UNIVERSIDAD DE SEVILLA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

ESPACIOS Σ-COMPLETOS

SANTIAGO DÍAZ MADRIGAL

Tesis Doctoral

Memoria que presenta
D. Santiago Díaz Madrigal
para optar al grado de Doctor
en Ciencias Matemáticas.

D. Madrigal

Fdo: S. Díaz Madrigal.

Jesús Mario Bilbao Arrese, profesor titular del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Sevilla,

CERTIFICA: Que la presente memoria "Espacios Σ-Completos", ha sido realizada bajo su dirección por el licenciado en Ciencias Matemáticas, Santiago Díaz Madrigal, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

VB : Director de tesis.

Fdo: J. M. Bilbao Arrese.

Sevilla, Mayo de 1990

Quiero dejar constancia de mi más sincero agradecimiento a todos los profesores del Departamento de Matemática Aplicada de la Escuela Superior de Ingenieros Industriales por el ánimo y apoyo recibidos, y especialmente al profesor Dr. Bilbao Arrese, director de esta memoria.

A Flora y Javi

Contenido

Introducción

El germen de esta memoria es el concepto de Σ–completitud:

> Un espacio localmente convexo se dice Σ–completo si toda serie incondicionalmente Cauchy es convergente.

Dicho concepto fue introducido por P. Dierolf [Habilitationen (1975), [13]], en su estudio de las denominadas "Topologías de Orlicz–Pettis", como una cierta condición para obtener inclusiones entre estas topologías mencionadas. Además, probó que dicho concepto se podía encajar de modo natural entre tipos de completitud conocidos: la completitud sucesional y la completitud local.

Con estos precedentes, y teniendo en cuenta el papel que desempeñan los conceptos de completitud en distintas áreas del Análisis Funcional, nos hemos propuesto realizar un ánalisis de la citada Σ–completitud, así como estudiar propiedades de los espacios Σ–completos en distintos contextos.

Comenzamos exponiendo los principales resultados obtenidos sobre la Σ–completitud.

[1] Σ–COMPLETITUD: En la sección 2.2 obtenemos diversas caracterizaciones de la Σ–completitud. Dichas caracterizaciones tratan sobre:

1. Convergencia de series por multiplicadores acotados (teorema 2.2.1).

2. Envolturas absolutamente convexas y cerradas de rangos de series (teorema 2.2.2).

3. Una cierta propiedad de compacidad de discos de Banach generados por series incondicionalmente Cauchy (teorema 2.2.3).

Hay que resaltar la analogía de estos resultados con las distintas caracterizaciones de la completitud local (ver Pérez Carreras–Bonet [50, cap. 5], y teoremas 2.3.3, 2.3.5).

Las relaciones entre la completitud sucesional y la Σ–completitud, llevan de modo natural a considerar la propiedad (u) introducida por Pełczynski [48] en espacios de Banach, en un ámbito más general. Es por esto, que dedicamos la sección 1.2, a proporcionar ejemplos y resultados sobre dicha propiedad en los espacios localmente convexos.

En la misma sección 2.2, probamos que la Σ–completitud de un espacio con la topología débil, está relacionada con no tener subespacios isomorfos a c_0 (teorema 2.2.5), extendiendo de este modo un conocido teorema de Bessaga y Pełczynski [5] para espacios de Banach. En la sección 2.4, y también, para la topología débil, estudiamos la propiedad de los tres espacios para la Σ–completitud.

Por último, mencionar que, puesto que en espacios vectoriales topológicos generales, una serie puede ser de Cauchy por multiplicadores acotados sin ser incondicionalmente Cauchy, tenemos que en ese contexto existe un concepto similar, pero distinto, de la Σ–completitud que coincide con él dentro de los espacios localmente convexos. La sección 2.1, la dedicamos a comentar estos resultados, observando como ellos están relacionados con el hecho de que en espacios vectoriales topológicos, la envoltura convexa de un precompacto no es, en general, un conjunto precompacto.

Los resultados sobre los espacios Σ–completos, los hemos agrupado de la siguiente forma.

[2] TEOREMAS DE ORLICZ–PETTIS: Este teorema fue probado para espacios de Banach débil sucesionalmente completos por Orlicz [46], en los años veinte, pero fue desconocido para el público matemático durante bastante tiempo. En esa situación, cuando Pettis estaba escribiendo su "Ph. D." una decada después, se encontró con la necesidad de obtener una prueba de dicho teorema [51]. Posteriormente, dicho teorema ha sido extendido a espacios localmente convexos (MacArthur [41], Grothendieck [27]), e incluso a grupos topológicos (Kalton [34]).

El teorema de Orlicz–Pettis, ha originado toda una gama de resultados sobre topologías que tienen las mismas sucesiones subseries sumables que una cierta topología dada.

En esta línea, P. Dierolf [9], [10] y Tweddle [65] han analizado topologías maximales con las mismas series convergentes por subseries que una dada. En la sección 1.3, pueden encontrarse sus principales resultados sobre este tema, Dedicamos especial atención a estas topologías maximales cuando coinciden con la de partida. En dicha sección, aportamos ejemplos de esta clase de topologías, y mostramos como pueden obtenerse topologías maximales en el sentido anterior, así como resultados parecidos, con otros tipos de convergencia de series.

En una línea diferente Diestel, Faires [16] han estudiado topologías más débiles que una dada con las mismas sucesiones subseries sumables.

Siguiendo este planteamiento, en la sección 1.4, hemos realizado un análisis sobre condiciones que aseguren que una topología dada y todas las menos finas que ella tienen las mismas series convergentes por λ–multiplicadores, donde λ recorre los espacios de sucesiones más usuales.

[3] Completitud en espacios locamente convexos: La completitud local fue considerada inicialmente por Mackey [40] y Grothendieck [28]. El problema de dar una caracterización más manejable de este concepto ha sido tratado por Dierolf [12] y Valdivia [67]. En la sección 2.3 damos nuevas caracterizaciones de los espacios locamente completos usando series. Una de ellas resulta ser, por otro lado, una extensión de un teorema de Bessaga y Pełczynski [5] para espacios de Banach.

Además, estos resultados nos han permitido resolver el problema de la relación general entre los O–espacios de Orlicz, y los C–espacios de L. Schwartz (ver [45], [60]).

[4] Tonelación débil: El concepto de espacio tonelado surgió de la necesidad de obtener una clase maximal de espacios donde se verificara el teorema clásico de la acotación uniforme. Posteriormente, fueron apareciendo versiones "débiles" de dicho concepto ligadas, generalmente, con teoremas de gráfica cerrada.

En este contexto, en la sección 3.1, hemos mostrado como la Σ–completitud da origen a una nueva clase de tonelación débil, que está entre, conceptualmente hablando, la ℓ_∞–tonelación y la c_0–tonelación. Además distintas propiedades de estos espacios son estudiadas en dicha sección.

[5] Teoremas de gráfica cerrada: El teorema de gráfica cerrada fue probado por Banach en [2]. Con el tiempo ha venido a convertirse en una de las herramientas básicas del Análisis Funcional. La primera extensión importante del teorema, se debe a Ptak [54], quien introduce el concepto de B_r–completitud, con el propósito de establecer teoremas de gráfica cerrada cuya clase inicial sea la de los espacios tonelados, y con clase final de espacios no necesariamente metrizables.

Posteriormente, los trabajos de Mahowald, Adasch, Komura y Valdivia (Pérez Carreras–Bonet [50, cap. 7]), establecen una clase final óptima para espacios tonelados.

Este planteamiento ha sido trasladado a otros tipos de tonelación. En este sentido hay que mencionar los resultados de Kalton [32], Marquina [44], sobre espacios G–tonelados, los de Valdivia sobre espacios c_0–tonelados [67] y los de Popoola, Tweddle [53] sobre espacios ℓ_∞–tonelados.

Nuestro primer resultado sobre este tema (sección 1.4) muestra que los teoremas de gráfica cerrada para la ℓ_∞–tonelación (a), y la G–tonelación (b), son complementarios. Pues, a pesar de que la clase de partida es similar, ℓ_∞ no puede ponerse en la de llegada para el teorema (a) (corolario 1.4.1), pero sí para el (b).

Siguiendo técnicas de Valdivia [67], hemos establecido un teorema máximal abstracto de gráfica cerrada, usando en la clase de partida los espacios dual Σ–completos (sección 3.2). En esta misma sección, hemos estudiado diversas propiedades de la clase final de este teorema. Para dicha clase final, conjeturamos que, además de los espacios de Banach reflexivos, está el espacio de sucesiones ℓ_1.

Con objeto de dar teoremas de gráfica cerrada más "concretos", retomamos el problema anterior de "ℓ_1", pero esta vez siguiendo una línea similar a la empleada por Poppola, Tweddle para ℓ_∞ (sección 3.3). En concreto, damos un teorema de gráfica cerrada "mixto", con espacios dual Σ–completos en la clase de partida, y ℓ_1 en la de llegada, donde ℓ_1 puede ser sustituido por cualquier espacio de Banach dual de un espacio de Banach separable con la propiedad (u) y sin copia de ℓ_1. Este tipo de espacios aparecen en la literatura en conexión con problemas sobre separabilidad del dual de un Banach separable.

Finalmente, en la sección 3.4, hemos dado un teorema de gráfica cerrada con clase de partida los espacios de Orlicz–Pettis, que complementa un resultado de Pfister, tipo gráfica de Borel (ver [50, p. 76]).

Los teoremas anteriores, los hemos aplicado a espacios de sucesiones con la α–dualidad (sección 3.4), obteniendo resultados que relacionan los teoremas de Kalton (dual sucesionalmente completo, c_0 en la clase de llegada, Banach separables en la clase de llegada), con nuestros resultados sobre espacios dual

Σ–completos, ℓ_1 en la clase de llegada, B_r–completos sin copia de ℓ_∞ en la clase de llegada.

[6] APLICACIONES COMPACTAS: Los primeros estudios sustanciales sobre operadores sobre espacios de funciones continuas fueron hechos independientemente por Grothendieck [27], y Bartle, Dunford, Schwartz [3]. En este contexto Grothendieck, comprobó que para ciertas clases especiales de funciones continuas (en concreto, sobre espacios compactos Hausdorff de Stone), la convergencia sucesional débil y débil* coincidían, abriendo así paso a los denominados espacios de Grothendieck. Estos han mostrado estar relacionados con la teoría de la medida, y otros tópicos (espacios de generación débilmente compacta, aplicaciones compactas con llegada en c_0). Una lista de reformulaciones de estos espacios puede verse en Diestel, Uhl [17, pp. 179–181].

En la sección 4.2, hemos obtenido resultados similares para aplicaciones compactas con llegada en ℓ_1, y otras clases de espacios de Banach. Como era previsible, aparece una propiedad similar a la que define los espacios de Grothendieck, pero esta vez con series incondicionalmente convergentes. Hacemos notar, que nuestro estudio lo hacemos en el marco general de los espacios localmente convexos, no necesariamente Banach.

En los teoremas mencionados, juega un papel destacado la ordenación de espacios de Banach introducida por Edgar [20]. En la sección 4.1, damos nuevas relaciones de dicho orden con las topologías de Orlicz–Pettis.

Finalmente, en la sección 4.3, damos una extensión de un conocido teorema de Pełczynski [49] en espacios de Banach sobre aplicaciones compactas de c_0 en un espacio E. Dicha extensión está relacionada, como es natural, con los espacios débil Σ–completos.

Finalmente, mencionar que diversos resultados de esta memoria, tienen consecuencias sobre el cuadro general de implicaciones entre los distintos tipos de convergencia de series (ver sección 1.1).

Terminología y notación

A lo largo de toda la memoria, designaremos por "espacio", a cualquier "espacio localmente convexo Hausdorff". Para los conceptos no definidos en este trabajo, nos remitimos a las monografías de Jarchow [31], y Pérez Carreras-Bonet [50].

En particular, si E es un "espacio", denotaremos por E^*, E' y E'' al dual algebraico, dual topológico y bidual de E, respectivamente, y a la inyección de E en su bidual por π_E. En ciertos casos, identificaremos al espacio E con su imagen canónica en el bidual. Si E es un espacio normado, $B_1(E)$ será su bola unidad cerrada. Así mismo, dado un par dual (E, F), se designará por $\langle x, y \rangle$ la forma bilineal asociada, y $\sigma(E, F)$, $\mu(E, F)$, $\beta(E, F)$, $\beta^*(E, F)$, representarán, respectivamente, las topologías débil, Mackey, fuerte y de convergencia uniforme sobre los $\beta(F, E)$–acotados. Aclaramos que, para el dual E', la topología débil será $\sigma(E', E'')$, y $\sigma(E', E)$ será la topología débil*.

Por otra parte, dado un subconjunto A de un espacio $[E, \tau]$, $acx(A)$, $cvx(A)$, $\overline{A}$, indicarán la envoltura absolutamente convexa, envoltura convexa y clausura de A, respectivamente. La topología inducida en A por τ, la representaremos por $\tau|_A$, y A°, $A^{\circ\circ}$ serán la polar y bipolar de A, respectivamente.

Por último, denotaremos por: ω el conjunto de las sucesiones escalares; c_0 el de las sucesiones nulas; c el de las sucesiones convergentes; ℓ_p el de las p–sumables $(0 < p < \infty)$; ℓ_∞ el de las acotadas; m_0 el de las sucesiones con rango finito y ϕ el de las sucesiones con un número finito de coordenadas no nulas. Además, e_n será la sucesión cuyas coordenadas son todas nulas, salvo la n–ésima que es un 1, y e la sucesión formada sólo por unos.

Capítulo I

Algunos tópicos sobre series

1.1 Convergencia de series

Iniciamos esta sección describiendo diversas formas de convergencia de series en un espacio. Sea E un espacio localmente convexo Hausdorff y $\sum x_n$ una serie formal de elementos de E. Diremos que:

1. $\sum x_n$ es convergente a $x \in E$ (de Cauchy), si la sucesión de sumas parciales $S_n := x_1 + \cdots + x_n$ converge a x (es de Cauchy). Este valor x se denomina suma de la serie y se denota por $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Generalmente, se habla de series convergentes sin especificar su suma.

2. $\sum x_n$ es incondicionalmente convergente (incondicionalmente de Cauchy) si, para toda permutación π de $\mathbb{N}$, la serie $\sum x_{\pi(n)}$ es convergente (de Cauchy). Toda serie incondicionalmente convergente verifica que todas las reordenaciones tienen la misma suma. Por tanto, tiene sentido hablar de convergencia incondicional a un cierto $x \in E$.

   La convergencia incondicional puede también describirse como una cierta convergencia desordenada. Precisando:

   Se dice que $\sum x_n$ es desordenadamente convergente a $x \in E$ (desordenadamente de Cauchy) si para cualquier entorno U de cero, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que para cualquier subconjunto finito σ de $\mathbb{N}$ con $\{1, \ldots, k\} \subset \sigma$ ($\inf \sigma \geq k$) se verifica que $\sum_{i \in \sigma} x_i - x \in U$ ($\sum_{i \in \sigma} x_i \in U$).

Si denotamos por $P_f(\mathbb{N})$ el sistema de subconjuntos finitos σ de $\mathbb{N}$, dirigido por la inclusión y $S_\sigma := \sum_{i\in\sigma} x_i$, las definiciones anteriores simplemente indican que una serie $\sum x_n$ es desordenadamente convergente a $x \in E$ (es de Cauchy) si y sólo si la red $(S_\sigma)_{\sigma\in P_f(\mathbb{N})}$ es convergente a $x \in E$ (es de Cauchy).

Se verifica que una serie es incondicionalmente convergente a $x \in E$ (es incondicionalmente de Cauchy) si y sólo si es desordenadamente convergente a x (es desordenadamente de Cauchy). Además, toda serie incondicionalmente de Cauchy y convergente es incondicionalmente convergente.

3. $\sum x_n$ es absolutamente de Cauchy si, para toda seminorma continua p de E, la serie numérica $\sum p(x_n)$ es convergente. De hecho, es suficiente verificar la convergencia para las seminormas formadas por los funcionales de Minkowski de los entornos de 0 de cualquier base de E.

   Por otra parte, $\sum x_n$ se dice absolutamente convergente, si es absolutamente de Cauchy y convergente.

4. $\sum x_n$ es convergente (es de Cauchy) por λ–multiplicadores, donde λ es un espacio de sucesiones, si para cualquier sucesión $(\alpha_n) \in \lambda$, la serie $\sum \alpha_n\, x_n$ es convergente (es de Cauchy).

   Los casos más usuales son los siguientes:

   $\lambda = \ell_\infty$. También denominado como convergencia por multiplicadores acotados.

   $\lambda = c_0$. Los términos C–sucesión o C–serie suelen usarse para referirse a cualquier sucesión (x_n) tal que $\sum x_n$ sea convergente por c_0–multiplicadores.

   $\lambda = m_0$. Dada una serie $\sum x_n$, se denomina subserie a toda serie de la forma $\sum_k x_{n_k}$, donde $(x_{n_k})_k$ es una subsucesión de la sucesión (x_n). Puesto que m_0 es la envoltura lineal de las sucesiones formadas solamente por unos y ceros, se tiene que una serie $\sum x_n$ es convergente (es de Cauchy) por m_0–multiplicadores si y sólo si cualquier subserie es convergente (es de Cauchy), abreviadamente, $\sum x_n$ es subseries convergente o convergente por subseries (de Cauchy). También se usa el término "sucesión subseries sumable".

Si E es un espacio metrizable, es conocido que su topología puede darse por medio de una cierta F–norma q (no es única). En estas condiciones, puede darse otro concepto de convergencia de series:

Una serie $\sum x_n$ en E se dice que es F_q–absolutamente de Cauchy si la serie numérica $\sum q(x_n)$ es convergente.

Puesto que toda F–norma q verifica que $q(\alpha x) \leq q(x)$, donde $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leq 1$ y $x \in E$, se tiene que toda serie F_q–absolutamente de Cauchy es de Cauchy por multiplicadores acotados.

Las equivalencias e implicaciones de los conceptos introducidos en la sección pueden ser estructurados en el siguiente gráfico:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\text{ACauchy} & & & & c_0\text{–Cauchy} & & \\
\Downarrow & & & & \Uparrow & & \\
\text{BMCauchy} & \Leftrightarrow & \text{SCauchy} & \Leftrightarrow & \text{ICauchy} & \Rightarrow & \text{OCauchy} \\
\Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow & & \Uparrow \\
\text{BMC} & \Rightarrow & \text{SC} & \Rightarrow & \text{IC} & \Rightarrow & \text{OC} \\
\Downarrow & & & & \Uparrow & & \\
c_0\text{–C} & \Rightarrow & c_0\text{–Cauchy} & & \text{AC} & &
\end{array}
$$

La notación utilizada es:

- $C \equiv$ convergente.
- $A \equiv$ absolutamente.
- $I \equiv$ incondicionalmente.
- λ–Cauchy (λ–C) $\equiv$ de Cauchy (convergente) por λ–multiplicadores.

Distintos ejemplos en los espacios $[c_0, \|\cdot\|_\infty]$, $[\phi, \|\cdot\|_\infty]$ y $[m_0, \|\cdot\|_\pi]$, donde la norma,

$$\|x\|_\pi := \sup\left\{ |\frac{x(n)}{n}|,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

demuestran que para espacios normados, el cuadro de implicaciones anterior es el mejor posible (Jameson [30, p. 343]).

Para obtener contraimplicaciones, es preciso considerar ciertas hipótesis de completitud sobre E. Así, es conocido que si E es "sucesionalmente completo", todas las condiciones de Cauchy implican las correspondientes condiciones de convergencia.

En esta memoria, probaremos además los siguientes resultados:

1. Si E es "localmente completo", las series convergentes y de Cauchy por c_0–multiplicadores coinciden (teorema 2.3.3).

2. Si E es "Σ–completo" las series convergentes, de Cauchy por λ–multiplicadores ($\lambda = \ell_\infty$, m_0) y las incondicionalmente convergentes coinciden. Por otro lado, también toda serie absolutamente de Cauchy es absolutamente convergente (teorema 2.2.1, corolario 2.2.1).

3. Si E es "Σ–completo y sin copia de c_0", además de los resultados enunciados en el punto 2., se verifica que toda serie convergente por c_0–multiplicadores es convergente por multiplicadores acotados (teoremas 2.2.6, 2.3.8).

Si E es de "dimensión finita" y por tanto un espacio de Banach, las implicaciones mencionadas anteriormente se mantienen y además las series incondicionalmente convergentes son absolutamente convergentes (teorema de Riemann). Este hecho no es accidental para espacios de Banach, en el sentido de que en todo espacio de Banach de dimensión infinita existen series incondicionalmente convergentes que no son absolutamente convergentes. Este resultado fue establecido por primera vez en 1950 y se conoce con el nombre de sus autores: Dvoretsky–Rogers.

Sin embargo, hay espacios localmente convexos de dimensión infinita donde sí se verifica el teorema de Riemann. Es el caso de los espacios de Fréchet nucleares introducidos por Grothendieck.

Volviendo a los espacios de dimensión finita, concluimos que en estos espacios los conceptos de convergencia de series del gráfico se reducen a dos: la convergencia incondicional y la convergencia ordinaria.

Los comentarios hechos anteriormente para espacios de dimensión finita tienen consecuencias sobre la convergencia de series para la topología débil. En efecto, dado un espacio E y una serie $\sum x_n$ de elementos de E, por definición, $\sum x_n$ es débil incondicionalmente de Cauchy si y sólo si para cualquier $y \in E'$ la serie numérica $\sum \langle x_n, y \rangle$ es incondicionalmente de Cauchy en $\mathbb{K}$. Ahora bien, $\sum \langle x_n, y \rangle$ es incondicionalmente de Cauchy si y sólo si es de Cauchy por c_0–multiplicadores, si y sólo si es absolutamente Cauchy.

Es decir, para la topología débil sólo hay dos conceptos "Cauchy" distintos: incondicionalmente de Cauchy y ordinariamente de Cauchy. Además, si E es débil sucesionalmente completo, resulta que el gráfico anterior se comporta como en el caso de dimensión finita.

Ciertos conceptos de convergencia pueden caracterizarse a través de propiedades topológicas de un cierto conjunto $S(x_n)$ asociado a cada serie formal $\sum x_n$, y que denominaremos en lo sucesivo "rango de la serie $\sum x_n$":

$$S(x_n) := \left\{ \sum_{i \in \sigma} x_i : \ \sigma \in P_f(\mathbb{N}) \right\}$$

En concreto, se tienen los siguientes resultados:

1. $\sum x_n$ es de Cauchy por c_0–multiplicadores si y sólo si $S(x_n)$ es un conjunto acotado (MacArthur [42]). Esto implica en particular que las series $\sigma(E, E')$–Cauchy por c_0–multiplicadores y las series $\beta^*(E, E')$–Cauchy por c_0–multiplicadores coinciden.

   Basandonos en este teorema damos el siguiente resultado sobre convergencia por multiplicadores:

   > Consideremos los espacios de sucesiones ℓ_p, con $1 \leq p < +\infty$, y sea $\sum x_n$ una serie en E. Entonces, la serie $\sum x_n$ es de Cauchy

por ℓ_p–multiplicadores si y sólo si para toda sucesión $(\lambda_n) \in \ell_p$, el conjunto $S(\lambda_n x_n)$ está acotado.

Basta observar que $c_0 \cdot \ell_p = \ell_p$ (Jarchow [31, p. 27])[1]

2. $\sum x_n$ es incondicionalmente de Cauchy si y sólo si $S(x_n)$ es un conjunto precompacto (Robertson [55]).

   De hecho, lo que estamos diciendo es que la aplicación,

   $$h : P_f(\mathbb{N}) \to E \quad \text{definida por} \quad h(\sigma) = S_\sigma,$$

   es uniformemente continua, donde $P_f(\mathbb{N})$ lo estamos considerando como un subconjunto del producto $2^{\mathbb{N}}$ de copias del espacio discreto $\{0, 1\}$ con la topología producto. Es más, $P_f(\mathbb{N})$ es un subconjunto denso y precompacto de $2^{\mathbb{N}}$.

3. $\sum x_n$es subseries convergente si y sólo si $S(x_n)$ es relativamente compacto. Supuesta la convergencia, basta considerar la continuidad de la siguiente aplicación,

   $$h : 2^{\mathbb{N}} \to E$$
   $$a = (a_n) \mapsto h(a) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

   Además, $h(2^{\mathbb{N}})$ es un conjunto metrizable y compacto en la topología inducida, por ser imagen continua Hausdorff de un conjunto metrizable y compacto (la topología discreta es metrizable).

   Luego dada $\sum x_n$subseries convergente, la clausura del rango de $\sum x_n$viene dada por,

   $$h(2^{\mathbb{N}}) = \overline{S(x_n)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : \ a_n = 0 \text{ ó } 1, n \in \mathbb{N} \right\}$$

[1] Dados dos espacios de sucesiones λ y μ, se define su producto como $\lambda \cdot \mu = \{(a_n b_n) \in \omega : (a_n) \in \lambda, (b_n) \in \mu\}$

4. $\sum x_n$es convergente por multiplicadores acotados si y sólo si $B(x_n)$ es relativamente compacto, donde

$$B(x_n) = \left\{ \sum_{i \in \sigma} \alpha_i x_i : \ \sigma \in P_f(\mathbb{N}), \ \alpha_i \in \mathbb{K} \text{ con } |\alpha_i| \leq 1, \ i \in \sigma \right\}$$

Análogamente al punto 3., supuesta la convergencia, basta considerar la continuidad de la aplicación[2],

$$h : D^{\mathbb{N}} = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| \leq 1\}^{\mathbb{N}} \to E$$

$$a = (a_n) \mapsto h(a) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

donde $D^{\mathbb{N}}$ tiene la topología producto y D la topología heredada de $\mathbb{C}$.

También, de modo similar, $h(D^{\mathbb{N}})$ es metrizable y compacto y coincide con la clausura del conjunto $B(x_n)$. Es decir, si $\sum x_n$es convergente por multiplicadores acotados se tiene que,

$$h(D^{\mathbb{N}}) = \overline{B(x_n)} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n : |a_n| \leq 1, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Como consecuencia del lema que viene a continuación, el resultado de este apartado puede enunciarse de la siguiente forma:

$\sum x_n$es convergente por multiplicadores acotados si y sólo si la envoltura absolutamente convexa de $S(x_n)$ es relativamente compacta.

El lema es el siguiente.

Lema 1.1.1 *Sea (x_n) una sucesión en un espacio E. Se verifica que:*

$$S(x_n) \subset acx(S(x_n)) \subset B(x_n) \subset 4acx(S(x_n))$$

[2]En el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, se considera el intervalo [-1,1], en vez de D

DEMOSTRACIÓN:

La primera inclusión es trivial. Para la segunda, basta observar que $B(x_n)$ es un conjunto absolutamente convexo. Pasemos pues a la tercera inclusión.

Consideremos una suma finita del tipo

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{i_j}, \text{ con } 0 \leq \alpha_j \leq 1, \quad j = 1, \ldots, n$$

Podemos suponer, permutando los subíndices si fuera necesario, que se verifica,

$$0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \alpha_n \leq 1$$

Es más, si definimos $\alpha_0 = 0$, se cumple que,

$$\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j - \alpha_{j-1}| = \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j - \alpha_{j-1}) = \alpha_n - \alpha_0 = \alpha_n \leq 1$$

Por tanto,

$$(\alpha_n - \alpha_{n-1}) x_{i_n} + \cdots + (\alpha_1 - \alpha_0)(x_{i_n} + \cdots + x_{i_1}) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_{i_j} \in acx(S(x_n))$$

Finalmente, sea $z \in B(x_n)$ arbitrario. Por definición, z será de la forma

$$z = \sum_{j \in \sigma} \alpha_j x_j, \quad \text{con } \sigma \in P_f(\mathbb{N}), \ |\alpha_j| \leq 1,$$

donde,

$$\alpha_j = a_j + i \cdot b_j, \quad a_j, b_j \in \mathbb{R}$$

Si definimos los conjuntos,

$$\sigma_R^+(\sigma_R^-) := \{j \in \sigma : a_j \geq 0 \ (a_j \leq 0)\}$$

$$\sigma_I^+(\sigma_I^-) := \{j \in \sigma : b_j \geq 0 \ (b_j \leq 0)\}$$

por los comentarios hechos anteriormente, obtendremos que,

$$z = \sum_{j \in \sigma} \alpha_j x_j = \sum_{j \in \sigma_R^+} a_j x_j + \sum_{j \in \sigma_R^-} a_j x_j + i \sum_{j \in \sigma_I^+} b_j x_j + i \sum_{j \in \sigma_I^-} b_j x_j \in 4acx(S(x_n))$$

Luego, $B(x_n) \subset 4acx(S(x_n))$. ■

Evidentemente, para espacios vectoriales reales, el 4 puede sustituirse por un 2.

1.2 La propiedad (u) de Pełczynski

Para espacios de Banach, la propiedad (u) fue introducida por A. Pełczynski en [48]. Actualmente, es una de las principales herramientas en el estudio de los subespacios de los retículos de Banach [39, ch. 1.c].

Damos, a continuación, la definición de propiedad (u) en el contexto general de espacios localmente convexos.

Definición 1.2.1 *Se dice que un espacio E tiene la propiedad (u), si para cualquier sucesión (z_n) en E débilmente Cauchy, existe otra sucesión (x_n) en E tal que:*
(1) La serie $\sum x_n$ es débilmente incondicionalmente Cauchy.
(2) $z_n - \sum_{k=1}^n x_k \xrightarrow{n} 0$ en la topología débil de E.

Los principales ejemplos de espacios de Banach que verifican la propiedad (u) son los siguientes:

1. Espacios de Banach con base incondicional (Pełczynski [48]).

2. Espacios de Banach con base incondicional extendida, o base absoluta de potencia $|I|$ (Pełczynski [48]).

3. Retículos de Banach "order continuous" (Tzafriri [66]).

4. Cualquier subespacio cerrado de un espacio de Banach que tenga la mencionada propiedad (u) (Pełczynski [48]).

Recientemente, Knaust, Odell [38] han encontrado una reformulación de la propiedad (u) ligada a conceptos de la teoría de bases en espacios de Banach (ver Singer [62]). A saber:

> Un espacio de Banach tiene la propiedad (u), si para cualquier sucesión (x_n) de E débilmente Cauchy que no sea débilmente convergente, existe una base de bloques (y_n) formada por combinaciones convexas de (x_n), que es equivalente a la base (s_n) de c_0, donde $s_n = e_1 + \cdots + e_n, n \in \mathbb{N}$.

Nuestro objetivo en esta sección es mostrar que hay riqueza de espacios localmente convexos, no necesariamente Banach, con la propiedad (u).

Dado un espacio E y denotando por $\pi(E)$ la imagen natural de E en su bidual, veremos que la propiedad (u) puede caracterizarse a través de los siguientes conjuntos:

$$K(E) := \{z \in E'' \ : \ z \text{ es el } \sigma(E'', E') - \text{límite de una...}$$

$$\text{... cierta sucesión de elementos de } \pi(E)\}$$

$$N(E) := \{z \in E'' \ : \ z \text{ es la } \sigma(E'', E') - \text{suma de una...}$$

$$\text{... cierta serie débil incondicionalmente Cauchy de } \pi(E)\}$$

Dado $z \in E$, se tiene que,

$$z = \sigma(E, E') - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} z,$$

luego $\pi(E) \subset N(E)$. Por otra parte, dado $z \in N(E)$, se tiene que,

$$z = \sigma(E'', E') - \sum_{n=1}^{\infty} \pi(y_n), \quad \text{con } y_n \in E,$$

luego la sucesión de sumas parciales $s_n = \pi(y_1) + \cdots + \pi(y_n)$ converge a z, y por tanto $N(E) \subset K(E)$.

