchy en τ_ρ del par $\langle\lambda,\lambda^\rho\rangle$ con lo cual converge a un elemento de λ que necesariamente es x, luego $x\in\lambda$. ■

Dado un espacio de sucesiones λ , para cada elemento $u\in\lambda^\rho$ vamos a considerar la aplicación lineal

$$F_u:\ \begin{array}{l}\lambda\longrightarrow sa\\ x\longmapsto (x\cdot u)\end{array}$$

Proposición 3.5

La aplicación lineal $F_u:\lambda[\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)]\longrightarrow sa[\tau_\rho(sa,da)]$ es contínua para cada $u\in\lambda^\rho$.

Demostración

La P.3.2 asegura que los conjuntos $\left(\{je\}_j^{da}\right)^{o}$

forman una base de entornos de 0 para la topologia τ_ρ de $s\alpha$.

Dado un entorno de 0 cualquiera $U = (\{je\}_j^{da})^\circ$ tenemos que encontrar un τ_ρ-entorno de 0 en λ, V, tal que $F_u(V) \subseteq U$.

Para cada $u \in \lambda^\rho$, $ju \in \lambda^\rho$; sea $V = \left(\{ju\}_j^{da}\right)^\circ$ un τ_ρ-entorno de 0 en λ; probamos que si $x \in V$, entonces $F_u(x) = (x_i \cdot u_i) \in U$.

Si $x \in V$, entonces $|\langle x, y\rangle| \leq 1$ para todo $y \in \{ju\}_j^{da}$; como $y = j(\alpha_i u_i)$, $(\alpha_i) \in U_j^\circ$ tenemos que :

$$|\langle x, j(\alpha_i u_i)\rangle| = |\langle (x_i \cdot u_i), j(\alpha_i)\rangle| \leq 1 \quad \text{para todo } (\alpha_i) \in U_j^\circ,$$

lo que asegura que $(x_i \cdot u_i) \in \left(\{je\}_j^{da}\right)^\circ = U$ dado que los elementos de $\{je\}_j^{da}$ son de la forma $j(\alpha_i)$ con $(\alpha_i) \in U_j^\circ$. ∎

Proposición 3.6

Sea $\lambda \supset \varphi$, $\lambda^{\rho\rho}$ se obtiene tomando todos los límites coordenados de las sucesiones $\tau_\rho(\lambda, \lambda^\rho)$-Cauchy en λ.

Demostración.

En una proposición anterior hemos probado que todo $x \in \lambda^{\rho\rho}$ es límite coordenado de sucesiones $\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)$-Cauchy en λ.

Recíprocamente vamos a probar que toda sucesión $\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)$-Cauchy en λ tiene límite coordenado en $\lambda^{\rho\rho}$.

Sea $\{x^n\}_{n=1,2,\dots} \subset \lambda$ una sucesión de Cauchy para $\tau_\rho(\lambda, \lambda^\rho)$, que es más fina que $\sigma(\lambda, \lambda^\rho)$, luego $\{x^n\}_{n=1,2,\dots}$ es de Cauchy en $\sigma(\lambda, \lambda^\rho)$ por lo que para cada $e_i \in \lambda^\rho$ fijo tenemos:

Dado $\varepsilon > 0$ existe no tal que si $m > n \geqslant n_o n$ entonces: $|\langle x^m - x^n, e_i\rangle| = |x_i^m - x_i^n| < \varepsilon$;

por lo que cada $\{x_i^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ es de Cauchy en $\mathbb{K}$, luego converge a $x_i^o \in \mathbb{K}$, con lo que $x^o = (x_i^o) \in \omega$ es límite coordenado de $\{x^n\}$.

Tenemos que probar que cada $u \in \lambda^\rho$, $(u_i \cdot x_i^o) \in sa$, lo cual asegura que $x^o \in \lambda^{\rho\rho}$.

Dado que (sa) es (FK)-espacio, si probamos que la sucesión $\{(u_i x_i^n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset sa$ es de Cauchy en (sa) tendremos que -- converge en (sa) a un limite que coincide con el limite coordenado de $\{(u_i x_i^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, que es $(u_i \cdot x_i^o)$.

Pero P.3.5 asegura que la aplicación lineal $F_u : \lambda[\tau_\rho] \longrightarrow sa$ es continua para cada $u \in \lambda^\rho$, luego si $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)$ entonces $\{(u_i \cdot x_i^n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es - de Cauchy en sa. ∎

Mediante el concepto de completitud sucesional a coordenadas debido a M. Florencio [8] ;"Un espacio de sucesiones λ es τ_ρ-sucesionalmente completo a coordenadas si cada sucesión de τ_ρ-Cauchy en λ tiene límite coordenado en λ ".

Daremos una caracterización de los espacios ρ-perfectos.

Teorema 3.1

Sea $\lambda \supset \varphi$, λ es ρ-perfecto si y solo si λ es $\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)$-sucesionalmente completo a coordenadas.

Demostración

Si λ es ρ-perfecto, $\lambda = \lambda^{\rho\rho}$ y la proposición anterior afirma que toda sucesión $\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)$-Cauchy en λ tiene limite coordenado en $\lambda^{\rho\rho} = \lambda$.

Recíprocamente si λ es $\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)$-sucesionalmente completo a coordenadas, de nuevo P.3.6 asegura que cualquier $x \in \lambda^{\rho\rho}$ es límite coordenado de sucesiones $\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)$-Cauchy en λ , por lo que $x \in \lambda$ y en consecuencia $\lambda = \lambda^{\rho\rho}$. ∎

Estudiando la completitud en el ρ-dual λ^ρ de un espacio de sucesiones λ ,(da)-invariante, obtendremos resultados similares a los dados por Köthe para caracterizar los espacios α-perfectos.

En primer lugar enunciamos una proposición auxiliar cuya demostración es análoga a la prueba de P.3.5.

Proposición 3.7

Sea λ un espacio de sucesiones (da)-invariante. La aplicación lineal $G_x : \lambda^\rho[\tau_\rho(\lambda^\rho,\lambda)] \longrightarrow \mathcal{S}a$, $u \longmapsto (u_i x_i)$ es continua para cada $x \in \lambda$.

Proposición 3.8

Si λ es (da)-invariante, $\lambda^\rho[\tau_\rho(\lambda^\rho,\lambda)]$ es completo.

Demostración

Sea $\{u^{(p)} : p \in P, \geq\}$ una red de Cauchy en $\lambda^\rho[\tau_\rho(\lambda^\rho,\lambda)]$ entonces será de Cauchy en $\lambda^\rho[\sigma(\lambda^\rho,\lambda)]$ y como λ es (da)-invariante, $\varphi \subset \lambda$,por lo que para cada

$e_i \in \lambda$ fijo se verifica que: Dado $\varepsilon > 0$ existe $h \in P$ tal que:

$$\left| \left\langle e_i \, , u^{(r)} - u^{(s)} \right\rangle \right| = \left| u_i^{(r)} - u_i^{(s)} \right| < \varepsilon \quad , \; r,s \in P \; ; \; r,s \geqslant h \quad ;$$

es decir que cada $\{ u_i^{(p)} : p \in P, \geqslant \}$ es una red de Cauchy en $\mathbb{K}$ para $i=0,1,\ldots,$ luego converge a $u_i^0 \in \mathbb{K}$. Entonces $u^0 = (u_i^0) \in \omega$ es límite coordenado de la red $\{ u^{(p)} : p \in P, \geqslant \}$

Probaremos que $u^0 \in \lambda^{\varrho}$ y que $\{ u^{(p)} ; p \in P, \geqslant \} \xrightarrow{\tau_{\varrho}(\lambda^{\varrho}, \lambda)} u^0$

En primer lugar, sea $x \in \lambda$ cualquiera, como la proposición anterior afirma que G_x es lineal y continua, tenemos que : $\{ G_x(u^{(p)}) : p \in P, \geqslant \} = \{ (u_i^{(p)} x_i) : p \in P, \geqslant \}$ es de Cauchy en (sa). Dado que (sa) es un (FK)-espacio, la red $\{ (u_i^{(p)} x_i) : p \in P, \geqslant \}$ converge a un elemento de (sa) que necesariamente es su límite coordenado $(u_i^0 x_i) \in$ sa. lo cual asegura que $u^0 \in \lambda^{\varrho}$.

Por último, dados $x \in \lambda$ y $j \in \mathbb{N}$ existe $h \in P$ tal que para $p \in P$ si $p \geqslant h$: $(u_i^0 x_i) - (u_i^{(p)} x_i) \in U_j$

Entonces: $\left| \left\langle (u_i^0 x_i) - (u_i^{(p)} x_i) \, , \, (\alpha_i) \right\rangle \right| \leqslant 1$

para todo $(\alpha_i) \in U_j^0$ y $\left| \left\langle u^0 - u^{(p)} ; \, (\alpha_i x_i) \right\rangle \right| \leqslant 1$

con $(\alpha_i) \in U_j^0$.

En consecuencia: $u^0 - u^{(p)} \in \left(\{ x \}_j^{da} \right)^0$ si $p \in P$

$p \geqslant h$ y la red $\tau_{\varrho}(\lambda^{\varrho}, \lambda)$ -converge a u^0 . ■

Demostramos una caracterización de los espacios -- ϱ-perfectos mediante la completitud.

<u>Teorema 3.2</u>

Sea $\lambda \supset \varphi$. λ es ϱ-perfecto si y solo si $\lambda[\tau_{\varrho}(\lambda, \lambda^{\varrho})]$

es completo.

Demostración.

Si λ es ρ-perfecto, $\lambda=(\lambda^\rho)^\rho$ y como λ^ρ es (da)-invariante, P.3.8 asegura que $\lambda[\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)]$ es completo.

Recíprocamente, si $\lambda[\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)]$ es completo, como $\lambda^\rho\supset\varphi$ toda sucesión de $\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)$-Cauchy tiene límite coordenado en λ, luego $\lambda[\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)]$ es sucesionalmente completo a coordenadas por lo que T.3.1 asegura que λ es ρ-perfecto. ∎

Proposición 3.9

Si $\lambda=R(\lambda)\supset\varphi$, entonces λ es τ_ρ-separable.

Demostración.

Probaremos que el conjunto numerable $N=\left\{\sum_{i=0}^{k}\rho_i^{(k)}\cdot\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i\right.$ con $\rho_i^{(k)}$ de coordenadas racionales k=0,1; j=1,2 $\left.\right\}\subset\varphi\subset\lambda$ es denso en λ. Es decir, que para todo $x\in\lambda$ existe una sucesión doble $\{x^{(k,j)}\}_{\substack{k=0,1,\ldots\\ j=1,2,\ldots}}\subset N$ tal que en la topologia τ_ρ se verifica:

$$\lim_{j\to+\infty}\left[\lim_{k\to+\infty}x^{(k,j)}\right]=x$$

Dado $x\in\lambda$, para k=0,1,2.., j=1,2... consideramos:

$$x^{(k,j)}=\sum_{i=0}^{k}\rho_i^{(k)}\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i \quad \text{con} \quad |x_i-\rho_i^{(k)}|\leq\frac{|x_i|}{k} \qquad i=0,1,.k$$

La P.3.3 asegura que $\lim_{t\to1^-}(x_i t^i)=(x_i)$ en la topologia $\tau_\rho(\lambda,\lambda^\rho)$, por lo que en particular $\lim_{j\to+\infty}\left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right)=$ $=(x_i)$. Es suficiente probar que para $j\in\mathbb{N}$ fijo :

$$\lim_{K\to+\infty} x^{(K,j)} = \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) \text{ en la topología } \tau_\rho .$$

Para cada U, τ_ρ-entorno de 0, hay que encontrar k_0 tal que si $k \geqslant k_0$, entonces $\left(\left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i - x^{(Kj)}\right) \in U\right.$.
Dado que U es intersección finita de entornos de 0 de la forma $\left(\left\{u\right\}_j^{da}\right)^0$ con $u \in \lambda^\rho$, $j \in \mathbb{N}$, es suficiente razonar con este tipo de entorno. Entonces dados $u \in \lambda^\rho$ y $j \in \mathbb{N}$ hay que encontrar k_0 tal que si $k \geqslant k_0$

$$\left|\left\langle \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - x^{(K,j)}, (\alpha_i u_i)\right\rangle\right| \leqslant 1$$

para todo $(\alpha_i) \in U_j^0$. Para acotar esta expresión:

$$\left|\left\langle \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - x^{(K,j)}, (\alpha_i u_i)\right\rangle\right| \leqslant \left|\left\langle \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - \sum_{i=0}^{K} x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i , (\alpha_i u_i)\right\rangle\right|$$

$$+ \left|\left\langle \sum_{i=0}^{K} x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i - \sum_{i=0}^{K} \rho_i^{(K)}\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i , (\alpha_i u_i)\right\rangle\right|$$

Como $\lim_{K\to+\infty} \sum_{i=0}^{K} x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i = \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right)$ en la topología τ_ρ tenemos que para $2u \in \lambda^\rho$ y $j \in \mathbb{N}$ existe k_1 tal que si $k \geqslant k_1$, entonces:

$$\left|\left\langle \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - \sum_{i=0}^{K} x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i , (\alpha_i u_i)\right\rangle\right| \leqslant \frac{1}{2} . \quad \forall (\alpha_i) \in U_j^0 .$$

Además :

$$\left|\left\langle \sum_{i=0}^{K} (x_i - \rho_i^{(k)})(\alpha_i u_i)\left(\frac{j}{j+1}\right)^i , e\right\rangle\right| = \left|\sum_{i=0}^{K} (x_i - \rho_i^{(k)})(\alpha_i u_i)\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{K} |x_i - \rho_i^{(K)}||\alpha_i||u_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leqslant \frac{1}{K} \sum_{i=0}^{K} |x_i||u_i||\alpha_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i$$

Para cualquier $(\alpha_i) \in U_j^o$, tenemos que si $x \in U_j$

$$\left|\langle x, (\alpha_i)\rangle\right| \leq 1$$

luego como $\|\frac{1}{2}e_i\| + q_j(\frac{1}{2}e_i) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{j}{j+1}\right) < 1$ tenemos que para cada i=0,1,2.. $\frac{1}{2}e_i \in U_j$ con lo que $\left|\langle \frac{e_i}{2}, (\alpha_i)\rangle\right| \leq 1$.

