

18855787

UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
NEGOCIADO DE TESIS

Queda registrado este Título de Doctor al  
folio 34 número 418 del libro  
correspondiente.  
Sevilla, 11 JUL. 2001

El Jefe del Negociado  
*Teresa Cáceres*

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

LOCALIZACIÓN CON CRITERIOS DE IGUALDAD

|  |                 |
|--|-----------------|
| ESCUELA TECNICA SUPERIOR<br>INGENIERIA INFORMATICA |                 |
| <b>- BIBLIOTECA -</b>                              |                 |
| N.º ORDEN GENERAL                                  | <u>10.357</u>   |
| OBRA N.º   | ..... TOMO..... |
| SIGNATURA  | .....           |
| N.º EN ESPECIALIDAD                                | .....           |
| EJEMPLAR NUMERO                                    | .....           |

Memoria presentada por  
M<sup>a</sup> Teresa Cáceres Sansaloni  
para optar al grado de  
Doctora en Matemáticas  
por la Universidad de Sevilla

Vº Bº  
del Director,

*Juan A. Mesa*

Fdo. Juan Antonio Mesa  
Catedrático de Matemática Aplicada  
de la Universidad de Sevilla

*M<sup>a</sup> Teresa Cáceres*

Sevilla, julio de 2001



# Localización con criterios de igualdad

M<sup>a</sup> Teresa Cáceres Sansaloni

julio de 2.001

# Agradecimientos

Quiero agradecer a mis compañeros y amigos del Departamento de Matemática Aplicada I, especialmente a su director Felipe Mateos por su apoyo constante, a Beatriz Silva y Javier Cobos por su gran ayuda en el procesamiento de texto de esta memoria.

Al profesor Tamir, por su interés en el tema y sus útiles comentarios. A todos los miembros del grupo de investigación, destacando a M<sup>a</sup> Cruz López de los Mozos con quien comencé trabajando en problemas de localización, a Paco Ortega que aceptó ser el tutor de esta memoria y especialmente a su director Juan Antonio Mesa, por dirigirme y orientarme en el estudio de los problemas de localización, por la confianza que trasmite a quien trabaja con él, por su minuciosidad, interés y dedicación.

Y por último a José Luis, quien ha compartido diariamente el desarrollo de esta memoria.



# Introducción

La ubicación óptima de los recursos es un problema al que la Humanidad ha tenido que enfrentarse desde la más remota antigüedad. Del acierto en la elección del lugar dónde fundar una ciudad, dónde albergarse o dónde defenderse ha dependido la pervivencia de los pueblos.

Numerosas áreas del conocimiento como la Geografía, la Ordenación del Territorio o la Economía se han dedicado a la tarea de tratar de determinar dónde deben localizarse las diversas instalaciones que caracterizan nuestro hábitat.

Se suele aceptar que la primera formalización matemática de estas cuestiones se debe a Alfred Weber (1909), quien plantea el problema de minimizar la suma ponderada de distancias desde un conjunto de usuarios, cuya ubicación está pre-determinada, a una instalación que debe localizarse en algún punto del plano. Sin embargo, no deben olvidarse antecedentes tales como el Problema de Fermat, que en el siglo XVII plantea: “Dados tres puntos en el plano, encontrar un cuarto punto tal que la suma de las distancias a los otros tres sea mínima”, o el Problema de Sylvester (1857): “Dado un conjunto de puntos en el plano, encontrar otro que sea el centro de la circunferencia de menor radio que los englobe”.

Desde este trabajo pionero, el volumen de estudios sobre localización ha crecido aceleradamente. Si en la revisión de Francis y Goldstein de 1974 [16] aparecían 226 referencias, en la realizada por Hansen, Peeters, y Thisse, en 1983 [25] elevaban a más del doble el número de artículos, los cuales incluían modelos utilizados en la ubicación de servicios públicos tales como estaciones de extinción de incendios, comisarías de policía, centros postales, centros educativos, bibliotecas, servicios de emergencia y atención sanitaria, áreas recreativas, plantas de tratamiento de aguas o de residuos sólidos.