Teorema 1.2.1 *Sea E un espacio. E tiene la propiedad (u) si y sólo si se verifica que $N(E) = K(E)$.*

Demostración:

$(\Rightarrow)$. Sea $z \in K(E)$. Por definición, existe una sucesión (x_n) en E tal que,

$$z = \sigma(E'', E') - \lim_{n\to\infty} \pi(x_n)$$

Pero, puesto que E tiene la propiedad (u), podemos obtener una serie $\sum y_n$ de elementos de E débilmente incondicionalmente Cauchy tal que,

$$x_n - \sum_{k=1}^{n} y_k \xrightarrow{n} 0, \qquad (\sigma(E, E'))$$

Y por tanto,

$$\sum_{k=1}^{n} \pi(y_k) = \pi(\sum_{k=1}^{n} y_k - x_n) + \pi(x_n) \xrightarrow{n} \pi(0) + z = 0 + z = z$$

en la topología $\sigma(E'', E')$. Es decir, $z \in N(E)$.

$(\Leftarrow)$. Sea (z_n) una sucesión débilmente Cauchy de E. Por tanto,

$$\{\pi(z_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \pi(E), \quad \text{es } \sigma(E'', E')\text{–acotado,}$$

y por Köthe [36, p. 298], dicho conjunto es relativamente $\sigma(E'', E')$–compacto, luego relativamente $\sigma(E'', E')$–completo.

Es decir, existe $z \in E''$ tal que,

$$z = \sigma(E'', E') - \lim_{n\to\infty} \pi(z_n)$$

Por definición, $z \in K(E) = N(E)$. Luego podemos obtener una serie débilmente incondicionalmente Cauchy $\sum y_n$ de E con,

$$z = \sigma(E'', E') - \sum_{n=1}^{\infty} \pi(y_n)$$

Por último, para la topología $\sigma(E'', E')$ se tiene

$$\pi(\sum_{k=1}^{n} y_k - z_n) = \sum_{k=1}^{n} \pi(y_k) - \pi(z_n) \xrightarrow{n} z - z = 0$$

Como $y_n, z_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por la definición de π, se verifica que,

$$\sum_{k=1}^{n} y_k - z_n \xrightarrow{n} 0,$$

en la topología $\sigma(E, E')$. ■

Un razonamiento análogo al del teorema anterior prueba que un espacio E es débil sucesionalmente completo si y sólo si $\pi(E) = K(E)$. Esto nos permite dar el siguiente corolario.

Corolario 1.2.1 *Todo espacio E débil sucesionalmente completo verifica la propiedad (u).*

Siguiendo técnicas de A. Pełczynski [48] para espacios de Banach, hemos obtenido clases de espacios localmente convexos donde la propiedad (u) se hereda.

Teorema 1.2.2 *Cualquier subespacio de un espacio metrizable con la propiedad (u), tiene también la propiedad (u).*

DEMOSTRACIÓN:

Sea (y_n) una sucesión $\sigma(F, F')$–Cauchy de un subespacio F de un espacio metrizable E. La sucesión (y_n) también es $\sigma(E, E')$–Cauchy, y puesto que E tiene la propiedad (u) deducimos que existe una serie $\sum x_n$ en E incondicionalmente $\sigma(E, E')$–Cauchy tal que ,

$$y_n - \sum_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow{n} 0$$

en la topología débil de E.

Denotemos por

$$u_n := y_n - \sum_{k=1}^{n} x_k, \; n \in \mathbb{N}$$

Entonces, para cualquier $r \in \mathbb{N}$, se tiene que,

$$0 \in \overline{cvx\{u_n : n \geq r\}}^{\sigma(E,E')} = \overline{cvx\{u_n : n \geq r\}}^{\mu(E,E')}$$

Además, como E es metrizable, su topología es la de Mackey y viene dada a través de una cierta F–norma q.

Por tanto, por inducción, podemos obtener combinaciones convexas,

$$v_n := \sum_{k=q_n}^{p_n} \lambda_k u_k, \ n \in \mathbb{N}, \text{ con}$$

$$0 < q_1 \leq p_1 < q_2 \leq p_2 < \cdots < q_n \leq p_n < \cdots, \quad \sum_{k=q_n}^{p_n} \lambda_k = 1, \text{ y,}$$

$$\lambda_k \geq 0, \ q_n \leq k \leq p_n, \ n \in \mathbb{N},$$

de manera que,

$$q(v_n) \leq \frac{1}{2^n}$$

Por tanto, la serie $\sum v_n$ es F_q–absolutamente Cauchy, luego incondicionalmente $\mu(E,E')$–Cauchy y, por tanto, incondicionalmente $\sigma(E,E')$–Cauchy.

Definamos,

$$y'_n := \sum_{k=q_n}^{p_n} \lambda_k y_k \in F, \quad n \in \mathbb{N},$$

y sea,

$$z_n := y'_{n+1} - y'_n, \quad n \in \mathbb{N}, \text{ y } \ z_0 := y'_1$$

El teorema estará probado cuando comprobemos que la serie $\sum z_n$ de F es la buscada. Para ello habrá que ver:

$$\text{[a]} \qquad y_n - \sum_{k=0}^{n} z_k \xrightarrow{n} 0, \text{ en la topología } \sigma(F,F')$$

Dado $f \in F'$, la sucesión numérica $(\langle y_n, f\rangle)$ es de Cauchy, luego convergente a un cierto número $\alpha_f \in \mathbb{K}$.

Por otra parte,

$$\sum_{k=0}^{n} \langle z_k, f\rangle = \langle y'_{n+1}, f\rangle = \sum_{k=q_{n+1}}^{p_{n+1}} \lambda_k \langle y_k, f\rangle$$

que cuando n tiende a infinito también tiende al número α_f. Esto último se basa en la siguiente desigualdad,

$$\left|\sum_{k=q_{n+1}}^{p_{n+1}} \lambda_k\langle y_k, f\rangle - \alpha_f\right| = \left|\sum_{k=q_{n+1}}^{p_{n+1}} \lambda_k(\langle y_k, f\rangle - \alpha_f)\right| \leq \cdots$$

$$\cdots \leq \sup\left\{|\langle y_k, f\rangle - \alpha_f| : q_{n+1} \leq k \leq p_{n+1}\right\} \cdot \left(\sum_{k=q_{n+1}}^{p_{n+1}} \lambda_k\right) = \cdots$$

$$\cdots = \sup\left\{|\langle y_k, f\rangle - \alpha| : q_{n+1} \leq k \leq p_{n+1}\right\}$$

(p_n, q_n tienden a infinito)

Luego,

$$\langle y_n - \sum_{k=0}^{n} z_k, f\rangle \xrightarrow{n} \alpha_f - \alpha_f = 0$$

[b] $\sum_{n\geq 0} z_n$, es incondicionalmente $\sigma(F, F')$–Cauchy

Para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$z_n = y'_{n+1} - y'_n = \sum_{k=q_{n+1}}^{p_{n+1}} \lambda_k y_k - \sum_{k=q_n}^{p_n} \lambda_k y_k = \cdots$$

$$\cdots = \sum_{k=q_{n+1}}^{p_{n+1}} \lambda_k \left(u_k - \sum_{j=1}^{k} x_j\right) - \sum_{k=q_n}^{p_n} \lambda_k \left(u_k - \sum_{j=1}^{k} x_j\right) = \cdots$$

$$\cdots = v_{n+1} - v_n + \sum_{k=q_n}^{p_{n+1}} \mu_k x_k$$

donde los μ_k son números de módulo menor o igual que uno.

Luego dado un subconjunto finito σ de $\mathbb{N}$, se tendrá que,

$$\sum_{i\in\sigma} z_i = \sum_{i\in\sigma_1} \epsilon_i v_i + \sum_{i\in\sigma_2} \mu_i x_i$$

donde σ_1 y σ_2 son subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ y,

$$|\epsilon_i| \leq 1, \quad i \in \sigma_1, \qquad |\mu_j| \leq 2, \quad j \in \sigma_2$$

Debemos probar que $S(z_n)$ es un conjunto $\sigma(F, F')$–acotado o equivalentemente $\sigma(E, E')$–acotado. Pero hemos visto que $S(z_n) \subset B(v_n) + 2B(x_n)$.

Ahora bien, puesto que las series $\sum x_n$, $\sum v_n$ son débil incondicionalmente Cauchy, los conjuntos $B(v_n)$ y $B(x_n)$ son débilmente acotados en E, luego el conjunto $S(z_n)$ también estará débilmente acotado. ∎

El teorema anterior implica el siguiente resultado sobre copias de ℓ_∞.

Teorema 1.2.3 *Todo espacio metrizable con la propiedad* (u) *no puede tener ningún subespacio isomorfo a* $[\ell_\infty, ||\cdot||_\infty]$

Demostración:

Sea E un espacio metrizable con la propiedad (u) y con copia de ℓ_∞.

Consideremos el espacio de Banach cuasirreflexivo y separable de James J (ver [29]). Por Singer [62, p. 450], se tiene que J no verifica la propiedad (u).

Al tener J codimensión finita en el bidual, J'' es separable, luego J' también es separable (Jarchow [31, p. 129]).

Puesto que J' es separable, existe una aplicación lineal sobreyectiva y continua de ℓ_1 en J' (Köthe [36, p. 280]), luego J'' es isomorfo a un cierto subespacio de ℓ_∞. Esto es, si E tiene copia de ℓ_∞, E tiene también copia de J'' y finalmente E tiene un subespacio isomorfo a J. Por tanto, el teorema anterior nos dice que J verifica la propiedad (u) y llegamos a contradicción. ∎

Por último, damos algunos ejemplos de espacios de sucesiones y de espacios de funciones integrables que verifican la propiedad (u).

Ejemplos

[1] Sea λ un espacio de sucesiones conteniendo a ϕ y τ una topología localmente convexa Hausdorff sobre λ compatible con el par dual $(\lambda, \lambda^\alpha)$.

Recordamos que el dual de Köthe o α–dual de λ se define como,

$$\lambda^\alpha := \left\{ (a_n) \in \omega : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| < +\infty, \text{ para todo } (b_n) \in \lambda \right\}$$

Entonces, $[\lambda, \tau]$ tiene la propiedad (u).

Sea (x_n) una sucesión $\sigma(\lambda, \lambda^\alpha)$–Cauchy. Como $[\lambda^{\alpha\alpha}, \sigma(\lambda^{\alpha\alpha}, \lambda^\alpha)]$ es sucesionalmente completo (Köthe [36, p. 413]), se tiene que existe $z = (z_n) \in \lambda^{\alpha\alpha}$ tal que,

$$z = \sigma(\lambda^{\alpha\alpha}, \lambda^\alpha) - \lim_{n\to\infty} x_n$$

Por otra parte, para cada $y = (y_n) \in \lambda^\alpha$, se verifica,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle z_n e_n, y\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} |z_n y_n| < +\infty$$

$$\langle \sum_{k=1}^{n} z_k e_k - z, y\rangle = \sum_{k=n+1}^{\infty} z_k y_k \xrightarrow{n} 0$$

Es decir, la serie $\sum z_n e_n$ es incondicionalmente $\sigma(\lambda^{\alpha\alpha}, \lambda^\alpha)$–convergente a z. Por tanto,

$$x_n - \sum_{k=1}^{n} z_k e_k \xrightarrow{n} z - z = 0,$$

en la topología $\sigma(\lambda^{\alpha\alpha}, \lambda^\alpha)$. Como, $e_n \in \phi \subset \lambda$, $n \in \mathbb{N}$, la serie anterior es de elementos de λ, y podemos concluir que

$$x_n - \sum_{k=1}^{n} z_k e_k \xrightarrow{n} 0$$

en la topología $\sigma(\lambda, \lambda^\alpha)$.

[2] Sea λ un espacio de sucesiones como en [1] y supongamos que λ es monótono. Es decir, $m_0 \cdot \lambda \subset \lambda$.

Entonces, por Kamthan, Gupta [35, p. 201] si $(\lambda, \beta(\lambda, \lambda^\alpha))$ es separable, se tiene que $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es tonelado, luego $\mu(\lambda, \lambda^\alpha) = \beta(\lambda, \lambda^\alpha)$ y deducimos que $[\lambda, \beta(\lambda, \lambda^\alpha)]$ tiene la propiedad (u).

[3] Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida verificando las condiciones:

1. X es un espacio localmente compacto Hausdorff.

2. Σ es una σ–álgebra de X que contiene a todos los borelianos.

3. μ es una medida regular, no negativa y σ–finita sobre Σ, que supondremos completa (i.e. si $A \subset B$ con $\mu(B) = 0$, entonces $A \in \Sigma$).

Consideremos, además las siguientes clases de funciones:

1. $\Omega := \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es localmente integrable}\}$

2. Φ será el subespacio de $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$ constituido por las funciones que tienen soporte compacto. Se define el soporte de una función f como la clausura del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

Se identificarán en lo que sigue aquellas funciones de X en $\mathbb{R}$ iguales salvo en un conjunto de medida nula.

Dado $\Lambda \subset \Omega$, definimos su dual de Dieudonné–Köthe, o α–dual como

$$\Lambda^\alpha = \left\{ f \in \Omega : \int_X |fg| \, d\mu < +\infty \text{ para cada } g \in \Lambda \right\}$$

Si $\Phi \subset \Lambda$, $(\Lambda, \Lambda^\alpha)$ es un par dual.

Sea, finalmente, Λ un conjunto de funciones localmente integrables conteniendo a Φ y sea τ una topología localmente convexa Hausdorff sobre Λ compatible con el par dual $(\Lambda, \Lambda^\alpha)$.

Entonces, $[\Lambda, \tau]$ tiene la propiedad (u).

Sea (f_n) una sucesión $\sigma(\Lambda, \Lambda^\alpha)$–Cauchy en Λ. Como $[\Lambda^{\alpha\alpha}, \sigma(\Lambda^{\alpha\alpha}, \Lambda^\alpha)]$ es sucesionalmente completo [58, p. 23], se tiene que existe $f \in \Lambda^{\alpha\alpha}$ tal que,

$$f = \sigma(\Lambda^{\alpha\alpha}, \Lambda^\alpha) - \lim_{n \to \infty} f_n$$

Consideremos los siguientes conjuntos,

$$A_n := \{\omega \in X : n - 1 \leq |f(\omega)| \leq n\}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$B_n := \bigcup_{j=n+1}^{\infty} A_j, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Si denotamos por χ_{A_n} la función característica de A_n, se tiene que,

$$h_n = f \cdot \chi_{A_n} \in \Phi \subset \Lambda$$

Por otra parte, para cada $g \in \Lambda^\alpha$, se verifica que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle h_n, g\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\int_{A_n} fg\, d\mu\right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |fg|\, d\mu = \int_{\Omega} |fg|\, d\mu < +\infty$$

$$|\langle f_n - \sum_{k=1}^{n} h_k, g\rangle| \le |\langle f_n - f, g\rangle| + |\langle f - \sum_{k=1}^{n} h_k, g\rangle| = \cdots$$

$$\cdots = |\langle f_n - f, g\rangle| + \left|\int_{B_n} fg\, d\mu\right| \le \cdots$$

$$\cdots \le |\langle f_n - f, g\rangle| + \int_{B_n} |fg|\, d\mu \xrightarrow{n} 0 + 0$$

(puesto que $\mu(B_n) \to 0$).

Por tanto, $\sum h_n$ es la serie de elementos de Λ buscada y $[\Lambda, \tau]$ tiene la propiedad (u).

[4] Sea Λ un espacio de funciones como en [3]. Si suponemos que $(\Omega, \beta(\Omega, \Phi))$ es separable y $(\Lambda, \beta(\Lambda, \Lambda^\alpha))$ es separable, entonces $(\Lambda, \mu(\Lambda, \Lambda^\alpha))$ es tonelado ([58, p. 39]), luego $\mu(\Lambda, \Lambda^\alpha) = \beta(\Lambda, \Lambda^\alpha)$ y $[\Lambda, \beta(\Lambda, \Lambda^\alpha)]$ tiene la propiedad (u).

Si cambiamos las dos hipótesis de separabilidad anteriores por ser X metrizable y que el conjunto de las funciones continuas con soporte compacto sea denso en $[\Lambda, \beta(\Lambda, \Lambda^\alpha)]$, el resultado sobre tonelación y, por tanto, sobre la propiedad (u) se mantiene ([58, p. 40]).

1.3 Topologías de Orlicz–Pettis y afines

El teorema de Orlicz–Pettis es uno de los resultados clásicos del Análisis Funcional. Inicialmente probado para series incondicionalmente convergentes en espacios de Banach débil sucesionalmente completos por Orlicz (1929) y para series convergentes por subseries en espacios de Banach por Pettis (1938), fue extendido a espacios localmente convexos por Grothendieck (1953) y MacArthur (1967). Recientemente, se han obtenido versiones para grupos topológicos (Kalton, 1971, 1980).

Teorema 1.3.1 *Sea E un espacio. Cualquier serie $\sigma(E, E')$-convergente por subseries es $k(E, E')$-convergente por subseries, donde $k(E, E')$ denota la topología en E de la convergencia uniforme sobre los $\sigma(E', E)$-compactos.*

La demostración del teorema anterior puede hallarse en Jarchow [31, p. 308].

El teorema de Orlicz–Pettis ha dado origen a toda una gama de resultados similares, en el sentido de encontrar topologías sobre un espacio E que tengan las mismas series convergentes por subseries que la topología débil de E. Debemos mencionar que I. Tweddle [65] ha probado que sobre cualquier espacio E, existe una(la) topología localmente convexa más fina con las mismas sucesiones subseries sumables que la topología original. Un exhaustivo estudio de estas y similares topologías, desde un punto de vista mucho más amplio, ha sido llevado a cabo por P. Dierolf [9], [10].

P. Dierolf define:

Definición 1.3.1 *Sea $[E, \tau]$ un espacio. Denominaremos topología de Orlicz–Pettis asociada a la topología τ, y que denotaremos en lo sucesivo $OP(\tau)$, a la topología localmente convexa más fina sobre E que tiene las mismas series convergentes por subseries que la topología τ.*

En este contexto, el teorema de Orlicz–Pettis adquiere la siguiente forma:

$$OP(\sigma(E, E')) \geq k(E, E')$$

Además, del teorema de Orlicz–Pettis, también se obtiene que,

$$OP(\tau) = OP(\sigma(E, E')),$$

para cualquier espacio $[E,\tau]$.

Las topologías de Orlicz–Pettis han sido caracterizadas de varios modos. A continuación, comentamos cuatro de ellos: por medio de "límites proyectivos", como topologías de Mackey de un cierto "par dual (E, E_{OP}) ", a través de una cierta "propiedad universal", y usando "límites inductivos generalizados".

1. DIEROLF [10]: $OP(\tau)$ es la topología inicial sobre E respecto de la familia de espacios vectoriales topológicos $\{[E,\alpha] : \alpha \in M(\tau)\}$ y de la familia de aplicaciones asociada $\{id_\alpha : E \to [E,\alpha] : \alpha \in M(\tau)\}$, donde $M(\tau)$ es la clase de topologías localmente convexas sobre E que tienen las mismas series subseries convergentes que la topología τ. Dicho de otro modo, $OP(\tau)$ es la topología supremo de la clase $M(\tau)$.

   Como $M(\tau)$ está formada por topologías localmente convexas, $OP(\tau)$ es localmente convexa. Y como τ es Hausdorff, $OP(\tau)$ también será Hausdorff.

   Consecuencia inmediata de esta descripción, es que dados dos espacios $[E,\tau]$ y $[F,\alpha]$ y T una aplicación lineal de E en F τ–α–continua, se tiene que T también es $OP(\tau)$–$OP(\alpha)$–continua.

2. TWEDDLE [65]: $OP(\tau)$ es la topología $\mu(E, E_{OP})$, donde E_{OP} es el subespacio vectorial de E^*, tal que dado $y \in E^*$ se verifica que $y \in E_{OP}$ si para cualquier serie $\sum x_n$ τ–convergente por subseries se tiene que,

   $$\langle \tau - \sum_{n=1}^{\infty} x_n, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y\rangle$$

   También puede decirse que $y \in E_{OP}$ si para cada serie $\sum x_n$ τ–convergente por m_0–multiplicadores se tiene que,

   $$\langle \tau - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x_n, y\rangle$$

   para cada $(a_n) \in m_0$.

   Además, en Dierolf [10], pueden encontrarse los siguientes resultados sobre E_{OP}:

- $\mu(E, E_{OP}) = k(E, E_{OP})$
- La envoltura absolutamente convexa $\sigma(E_{OP}, E)$–cerrada de cada conjunto $\sigma(E_{OP}, E)$–compacto de E_{OP} es $\sigma(E_{OP}, E)$–compacto.
- Las topologías $\sigma(E, E_{OP})$ y $\beta(E, E_{OP})$ tienen los mismos acotados.
- $[E_{OP}, \sigma(E_{OP}, E)]$ es sucesionalmente completo.

3. DIEROLF [10]: $OP(\tau)$ está caracterizada por una cierta "propiedad universal". Dicha propiedad está ligada a una cierta forma de continuidad de aplicaciones lineales: la Σ–continuidad.

   Sean $[E, \tau], [F, \alpha]$ espacios y T una aplicación lineal de E en F. Se dice que T es Σ–continua si para cualquier serie $\sum x_n$ subseries convergente de E se verifica que,

$$T\left(\tau - \sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$$

   La caracterización mencionada es la siguiente:

   Dado un espacio $[E, \tau]$, la topología $OP(\tau)$ es la única topología localmente convexa Hausdorff sobre E, tal que para cualquier espacio $[F, \alpha]$ y cualquier aplicación lineal T de E en F, se verifica que,

$$T \text{ es } \tau\text{–}\alpha\text{–}\Sigma\text{–continua si y sólo si } T \text{ es } OP(\tau)\text{–}\alpha\text{–continua}$$

4. DIEROLF [10]: $OP(\tau)$ es la topología localmente convexa más fina sobre E, tal que para cada serie $\sum x_n$ τ–convergente por subseries, la aplicación "inclusión",

$$i : [\overline{S(x_n)}, \tau|_{\overline{S(x_n)}}] \to [E, OP(\tau)]$$

   es continua.

Con un enfoque más restrictivo, pueden también obtenerse resultados maximales para "topologías polares".

Dado un par dual (E, F), se dice que una cierta topología localmente convexa τ sobre E es (E, F)–polar si τ tiene una base de entornos del origen formada por conjuntos $\sigma(E, F)$–cerrados.

El siguiente resultado se debe también a Dierolf [9]:

Sea (E, F) un par dual y consideremos la siguiente familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de F,

$$\mathcal{M} := \{M \subset F : M \text{es } \sigma(F, E) - \text{acotado y tal que para cualquier aplicación...}$$

$$\text{... lineal y continua } S : [F, \sigma(F, E)] \to [\ell_1, \sigma(\ell_1, m_0)], \ldots$$

$$\text{.. la imagen } S(M) \text{ es relativamente compacta en } [\ell_1, \| \ \|_1]\}$$

Entonces la topología en E de la convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathcal{M}$ es la topología (E, F)–polar más fina que tiene las mismas series subseries convergentes que la topología $\sigma(E, F)$.

En esta memoria, prestaremos especial atención a aquellos espacios $[E, \tau]$ que verifiquen $OP(\tau) = \tau$. Tales espacios se denominan de Orlicz–Pettis. Un ejemplo sencillo de tales espacios viene dado por las propias topologías $OP(\tau)$, puesto que,

$$OP(\ OP(\ \tau\ )\ ) \ = \ OP(\tau)$$

Por el teorema de Orlicz–Pettis se tiene que,

$$OP(\tau) \geq k(E, E') \geq \mu(E, E') \geq \tau$$

luego todo espacio de Orlicz–Pettis es un espacio de Mackey. Además, como se verifica que $E_{OP} := [E, OP(\tau)]'$ es sucesionalmente $\sigma(E_{OP}, E)$–completo, por Pérez Carreras-Bonet [50, p. 102] deducimos que E es "G–tonelado".

Dierolf en [10] prueba que todo espacio de Fréchet es un espacio de Orlicz–Pettis. Es más, S. Dierolf, P. Dierolf [11] han obtenido que los espacios de Orlicz–Pettis se mantienen por topologías finales respecto de familias de espacios de Fréchet y familias de aplicaciones lineales. Por tanto, se verifica que todo espacio ultrabornológico es un espacio de Orlicz–Pettis, al ser los espacios ultrabornológicos límites proyectivos de espacios de Banach.

Más ejemplos de espacios de Orlicz–Pettis pueden obtenerse a partir de los siguientes resultados sobre productos, sumas directas y las topologías $OP(\tau)$.

1. Sea I un conjunto tal que no pueda definirse una medida de Ulam (Pérez Carreras–Bonet [50, p. 178]) sobre él y (E_i, τ_i) una familia de espacios. Entonces,
$$OP\left(\prod_{i\in I}\tau_i\right) = \prod_{i\in I} OP(\tau_i)$$

2. Sea (E_i, τ_i) una familia de espacios. Entonces,
$$OP\left(\bigoplus_{i\in I}\tau_i\right) = \bigoplus_{i\in I} OP(\tau_i)$$

Es decir, las sumas directas y productos numerables de espacios de Orlicz–Pettis son espacios de Orlicz–Pettis.

Damos por último, algunos ejemplos de espacios de Orlicz–Pettis dentro de los espacios con base, extendiendo resultados de P. Dierolf.

Consideremos, previamente, las siguientes definiciones,

1. Se dice que un espacio de sucesiones λ es monótono si $m_0 \cdot \lambda \subset \lambda$.

2. Dada una base (x_n) en un espacio E, se denomina espacio de sucesiones asociado a (x_n) al conjunto,
$$\lambda_{(x_n)} := \left\{(a_n) \in \omega : \sum a_n x_n \text{ converge en } E\right\}$$

   Evidentemente, $\phi \subset \lambda_{(x_n)}$.

Teorema 1.3.2 *Sea λ un espacio de sucesiones monótono, con $\phi \subset \lambda$. Entonces, $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es un espacio de Orlicz–Pettis.*

DEMOSTRACIÓN:

Dado que,

$$OP(\sigma(\lambda,\lambda^\alpha)) = OP(\mu(\lambda,\lambda^\alpha)),$$

se tiene que,

$$OP(\mu(\lambda,\lambda^\alpha)) = \mu(\lambda,\lambda_{OP}), \text{ donde } \lambda_{OP} := [\lambda, OP(\sigma(\lambda,\lambda^\alpha))]'$$

El teorema estará probado, si comprobamos que los pares duales (λ,λ^α) y (λ,λ_{OP}) son isomorfos. Para ello consideremos las siguientes aplicaciones,

$$J_1 : \lambda \to \lambda \qquad a = (a_n) \mapsto J_1(a) = a.$$

$$J_2 : \lambda_{OP} \to \lambda^\alpha \qquad z \mapsto J_2(z) = (\langle z, e_n\rangle)_n.$$

Veamos que J_2 está bien definida:

Dado $x = (x_n) \in \lambda$, se tiene que,

$$x = \sigma(\lambda,\lambda^\alpha) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n$$

Es más, como λ es monótono se verifica que la serie anterior es convergente por subseries y por tanto, si $z \in \lambda_{OP}$,

$$\langle z, x\rangle = \langle z, \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \langle z, e_n\rangle$$

Pero si la serie numérica $\sum x_n\langle z, e_n\rangle$ converge por subseries, también converge absolutamente y por tanto $(\langle z, e_n\rangle) \in \lambda^\alpha$.

J_2 es inyectiva:

Sean $z, w \in \lambda_{OP}$ con $\langle z, e_n\rangle = \langle w, e_n\rangle$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, se tiene que $\langle z - w, e_n\rangle = 0$, y por tanto,

$$\langle z - w, x\rangle = \langle z - w, \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n\langle z - w, e_n\rangle = 0$$

Como (λ, λ_{OP}) es un par dual, $z = w$.

J_2 es sobreyectiva:

Pues todo $(a_n) \in \lambda^\alpha$ define un funcional lineal $\sigma(\lambda,\lambda^\alpha)$–continuo sobre λ.

Luego J_1 y J_2 son dos aplicaciones lineales y biyectivas. Por último, basta observar que dados $x = (x_n) \in \lambda$ y $z \in \lambda_{OP}$,

$$\langle z, x\rangle_{(\lambda_{OP},\lambda)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \langle z, e_n\rangle = \langle ((\langle z, e_n\rangle)), x\rangle_{(\lambda^\alpha,\lambda)} = \langle J_2(z), J_1(x)\rangle_{(\lambda^\alpha,\lambda)}$$

■

El teorema anterior, implica en particular que si λ es un espacio de sucesiones monótono, con $\phi \subset \lambda$, entonces λ^α es sucesionalmente $\sigma(\lambda^\alpha, \lambda)$–completo. Ejemplos importantes de espacios de sucesiones monótonos, son los espacios perfectos y los espacios normales (ver Köthe [36, pp. 405–408]).

Con una técnica distinta damos un resultado de tipo más general.

Teorema 1.3.3 *Sea E un espacio, (x_n) una base de Schauder en E y con espacio de sucesiones asociado λ monótono. Si E es débil* sucesionalmente completo, entonces $[E, \mu(E, E')]$ es un espacio de Orlicz-Pettis.*

Demostración:

Sea $E_{OP} = [E, OP(\sigma(E, E'))]' = [E, OP(\mu(E, E'))]'$

Sabemos que $OP(\mu(E, E')) = \mu(E, E_{OP})$. Si vemos que $E' = E_{OP}$ el teorema estaría probado.

Siempre se tiene que $E' \subset E_{OP}$. Recíprocamente, sea $z \in E_{OP}$.

Dado $x \in E$, existe una sucesión $(a_n) \in \lambda$ tal que,

$$x = \sigma(E, E') - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

Si denotamos por f_n al funcional n–ésimo correspondiente a la base (x_n), la serie anterior indica que $f_n(x) = a_n$.

Por otra parte, como λ es monótono la serie $\sum a_n x_n$ es débilmente convergente por subseries, luego

$$\langle z, x\rangle = \langle z, \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle z, x_n\rangle$$

Como hay una correspondencia biyectiva entre λ y E, deducimos que para todo $(a_n) \in \lambda$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n \langle z, x_n \rangle| < +\infty, \text{ es decir } (\langle z, x_n \rangle)_n \in \lambda^{\alpha}$$

Denotemos por,

$$b_n^z := \langle z, x_n \rangle, n \in \mathbb{N}$$

Como (x_n) es de Schauder $f_n \in E', n \in \mathbb{N}$. Ahora bien, dado $x \in E$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle b_n^z f_n, x \rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n^z f_n(x)| < +\infty$$

pues $(b_n^z)_n \in \lambda^{\alpha}$ y $(f_n(x))_n \in \lambda$. Es decir, la serie $\sum b_n^z f_n$ es incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy, y por la hipótesis de completitud $\sigma(E', E)$–convergente a un cierto $m_z \in E'$.