Por otro lado como $x \in \lambda$, $u \in \lambda^\rho$ entonces $(x_i u_i) \in$ sa con lo que $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i||u_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i = M < +\infty$, luego

$$\frac{1}{k}\sum_{i=0}^{k} |x_i||u_i||\alpha_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leq \frac{2M}{k} \leq \frac{1}{2}, \quad k \geq k_2 .$$

Eligiendo $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$ tenemos que si $k \geq k_0$, para $j \in \mathbb{N}$ fijo: $\left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - x^{(kj)} \in \left(\{u\}_j^{da}\right)^o$. ■

4. COMPACIDAD.RELATIVAMENTE COMPACTOS DE (sa).

Dado un espacio de sucesiones $\lambda \supset \varphi$, $\langle \lambda, \lambda^{\rho} \rangle$ es par dual y $\lambda[\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})]$ es un espacio localmente convexo y separado.

En primer lugar estudiamos las relaciones entre subconjuntos compactos, numerablemente compactos y sucesionalmente compactos de $\lambda[\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})]$; después analizaremos dichas relaciones para subconjuntos de $\lambda[\tau]$, donde τ es una topologia localmente convexa y compatible con el par dual $\langle \lambda, \lambda^{\rho} \rangle$.

Nos basaremos en un resultado consecuencia de trabajos y observaciones debidas a J.Dieudonné y L.Schwartz [6], G.Köthe ([18] ,pag.312), M.Valdivia [26] , y A.Marquina [20]:

(1) Sea E $[\tau]$ un espacio localmente convexo y separado tal que $E'[\sigma(E',E)]$ es separable. Entonces:

a) Todo subconjunto de E que sea $\sigma(E,E')$-numerablemente compacto es $\sigma(E,E')$-compacto (análogo si es relativamente..)

b) Todo subconjunto de E que sea $\sigma(E,E')$-numerablemente compacto es $\sigma(E,E')$-sucesionalmente compacto (relativamente).

A partir de (1) vamos a caracterizar a es tos subconjuntos en $\lambda[\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})]$.

Teorema 4.1

Sea $\lambda \supset \varphi$ y sea M un subconjunto de $\lambda[\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})]$, entonces las siguientes propiedades de M son equivalentes:

a) M es $\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})$-compacto (relativamente).

b) M es $\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})$-numerablemente compacto (relativamente)

c) M es $\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})$-sucesionalmente compacto (relativamente).

Demostración.

Son inmediatas las implicaciones (a) $\Rightarrow$ (b). Para demostrar (b) $\Rightarrow$ (a) y (b) $\Rightarrow$ (c) nos basamos en el resultado(1).

Teniendo en cuenta que $\lambda[\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})]$ es un localmente convexo separado cuyo dual $\lambda' = \lambda^{\rho}$, es suficiente probar que $\lambda^{\rho}[\sigma(\lambda^{\rho},\lambda)]$ es separable.

Si aplicamos la P.2.5 al espacio λ^{ρ} tenemos que $\lambda^{\rho}[\sigma(\lambda^{\rho},\lambda^{\rho\rho})]$ es separable, pero como $\lambda \subset \lambda^{\rho\rho}$ la topología $\sigma(\lambda^{\rho},\lambda)$ es menos fina que la topologia $\sigma(\lambda^{\rho},\lambda^{\rho\rho})$ por lo que $\lambda^{\rho}[\sigma(\lambda^{\rho},\lambda)]$ es separable. ■

Teorema 4.2

Sea $\lambda \supset \varphi$ dotado de una topologia τ localmente convexa y compatible con el par dual $\langle \lambda,\lambda^{\rho}\rangle$. Entonces para cualquier subconjunto $M \subset \lambda[\tau]$ las siguientes propiedades son equivalentes:

a) M es τ-compacto.

b) M es τ-numerablemente compacto.

c) M es τ-sucesionalmente compacto.

Demostración.

(b) $\Rightarrow$ (a) M es τ-numerablemente compacto, entonces M es τ-precompacto ya que si no lo fuera podemos encontrar una sucesión en M que no tiene ningún punto adherente en M. Como τ es más fina que $\sigma(\lambda, \lambda^{\varrho})$, tenemos que M es $\sigma(\lambda, \lambda^{\varrho})$-numerablemente compacto y por T.4.1, M es $\sigma(\lambda, \lambda^{\varrho})$-compacto y en consecuencia $\sigma(\lambda, \lambda^{\varrho})$-completo.

Dado que τ y $\sigma(\lambda, \lambda^{\varrho})$ son topologias del par dual verifican las hipótesis del teorema de Bourbaki-Robertson por lo que si M es $\sigma(\lambda, \lambda^{\varrho})$-completo, entonces M es τ-completo.

En consecuencia, sabemos que M es τ-precompacto y τ-completo, luego M es τ-compacto.

Vamos a probar que (b) $\Rightarrow$ (c). Si suponemos que M es τ-numerablemente compacto, tenemos que M es τ-precompacto y por tanto M es acotado. En consecuencia M será coordenadamente acotado, es decir los subconjuntos $M_i = \langle M, e_i \rangle$, $i=0,1,\ldots$ son acotados en $\mathbb{K}$.

Tenemos que demostrar que M es τ-sucesionalmente compacto, es decir que si $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en M podemos extraer de ella una subsucesión que τ-converge a algún punto de M.

Las sucesiones $\{x_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $i=0,1,\ldots$ están contenidas en acotados M_i de $\mathbb{K}$, luego de cada una de ellas se puede extraer una subsucesión convergente, por lo que mediante un procedimiento diagonal podemos seleccionar una subsucesión de $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que sea convergente coordenada a coordenada al elemento $x^0 \in \omega$.

Sea esa subsucesión $\{y^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, vamos a probar que τ-converge a $x^0 \in M$; dado que M es τ-numerablemente compacto la sucesión $\{y^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene al menos un punto τ-adherente $y^0 \in M$ que será también $\sigma(\lambda, \lambda^{\varrho})$-adherente. Entonces --

$y^0 = x^0$ porque x^0 es el único punto τ-adherente que tiene cualquier subsucesión de $\{y^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ por lo que $\{y^{(n)}\} \xrightarrow{\tau} x^0$. ■

Caracterizamos a los compactos mediante acotados que verifican una propiedad análoga a la probada anteriormente.

Teorema 4.3

Sea $\lambda \supset \varphi$ dotado de una topologia τ localmente convexa compatible con el par dual $\langle \lambda, \lambda^{\rho} \rangle$. Entonces, para cualquier subconjunto $M \subset \lambda[\tau]$ las siguientes propiedades son equivalentes:

a) M es τ-compacto.

b) M es acotado y para cada sucesión $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en M que sea convergente coordenada a coordenada a $x^0 \in \omega$, se verifica que $x^0 \in M$ y que $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, τ-converge a x^0.

Demostración.

(a) $\Rightarrow$ (b) : Si M es τ-compacto, M es acotado y por (T.4.2) M es τ-sucesionalmente compacto. Si $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ converge coordenada a coordenada hacia $x^0 \in \omega$, la subsucesión de $\{x^{(n)}\}$ que τ-converge en M debe τ-converger a $x^0 \in M$. Si suponemos que $\{x^{(n)}\}$ no τ-converge a x^0, entonces existe una subsucesión que τ-converge a un $y^0 \neq x^0$, lo cual es absurdo.

(b) $\Rightarrow$ (a) : Es suficiente probar que M es τ-sucesionalemte compacto. Dada una sucesión $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ en M acotado; como cada sucesión $\{x_i^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $i=0,1,\ldots$ está contenida en un acotado de $\mathbb{K}$ podemos extraer mediante un procedimiento diagonal una subsucesión de $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ que tenga como límite coordenado a un elemento $x^o\in\omega$. Entonces la subsucesión τ-converge a $x^o\in M$. ■

Corolario.

Sea $\lambda\supset\varphi$ y sean τ y τ' dos topologias localmente convexas compatibles con el par dual $\langle\lambda,\lambda^{\beta}\rangle$. Entonces τ y τ' tienen los mismos compactos, si y solo si, τ y τ' tienen las mismas sucesiones convergentes.

Demostración.

Si τ y τ' tienen los mismos compactos, sea $\{x^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en λ, τ-convergente a $x\in\lambda$: por tanto $\{x^{(n)}\}\cup\{x\}$ es un τ'-compacto y dado que $\{x^{(n)}\}$ tiene como limite coordenado a x, el T.4.3 asegura que $\{x^{(n)}\}$ τ'-converge a x.

Recíprocamente si τ y τ' tienen las mismas sucesiones convergentes supongamos que M es τ-compacto, entonces M es acotado.

Sea $\{x^{(n)}\}$ una sucesión en M que converge coordenada a coordenada a $x\in\omega$, entonces $\{x^{(n)}\}$, τ-converge a $x\in M$ y por tanto también τ'-converge a x, luego el T.4.3 garantiza que M es τ'-compacto. ■

Para analizar los subconjuntos relativamente compactos del espacio (sa) probamos que en dicho espacio se verifican las siguientes propiedades de aproximación.

Proposición 4.1

Para cada compacto $K\subset$ sa, cada $\varepsilon>0$ y cada $j\in\mathbb{N}$

se verifica:

a) Existe $t_0 \in (0,1)$ tal que si $t_0 \leqslant t < 1$, entonces:

$$\sup_{x \in K} \{ (\|\,\| + q_j)(x - (x_i t^i)) \} < \varepsilon$$

b) Para cada $t \in (0,1)$ fijo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$, entonces:

$$\sup_{x \in K} \left\{ (\|\,\| + q_j) \left((x_i t^i) - \sum_{i=0}^{n} x_i t^i e_i \right) \right\} < \varepsilon .$$

Demostración.

a) Como $(t^i) \in da$, $0 < t < 1$, las aplicaciones lineales

$$T_{(t^i)} : \begin{array}{l} sa \longrightarrow sa \\ x \longmapsto (x_i t^i) \end{array}$$ son continuas .

Dado que para cada $x \in sa$ tenemos $\lim_{t \to 1^-} (x_i t^i) = x$, existe $t_0 \in (0,1)$ tal que la familia $\{ T_{(t^i)} : t_0 \leqslant t < 1 \}$ es puntualmente acotada; veamos que para todo $t \in (0, t_0)$, $\{ (x_i t^i) \} \subset sa$ es acotado.

En efecto para cada $j \in \mathbb{N}$: $\|(x_i t^i)\| + p_j(x_i t^i) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| t^i + \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| t^i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leqslant p_{j_0}(x) + p_j(x)$ para $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $t_0 \leqslant \left(\frac{j_0}{j_0+1}\right)$ con $t \in (0, t_0)$. Entonces $\{ T_{(t^i)} : 0 < t < 1 \}$ es una familia puntualmente acotada en $\mathcal{L}(sa,sa)$, y dado que (sa) es -- Fréchet, el teorema de Banach-Steinhaus asegura que dicha familia es equicontinua en $\mathcal{L}(sa,sa)$.

Es decir, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $M_j > 0$ tal que: $(\|\,\| + q_j)(x_i t^i) \leqslant M_j (\|\,\| + q_j)(x_i)$ para cada $x \in sa$ y para todo $t \in (o,1)$.

Como K es compacto, fijados $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ la familia $\left\{ x \in sa : (\|\,\| + q_j)(x-y) < \frac{\varepsilon}{2(1+M_j)} \right\}_{y \in K}$ es un recubri-- miento abierto de K, por lo que existe $y^1, y^2, \ldots y^h \in K$ tales -

que, para todo $x \in K$ existe $p \in \{1,2,\ldots\ldots,h\}$ tal que

$$(\|\ \|+q_j)(x-y^p) < \frac{\varepsilon}{2(1+M_j)}$$

Por otro lado, como para cada $x \in sa$, $\lim_{t\to 1^-}(x_i t^i) = x$, dados $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ anteriores existe $t_0 \in (0,1)$ tal que si $t_0 \leq t < 1$ entonces $(\|\ \|+q_j)(y^k-(y_i^k t^i)) < \frac{\varepsilon}{2}$ para $k=1,2,\ldots h$.