La revisión de Eiselt y Laporte [14] pone de manifiesto que, aunque no se haya desarrollado una taxonomía tan sistemática como la existente para los problemas de



colas o de secuenciación, existen diversas aproximaciones útiles, como por ejemplo la efectuada por Marsh y Schilling [44].

En todo caso, sin profundizar en un esquema formal de clasificación para caracterizar los problemas de localización, deben tenerse en cuenta al definir un modelo de localización las siguientes componentes:

- El **espacio** en el que se distribuyen los servicios.
- El **número de nuevos servicios** que se pretende instalar.
- El **número de servicios existentes**.
- La **estructura** del servicio.
- La **distribución de los clientes** o usuarios.
- Los **objetivos** del decisor.

Este último elemento es de gran transcendencia dado que la elección de objetivos determina en gran medida que el modelo sea matemáticamente implementable.

Los primeros objetivos estudiados buscaron minimizar alguna función de las distancias entre servicios y clientes. Posteriormente se comenzó a estudiar, para el caso de instalaciones nocivas o molestas, la introducción de criterios para la maximización de tales funciones de las distancias y, más recientemente, se ha prestado también atención a criterios que pretenden el logro de un equilibrio en la distribución de las distancias ponderadas.

Al analizar las soluciones óptimas de los problemas en los que se minimiza alguna función de la suma de las distancias, se comprueba que la localización resultante satisface al cliente “medio”. Sin embargo, en la práctica, al no ser homogénea la distribución de los usuarios de un servicio, suelen resultar beneficiados aquellos que se encuentran más concentrados en detrimento de los más aislados.

---

La búsqueda de un criterio alternativo al criterio medio condujo a considerar que la máxima distancia de un usuario al servicio fuera la menor posible, según la Teoría de la Justicia de Rawls [56].

Sin embargo, este objetivo, denominado criterio centro, no tiene en cuenta la situación del resto de los usuarios, por lo que se pueden seguir manteniendo grandes diferencias en el grado de prestación del servicio a aquellos. Para buscar la igualdad se han propuesto numerosos objetivos, inspirados en diversas áreas que habían reclamado con anterioridad la búsqueda de criterios que permitieran adoptar decisiones “justas o equitativas”.

La complejidad y subjetividad, que supone el decidir “equitativamente” hacen que, al igual que sucede en la Economía, la Sociología o las Ciencias Políticas, se esté lejos de alcanzar un consenso sobre cuáles son los mejores criterios para medir la equidad de una localización.

A diferencia de los criterios que buscan la eficacia y la eficiencia, no es fácil establecer cuáles son los costes que deben ser minimizados o los beneficios a maximizar cuando queremos actuar “con justicia”.

En muchos trabajos se suelen utilizar indistintamente los términos equidad e igualdad, sin embargo es preciso distinguirlos. Como señala Erkut [15], la equidad es un concepto sociopolítico más amplio que implica “honestidad, imparcialidad y justicia”, mientras que la igualdad es una noción matemática que significa que varias medidas tienen un mismo valor.

En la modelización de la igualdad y la equidad es preciso distinguir a su vez entre los conceptos de eficacia y eficiencia, los cuales explican el grado de satisfacción de la demanda por parte del servicio.

Como indican Eiselt y Laporte [14], si estamos determinando el número y ubicación de servicios móviles tales como las ambulancias, una solución con muy



pocos vehículos puede ser muy eficiente, pero no ser eficaz para prestar una adecuada atención, o bien tener muchas ambulancias y llegar a una gran eficacia a costa de una ineficiencia en el uso de las mismas. Los objetivos de igualdad buscarían que la distancia de los pacientes a las ambulancias fueran lo más similares posible, pero no se podría hablar de equidad sin explicitar algún atributo tal como, por ejemplo, el nivel de riesgo en función de la estructura de edad de la población.

Marsh y Schilling [44] aportan una estructura para la clasificación de las medidas de igualdad y equidad, que tiene en cuenta la distribución de referencia, la métrica y la escala empleadas, y ponen de manifiesto la imposibilidad de encontrar una única medida que pudiera considerarse la “mejor” en todos los aspectos, por lo que la tarea de investigación abierta conduce a :

- Determinar las propiedades que es conveniente que cumplan los criterios de equilibrio.
- Establecer comparaciones en el comportamiento de las medidas propuestas hasta el momento, de forma que puedan agruparse las que obtienen resultados similares, y así orientar investigaciones posteriores.