Por último, para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, se tiene,

$$\langle m_z - z, x \rangle = \langle m_z, x \rangle - \langle z, x \rangle = \cdots$$

$$\cdots = \langle \sum_{n=1}^{\infty} b_n^z f_n, x \rangle - \langle z, \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \rangle = \cdots$$

$$\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^z f_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle z, x_n \rangle = \cdots$$

$$\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, x_n \rangle a_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle z, x_n \rangle = 0$$

Como (E, E_{OP}) es un par dual, $z = m_z \in E'$ y, por tanto, $E_{OP} \subset E'$. ■

Hacemos notar que las hipótesis de "Mackey" y "completitud sucesional" son completamente naturales, puesto que todos los espacios de Orlicz–Pettis verifican esas dos propiedades.

Pueden obtenerse también algunos resultados como los vistos anteriormente para otros tipos de convergencia por multiplicadores. En particular, nosotros estamos interesados en dos de ellos: convergencia por c_0–multiplicadores y por ℓ_{∞}–multiplicadores.

Comenzamos por un teorema tipo "Orlicz–Pettis".

Teorema 1.3.4 *Sea E un espacio. Cualquier serie $\sigma(E,E')$-convergente por c_0 (ℓ_∞)-multiplicadores es $k(E,E')$-convergente por c_0 (ℓ_∞)-multiplicadores.*

La demostración es inmediata, puesto que $m_0 \cdot c_0 \subset c_0$ y $m_0 \cdot \ell_\infty \subset \ell_\infty$.

Análogamente, dado un espacio $[E,\tau]$, es posible definir la topología localmente convexa Hausdorff más fina con las mismas series convergentes por c_0 (ℓ_∞)-multiplicadores, y que denotaremos por $NOP(\tau)$ ($BMOP(\tau)$), respectivamente.

Siguiendo las técnicas de I. Tweddle [65], damos una caracterización de las topologías máximales anteriores.

Teorema 1.3.5 *Sea $[E,\tau]$ un espacio. Las topologías $BMOP(\tau)$, $NOP(\tau)$, asociadas a τ, coinciden con las topologías $\mu(E,E_{BMOP})$, $\mu(E,E_{NOP})$, respectivamente, donde,*

$$E_{BMOP}(\ E_{NOP}\ ) := \Big\{ z \in E^* : \langle \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, z \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x_n, z_n \rangle, \ldots$$

$$\ldots.\ \textit{con } (a_n) \in \ell_\infty\ (c_0), \textit{ donde } \sum x_n \textit{ es } \ldots$$

$$\ldots \tau - \textit{convergente por } \ell_\infty\ (c_0) - \textit{ multiplicadores} \Big\}$$

DEMOSTRACIÓN:

Claramente E_{BMOP}, (E_{NOP}) son espacios vectoriales en dualidad con E.

Sea $\sum x_n$ una serie en E convergente por ℓ_∞ (c_0)-multiplicadores. Por la definición de E_{BMOP}, (E_{NOP}), se verifica que la serie $\sum x_n$ también es $\sigma(E,E_{BMOP})$, ($\sigma(E,E_{NOP})$)-convergente por ℓ_∞ (c_0)-multiplicadores y por el teorema de Orlicz–Pettis $\mu(E,E_{BMOP})$, ($\mu(E,E_{NOP})$)-convergente por ℓ_∞ (c_0)-multiplicadores.

Bastará probar por tanto, que las topologías anteriores son "las más finas".

Sea α una topología localmente convexa Hausdorff en E con las mismas series convergentes por ℓ_∞ (c_0)–multiplicadores que τ, y sea $E_\alpha = [E, \alpha]'$.

Evidentemente,

$$E_\alpha \subset E_{BMOP}\ (E_{NOP}),$$

luego,

$$\mu(E, E_\alpha) \leq \mu(E, E_{BMOP})\ (\mu(E, E_{NOP}))$$

Puesto que $\alpha \leq \mu(E, E_\alpha)$, el teorema está probado. ■

En el contexto de "topologías polares" Dierolf [9] dió un teorema para la topología $BMOP(\tau)$:

Sea (E, F) una par dual y consideremos la siguiente familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de F,

$$\mathcal{M} := \{M \subset F : M \text{es } \sigma(F, E) - \text{acotado y tal que para cualquier aplicación...}$$

$$\text{... lineal y continua } S : [F, \sigma(F, E)] \to [\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty)], \ldots$$

$$\text{.. la imagen } S(M) \text{ es relativamente compacta en } [\ell_1, \|\ \|_1]\}$$

Entonces la topología en E de la convergencia uniforme sobre los elementos de $\mathcal{M}$ es la topologia (E, F)-polar más fina que tiene las mismas series convergentes por multiplicadores acotados que la topología $\sigma(E, F)$.

Para los c_0–multiplicadores nosotros damos el teorema correspondiente.

Teorema 1.3.6 *Sea (E, F) un par dual. Entonces toda serie $\sigma(E, F)$–convergente por c_0–multiplicadores es $\beta(E, F)$–convergente por c_0–multiplicadores.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\sum x_n$ una serie $\sigma(E, F)$–convergente por c_0–multiplicadores. Entonces la aplicación,

$$T : c_0 \to E$$

$$a = (a_n) \mapsto T(a) := \sigma(E,F) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

es débilmente continua. Por tanto T es $\beta(c_0, \ell_1) - \beta(E,F)$–continua.

Como la topología $\beta(c_0, \ell_1)$ es la topología de la norma de c_0 y,

$$M = \left\{ \sum_{i\in\sigma} e_i : \sigma \in P_f(\mathbb{N}) \right\},$$

es un conjunto norma acotado de c_0, se tiene que $T(M)$ es $\beta(E,F)$–acotado, es decir, el rango $S(x_n)$ de la serie $\sum x_n$ es $\beta(E,F)$–acotado y por tanto $\sum x_n$ es $\beta(E,F)$–Cauchy por c_0–multiplicadores.

Puesto que $\sum x_n$ es $\sigma(E,F)$–convergente por c_0–multiplicadores, $\beta(E,F)$ tiene una base de entornos de cero formada por $\sigma(E,F)$–cerrados y el lema de Bourbaki–Robertson, deducimos que $\sum x_n$ es $\beta(E,F)$–convergente por c_0–multiplicadores. ∎

1.4 Algunos teoremas tipo Orlicz–Pettis

En la sección anterior hemos enunciado, el clásico teorema de Orlicz–Pettis que relaciona la convergencia por subseries entre la topología débil y topologías más finas que la débil.

Esto induce a pensar que pudiera haber topologías menos finas que la topología débil que definieran las mismas subseries sumables que la topología débil. En esta línea, uno de los principales resultados, debido a Diestel, Faires [16], es el siguiente:

> Si E es un espacio de Banach sin copia de ℓ_∞, entonces las topologías $\sigma(E,H)$ y $\sigma(E,E')$ definen las mismas series convergentes por subseries, donde H es cualquier subespacio débil* denso de E'.

Nuestro objetivo es, dado un espacio $[E, \tau]$, estudiar cuando τ y todas las topologías localmente convexas Hausdorff menos finas que τ tienen las mismas series convergentes por λ–multiplicadores, donde λ recorre los principales espacios de sucesiones: $\ell_\infty, m_0, c_0, \ell_p, c$.

Puesto que en las demostraciones posteriores necesitaremos hacer uso del teorema de gráfica cerrada para espacios de Banach, exigiremos que el espacio $[E, \tau]$ sea B_r–completo.

Nuestro primer resultado es sobre ℓ_∞, el espacio de las sucesiones acotadas.

Teorema 1.4.1 *Sea $[E, \tau]$ un espacio B_r–completo.*
(1) Si E no tiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_∞, entonces τ y ξ definen las mismas series convergentes por ℓ_∞–multiplicadores, para cualquier topología localmente convexa Hausdorff ξ sobre E menos fina que τ.
(2) Si E tiene copia de ℓ_∞, entonces existe una topología localmente convexa Hausdorff sobre E menos fina que τ tal que la conclusión anterior no se verifica. Además si E es metrizable, dicha topología puede ser también elegida de forma que sea metrizable.

DEMOSTRACIÓN:

(1). Sea $\sum x_n$ una serie ξ–convergente por ℓ_∞–multiplicadores en E y ξ en las condiciones de (1). Sea, a su vez, (a_n) una sucesión acotada arbitraria. Denotemos por $y_n := a_n x_n, n \in \mathbb{N}$.

Para cualquier $(b_n) \in \ell_\infty$, se tiene que $(b_n a_n) \in \ell_\infty$, así que por hipótesis, la serie $\sum y_n$ es ξ–convergente por ℓ_∞–multiplicadores. Esto permite definir la siguiente aplicación lineal y continua (ver [42]),

$$T : \ell_\infty \to [E, \xi]$$

$$(b_n) \mapsto T(b_n) := \xi - \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n$$

Consideremos la aplicación identidad en,

$$I : [E, \xi] \to [E, \tau]$$

Evidentemente, I tiene gráfica cerrada pues $\xi \leq \tau$. Esto implica que si componemos T con I, obtendremos la siguiente aplicación lineal con gráfica cerrada,

$$T : \ell_\infty \to [E, \tau]$$

$$(b_n) \mapsto T(b_n) := \xi - \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n$$

Puesto que ℓ_∞ es un espacio de Banach y $[E,\tau]$ es B_r–completo, el teorema de gráfica cerrada nos dice que T es norma–τ–continua.

Ahora bien, $[E,\tau]$ no tiene copia de ℓ_∞, luego por [18] deducimos que T lleva la bola unidad cerrada de ℓ_∞ en un conjunto débil relativamente compacto de $[E,\tau]$. En particular, el conjunto

$$\left\{ \sum_{i\in\sigma} y_i : \sigma \in P_f(\mathbb{N}) \right\}$$

es débil relativamente compacto. Esto quiere decir que la serie $\sum y_n$ es débilmente convergente por m_0–multiplicadores en $[E,\tau]$. Por último, el teorema de Orlicz–Pettis, nos indica que $\sum y_n$ es τ–convergente.

Como la elección de (a_n) era arbitraria, concluímos que $\sum x_n$ es τ–convergente por ℓ_∞–multiplicadores.

(2). Sea E un espacio con copia de ℓ_∞ y sea T un isomorfismo de ℓ_∞ en el correspondiente subespacio H de E.

Sabemos que $\sum e_n$ es convergente por ℓ_∞–multiplicadores en $[\ell_\infty, \sigma(\ell_\infty, \phi)]$. Puesto que la topología $\sigma(\ell_\infty, \phi)$ es metrizable, podemos obtener una familia numerable de seminormas (p_n) que determinen dicha topología.

Por otra parte, como consecuencia del teorema de Hahn–Banach podemos conseguir un complemento topológico H^π de H en E (Jarchow [31, p. 133]).

Sea $(r_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia de seminormas que determinan la topología τ. Puesto que H y H^π son suma algebraica de E, dado $x \in E$, podemos representar x de forma única como suma $x = y + z$, donde $y \in H, z \in H^\pi$.

Teniendo en cuenta estas consideraciones, y recordando que T es biyectiva, podemos definir las siguientes seminormas sobre E,

$$q_{n,\alpha}(x) = p_n(T^{-1}(y)) + r_\alpha(z)$$

Finalmente, denotemos por ξ la topología localmente convexa menos fina sobre E tal que todas las seminormas $q_{n,\alpha}$ sean continuas.

El que ξ es Hausdorff se deduce de que τ y $\sigma(\ell_\infty, \phi)$ también lo son.

Veamos que $\xi \leq \tau$. Bastará probar que todo ξ–cerrado es τ–cerrado, o simplemente que toda red τ–convergente es ξ–convergente. Pero esto se deduce de que H y H^π son topológicamente complementarios y que la topología $\sigma(\ell_\infty, \phi)$ es menos fina que la topología de la norma infinito.

Sea, finalmente, $h_n = T(e_n) \in H, n \in \mathbb{N}$.

Entonces, $\sum h_n$ es ξ–convergente por ℓ_∞–multiplicadores, puesto que para cada $a = (a_n) \in \ell_\infty$,

$$a = \sigma(\ell_\infty, \phi) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$$

Pero, por otra parte, $\sum h_n$ no es ni siquiera τ–Cauchy. Esto último se debe a que $[H, \tau|_H]$ es isomorfo a $[\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty]$ y la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum e_n$ no es de Cauchy para la topología de la norma infinito.

Hacemos notar que se τ fuera metrizable, el conjunto de índices A podría elegirse numerable, con lo cual la familia $(q_{n,\alpha})$ sería numerable y por tanto, la topología ξ metrizable. ∎

Nuestro siguiente espacio de sucesiones a considerar será m_0, es decir, trataremos el caso de la convergencia por subseries.

Antes de nada, probaremos el siguiente lema.

Lema 1.4.1 *Sea E un espacio completo. Entonces, E tiene copia de m_0 si y sólo si tiene copia de ℓ_∞.*

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que m_0 es un subespacio de ℓ_∞, si E tiene copia de ℓ_∞ la tiene de m_0.

Recíprocamente, sea T un isomorfismo de m_0 en E, y supongamos que E no tiene copia de ℓ_∞.

Como m_0 es denso en ℓ_∞ y E es completo, podemos extender T de forma continua a un aplicación $\widehat{T}$ de ℓ_∞ en E.

En efecto, si $a \in \ell_\infty \backslash m_0$, podemos encontrar una sucesión (a_n) en m_0 tal que $\lim_n a_n = a$, y esto nos permite definir $\widehat{T}(a) := \lim_n T(a_n)$, que converge por ser E completo. (La elección de la sucesión no influye en la definición de $\widehat{T}$).

Además, como T es continua, para cada seminorma p de E existe $K > 0$ tal que,

$$p(T(a)) \leq K\|a\|, \quad a \in m_0,$$

y por tanto, para cada $a \in \ell_\infty \backslash m_0$,

$$p(\widehat{T}(a)) = \lim_n p(T(a_n)) \leq K \lim_n \|a_n\| = K\|a\|$$

Es decir, $\widehat{T}$ es continua.

Volviendo al lema, si E no tiene copia de ℓ_∞, $\widehat{T}$ lleva la bola unidad cerrada de ℓ_∞ en un conjunto débil relativamente compacto.

Puesto que $e_n \in m_0$, $n \in \mathbb{N}$ y T^{-1} es débilmente continua, obtenemos que el conjunto,

$$\left\{\sum_{i\in\sigma} e_i : \sigma \in P_f(\mathbb{N})\right\}$$

es relativamente $\sigma(m_0, (\ell_1)'')$–compacto. De donde, por el teorema de Orlicz–Pettis, deducimos que $\sum e_n$ es subseries convergente en $[m_0, \|\cdot\|_\infty]$, lo cual es falso. ■

Este lema nos permite enunciar un teorema para la m_0–convergencia idéntico al teorema anterior para ℓ_∞.

Teorema 1.4.2 *Sea $[E,\tau]$ un espacio B_r–completo.*

(1) Si E no tiene copia de m_0, entonces τ y ξ definen las mismas series convergentes por m_0–multiplicadores, para cualquier topología localmente convexa Hausdorff ξ sobre E menos fina que τ.

(2) Si E tiene copia de m_0, entonces existe una topología localmente convexa Hausdorff sobre E menos fina que τ, tal que la conclusión anterior no se verifica. Además, si E es metrizable, dicha topología puede ser también elegida de forma que sea metrizable.

DEMOSTRACIÓN:

(1). Sea $\sum x_n$ una serie ξ–convergente por m_0–multiplicadores en E y ξ en las condiciones de (1). Entonces, puedo definir, la siguiente aplicación lineal y continua (ver [42]),

$$T : m_0 \to [E,\xi]$$
$$(b_n) \mapsto T(b_n) =: \xi - \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n$$

Consideremos la aplicación identidad en,

$$I : [E,\xi] \to [E,\tau]$$

Evidentemente, I tiene gráfica cerrada pues $\xi \leq \tau$. Esto implica, que si componemos T con I, obtendremos la siguiente aplicación lineal con gráfica cerrada,

$$T : m_0 \to [E,\tau]$$
$$(b_n) \mapsto T(b_n) := \xi - \sum_{n=1}^{\infty} b_n y_n$$

Puesto que m_0 es un espacio tonelado (Pérez Carreras–Bonet [50, p. 134]), y $[E,\tau]$ es B_r–completo, el teorema de gráfica cerrada nos dice que T es norma–τ–continua.

Ahora bien, la demostración del lema anterior muestra que T puede extenderse de modo continuo, a una aplicación lineal de ℓ_∞ en $[E,\tau]$.

Puesto que E no tiene copia de m_0, por el lema anterior, E no tiene copia de ℓ_∞. A partir de aquí, la demostración sigue como en la demostración del punto (1) del teorema 1.4.1.

(2). Por el lema anterior, si E tiene copia de m_0, entonces E tiene copia de ℓ_∞. Por tanto, la demostración del punto (2) del teorema 1.4.1, sirve, también en este caso. ∎

Observaciones

[1] Si $[E, \tau]$ es un espacio B_r–completo sin copia de ℓ_∞, y ξ es una topología localmente convexa Hausdorff sobre E menos fina que τ, entonces una serie es ξ–convergente por subseries si y sólo si es ξ-convergente por multiplicadores acotados.

Pues, si $\sum x_n$es ξ–convergente por subseries, por el teorema anterior es τ–convergente por subseries y como τ es completa, τ–convergente por multiplicadores acotados. Finalmente, observar que $\xi \leq \tau$.

Damos a continuación algunas aplicaciones del teorema anterior en distintos contextos.

Si se toma en la clase de partida, para un teorema de gráfica cerrada, aquellos espacios de Mackey cuyo dual sea débil* sucesionalmente completo, Marquina en [44] prueba que la clase de llegada contiene a todos los espacios de Banach de generación débilmente compacta. Kalton en [32], ya había probado que esta clase de llegada contenía los espacios de Banach separables. Marquina, además, da ejemplos de espacios de Banach que no pertenecen a esta clase de llegada: $\ell_1(I)$, donde I es un conjunto de índices no numerable.

El teorema anterior nos permitirá dar más ejemplos de este tipo.

Corolario 1.4.1 *Si E es un espacio B_r-completo con copia de ℓ_∞, entonces E*

no pertenece a la clase de llegada en el teorema de gráfica cerrada de Marquina.

DEMOSTRACIÓN:

Supongamos, por el contrario, que $[E,\tau]$ si pertenece a dicha clase. Sea ξ una topología localmente convexa Hausdorff arbitraria sobre E y más débil que τ.

Si denotamos por $E_{OP} = [E, OP(\xi)]'$, sabemos que E_{OP} es sucesionalmente $\sigma(E_{OP}, E)$–completo (sección 1.3).

Además, puesto que $\tau \geq \xi$ y $OP(\xi) \geq \xi$, la aplicación identidad I de $[E, OP(\xi)]$ en $[E,\tau]$ tiene gráfica cerrada. Estamos, por tanto, en condiciones de aplicar el teorema de gráfica cerrada de Marquina, con lo cual deducimos que la aplicación I es $\mu(E, E_{OP}) - \tau$–continua.

Puesto que $OP(\xi) = \mu(E, E_{OP})$ (sección 1.3), realmente lo que estamos diciendo es que $OP(\xi) \geq \tau$.

En particular, toda serie ξ–convergente por subseries es τ–convergente por subseries y llegamos a una contradicción con el teorema anterior, pues ξ era arbitraria. ■

Nuestra segunda aplicación del teorema se relaciona con los espacios de sucesiones normales.

Recordamos que un espacio de sucesiones λ se dice que es normal si para cada $x = (x_n) \in \omega$ tal que $|x_n| \leq |y_n|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, con $y \in \lambda$, se tiene que x también pertenece a λ.

Corolario 1.4.2 *Sea λ un espacio de sucesiones normal, tal que $\phi \subset \lambda$. Si $[\lambda, \beta(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es B_r–completo sin copia de ℓ_∞, entonces $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es tonelado.*

DEMOSTRACIÓN:

Si λ es normal, entonces λ es monótono. Luego, por el teorema 1.3.2,

$$OP(\mu(\lambda, \lambda^\alpha)) = \mu(\lambda, \lambda^\alpha)$$

Ahora bien, por el teorema anterior,

$$OP(\mu(\lambda, \lambda^\alpha)) \geq \beta(\lambda, \lambda^\alpha),$$

y, por tanto, $\mu(\lambda, \lambda^\alpha) = \beta(\lambda.\lambda^\alpha)$, es decir $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es tonelado. ■

Observaciones

[1] En Ruckle [57, p. 46], puede verse un resultado similar para espacios de sucesiones perfectos que tienen a ℓ_∞ como un subespacio seccional de $[\lambda, \beta(\lambda, \lambda^\alpha)]$.

[2] Los ejemplos $[\ell_\infty, \|\cdot\|]$ y $[\ell_1, \beta(\ell_1, \phi)]$ muestran que "copia de ℓ_∞" y "α–dual" no pueden ser eliminados de las hipótesis del corolario.

[3] Las hipótesis del corolario, implican que $[\lambda, \beta(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es separable. Esto es consecuencia de Kamthan, Gupta [35, p. 201].

Nuestro tercer caso es el de la convergencia por c_0–multiplicadores. Veremos que el comportamiento de este tipo de convergencia es bastante diferente de los precedentes.

Teorema 1.4.3 *Sea $[E, \tau]$ un espacio B_r–completo. Entonces τ y ξ definen las mismas series convergentes por c_0–multiplicadores, para cualquier topología localmente convexa Hausdorff ξ sobre E menos fina que τ.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\sum x_n$ una serie ξ–convergente por c_0–multiplicadores y ξ una topología en las hipótesis del teorema.

Supongamos que $\sum x_n$ no es τ–convergente por c_0–multiplicadores. Como E es completo, esto indica por [42] que el rango de la serie $\sum x_n$ no está τ–acotado.

Es decir, existe una seminorma p continua sobre $[E,\tau]$ tal que,

$$\sup\left\{p\left(\sum_{i\in\sigma} x_i\right) : \sigma \in P_f(\mathbb{N})\right\} = +\infty$$

Por inducción puede obtenerse una sucesión (σ_n) de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ con $\sup\sigma_n < \inf\sigma_{n+1}$ y tal que

$$p\left(\sum_{i\in\sigma} x_i\right) \geq n$$

La contrucción de la sucesión se puede realizar del siguiente modo:

Dado $\sigma_n \in P_f(\mathbb{N})$, con $p(\sum_{i\in\sigma} x_i) \geq n$, se tiene que,

$$\sup\left\{p\left(\sum_{i\in\sigma} x_i\right) : \sigma \in P_f(\mathbb{N}), \sup\sigma_n < \inf\sigma\right\} = +\infty$$

Puesto que si el supremo estuviera acotado, digamos por $M > 0$, entonces para cada $\sigma \in P_f(\mathbb{N})$ se tendría,

$$p\left(\sum_{i\in\sigma} x_i\right) \leq p\left(\sum_{i\in\sigma\cap\sigma_n} x_i\right) + p\left(\sum_{i\in\sigma\setminus\sigma_n} x_i\right) \leq \cdots$$

$$\cdots \leq \sum_{i\in\sigma_n} p(x_i) + M, \quad \text{(no depende de } \sigma)$$

Por tanto, existe $\sigma_{n+1} \in P_f(\mathbb{N})$ $\sup\sigma_n \leq \inf\sigma_{n+1}$, tal que,

$$p\left(\sum_{i\in\sigma_{n+1}} x_i\right) \geq n+1$$

Denotemos por,

$$z_n := \sum_{i\in\sigma_n} x_i, \; n \in \mathbb{N}$$

Para cada $(a_n) \in c_0$, podemos considerar la siguiente sucesión numérica (b_n),

$$b_n = \begin{cases} 0 & n \notin \sigma_m, \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \\ a_m & n \in \sigma_m \end{cases}$$

Como (a_n) es una sucesión nula, (b_n) también lo es, pues $\lim_n \inf\sigma_n = +\infty$. Luego por hipótesis $\sum b_n x_n$ es ξ–convergente.

Ahora bien, por construción,

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$$

Es decir, $\sum z_n$ es ξ–convergente por c_0–multiplicadores. Esto nos permite definir la siguiente aplicación lineal y continua,

$$T : c_0 \to [E,\tau]$$

$$a = (a_n) \mapsto T(a) := \xi - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$$

Si componemos T con la identidad I de $[E,\xi]$ en $[E,\tau]$, que tiene gráfica cerrada pues $\xi \leq \tau$, obtenemos una aplicación lineal T con gráfica cerrada de c_0 en $[E,\tau]$.

Puesto que c_0 es un espacio de Banach y $[E,\tau]$ es B_r–completo, podemos concluir que T es norma–τ–continua.

Por tanto T lleva conjuntos norma acotados de c_0 en conjuntos τ–acotados de E. Puesto que $\|e_n\| = 1, n \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\{T(e_n) = z_n, n \in \mathbb{N}\},$$

debería ser τ–acotado y llegamos a un absurdo. ∎

El resultado sobre ℓ_p–multiplicadores $(1 \leq p < +\infty)$ es consecuencia directa del teorema anterior.

Teorema 1.4.4 *Sea $[E,\tau]$ un espacio B_r-completo. Entonces τ y ξ definen las mismas series convergentes por ℓ_p–multiplicadores $(1 \leq p < +\infty)$, para cualquier topología localmente convexa Hausdorff ξ sobre E menos fina que τ.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\sum x_n$ una serie ξ–convergente por ℓ_p–multiplicadores y ξ una topología en las hipótesis del teorema.

Dada una sucesión fija $(a_n) \in \ell_p$, para cada $(b_n) \in c_0$ se tiene que $(a_n b_n) \in \ell_p$. Luego por hipótesis, $\sum a_n b_n x_n$ es ξ–convergente, o equivalentemente, $\sum a_n x_n$ es ξ–convergente por c_0–multiplicadores, y por el teorema anterior τ–convergente por c_0–multiplicadores.

Puesto que $\ell_p \cdot c_0 = \ell_p$ (Jarchow [31, p. 27]), deducimos que $\sum x_n$ es τ–convergente por ℓ_p–multiplicadores. ∎

Observaciones

[1] El teorema anterior, de hecho, es válido para cualquier espacio de sucesiones λ que verifique $\lambda \cdot c_0 = \lambda$.

Este es el caso (Ruckle [57, p. 50]), de los espacios de sucesiones perfectos λ con $[\lambda, \beta(\lambda, \lambda^\alpha)]$ un FK–espacio y $\beta(\lambda, \lambda^\alpha) = \mu(\lambda, \lambda^\alpha)$. En Jarchow [31, p. 27] puede verse que los espacios de sucesiones de Köthe están en esas condiciones.

Por último, tratamos el caso de la convergencia por c–multiplicadores.

Teorema 1.4.5 *Sea $[E, \tau]$ un espacio B_r-completo.*
(1) Si E no tiene copia de c_0, entonces τ y ξ definen las mismas series convergentes por c–multiplicadores, para cualquier topología localmente convexa Hausdorff ξ sobre E menos fina que τ.
(2) Si E tiene copia complementada de c_0, entonces existe una topología localmente convexa Hausdorff sobre E menos fina que τ, tal que la conclusión anterior no se verifica. Además, si E es metrizable, dicha topología puede escogerse metrizable.

DEMOSTRACIÓN:

(1) Sea $\sum x_n$ una serie ξ–convergente por c–multiplicadores y ξ una topología en las hipótesis del teorema. Por el teorema 1.4.3 $\sum x_n$ es τ–convergente por

c_0–multiplicadores, así que supongamos que $\sum x_n$ no es τ–Cauchy ($c = c_0 \oplus [e]$), pues E es completo.

Por inducción matemática puede obtenerse una sucesión σ_n en $P_f(\mathbb{N})$, con $\sup \sigma_n < \inf \sigma_{n+1}$, y un entorno de cero U de τ, tales que verifican

$$\sum_{i \in \sigma_n} x_i \notin U, \quad n \in \mathbb{N}$$

Denotemos por,

$$z_n := \sum_{i \in \sigma_n} x_i, n \in \mathbb{N}$$

La prueba del teorema 1.4.3 nos muestra que la serie $\sum z_n$ es ξ–convergente por c_0–multiplicadores y, también por el teorema 1.4.3 τ–convergente por c_0–multiplicadores.

Esto permite definir la siguiente aplicación lineal y continua,

$$T : c_0 \to [E, \tau]$$

$$a = (a_n) \mapsto T(a) := \tau - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z_n$$

Puesto que E no tiene copia de c_0, por Kalton [33], la sucesión $(T(e_n))$ debe tender a cero. Es decir,

$$\tau - \lim_n z_n = 0,$$

y, por tanto, debe existir $n_0 \in \mathbb{N}$ con $z_{n_0} \in U$, con lo cual obtenemos una contradicción.

(2) Si E tiene copia de c_0 también la tiene de c.

Puesto que $\sum e_n$ es convergente por c–multiplicadores en $[c, \sigma(c, \phi)]$ y no es de Cauchy en $[c, \|\cdot\|_\infty]$, la construcción hecha en la demostración del punto (2) del teorema 1.4.1, puede ser trasladada a este caso. ∎

Observaciones

[1] Si E es un espacio normado separable, "complementada" puede suprimirse gracias al teorema de Sobczyk's [31, p. 160].

[2] Si E es un espacio de Banach dual, E tiene copia de c_0 si y sólo si E tiene copia de ℓ_∞, Diestel [14, p. 48]. Por tanto, la demostración del punto (2) del teorema 1.4.1, vale también para probar el punto (2) del teorema anterior y, por tanto, puede omitirse la palabra "complementada".

Capítulo II

Σ–Completitud

2.1 Definiciones

Los distintos conceptos "Cauchy" sobre convergencia de series por λ–multiplicadores mencionados en el Capítulo I conducen de modo natural a definir nuevos conceptos de completitud, como veremos a continuación.

Las definiciones las damos en el marco general de los espacios vectoriales topológicos[1]. Todos estos conceptos corresponden al siguiente esquema.

Definición 2.1.1 *Sea $[E,\tau]$ un espacio vectorial topológico y λ un espacio de sucesiones. Se dice que E es λ–completo si toda serie de Cauchy por λ–multiplicadores de E es convergente.*

Si denotamos por α la envoltura lineal de la sucesión $e = (1, 1, ..., 1, ...)$, vemos que el concepto de α–completitud coincide con el concepto usual de completitud sucesional.

En el caso $\lambda = c_0$, estamos ante los "O–espacios" definidos por Orlicz [45].

El concepto de Σ–completitud, no es sino el de m_0–completitud. En próximas secciones probaremos que, dentro de los espacios localmente convexos, la Σ–completitud coincide con la ℓ_∞–completitud, cosa que no ocurre en el marco más general de los espacios vectoriales topológicos.

[1]Las definiciones dadas en la sección 1.1 tienen sentido en espacios vectoriales topológicos

Puesto que, incluso dentro de los espacios vectoriales topológicos, una serie es Cauchy por m_0–multiplicadores si y sólo si es incondicionalmente Cauchy, podemos dar la siguiente definición de Σ–completitud.