Reuniendo estos tres resultados tenemos que:

Dados $\varepsilon>0$ y $j \in \mathbb{N}$ existe $t_0 \in (0,1)$ tal que si $t_0 \leq t < 1$:

$$\left(\|\ \|+q_j\right)(x-(x_i t^i)) \leq \left(\|\ \|+q_j\right)(x-y^p) + \left(\|\ \|+q_j\right)(y^p-(y_i^p t^i)) +$$
$$+\left(\|\ \|+q_j\right)((y_i^p t^i)-(x_i t^i)) < \frac{\varepsilon}{2(1+M_j)} + \frac{\varepsilon}{2} + M_j(\|\ \|+q_j)(y^p-x) <$$
$$< \frac{\varepsilon}{2(1+M_j)} + \frac{\varepsilon}{2} + M_j \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+M_j)} = \varepsilon$$

para todo $x \in K$.

b) Consideremos las aplicaciones lineales continuas $P_n : sa \longrightarrow sa$ de rango finito, definidas por $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i$; como hemos probado que para cada $t \in (0,1)$ fijo se verifica:

$\lim_{n\to+\infty} P_n(x_i t^i) = (x_i t^i)$ con $x \in sa$, y dado que (sa) verifica $R(sa)=sa$ tenemos que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de aplicaciones lineales continuas puntualmente acotada en el Fréchet (sa). En consecuencia, el teorema de Banach-Steinhaus asegura que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia equicontinua, es decir:

Para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $M_j > 0$ tal que:

$(\|\ \|+q_j)(P_n(x_i t^i)) \leq M_j\,(\|\ \|+q_j)(x_i t^i)$ para cada $x \in sa$, con $t \in (0,1)$ fijo.

Como K es compacto, el subconjunto $K_t = \{(x_i t^i) : x \in K\}$ con $t \in (0,1)$ fijo también es compacto, dado que la aplicación lineal que transforma K en K_t es continua. Entonces, dados $\varepsilon>0$ y $j\in\mathbb{N}$ la familia:

$$\left\{ x\in sa : (\|\,\|+q_j)\left((x_i t^i)-(y_i t^i)\right)<\frac{\varepsilon}{2(1+M_j)}\right\}_{y\in K}$$

es un recubrimiento abierto de K_t ; luego existen $y^1,\ldots,y^h\in K$ tales que para todo $x\in K$ existe $p\in\{1,\ldots,h\}$ tal que:

$$(\|\,\|+q_j)\left((x_i t^i)-(y_i^p t^i)\right)<\frac{\varepsilon}{2(1+M_j)}$$

Además, como $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(y_i^k t^i)=(y_i^k t^i)$ para $k=1,\ldots,h$, para $\varepsilon>0$ y $j\in\mathbb{N}$ anteriores, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq n_0$

$$(\|\,\|+q_j)\left((y_i^k t^i)-P_n(y_i^k t^i)\right)<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{para } k=1,\ldots,h.$$

En consecuencia, dados $\varepsilon>0$ y $j\in\mathbb{N}$ existe $n_0\in\mathbb{N}$ - tal que si $n\geq n_0$; con $t\in(0,1)$ fijo, tenemos:

$$(\|\,\|+q_j)\left((x_i t^i)-P_n(x_i t^i)\right)\leq(\|\,\|+q_j)\left((x_i t^i)-(y_i^p t^i)\right)+$$
$$+(\|\,\|+q_j)\left((y_i^p t^i)-P_n(y_i^p t^i)\right)+(\|\,\|+q_j)\left(P_n(y_i^p t^i)-P_n(x_i t^i)\right)<$$
$$<\frac{\varepsilon}{2(1+M_j)}+\frac{\varepsilon}{2}+M_j\frac{\varepsilon}{2(1+M_j)}=\varepsilon$$

para todo $x\in K$.

<u>Teorema 4.4</u>

Sea $C\subset sa$ acotado. Entonces, C es relativamente compacto en (sa) si y sólo si para toda $j\in\mathbb{N}$ se verifican:

$$\lim_{t\to1^-}\sup_{x\in C}\left\{(\|\,\|+q_j)(x-(x_i t^i))\right\}=0 \quad , \quad \lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in C}\left\{(\|\,\|+q_j)\left((x_i t^i)-P_n(x_i t^i)\right)\right\}=0$$

para cada $t\in(0,1)$ fijo.

<u>Demostración</u>.

La condición necesaria es consecuencia inmediata de P.4.1: si C es relativamente compacto, entonces $\overline{C}$ es un com--

pacto luego: $\forall\, \varepsilon>0$ y $j\in \mathbb{N}$ se verifica:

a) Existe $t_o \in (0,1)$ tal que si $t_o \leq t < 1$: $\sup_{x\in C}\{(\| \| + q_j)(x-(x_i t^i))\} \leq$

$\leq \sup_{x\in \overline{C}}\{(\| \| + q_j)(x-(x_i t^i))\} < \varepsilon$ por lo que $\lim_{t\to 1^-}\sup_{x\in C}\{(\| \| + q_j)(x-(x_i t^i))\} = 0$

para cada $j\in \mathbb{N}$.

b) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$, para cada $0 < t < 1$ fijo, tal que si $n \geq n_0$, entonces

$$\sup_{x\in C}\{(\| \| + q_j)((x_i t^i) - P_n(x_i t^i))\} \leq \sup_{x\in \overline{C}}\{(\| \| + q_j)((x_i t^i) - P_n(x_i t^i))\} < \varepsilon$$

lo que asegura el resultado para cada $j \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente; si definimos en $0<t<1$:

$$b(t) = \sup_{x\in C}\{(\| \| + q_j)(x-(x_i t^i))\} \quad ; \quad a_n(t) = \sup_{x\in C}\{(\| \| + q_j)((x_i t^i) - P_n(x_i t^i))\}$$

suponiendo para cada $j \in \mathbb{N}$ que $\lim_{t\to 1^-} b(t) = 0$ y que con $t \in (0,1)$ fijo: $\lim_{n\to+\infty} a_n(t) = 0$; tenemos que probar que C es relativamente compacto en (sa).

Es decir, que C está contenido en algún subconjunto compacto de (sa).

Consideremos los subconjuntos:

$$D_1 = \{ x\in sa : (\| \| + q_j)(x-(x_i t^i)) \leq b(t) \ , \ \forall t\in (0,1) \}$$

$$D_2^t = \{ x\in sa : (\| \| + q_j)((x_i t^i) - P_n(x_i t^i)) \leq a_n(t) \ , \ \forall n\in \mathbb{N} \} \ , \ t\in (0,1)$$

Dado que $C \subset H^t = D_1 \cap D_2^t$, vamos a probar que si -- existe un $t \in (0,1)$ tal que H^t verifica:"Toda sucesión $\{x^{(n)}\}$ en H^t con limite coordenado $x^o \in \omega$ cumple que $x^o \in H^t$ y además $\{x^{(n)}\}$ converge a x^o en la topologia de sa", entonces C es relativamente compacto en sa.

En efecto, es suficiente considerar $K^t = H^t \cap \overline{C}$, porque $K^t \subset \overline{C}$ es acotado y toda sucesion $\{x^{(n)}\} \subset K^t$ que tenga limite coordenado $x^0 \in \omega$ verifica que $\{x^{(m)}\}$ converge a $x^0 \in H^t$ en la topologia de (sa) porque $K^t \subset H^t$. Además, como $K^t \subset \overline{C}$ cerrado, el limite $x^0 \in \overline{C}$; luego $x^0 \in K^t$.

Entonces K^t es un compacto de (sa) tal que $C \subset K^t$, lo que nos asegura este resultado previo.

Veamos que existe $t \in (0,1)$ tal que H^t verifica la condición dada:

Sea $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H^t$ tal que $x^0 \in \omega$ es límite coordenado de $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en primer lugar probamos que $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en (sa) con lo cual $\{x^n\}$ converge a un elemento de (sa) que necesariamente es x^0, por P.2.3, con lo cual $x^0 \in$ sa. Después probaremos que $x^0 \in H^t$.

Sabemos que $\{x^n\} \subset D_1$ y $\{x^n\} \subset D_2^t$ con $0<t<1$, y dado que $\lim_{t\to 1^-} b(t) = 0$, $\lim_{n\to+\infty} a_n(t) = 0$ para todo $t \in (0,1)$ fijo, podemos afirmar que para cada $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$:

- Existe $t_0 \in (0,1)$ tal que si $t_0 \leq t < 1$,

$$(\|\ \| + q_j)\left(x - (x_i t^i)\right) < \frac{\varepsilon}{6} \quad , \forall x \in D_1$$

-Existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $K \geq K_0$:

$$(\|\ \| + q_j)\left((x_i t^i) - P_K(x_i t^i)\right) < \frac{\varepsilon}{6} \quad . \forall x \in D_2^t$$

con un $t \in (0,1)$ cualquiera que hacemos $t \geq t_0$.

Entonces, fijados $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ existen $t \in (0,1)$ y $K_0 \in \mathbb{N}$ tales que si $K \geq K_0$, entonces para $m,n \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$(\|\ \| + q_j)(x^m - x^n) \leq (\|\ \| + q_j)\left(x^m - (x_i^m t^i)\right) + (\|\ \| + q_j)\left((x_i^m t^i) - (x_i^n t^i)\right) +$$

$$+ (\|\ \| + q_j)\left((x_i^n t^i) - x^n\right) < 2\,\frac{\varepsilon}{6} + (\|\ \| + q_j)\left((x_i^m t^i) - (x_i^n t^i)\right) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + (\|\,\| + q_j)\left((x_i^m t^i) - P_K(x_i^m t^i)\right) + (\|\,\| + q_j)\left(P_K(x_i^m t^i) - P_K(x_i^n t^i)\right) +$$

$$+ (\|\,\| + q_j)\left(P_K(x_i^n t^i) - (x_i^n t^i)\right) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + (\|\,\| + q_j)\left(P_K\left((x_i^m - x_i^n) t^i\right)\right).$$

Para $K \geqslant K_0$ fijo, calculamos : $(\|\,\| + q_j)\left(P_K\left((x_i^m - x_i^n)t^i\right)\right) =$

$$= \sup_{0 \leq \rho < 1} \left| \sum_{i=0}^{K} (x_i^m - x_i^n) t^i \rho^i \right| + \max_{0 \leq i \leq K} |x_i^m - x_i^n| t^i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{K} |x_i^m - x_i^n| t^i + \max_{0 \leq i \leq K} |x_i^m - x_i^n| t^i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i$$

Dado que $\{x_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en $\mathbb{K}$ para i=0,1,....tenemos que cada una de estas sucesiones es de Cauchy en $\mathbb{K}$, por lo que para $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ fijados anteriormente, $t \in (0,1)$ y $K \in \mathbb{N}$ determinados por ellos verifican:

- Existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que : $|x_i^m - x_i^n| t^i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i < \frac{\varepsilon}{6}$ para i=0,1,....K si $m,n \geqslant n_1$
- Existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que : $\sum_{i=0}^{K} |x_i^m - x_i^n| t^i < \frac{\varepsilon}{6}$ si $m,n \geqslant n_2$:

En consecuencia, podemos afirmar que dados $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ existe n_0= mayor $\{n_1, n_2\}$ tal que:

$(\|\,\| + q_j)\left(P_K\left((x_i^m - x_i^n)t^i\right)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$, $m,n \geqslant n_0$, con $t \in (0,1)$ y $K \in \mathbb{N}$ fijos dependiendo del $\varepsilon > 0$ y $j \in \mathbb{N}$ dados; lo cual prueba que $\{x^n\}$ es una sucesión de Cauchy en sa.

Por último, tenemos que probar que $x^0 \in D_1 \cap D_2^t$

Sabemos que $\{x^n\} \xrightarrow{(\|\,\| + q_j)} x^0$, y como $(t^i): sa \longrightarrow sa$

$0 < t < 1$ es una aplicación continua, tenemos que :

$$\{(x_i^n t^i)\} \xrightarrow{(\|\|+q_j)} (x_i^o t^i)$$

Entonces dado que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad : \quad (\|\| + q_j)\,(x^n - (x_i^n t^i)) \leq b(t) \qquad \forall t \in (0,1)$$

tenemos que : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\|\|+q_j)\,(x^n - (x_i^n t^i)) = (\|\|+q_j)\,(x^o - (x_i^o t^i)) \leq b(t)$

$\forall t \in (0,1)$,

con lo que $x^o \in D_1$.

Fijado $t \in (0,1)$ sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(\|\|+q_j)\,\big((x_i^n t^i) - P_K(x_i^n t^i)\big) \leq a_K(t) \quad , \ \forall K \in \mathbb{N}$$

dado que las aplicaciones P_K son continuas en (sa), tenemos que:

$$\lim_{n\to+\infty} (\|\|+q_j)\,\big((x_i^n t^i) - P_K(x_i^n t^i)\big) = (\|\|+q_j)\,\big((x_i^o t^i) - P_K(x_i^o t^i)\big) \leq a_K(t) \ , \forall K \in \mathbb{N}$$

con lo cual $x^o \in D_2^t$ y en consecuencia $x^o \in H^t$. ■

Teorema 4.5

Sea $u\in da$. Si $u_i=O(\sigma^i)$ con $\sigma\in(0,1)$, la aplicación lineal $T_u : sa \longrightarrow sa$, $x \longmapsto (u_i x_i)$ es compacta.

Demostración.