En caso de trabajar en un espacio no acotado, debe tenerse en cuenta que una forma de obtener soluciones iguales es alejar el servicio lo más posible de todos los clientes o usuarios, como ocurre cuando los puntos de demanda están situados sobre una recta. Para evitar este tipo de “soluciones”, es aconsejable realizar una aproximación multicriterio que combine la búsqueda de la eficacia y la igualdad.

En la presente memoria estudiamos problemas de localización sobre un espacio tipo red, es decir, un grafo ponderado en el que las aristas tienen asignado un determinado valor, que fundamentalmente puede asimilarse a la longitud.

En el primer capítulo se introducen los conceptos básicos y los principales resultados previos que se emplean en el resto de la memoria. A continuación se realiza

una revisión de los criterios de igualdad propuestos en la literatura y se compara el comportamiento de trece de estos criterios en redes generales para el caso discreto, cuando se exige que la ubicación del servicio sea algún vértice.

Para medir el grado de similitud entre los diversos criterios se introducen cuatro indicadores y se obtienen sus valores para un elevado número de grafos agrupados en tres conjuntos. El primer conjunto es el de los grafos disponibles bajo ftp anónimo en la dirección

*ftp : //ftp.cs.sunysb.edu/pub/Combinatorica/graffiti/*

el segundo corresponde a grafos equiponderados generados aleatoriamente y el tercero, al caso de grafos ponderados también generados aleatoriamente.

La experiencia computacional se completa con el empleo de las técnicas de escalamiento multidimensional para visualizar las relaciones entre los criterios analizados.

A continuación se exponen las propiedades que en la literatura se ha considerado conveniente que verifiquen los criterios de igualdad, y se analiza cuáles de ellas verifican los criterios considerados en este primer capítulo, lo que permite, en el capítulo segundo, centrar la atención en el caso continuo (en el cual el servicio puede ubicarse en cualquier lugar del grafo) y aplicar los criterios Índice de Schutz, y Coeficiente de Variación.

Para las cuatro funciones objetivo se desarrollan algoritmos que además de obtener los óptimos permiten el estudio comparado de los criterios, especialmente en lo relativo a la tolerancia de cada criterio al sustituir su propio óptimo por el obtenido para los otros tres considerados.

La implementación de los algoritmos con el paquete Mathematica facilita la realización por vez primera de un estudio basado en una amplia muestra de grafos, que nos permite concluir que existe una cierta similitud de comportamiento dentro de los pares de medidas relativas y absolutas.





En el tercer capítulo se aborda el caso de servicios múltiples para el problema de la desviación absoluta media que, al igual que el tradicional problema de la  $p$ -mediana, resulta ser NP-duro para grafos generales.

Para la resolución del caso en el que el número de servicios a localizar sea dos, se obtiene en primer lugar un algoritmo polinomial para redes tipo árbol, y posteriormente se realiza el estudio del problema en redes generales.

En el cuarto capítulo se estudia la localización de servicios extensos, utilizando los criterios Varianza y Coeficiente de Variación sobre redes árbol. Se determina el camino con extremos libres de mínima Varianza, tanto en el caso en el que el camino contenga algún vértice, como cuando está contenido en una única arista, así como el camino de mínimo Coeficiente de Variación. El capítulo concluye con el estudio de las relaciones entre punto, camino y arista de mínima varianza sobre redes árbol.

La existencia de la recopilación actualizada de artículos sobre Localización en la dirección <http://www.vub.ac.be/EWGLA/STUDIES/main.html> del grupo europeo de localización EWGLA nos permite centrar la bibliografía en los libros y artículos más directamente utilizados en la elaboración de la memoria.

En los anexos se incluyen los principales resultados obtenidos al ejecutar los algoritmos de comparación sobre distintos conjuntos de grafos.