Definición 2.1.2 *Sea E un espacio vectorial topológico. Se dice que E es Σ–completo si toda serie incondicionalmente Cauchy de E es convergente.*

La siguiente implicación se deduce inmediatamente de las propias definiciones,

$$\text{“}\Sigma\text{–completo”} \Rightarrow \text{“}\ell_\infty\text{–completo”}$$

Como hemos dicho, la contraimplicación no se da en general (posteriormente daremos un contraejemplo). En el fondo, esto se debe, por un lado, al conocido resultado de que la envoltura absolutamente convexa de un conjunto precompacto no tiene por qué ser precompacto en espacios vectoriales topológicos, y por otro, a las siguientes relaciones, entre el rango de una serie y los conceptos de convergencia, válidas en espacios vectoriales topológicos [55]:

1. Una serie es incondicionalmente Cauchy si y sólo si su rango es precompacto.

2. Una serie $\sum x_n$ es de Cauchy por multiplicadores acotados, si el conjunto $B(x_n)$, o equivalentemente $acx(S(x_n))$, es precompacto.

Es interesante observar que, además de en espacios localmente convexos, las series incondicionalmente Cauchy y de Cauchy por multiplicadores acotados coinciden si el espacio es semiconvexo (i.e. tiene una base de entornos semiconvexos de cero), aún cuando en estos espacios las envolturas convexas de los precompactos tampoco tienen por qué ser precompactos.

Esto muestra, la naturaleza especial de los conjuntos precompactos procedentes de series incondicionalmente Cauchy.

A continuación, comentamos el contraejemplo mencionado anteriormente, debido a P. Dierolf [10]:

Denotemos por τ^* la topología lineal más fina sobre m_0 sobre la cual la serie $\sum e_n$ es convergente por subseries.

Evidentemente, la serie $\sum e_n$ es subseries Cauchy en $[\phi, \tau^*|_\phi]$ pero no es convergente por subseries ($e \notin \phi$). Es decir, $[\phi, \tau^*|_\phi]$ no es Σ–completo.

Sin embargo, $[m_0, \tau^*]$ es completo [64]. Luego, toda serie $\sum x_n$ de Cauchy por multiplicadores acotados en $[\phi, \tau^*|_\phi]$ es convergente por multiplicadores acotados en $[m_0, \tau^*]$. Pero en estas condiciones, Batt *et al* [4], prueban que la envoltura lineal de la sucesión (x_n) es de dimensión finita. Es decir, la serie $\sum x_n$ es convergente por multiplicadores acotados en $[\phi, \tau^*|_\phi]$, luego $[\phi, \tau^*|_\phi]$ es ℓ_∞–completo.

Posteriormente probaremos que, si un espacio localmente convexo $[E, \tau]$ es Σ–completo se verifica que las series convergentes por subseries son convergentes por multiplicadores acotados, y por tanto,

$$OP(\tau) = BOMP(\tau)$$

De hecho, es en el contexto de dar condiciones para la igualdad de las topologías $OP(\tau)$, $BOMP(\tau)$, de donde surge el concepto de Σ–completitud (P. Dierolf [13]).

En lo sucesivo, volveremos de nuevo a trabajar exclusivamente con espacios localmente convexos Hausdorff.

2.2 Caracterizaciones

Comenzamos las caracterizaciones de los espacios Σ–completos, analizando su comportamiento frente a los distintos conceptos de convergencia de series definidos en el primer capítulo.

Teorema 2.2.1 *Sea $[E, \tau]$ un espacio. Son equivalentes:*

(1) E es Σ-completo.

(2) Toda serie incondicionalmente Cauchy de E es débilmente convergente.

(3) Toda serie incondicionalmente Cauchy de E es convergente por multiplicadores acotados.

(4) Toda serie incondicionalmente Cauchy de E es débilmente convergente por multiplicadores acotados.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Rightarrow$ (2). Pues τ es más fina que la topología $\sigma(E, E')$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $\sum x_n$ una serie incondicionalmente Cauchy de E y (α_n) una sucesión numérica acotada y fija.

Puesto que $\sum x_n$ es incondicionalmente Cauchy, se tiene que $\sum x_n$ es de Cauchy por multiplicadores acotados.

Por tanto, $\sum \alpha_n \beta_n x_n$ es de Cauchy en $[E, \tau]$ donde la sucesión (β_n) recorre el espacio de sucesiones ℓ_∞, puesto que $(\alpha_n \beta_n) \in \ell_\infty$.

Es decir, la serie $\sum \alpha_n x_n$ es de Cauchy por multiplicadores acotados, y en particular, incondicionalmente Cauchy. Usando (2), obtenemos que $\sum \alpha_n x_n$ es $\sigma(E, E')$–convergente.

Luego hemos probado que la serie de partida $\sum x_n$ es $\sigma(E, E')$–convergente por multiplicadores acotados. Finalmente, el teorema de Orlicz–Pettis nos permite afirmar que $\sum x_n$ es convergente por multiplicadores acotados en $[E, \tau]$.

(3)$\Rightarrow$(4). Puesto que τ es más fina que $\sigma(E, E')$.

(4)$\Rightarrow$(1). Sea $\sum x_n$ una serie incondicionalmente Cauchy de E. Por (4), se tiene que $\sum x_n$ es débilmente convergente por multiplicadores acotados y por el teorema de Orlicz–Pettis τ–convergente por multiplicadores acotados. Luego, en particular, la serie $\sum x_n$ es τ–convergente. ∎

Corolario 2.2.1 *Si E es un espacio Σ–completo, entonces las series incondicionalmente Cauchy, incondicionalmente convergentes, convergentes por subseries y convergentes por multiplicadores acotados coinciden.*

DEMOSTRACIÓN:

Basta recordar la siguiente cadena de implicaciones,

$$\text{BMC} \Rightarrow \text{SC} \Rightarrow \text{IC} \Rightarrow \text{ICauchy}$$

(ver gráfico de la sección 1.1) ∎

Corolario 2.2.2 *Sea $[E,\tau]$ un espacio Σ–completo. Entonces se verifica que, $OP(\tau) = BMOP(\tau)$.*

Una segunda caracterización de la Σ–completitud hace referencia al rango de las series incondicionalmente Cauchy.

Teorema 2.2.2 *Sea $[E,\tau]$ un espacio. Son equivalentes:*
(1) E es Σ–completo.
(2) La envoltura absolutamente convexa y cerrada del rango de cualquier serie incondicionalmente Cauchy de E es un conjunto compacto.
(3) La envoltura absolutamente convexa y cerrada del rango de cualquier serie incondicionalmente Cauchy de E es un conjunto débilmente compacto.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Rightarrow$ (2). Sea $\sum x_n$ una serie incondicionalmente Cauchy de E. Por (1) y el teorema anterior, se tiene que $\sum x_n$ es convergente por multiplicadores acotados, y por tanto, $B(x_n)$ es relativamente compacto (sección 1.1).

Ahora bien, por el lema 1.1.1, $B(x_n)$ es relativamente compacto si y sólo si $acx(S(x_n))$ es relativamente compacto.

(2) $\Rightarrow$ (3). Puesto que τ es más fina que $\sigma(E, E')$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $\sum x_n$ una serie incondicionalmente Cauchy. Por (3), $acx(S(x_n))$ es débilmente compacto, luego $B(x_n)$ también lo es por el lema 1.1.1, y deducimos que $\sum x_n$ es débilmente convergente por multiplicadores acotados.

Por último, el teorema de Orlicz–Pettis nos permite afirmar que $\sum x_n$ es convergente por multiplicadores acotados, y por tanto, E es Σ–completo. ∎

Para nuestra siguiente caracterización, necesitamos el concepto de "disco de Banach" y otras definiciones.

1. Se dice que un subconjunto A de un espacio E es un disco, si A es absolutamente convexo y acotado.

   Si denotamos por E_A la envoltura lineal de A, podemos definir una norma en E_A de la siguiente forma,

   $$p_A(x) \ := \ \inf \{\lambda > 0 : x \in \lambda A \ \}$$

   Dicha función p_A se denomina calibrador de Minkowski de A.

2. Un disco A se dice que es de Banach si el espacio normado $[E_A, p_A]$ es completo, y por tanto, de Banach.

3. Un espacio E donde todo disco cerrado sea un disco de Banach diremos que es localmente completo.

4. Dada una serie $\sum x_n$ incondicionalmente Cauchy en un espacio $[E, \tau]$, sabemos que $S(x_n)$ es un conjunto acotado, luego $\overline{acx(S(x_n))}$ es un disco cerrado en E.

   En lo sucesivo, cuando hablemos de "discos procedentes de series" nos estaremos refiriendo a esta clase de discos cerrados.

Teorema 2.2.3 *Sea $[E, \tau]$ un espacio. Son equivalentes:*

(1) E es Σ-completo.

(2) Para todo disco B procedente de series, cualquier sucesión acotada en el espacio normado $[E_B, p_B]$ tiene una subsucesión convergente en $[E_B, \tau|_{E_B}]$.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Rightarrow$ (2) Sea (x_n) una sucesión acotada en $[E_B, p_B]$. Como,

$$\{rB \ : \ r > 0\}$$

es una base de entornos de cero, para la topología generada por p_B, se tiene que existe un número real $M > 0$ tal que,

$$\{ \ x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\} \ \subset MB$$

Es decir,

$$\frac{1}{M} x_n \in B, \quad n \in \mathbb{N}$$

Ahora bien, $B = \overline{acx(S(x_n))}$, con $\sum x_n$ incondicionalmente τ–Cauchy. Como E es Σ–completo, la serie $\sum x_n$ es τ–convergente por multiplicadores acotados, y por tanto, $\overline{B(x_n)}$ es un subconjunto compacto y metrizable de $[E, \tau]$ (sección 1.1). Puesto que,

$$B \subset \overline{B(x_n)},$$

B también es compacto y metrizable, luego sucesionalmente τ–compacto.

Por tanto, podemos extraer una subsucesión , $(\frac{1}{M} x_{n_k})_k$ τ–convergente a un cierto $z \in B$ (pues B es cerrado), o lo que es lo mismo,

$$\tau\text{–} \lim_{k \to \infty} x_{n_k} = Mz \in E_B$$

(2)$\Rightarrow$(1). Sea (x_n) una serie incondicionalmente Cauchy en $[E, \tau]$. Consideremos el disco de $[E, \tau]$ procedente de series, $B := \overline{acx(S(x_n))}$.

Evidentemente, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \in B,$$

luego la sucesión (s_n) de sumas parciales de la serie $\sum x_n$ es un conjunto acotado en $[E_B, p_B]$.

Por (2), (s_n) tiene una subsucesión $(s_{n_k})_k$ τ–convergente a un cierto $z \in E_B$. Por otra parte, como $\sum x_n$ es incondicionalmente Cauchy, en particular, es de Cauchy, i.e., la sucesión (s_n) es de Cauchy en $[E, \tau]$.

Puesto que tenemos una sucesión (s_n) de Cauchy, que tiene una subsucesión convergente a z, la propia sucesión converge a z y por tanto, la serie $\sum x_n$ es convergente en $[E, \tau]$. ■

Cuando un espacio E es Σ–completo con la topología débil, pueden darse algunas caracterizaciones más. La primera utiliza los conjuntos $N(E)$, definidos en la sección 1.2.

Teorema 2.2.4 *Sea E un espacio. Entonces E es $\sigma(E, E')$-Σ-completo si y sólo si $\pi(E) = N(E)$.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Rightarrow$). Siempre $\pi(E) \subset N(E)$. Recíprocamente, sea $z \in N(E)$. Entonces, existe una sucesión (x_n) de elementos de E, tal que $\sum \pi(x_n)$ es incondicionalmente $\sigma(E'', E')$–convergente a z. Esto implica que $\sum x_n$ es incondicionalmente $\sigma(E, E')$–Cauchy y como E es $\sigma(E, E')$–Σ–completo, incondicionalmente $\sigma(E, E')$–convergente a $\omega \in E$.

Por tanto, $\sum \pi(x_n)$ es incondicionalmente $\sigma(E'', E')$–convergente a $\pi(\omega)$. Por la unicidad del límite $z = \pi(\omega) \in \pi(E)$.

($\Leftarrow$). Sea $\sum x_n$ una serie incondicionalmente $\sigma(E, E')$–Cauchy. Esto implica que el conjunto $S(\pi(x_n))$ es $\sigma(E'', E')$–acotado y por Köthe [36, p. 298], relativamente $\sigma(E'', E')$–compacto.

Es decir, existe $z \in E''$ tal que,

$$z = \sigma(E'', E') - \sum_{n=1}^{\infty} \pi(x_n)$$

Puesto que la convergencia es incondicional, obtenemos que $z \in N(E) = \pi(E)$, i.e., $z = \pi(x)$ con $x \in E$.

Finalmente, por la definición de π y puesto que $x_n, x \in E$, tenemos que $\sum x_n$ es $\sigma(E, E')$–convergente a x. ■

Observaciones

[1] Mediante razonamientos análogos a los del teorema anterior, pueden probarse algunos resultados más sobre los conjuntos $N(E)$ y $K(E)$. A saber:

1. Un espacio E es sucesionalmente $\sigma(E, E')$–completo si y sólo se verifica que $\pi(E) = K(E)$, si y sólo si E tiene la propiedad (u) $(N(E) = K(E))$ y E es débil Σ–completo $(\pi(E) = N(E))$.

2. Un espacio E es sucesionalmente $\sigma(E'', E')$–denso en el bidual E'' si y sólo si $K(E) = E''$.

[2] Los resultados mencionados sobre los conjuntos $N(E)$, $K(E)$ permiten deducir que un espacio E es semirreflexivo $(\pi(E) = E'')$ si y sólo si E es $\sigma(E, E')$–Σ–completo $(\pi(E) = N(E))$, tiene la propiedad (u) $(N(E) = K(E))$ y es sucesionalmente $\sigma(E'', E')$–denso en E'' $(K(E) = E'')$.

Para el caso de espacios de Banach separables, el resultado anterior toma la forma:

E es reflexivo si y sólo si E no tiene copia de c_0 (Diestel [14, p. 45]), no tiene copia de ℓ_1 (Diestel [14, p. 215]) y tiene la propiedad (u).

Si además de separable, el espacio de Banach es un espacio dual, puede omitirse “no tiene copia de c_0” en el resultado anterior, gracias al teorema 1.2.3 y a Diestel [14, p. 48].

Nuestra segunda caracterización de los espacios débil Σ–completos, no es sino una extensión de un conocido resultado sobre espacios de Banach, debido a Bessaga–Pełczynski. A saber:

> Un espacio de Banach no tiene copia de c_0 si y sólo si toda serie débil incondicionalmente Cauchy es incondicionalmente convergente.

Necesitaremos el siguiente lema.

Lema 2.2.1 *Sea $[E,\tau]$ un espacio Σ–completo sin copia de c_0. Entonces para cualquier serie $\sum x_n$ débil incondicionalmente Cauchy de E se verifica que,*

$$\tau - \lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\sum x_n$ una serie débil incondicionalmente Cauchy de E. Esto implica que $S(x_n)$ es un conjunto débilmente acotado, y por tanto, τ–acotado, i.e., la serie $\sum x_n$ es τ–Cauchy por c_0–multiplicadores.

Consideremos una cierta sucesión numérica nula (α_n). Evidentemente, para toda sucesión $(\beta_n) \in \ell_\infty$, tenemos que $(\alpha_n\beta_n) \in c_0$, luego $\sum \alpha_n\beta_n x_n$ es de Cauchy en $[E,\tau]$. Esto es, estamos diciendo que $\sum \alpha_n x_n$ es de Cauchy por ℓ_∞–multiplicadores y, en particular, incondicionalmente τ–Cauchy.

Como $[E,\tau]$ es Σ–completo, se deduce que $\sum \alpha_n x_n$ es τ–convergente. Esto nos permite definir la siguiente aplicación continua,

$$T : [c_0, \|\cdot\|_\infty] \to [E,\tau]$$

$$a = (\alpha_n) \mapsto T(a) := \tau - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

Puesto que $[E,\tau]$ no tiene ningún subespacio isomorfo a c_0, por un resultado de Kalton [33], obtenemos que $T(e_n)$ debe tender a cero en $[E,\tau]$. Es decir,

$$\tau - \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Y por tanto, el lema está probado. ■

Teorema 2.2.5 *Sea $[E,\tau]$ un espacio Σ-completo. Son equivalentes:*
(1) $[E,\sigma(E,E')]$ es Σ-completo.
(2) $[E,\tau]$ no tiene copia de c_0.

DEMOSTRACIÓN:

(1)$\Rightarrow$(2). Supongamos que $[E,\sigma(E,E')]$ es Σ–completo y sin embargo $[E,\tau]$ tiene una copia de c_0. Esto quiere decir, que E tiene un subespacio H tal que existe un isomorfismo,

$$T:[c_0,\|\cdot\|_\infty]\to[H,\tau|_H]$$

Para todo $a\in c_0$, se tiene que,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_ne_n=a,$$

en la topología de la norma, por tanto $\sum e_n$ es $\sigma(c_0,\ell_1)$–convergente por c_0–multiplicadores , y obtenemos que $S(e_n)$ es $\sigma(c_0,\ell_1)$–acotado. Como T es una aplicación lineal, se tiene que,

$$T(S(e_n))=S(T(e_n))$$

Y por ser débilmente continua $S(T(e_n))$ es $\sigma(H,H')$–acotado. Es decir, la serie $\sum T(e_n)$ es incondicionalmente $\sigma(E,E')$–Cauchy.

Puesto que E es $\sigma(E,E')$–Σ–completo, la serie $\sum T(e_n)$ es $\sigma(E,E')$–convergente por multiplicadores acotados, y por el teorema de Orlicz–Pettis τ–convergente por multiplicadores acotados, luego τ–convergente.

Como T^{-1} es también continua y $\sum T(e_n)$ es τ–Cauchy, concluimos que la serie $\sum e_n$ es de Cauchy en c_0 respecto a la norma, lo cual es falso,

$$\|\sum_{k\in\sigma}e_k\|=1,\quad \sigma\in P_f(\mathbb{N})$$

(2)$\Rightarrow$(1). Sea $\sum x_n$ una serie incondicionalmente Cauchy en $[E, \sigma(E, E')]$.

De hecho, $\sum x_n$ es incondicionalmente τ–Cauchy. Esto se debe a que, si no lo fuera, podríamos obtener una sucesión (σ_n) en $P_f(\mathbb{N})$ con sup $\sigma_n <$ inf σ_{n+1}, y un entorno U de cero en $[E, \tau]$ tales que verificarían,

$$\sum_{i \in \sigma_n} x_i \notin U \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

Ahora bien, denotemos,

$$z_n = \sum_{i \in \sigma_n} x_i \ , \quad n \in \mathbb{N}$$

Claramente $S(z_n) \subset S(x_n)$, luego $S(z_n)$ es débil acotado, por tanto $\sum z_n$ es débil incondicionalmente Cauchy y por el lema anterior deduciríamos que,

$$\tau - \lim_{n \to \infty} z_n = 0$$

Es decir, existiría un $n_0 \in \mathbb{N}$ con $z_{n_0} \in U$ y llegaríamos a contradicción.

Finalmente, puesto que $\sum x_n$ ha de ser incondicionalmente τ–Cauchy y $[E, \tau]$ es Σ–completo, deducimos que $\sum x_n$ es τ–convergente en E y, en particular, débilmente convergente. ■

Corolario 2.2.3 *Sea $[E, \tau]$ un espacio. Si $[E, \sigma(E, E')]$ es Σ–completo, entonces $[E, \alpha]$ no tiene copia de c_0, donde α representa cualquier topología compatible con la topología τ.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\sum x_n$ una serie incondicionalmente α–Cauchy. Como α es más fina que $\sigma(E, E')$ y E es débil Σ–completo, deducimos que $\sum x_n$ es débil convergente por multiplicadores acotados. Finalmente, el teorema de Orlicz–Pettis nos dice que $\sum x_n$ es $\mu(E, E')$–convergente y, puesto que α es menos fina que $\mu(E, E')$, concluimos que $[E, \alpha]$ es Σ–completo.

Puesto que $[E,\alpha]' = E'$, y $[E,\sigma(E,E')]$ es Σ–completo, obtenemos del teorema anterior que $[E,\alpha]$ no tiene copia de c_0. ■

Corolario 2.2.4 *Sea λ un espacio de sucesiones conteniendo a ϕ y supongamos que $[\lambda,\mu(\lambda,\lambda^\alpha)]$ es Σ–completo. Entonces λ es perfecto si y sólo si $[\lambda,\mu(\lambda,\lambda^\alpha)]$ no tiene copia de c_0.*

DEMOSTRACIÓN:

Como $[\lambda,\mu(\lambda,\lambda^\alpha)]$ verifica la propiedad (u) (sección 1.2), deducimos que el espacio $[\lambda,\sigma(\lambda,\lambda^\alpha)]$ es Σ–completo si y sólo si $[\lambda,\sigma(\lambda,\lambda^\alpha)]$ es sucesionalmente completo, y esto último es equivalente (Köthe [36, p. 413]) a que λ es perfecto.

Aplicando el teorema 2.2.5, deducimos el corolario. ■

Observaciones

[1] Puede obtenerse un resultado análogo con las funciones integrables mencionadas en la sección 1.2.

Por último, damos un resultado análogo con la débil–Σ–completitud, al dado al comienzo de la sección con la Σ–completitud sobre igualdad de topologías asociadas de Orlicz–Pettis (ver sección 1.3).

Teorema 2.2.6 *Sea $[E,\tau]$ un espacio. Si E es débil-Σ-completo, entonces se verifica,*

$$BMOP(\tau) = OP(\tau) = NOP(\tau)$$

DEMOSTRACIÓN:

Si E es débil–Σ–completo, por el teorema 1.4.2, deducimos que es τ–Σ–completo, y por tanto, $OP(\tau) = BMOP(\tau)$.

Puesto que $c_0 \subset \ell_\infty$, se tiene que, $NOP(\tau) < BMOP(\tau)$.

Recíprocamente, dada una serie $\sum x_n \tau$–convergente por c_0–multiplicadores, en particular es débil incondicionalmente Cauchy. Puesto que E es débil–Σ–completo, obtenemos que $\sum x_n$es débilmente convergente por multiplicadores acotados, y por la definición de las topologías "$BMOP$", $BMOP(\tau)$-convergente por multiplicadores acotados, luego $BMOP(\tau)$-convergente por c_0–multiplicadores. Finalmente, por la definición maximal de "NOP", concluímos que $NOP(\tau) = BMOP(\tau)$. ■

2.3 Relaciones con otros conceptos de completitud

Comenzamos la sección enumerando los principales conceptos de completitud usados en Análisis Funcional. Como veremos, algunos de ellos ya han sido mencionados en la memoria.

Nuestro objetivo es ver donde y cómo "encaja" el concepto de Σ–completitud entre dichos conceptos de completitud.

Sea $[E, \tau]$ un espacio. Se dice que:

1. E es completo si toda red de Cauchy en E es convergente.

2. E es sucesionalmente completo si toda sucesión de Cauchy en E es convergente.

3. E es localmente completo si para todo disco cerrado A de E, el espacio normado $[E_A, p_A]$ es de Banach, donde E_A es la envoltura lineal de A y p_A es el calibrador de Minkowski asociado a A.

4. E es un C–espacio si toda serie convergente por c_0–multiplicadores de E es convergente, i. e., toda C–sucesión es convergente.

5. E es un O–espacio si toda serie de Cauchy por c_0–multiplicadores de E es convergente.

Es conocido (Jarchow [31, p. 197]) que:

$$\text{“completo”} \implies \text{“sucesionalmente completo”} \implies \text{“localmente completo”}$$

y por otra parte, es evidente que,

$$\text{“}O\text{–espacio”} \implies \text{“}C\text{–espacio”}$$

El siguiente teorema muestra que la Σ–completitud es un concepto más amplio que la completitud sucesional.

Teorema 2.3.1 *Todo espacio sucesionalmente completo es Σ–completo.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\sum x_n$ una serie incondicionalmente Cauchy de E. En particular, se tiene que la sucesión (s_n) de sumas parciales es de Cauchy. Puesto que E es sucesionalmente completo, (s_n) es convergente, luego $\sum x_n$ es convergente. ∎

La propiedad (u) permite dar un cierto resultado recíproco del teorema anterior.

Teorema 2.3.2 *Sea $[E, \tau]$ un espacio. Si $[E, \sigma(E, E')]$ es Σ–completo y tiene la propiedad (u), entonces $[E, \tau]$ es sucesionalmente completo.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea (x_n) una sucesión τ–Cauchy, luego $\sigma(E,E')$–Cauchy. Como E tiene la propiedad (u), existe una serie $\sum y_n$ débil incondicionalmente Cauchy tal que,

$$x_n - \sum_{k=1}^{n} y_k \xrightarrow{n} 0 \quad (\text{en } \sigma(E,E'))$$

Puesto que E es débil Σ–completo, y por el teorema de Orlicz–Pettis la serie $\sum y_n$ es τ–convergente a un cierto $z \in E$.

Es decir, la sucesión $(x_n - \sum_{k=1}^{n} y_k)_n$ es τ–Cauchy y $\sigma(E,E')$–nula. Por el lema de Bourbaki–Robertson concluimos que $(x_n - \sum_{k=1}^{n} y_k)$ es τ–nula.

Finalmente, para la topología τ se tiene,

$$x_n = x_n - \sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=1}^{n} y_k \xrightarrow{n} 0 + z = z$$

■

Damos a continuación, algunos ejemplos que separan estos dos tipos de completitud.

Ejemplos

[1] Cualquier espacio E débil Σ–completo sin la propiedad (u) no puede ser débil sucesionalmente completo (observación [1] del teorema 1.2.4).

[2] Un espacio E no reflexivo, débil Σ–completo y $\sigma(E'',E')$–sucesionalmente denso, no puede ser débil sucesionalmente completo (observación [2] del teorema 1.2.4).

Puesto que si $[E',\beta(E',E)]$ es separable, E es sucesionalmente $\sigma(E'',E')$–denso en E'' (Schaeffer [59, p.149]), se tiene que la clase de los espacios completos no reflexivos, sin copia de c_0 y con dual fuerte separable son débil Σ–completos (teorema 2.2.5), pero no son débil sucesionalmente completos.

Veamos que los espacios E de Banach no reflexivos cuyo bidual sea separable pertenecen a la clase mencionada anteriormente.

En efecto, si E'' es separable por Jarchow [31, p. 129], E' también lo es. Por otro lado, si E tuviera copia de c_0, E'' también tendría copia de c_0, pues E es isomorfo a un cierto subespacio de E''. Puesto que E'' es un Banach dual, por Diestel [14, p. 48], obtendríamos que E'' tiene copia de ℓ_∞.

Es decir, tendríamos un espacio de Banach separable con un subespacio no separable, lo cual es absurdo.

Recordando que un espacio de Banach se denomina cuasirreflexivo si su codimensión en el bidual es finita ([6]), es inmediato que los espacios de Banach cuasirreflexivos y separables son no reflexivos y tienen bidual separable, luego pertenecen a la clase anterior. Es el caso del conocido espacio de James (James [29]).

[3] Usando que un espacio de Banach separable es sucesionalmente $\sigma(E'', E')$–denso en el bidual si y sólo si no tiene copia de ℓ_1 (Diestel [14, p. 215]), tenemos que los espacios de Banach separables no reflexivos sin copia de c_0 ni de ℓ_1 son débil Σ–completos y no son débil sucesionalmente completos.

Las relaciones entre la completitud local y la Σ–completitud son numerosas. Además, hay grandes analogías entre resultados sobre ambos tipos de completitud. Una primera prueba de ellas es comparar el enunciado del teorema 1.2.2 con la siguiente caracterización, debida a P. Dierolf [12], de la completitud local:

> Un espacio E es localmente completo si y sólo si la envoltura absolutamente convexa y cerrada del rango de cualquier sucesión nula de E es un conjunto compacto.

Como vemos, basta sustituir "sucesión" por "serie incondicionalmente Cauchy" para obtener uno u otro teorema. Hemos obtenido también un resultado análogo al teorema 1.2.1, para espacios localmente completos. De hecho, este resultado es una extensión del siguiente conocido teorema de Bessaga–Pełczynski [5]:

En un espacio de Banach, una serie es débil incondicionalmente Cauchy si y sólo si es convergente por c_0–multiplicadores.

Nuestro resultado afirma que la propiedad anterior caracteriza a los espacios localmente completos.

Teorema 2.3.3 *Sea $[E,\tau]$ un espacio. Son equivalentes:*
(1) E es localmente completo.
(2) Toda serie de Cauchy por c_0–multiplicadores de E es convergente por c_0–multiplicadores.
(3) Las series débil incondicionalmente Cauchy de E coinciden con las series convergentes por c_0–multiplicadores de E.

DEMOSTRACIÓN:

(1)⇒(2). Sea $\sum x_n$ una serie de Cauchy por c_0–multiplicadores de E. Esto implica que su rango $S(x_n)$ es un conjunto acotado, y por tanto, la envoltura absolutamente convexa y cerrada de dicho rango, que denotaremos por B, es un disco cerrado de E. Como E es localmente completo, tenemos que $[E_B, p_B]$ es un espacio de Banach.

Además, puesto que $S(x_n) \subset B$, para todo $a \in S(x_n)$ se verifica que $p_B(a) \leq 1$. Es decir, $S(x_n)$ está p_B–acotado, luego $\sum x_n$ es p_B–Cauchy por c_0–multiplicadores y por la completitud deducimos que $\sum x_n$ es convergente por c_0–multiplicadores en $[E_B, p_B]$.

Puesto que la topología generada por la norma p_B es más fina que la topología inducida en E_B por la topología τ, concluimos que $\sum x_n$ es τ–convergente por c_0–multiplicadores.

(2)⇒(3). Sea $\sum x_n$ una serie convergente por c_0–multiplicadores de E. En particular, también es débilmente Cauchy por c_0–multiplicadores, i. e.:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x_n, z \rangle \text{ converge, } \quad \text{para todo } (\alpha_n) \in c_0 \text{ y todo } z \in E'$$

Puesto que para series numéricas, la expresión anterior equivale a la convergencia absoluta, tenemos que $\sum x_n$ es débil incondicionalmente Cauchy.

Recíprocamente, sea $\sum x_n$ una serie débil incondicionalmente Cauchy. Por tanto, su rango es débilmente acotado, luego τ–acotado, de donde la serie $\sum x_n$ es τ–Cauchy por c_0–multiplicadores. Por (2), deducimos que $\sum x_n$ es τ–convergente por c_0–multiplicadores.

(3)$\Rightarrow$(1). Sea B un disco cerrado de E y (x_n) una sucesión de Cauchy en $[E_B, p_B]$.

Por inducción, podemos obtener una subsucesión estrictamente creciente de enteros positivos (n_k) tal que,

$$p_B(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k k^2}, \quad \text{donde} \quad k \in \mathbb{N}$$

Denotemos,

$$y_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Evidentemente $(2^k y_k)$ es una sucesión p_B–nula, luego p_B–acotada por un cierto número $M > 0$. Por tanto, para cualquier $(\lambda_n) \in \ell_1$ se tiene,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_B(\lambda_k 2^k y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| p_B(2^k y_k) \leq M \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < +\infty$$

Es decir, las series $\sum \lambda_k 2^k y_k$ son absolutamente p_B–Cauchy, luego incondicionalmente Cauchy en $[E_B, \sigma(E, E')|_{E_B}]$.