Si $u\in da$ es tal que $u_i=O(\sigma^i)$, entonces existe $M'>0$ tal que $|u_i|\leq M'\sigma^i$, $i=0,1,\ldots$; luego $|u_i|\left(\frac{1}{\sigma}\right)^i\leq M'$; sea $0<\sigma<s<1$, entonces $(s^i)\to 0$ cuando $i\to+\infty$ por lo que $\left(|u_i|\left(\frac{s}{\sigma}\right)^i\right)\longrightarrow 0$ cuando $i\to+\infty$ y dado que $\frac{s}{\sigma}>1$, existe $j_0\in\mathbb{N}$ tal que $\left(|u_i|\left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i\right)\longrightarrow 0$ cuando $i\to+\infty$.

Sea $M=\sup_i |u_i|\left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i$;

Para demostrar que la aplicación lineal T_u es compacta, elegimos el entorno de 0 en sa: $U_{j_0+1}=\{x\in sa : (\|\|+q_{j_0+1})(x)\leq 1\}$ y vamos a probar que $u(U_{j_0+1})=\{(u_ix_i)\in sa : x\in U_{j_0+1}\}$ es un subconjunto relativamente compacto en (sa).

En primer lugar veamos que $u(U_{j_0+1})$ es acotado:

$$\forall j\in\mathbb{N}\ ,\quad (\|\|+q_j)(u_ix_i)=\|(u_ix_i)\|+q_j(u_ix_i)$$

$$\|(u_ix_i)\|=\sup_{0\leq\rho<1}\left|\sum_{i=0}^{+\infty}u_ix_i\rho^i\right|\leq\sup_{0\leq\rho<1}\sum_{i=0}^{+\infty}|u_ix_i|\rho^i=\sum_{i=0}^{+\infty}|u_ix_i|=$$

$$=\sum_{i=0}^{+\infty}|u_i|\left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i|x_i|\left(\frac{j_0}{j_0+1}\right)^i\leq\sup_i|u_i|\left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i\cdot\sum_{i=0}^{+\infty}|x_i|\left(\frac{j_0}{j_0+1}\right)^i\leq$$

$$\leq M\cdot p_{j_0}(x)\leq M\,(j_0+1)^2q_{j_0+1}(x)\leq M\,(j_0+1)^2,\quad\forall x\in U_{j_0+1}\,.$$

Además:

$$q_j(u_i x_i) = \sup_i |u_i x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i = \sup_i \left\{ |u_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i |x_i| \left(\frac{j_0}{j_0+1}\right)^i \cdot \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right\} \leq$$

$$\leq M\, q_{j_0}(x) \leq M \; , \quad \forall x \in U_{j_0+1} .$$

Queda demostrado que :

$$\sup_{x \in U_{j_0+1}} \left\{ (\|\,\| + q_j)(u_i x_i) \right\} \leq \left[(j_0+1)^2 + 1 \right] \sup_i |u_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, lo cual asegura que $u(U_{j_0+1})$ es acotado. Utilizando el T.4.4, si se verifica $\forall j \in \mathbb{N}$ que:

$$\lim_{t \to 1^-} \sup_{x \in U_{j_0+1}} \left\{ (\|\,\| + q_j)\left((u_i - u_i t^i)(x_i)\right) \right\} = 0 \qquad \text{y}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in U_{j_0+1}} \left\{ (\|\,\| + q_j)\left(\left((u_i t^i) - P_n(u_i t^i)\right)(x_i)\right) \right\} = 0$$

para $0 < t < 1$ fijo podemos afirmar que $u(U_{j_0+1})$ es relativamente compacto.

Fijamos $j \in \mathbb{N}$, entonces :

$$\sup_{x \in U_{j_0+1}} \left\{ (\|\,\| + q_j)\left((u_i x_i)(1-t^i)\right) \right\} \leq \left[(j_0+1)^2 + 1 \right] \sup_i \left\{ |u_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i (1-t^i) \right\}$$

Dado que $\left(|u_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i \right) \longrightarrow 0$ cuando $i \to +\infty$

y que para cualquier $0 < t < 1$, $(1-t^i) \longrightarrow 1$ cuando $i \to +\infty$, podemos afirmar que : $\lim_{i \to +\infty} |u_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i (1-t^i) = 0$.

Para $i \in \mathbb{N}$ fijo , $\lim_{t \to 1^-} (1-t^i) = 0$ luego tenemos que $\forall \varepsilon > 0$ existe $t_0 \in (0,1)$ tal que : $\sup_i |u_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i (1-t_0^i) < \varepsilon$

por lo que si $t_0 \leq t < 1$, el resultado sigue siendo válido al ser $(1-t^i) \leq (1-t_0^i)$. En consecuencia : $\lim_{t\to 1^-} \sup_i \left\{ |u_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i (1-t^i) \right\} = 0$.

y entonces $\lim_{t\to 1^-} \sup_{x\in U_{j_0+1}} \left\{ (\|\|+q_j) \left((u_i x_i)(1-t^i) \right) \right\} = 0$.

Por otro lado, para un $t \in (0,1)$ fijo tenemos que

$$\sup_{x\in U_{j_0+1}} \left\{ (\|\|+q_j) \left(\left((u_i) - P_n(u_i) \right)(x_i t^i) \right) \right\} \leq \left[(j_0+1)^2+1 \right] \sup_{i>n} \left\{ |u_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i t^i \right\}$$

y como $\left\{ |u_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i t^i \right\} \longrightarrow 0$ cuando $i \to +\infty$ - tenemos que $\lim_{n\to +\infty} \sup_{i>n} \left\{ |u_i| \left(\frac{j_0+1}{j_0}\right)^i t^i \right\} = 0$ de lo cual se deduce que $\lim_{n\to +\infty} \sup_{x\in U_{j_0+1}} \left\{ (\|\|+q_j) \left((u - P_n(u))(x_i t^i) \right) \right\} = 0$. ∎

NOTAS SOBRE EL APARTADO 5

a) Todos los espacios de sucesiones λ que consideramos en este apartado son (da)-invariantes.

b) La prueba de la P.5.1 está incompleta y previamente necesitamos demostrar:

Lema:

Si λ es un espacio de sucesiones (da)-invariante, toda sucesión en λ^ρ que sea $\sigma(\lambda^\rho,\lambda)$-convergente a cero es $\tau_\rho(\lambda^\rho,\lambda)$--convergente a cero.

Demostración:

Supongamos que existe $\{u^{(n)}\} \xrightarrow{\sigma(\lambda^\rho,\lambda)} 0$, que no $\tau_\rho(\lambda^\rho,\lambda)$ -converge a o. Entonces existen $x\in\lambda$, $j_0\in\mathbb{N}$ y una sucesión de índices $\{n_j\}_{j=1,2,\dots}$ tales que

$$u^{(n_j)} \notin \left(\{x\}_{j_0}^{da}\right)^0, \quad j=1,2,\dots$$

Por tanto existe algún $(\alpha_i)\in U_{j_0}^0 \subset da$, donde $U_{j_0} = \{ y\in sa : (\|\,\| + p_{j_0})(y) \leqslant 1\}$ tal que:

$$\left|\left\langle (\alpha_i x_i), u^{(n_j)}\right\rangle\right| > 1, \quad j=1,2,\dots$$

Dado que λ es (da)-invariante, $(\alpha_i x_i)\in\lambda$ luego esta desigualdad contradice la $\sigma(\lambda^\rho,\lambda)$ -convergencia a 0 de $\{u^{(n)}\}$ ∎

Mediante el método seguido en el apartado 4 se prueba que si τ y τ' son dos topologias localmente convexas compatibles en el par dual $\langle\lambda^\rho,\lambda\rangle$, tienen las mismas sucesiones convergentes si y solo si tienen los mismos compactos. Entonces

Corolario 1:

Si λ es un espacio de sucesiones (da)-invariante, en λ^{ρ} coinciden los subconjuntos $\sigma(\lambda^{\rho},\lambda)$ y $\tau_{\rho}(\lambda^{\rho},\lambda)$-compactos.

Demostración de la P.5.1.

$V\subset\lambda^{\rho}$ es $\sigma(\lambda^{\rho},\lambda)$-compacto y por tanto es $\tau_{\rho}(\lambda^{\rho},\lambda)$-compacto.

Consideramos los subconjuntos: $\left\{u\in\lambda^{\rho} : \sup_{(\alpha_i)\in U_j^{\circ}}\left|\left\langle(\alpha_i x_i),\, u-v\right\rangle\right|<\frac{1}{3}\right.$ con $j\in\mathbb{N}$ fijo, que forman un recubrimiento $\tau_{\rho}(\lambda^{\rho},\lambda)$-abierto de V, por lo que podemos extraer un subrecubrimiento finito. Mediante la demostración dada (pag.72) y teniendo en cuenta que los factores $(t^i)\in U_j^{\circ}$, $0<t<1$, $j=1,2,..$ podemos concluir que $\lim_{t\to 1^-}(x_i t^i)=x$ en la topologia $\mu(\lambda,\lambda^{\rho})$.

Además dado que (pag.74):

$$\left|\left\langle P_n\left((v_i^p-v_i)x_i t^i\right), e\right\rangle\right| = \left|\sum_{i=0}^{n}(v_i^p-v_i)x_i t^i\right| \leq \sum_{i=0}^{+\infty}|v_i^p-v_i||x_i|\,t^i =$$

$$= \left|\sum_{i=0}^{+\infty}(v_i^p-v_i)x_i h_i t^i\right| = \left|\left\langle (x_i h_i t^i),\, v-v^p\right\rangle\right| < \frac{1}{3} \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$(h_i t^i)=O(t^i)\ ,\ |h_i|=1\ ,\quad (h_i t^i)\in U_{j_0}^{\circ}\ .\ \frac{j_0}{j_0+1}\geq t\in(0,1)\text{ fijo.}$$

En consecuencia $\lim_{n\to+\infty} P_n(x_i t^i)=(x_i t^i)$ en la topología $\mu(\lambda,\lambda^{\rho})$. ∎

5. TONELACION. SEMIREFLEXIVIDAD Y REFLEXIVIDAD.

Estudiamos las propiedades de un espacio de suce-- siones dotado de la topologia de Mackey:

Proposición 5.1

Si $\lambda \supset \varphi$ es un espacio de sucesiones tal que $R(\lambda)=\lambda$ para cada $x\in\lambda$ las secciones ρ-convergen a x en la topología de Mackey del par dual $\langle \lambda, \lambda^{\rho} \rangle$.

Demostración.

Probamos que $\lim\limits_{t\to 1^-} (x_i t^i) = x$ y que $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(x_i t^i) = (x_i t^i)$ para t $\in$ (0,1) fijo, estando ambos límites toma-- dos en la topología $\mu(\lambda,\lambda^{\rho})$.

Sea U un entorno de cero en λ para $\mu(\lambda,\lambda^{\rho})$, entonces $U=V^{\circ}$, donde $V\subset\lambda^{\rho}$ es absolutamente convexo y $\sigma(\lambda^{\rho},\lambda)$ -compacto.

Fijado $x\in\lambda$ tenemos que encontrar $t_0\in(0,1)$ tal que si $t_0 \leqslant t < 1$, entonces :

$$\sup_{v\in V} \left|\langle x-(x_i t^i), v\rangle\right| \leqslant 1$$

Considero los subconjuntos

$$\left\{u\in\lambda^{\rho} : \left|\langle x, u-v\rangle\right| < \frac{1}{3}\right\}_{v\in V}$$

que forman un recubrimiento $\sigma(\lambda^{\rho},\lambda)$ -abierto de V, por lo -- que existen $v^1, v^2, \dots, v^s \in V$ tales que si $v\in V$ existe -- $p\in\{1,\dots s\}$ tal que :

$$\left|\langle x, v-v^p\rangle\right| = \left|\langle (x_i v_i)-(x_i v_i^p), e\rangle\right| < \frac{1}{3}$$

Por otro lado P.2.2 asegura que en la topología --- $\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})$ se verifica: $\lim_{t\to 1^-}(x_i t^i) = x$ por lo que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que si $t_0 \leq t < 1$ tenemos:

$$\sup_{1\leq h\leq s} \left|\left\langle x-(x_i t^i),\, v^h \right\rangle\right| = \sup_{1\leq h\leq s} \left|\left\langle (x_i v_i^h)-(x_i v_i^h t^i),\, e\right\rangle\right| < \frac{1}{3}$$

En consecuencia: $\forall v \in V$ tenemos :

$$\left|\left\langle x-(x_i t^i),\, v\right\rangle\right| = \left|\left\langle (x_i v_i) - (x_i v_i t^i),\, e\right\rangle\right| \leq \left|\left\langle (x_i v_i)-(x_i v_i^p),\, e\right\rangle\right| +$$

$$+\left|\left\langle (x_i v_i^p) - (x_i v_i^p t^i),\, e\right\rangle\right| + \left|\left\langle (x_i v_i^p t^i) - (x_i v_i t^i),\, e\right\rangle\right| <$$

$$< \frac{2}{3} + \left|\left\langle (x_i v_i^p) - (x_i v_i),\, (t^i)\right\rangle\right|$$

donde $(x_i v_i^p)-(x_i v_i) \in sa$ $\quad (t^i) \in U_j^0$, $j=1,2\ldots$

Teniendo en cuenta que $\left|\left\langle (x_i v_i^p)-(x_i v_i),\, 3e\right\rangle\right| < 1$ consideramos el entorno de cero en (sa):

$$T = \left\{ y \in sa \;:\; \|y\| \leq \frac{1}{3} \right\}$$

Como $\forall y \in T$: $\left|\left\langle y, 3e\right\rangle\right| = 3\left|\lim_{\rho\to 1^-}\sum_{i=0}^{+\infty} y_i \rho^i\right| \leq 3\|y\| \leq 1$

tenemos que $3e \in T^0$ por lo que la anterior desigualdad implica que $(x_i v_i^p) - (x_i v_i) \in T$.