Además, de (3) obtenemos que las series $\sum \lambda_k 2^k y_k$ son convergentes por c_0–multiplicadores en $[E, \tau]$.

Es decir, para cualquier sucesión $(\lambda_n) \in \ell_1$ y cualquier sucesión $(\alpha_n) \in c_0$, la serie $\sum \alpha_k \lambda_k 2^k y_k$ es convergente en E. Puesto que $c_0 \cdot \ell_1 = \ell_1$ (Jarchow [31, p. 27]), deducimos que $\sum 2^k y_k$ es τ-convergente por ℓ_1-multiplicadores, y por tanto la serie $\sum y_k$ es τ–convergente a $z \in E$.

Pero las sumas parciales de $\sum y_k$ son de la siguiente forma,

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = x_{n_{m+1}} - x_{n_1}, \quad \text{con } m \in \mathbb{N}.$$

Por tanto, la sucesión (x_{n_k}) es τ–convergente a $h = z + x_{n_1}$.

Ahora bien, la sucesión (x_n) es p_B–Cauchy, luego p_B–acotada y por tanto, existe $r > 0$ tal que,

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset rB$$

Como B es τ–cerrado, deducimos que,

$$h \in rB \subset E_B$$

Esto implica que $z = h - x_{n_1} \in E_B$.

Es decir, tenemos una subsucesión (x_{n_k}) que es de Cauchy en $[E_B, p_B]$ y convergente en $[E_B, \tau|_{E_B}]$. Como $\{rB : r > 0\}$ forman una base de entornos τ–cerrados de cero en $[E_B, p_B]$, el lema de Bourbaki–Robertson nos permite afirmar que (x_{n_k}) es p_B–convergente a h.

Como tenemos una sucesión (x_n) p_B–Cauchy con una subsucesión p_B–convergente, finalmente deducimos que (x_n) es p_B–convergente a h. ∎

Observaciones

[1] Dada una serie $\sum x_n$ de E, denotemos por,

$$M(x_n) := \left\{(a_n) \in \omega : \sum a_n x_n \text{ converge } \right\}$$

El teorema anterior indica que en espacios localmente completos se verifica que $c_0 \subset M(x_n)$ para cualquier serie débil incondicionalmente Cauchy.

Veamos que una condición suficiente para obtener $c_0 = M(x_n)$ es que la sucesión (x_n) no tenga ninguna subsucesión τ–nula.

Supongamos por contra que tenemos $(a_n) \in M(x_n) \setminus c_0$. Esto implica que existe $r > 0$ y una subsucesión (a_{n_k}) tal que $|a_{n_k}| \geq r$, $k \in \mathbb{N}$.

Sea U un tonel entorno de cero en E. Como $\sum a_n x_n$ converge, verifica la condición necesaria de convergencia, luego dado el entorno de cero rU, existe

$k_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geq k_0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n x_n \in rU$. Por tanto,

$$x_{n_k} \in \frac{r}{|a_{n_k}|} U \subset U, \text{ con } n_k \geq k_0$$

Es decir, $(x_{n_k})_k$ es una sucesión nula.

[2] El teorema anterior falla en el contexto más general de los espacios vectoriales topológicos. Basta considerar el siguiente espacio lineal topológico metrizable y completo $[\ell_{1/2}, \|\cdot\|_{1/2}]$ y la sucesión $v_n = \frac{1}{n^2} e_n$.

En efecto, como el dual de $\ell_{1/2}$ es ℓ_∞, tenemos que para cada $a = (a_n) \in \ell_\infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle v_n, a\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |\langle e_n, a\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} |a_n| < +\infty$$

Es decir, $\sum v_n$ es débil incondicionalmente Cauchy.

Pero por otra parte, dada la sucesión $\left(\frac{1}{\log^2 n}\right) \in c_0$, se tiene que

$$\|\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{\log^2 k} v_k\|_{1/2} = \sum_{k=n}^{m} |\frac{1}{k^2 \log^2 k}|^{1/2} = \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k \log k}$$

Puesto que $\sum \frac{1}{n \log n}$ no converge (criterio de condensación de Cauchy), resulta que $\sum \frac{1}{\log^2 n} v_n$ no es de Cauchy en $\ell_{1/2}$. Es decir, la serie $\sum v_n$ no es convergente por c_0–multiplicadores.

[3] Dada una sucesión (x_n) débilmente nula en un espacio localmente completo $[E, \tau]$, por Jarchow [31, p. 162], se tiene que su bipolar es $\sigma(E, E')$–compacto y

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}^{\circ\circ} = \left\{\tau - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n : (\lambda_n) \in B_1(\ell_1)\right\}$$

El recíproco también es cierto. Pues si toda sucesión (x_n) débilmente nula de un espacio E es débilmente convergente por ℓ_1–multiplicadores, podemos definir la siguiente aplicación lineal y continua,

$$T : [\ell_1, \sigma(\ell_1, c_0)] \longrightarrow [E, \sigma(E, E')]$$

$$a = (a_n) \mapsto T(a) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

Pero por el teorema de Alaoglu, $B_1(\ell_1)$ es $\sigma(\ell_1, c_0)$–compacto, luego,

$$\{x_n : n \in \mathbb{N}\}^{\circ\circ} = \overline{acx(x_n)} \subset T(B_1(\ell_1)),$$

es débilmente compacto y por la caracterización de P. Dierolf [12], E es localmente completo[2].

Es decir, hemos probado que un espacio E es localmente completo si y sólo si para toda sucesión (x_n) de E tal que $(\langle x_n, y\rangle) \in c_0$ para todo $y \in E'$, se verifica que $\sum x_n$ es convergente por ℓ_1–multiplicadores.

Nuestro teorema puede verse como una "forma dual" de este resultado, simplemente permutando los papeles de "c_0" y "ℓ_1".

Corolario 2.3.1 *Todo espacio Σ–completo es localmente completo.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\sum x_n$ una serie de Cauchy por c_0–multiplicadores en $[E, \tau]$ y $(a_n) \in c_0$.

Como $\ell_\infty \cdot c_0 \subset c_0$, la serie $\sum a_n x_n$ es incondicionalmente τ–Cauchy y puesto que $[E, \tau]$ es Σ–completo, $\sum a_n x_n$ es τ–convergente. ∎

Las series incondicionalmente Cauchy tienen otras conexiones con la completitud local, además del teorema 2.3.3. Probaremos que basta con tener la completitud de los espacios $[E_B, p_B]$ donde B recorre los discos procedentes de series, para asegurar que todo disco cerrado de E es de Banach.

Teorema 2.3.4 *Sea $[E, \tau]$ un espacio. Entonces*
(1) E es localmente completo si y sólo si los espacios normados $[E_B, p_B]$ son de Banach, para cualquier disco cerrado B de E, de la forma $B = \overline{acx(S(x_n))}$, con $\sum x_n$ incondicionalmente τ–Cauchy.

[2] La completitud local es una propiedad del par dual (Pérez Carreras–Bonet [50, 153]).

(2) Además, si E es localmente completo, los espacios de Banach E_B anteriores, o bien son de dimensión finita, o bien tienen copia de c_0.

DEMOSTRACIÓN:

(1).($\Rightarrow$). Por la definición de completitud local.

($\Leftarrow$). Sea B un disco cerrado de E y (x_n) una sucesión de Cauchy en $[E_B, p_B]$.

Por inducción matemática, podemos obtener una subsucesión estrictamente creciente de naturales (n_k) tal que,

$$p_B(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \leq \frac{1}{3 \cdot 2^k \cdot k^2}, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Si denotamos,

$$y_k := 2^k(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}), \quad k \in \mathbb{N},$$

tenemos que $\sum y_k$ es absolutamente p_B–Cauchy, luego incondicionalmente p_B–Cauchy y por último, incondicionalmente τ–Cauchy, pues la topología que genera p_B es más fina que la inducida sobre E_B por τ.

Por tanto, $S(y_k)$ es un conjunto acotado de E y podemos formar el siguiente disco cerrado $D = \overline{acx(S(y_k))}$, que es de la clase mencionada en el punto (1). Por hipótesis, $[E_D, p_D]$ es un espacio de Banach.

Veamos que D está contenido en B. Para ello, sea $z \in S(y_k)$. Entonces, existe $\sigma \in P_f(\mathbb{N})$ tal que $z = \sum_{i \in \sigma} y_i$, luego $z \in E_B$, y puedo considerar,

$$p_B(z) \leq \sum_{i \in \sigma} p_B(y_i) \leq \sum_{n=1}^{\infty} p_B(y_n) \leq \cdots$$

$$\cdots \leq \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{6} < \frac{16}{18} < 1$$

Por tanto, $z \in B$, o equivalentemente, $S(y_k) \subset B$. Ahora bien, B es cerrado y absolutamente convexo, luego

$$\overline{acx(S(y_k))} \subset \overline{acx(B)} = B, \text{ i.e., } D \subset B.$$

Además, la inclusión $D \subset B$ implica que para los $z \in E_D$ se tiene,

$$\{\lambda > 0 : \ z \in \lambda D\} \subset \{\lambda > 0 : \ z \in \lambda B\}$$

y tomando ínfimos en los conjuntos anteriores queda,

$$p_B(z) \leq p_D(z), \quad z \in E_D$$

Por otra parte, como $S(y_k) \subset D$, resulta que la serie $\sum y_k$ es de Cauchy por c_0–multiplicadores en $[E_D, p_D]$. Puesto que este espacio es completo, deducimos que $\sum y_k$ es convergente por c_0–multiplicadores en $[E_D, p_D]$.

Pero como $D \subset B$, entonces $E_D \subset E_B$. Es más, por la desigualdad entre calibradores mencionada anteriormente, se tiene que la topología generada por p_D en E_D es más fina que la topología generada en E_D por la restricción de p_B a E_D.

Es decir, también se verifica que $\sum y_k$ es convergente por c_0–multiplicadores en $[E_B, p_B]$. Como $(\frac{1}{2^n})_n \in c_0$, resulta que la serie telescópica,

$$\sum_k \frac{1}{2^k} y_k \ = \ \sum_k (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$$

es convergente en $[E_B, p_B]$. Pero sus sumas parciales son de la forma,

$$\sum_{j=1}^{m} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) \ = \ x_{n_{m+1}} - x_{n_1}$$

Por tanto, la subsucesión (x_{n_k}) es p_B–convergente.

Finalmente, al tener una sucesión (x_n) p_B–Cauchy con una subsucesión p_B–convergente, concluímos que la propia sucesión (x_n) es p_B–convergente.

(2). Sea B un disco de Banach, con $B = \overline{acx(S(x_n))}$ y $\sum x_n$ incondicionalmente τ–Cauchy.

Por reducción al absurdo, supongamos que E_B tiene dimensión infinita y no tiene copia de c_0.

Como $S(x_n) \subset B$, $S(x_n)$ es un conjunto p_B–acotado, luego $\sigma(E_B, (E_B)')$–acotado, o lo que es igual, la serie $\sum x_n$es incondicionalmente $\sigma(E_B, (E_B)')$–Cauchy.

Puesto que E_B no tiene copia de c_0, por el teorema 2.2.5, se tiene que la serie $\sum x_n$es $\sigma(E_B,(E_B)')$–convergente por multiplicadores acotados y por el teorema de Orlicz–Pettis, p_B–convergente por multiplicadores acotados. Es decir, B es un conjunto p_B–compacto (sección 1.2).

Pero B es cerrado, luego coincide con la bola unidad cerrada de E_B y por Jarchow [31, p. 228], obtenemos que E_B debe tener dimensión finita, llegando así a contradicción. ■

El teorema anterior nos permite dar el correspondiente teorema análogo para la completitud local, del teorema 2.2.3 sobre la Σ–completitud.

Teorema 2.3.5 *Sea $[E,\tau]$ un espacio. Son equivalentes:*

(1) E es localmente completo.

(2) Para todo disco B "procedente de series", cualquier sucesión de Cauchy en $[E_B,p_B]$ tiene una subsucesión convergente en $[E_B,\tau|_{E_B}]$.

DEMOSTRACIÓN:

(1)$\Rightarrow$(2). Sea B un disco "procedente de series". Como E es localmente completo, B es un disco de Banach. Luego toda sucesión p_B–Cauchy es p_B–convergente. Puesto que la topología generada por p_B es más fina que la inducida en E_B por τ, concluímos que, de hecho, cualquier subsucesión es p_B–convergente, luego $\tau|_{E_B}$–convergente.

(2)$\Rightarrow$(1). Por el teorema anterior, basta probar que cualquier disco "procedente de series" B es un disco de Banach.

Sea (x_n) una sucesión p_B–Cauchy. Por hipótesis tiene una subsucesión (x_{n_k}) convergente en $[E_B,\tau|_{E_B}]$.

Por el lema de Bourbaki–Robertson, y puesto que (x_{n_k}), también es p_B–Cauchy, deducimos que (x_{n_k}) es p_B–convergente.

Al tener una sucesión (x_n) p_B–Cauchy con una subsucesión p_B–convergente, concluímos que (x_n) también es p_B–convergente. ■

Una cierta condición para obtener un recíproco del corolario, es la siguiente.

Teorema 2.3.6 *Sea E un espacio localmente completo. Si toda aplicación lineal débil continua de c_0 en E puede extenderse a una aplicación lineal continua de $[\ell_\infty, \sigma(\ell_\infty, \ell_1)]$ en $[E, \sigma(E, E')]$, entonces E es débil Σ–completo.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea $\sum x_n$ una serie débil incondicionalmente Cauchy. Por el teorema 2.3.3, $\sum x_n$ es convergente por c_0–multiplicadores y podemos definir la siguiente aplicación lineal y continua,

$$T : [c_0, \sigma(c_0, \ell_1)] \to [E, \sigma(E, E')]$$
$$a = (a_n) \mapsto T(a) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

Por hipótesis, T puede extenderse continuamente a

$$T_0 : [\ell_\infty, \sigma(\ell_\infty, \ell_1)] \to [E, \sigma(E, E')]$$

Por el teorema de Alaoglu, la bola unidad cerrada de ℓ_∞ es $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$–compacta y puesto que T_0 es continua, deducimos que $T_0(B_1(\ell_\infty))$ es $\sigma(E, E')$–compacto.

En particular,

$$T_0(B_1(\ell_\infty) \cap \phi) = T(B_1(\ell_\infty) \cap \phi) = B(x_n),$$

es relativamente $\sigma(E, E')$–compacto y, por tanto, $\sum x_n$ es $\sigma(E, E')$–convergente por multiplicadores acotados. ■

Los resultados anteriores nos indican que para separar la completitud local de la Σ–completitud aparecerán las copias de c_0.

Ejemplos

[1] Como la completitud local es una propiedad del par dual, todo espacio de Banach con copia de c_0 es débil localmente completo, pero por el teorema 2.2.5 no es débil Σ–completo.

[2] Los espacios E_B de dimensión infinita del teorema 2.3.4, por la observación anterior, también separan la débil completitud local de la débil Σ–completitud.

Las relaciones obtenidas entre los distintos conceptos de completitud, nos llevan a la siguiente cadena de implicaciones:

"sucesionalmente completo" $\Rightarrow$ "Σ–completo" $\Rightarrow$ "localmente completo"

Una condición para que coincidan los tres conceptos anteriores es la denominada condición estricta de Mackey (s.M.c.).

Un espacio E se dice que verifica (s.M.c.) si para todo subconjunto acotado A de E, existe un disco cerrado B tal que las topologías inducidas sobre A por E y E_B coinciden.

Todo espacio metrizable, verifica (s.M.c.). Es más, para los espacios metrizables los tres conceptos de completitud anteriores, coinciden con la completitud usual (Jarchow [31, p. 197]).

Pasemos por último a relacionar la Σ–completitud con los C–espacios y los O–espacios.

Los C–espacios fueron introducidos por L. Schwartz. Su principal resultado es que los espacios $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $0 \leq p < +\infty$ son C–espacios ([60]).

De modo similar, aunque en fecha más anterior, los O–espacios fueron introducidos por Matuszewska y Orlicz. Ellos probaron que una gran clase de espacios modulares son O–espacios [45].

Las relaciones entre los O–espacios y C–espacios han sido estudiadas en [7]. Aquí damos una caracterización general.

Teorema 2.3.7 *Sea E un espacio. Son equivalentes:*

(1) E es un O-espacio.

(2) E es un C-espacio y es localmente completo.

DEMOSTRACIÓN:

(1)⇒(2). Sea $\sum x_n$ una serie convergente por c_0–multiplicadores. Por tanto, es de Cauchy por c_0–multiplicadores y como E es un O–espacio, la serie converge. Es decir, E es un C–espacio.

A su vez, sea $\sum x_n$ una serie de Cauchy por c_0–multiplicadores. Para cada $(a_n) \in c_0$, la serie $\sum a_n x_n$ vuelve a ser de Cauchy por c_0–multiplicadores, pues $c_0 \cdot c_0 \subset c_0$. Y como E es un O–espacio, $\sum a_n x_n$ es convergente.

Por el teorema 2.3.3, concluimos que E es localmente completo.

(2)⇒(1). Sea $\sum x_n$ una serie de Cauchy por c_0–multiplicadores. Por el teorema 2.3.3, $\sum x_n$ es convergente por c_0–multiplicadores y por ser E un C–espacio, $\sum x_n$ es convergente. ∎

La conexión con la Σ–completitud es la siguiente.

Teorema 2.3.8 *Sea $[E,\tau]$ un espacio. Son equivalentes:*

(1) $[E,\tau]$ es un O-espacio.

(2) $[E,\tau]$ es un C-espacio y es localmente completo.

(3) $[E,\sigma(E,E')]$ es Σ-completo.

(4) $[E,\tau]$ es Σ-completo y $[E,\tau]$ no tiene copia de c_0.

DEMOSTRACIÓN:

(1)⇔(2). Teorema 2.3.7.

(1)⇒(3). Sea $\sum x_n$ una serie débil incondicionalmente Cauchy. Entonces $S(x_n)$ es un conjunto acotado, luego $\sum x_n$ es de Cauchy por c_0–multiplicadores. Por (1), $\sum x_n$ es τ–convergente y, en particular, es débilmente convergente.

(3)⇒(4). Si $[E, \sigma(E, E')]$ es Σ–completo, por el teorema de Orlicz–Pettis $[E, \tau]$ es Σ–completo. Finalmente, el teorema 2.2.5, prueba que $[E, \tau]$ no tiene copia de c_0.

(4)⇒(1). Por (4) y el teorema 2.2.5, obtenemos que E es débil Σ–completo.

Sea $\sum x_n$ una serie de Cauchy por c_0–multiplicadores. Por tanto, $S(x_n)$ es τ–acotado, luego débil acotado. Es decir, la serie $\sum x_n$ es débil incondicionalmente Cauchy. Como E es débil Σ–completo, y usando el teorema de Orlicz–Pettis, tenemos que $\sum x_n$ es τ–convergente por multiplicadores acotados, y en particular, τ–convergente. ∎

2.4 Otras propiedades

El teorema de Orlicz–Pettis, entre otras cosas, implica que la Σ–completitud es una propiedad que se mantiene si consideramos topologías más finas. De hecho, pueden obtenerse resultados mucho más generales en este sentido.

Teorema 2.4.1 *Sea $[E, \tau]$ un espacio Σ–completo. Si denotamos por E' el dual, entonces $[E, \alpha]$ es Σ–completo para toda topología localmente convexa Hausdorff tal que,*

$$\sigma(E, E') \leq \alpha \leq OP(\sigma(E, E'))$$

DEMOSTRACIÓN:

Basta considerar la definición de las topologías "$OP(\tau)$". ∎

Teorema 2.4.2 *Sean $[E,\tau]$, $[E,\alpha]$ espacios. Si $[E,\tau]$ es Σ–completo y α es más fina que τ y tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos τ–cerrados, entonces $[E,\alpha]$ es Σ–completo.*

DEMOSTRACIÓN:

Basta aplicar el lema de Bourbaki–Robertson. ∎

Las dos siguientes proposiciones son consecuencia inmediata de la definición de Σ–completitud. Omitimos las demostraciones.

Teorema 2.4.3 *Sea E un espacio Σ–completo y F un subespacio de E. Si F es cerrado, entonces F con la topología inducida por E es Σ–completo.*

Teorema 2.4.4 *Sea $(E_\alpha)_{\alpha\in A}$ una familia de espacios. Entonces $\prod_{\alpha\in A} E_\alpha$ es Σ–completo si y sólo si cada uno de los E_α es Σ–completo.*

El teorema anterior junto con Jarchow [31, p. 38], nos permite obtener el siguiente resultado.

Teorema 2.4.5 *El límite proyectivo de un sistema proyectivo de espacios Σ–completos es de nuevo un espacio Σ–completo.*

Finalizamos la sección probando que en el contexto de espacios de Banach "la propiedad de los tres espacios" se verifica para la débil Σ–completitud, o equivalentemente, para la propiedad de no tener copia de c_0.

Usaremos técnicas debidas a González, Onieva [26]. En el citado artículo, ellos prueban "la propiedad de los tres espacios" para otras clases de espacios de Banach.

Comenzamos probando un cierto resultado tipo "lifting" para series débil incondicionalmente Cauchy.

Teorema 2.4.6 *Sea F un subespacio cerrado de un espacio de Banach E y p la aplicación cociente sobre E/F. Entonces si M es débil Σ-completo, y $\sum x_n$ es una serie incondicionalmente $\sigma(E,E')$-Cauchy, tal que $\sum p(x_n)$ es débilmente convergente, entonces $\sum x_n$ es débilmente convergente en E.*

DEMOSTRACIÓN:

Denotemos por i la inclusión de F en E y sean π_E, π_F las inmersiones de E y F en sus respectivos duales. Sea a su vez, $\sum x_n$ una serie en las hipótesis del teorema.

Como E'' es débil*-sucesionalmente completo, existe $\alpha \in E''$ tal que,

$$\sigma(E'', E') - \sum_{n=1}^{\infty} \pi_E(x_n) = \alpha$$

Por tanto, $\alpha \in N(E)$.

Por otra parte, por hipótesis sabemos que $\sum p(x_n)$ converge débilmente a un cierto $d \in E/F$ y como p es sobre, existe $z \in E$ con $p(z) = d$. Denotemos $\overline{z} = \pi_E(z)$.

Evidentemente $p^{**}(z) = p^{**}(\alpha)$, luego $\overline{z} - \alpha \in Ker(p^{**})$. Puesto que p^{**} es la aplicación cociente sobre F^{00}, tenemos que,

$$\overline{z} - \alpha \in F^{00} = Ker(p^{**})$$

Es decir,

$$\overline{z} - \alpha \in F^{00} \cap N(E)$$

Como $N(E) \subset K(E)$, se tiene que,

$$\overline{z} - \alpha \in F^{00} \cap K(E) = i^{**}(K(F)),$$

por McWilliams [43].

Esto es, existe una sucesión (f_n) $\sigma(F, F')$-Cauchy tal que,

$$\overline{z} - \alpha = \sigma(E'', E') - \lim_{n\to\infty} i^{**}(\pi_F(f_n))$$

y por tanto,

$$f_n - \sum_{k=1}^{n} x_k \xrightarrow{n} 0$$

en la topología $\sigma(E, E')$.

La demostración del teorema 1.2.2, prueba que la serie $\sum x_n$ puede ser sustituida por una serie incondicionalmente $\sigma(F, F')$–Cauchy $\sum y_k$, con lo que obtenemos que $\overline{z} - \alpha$ es el límite de una serie incondicionalmente $\sigma(E'', E')$–Cauchy, con término general perteneciente al subespacio $i^{**}(\pi_F(F))$, i.e.,

$$\overline{z} - \alpha \in i^{**}(N(F))$$

Puesto que F es débil Σ–completo $\pi_F(F) = N(F)$, luego,

$$\overline{z} - \alpha \in i^{**}(\pi_F(F)) = \pi_E(F)$$

Como $\overline{z} \in \pi_E(E)$, se tiene que $\alpha \in \pi_E(E)$, y la serie $\sum x_n$ es $\sigma(E, E')$–convergente. ■

Recordamos que una clase de espacios de Banach $\mathcal{A}$ tiene la propiedad de los tres espacios si un espacio de Banach E pertenece a $\mathcal{A}$, siempre que exista un subespacio cerrado M de E tal que M y E/M pertenezcan a $\mathcal{A}$.

A la luz de esta definición, el enunciado del teorema anterior puede ser "reescrito" en la forma siguiente.

Teorema 2.4.7 *La clase de espacios de Banach débil Σ–completos, o equivalentemente que no tengan copia de c_0, tiene la propiedad de los tres espacios.*

Capítulo III

Σ–Completitud y teoremas de gráfica cerrada

3.1 Espacios Σ–tonelados

La mayoría de los conceptos de tonelación débil vienen caracterizados por un cierto tipo de completitud del espacio dual con la topología débil* (Pérez Carreras–Bonet [50, cp. 8]). Por analogía con esos resultados, definimos a continuación un nuevo concepto de tonelación débil usando la Σ–completitud: la Σ–tonelación.

Definición 3.1.1 *Sea E un espacio. Se dice que E es Σ–tonelado si el rango de cualquier serie incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy de E' es un equicontinuo.*

Puesto que un conjunto es un equicontinuo si y sólo si su envoltura absolutamente convexa lo es, las inclusiones probadas en el lema 1.1.1 muestran que un espacio E es Σ–tonelado, si y sólo si para cualquier serie incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy de E', el conjunto $B(x_n)$ es un equicontinuo.

En lo sucesivo, dado un concepto de completitud (π), diremos que un espacio E es dual (π)–completo si $[E', \sigma(E', E)]$ es (π)–completo.

Las relaciones entre la Σ–completitud y la Σ–tonelación quedan descritas en el siguiente teorema.

Teorema 3.1.1 *Sea $[E,\tau]$ un espacio. Entonces:*
(1) Si E es Σ–tonelado, E es dual Σ–completo.
(2) Si E es dual Σ–completo, $[E,\mu(E,E')]$ es Σ–tonelado.

DEMOSTRACIÓN:

(1). Sea $\sum x_n$una serie incondicionalmente $\sigma(E',E)$–Cauchy, luego en particular, $\sigma(E',E)$–Cauchy. Por hipótesis, el rango de la serie $S(x_n)$ es un equicontinuo de E, y por tanto existe un cierto entorno de cero U en E tal que $S(x_n) \subset U^\circ$. Por el lema de Alaoglu–Bourbaki se tiene que U° es un conjunto $\sigma(E',E)$–compacto, luego $\sigma(E',E)$–completo.

Puesto que la sucesión de sumas parciales $(\sum_{k=1}^{n} x_k)_n$ es de Cauchy y está contenida en $S(x_n) \subset U^\circ$, deducimos finalmente que la serie $\sum x_n$es $\sigma(E',E)$–convergente.

(2). Sea $\sum x_n$una serie incondicionalmente $\sigma(E',E)$–Cauchy. Como el espacio E es dual Σ–completo, la serie es $\sigma(E',E)$–convergente por multiplicadores acotados, y por tanto el conjunto $C = \overline{B(x_n)}^{\sigma(E',E)}$ es $\sigma(E',E)$–compacto, luego $\sigma(E',E)$–cerrado. Como además $B(x_n)$ es absolutamente convexo, C también lo es, y del teorema de la bipolar se tiene que $B(x_n)^{\circ\circ} \subset C$.

Recíprocamente, dado $z \in C$, sabemos por la sección 1.1 que

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

en la topología débil* de E', donde $(a_n) \in B_1(\ell_\infty)$. Puesto que las sumas parciales de dicha serie están en $B(x_n)$, su límite que es z debe pertenecer a $B(x_n)^{\circ\circ}$. Por tanto,

$$B(x_n)^{\circ\circ} = C$$

Es más, se verifica que

$$C^{\circ\circ} = B(x_n)^{\circ\circ\circ\circ} = (B(x_n)^\circ)^\circ = C$$

de donde, $B(x_n) \subset C = C^{\circ\circ}$.

Por otra parte, C° es la polar de un conjunto absolutamente convexo y $\sigma(E', E)$–compacto, es decir, es un entorno de cero de la topología de Mackey $\mu(E, E')$, y de la inclusión anterior obtenemos que el conjunto $B(x_n)$ es un equicontinuo de $[E, \mu(E, E')]$. ∎

La Σ–tonelación de un espacio está relacionada con una cierta topología polar que definimos a continuación.

Teorema 3.1.2 *Sea E un espacio y consideremos la siguiente familia de subconjuntos de E',*

$$\mathcal{S} = \{B(x_n) : \textstyle\sum x_n \textit{es una serie incondicionalmente } \sigma(E', E)\textit{-Cauchy de } E'\}$$

Entonces, las polares de los elementos de $\mathcal{S}$ forman una base de entornos de cero de una cierta topología localmente convexa Hausdorff sobre E, que denotaremos en adelante por τ^{Σ}.

DEMOSTRACIÓN:

Dada cualquier serie $\sum x_n$incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy, su rango es un conjunto débil* acotado de E', y por tanto $B(x_n)$ también es un conjunto débil* acotado. Es decir, la familia $\mathcal{S}$ está formada por subconjuntos débil* acotados de E' y para probar el teorema bastará ver que dicha familia es una familia polar y total respecto del par dual (E', E).

Dados $B(x_n)$, $B(y_n) \in \mathcal{S}$, puedo definir la serie en E' de término general (z_n) tal que,

$$z_{2n} := y_n, \quad z_{2n-1} := x_n \quad n \in \mathbb{N}$$

De la propia definición de la sucesión (z_n) obtenemos que,

$$B(x_n) \cup B(y_n) \subset B(z_n) \subset B(x_n) + B(y_n)$$

Como $B(x_n)$, $B(y_n)$ son débil* acotados, $B(z_n)$ también lo es, luego pertenece a $\mathcal{S}$. Es decir, la familia $\mathcal{S}$ está dirigida por inclusión.

Por otra parte, dados $B(x_n) \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, puedo definir la serie de término general,

$$y_n := \lambda x_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Evidentemente, $\sum y_n$ es débil* incondicionalmente Cauchy. Además,

$$\lambda B(x_n) = B(\lambda x_n) = B(y_n)$$

Finalmente, para cada $x \in E$, puedo considerar la siguiente serie débil* incondicionalmente Cauchy de E',

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n-1}} x$$

Por tanto, $B(\frac{1}{2^{n-1}}x) \in \mathcal{S}$. Además este tipo de conjuntos recubren E', es decir, la familia $\mathcal{S}$ es total. ∎

Veamos la relación con la Σ–tonelación.

Teorema 3.1.3 *Sea $[E,\tau]$ un espacio. Entonces E es Σ–tonelado si y sólo si τ es más fina que τ^{Σ}.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Rightarrow$). Sea $B(x_n) \in \mathcal{S}$, por ser Σ–tonelado, dicho conjunto es un equicontinuo, y existe por tanto un cierto entorno U de cero en E, tal que $B(x_n) \subset U^{\circ}$. De donde,

$$U \subset U^{\circ\circ} \subset B(x_n)^{\circ}$$

($\Leftarrow$). Sea $\sum x_n$una serie débil* incondicionalmente Cauchy de E'. Por la definición de τ^{Σ}, $B(x_n)^{\circ}$ es un entorno de cero de dicha topología, luego debe existir un entorno U de cero de τ tal que $U \subset B(x_n)^{\circ}$. De donde,

$$B(x_n) \subset B(x_n)^{\circ\circ} \subset U^{\circ}$$

Luego, $B(x_n)$ es un equicontinuo. ■

Pasamos a describir una base de seminormas para la topología τ^{Σ}.