Por otro lado $(3t^i) \in T^0$ para todo $t \in (0,1)$ -- porque:

$$\forall y \in T,\ \forall t \in (0,1) :\ \left|\left\langle y, 3(t^i)\right\rangle\right| = 3\left|\lim_{\rho\to 1^-}\sum_{i=0}^{+\infty} y_i (t\rho)^i\right| =$$

$$= 3\left|\sum_{i=0}^{+\infty} y_i t^i\right| \leq 3\|x\| \leq 1 .$$

Entonces $\left|\left\langle (x_i v_i^p) - (x_i v_i),\ (t^i) \right\rangle\right| \leq \frac{1}{3}$, $\forall t \in (0,1)$

por lo que si $t_0 \leq t < 1$, entonces : $\sup_{v \in V} \left|\left\langle x - (x_i t^i), v \right\rangle\right| \leq 1$.

Además queda probado que las aplicaciones lineales

$$\begin{aligned} (t^i) : \lambda^{\S}[\sigma(\lambda^{\S},\lambda)] &\longrightarrow \lambda^{\S}[\sigma(\lambda^{\S},\lambda)] \\ u &\longmapsto (u_i t^i) \end{aligned}$$ son continuas para $t \in (0,1)$

Veamos que para $t \in (0,1)$ fijo y $x \in \lambda$, $\lim_{n \to +\infty} P_n(x_i t^i) = (x_i t^i)$ en la topología $\mu(\lambda, \lambda^{\S})$.

Dado un entorno de 0 en λ: V° ; como $V \subset \lambda^{\S}$ es $\sigma(\lambda^{\S}, \lambda)$ -compacto, su transformado $(t^i)(V)$ será $\sigma(\lambda^{\S}, \lambda)$-compacto.

Los subconjuntos $\left\{ (u_i t^i) \in \lambda^{\S} : \left|\left\langle x, (u_i t^i) - (v_i t^i) \right\rangle\right| < \frac{1}{3} \right\}_{v \in V}$ forman un recubrimiento $\sigma(\lambda^{\S}, \lambda)$-abierto de $(t^i)(V)$, luego existen $v^1, v^2, \ldots, v^s \in V$ tales que si $v \in V$ existe $p \in \{1, \ldots s\}$ tal que:

$$\left|\left\langle x, (v_i t^i) - (v_i^p t^i) \right\rangle\right| = \left|\left\langle (x_i v_i t^i) - (x_i v_i^p t^i), e \right\rangle\right| < \frac{1}{3}$$

Además por la P.2.2; fijados $x \in \lambda$ y $t \in (0,1)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$:

$$\sup_{1 \leq h \leq s} \left|\left\langle (x_i t^i) - P_n(x_i t^i), v^h \right\rangle\right| = \sup_{1 \leq h \leq s} \left|\left\langle (x_i v_i^h t^i) - P_n(x_i v_i^h t^i), e \right\rangle\right| < \frac{1}{3}$$

Entonces para cada $v \in V$ tenemos:

$$\left|\left\langle (x_i t^i) - P_n(x_i t^i), v \right\rangle\right| = \left|\left\langle (x_i v_i t^i) - P_n(x_i v_i t^i), e \right\rangle\right| \leq$$

$$\leq \frac{2}{3} + \left|\left\langle P_n(x_i v_i^p t^i) - P_n(x_i v_i t^i), e \right\rangle\right|$$

para cierto $v^p \in V$ que verifica :

$$\left| \left\langle (x_i v_i t^i) - (x_i v_i^p t^i) , e \right\rangle \right| < \frac{1}{3}$$

Dado que :

$$\left| \left\langle P_n \left((v_i^p - v_i) x_i t^i \right) , e \right\rangle \right| = \left| \sum_{i=0}^{n} (v_i^p - v_i) x_i t^i \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{+\infty} \left| (v_i - v_i^p) x_i t^i \right| = \left| \left\langle (x_i v_i t^i) - (x_i v_i^p t^i), (h_i) \right\rangle \right| < \frac{1}{3} , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$h_i \in \mathbb{K}, \ |h_i| = 1.$

Hemos probado que para cada $x \in \lambda$ y $t \in (0,1)$ fijos, dado V^0, existen $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$, $\sup\limits_{v \in V} \left| \left\langle (x_i t^i) - P_n(x_i t^i), v \right\rangle \right| \leq 1$. ■

Proposición 5.2

Si λ es un espacio de sucesiones (da)-invariante, $\lambda^\varrho[\mu(\lambda^\varrho, \lambda)]$ es completo. En particular si λ es ϱ-perfecto, $\lambda[\mu(\lambda, \lambda^\varrho)]$ es completo.

Demostración.

Sabemos por la P.3.8 que si λ es (da)-invariante, $\lambda^\varrho[\tau_\varrho(\lambda^\varrho, \lambda)]$ es completo, como $\mu(\lambda^\varrho, \lambda)$ es una topologia del par dual más fina que $\tau_\varrho(\lambda^\varrho, \lambda)$, el criterio de Bourbaki-Robertson asegura el resultado.

Además si λ es ϱ-perfecto, aplicamos el resultado anterior al espacio λ^ϱ que es (da)-invariante. ■

Proposición 5.3

Si $\lambda \supset \varphi$ es un espacio de sucesiones tal que $\lambda = R(\lambda)$ entonces λ es $\mu(\lambda, \lambda^\varrho)$-separable.

Demostración.

Probamos que el conjunto numerable:

$N = \left\{ \sum_{i=0}^{n} \rho_i^{(n)} \left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i \right.$ con $\rho_i^{(n)}$ de coordenadas racionales, $\left. n=0,1,2,\ldots; j=1,2\ldots \right\} \subset \varphi \subset \lambda$ es denso en λ.

Dado $x \in \lambda$, para $n=0,1,\ldots;\ j=1,2,\ldots$ consideramos:

$$x^{(n,j)} = \sum_{i=0}^{n} \rho_i^{(n)} \left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i \in N \ , \quad |x_i - \rho_i^{(n)}| \leq \frac{|x_i|}{n}, \quad i=0,1,\ldots n.$$

y vamos a probar que $x = \lim_{j\to+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} x^{(n,j)} \right)$.

Sabemos que $\lim_{j\to+\infty} \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right) = x$ por P.5.1, luego es suficiente demostrar que para cada $j=1,2\ldots$ fijo tenemos

$$\lim_{n\to+\infty} x^{(n,j)} = \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right) \quad \text{en la topología } \mu(\lambda,\lambda^\rho)$$

Para cada $V \subset \lambda^\rho$ absolutamente convexo y $\sigma(\lambda^\rho,\lambda)$-compacto tenemos que encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$:

$$\sup_{v\in V} \left| \left\langle \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right) - x^{(n,j)}, v \right\rangle \right| \leq 1$$

Teniendo en cuenta P.5.1, si $x \in \lambda$, $j \in \mathbb{N}$ son fijos, dado un subconjunto $V \subset \lambda^\rho$ absolutamente convexo y $\sigma(\lambda^\rho,\lambda)$-compacto, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_1$ tenemos:

$$\sup_{v\in V} \left| \left\langle \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right) - P_n\left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right), v \right\rangle \right| \leq \frac{1}{2}$$

Dado que:

$$\sup_{v\in V} \left| \left\langle \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right) - x^{(n,j)}, v \right\rangle \right| \leq \sup_{v\in V} \left| \left\langle \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right) - P_n\left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right), v \right\rangle \right| + \sup_{v\in V} \left| \left\langle P_n\left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right) - x^{(n,j)}, v \right\rangle \right|$$

vamos a acotar el segundo sumando:

$$\left| \left\langle P_n\left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - \sum_{i=0}^{n} \rho_i^{(n)} \left(\frac{j}{j+1}\right)^i e_i , v \right\rangle \right| = \left| \sum_{i=0}^{n} (x_i - \rho_i^{(n)}) v_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n} |x_i - \rho_i^{(n)}| |v_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} |x_i| |v_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i$$

Si tenemos en cuenta que para $v \in \lambda^\rho$, $\left(v_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) \in \lambda^\alpha$, que la aplicación $\left[\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right] : \lambda^\rho \longrightarrow \lambda^\alpha$ es débil continua y que la topología $\sigma(\lambda^\rho, \lambda)$ induce en λ^α la topología ---- $\sigma(\lambda^\alpha, \lambda)$ tenemos que el transformado $\left[\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right](V)$ es un $\sigma(\lambda^\alpha, \lambda)$-compacto.

En consecuencia, existe $\sup_{v \in V} \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| |v_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i = M < +\infty$

y por tanto $\sup_{v \in V} \left| \left\langle P_n\left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - x^{(n,j)}, v \right\rangle \right| \leq \frac{M}{n} \leq \frac{1}{2}$, $n \geq n_2$.

Basta elegir n_0=mayor $\{n_1, n_2\}$ para que si $n \geq n_0$:

$$\sup_{v \in V} \left| \left\langle \left(x_i\left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) - x^{(n,j)}, v \right\rangle \right| \leq 1 \ . \quad \blacksquare$$

Caracterizamos propiedades de una clase de espacios de sucesiones mediante el:

Teorema 5.1

Si $\lambda = R(\lambda) \supset \varphi$ es un espacio de sucesiones tal que λ^ρ sea $\sigma(\lambda^\rho, \lambda)$-sucesionalmente completo, las siguientes propiedades son equivalentes:

a) $\lambda[\mu(\lambda, \lambda^\rho)]$ Es tonelado.

b) Las sucesiones $\mu(\lambda, \lambda^{\beta})$-convergentes y $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$-convergentes son las mismas.

c) Para cualquier $x \in \lambda$ se verifica que $x = \lim\limits_{j \to +\infty} \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right)$ y $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n\left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right) = \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \right)$ para cada $j \in \mathbb{N}$ fijo en la topología $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$.

d) $\lambda[\beta(\lambda, \lambda^{\beta})]$ es separable.

<u>Demostración</u>.

a) $\Rightarrow$ b) Si $\lambda[\mu(\lambda,\lambda^{\beta})]$ es tonelado, $\mu(\lambda,\lambda^{\beta}) = \beta(\lambda,\lambda^{\beta})$.

b) $\Rightarrow$ c) Como $\lambda = R(\lambda) \supset \varphi$ por P.5.1, se verifican las propiedades de las sucesiones con la topologia $\mu(\lambda,\lambda^{\beta})$ por lo que b) asegura el resultado.

c) $\Rightarrow$ d) Utilizando el mismo método seguido en P.5.3 obtenemos el resultado.

d) $\Rightarrow$ a) Para probar que $\lambda[\mu(\lambda,\lambda^{\beta})]$ es tonelado es suficiente que la topología $\mu(\lambda, \lambda^{\beta})$ sea más fina que $\beta(\lambda, \lambda^{\beta})$.

Supongamos que $M \subset \lambda^{\beta}$ es $\sigma(\lambda^{\beta}, \lambda)$-cerrado y acotado, tenemos que demostrar que M es $\sigma(\lambda^{\beta}, \lambda)$-compacto, pero por T.4.1 es suficiente que M sea $\sigma(\lambda^{\beta}, \lambda)$-sucesionalmente compacto.

Como $\lambda[\beta(\lambda,\lambda^{\beta})]$ es separable, existe un subconjunto numerable $N \subset \lambda$, que puedo ordenar como una sucesión $N = \{x^{(k)}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \lambda$ tal que para cada $x \in \lambda$, existe una red numerable en N que converge a x en $\beta(\lambda,\lambda^{\beta})$.

Sea $\{u^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión cualquiera, como M es $\sigma(\lambda^{\varsigma},\lambda)$-acotado para cada $k\in\mathbb{N}$ la sucesión $\{\langle x^{(k)}, u^{(n)}\rangle\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada en $\mathbb{K}$. Entonces, mediante un procedimiento diagonal, podemos extraer una subsucesión - $\{v^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\{u^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que para cada $k\in\mathbb{N}$ exista --- $\lim\limits_{n\to+\infty}\langle x^{(k)}, v^{(n)}\rangle$ .Esta sucesión será de Cauchy en $\mathbb{K}$. luego para cada $k\in\mathbb{N}$ y $\varepsilon>0$ existe $n_0(\varepsilon,k)$ tal que si $m,n\geqslant n_0(\varepsilon,k)$: $\left|\langle x^{(k)}, v^m-v^n\rangle\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$.

Por otro lado, el subconjunto $\{v^m-v^n\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\subset M-M$ es un $\sigma(\lambda^{\varsigma},\lambda)$-acotado.

Sabemos que para cada $x\in\lambda$ existe una red numerable $\{x^{\alpha}:\ \alpha\in A$ numerable dirigido $\}\subset\{x^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\{x^{\alpha}\}\xrightarrow{\beta(\lambda,\lambda^{\varsigma})} x$.

Sea $x\in\lambda$ fijo, para cualquier $\varepsilon>0$ y para el subconjunto $\{v^m-v^n\}_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ $\sigma(\lambda^{\varsigma},\lambda)$-acotado existe un $\alpha_0\in A$ tal que si $\alpha\in A$, $\alpha\geqslant\alpha_0$ entonces

$$\sup_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}\left|\langle x-x^{\alpha}, v^m-v^n\rangle\right|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\ .$$

Fijados $x\in\lambda$ y $\varepsilon>0$ tenemos un índice $\alpha_0\in A$ (numerable), luego tenemos un $k_0\in\mathbb{N}$ y en consecuencia un $n_0(\varepsilon,k_0)$ tal que :

$$\left|\langle x, v^m-v^n\rangle\right|\leqslant\left|\langle x-x^{\alpha_0}, v^m-v^n\rangle\right|+\left|\langle x^{\alpha_0}, v^m-v^n\rangle\right|\leqslant\varepsilon$$

si $m,n\geqslant n_0$. Entonces $\{v^n\}$ es una sucesión $\sigma(\lambda^{\varsigma},\lambda)$--Cauchy en $M\subset\lambda^{\varsigma}$, y por hipótesis λ^{ς} es $\sigma(\lambda^{\varsigma},\lambda)$--sucesionalmente completo, luego $\{v^n\}$ converge en M por -ser $\sigma(\lambda^{\varsigma},\lambda)$-cerrado. Es decir M es $\sigma(\lambda^{\varsigma},\lambda)$-suce sionalmente compacto. ∎

Caracterizamos a los espacios semireflexivos y re--flexivos mediante las proposiciones siguientes:

Proposición 5.4

Sea τ una topología localmente convexa compatible con $\langle \lambda, \lambda^{\rho} \rangle$. Si $\lambda[\tau]$ es un espacio de sucesiones ρ-perfecto que es semireflexivo, λ^{ρ} verifica una de las condiciones((a),...(d)) del T.5.1

Demostración.

Si $\lambda[\tau]$ es semireflexivo, entonces $\lambda[\sigma(\lambda, \lambda^{\rho})]$ es sucesionalmente completo (dado que es casi-completo). por lo que a $\lambda^{\rho} \supset \varphi$ se le puede aplicar el T.5.1 teniendo en --cuenta que $\lambda^{\rho\rho} = \lambda$.

Además $\lambda[\tau]$ es semireflexivo si y sólo si $\lambda^{\rho}[\mu(\lambda^{\rho}, \lambda)]$ es tonelado con lo que se verifica una de las propiedades equivalentes de dicho teorema. ∎

Es inmediata la:

Proposición 5.5

Sea τ una topología localmente convexa compatible con $\langle \lambda, \lambda^{\rho} \rangle$ y sea $\lambda \supset \varphi$ un espacio de sucesiones $\sigma(\lambda, \lambda^{\rho})$-sucesionalmente completo. $\lambda[\tau]$ es semireflexivo si y solo si λ^{ρ} verifica una de las condiciones del T.5.1.

Proposición 5.6

Si un espacio de sucesiones ρ-perfecto $\lambda[\mu(\lambda,\lambda^{\rho})]$ es reflexivo los espacios λ y λ^{ρ} verifican una de las condiciones del T.5.1.

Demostración.

Si $\lambda[\mu(\lambda,\lambda^{\rho})]$ es reflexivo, entonces $\lambda[\mu(\lambda,\lambda^{\rho})]$ es semireflexivo y por P.5.4, λ^{ρ} verifica una de las condiciones del T.5.1.

Además, si $\lambda[\mu(\lambda,\lambda^{\rho})]$ es reflexivo, $\lambda[\mu(\lambda,\lambda^{\rho})]$ es tonelado, luego $\lambda^{\rho}[\sigma(\lambda^{\rho},\lambda)]$ es sucesionalmente completo y podemos aplicar el T.5.1 a λ . ∎

Es inmediata la:

Proposición 5.7

Sea $\lambda\supset\varphi$ un espacio de sucesiones tal que $\lambda[\sigma(\lambda,\lambda^{\rho})]$ y $\lambda^{\rho}[\sigma(\lambda^{\rho},\lambda)]$ sean sucesionalmente completos. $\lambda[\mu(\lambda,\lambda^{\rho})]$ es reflexivo si y solo si los espacios λ y λ^{ρ} verifican una de las propiedades del T.5.1.

6. CONCEPTO DE ESPACIO ρ-ESCALONADO Y PROPIEDADES.

En el apartado anterior hemos introducido los espacios ρ-perfectos $\lambda_\alpha = \{x \in \omega : (\alpha_i x_i) \in sa\}$ para cada sucesión $\alpha = (\alpha_i) \in \omega$.

Denominamos sistema de escalones a la familia numerable de vectores $\alpha^{(n)} = (\alpha_i^{(n)}) \in \omega$; $n = 1, 2, \dots$

Si el sistema de escalones $\{\alpha^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ verifica:

1) $\alpha_i^{(n)} \neq 0$ Para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $i = 0, 1, 2, \dots$

2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m(n) > n$ tal que $\left(\dfrac{\alpha_i^{(n)}}{\alpha_i^{(m(n))}}\right) \in da$

definimos el espacio ρ-escalonado correspondiente al sistema $\{\alpha^{(n)}\}$ como

$$\lambda_\rho = \{ x \in \omega : (\alpha_i^{(n)} x_i) \in sa \ ; \ n = 1, 2, \dots \} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \lambda_{\alpha^{(n)}}$$

Entonces el espacio ρ-escalonado λ_ρ es un espacio vectorial que además es ρ-perfecto por P.1.5.

Dotamos a λ_ρ de la topologia dada por la familia numerable de normas:

$$(\| \, \| + q_j)^{(n)}(x) = \| (\alpha_i^{(n)} \cdot x_i) \| + q_j((\alpha_i^{(n)} \cdot x_i)) \quad , \ x \in \lambda_\rho \ ; \ n = 1, 2, \dots$$

Entonces λ_ρ es un espacio localmente convexo metrizable y denominamos espacio ρ-coescalonado a su dual topológico $(\lambda_\rho)'$.

Vamos a dar una demostración directa de que el espacio ρ-escalonado λ_ρ es un FK-espacio.

Proposición 6.1

λ_ρ es un FK-espacio.

Demostración.

En primer lugar probamos que λ_ρ es completo con lo cual será Fréchet.

Dada una sucesión de Cauchy $\{x^{(k)}\} \subset \lambda_\rho$, tenemos que fijados $\varepsilon>0$, $n \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{N}$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k' > k \geqslant k_0$, entonces $(\|\|+q_j)^{(n)}(x^{(k')}-x^{(k)}) < \varepsilon$
Es decir $\|(\alpha_i^{(n)})(x^{(k')}-x^{(k)})\| + \sup_i |\alpha_i^{(n)}||x_i^{(k')}-x_i^{(k)}|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i < \varepsilon$

con lo que para cada coordenada i fija se verifica:

$$|x_i^{(k')}-x_i^{(k)}| < \left(\frac{j+1}{j}\right)^i \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha_i^{(n)}|} \qquad \text{si } k'>k\geqslant k_0 \,.$$

Entonces cada una de las sucesiones $\{x_i^{(k)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ es de Cauchy para i=0,1,2,... por lo que convergen a un $x_i^0 \in \mathbb{K}$ que nos permite definir la sucesión $x^0=(x_i^0)\in\omega$ que es límite coordenado de $\{x^{(k)}\}$.

Demostraremos que $x^0 \in \lambda_\rho$ y que $\{x^{(k)}\} \longrightarrow x^0$ en la topologia de λ_ρ .

En efecto, veamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo:
$(\alpha_i^{(n)} \cdot x_i^0) \in sa$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ calculamos : $\sup_i |\alpha_i^{(n)}||x_i^0|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leqslant$

$$\leqslant \sup_i |x_i^0 - x_i^{(k)}||\alpha_i^{(n)}|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i + \sup_i |\alpha_i^{(n)}||x_i^{(k)}|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i$$

para algún $k \geqslant k_0$, k_0 depende a su vez de n,j y ε .
De esta manera el primer sumando es menor o igual que ε ya que se obtiene haciendo que $k' \to +\infty$ en la desigualdad
$\sup_i |\alpha_i^{(n)}||x_i^{(k')}-x_i^{(k)}|\left(\frac{j}{j+1}\right)^i$. Además el segundo sumando es finito porque $(x_i^{(k)}) \in \lambda_\rho$, luego $(\alpha_i^{(n)} \cdot x_i^{(k)}) \in sa$.

Entonces $\sup_{i} |\alpha_i^{(n)}| |x_i^o| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i < +\infty$ lo que asegura que la serie $\sum_{i=0}^{+\infty} (\alpha_i^{(n)} \cdot x_i^o) \rho^i$ es convergente en $0 < \rho < 1$.

Para probar que existe $\lim_{\rho \to 1^-} \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i^{(n)} x_i^o \rho^i$; dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $K' > K \geq K_0$, entonces:

$$\| (\alpha_i^{(n)})(x^{(K')} - x^{(K)}) \| = \sup_{0 \leq \rho < 1} \left| \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i^{(n)} x_i^{(K')} \rho^i - \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i^{(n)} \cdot x_i^{(K)} \rho^i \right| < \varepsilon$$

luego si $K' \longrightarrow +\infty$ tenemos que $\sup_{0 \leq \rho < 1} \left| \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i^{(n)} x_i^o \rho^i - \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i^{(n)} x_i^{(K)} \rho^i \right| \leq \varepsilon$

Por tanto $f^{(K)}(\rho) = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i^{(n)} \cdot x_i^{(K)} \cdot \rho^i$ converge uniformemente a $f(\rho) = \sum_{i=0}^{+\infty} \alpha_i^{(n)} x_i^o \rho^i$ en el conjunto $0 \leq \rho < 1$; lo cual asegura que siempre existe $\lim_{\rho \to 1^-} f(\rho)$ dado que existen $\lim_{\rho \to 1^-} f^{(K)}(\rho)$, $\forall K \in \mathbb{N}$.

Dado que $x^o \in \lambda_\rho$, demostramos que $\{x^K\} \to x^o$ en λ_ρ , sabemos que fijados $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $j \in \mathbb{N}$ existe $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $K' > K \geq K_0$ entonces: $(\|\,\| + q_j)^{(n)}(x^{(K')} - x^{(K)}) < \varepsilon$

Si hacemos que $K' \longrightarrow +\infty$, obtenemos $(\|\,\| + q_j)^{(n)}(x^o - x^{(K)}) \leq \varepsilon$ si $K \geq K_0$.

En consecuencia λ_ρ es un Fréchet, vamos a ver que es un K-espacio.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha_i^{(n)} \cdot x_i) \in sa$, que es un K-espacio luego fijadas $j \in \mathbb{N}$; i=0,1,2,... existe $C > 0$ tal que : $|\alpha_i^{(n)} x_i| \leq C \left(\| (\alpha_i^{(n)} x_i) \| + q_j ((\alpha_i^{(n)} \cdot x_i)\right) = C \left(\|\,\| + q_j \right)^{(n)}(x)$

luego $|x_i| \leqslant \frac{C}{|\alpha_i^{(n)}|} (\|\|+q_j)^{(n)}(x)$; $\forall x \in \lambda_\rho$. ■

Proposición 6.2.

El espacio vectorial $\lambda_{\alpha^{(n)}}$ con la topologia dada por la familia de normas $\{(\|\|+q_j)^{(n)}\}_{j=1,2,\dots}$ es isomorfo a (sa) para cada $n \in \mathbb{N}$.

Además para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m(n) > n$ tal que la inyección $\lambda_{\alpha^{(m(n))}} \hookrightarrow \lambda_{\alpha^{(n)}}$ es contínua

Demostración.

$\lambda_{\alpha^{(n)}} = \{x \in \omega : (\alpha_i^{(n)} \cdot x_i) \in sa\}$ es el transformado diagonal de (sa) mediante la sucesión $\left(\frac{1}{\alpha_i^{(n)}}\right)$ con lo que los espacios vectoriales $\lambda_{\alpha^{(n)}}$ y (sa) son algebraicamente isomorfos.

Como la aplicación $D\left(\frac{1}{\alpha_i^{(n)}}\right) : sa \longrightarrow \lambda_{\alpha^{(n)}}$, $y \longmapsto \left(\frac{y_i}{\alpha_i^{(n)}}\right)$ es bicontínua

porque: $(\|\|+q_j)^{(n)}\left(\frac{y_i}{\alpha_i^{(n)}}\right) = (\|\|+q_j)(y)$, $\forall y \in sa$

tenemos que sa y $\lambda_{\alpha^{(n)}}$ son topologicamente isomorfos.

Además, como el sistema de escalones $\{\alpha^{(n)}\}$ verifica que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe $m(n) > n$ tal que $\left(\frac{\alpha_i^{(n)}}{\alpha_i^{(m(n))}}\right) \in da$ vamos a probar que $\lambda_{\alpha^{(m(n))}} \subset \lambda_{\alpha^{(n)}}$ y la inyección es contínua.