Teorema 3.1.4 *Sea $[E,\tau]$ un espacio. Una base de seminormas para la topología τ^{Σ}, viene dada por,*

$$p_{(y_n)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n\rangle|, \quad x \in E$$

donde $\sum y_n$ recorre las series débil incondicionalmente Cauchy de E'.*

DEMOSTRACIÓN:

Basta calcular los calibradores de las polares de los elementos de la familia $\mathcal{S}$. Sea pues, $B(y_n) \in \mathcal{S}$. Entonces, dado $x \in E$,

$$p_{(y_n)}(x) = \sup\ \{|\langle x, a\rangle|\ : a \in B(y_n)\} = \cdots$$

$$\cdots = \sup\left\{|\langle x, \sum_{i\in\sigma} \alpha_i x_i\rangle|\ : \sigma \in P_f(\mathbb{N}),\ |\alpha_i| \le 1,\ \alpha_i \in \mathbb{K}\right\} \le \cdots$$

$$\cdots \le \sup\left\{\sum_{i\in\sigma} |\langle x, \alpha_i x_i\rangle|\ : \sigma \in P_f(\mathbb{N}),\ |\alpha_i| \le 1,\ \alpha_i \in \mathbb{K}\right\} \le \cdots$$

$$\cdots \le \sup\left\{\sum_{i\in\sigma} |\langle x, x_i\rangle|\ : \sigma \in P_f(\mathbb{N})\right\} \le \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n\rangle|$$

Puesto que para todo $r \in \mathbb{K}$ existe un elemento, que denotaremos por r^*, tal que,

$$r \cdot r^* = |r|,\ \text{con}\ |r^*| \le 1,$$

podemos encontrar una sucesión de elementos del conjunto donde se está tomando supremo, con límite la serie anterior, i.e.,

$$\sum_{j=1}^{n} \langle x, y_j\rangle^*\ y_j \in B(y_n), \quad \text{luego,}$$

$$|\sum_{j=1}^{n}\langle x,\ \langle x, y_j\rangle^* \ y_j\rangle| = \sum_{j=1}^{n}|\langle x, y_j\rangle| \xrightarrow{n} \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, y_n\rangle|$$

Luego, la seminorma en x, vale exactamente la suma de la serie anterior.■

Consecuencia inmediata del teorema anterior es que τ^{Σ} es la menor topología que hace continuas todas las aplicaciones lineales del tipo,

$$T : E \to \ell_1$$

$$x \mapsto T(x) := (\langle x, y_n\rangle)_n \ ,$$

donde $\sum y_n$ es cualquier serie débil* incondicionalmente Cauchy de E'. Basta observar que,

$$\|T(x)\|_1 \ = \ \sum_{n=1}^{\infty}|\langle x, y_n\rangle| \ = \ p_{(y_n)}(x)$$

Damos a continuación dos propiedades de la topología τ^{Σ}, una sobre conjuntos acotados y otra sobre convergencia de sucesiones.

Teorema 3.1.5 *Sea E un espacio y A un subconjunto de E. Entonces A es $\beta(E, E')$-acotado si y sólo si es τ^{Σ}-acotado.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Rightarrow$) Puesto que $\beta(E, E')$ es más fina que τ^{Σ}.

($\Leftarrow$) Supongamos que A no es $\beta(E, E')$–acotado. Esto implica que existe una sucesión (a_n) en A, y un tonel T en E con $a_n \notin n^3 T$, $n \in \mathbb{N}$.

Por Jarchow [31, p. 131], para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in E'$ tal que,

$$\langle a_n, u_n\rangle > n, \ \ \text{y} \ \ u_n \in (n^2 T)^{\circ} = \frac{1}{n^2}T^{\circ}$$

Como T° es débil* acotado, la serie $\sum u_n$ es débil* incondicionalmente Cauchy, luego $B(u_n)^{\circ}$ es un entorno de cero de τ^{Σ}. Sin embargo, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\langle \frac{1}{n} a_n, u_n \rangle > 1, \quad \text{luego} \quad \frac{1}{n} a_n \notin B(u_n)^{\circ} \quad , \text{ i. e., } \quad a_n \notin nB(u_n)^{\circ},$$

y, por tanto, A no es τ^{Σ}–acotado. ∎

Teorema 3.1.6 *Si $[E, \tau]$ es un espacio dual Σ-completo, la topología débil de E y la topologıa τ^{Σ} tienen las mismas sucesiones convergentes.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea (x_n) una sucesión débilmente nula de E, y sea $\sum y_n$ una serie débil* incondicionalmente Cauchy de E'.

Por el teorema 2.2.1, $\sum y_n$ es débil* convergente por multiplicadores acotados y por tanto la siguiente aplicación lineal es débilmente continua,

$$T : E \to \ell_1$$

$$x \mapsto T(x) := (\langle x, y_n \rangle)_n$$

Luego, de $x_n \xrightarrow{n} 0$ $(\sigma(E, E'))$, deducimos que $T(x_n) \xrightarrow{n} 0$ débilmente en ℓ_1. Ahora bien, por el lema de Schur está última sucesión tiende a cero en norma, es decir,

$$p_{(y_m)}(x_n) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} |\langle x_n, y_m \rangle| \;=\; \|T(x_n)\|_1 \xrightarrow{n} 0$$

Finalmente por el teorema 3.1.4,

$$\tau^{\Sigma} - \lim_{n \to \infty} x_n \;=\; 0$$

∎

El concepto de Σ–tonelación puede encajarse de modo natural entre otras clases conocidas de tonelación débil. Aquí trataremos, por un lado, los casos de la G–tonelación y ℓ_∞–tonelación, conceptos de tonelación asociados a la completitud sucesional, y por otro, la c_0–tonelación, concepto de tonelación asociado a la completitud local (ver Pérez Carreras–Bonet [50, cp. 4,8]).

Teorema 3.1.7 *Sea E un espacio. Entonces:*
(1) Si E es G–tonelado, entonces $[E, \mu(E, E')]$ es Σ–tonelado.
(2) Si E es Σ–tonelado, entonces $[E, \mu(E, E')]$ es c_0–tonelado.
(3) Si E es ℓ_∞–tonelado, entonces E es Σ–tonelado.

DEMOSTRACIÓN:

(1). Si E es G–tonelado, por Pérez Carreras–Bonet [50, p. 102], E es dual sucesionalmente completo, luego dual Σ–completo y por el teorema 3.1.1, deducimos que $[E, \mu(E, E')]$ es Σ–tonelado.
(2). Si E es Σ–tonelado, E es dual Σ–completo, luego dual localmente completo y por Jarchow [31, p. 250], $[E, \mu(E, E')]$ es c_0–tonelado.
(3). Sea $\sum x_n$una serie incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy. Por tanto, su rango $S(x_n)$ es un conjunto débil* acotado de E'. Además, es un conjunto numerable, pues puede escribirse como unión numerable de conjuntos numerables,

$$S(x_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i \in \sigma} x_i \ : \sigma \in P_f(\mathbb{N}),\ \mathrm{Card}(\sigma) = n \right\}$$

Finalmente, el teorema se deduce de Pérez Carreras–Bonet [50, p. 239]. ■

Imponiendo ciertas condiciones sobre el dual, pueden obtenerse algunos resultados recíprocos de los del teorema anterior.

Recordamos que un espacio $[E, \tau]$ se dice de Mackey, si $\tau = \mu(E, E')$.

Teorema 3.1.8 *Sea E un espacio de Mackey.*
(1) Si E es Σ–tonelado, entonces E es G–tonelado si y sólo si $[E', \sigma(E', E)]$ tiene la propiedad (u).

(2) Si E es c_0–tonelado, entonces E es Σ–tonelado si y sólo si $[E', \sigma(E', E'')]$ es Σ–completo.

DEMOSTRACIÓN:

(1). Es consecuencia de que para la topología débil la completitud sucesional equivale a tener la propiedad (u) y a la Σ–completitud (teoremas 1.2.1, 2.2.4), y aplicar Pérez Carreras–Bonet [50, p. 102].

(2). Por el teorema 3.1.1 , basta probar que:

$[E', \sigma(E', E)]$ es Σ–completo si y sólo si $[E', \sigma(E', E'')]$ es Σ–completo.

Por otra parte, esto último es consecuencia de este otro resultado:

Una serie es incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy si y sólo si es incondicionalmente $\sigma(E', E'')$–Cauchy.

En efecto, si $\sum x_n$es incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy, se tiene que $S(x_n)$ es $\sigma(E', E)$ acotado. Por Jarchow [31, p. 250], $[E', \sigma(E', E)]$ es localmente completo y por tanto $\beta(E', E) = \beta^*(E', E)$ (Jarchow [31, p. 197]). Por tanto, $S(x_n)$ es $\beta(E', E')$–acotado, luego $\sigma(E', E'')$–acotado y la serie $\sum x_n$es incondicionalmente $\sigma(E', E'')$–Cauchy. La otra implicación es inmediata. ■

Observaciones

[1] La demostración del punto (2), realmente indica que, si un espacio E es dual localmente completo, entonces E es dual Σ–completo si y sólo si $[E', \sigma(E', E'')]$ es Σ–completo.

[2] Por Kalton [32], puede darse un resultado como los del teorema anterior pero con la tonelación usual. En concreto,

> Si E es un espacio de Mackey Mazur $\beta(E, E')$–separable y Σ–tonelado, entonces E es tonelado.

Para asegurarnos de que hemos introducido una nueva clase de tonelación débil, damos algunos ejemplos de separación.

Ejemplos

[1] Σ*–tonelado* $\not\Rightarrow$ G*–tonelado.* Cualquier espacio de Mackey dual Σ–completo, no dual sucesionalmente completo (teorema 3.1.1, Pérez Carreras–Bonet [50, p. 102]). Por ejemplo: $[F', \mu(F', F)]$, donde F es un Banach cuasirreflexivo separable.

[2] c_0 *– tonelado* $\not\Rightarrow$ Σ *– tonelado.* Cualquier espacio de Mackey dual localmente completo, no dual Σ–completo (teorema 3.1.1, Jarchow [31, p. 250]). Por ejemplo: $[F', \mu(F', F)]$, donde F es un Banach con copia de c_0.

Finalizamos la sección dando algunos ejemplos de espacios Σ–tonelados.

Ejemplos

[1] $[J', \mu(J', J)]$, donde J es el espacio de James cuasirreflexivo (ver sección 2.3)

[2] $[E', \mu(E', E)]$ con E Banach sin copia de c_0 (teorema 2.2.5).

[3] Cualquier (DF)–espacio localmente completo, o más genéricamente todo espacio de Banach–Mackey quasi–$\aleph_0$–tonelado (ver Köthe [36, p. 396–341]).

Pues dada una serie $\sum x_n$incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy, su rango $S(x_n)$ es $\sigma(E', E)$–acotado, luego $\beta(E', E)$–acotado. Y por otra parte, $S(x_n)$ es numerable.

3.2 Teoremas maximales

Con el propósito de establecer teoremas de gráfica cerrada maximales para espacios tonelados, fueron introducidos los siguientes Γ_r–espacios (ver Valdivia

[68, p. 116–120]).

Definición 3.2.1 *Sea E un espacio. Se dice que E es un Γ_r-espacio si todo subespacio cuasicompleto de $[E^*, \sigma(E^*, E)]$ que corte a E' en un subespacio $\sigma(E', E)$-denso, contiene a E'.*

También, en Valdivia [68, p. 118], puede verse que todo espacio de Banach, de hecho todo espacio B_r–completo, es un Γ_r–espacio.

M. Valdivia en [67], introdujo los correspondientes Λ_r–espacios, para analizar la clase maximal para un teorema de gráfica cerrada con la clase de los espacios dual localmente completos como clase de partida. En dicho artículo se prueba que todo espacio de Banach reflexivo es un Λ_r–espacio.

En esta línea, introducimos el concepto análogo a los Λ_r–espacios y los Γ_r–espacios, para obtener teoremas de gráfica cerrada maximales teniendo en el conjunto de partida espacios dual Σ–completos.

Definición 3.2.2 *Sea E un espacio. Se dice que E es un Σ_r-espacio si todo subespacio Σ-completo de $[E^*, \sigma(E^*, E)]$ que intersecte a E' en un subespacio $\sigma(E', E)$-denso, contiene a E'.*

La relación entre estos tres conceptos se refleja en la siguiente cadena de implicaciones,

$$\Lambda_r\text{–espacio} \;\Rightarrow\; \Sigma_r\text{–espacio} \;\Rightarrow\; \Gamma_r\text{–espacio}$$

A continuación, vamos a obtener clases de espacios que estén contenidos en los Σ_r–espacios, y posteriormente clases que los contengan.

Teorema 3.2.1 *Sea $[E, \tau]$ un espacio. Si $[E', \mu(E', E)]$ es metrizable, entonces E es un Σ_r-espacio con cualquier topología compatible con τ.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea H un subespacio arbitrario de E^*, $\sigma(E^*,E)$–Σ–completo, y tal que se verifique $\overline{H\bigcap E'}^{\sigma(E',E)} = E'$.

Luego dado $z \in E'$, se tiene que,

$$z \in \overline{H\bigcap E'}^{\sigma(E',E)} = \overline{H\bigcap E'}^{\mu(E',E)}$$

Por la metrizabilidad de la topología $\mu(E',E)$, existe una sucesión (y_n) de elementos de $H\bigcap E'$ tal que,

$$z = \mu(E',E)\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n$$

Es más, si denotamos por q la F–norma que genera la topología $\mu(E',E)$, se tiene que la sucesión (y_n) es q–Cauchy, y puedo obtener una sucesión estrictamente creciente (n_k) de naturales tales que,

$$q(y_{n_{k+1}} - y_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Si denotamos $z_k := y_{n_{k+1}} - y_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, se tiene que la serie $\sum z_n$ es F_q–absolutamente Cauchy, luego incondicionalmente $\mu(E',E)$–Cauchy, por tanto incondicionalmente $\mu(E^*,E)$–Cauchy y, en particular, se tiene que incondicionalmente $\sigma(E^*,E)$–Cauchy.

Pero, puesto que H es $\sigma(E^*,E)$–Σ–completo, la serie $\sum z_n$ es $\sigma(E^*,E)$–convergente a un cierto elemento $h \in H$.

Por otra parte, es claro que $\sum z_k$ es una serie telescópica $\mu(E',E)$–convergente a $z - y_{n_1}$ y, en particular $\sigma(E',E)$–convergente a $z - y_{n_1}$.

Finalmente, por la unicidad del límite, $z - y_{n_1} = h \in H$, de donde $z \in H$, y por tanto concluimos que $E' \subset H$. ∎

Veamos algunos ejemplos particulares de este teorema.

Son Σ_r–espacios los siguientes espacios:

- Banach reflexivos; pues para estos espacios E se da la igualdad $\beta(E', E) = \mu(E', E)$, y se tiene que la mencionada topología fuerte es la topología que genera la norma del dual.

- El espacio dual de un espacio metrizable E con cualquier topología compatible con el par dual (E', E).

- Todo espacio semirreflexivo que admita una sucesión fundamental de acotados (Jarchow [31, p. 257]). Por ejemplo, todo (df)–semirreflexivo (Jarchow [31, p. 257]).

Otra clase distinta de Σ_r–espacios, viene dada en el siguiente resultado.

Teorema 3.2.2 *Sea $[E, \tau]$ un espacio. Si E es un espacio de Schwartz B_r–completo, entonces E es un Σ_r–espacio.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea H un subespacio de E^*, $\sigma(E^*, E)$–Σ–completo y tal que $H \bigcap E'$ es $\sigma(E', E)$–denso en E'. Veamos que es $H \bigcap E'$ es $\sigma(E', E)$–cerrado.

Como E es B_r–completo, bastará probar que para todo entorno de cero U de τ, $H \bigcap U^\circ$ es $\sigma(E', E)$–cerrado. Sea pues $z \in \overline{H \bigcap U^\circ}^{\sigma(E',E)}$.

Puesto que $[U^\circ, \sigma(E', E)|_{U^\circ}]$ es metrizable (Jarchow [31, p. 202]), podemos obtener una sucesión (x_n) en $H \bigcap U^\circ$ tal que z es su $\sigma(E', E)$–límite.

Por otra parte, aplicando Jarchow [31, p. 214], existe $V \subset U$ tal que, si denotamos por $[(E')_{V^\circ}, p_{V^\circ}]$ el espacio normado que genera el disco V° de E', se tiene que las topologías inducidas sobre U° por la topología débil* de E' y la topología generada por el calibrador de V° coinciden. Esquemáticamente,

$$\sigma(E', E) \mid_{U^\circ} \equiv p_{V^\circ} \mid_{U^\circ}$$

Por tanto podemos deducir que,

$$z = p_{V^\circ} - \lim_{n \to \infty} x_n$$

Luego, puedo extraer una sucesión estrictamente creciente (n_k) de naturales tales que,

$$p_{V^\circ}(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Si denotamos $z_k := x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$, $k \in \mathbb{N}$, se tiene que la serie $\sum z_n$ es absolutamente p_{V°–Cauchy, luego incondicionalmente p_{V°–Cauchy y por tanto, incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy.

Pero, puesto que H es $\sigma(E^*, E)$–Σ–completo, la serie $\sum z_n$ es $\sigma(E^*, E)$–convergente a un cierto elemento $h \in H$.

Por otra parte, es claro que $\sum z_k$ es una serie telescópica $\sigma(E', E)$–convergente a $z - y_{n_1}$.

Finalmente, por la unicidad del límite $z - y_{n_1} = h \in H$, de donde $z \in H$, y por tanto concluímos que $E' \subset H$. ■

Tras obtener algunas condiciones suficientes para ser un Σ_r–espacio, pasamos a dar una condición necesaria.

Teorema 3.2.3 *Sea $[E, \tau]$ un espacio dual Σ–completo. Si E es un Σ_r–espacio, entonces E es semirreflexivo o $[E', \beta(E', E)]$ tiene un subespacio isomorfo a $[c_0, \| \|_\infty]$.*

DEMOSTRACIÓN:

Probaremos, de hecho, el recíproco del teorema. Es decir, supongamos que E no es semirreflexivo y $[E', \beta(E', E)]$ no tiene copia de $[c_0, \| \|_\infty]$ y veamos que E no es un Σ_r–espacio.

Razonemos por reducción al absurdo, i. e., supongamos que el espacio E es un Σ_r–espacio.

Como E no es semirreflexivo existe $u \in E'' \backslash \pi(E)$ $(u \neq 0)$. Consideremos el hiperplano de E' definido por $F := Ker(u) = \{x \in E' \ : \ u(x) = 0\}$.

Puesto que u pertenece al bidual, F es $\beta(E', E)$–cerrado, y como no está en $\pi(E)$ es $\sigma(E', E)$–denso en E'. Además, como $u \neq 0$, se tiene que,

$$F \neq E' \text{ (}F\text{es un subespacio propio)}$$

Si probáramos que F es $\sigma(E^*, E)$–Σ–completo, o lo que es igual ($F \subset E'$), que F es $\sigma(E', E)$–Σ–completo, el teorema estaría probado , pues obtendríamos que E no es Σ_r–espacio y llegaríamos a contradicción.

Sea pues $\sum x_n$una serie incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy con término general $x_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, el conjunto $S(x_n)$ es $\sigma(E', E)$–acotado, pero por hipótesis, E es dual Σ–completo, luego dual localmente completo y se tiene que $S(x_n)$ es $\beta(E', E)$–acotado. Es decir, la serie $\sum x_n$es $\beta(E', E)$–Cauchy por c_0–multiplicadores, luego incondicionalmente $\sigma(E', E'')$–Cauchy.

Por otra parte, como E es dual Σ–completo, por el teorema 2.4.2, se tiene que $[E', \beta(E', E)]$ es Σ–completo y puesto que por hipótesis no tiene copia de c_0, el teorema 2.2.5 nos dice $[E', \sigma(E', E'')]$ es Σ–completo y por tanto la serie $\sum x_n$es $\sigma(E', E'')$–convergente por multiplicadores acotados. Finalmente, por el teorema de Orlicz–Pettis, la serie $\sum x_n$es $\beta(E', E)$–convergente por multiplicadores acotados, en principio a elementos de E'.

Pero puesto que F era $\beta(E', E)$–cerrado, se tiene que $\sum x_n$es $\beta(E', E)$–convergente por multiplicadores acotados a elementos de F, y obtenemos finalmente que dicha serie es $\sigma(E', E)$–convergente en F. ■

Pasamos a dar, a continuación el teorema general de gráfica cerrada mencionado al principio de la sección. Seguiremos las ideas usadas por Valdivia en [67], para obtener el teorema ánalogo para Λ_r–espacios y espacios dual localmente completos.

Teorema 3.2.4 *Sean E, F espacios y T una aplicación lineal de E en F. Si E es dual Σ–completo, F un Σ_r–espacio y T tiene gráfica cerrada, entonces T es $\sigma(E, E') - \sigma(F, F')$–continua.*

DEMOSTRACIÓN:

Consideremos el subespacio de E^*,

$$L := \{f \in F^* \ : T^*(f) \in E'\}$$

Denotemos por $L_T := L \bigcap F'$. Por tener T gráfica cerrada, se tiene que L_T es $\sigma(F', F)$–denso (Ptak [54]).

Si probáramos que L es un subespacio $\sigma(F^*, F)$–Σ–completo, al ser F un Σ_r–espacio, se tendría que $F' \subset L$, luego $L_T = F'$ y por Jarchow [31, p. 161] concluiríamos que T es débilmente continua.

Por tanto, es suficiente con probar la débil* Σ–completitud de L.

Sea pues, (y_n) una sucesión de elementos de L, tal que la serie $\sum y_n$ es incondicionalmente $\sigma(F^*, F)$–Cauchy. Como $[F^*, \sigma(F^*, F)]$ es completo, existe $y \in F^*$ tal que,

$$y = \ \sigma(F^*, F)\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

Bastará ver que $y \in L$.

Teniendo en cuenta la continuidad de la aplicación,

$$T^* : [F^*, \sigma(F^*, F)] \to [E^*, \sigma(E^*, E)]$$

concluímos que la serie $\sum T^*(y_n)$ es incondicionalmente $\sigma(E^*, E)$–convergente a $T^*(y)$.

Pero, por definición de L, para todo $n \in \mathbb{N}$, $T^*(y_n)$ pertenece a E'. Es decir, la serie $\sum T^*(y_n)$ es incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy y por ser E dual Σ–completo, incondicionalmente $\sigma(E', E)$–convergente a un cierto $z \in E'$.

Por último, la unicidad del límite nos asegura que $T^*(y) = z \in E'$, de donde $y \in L$. ■

Apliquemos el teorema anterior a $[E', \mu(E', E)]$ con E espacio de Banach con dual separable.

Corolario 3.2.1 *Sea $[E, \tau]$ un espacio dual Σ-completo y F un espacio de Banach con $[F', \beta(F', F)]$ separable. Entonces toda aplicación lineal de E en F' con gráfica $\tau - \mu(F', F)$-cerrada, es débilmente sucesionalmente continua (ahora F' dotado con la norma).*

DEMOSTRACIÓN:

Sea T una aplicación lineal de E en F' en las correspondientes hipótesis del corolario.

Como E es dual Σ-completo y $[F', \mu(F', F)]$ es un Σ_r-espacio, se tiene que T es $\sigma(E, E') - \sigma(F', F)$-continua, luego $\mu(E, E') - \mu(F', F)$-continua y por Jarchow [31, p. 207], $\mu(E, E') - \beta(F', F)$-sucesionalmente continua. ■

Comprobemos que, en efecto, los Σ_r-espacios son una clase maximal en el conjunto de llegada para teoremas de gráfica cerrada con espacios dual Σ-completos en el conjunto de partida.

Teorema 3.2.5 *Sea $[F, \tau]$ un espacio. Son equivalentes:*
(1) F es un Σ_r-espacio.
(2) Para todo espacio E Σ-tonelado y toda aplicación lineal T de E en F con gráfica cerrada, T es $\sigma(E, E') - \sigma(F, F')$-continua.
(3) Para todo espacio E dual Σ-completo y toda aplicación lineal T de E en F con gráfica cerrada, T es $\sigma(E, E') - \sigma(F, F')$-continua.

DEMOSTRACIÓN:

(1)$\Rightarrow$(3) Por el teorema 3.2.4.

(3)$\Rightarrow$(2) Por el teorema 3.1.1.

(2)$\Rightarrow$(1) Supongamos que F no es un Σ_r-espacio. Entonces existe un subespacio G de F^* $\sigma(F^*, F)$-Σ-completo tal que $G \bigcap F'$ es $\sigma(F', F)$-denso y sin embargo $G \bigcap F' \neq F'$.

Por la propiedad de densidad de $G \bigcap F'$, se tiene que (G, F) forman un par dual. Además $[G, \sigma(G, F)]$ es Σ–completo, luego por el teorema 3.1.1, el espacio $[F, \mu(F, G)]$ es Σ–tonelado.

Consideremos la aplicación identidad,

$$id : [F, \mu(F, G)] \to [F, \tau]$$

Por la débil* densidad de,

$$F' \bigcap G = F' \bigcap (id^*)^{-1}(G),$$

deducimos que id tiene gráfica cerrada ([54]).

Pero, por otra parte, como $G \bigcap F' \neq F'$, id no es débilmente continua, y llegamos a contradicción. ■

Para finalizar, damos un resultado que relaciona los Σ_r–espacios y los espacios Σ–tonelados.

Teorema 3.2.6 *Sea $[E, \tau]$ un espacio. Si E es Σ_r–espacio y Σ–tonelado, entonces E es B_r–completo.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea F un subespacio de E', $\sigma(E', E)$–denso y tal que para todo entorno U de cero de τ se verifique que $F \bigcap U^\circ$ es $\sigma(E', E)$–cerrado.

Si F fuera $\sigma(E', E)$–Σ–completo, como E es un Σ_r–espacio se tendría que $E' = F$ y el teorema estaría probado (Jarchow [31, p. 183]).

Sea pues, $\sum x_n$una serie incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy con término general $x_n \in F$, $n \in \mathbb{N}$.

Como E es Σ–tonelado, se tiene que $S(x_n)$ es un equicontinuo, luego existe un cierto entorno U de cero de τ tal que $S(x_n) \subset U^\circ$. Por el lema de Alaoglu–Bourbaki U° es $\sigma(E', E)$–compacto, luego $\sigma(E', E)$–completo. Como las sumas parciales de la serie $\sum x_n$están contenidas en U° deducimos que dicha serie es $\sigma(E',E)$–convergente a $x \in U^\circ$. Pero, por hipótesis $F \bigcap U^\circ$ es $\sigma(E',E)$–cerrado, luego $x \in F$. ■

3.3 Teoremas mixtos con ℓ_1

Los resultados de la sección anterior, nos van a permitir establecer un teorema *mixto* de gráfica cerrada para aplicaciones lineales que tienen como espacio de llegada, ℓ_1. Por *mixto*, queremos indicar que la topología usada para el grafo se refiere al par dual (E',E), y que la topología usada para la continuidad se refiere al par dual (E',E'').

Usando una condición mixta en el sentido anterior, Popoola, Tweddle [53], dan una caracterización de los espacios ℓ_∞–tonelados que enunciamos a continuación.

Teorema 3.3.1 *Sea E un espacio. Las condiciones siguientes son equivalentes:*
(1) E es ℓ_∞–tonelado.
(2) Sea $T : E \to F$ una aplicación lineal tal que F es el dual fuerte de un espacio de Banach separable H y tal que la gráfica de T es cerrada en $E \times [F, \sigma(F, H)]$. Entonces T es continua.
(3) La misma afirmación que en (2) tomando $F := \ell_\infty$ y $H := \ell_1$.

Veamos que puede obtenerse un resultado parecido al teorema anterior con los espacios dual Σ–completos.

Teorema 3.3.2 *Sea E un espacio. Son equivalentes:*
(1) E es dual Σ–completo.
(2) Toda aplicación lineal de E en $[\ell_1, \mu(\ell_1, c_0)]$ que tenga gráfica cerrada, es $\sigma(E,E') - \sigma(\ell_1, \ell_\infty)$–continua.

(3) Para cualquier subespacio denso H de c_0, toda aplicación lineal de E en $[\ell_1, \mu(\ell_1, H)]$ œ[Acon gráfica cerrada, es $\sigma(E, E') - \sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-continua.

(4) Toda aplicación lineal de E en $[\ell_1, \mu(\ell_1, \phi)]$ que tenga gráfica cerrada, Aes $\sigma(E, E') - \sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-continua.

(5) Toda aplicación lineal de E en $[F', \mu(F', F)]$ que tenga gráfica cerrada, es débilmente continua, donde F es cualquier espacio de Banach separable sin copia de ℓ_1 y con la propiedad (u).

(6) Toda aplicación lineal de E en $[F', \mu(F', F)]$ que tenga gráfica cerrada, es débilmente continua, donde F es cualquier espacio de Banach con base incondicional y sin copia de ℓ_1.

DEMOSTRACIÓN:

(1) $\Rightarrow$ (2). Sea T una aplicación en las correspondientes hipótesis de (2).

Puesto que E es dual Σ–completo, $[c_0, \mu(c_0, \ell_1)]$ es metrizable y usando los teoremas 2.2.4 y 2.2.1, deducimos que T es $\sigma(E, E') - \sigma(\ell_1, c_0)$–continua.

Esto implica, en particular, que $T^*(e_n) \in E'$, $n \in \mathbb{N}$. Puesto que para cada $x \in E$, podemos escribir,

$$T(x) \;=\; (\langle T(x), e_n\rangle)_n \;=\; (\langle x, T^*(e_n)\rangle)_n \ ,$$

la serie $\sum T^*(e_n)$ es incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy.

Finalmente, por ser E dual Σ–completo, $\sum T^*(e_n)$ es $\sigma(E', E)$–convergente por multiplicadores acotados, i. e., $T^*(\ell_\infty) \subset E'$, luego la aplicación T es $\sigma(E, E') - \sigma(\ell_1, \ell_\infty)$–continua.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sea $\sum x_n$una serie débil* incondicionalmente Cauchy de E'. Esto significa que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_n\rangle| < +\infty, \quad \text{para todo } y \in E$$

Luego, podemos definir la siguiente aplicación lineal,

$$T : E \to \ell_1$$

$$y \mapsto T(y) := (\langle y, x_n \rangle)_n$$

Veamos que T tiene gráfica cerrada en $E \times [\ell_1, \mu(\ell_1, c_0)]$. Consideremos las siguientes redes,

$$\begin{cases} x_\alpha \xrightarrow{\alpha} 0 & (\text{en } E) \\ T(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha} z = (z_n) & (\text{en } [\ell_1, \mu(\ell_1, c_0)]) \end{cases}$$

Ahora bien, como $e_k \in c_0,\ k \in \mathbb{N}$,

$$\langle T(x_\alpha), e_k \rangle \ \xrightarrow{\alpha} z_k$$

Por otra parte $T^*(e_k) = x_k \in E'$, luego

$$\langle T(x_\alpha), e_k \rangle \ = \ \langle x_\alpha, T^*(e_k) \rangle \ \xrightarrow{\alpha} 0$$

Es decir, $z_k = 0,\ k \in \mathbb{N}$, luego $z = 0$.

Por tanto, aplicando (2), deducimos que T es débilmente continua, de donde su adjunta,

$$T^* : [\ell_\infty, \sigma(\ell_\infty, \ell_1)] \to [E', \sigma(E', E)]$$

es continua, y por tanto la serie $\sum x_n$ es débil* convergente en E'.

(1) $\Rightarrow$ (3). Sea T una aplicación en las correspondientes hipótesis de (3), con H un subespacio denso arbitrario de c_0.

Puesto que E es dual Σ–completo, $[H, \mu(H, \ell_1)]$ es metrizable (Köthe [36, p. 279]), y usando los teoremas 2.2.4 y 2.2.1, deducimos que T es $\sigma(E, E') - \sigma(\ell_1, H)$–continua.

Además, por la densidad de H, para cada e_k, existe una sucesión $(h_n^k)_n$ de elementos de H tal que la serie $\sum_n h_n^k$ es incondicionalmente $\sigma(c_0, \ell_1)$–convergente a e_k (ver la demostración del teorema 2.2.1).

Luego, por la continuidad de la adjunta de T, obtenemos que $\sum_n T^*(h_n^k)$ es incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy, y al ser E dual Σ–completo, incondicionalmente $\sigma(E', E)$–convergente a $z_k \in E'$.

Por otra parte, la misma serie $\sum_n T^*(h_n^k)$ es incondicionalmente $\sigma(E^*, E)$–convergente a $T^*(e_k)$. De donde, por la unicidad del límite, deducimos que

$T^*(e_k) = z_k \in E'$. A partir de este punto, el resto del razonamiento sigue como en la implicación (1) $\Rightarrow$ (2).

(3) $\Rightarrow$ (4) Es un caso particular.

(3) $\Rightarrow$ (2) Es un caso particular.

(4) $\Rightarrow$ (2) La demostración es idéntica a (1) $\Rightarrow$ (2), cambiando c_0 por ϕ, puesto que $e_n \in \phi$, $n \in \mathbb{N}$.

(5) $\Rightarrow$ (2), (6) $\Rightarrow$ (2). Pues c_0 tiene base incondicional, luego también es separable y tiene la propiedad (u) (Singer [62, p. 445]). Además no tiene copia de ℓ_1, por tener dual separable (Jarchow [31, pp. 310–312]).

(5) $\Rightarrow$ (6). Todo espacio de Banach con base incondicional tiene la propiedad (u) (Singer [62, p. 445]).

(1) $\Rightarrow$ (5). Sea T una aplicación de E en F' en las correspondientes hipótesis de (5).

Puesto que E es dual Σ–completo, $[F, \mu(F, F')]$ es metrizable, y usando los teoremas 2.2.4 y 2.2.1, deducimos que T es $\sigma(E, E') - \sigma(F', F)$–continua.

Consideremos la aplicación anterior en la forma,

$$T : [E, \sigma(E, E')] \to [F', \sigma(F', F'')]$$

La aplicación T así considerada tiene gráfica cerrada, gracias a que hemos probado anteriormente que T es $\sigma(E, E') - \sigma(F', F)$–continua. Esto implica, por Ptak [54], que el subespacio de F'',

$$L = \{f \in F'' : T^*(f) \in E'\}$$

es denso en $[F'', \sigma(F'', F')]$.

La $\sigma(E, E') - \sigma(F', F)$–continuidad de T, también muestra que $\pi(F) \subset L$. Es decir, tenemos que,

$$\pi(F) \subset L \subset F''$$

Dado $z \in F''$, por Diestel [14, p. 215], existe una sucesión (x_n) de elementos de F, tal que,

$$z = \sigma(F'', F') - \lim_{n \to \infty} \pi(x_n)$$

Además, F tiene la propiedad (u), luego existe una serie $\sum y_n$ incondicionalmente $\sigma(F, F')$–Cauchy, tal que,

$$x_n - \sum_{k=1}^{n} y_k \xrightarrow{n} 0 \quad \text{(en la topología } \sigma(F, F'))$$

Puesto que $(\pi(x_n))$ es $\sigma(F'', F')$–convergente a z, se tiene que la serie $\sum \pi(y_n)$ también es $\sigma(F'', F')$–convergente a z.

Es decir, $N(F) = F''$.

Si probáramos que para cualquier serie $\sum f_n$ incondicionalmente $\sigma(F'', F')$–convergente con $f_n \in L$, $n \in \mathbb{N}$, su suma también pertenece a L, puesto que $N(F) = F''$ y $\pi(F) \subset L$, se tendría que $F'' \subset L$, luego $L = F''$, y por Jarchow [31, p. 161], obtendríamos que T es $\sigma(E, E') - \sigma(F', F'')$–continua, y la implicación estaría probada.

Sea pues, (f_n) una sucesión de elementos de L tal que la serie $\sum f_n$ es $\sigma(F'', F')$–convergente a $f \in F''$.

Puesto que la adjunta de T,

$$T^* : [F'', \sigma(F'', F')] \to [E^*, \sigma(E^*, E)]$$

es continua, la serie $\sum T^*(f_n)$ es incondicionalmente $\sigma(E^*, E)$–convergente a $T^*(f)$.

Pero, por definición de L, para todo $n \in \mathbb{N}$, $T^*(f_n)$ pertenece a E'. Es decir, la serie $\sum T^*(f_n)$ es incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy y por ser E dual Σ–completo, incondicionalmente $\sigma(E', E)$–convergente a $z \in E'$.

Por último, la unicidad del límite nos asegura que $T^*(f) = z \in E'$, de donde $f \in L$. ∎

Observaciones

[1] El mismo razonamiento empleado en (2)⇒(1) puede usarse para probar el siguiente resultado más fuerte,

> Sea $[E, \tau]$ un espacio.
>
> Si toda aplicación lineal de E en ℓ_1 con gráfica $\tau - \| \|_1$–cerrada es débilmente continua, entonces E es dual Σ–completo.

El recíproco de este resultado, que en el fondo no es sino probar que ℓ_1 es un Σ_r–espacio, no sabemos si es cierto.

[2] La parte final del razonamiento de la implicación (1)⇒(2) , muestra implícitamente el siguiente resultado,

> Sea E un espacio dual Σ–completo y T una aplicación lineal de E en ℓ_1. Entonces, T es débilmente continua si y sólo si se verifica que $T^*(e_n) \in E'$, $n \in \mathbb{N}$.

[3] Los espacios de Banach que aparecen en los puntos (5) y (6) han sido considerados en el contexto de cuando un espacio de Banach separable tiene dual separable (Diestel [14, p. 214]). En concreto, para los espacios de (5) es cierto (Diestel [14, p. 214]), y para los espacios de (6) no lo es [38].

[4] Los espacios de Banach E separables, sin copia de ℓ_1 y con la propiedad (u), que son espacios duales, son reflexivos:

> Supongamos que $E = F'$, donde F es un cierto espacio de Banach. Por el teorema 1.2.3, F' no tiene copia de ℓ_∞, luego por Diestel [14, p. 48] no tiene copia de c_0 , y por los teoremas 2.2.5, 2.2.4 y 1.2.1, F' es débilmente sucesionalmente completo. Finalmente por Gonzalez, Onieva [26], deducimos que F' es un espacio de Grothendieck. Ahora bien, es conocido (Wilansky [69, p. 244]), que todo espacio de Grothendieck separable es reflexivo.

Veamos que la equivalencia de los dos primeros puntos del teorema anterior puede extenderse a espacios Σ–tonelados.

Teorema 3.3.3 *Sea $[E,\tau]$ un espacio. Son equivalentes:*
(1) E es Σ-tonelado.
(2) Toda aplicación lineal de E en $[\ell_1, \mu(\ell_1, c_0)]$ con gráfica cerrada, es $\tau - \| \|_1$-continua.

DEMOSTRACIÓN:

(1)$\Rightarrow$(2). Consideremos una aplicación $T: E \to \ell_1$ en las correspondientes hipótesis de (2).

Puesto que todo espacio Σ–tonelado es dual Σ–completo, por el teorema anterior deducimos que T es $\sigma(E,E') - \sigma(\ell_1, \ell_\infty)$–continua, luego su adjunta T^* es $\sigma(\ell_\infty, \ell_1) - \sigma(E', E)$–continua.

Por tanto,

$$T^*(B_1(\ell_\infty)) = \{T^*(a) \; : \; a = (a_n) \in B_1(\ell_\infty)\} = \cdots$$

$$\cdots = \left\{ \sigma(\ell_\infty, \ell_1) - \sum_{n=1}^{\infty} a_n T^*(e_n) \; : |a_n| \leq 1, \; n \in \mathbb{N} \right\} = \overline{B(\; T^*(e_n)\;)}^{\sigma(E',E)}$$

De hecho, se tiene que,

$$\overline{B(\; T^*(e_n)\;)}^{\sigma(E',E)} = B(\; T^*(e_n)\;)^{\circ\circ}$$

(ver la demostración del teorema 3.1.1).

Es más, por Schaefer [59, p. 134], se tiene que

$$T(\; B(T^*(e_n))^\circ \;) \subset B_1(\ell_1)$$

Ahora bien, por hipótesis E es Σ–tonelado, luego existe U entorno de cero de τ tal que $B(\; T^*(e_n)\;) \subset U^\circ$, luego

$$T(U) \subset T(U^{\circ\circ}) \subset T(\; B(T^*(e_n))^\circ \;) \subset B_1(\ell_1),$$

es decir, T es $\tau - \| \|_1$–continua.

(2)⇒(1). Sea $\sum x_n$una serie incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy.

Entonces, podemos definir la siguiente aplicación lineal,

$$T: \ E \to \ell_1$$

$$y \mapsto T(y) := (\langle y, x_n \rangle)_n$$

Un razonamiento análogo al empleado en la implicación correspondiente del teorema anterior, muestra que T tiene gráfica $\tau - \| \|_1$–cerrada.

Por (1), T es $\tau - \| \|_1$–continua y podemos encontrar un entorno U de cero de τ, tal que $T(U) \subset B_1(\ell_1)$. Es decir, para todo $u \in U$, se tiene que $\|T(u)\|_1 \leq 1$.

Sea $\sum_{i\in\sigma} x_i$, $\sigma \in P_f(\mathbb{N})$, un elemento arbitrario de $S(x_n)$. Entonces, dado $u \in U$,

$$|\langle \sum_{i\in\sigma} x_i, u\rangle| \leq \sum_{i\in\sigma} |\langle x_i, u\rangle| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n, u\rangle| = \|T(u)\|_1 \leq 1$$

Es decir, $S(x_n) \subset U^\circ$, luego $S(x_n)$ es un equicontinuo de E. ■

El siguiente resultado muestra que los espacios de sucesiones ℓ_1 y bv_0 pueden intercambiarse en el espacio de llegada para teoremas de gráfica cerrada.

Las sucesiones de variación acotada normalizadas (bv_0), son aquellas sucesiones nulas $x = (x_n)$ tales que,

$$\|x\|_{bv_0} = \sum_{n=1}^{\infty} | \ x_{n+1} - x_n| < +\infty$$

Teorema 3.3.4 *Sea $[E, \tau]$ un espacio. Son equivalentes:*
(1) Toda aplicación lineal con gráfica cerrada de E en ℓ_1 es continua.
(2) Toda aplicación lineal con gráfica cerrada de E en bv_0, es continua.

DEMOSTRACIÓN: (En lo sucesivo por T_n, denotaremos $T^*(e_n)$).

(1)$\Rightarrow$(2). Sea $T : E \to bv_0$ una aplicación en las hipótesis correspondientes de (2).

Puesto que,

$$\|T(x)\|_{bv_0} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T(x), e_{n+1}\rangle - \langle T(x), e_n\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, T_{n+1}\rangle - \langle x, T_n\rangle|,$$

podemos considerar la aplicación lineal,

$$\widehat{T} : E \to \ell_1$$

$$x \mapsto \widehat{T}(x) := (\langle x, T_{n+1} - T_n\rangle)$$

Evidentemente, $\|\widehat{T}(x)\|_1 = \|T(x)\|_{bv_0}$.

Como T tiene gráfica cerrada, la aplicación $\widehat{T}$ también tiene gráfica cerrada. Luego por (1), $\widehat{T}$ es continua y, por tanto, existen $k > 0$ y p seminorma τ–continua tales que,

$$\|\widehat{T}(x)\|_1 \leq kp(x), \quad x \in E$$

Puesto que $\|\widehat{T}(x)\|_1 = \|T(x)\|_{bv_0}$, deducimos que T es continua.

(2)$\Rightarrow$(1). Sea $T : E \to \ell_1$ una aplicación en las hipótesis correspondientes a (1).

Consideremos la siguiente sucesión (S_n) de elementos de E^*,

$$S_1 = 0, \quad S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} T_n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Puesto que,

$$\|T(x)\|_{\ell_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T(x), e_n\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, T_n\rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, S_{n+1}\rangle - \langle x, S_n\rangle|,$$

podemos considerar la aplicación lineal,

$$\widehat{T} : E \to bv_0$$

$$x \mapsto \widehat{T}(x) := (\langle S_n, x\rangle - S(x))_n \ ,$$

donde,

$$S(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, T_n\rangle$$

Como T tiene gráfica cerrada, la aplicación $\widehat{T}$ también tiene gráfica cerrada. Luego por (2), $\widehat{T}$ es continua, y por tanto existen $k > 0$ y p seminorma τ-continua tales que,

$$\|\widehat{T}(x)\|_{bv_0} \leq kp(x)$$

Puesto que $\|\widehat{T}(x)\|_{bv_0} = \|T(x)\|_1$, deducimos finalmente que T es continua.

■

Damos por último un resultado que relaciona la continuidad y la continuidad sucesional en las aplicaciones lineales con llegada en ℓ_1.

Teorema 3.3.5 *Sea E un espacio dual Σ-completo, tal que $[E, \sigma(E, E')]$ es de Mazur. Si T es una aplicación lineal de E en ℓ_1, entonces T es débilmente continua si y sólo si T es débilmente sucesionalmente continua.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Rightarrow$) Siempre se verifica.

($\Leftarrow$) Por la observación [2] del teorema 2.3.2, será suficiente probar que $T^*(e_n) \in E'$, $n \in \mathbb{N}$. En principio, $T^*(e_n) \in E^*$.

Sea (x_n) una sucesión débilmente nula en E. Como T es débilmente sucesionalmente continua, $T(x_n)$ tiende débilmente a cero en ℓ_1, luego tiende a cero coordenada por coordenada.

Ahora bien, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\langle T^*(e_k), x_n \rangle = \langle e_k, T(x_n) \rangle \xrightarrow{n} 0$$

Es decir, los funcionales $T^*(e_n)$ son débilmente sucesionalmente continuos. Por la hipótesis de Mazur (Wilansky [69, p. 124]), son débilmente continuos, luego $T^*(e_n) \in E'$. ■

3.4 Teoremas en espacios de sucesiones

Si consideramos espacios de sucesiones en el espacio de partida, pueden darse teoremas de gráfica cerrada usuales (sin la condición mixta de la sección anterior), sobre aplicaciones lineales que tienen a ℓ_1 como espacio de llegada.

Antes de abordar este tipo de resultados, daremos un teorema de gráfica cerrada con espacios de Orlicz–Pettis en la clase de partida.

Teorema 3.4.1 *Sea $[E,\tau]$ un espacio de Orlicz–Pettis, y $[F,\alpha]$ un espacio B_r-completo sin copia de ℓ_∞. Entonces toda aplicación lineal con gráfica cerrada de E en F es continua.*

DEMOSTRACIÓN:

Sea T una aplicación en las correspondientes hipótesis del teorema.

Veamos que T es Σ–continua. Para ello, sea $\sum x_n$una serie convergente por subseries de E.

Esto nos permite definir la siguiente aplicación lineal y continua (ver [42]),

$$S : [m_0, \|\ \|] \to [E,\tau]$$

$$a = (a_n) \mapsto T(a) := \tau - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

Si componemos S con T, obtenemos una aplicación lineal de m_0 en F. Además, como T tiene gráfica cerrada y S es continua, la composición, denotémosla R, también tiene gráfica cerrada. Puesto que m_0 es tonelado (Pérez Carreras-Bonet [50, p. 137]) y F es B_r–completo, el teorema de la gráfica cerrada nos dice que R es continua.

Teniendo en cuenta el lema 1.4.1, podemos extender R a una aplicación R_0 lineal y continua de ℓ_∞ en F.

Ahora bien, F no tiene copia de ℓ_∞, luego por [18] deducimos que R_0 lleva la bola unidad cerrada de ℓ_∞ en un conjunto débil relativamente compacto de

F. En particular, el conjunto

$$\left\{\sum_{i\in\sigma} T(x_i) : \sigma \in P_f(\mathbb{N})\right\}$$

es débil relativamente compacto. Esto quiere decir que la serie $\sum T(x_n)$ es débilmente convergente por multiplicadores acotados y el teorema de Orlicz–Pettis, nos indica que $\sum T(x_n)$ es α–convergente por subseries en F.

Por tanto, tenemos que,

$$\tau - \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x \in E, \quad \alpha - \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n) = y \in F$$

Puesto que T tiene gráfica cerrada, podemos afirmar que $T(x) = y$, i. e.,

$$T(\sum_{n=1}^{\infty} x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} T(x_n)$$

Por tanto, T es Σ-continua.

Ahora bien, si T es Σ–continua, T es $OP(\tau) - \alpha$–continua (sección 1.3), y como E es un espacio de Orlicz–Pettis, $\tau - \alpha$–continua. ■

Observaciones

[1] Este resultado, complementa un teorema de gráfica cerrada entre espacios de Orlicz–Pettis y espacios de Souslin, debido a Pfister [52], puesto que todo espacio de Souslin es separable (Valdivia [68, p. 69]).

Puesto que todo espacio de sucesiones normal λ es monótono, si dicho espacio contiene a ϕ, se tiene que $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^{\alpha})]$ es un espacio de Orlicz–Pettis (teorema 1.3.2). Podemos, por tanto, aplicarle el resultado anterior.

Corolario 3.4.1 *Sea λ un espacio de sucesiones normal que contenga a ϕ, y sea $[E, \tau]$ un espacio B_r–completo sin copia de ℓ_{∞}. Entonces toda aplicación lineal con gráfica cerrada de $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^{\alpha})]$ en E es continua.*

Observaciones

[1] Por Dierolf [9], si λ además de ser normal, verifica que $[\lambda, \beta(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es separable, entonces $\beta(\lambda, \lambda^\alpha) = \mu(\lambda, \lambda^\alpha)$. Es decir, $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es tonelado, y podemos por tanto concluir que,

> Toda aplicación lineal con gráfica cerrada de $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$ en un espacio B_r–completo E es continua.

Teniendo en cuenta los resultados de Kalton [32], sobre teoremas de gráfica cerrada sobre espacios dual sucesionalmente completos, demostraremos el siguiente resultado.

Teorema 3.4.2 *Sea λ un espacio de sucesiones conteniendo a ϕ. Entonces, son equivalentes:*
(1) Toda aplicación lineal con gráfica cerrada de $[\lambda^\alpha, \mu(\lambda^\alpha, \lambda)]$ en E es continua, donde E es un espacio B_r–completo separable.
(2) Toda aplicación lineal con gráfica cerrada de $[\lambda^\alpha, \mu(\lambda^\alpha, \lambda)]$ en E es continua, donde E es un espacio B_r–completo de generación débilmente compacta.
(3) Toda aplicación lineal con gráfica cerrada de $[\lambda^\alpha, \mu(\lambda^\alpha, \lambda)]$ en E es continua, donde E es un espacio B_r–completo sin copia de ℓ_∞.
(4) Toda aplicación lineal con gráfica cerrada de $[\lambda^\alpha, \mu(\lambda^\alpha, \lambda)]$ en ℓ_1 es continua.
(5) Toda aplicación lineal con gráfica cerrada de $[\lambda^\alpha, \mu(\lambda^\alpha, \lambda)]$ en c_0 es continua.
(6) λ es un espacio de sucesiones perfecto.
(7) $[\lambda, \sigma(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es Σ–completo.

DEMOSTRACIÓN:

(5) $\Leftrightarrow$ (6). Puesto que λ es un espacio de sucesiones perfecto si y sólo si $[\lambda, \sigma(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es sucesionalmente completo, y aplicando Kalton [32].

(6) $\Leftrightarrow$ (7). Puesto que λ es un espacio de sucesiones perfecto si y sólo si $[\lambda, \sigma(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es sucesionalmente completo, λ siempre tiene la propiedad (u) (sección 1.2), y los teoremas 1.2.1 y 2.2.4.

(4) $\Rightarrow$ (7). Por la observación [1] del teorema 3.3.2.

(6) $\Rightarrow$ (3). Puesto que todo espacio de sucesiones perfecto es normal, y el corolario anterior.

(3) $\Rightarrow$ (2). Puesto que las copias de ℓ_∞ siempre están complementadas (Jarchow [31, p. 133]), y ℓ_∞ no es de generación débilmente compacta (Wilansky [69, p. 257]).

(3) $\Rightarrow$ (1). Pues todo espacio vectorial topológico separable no puede tener copia de ℓ_∞ (Kalton [33]).

(1) $\Rightarrow$ (4), (2) $\Rightarrow$ (4). Puesto que ℓ_1 es un espacio de Banach separable, y por tanto de generación débilmente compacta (Wilansky [69, p. 256]). ■

Observaciones

[1] Hacemos notar que, puesto que c_0 no es perfecto, en el teorema anterior no podemos considerar espacios de sucesiones en la forma, $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$.

Capítulo IV

Σ–Completitud y aplicaciones compactas

4.1 Ordenación de Edgar

La ordenación de Edgar es una relación binaria definida sobre la clase de los espacios de Banach. A pesar de que se han hallado conexiones con la integral de Pettis y la unicidad de preduales ([20]), la utilidad de esta ordenación está aún por determinar. La definición de dicho "orden" es la siguiente.

Definición 4.1.1 *Sean E, F espacios de Banach. Por $E < F$ entenderemos que,*

$$E = \bigcap_{T \in L(E,F)} (T^{**})^{-1}(F)$$

donde $L(E, F)$ denota el conjunto de las aplicaciones lineales y continuas de E en F.

La relación anterior es transitiva y reflexiva, es decir, es un preorden. Por tanto, dicha relación define un orden parcial sobre las clases de equivalencia definidas por la siguiente relación de equivalencia,

$$E \equiv F \text{ si y sólo si } E < F \text{ y } F < E$$

Sin embargo, este orden no es total ([20]).

De la propia definición, se deduce que si un espacio de Banach E es isomorfo a un cierto subespacio cerrado de otro espacio de Banach F, entonces $E < F$.

En el citado artículo de Edgar, se caracterizan ciertas clases de espacios de Banach definidas mediante la relación de Edgar. Nosotros estaremos especialmente interesados en los espacios de Banach F tales que "$F < \ell_1$".

Antes de analizar esta última clase, mencionamos resultados sobre otras clases de espacios de Banach que pueden consultarse también en Edgar [20].

En los siguientes ejemplos, E y F denotan espacios de Banach arbitrarios.

1. Si E es reflexivo, entonces $E < F$ para todo F.

2. E es no reflexivo si y sólo si $\ell_1 < E$.

3. $E < c_0$ si y sólo si E verifica la condición de Mazur. Un espacio de Banach verifica la condición de Mazur, si cualquier $x \in E''$ que sea sucesionalmente continuo sobre $[E', \sigma(E', E)]$, pertenece a E.

4. Si E es separable, entonces $E < c_0$.

5. $c_0 < E$ si y sólo si E tiene copia de c_0.

6. $\ell_\infty < E$ si y sólo si E tiene copia de ℓ_∞.

Denotemos, momentáneamente la clase de los espacios de Banach E tales que $E < \ell_1$ por $\mathcal{A}$. Algunas propiedades de la clase $\mathcal{A}$ se deducen rápidamente de los puntos anteriores. Entre ellas,

1. Todo espacio de Banach reflexivo pertenece a $\mathcal{A}$; es simplemente un caso particular del punto 1. anterior.

2. Si un espacio de Banach E pertenece a $\mathcal{A}$, entonces E verifica la condición de Mazur; pues si $E \in \mathcal{A}$, entonces $E < \ell_1$ y como ℓ_1 es separable $\ell_1 < c_0$, de donde $E < c_0$.

3. Si un espacio de Banach E pertenece a $\mathcal{A}$, entonces E no tiene copia de ℓ_∞; pues si E tiene copia de ℓ_∞, entonces $\ell_\infty < E$ y como $E < \ell_1$ deducimos que $\ell_\infty < \ell_1$, i.e., ℓ_1 tiene copia de ℓ_∞, lo cual es absurdo pues ℓ_∞ no es separable.

4. Todo subespacio cerrado F de un espacio de Banach E que pertenezca a $\mathcal{A}$, también pertenece a $\mathcal{A}$; claramente E tiene copia de F, luego $F < E$ y como $E < \ell_1$, entonces $F < \ell_1$.

La clase $\mathcal{A}$ ha sido caracterizada gracias a la denominada propiedad (X), introducida por Godefroy, Talagrand en [23], [24]. En Edgar [20], la propiedad (X) se describe de modo distinto. Posteriormente veremos que ambas definiciones son equivalentes.

Definición 4.1.2 *Sea E un espacio de Banach. Se dice que E tiene la propiedad (X) si:*
[Godefroy, Talagrand], todo elemento $z \in E''$, tal que verifique que,

$$\langle x_n, z\rangle \xrightarrow{n} 0,$$

para toda sucesión (x_n) débil nula de E' con,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_{n+1} - x_n\rangle| < +\infty \quad \textit{para todo } y \in E,$$

pertenece al propio E.
[Edgar], todo $z \in E''$ tal que,

$$\langle z, \sum_{n=1}^{\infty} f_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\langle z, f_n\rangle,$$

para toda sucesión (f_n) de E' con

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty \quad \textit{para todo } x \in E,$$

debe estar en E. (La suma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ se toma en la topología débil de E'.)*

Teorema 4.1.1 *Las dos definiciones anteriores son equivalentes.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Rightarrow$). Supongamos cierta la definición de Talagrand. Consideremos pues $z \in E''$ tal que "conmuta" con las series débil* incondicionalmente Cauchy de E', y sea (x_n) una sucesión débil* nula de E' tal que,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_{n+1} - x_n \rangle| < +\infty \quad \text{para todo y} \in E$$

Como $\sum(x_{n+1} - x_n)$ es una serie telescópica débil* incondicionalmente convergente (E es dual sucesionalmente completo), se tiene que,

$$\langle z, \sigma(E', E) - \sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)\rangle = \langle z, \sigma(E', E) - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k)\rangle = \cdots$$

$$\cdots = \langle z, \lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_1)\rangle = \langle z, 0 - x_1\rangle = -\langle z, x_1\rangle$$

Por otra parte, la primera expresión anterior es igual a,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\langle z, x_{n+1} - x_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n}(\langle z, x_{k+1}\rangle - \langle z, x_k\rangle) = \cdots$$

$$\cdots = \lim_{n\to\infty}(\langle z, x_{n+1}\rangle - \langle z, x_1\rangle)$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\langle z, x_n\rangle = 0$$

y por la definición de Talagrand, deducimos que $z \in E$.

($\Leftarrow$). Supongamos cierta la definición de Edgar. Consideremos pues $z \in E''$ tal que $\langle z, x_n\rangle \xrightarrow{n} 0$, para las sucesiones (x_n) débil* nulas de E' con "serie telescópica asociada" débil* incondicionalmente Cauchy, y sea $\sum f_n$ una serie arbitraria débil* incondicionalmente Cauchy de E'.

Como E es dual sucesionalmente completo,

$$\sigma(E', E) - \sum_{n=1}^{\infty} f_n - \sum_{k=1}^{m} f_k = \sigma(E', E) - \sum_{k=m+1}^{\infty} f_k$$

Definamos, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n := \sigma(E', E) - \sum_{k=n}^{\infty} f_k$$

Como $\sum f_n$ es una serie débil* incondicionalmente convergente, la sucesión (x_n) es débil* nula.

Además, para cada $y \in E$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_{n+1} - x_n \rangle| = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, f_n \rangle| < +\infty$$

Luego, podemos deducir que,

$$\langle x_n, z \rangle \xrightarrow{n} 0,$$

lo cual equivale a decir que,

$$\langle z, \sum_{n=1}^{\infty} f_n \rangle \ - \ \sum_{k=1}^{m} \langle z, f_k \rangle \xrightarrow{m} 0$$

Finalmente, por la definición de Edgar, $z \in E$. ■

Nosotros, a continuación, damos una nueva caracterización de la propiedad (X), usando las topologías asociadas de Orlicz–Pettis.

Teorema 4.1.2 *Un espacio de Banach E tiene la propiedad (X) si y sólo si $\pi(E) = E'' \cap E''_{OP}$, donde E''_{OP} es el dual topológico de $[E', OP(\sigma(E', E))]$.*

DEMOSTRACIÓN:

Basta recordar por un lado (sección 1.3), que un funcional $z \in (E')^*$, pertenece a E''_{OP}, si para toda serie $\sum x_n$débil* convergente por subseries de E', en nuestro caso equivalente a débil* incondicionalmente Cauchy (E es dual sucesionalmente completo), se verifica que,

$$\langle z, \sigma(E', E) - \sum_{n=1}^{\infty} x_n \rangle \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, x_n \rangle$$

Y considerar por otro lado, la definición de Edgar de la propiedad (X). ■

El resultado fundamental sobre la propiedad (X), es que Edgar en [20] demuestra que un espacio de Banach E tiene la propiedad (X) si y sólo si $E < \ell_1$.

Además Talagrand, Godefroy [23], [24], prueban que si un espacio de Banach E tiene la propiedad (X), entonces E es el único predual isométrico de E', i. e., todo espacio de Banach F tal que F' sea isométrico a E', ha de ser isométrico a E. Por otra parte, también obtienen en [23], que estos espacios de Banach son siempre débil sucesionalmente completos.

Godefroy en [25], da toda una serie de espacios de Banach que tiene la propiedad (X). Entre ellos,

1. Retículos de Banach separables débil sucesionalmente completos.

2. Espacios separables débil sucesionalmente completos complementados en un retículo de Banach.

3. Cualquier subespacio sucesionalmente completo de un retículo de Banach *order continuous*.

4. Espacios separables con estructura local incondicional que no contengan uniformemente a ℓ_∞^n.

5. Cualquier predual de un álgebra de von Neumann.

6. L_1/H_1 (ver [1], [25]).

7. Cualquier subespacio del espacio de las funciones absolutamente integrables $L_1(\mu)$, respecto de cualquier espacio de medida completo y σ–finito (Ω, Σ, μ) (ver [39, pp. 28–29], [19, IV.8.6]).