Sea $x \in \lambda_{\alpha^{(m(n))}}$, entonces $(\alpha_i^{(m(n))} \cdot x_i) \in sa$, y dado que $(\alpha_i^{(n)} \cdot x_i) = \left(\frac{\alpha_i^{(n)}}{\alpha_i^{(m(n))}} \cdot \alpha_i^{(m(n))} \cdot x_i\right) \in sa$ con lo que

$x \in \lambda_{\alpha^{(n)}}$. Descomponemos la inyección.

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_{\alpha^{(m(n))}} & \xrightarrow{D_{\alpha^{(m(n))}}} & sa & \xrightarrow{T\left(\frac{\alpha_i^{(n)}}{\alpha_i^{(m(n))}}\right)} & sa & \xrightarrow{D\left(\frac{1}{\alpha_i^{(n)}}\right)} & \lambda_{\alpha^{(n)}} \\ x & \longmapsto & (\alpha_i^{(m(n))} \cdot x_i) & \longmapsto & (\alpha_i^{(n)} \cdot x_i) & \longmapsto & x \end{array}$$

como las transformaciones diagonales son continuas, y la aplicación $T_{(\ )} : sa \longrightarrow sa$ también lo es porque la sucesión pertenece a (da) tenemos que la inyección es continua. ■

Proposición 6.3

El espacio ρ-escalonado λ_ρ es límite proyectivo de los espacios $\{\lambda_{\alpha^{(n)}}\}_{n\in\mathbb{N}}$

Demostración

Dado que algebraicamente $\lambda_\rho = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \lambda_{\alpha^{(n)}}$;podemos dotar al espacio vectorial λ_ρ de la topologia τ límite proyectivo de las topologias de cada $\lambda_{\alpha^{(n)}}$. La proposición anterior asegura que cada $\lambda_{\alpha^{(n)}}$ es Fréchet, luego $\lambda_\rho[\tau]$ es un Fréchet.

Para probar que la topologia original de λ_ρ coincide con la topologia proyectiva veamos que la identidad $J : \lambda_\rho \longrightarrow \lambda_\rho[\tau]$ es un isomorfismo.

La identidad J es continua porque para cada $n \in \mathbb{N}$ las aplicaciones $(I_n \circ J)$ son continuas, siendo

$$\lambda_\rho \xrightarrow{J} \lambda_\rho[\tau] \xrightarrow{I_n} \lambda_{\alpha^{(n)}}$$

Entonces el teorema de la aplicación abierta permite concluir que J es un isomorfismo. ■

Teorema 6.1.

El dual topologico del espacio ρ-escalonado λ_ρ coincide con su ρ-dual.

Demostración.

El espacio λ_ρ es limite proyectivo del espectro formado por los espacios $\{\lambda_{\alpha^{(m(n))}}\}$, dado que éste es cofinal en el sistema de escalones $\{\alpha^{(n)}\}$.

Por tanto $(\lambda'_\rho)^\rho = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \lambda'_{\alpha^{(m(n))}}\right)^\rho = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} \lambda^\rho_{\alpha^{(m(n))}}\right)^\rho = \prod_{n=1}^{+\infty} \lambda^{\rho\rho}_{\alpha^{(m(n))}}$

dado que $\lambda_{\alpha^{(n)}}$ son ρ-perfectos y que:

$$\lambda'_{\alpha^{(n)}} = \left(D_{\left(\frac{1}{\alpha_i^n}\right)}(sa)\right)' = D_{(\alpha^{(n)})}(da) = \lambda^\rho_{\alpha^{(n)}}.$$

Como λ_ρ es Fréchet, su dual λ'_ρ es $\sigma(\lambda'_\rho, \lambda_\rho)$-casi completo ([18] ,p.297) y dado que $\lambda_\rho = (\lambda'_\rho)^\rho$ tenemos que λ'_ρ es $\sigma(\lambda'_\rho, (\lambda'_\rho)^\rho)$- sucesionalmente completo. Entonces la P.2.4 asegura que λ'_ρ es ρ-perfecto, luego:

$$\lambda'_\rho = (\lambda'_\rho)^{\rho\rho} = ((\lambda'_\rho)^\rho)^\rho = \lambda^\rho_\rho. \quad \blacksquare$$

Teorema 6.2

La topologia original de λ_ρ coincide con la ρ-topologia del par dual $\langle \lambda_\rho, \lambda^\rho_\rho \rangle$.

Demostración

El espacio ρ-escalonado λ_ρ es Fréchet, luego su topologia $\tau = \mu(\lambda_\rho, \lambda^\rho_\rho) = \beta(\lambda_\rho, \lambda^\rho_\rho)$ y como el T.6.1 afirma que $\lambda'_\rho = \lambda^\rho_\rho$ es suficiente probar que la ρ-topologia del par $\langle \lambda_\rho, \lambda^\rho_\rho \rangle$ es más fina que la original. Para ello vamos a probar que cada τ-entorno de 0 en λ_ρ es un entorno de 0 para la ρ-topologia.

Sabemos que la familia de normas $\left\{ (\|\,\| + q_j)^{(n)} \right\}_{\substack{n=1,2,\dots \\ j=1,2,\dots}}$ define la topologia τ, luego si considero los subconjuntos absolutamente convexos y τ-cerrados:

$$V_j^{(n)} = \left\{ x \in \lambda_\rho : (\|\,\| + q_j)\left((\alpha_i^{(n)} x_i)\right) \leq 1 \right\}$$

la familia de los múltiplos escalares $\{\lambda V\}_{\lambda > 0}$, donde V son las intersecciones finitas $V = \bigcap_{p=1}^{K} V_{j_p}^{(n_p)}$ forma una base de τ-entornos de 0 absx y τ-cerrados.

Calculamos el polar de uno de estos conjuntos:

$$[\lambda V]^{\circ} = \frac{1}{\lambda} \left(\bigcap_{p=1}^{K} V_{j_p}^{(n_p)} \right)^{\circ} = \frac{1}{\lambda}\ \overline{\Gamma\left(\bigcup_{p=1}^{K} \left(V_{j_p}^{(n_p)} \right)^{\circ} \right)}^{\sigma(\lambda_\rho^\rho, \lambda_\rho)}$$

Vamos a probar que $\left(V_{j_p}^{(n_p)} \right)^{\circ} = \left\{ \alpha^{(n_p)} \right\}_{j_p}^{da}$ teniendo en cuenta que cada $\alpha^{(n)} \in \lambda_\rho^\rho$, $n = 1, 2, \dots$ y el subconjunto:

$$\left\{ \alpha^{(n_p)} \right\}_{j_p}^{da} = \left\{ (\varepsilon_i \alpha_i^{(n_p)}) : (\varepsilon_i) \in U_{j_p}^{\circ} \subseteq da \right\}$$

donde:

$$U_{j_p} = \{ y \in sa : (\|\,\| + q_{j_p})(y) \leq 1 \}$$

En efecto; teniendo en cuenta que: $x \in V_{j_p}^{(n_p)}$ si y solo si $(\alpha_i^{(n_p)} \cdot x_i) \in U_{j_p}$:

Sea $z \in \left(V_{j_p}^{(n_p)} \right)^{\circ}$, entonces $|\langle z, x \rangle| \leq 1$ para cada $x \in V_{j_p}^{(n_p)}$, por tanto $\left| \left\langle \left(\frac{z_i}{\alpha_i^{(n_p)}} \right), (\alpha_i^{(n_p)} x_i) \right\rangle \right| \leq 1$ para cada $x \in V_{j_p}^{(n_p)}$, y como cada $(y_i) \in U_{j_p}$ puede escribirse $(y_i) = \left(\alpha_i^{(n_p)} \cdot \frac{y_i}{\alpha_i^{(n_p)}} \right)$ donde $\left(\frac{y_i}{\alpha_i^{(n_p)}} \right) \in V_{j_p}^{(n_p)}$ tenemos que : $\left| \left\langle \left(\frac{z_i}{\alpha_i^{(n_p)}} \right), (y_i) \right\rangle \right| \leq 1$ para cada $(y_i) \in U_{j_p}$.

En consecuencia $\left(\frac{z_i}{\alpha_i^{(n_p)}} \right) \in U_{j_p}^{\circ}$ y queda probado que $z = (\varepsilon_i \cdot \alpha_i^{(n_p)})$ donde $(\varepsilon_i) \in U_{j_p}^{\circ}$, es decir $z \in \left\{ \alpha^{(n_p)} \right\}_{j_p}^{da}$.

Recíprocamente si $z = (\varepsilon_i \cdot \alpha_i^{(np)})$, con $(\varepsilon_i) \in U_{jp}^{\circ}$, tenemos que $|\langle (\varepsilon_i), v \rangle| \leq 1$ para cada $v \in U_{jp}$, entonces para todo $x \in V_{jp}^{(np)}$ tenemos que $(\alpha_i^{(np)} \cdot x_i) \in U_{jp}$, luego:

$$|\langle (\varepsilon_i), (\alpha_i^{(np)} \cdot x_i) \rangle| = |\langle (\varepsilon_i \alpha_i^{(np)}), (x_i) \rangle| \leq 1$$

para todo $x \in V_{jp}^{(np)}$, luego $(\varepsilon_i \cdot \alpha_i^{(np)}) = z \in \left(V_{jp}^{(np)}\right)^{\circ}$.

Dado que los subconjuntos $\left(V_{jp}^{(np)}\right)^{\circ}$ son absolutamente convexos y $\sigma(\lambda_\varrho^\varrho, \lambda_\varrho)$ - compactos por el corolario de P.3.1; tenemos que la envoltura absolutamente convexa de su unión finita es también $\sigma(\lambda_\varrho^\varrho, \lambda_\varrho)$-compacta y coincide con su envoltura $\sigma(\lambda_\varrho^\varrho, \lambda_\varrho)$-cerrada. Entonces $V^{\circ} \subset \lambda_\varrho^\varrho$ es un elemento de la familia de subconjuntos de λ_ϱ^ϱ cuyos polares -- dan lugar a una base de entornos de 0 de la ϱ-topologia, y en consecuencia $V = V^{\circ\circ}$ es un entorno de 0 para la ϱ-topologia. ∎

Corolario 2.1

Para cada $x \in \lambda_\varrho$ las secciones ϱ-convergen a x.

Demostración.

Como λ_ϱ es ϱ-perfecto y su topologia coincide con la ϱ-topologia aplicamos P.3.3. ∎

Corolario 2.2

El espacio ϱ-escalonado λ_ϱ es separable.

Demostración.

Por P.3.7. ■

Corolario 2.3

En el espacio ρ-escalonado λ_ρ coinciden los subconjuntos compactos, numerablemente compactos y sucesionalmente compactos.

Demostración

Por T.4.2. ■

Corolario 2.4

Sea λ_ρ un espacio ρ-escalonado tal que sea $\sigma(\lambda_\rho,\lambda_\rho^\rho)$-sucesionalmente completo, entonces λ_ρ es reflexivo si y solo si λ_ρ^ρ verifica una de las propiedades del T.5.1. ■

Demostración.

λ_ρ es un espacio ρ-perfecto, además λ_ρ^ρ es $\sigma(\lambda_\rho^\rho,\lambda_\rho)$-sucesionalmente completo y $\lambda_\rho[\mu(\lambda_\rho,\lambda_\rho^\rho)]=\lambda_\rho[\tau]$ es tonelado por ser Fréchet. Aplicando P.5.7 obtenemos el resultado. ■

7. ESPACIOS ρ-ESCALONADOS MONTEL Y SCHWARTZ

Podemos caracterizar a los espacios ρ-escalonados que sean de Montel mediante:

Proposición 7.1.

El espacio ρ-escalonado λ_ρ es Montel si y solo si en el ρ-coescalonado λ_ρ^ρ coinciden las sucesiones - $\sigma(\lambda_\rho^\rho, \lambda_\rho)$-convergentes con las $\beta(\lambda_\rho^\rho, \lambda_\rho)$ - convergentes.

Demostración

Dado que λ_ρ es un Fréchet separable el resultado es consecuencia inmediata del criterio de Dieudonné-Gomes. ([18] , pag.371). ∎

Proposición 7.2

λ_ρ es Montel si y solo si λ_ρ es reflexivo y en λ_ρ^ρ coinciden las sucesiones $\sigma(\lambda_\rho^\rho, \lambda_\rho)$-convergentes con las $\mu(\lambda_\rho^\rho, \lambda_\rho)$-convergentes.

Demostración.

La condición necesaria es consecuencia de la proposición anterior y del hecho de que todo espacio de Montel es reflexivo.

Recíprocamente si λ_ρ es reflexivo, como es ---- ρ-perfecto y su topologia coincide con $\mu(\lambda_\rho, \lambda_\rho^\rho)$ la - proposición 5.6. asegura que en λ_ρ^ρ coinciden las sucesiones $\mu(\lambda_\rho^\rho, \lambda_\rho)$-convergentes con las $\beta(\lambda_\rho^\rho, \lambda_\rho)$-convergen--

tes. En consecuencia las sucesiones débilmente convergentes coinciden con las fuertemente convergentes, luego la anterior proposición garantiza que λ_ρ es Montel. ∎

Vamos a dar una condición suficiente para que el espacio ρ-escalonado sea de Schwartz.

Proposición 7.3.

Si el sistema de escalones $\{\alpha^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica:

1) $\alpha_i^{(n)} \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $i=0,1,2,\ldots$

2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $m(n) > n$ y $\sigma \in (0,1)$ tales que $\dfrac{\alpha_i^{(n)}}{\alpha_i^{(m(n))}} = O(\sigma^i)$ entonces λ_ρ es un espacio de Schwartz.

Demostración.

Como λ_ρ es el límite proyectivo del espectro $\{\lambda_{\alpha^{(m(n))}}\}$ es suficiente probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m(n) > n$ tal que la inyección continua $\lambda_{\alpha^{(m(n))}} \hookrightarrow \lambda_{\alpha^{(n)}}$ es compacta. Con la misma descomposición que en la P.6.2 tenemos que:

$$\begin{array}{ccccccc} \lambda_{\alpha^{(m(n))}} & \longrightarrow & sa & \longrightarrow & sa & \longrightarrow & \lambda_{\alpha^{(n)}} \\ x & \longmapsto & (\alpha_i^{(m(n))} \cdot x_i) & \longmapsto & (\alpha_i^{(n)} x_i) & \longmapsto & x \end{array}$$

Las transformaciones diagonales $D_{\alpha^{(m(n))}}$ y $D_{\left(\frac{1}{\alpha_i^{(n)}}\right)}$ son continuas y como la aplicacion $T_{\left(\frac{\alpha_i^{(n)}}{\alpha_i^{(m(n))}}\right)}$ verifica que cada elemento de la sucesión es de $O(\sigma^i)$ con $0 < \sigma < 1$ el teorema 4.5 asegura que es compacta. La inyección será también compacta luego λ_ρ es un espacio de Schwartz. ∎

Proposición 7.4

Si el sistema de escalones $\{\alpha^{(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ verifica:

1) $\alpha_i^{(n)} \neq 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada $i=0,1,\ldots$

2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existen $m(n) > n$ y $\sigma \in (0,1)$ tales que:

$$\frac{\alpha_i^{(n)}}{\alpha_i^{(m(n))}} = O(\sigma^i)$$

Entonces el espacio ρ-escalonado λ_ρ es isomorfo al espacio escalonado de Kothe λ.

Demostración.

Veamos que algebraicamente coinciden: En general $\lambda \subset \lambda_\rho$ dado que $1^1 \subset$ sa y probamos que si $x \in \lambda_\rho$, entonces $x \in \lambda$.

Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, por 2) existen $m(n) \in \mathbb{N}$ y --- $\sigma \in (0,1)$ tales que $\frac{\alpha_i^{(n)}}{\alpha_i^{(m(n))}} = O(\sigma^i)$, luego $(\alpha_i^{(n)} x_i) = \left(\frac{\alpha_i^{(n)}}{\alpha_i^{(m(n))}} \cdot \alpha_i^{(m(n))} \cdot x_i\right)$ donde $(\alpha_i^{(m(n))} \cdot x_i) \in$ sa porque $x \in \lambda_\rho$.

Entonces: $\limsup_{i \to +\infty} \sqrt[i]{|\alpha_i^{(m(n))} \cdot x_i|} \leq 1$, $\limsup_{i \to +\infty} \sqrt[i]{\left|\frac{\alpha_i^{(n)}}{\alpha_i^{(m(n))}}\right|} \leq \sigma < 1$

con lo cual $\limsup_{i \to +\infty} \sqrt[i]{\left|\frac{\alpha_i^{(n)}}{\alpha_i^{(m(n))}} \cdot \alpha_i^{(m(n))} \cdot x_i\right|} < 1$ y por tanto $(\alpha_i^{(n)} \cdot x_i) \in 1^1$, para $n=1,2\ldots$. En consecuencia - $\lambda = \lambda_\rho$.

Además probamos que sus topologías coinciden:

En el escalonado λ su topologia τ viene definida por las normas $\|x\|_1^{(n)} = \sum_{i=0}^{+\infty} |\alpha_i^{(n)} x_i|$, $x \in \lambda$, con $n=1,2,.$

En el ρ-escalonado λ_ρ su topologia τ' viene dada por las normas:

$$(\| \| + q_j)^{(n)}(x) = \|(\alpha_i^{(n)} x_i)\| + q_j((\alpha_i^{(n)} x_i)) \quad , x \in \lambda_\rho \ , \ n=1,2,\ldots \ ; j=1,2$$

Dado que $\lambda = \lambda_\rho$ vamos a probar que τ es más fina que τ'.

Para cualquier $j \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ existe la norma $\| \|_1^{(n)}$ verificando:

$$(\| \| + q_j)^{(n)}(x) = \sup_{0 \leq \rho < 1} \left| \sum_{i=0}^{+\infty} (\alpha_i^{(n)} x_i) \rho^i \right| + \sup_{0 \leq \rho < 1} |\alpha_i^{(n)} x_i| \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \leq$$

$$\leq \sup_{0 \leq \rho < 1} \sum_{i=0}^{+\infty} |\alpha_i^{(n)} x_i| \rho^i + \sup_i |\alpha_i^{(n)} x_i| \leq 2 \sum_{i=0}^{+\infty} |\alpha_i^{(n)} x_i| = 2 \|x\|_1 .$$

para todo $x \in \lambda$.

Entonces la identidad J: $\lambda[\tau] \longrightarrow \lambda_\rho[\tau']$ es continua y dado que $\lambda[\tau]$ y $\lambda_\rho[\tau']$ son ambos Fréchet, el teorema de la aplicación abierta garantiza que son isomorfos. ∎

Proposición 7.5

El espacio vectorial $ta = \{ x \in \omega : \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \rho^i < +\infty \ : \rho \in (0,1) \}$ con la topologia dada por la sucesión de normas $p_j(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| \rho^i$ $j=1,2,\ldots$ es un Fréchet-Schwartz, cuyo dual es el espacio: $\{ u \in \omega : u_i = O(\sigma^i) \ , \ \sigma \in (0,1) \}$.

Demostración.

Probamos primero que $ta = \{ x \in \omega : \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) \in l^1, \ j = 1,2,\ldots \}$. Si $x \in ta$, la serie de potencias $\sum_{i=0}^{+\infty} |x_i| \rho^i$ es convergente para todo $\rho \in (0,1)$, luego para $j \in \mathbb{N}$ cualquiera existe $\rho \in (0,1)$ tal que $\left(\frac{j}{j+1}\right) < \rho$ por lo que $\left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) \in l^1$. Recíprocamente si $\left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) \in l^1$ para $j=1,2,\ldots$, dado $\rho \in (0,1)$ cualquiera existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\rho < \left(\frac{j}{j+1}\right)$ lo cual asegura que $x \in (ta)$.

Como el sistema de normas que define la topologia de (ta) es $p_j(x) = \|x\|_1^{(j)}$ tenemos que el espacio (ta) es el escalonado de Köthe dado por el sistema $\{ \alpha^{(j)} \}_{j \in \mathbb{N}}$ donde

$$\alpha_i^{(j)} = \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \quad , \quad i=0,1,2,\ldots$$

Veamos que este sistema de escalones verifica las condiciones 1) y 2) de la anterior proposición.

Para cualquier $j \in \mathbb{N}$ consideramos $(j+1) \in \mathbb{N}$ y ---- $0 < \sigma = \dfrac{j(j+2)}{(j+1)^2} < 1$ que verifican:

$$\frac{\alpha_i^{(j)}}{\alpha_i^{(j+1)}} = \left(\frac{j}{j+1}\right)^i \cdot \left(\frac{j+2}{j+1}\right)^i = O(\sigma^i) \; .$$

Por tanto (ta) es un espacio ρ-escalonado y P.7.3 asegura que (ta) es un Fréchet-Schwartz.

Para calcular el dual topologico de (ta) tenemos en cuenta que coincide con el espacio $\bigcup_{j=1}^{+\infty} \lambda_{\alpha^{(j)}}^{\times}$ ([18], pag.419) donde : $\lambda_{\alpha^{(j)}}^{\times} = \left\{ x \in \omega \; : \; \left(x_i \left(\frac{j}{j+1}\right)^i\right) \in l^1 \right\} \quad j=1,2,\ldots$

Entonces, $\lambda_{\alpha^{(j)}} = D_{\left(\frac{1}{\alpha_i^{(j)}}\right)}(l^1)$ luego $\lambda_{\alpha^{(j)}}^{\times} = D_{(\alpha_i^{(j)})}(l^1)^{\times} =$

$$= D_{(\alpha^{(j)})}(l^{\infty}) = \left\{ u \in \omega \; : \; \sup_i |u_i| \left(\frac{j+1}{j}\right)^i < +\infty \right\}$$

por lo que : $(ta)' = \bigcup_{j=1}^{+\infty} \lambda_{\alpha^{(j)}}^{\times} = \left\{ u \in \omega \; : \; |u_i| \leq C_j \left(\frac{j}{j+1}\right)^i , \; C_j > 0 \, ; \, j=1,2\ldots \right\}$

$$= \left\{ u \in \omega \; : \; u_i = O(\sigma^i) \; , \; 0 < \sigma < 1 \right\} . \quad \blacksquare$$

BIBLIOGRAFIA

Usaremos las siguientes abreviaturas:

CR Comptes rendus de l'Académie des sciences (paris)

JM Journal für die veine und angewandte Mathematik.

MA Mathematische Annalen.

MZ Mathematische Zeitschrift.

PCPS Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.

SM Studia Mathematica.

[1] ABEL,N.H. : Untersuchungen über die Reihe........JM 1 (1826), 311-339

[2] ANTONINO,J.A.: Propiedades de los espacios de sucesiones, ρ-dualidad y espacios casi-perfectos. Tesis.Universidad de Valencia.

[3] BANACH, S.: Théorie des opérations linéaires. Warszawa -- 1932.

[4] BIRKHOLC,A: On generalized powers methods of limitation. S.M. 27 (1966), 213-245.

[5] CESARO, E: Sur la multiplication des séries.Bull. sciences math. (2) 14 (1890).114-120

[6] DIEUDONNE J.y SCWARTZ,L. : La dualité dans les espaces (F) et (LF). Ann. Inst.Fourier 1 (1950),61-101.

[7] DUNFORD N. y SCHWARTZ,J.T.: Linear Operators, Part I: General Theory. New York 1958.

[8] FLORENCIO, M.; "Sumabilidad Cesáro en espacio de sucesiones". Tesis. Universidad de Sevilla.

[9] FROBENIUS, G: Über die Leibnizsche Reihe. J.M. 89 (1880) 262-264.

[10] GARLING, D.J.H.: On topological sequence spaces. PCPS 63 (1967), 997-1019.

[11] -------- -------: The β and γ-duality of sequence spaces. PCPS 63 (1967), 963-981.

[12] HARDY, G.H.: Divergent Series. Oxford 1973.

[13] HAUSDORFF, F.: Summations methoden und Momentfolgen I-II MZ 9 (1921), 74-109 y 280-299.

[14] HEWITT, E. y STORMBERG, K: Real and Abstract Analysis. -- Springer 1965.

[15] HÖLDER, O: Grenzwerthe von Reihen an der Convergenzgrenze. M.A. 20 (1882), 535-549.

[16] HORVATH, J.: Topological Vector Spaces and Distributions. Vol.I. Addison-Wesley 1966.

[17] KNOPP, K.: Theory and application of infinite series. Hafner P.C. New York

[18] KÖTHE, G.: Topological Vector Spaces I. Springer 1969.

[19] -------- Topological Vector Spaces II. Springer 1979

[20] MARQUINA A.; Algunas propiedades de compacidad en espacios de sucesiones. Revista de la R.A. de Ciencias 67 -- (1°)(1973), 51-60.

[21] PEYERIMHOFF,A: Convergenz und Summierbarkeitsfaktoren. MZ 55 (1951/52), 23-54.

[22] ------------: Lectures on Summability. Lecture Notes in Mathematics 107.Springer 1969.

[23] RUDIN,W.: Principios de análisis matemático (3^aed.).Mc.-Graw-Hill 1980.

[24] Schaefer,H.H.: Sequence Spaces with a given Köthe β-dual MA 189 (1970), 235-241.

[25] SIDON,S.: Über das Abelsche Summationsverfahren. SM 9 -- (1948)., 106-107.

[26] VALDIVIA,M.: Some criteria for weak compactness. J.M.255 (1972),165-169.

[27] -----------: Espacios de sucesiones. Ayudas Manuel Aguilar. Madrid (1980).

[28] WLODARSKI,L.: Sur les méthodes continues de limitation I. SM 14 (1954), 161-187.

[29] ZELLER,K.: Sur la méthode de sommation d'Abel. CR 236 - (1953), 568-569.

[30] ---------: Vergleich del Abelverfahrens mit gewöhnlichen Matrixverfahren. MA 131 (1956),253-257.

[31] ---------: Theorie der Limitierungsverfahren. Springer - 1958.

VERSIDAD

FACULTAD DE CIENCIAS MATEM

unido el Tribunal integrado por los abajo firmantes
ía de la fecha, para juzgar la Tesis Doctoral de
Mario Bilbao Areso
da "Espacios de sucesiones y sumabili-
lidad de Abel"

ó otorgarle la calificación de Sobresaliente
cum laude

Sevilla, 27 de Junio 1.981

l Vocal, El Vocal, El Vocal,

l Presidente, El Secretario, El Doctorado

UNIVERSIDAD DE SEVILLA