8. Cualquier espacio de Banach dual de un espacio de Banach separable, sin copia de ℓ_1 y que tenga la propiedad (u).

4.2 Teoremas con ℓ_1

Grothendieck en [27], dio varias y profundas aplicaciones del lema de Phillips. Una de ellas fue que para espacios compactos Hausdorff de Stone Ω, la convergencia sucesional débil y débil* en $C(\Omega)'$ coincidían. Esto sugirió la siguiente definición:

> Un espacio de Banach E se dice que es de Grothendieck si las convergencias sucesionales débil y débil* en E' son equivalentes.

Los espacios de Grothendieck están fuertemente conectados con la teoría de la medida a través de los espacios $B(\mathcal{F})$ (ver [61]).

En [15], [22], [27], pueden verse diversas caracterizaciones de los mencionados espacios de Grothendieck, que Diestel Uhl [17, p. 197], formulan conjuntamente en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.1 *Sea E un espacio de Banach. Son equivalentes:*
(1) E es un espacio de Grothendieck.
(2) Para todo espacio de Banach F, tal que F' tenga bola unidad cerrada débil sucesionalmente compacta, cualquier aplicación lineal y continua de E en F es débilmente compacta.*
(3) Para todo espacio de Banach F de generación débilmente compacta, cualquier aplicación lineal y continua de E en F es débilmente compacta.
(4) Toda aplicación lineal y continua de E en c_0 es débilmente compacta.

En el contexto más general de los espacios localmente convexos, pretendemos dar resultados análogos al teorema anterior para el espacio de sucesiones ℓ_1. Consideraremos una propiedad sobre series incondicionalmente Cauchy que "recuerda" la condición sucesional que define los espacios de Grothendieck. A saber:

Las series débil y débil* incondicionalmente convergentes del dual topológico coinciden.

El teorema mencionado es el siguiente.

Teorema 4.2.2 *Sea E un espacio dual Σ-completo. Son equivalentes:*
(1) Toda serie incondicionalmente convergente en $[E', \sigma(E', E)]$ es incondicionalmente convergente en $[E', \sigma(E', E'')]$.
(2) $[E', \sigma(E', E'')]$ es Σ-completo.
(3) $OP(\sigma(E', E))$ es más fina que $\beta(E', E)$.
(4) $[E', \beta(E', E)]$ no tiene copia de c_0.
(5) Toda aplicación lineal y débil continua de E en ℓ_1 lleva conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos.
(6) Toda aplicación lineal y $\sigma(E, E') - \sigma(\lambda, \lambda^\alpha)$-continua de E en λ lleva conjuntos acotados en conjuntos relativamente $\sigma(\lambda, \lambda^\alpha)$-compactos, donde λ es un espacio de sucesiones perfecto.
(7) Toda aplicación lineal y débil continua de E en F lleva conjuntos acotados en conjuntos débil relativamente compactos, donde F es cualquier espacio de Banach tal que $F < \ell_1$ en la ordenación de espacios de Banach de Edgar.
(8) Toda aplicación lineal y débil continua de E en F lleva conjuntos acotados en conjuntos débil relativamente compactos, donde F es un espacio de Banach dual de un espacio de Banach sin copia de ℓ_1 y con base incondicional.
(9) Toda aplicación lineal y débil continua de E en F lleva conjuntos acotados en conjuntos débil relativamente compactos, donde F es cualquier retículo de Banach separable débil sucesionalmente completo.

DEMOSTRACIÓN:

(2)$\Leftrightarrow$(4). Como E es dual Σ–completo, y la topología fuerte $\beta(E', E)$ tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos $\sigma(E', E)$–cerrados, el lema de Bourbaki–Robertson nos permite decir que $[E', \beta(E', E)]$ es Σ–completo.

Además, puesto que $E'' := [E', \beta(E', E)]'$, el teorema 2.2.5 toma la forma,

$$[E', \sigma(E', E'')] \text{ es } \Sigma\text{–completo si y sólo si } [E', \beta(E', E)] \text{ no tiene copia de } c_0.$$

(6)$\Rightarrow$(5). Pues ℓ_1 es un espacio de sucesiones perfecto y la topología generada por la norma es $\mu(\ell_1, \ell_1^\alpha = \ell_\infty)$. Además, como ℓ_1 tiene la propiedad de Schur los conjuntos débil y norma compactos son los mismos.

(7)$\Rightarrow$(5). Pues la ordenación de Edgar es reflexiva y ℓ_1 tiene la propiedad de Schur.

(8)$\Rightarrow$(5). Pues ℓ_1 es el dual de c_0, y c_0 tiene base incondicional. Por otra parte, c_0 no tiene copia de ℓ_1, pues su dual que es ℓ_1, es separable (Jarchow [31, pp. 310–312]). Finalmente, recordar que ℓ_1 tiene la propiedad de Schur.

(9)$\Rightarrow$(5). Pues ℓ_1 es separable y por el lema de Schur débil sucesionalmente completo. Como ℓ_1 tiene base incondicional, también es un retículo de Banach (Lindenstrauss [39, p. 2]).

(1)$\Rightarrow$(2). Sea $\sum x_n$una serie incondicionalmente $\sigma(E', E'')$–Cauchy. Por tanto $\sum x_n$es incondicionalmente $\sigma(E', E)$–Cauchy y como E es dual Σ–completo, incondicionalmente $\sigma(E', E)$–convergente. Finalmente, por (1), dicha serie es incondicionalmente $\sigma(E', E'')$–convergente.

(2)$\Rightarrow$(3). Sea $\sum x_n$una serie $\sigma(E', E)$–convergente por subseries. En particular $\sum x_n$es $\sigma(E', E)$–incondicionalmente Cauchy y, por tanto, su rango $S(x_n)$ es un conjunto $\sigma(E', E)$–acotado.

Por otra parte, como E es dual Σ–completo, $[E', \sigma(E', E)]$ es localmente completo y por Jarchow [31, p. 197], se tiene que $\beta^*(E', E) = \beta(E', E)$.

Luego si $S(x_n)$ un conjunto $\sigma(E', E)$–acotado, entonces es $\beta^*(E', E)$–acotado y por el comentario anterior $\beta(E', E)$–acotado, luego $\sigma(E', E'')$–acotado. Es decir, la serie $\sum x_n$es incondicionalmente $\sigma(E', E'')$–Cauchy.

Usando (2) y por el teorema de Orlicz–Pettis deducimos que dicha serie es $\mu(E', E'')$–convergente por multiplicadores acotados, de donde en particular es $\beta(E', E)$–convergente por subseries. Es decir, $OP(\sigma(E', E)) \geq \beta(E', E)$.

(3)⇒(6). Sea T una aplicación lineal de E en λ en las correspondientes hipótesis de (6).

Puesto que T es,

$$\sigma(E,E') - \sigma(\lambda,\lambda^\alpha) - \text{continua},$$

su aplicación adjunta será,

$$\sigma(\lambda^\alpha,\lambda) - \sigma(E',E) - \text{continua} \equiv$$

$$\sigma(\lambda^\alpha,\lambda^{\alpha\alpha}) - \sigma(E',E) - \text{continua}$$

Si consideramos las topologías de Orlicz–Pettis asociadas y por el teorema 1.3.2, se tiene que T^* también es,

$$OP(\sigma(\lambda^\alpha,\lambda^{\alpha\alpha})) - OP(\sigma(E',E)) - \text{continua} \equiv$$

$$OP(\mu(\lambda^\alpha,\lambda^{\alpha\alpha})) - OP(\sigma(E',E)) - \text{continua} \equiv$$

$$\mu(\lambda^\alpha,\lambda^{\alpha\alpha}) - OP(\sigma(E',E)) - \text{continua} \equiv$$

$$\mu(\lambda^\alpha,\lambda) - OP(\sigma(E',E)) - \text{continua}$$

Por (3) deducimos finalmente que T^* es,

$$\mu(\lambda^\alpha,\lambda) - \beta(E',E) - \text{continua} \equiv$$

$$\sigma(\lambda^\alpha,\lambda) - \sigma(E',E'') - \text{continua}$$

En otras palabras, y con las correspondientes identificaciones,

$$T^{**}(E'') \subset \lambda$$

Esto último por Köthe [37, p. 204] equivale al resultado a probar, i. e., T lleva acotados en débil relativamente compactos.

(3)⇒(7). Sea T una aplicación de E en F con las correspondientes hipótesis del punto (7).

Como T es débilmente continua, su adjunta T^* es,

$$\sigma(F',F) - \sigma(E',E) - \text{continua},$$

y por tanto la adjunta de la adjunta T^{**} es

$$\sigma(E'',E') - \sigma(F'',F') - \text{continua}$$

En particular, $T^{**}(E'') \subset F''$. Por otra parte, si consideramos las topologías de Orlicz–Pettis asociadas, obtenemos que T^* también es,

$$OP(\sigma(F',F)) - OP(\sigma(E',E)) - \text{continua} \equiv$$

$$OP(\mu(F',F)) - OP(\sigma(E',E)) - \text{continua} \equiv$$

$$\mu(F',F''_{OP}) - OP(\sigma(E',E)) - \text{continua}$$

Esto último por los resultados de la sección 1.3, y usando las notaciones del teorema 4.1.2.

A su vez, por (3) deducimos que T^* es,

$$\mu(F',F''_{OP}) - \beta(E',E) - \text{continua} \equiv$$

$$\sigma(F',F''_{OP}) - \sigma(E',E'') - \text{continua}$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que F es un espacio de Banach tal que $F < \ell_1$, tenemos la siguiente inclusión,

$$T^{**}(E'') \subset F'' \cap F''_{OP} = \pi(F)$$

Finalmente, como en la implicación anterior, por Köthe [37, p. 204], T lleva acotados en débil relativamente compactos.

(7)$\Rightarrow$(8). Pues son espacios de Banach que verifican la relación $F < \ell_1$ (sección 4.1), ya que todo espacio de Banach con base incondicional tiene la propiedad (u) (Singer [62, p. 445]), aparte de ser lógicamente separable.

(7)$\Rightarrow$(9). Pues son espacios de Banach que verifican la relación $F < \ell_1$ (sección 4.1).

(5)$\Rightarrow$(1). Sea $\sum x_n$una serie incondicionalmente $\sigma(E', E)$–convergente de E'. Como,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle y, x_n \rangle| < +\infty \quad \text{para todo } y \in E,$$

podemos definir la siguiente aplicación lineal,

$$T: \; E \to \ell_1$$

$$y \mapsto T(y) := (\langle y, x_n \rangle)_n$$

Además, puesto que E es dual Σ–completo la serie $\sum x_n$es $\sigma(E', E)$–convergente por multiplicadores acotados y, por tanto $T^*(\ell_\infty) \subset E'$. Es decir, la aplicación T es $\sigma(E, E') - \sigma(\ell_1, \ell_\infty)$–continua.

Estamos pues en las condiciones del punto (5), y por tanto la aplicación T lleva conjuntos acotados de E en conjuntos relativamente compactos de $[\ell_1, \| \, \|_1]$.

Sea A un acotado de E. Por la caracterización de los relativamente compactos de ℓ_1 ([37, p. 282]), deducimos que,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{a \in A} \sum_{k=n}^{\infty} |\langle a, x_k \rangle| \right) = 0$$

Si probáramos que la serie $\sum x_n$es $\beta(E', E)$–Cauchy por subseries, aplicando el lema de Bourbaki–Robertson y que $\sum x_n \sigma(E', E)$–convergente por subseries, obtendríamos que $\sum x_n$es $\beta(E', E)$–convergente por subseries y, en particular, incondicionalmente $\sigma(E', E'')$–convergente.

Sea pues, $\sum_k x_{n_k}$ una subserie arbitraria de $\sum x_n$y p_{A° el calibrador de la polar de un cierto acotado A de E. Recordando que una base de entornos de cero de la topología fuerte $\beta(E', E)$ viene dada por las polares de los subconjuntos acotados de E, tenemos que,

$$p_{A^\circ} \left(\sum_{j=k}^{m} x_{n_j} \right) \;=\; \sup_{a \in A} \; |\langle a, \sum_{j=k}^{m} x_{n_j} \rangle| \;\leq \ldots$$

$$\ldots \leq \sup_{a\in A} \sum_{j=k}^{m} |\langle a, x_{n_j}\rangle| \ \leq \ \sup_{a\in A} \sum_{j=k}^{\infty} |\langle a, x_j\rangle| \ \rightarrow 0$$

(cuando $k, m \ \rightarrow +\infty$).

Es decir, la serie $\sum x_n$es $\beta(E', E)$–Cauchy por subseries y la implicación está probada. ■

Observaciones

[1]. Más ejemplos de espacios de Banach F verificando la condición $F < \ell_1$, pueden encontrarse en la sección 4.1.

[2] Entre espacios de Banach, las aplicaciones lineales y continuas que llevan acotados en débil relativamente compactos, son precisamente las aplicaciones débilmente compactas (Köthe [37, pp. 200–202]).

[3] Si seguimos la terminología de Day [8, p. 66], una aplicación lineal y continua entre espacios localmente convexos que lleve acotados en relativamente compactos se denomina completamente continua. Desde este punto de vista, el teorema anterior da condiciones para que una aplicación lineal y continua que tenga como espacio de llegada a ℓ_1, sea completamente continua.

[4] Consideremos la siguiente caracterización de G. Enmanuelle [21] de los conjuntos (V^*) (ver [47]):

> Un subconjunto A de un espacio de Banach E es un conjunto (V^*) si y sólo si toda aplicación lineal y continua de E en ℓ_1, lleva A en un relativamente compacto de ℓ_1.

Por tanto, el teorema anterior nos dice que en los espacios de Banach cuyo dual no tenga copia de c_0, todos los conjuntos acotados son conjuntos (V^*).

[5] Los espacios de Banach mencionados en los puntos (8),(9) tienen la denominada propiedad (V^*) de Pełczynski (i. e., todos los conjuntos (V^*) son débil relativamente compactos).

En efecto, para los retículos de Banach débil sucesionalmente completos, se puede consultar en [21].

Y por otra parte, todo espacio de Banach sin copia de ℓ_1 y con la propiedad (u) tiene la propiedad (V) ([47]), de donde su dual tiene la propiedad (V^*) ([47]).

A continuación, aplicamos el teorema anterior en varios contextos distintos. En la mayoría de ellos aparecen comentarios sobre copias de c_0 o ℓ_1.

Corolario 4.2.1 *Sea E un espacio dual Σ-completo. Si $[E', \beta(E', E)]$ es separable, entonces $[E', \beta(E', E)]$ no tiene copia de c_0.*

DEMOSTRACIÓN:

Basta observar que, por Kalton [32], si E tiene dual fuerte separable se verifica el punto (5) del teorema anterior. ■

Corolario 4.2.2 *Sea λ un espacio de sucesiones perfecto. Si $[\lambda^\alpha, \beta(\lambda^\alpha, \lambda)]$ no tiene copia de c_0, entonces $[\lambda, \sigma(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es semirreflexivo.*

DEMOSTRACIÓN:

Puesto que $[\lambda^\alpha, \sigma(\lambda^\alpha, \lambda = \lambda^{\alpha\alpha})]$ es sucesionalmente completo, el teorema anterior nos indica que la aplicación identidad en $[\lambda, \sigma(\lambda, \lambda^\alpha)]$ lleva acotados en débil relativamente compactos, es decir, λ es semirreflexivo (Jarchow [31, p. 227]).■

Corolario 4.2.3 *Sea λ un espacio de sucesiones conteniendo a ϕ, tal que $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es un espacio de Frechet.*

Entonces si $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$ y $[\lambda^\alpha, \beta(\lambda^\alpha, \lambda)]$ no tienen copia de c_0, se tiene que $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$ es reflexivo.

DEMOSTRACIÓN:

Como el espacio es de Fréchet, es dual Σ–completo. Por otra parte, $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$ tiene la propiedad (u) (sección 1.2), luego λ es sucesionalmente $\sigma(\lambda, \lambda^\alpha)$–completo si y sólo si es $\sigma(\lambda, \lambda^\alpha)$-$\Sigma$–completo.

Por el teorema 2.2.5 y puesto que $[\lambda, \mu(\lambda, \lambda^\alpha)]$ no tiene copia de c_0 , deducimos que λ es sucesionalmente $\sigma(\lambda, \lambda^\alpha)$–completo, luego es un espacio de sucesiones perfecto (Köthe [36, p. 423]).

Aplicando el teorema anterior a la aplicación identidad con $[\lambda, \sigma(\lambda, \lambda^\alpha)]$, concluímos que λ es reflexivo. ∎

Corolario 4.2.4 *Sea E un espacio dual Σ-completo y (x_n) una base incondicional en E. Si $[E', \beta(E', E)]$ no tiene copia de c_0, entonces la base (x_n) es "shrinking".*

DEMOSTRACIÓN:

Si denotamos por (u_n) la sucesión de coeficientes funcionales asociada a (x_n), se tiene que (u_n) es una base incondicional en $[E', \sigma(E', E)]$ (Jarchow [31, p.309]).

Por el teorema anterior y puesto que E es dual Σ–completo, las series,

$$\sum \langle x_n, u \rangle u_n, \text{ con } u \in E',$$

son $\beta(E', E)$–convergente por subseries, y por tanto la base es "shrinking". ∎

En particular, por Jarchow [31, pp. 310–311], si E es un espacio tonelado sucesionalmente completo con base incondicional y tal que $[E', \beta(E', E)]$ no tiene copia de c_0, entonces E no tiene copia de ℓ_1 y su dual fuerte es separable.

Corolario 4.2.5 *Sea E un espacio de Banach. Si $E < \ell_1$ y no es reflexivo ($\ell_1 < E$), entonces E tiene copia complementada de ℓ_1.*

DEMOSTRACIÓN:

Por Diestel [14, p. 48], es suficiente probar que E' tiene copia de c_0.

Supongamos que no fuera así. En ese caso, podríamos aplicar el teorema anterior a la identidad en E y obtendríamos que la bola unidad cerrada de E es débilmente compacta, i.e., E es reflexivo, y llegaríamos a contradicción. ■

Corolario 4.2.6 *Sea E un retículo de Banach separable. Entonces E es reflexivo si y sólo si E no tiene copia de c_0 y E no tiene copia complementada de ℓ_1.*

DEMOSTRACIÓN:

($\Rightarrow$). Si E es reflexivo todo subespacio cerrado es reflexivo, y no puede ser por tanto isomorfo ni a c_0 ni a ℓ_1.

($\Leftarrow$) Por Lindenstrauss [39, p. 34], E no tiene copia de c_0 si y sólo si E es débil sucesionalmente completo.

Por Diestel [14, p.48], E no tiene copia complementada de ℓ_1 si y sólo si E' no tiene copia de c_0.

Así que podemos aplicar el teorema anterior a la aplicación identidad en E y obtenemos que E es reflexivo. ■

4.3 Teoremas con c_0

Thomas en [63], da la siguiente relación entre la completitud local y la Σ-completitud,

Teorema 4.3.1 *Si E es un espacio localmente completo, tal que toda aplicación lineal y continua de $C(K)$ en $[E, \sigma(E, E')]$ es compacta, para todo espacio compacto K, entonces $[E, \sigma(E, E')]$ es Σ-completo.*

A continuación, damos una extensión de este teorema, que puede considerarse en cierto sentido como una forma dual del teorema 4.2.2 (puntos (2) y (5)).

Teorema 4.3.2 *Sea $[E, \tau]$ un espacio localmente completo. Son equivalentes:*
(1) $[E, \sigma(E, E')]$ es Σ-completo.
(2) Toda aplicación lineal y continua de c_0 en E es compacta.

DEMOSTRACIÓN:

(1)$\Rightarrow$(2). Sea $T : c_0 \to E$ una aplicación lineal y $\| \ \|_\infty - \tau_E$–continua.

Dado $a = (a_n) \in c_0$, es conocido que para la topología de la norma, se verifica que,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k e_k \xrightarrow{n} a$$

Puesto que T es continua, deducimos que en $[E, \tau]$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k T(e_k) \xrightarrow{n} T(a)$$

Es decir, la serie $\sum T(e_n)$ es τ–convergente por c_0–multiplicadores, luego incondicionalmente $\sigma(E, E')$-Cauchy. Por (1), dicha serie es débilmente convergente por multiplicadores acotados, y finalmente por el teorema de Orlicz–Pettis τ–convergente por multiplicadores acotados.

Esto implica que el conjunto $D = \overline{B(T(e_n))}^{\,\tau}$ es τ–compacto. Es más, dicho conjunto es,

$$D = \left\{\tau\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n T(e_n) : \quad a \in B_1(\ell_\infty)\right\}$$

Por otra parte,

$$T(B_1(c_0)) = \{T(a) : \quad a \in B_1(c_0)\} = ...$$

$$... = \left\{\tau - \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(e_n) : \quad a \in B_1(c_0)\right\} \subset D$$

Es decir, $T(B_1(c_0))$ es relativamente τ–compacto y, por tanto T es una aplicación compacta.

(2)$\Rightarrow$(1). Sea $\sum x_n$una serie incondicionalmente $\sigma(E, E')$–Cauchy. Como E es localmente completo, por el teorema 2.3.3 se tiene que dicha serie es τ_E–convergente por c_0–multiplicadores.

Esto nos permite definir la siguiente aplicación lineal y continua,

$$T : [c_0, \| \ \|_\infty] \to [E, \tau]$$

$$a = (a_n) \mapsto T(a) := \ \tau - \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$$

Aplicando (2), T es compacta. Es decir, $T(B_1(c_0))$ es un conjunto relativamente τ–compacto.

Por otra parte, como $B_1(\ell_\infty) \cap \phi \subset B_1(c_0)$, se tiene que,

$$B(x_n) = \{\tau\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} a_n T(e_n) : \quad (a_n) \in B_1(\ell_\infty) \cap \phi\} \subset T(B_1(c_0))$$

Es decir, $B(x_n)$ es relativamente τ–compacto, luego la serie $\sum x_n$es τ–convergente por multiplicadores acotados y, por tanto, débilmente convergente. ∎

Teniendo en cuenta el teorema 2.2.5, el resultado anterior para espacios Σ–completos puede particularizarse de la siguiente forma.

Teorema 4.3.3 *Sea $[E,\tau]$ un espacio Σ-completo. Son equivalentes:*

(1) $[E,\tau]$ no tiene copia de c_0.

(2) Toda aplicación lineal y continua de c_0 en E es compacta.

Referencias

[1] T. Ando, *On the predual of H^{∞}*, Commentationes Mathematicae Special, I, Warsaw (1978).

[2] S. Banach, *Théorie des Opérations Linéaires*, Warszawa (1932).

[3] R. G. Bartle, N. Dunford, J. T. Schwartz, *Weak compactness and vector measures*, Canad. Jour. Math., **7** (1955) 289–305.

[4] J. Batt, P. Dierolf, J. Voigt, *Summable sequences and topological properties of $m_0(I)$*, Archiv der Math., **27** (1977) 86–90.

[5] G. Bessaga, A. Pełczynski, *On bases and unconditional convergence in Banach spaces*, Studia Math., **17** (1958) 151–164.

[6] P. Civin, B. Yood, *Quasireflexive spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., **8** (1957) 906–911.

[7] A. Costé, *Convergence des séries dans les espaces F-normés de fonctions mesurables*, Bull. Acad. Pol. Sci., **19** (1971) 131–134.

[8] M. M. Day, *Normed Linear Spaces*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg (1973).

[9] P. Dierolf, *Theorems of Orlicz-Pettis type for locally convex spaces*, Manusc. math., **20** (1977) 73–94.

[10] P. Dierolf, *Summable sequences and associated Orlicz-Pettis topologies*, Comme. Mathem. T. S. in honorem W. Orlicz, **2** (1979) 71–88.

[11] P. Dierolf, S. Dierolf, *On linear topologies determined by a family of subsets of a topological vector space*, General topology and its applic., **8** (1978) 127–140.

[12] P. Dierolf, *Une charactérisation des espaces au sens de Mackey,* C. R. Acad. Paris, **283** (1976) 245–248.

[13] P. Dierolf, *Summierbare Familien und Assozierte Orlicz-Pettis Topologien,* Habilitationsschrift, Un. München (1975).

[14] J. Diestel, *Sequences and Series in Banach Spaces,* Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo (1984).

[15] J. Diestel, *Grothendieck spaces and vector measures,* Vector and Operator Valued Measures and Applications (Pr. Sym. Snowbird Resolt, Alta, Utah), Acad. Press, New York (1973).

[16] J. Diestel, B. Faires, *On vector measures,* Trans. Amer. Math. Soc., **198** (1974) 253–271.

[17] J. Diestel, J. Uhl, *Vector Measures,* Math. Survey 15 Amer. Math. Soc., Providence RI (1977).

[18] L. Drenowski, *Un thérème sur les operateurs de $l_\infty(\Gamma)$,* C. R. Acad. Sci. Paris **281** (1975) 967–969.

[19] N. Dunford, J. Schwartz, *Linear Operators I,* Interscience, New York (1958).

[20] G. A. Edgar, *An ordering for Banach spaces,* Pacif. Journ. Math., **108** (1983) 83–98.

[21] G. Emmanuele, *On the Banach spaces with the property (V^*) of Pełczinski,* Annali di Mat. pura ed applic., **152** (1971) 171–181.

[22] B. Faires, *Grothendieck spaces and vector measures*, Ph. D. Dissertation, Kent State Univ. (1974).

[23] G. Godefroy, M. Talagrand, *Nouvelles clases d'espaces de Banach predual unique*, Séminaire d'Ana. Fonct. de l'Ecole Pol. (1980/81).

[24] G. Godefroy, M. Talagrand, *Classes d'espaces de Banach predual unique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981) 323–325.

[25] G. Godefroy, *Existence and uniqueness of isometric preduals: A survey*, Contemp. mathem. (AMS), Banach Space Theory, volume 85 (1987).

[26] M. Gonzalez, V. M. Onieva, *Lifting results for sequences in Banach spaces*, Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. **105** (1989) 117–121.

[27] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type $C(K)$*, Canad. Jour. Math., **5** (1953) 129–173.

[28] A. Grothendieck, *Leçons sur les espaces vectoriels topologiques*, Sao Paulo, Inst. de Mat. Pura e Apl., Univ. de Sao Paulo (1958).

[29] R. C. James, *Bases and reflexivity of Banach spaces*, Annals of Math., **52** (1950) 518–527.

[30] G. J. O. Jameson, *Topology and Normed Spaces*, Chapman and Hall, London (1974).

[31] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, B. G. Teubner, Stuttgart (1981).

[32] N. J. Kalton, *Some forms of the closed graph theorem*, Proc. Cambr. Phil. Soc., **70** (1971) 401–408.

[33] N. J. Kalton, *Exhaustive operators and vector measures*, Proc. Edinb. Math. Soc., **19** (1975) 291–300.

[34] N. J. Kalton, *Subseries convergence in topological groups and vector spaces*, Israel Jour. Math., **10** (1971) 402–412.

[35] P. K. Kamthan, M. Gupta, *Sequence Spaces and Series,* Lect. Notes in Pure and Appl. Math., Marcel Dekker Inc., New York and Bessel (1981).

[36] G. Köthe, *Topological Vector Spaces I,* Springer Verlag, New York, Heidelberg (1969).

[37] G. Köthe, *Topological Vector Spaces II,* Springer Verlag, New York, Heidelberg (1979).

[38] H. Knaust, E. Odell, *On c_0 sequences in Banach spaces,* Israel Jour. of Math., **67** (1989) 153–169.

[39] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces II, Function Spaces,* Springer Verlag, Berlin, New York Heidelberg (1979).

[40] G. W. Mackey, *On infinite–dimensional linear spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **57** (1945) 155–207.

[41] C. W. MacArthur, *On a theorem of Orlicz–Pettis,* Pacif. Jour. Math., **22** (1967) 297–302.

[42] C. W. MacArthur, J. R. Retherford, *Some applications of an inequality in locally convex spaces,* Trans. Amer. Math. Soc., **137** (1969) 115–123.

[43] R. D. MacWilliams, *On the w^*–sequential closure of subspaces of Banach spaces,* Port. Mathem., **22** (1963) 209–214.

[44] A. Marquina, *A note on the closed graph theorem,* Archiv der Math., **28** (1977) 82–85.

[45] W. Orlicz, W. Matuszewska, *A note on modular spaces IX,* Bull. Acad. Pol. Sci., **16** (1968) 801–808.

[46] W. Orlicz, *Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen II,* Studia Math., **1** (1929) 241–255.

[47] A. Pełczynski, *Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact*, Bull. Acad. Pol. Sci., **10** (1962) 641–648.

[48] A. Pełczynski, *A connection between weakly unconditional convergence and weak completeness of Banach spaces*, Bull. Acad. Pol. Sci., **6** (1958) 251–253.

[49] A. Pełczynski, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math., **19** (1960) 209–228.

[50] P. Pérez Carreras, J. Bonet, *Barrelled Locally Convex Spaces*, North Holland Math. Studies 131, Amsterdam (1987).

[51] B. J. Pettis, *On integration in vector spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **44** (1938) 277–304.

[52] H. Pfister, *Über eine Art von gemischeter topologien und einen satz von A. Grothendieck Über (DF)-raume*, Manusc. Math., **10** (1973) 273–287.

[53] J. O. Popoola, I. Tweddle, *Density character, barrelledness and the closed graph theorem*, Colloq. Math., **40** (1979) 249–258.

[54] V. Pták, *Completeness and the open mapping theorem*, Bull. Soc. Math. France **86** (1958) 41–74.

[55] A. P. Robertson, *Unconditional convergence and the Vitali-Hahn-Saks theorem*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire **31–32** (1972) 335–341.

[56] H. P. Rosenthal, *A characterization of Banach spaces containig* ℓ_1, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, **71** (1974) 2411–2413.

[57] W. H. Ruckle, *Sequence Spaces*, Pitman Adv. Pub. Prog., Boston, London, Melbourne (1981).

[58] C. Saéz, *Espacios de Funciones Integrables*, Tesis doctoral, Universidad de Sevilla (1990).

[59] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1971).

[60] L. Schwartz, *Un théoréme de convergence dans les $L^p, 0 \leq p < \infty$*, C. R. Acad. Sci. Paris, **268** (1969) 704–706.

[61] G. L. Seever, *Measures on F–spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **133** (1968) 267–280.

[62] I. Singer, *Bases in Banach Spaces I*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1970).

[63] E. Thomas, *Sur les mesures vectorielles valeurs dans des espaces d'un type particulier*, C. R. Acad. Sci. Paris, **266** (1968) 1135–1137.

[64] P. Turpin, *Convexités dans les espaces vectoriels topologiques généraux*, Dissertationes Math. 131, Warszawa (1976).

[65] I. Tweddle, *Unconditional convergence and vector valued measures*, Journ. Lond. Math. Soc., **2** (1970) 603–610.

[66] L. Tzafriri, *Reflexivity in Banach lattices and their subspaces*, Jour. Func. Anal., **10** (1972) 1–18.

[67] M. Valdivia, *Mackey convergence and the closed graph theorem*, Archiv d. Math., **26** (1974) 649–656.

[68] M. Valdivia, *Topics in Locally Convex Spaces*, North Holland Studies, Amsterdam (1982).

[69] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw Hill, New York (1978).

Santiago Díaz Madrigal
Espacios Σ-completos

APTO CUM LAUDE

11 Junio 90

El Doctorado,