Por último, señalar que la línea de investigación, seguida a lo largo de esta memoria para optar al grado de doctor, se enmarca en la actuación que realiza el “Grupo de investigación en localización ” (PAI-FQM 241) y que, por ello, los problemas abiertos coinciden con los que está actualmente abordando el grupo, tales como los correspondientes al caso en que los servicios se modelicen con estructuras dimensionales más complejas que los caminos, o aquellos en los que las demandas estén continuamente distribuidas.

# Contenido

|  |           |
|--|-----------|
| <b>1 Preliminares: Localización sobre redes</b>  | <b>13</b> |
| 1.1 Definiciones iniciales . . . . .             | 16        |
| 1.2 Función distancia . . . . .                  | 19        |
| 1.3 Problema general de localización . . . . .   | 24        |
| 1.4 Medidas de igualdad . . . . .                | 24        |
| 1.4.1 Formulación del problema . . . . .         | 25        |
| 1.4.2 Comparación en el caso discreto . . . . .  | 28        |
| 1.5 Preliminares para el caso continuo . . . . . | 50        |
| 1.6 Resultados previos . . . . .                 | 54        |
| <b>2 Localización de un servicio</b>             | <b>59</b> |
| 2.1 Índice de Schutz . . . . .                   | 61        |



---

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 2.1.1    | Problema restringido a una arista . . . . .  | 62        |
| 2.1.2    | Algoritmo . . . . .  | 69        |
| 2.1.3    | Ejemplo . . . . .  | 71        |
| 2.1.4    | Complejidad . . . . .  | 75        |
| 2.2      | Coefficiente de variación . . . . .  | 76        |
| 2.2.1    | Problema restringido a una arista . . . . .  | 76        |
| 2.2.2    | Algoritmo . . . . .  | 81        |
| 2.2.3    | Ejemplo . . . . .  | 83        |
| 2.2.4    | Complejidad del Algoritmo . . . . .  | 84        |
| 2.3      | Estudio comparado de las medidas . . . . .   | 85        |
| <b>3</b> | <b>Localización múltiple en un grafo con el criterio Desviación Absoluta Media</b> | <b>93</b> |
| 3.1      | Problema 2-DAM sobre un árbol. . . . .   | 95        |
| 3.1.1    | Problema restringido a dos aristas fijas . . . . .                                 | 97        |
| 3.1.2    | Algoritmo . . . . .  | 103       |
| 3.1.3    | Ejemplo . . . . .  | 104       |
| 3.1.4    | Complejidad del Algoritmo . . . . .  | 108       |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| 3.2      | Problema p-DAM sobre un grafo general. . . . .                                  | 111        |
| 3.3      | Problema 2-DAM sobre un grafo general. . . . .                                  | 118        |
| 3.3.1    | Problema general restringido a dos aristas fijas . . . . .                      | 120        |
| 3.3.2    | Algoritmo . . . . .   | 130        |
| 3.3.3    | Complejidad del Algoritmo . . . . .   | 131        |
| <b>4</b> | <b>Localización de servicios extensos</b>                                       | <b>133</b> |
| 4.1      | Camino de mínima varianza con extremos libres . . . . .                         | 137        |
| 4.1.1    | Algoritmo . . . . .   | 144        |
| 4.1.2    | Ejemplo . . . . .   | 145        |
| 4.1.3    | Complejidad del Algoritmo . . . . .   | 146        |
| 4.2      | Caso sobre una única arista . . . . .   | 147        |
| 4.2.1    | Algoritmo . . . . .   | 153        |
| 4.2.2    | Complejidad . . . . .   | 154        |
| 4.2.3    | Ejemplo . . . . .   | 154        |
| 4.3      | Relación entre servicios extensos y puntuales con el criterio varianza. . . . . | 155        |
| 4.3.1    | Grafos tipo estrella . . . . .  | 156        |
| 4.3.2    | Árboles . . . . .   | 161        |



|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 4.3.3 | Varianza puntual y varianza sobre la arista. . . . .                | 167 |
| 4.4   | Camino de mínimo coeficiente de variación con extremos libres . . . | 171 |
| 4.4.1 | Algoritmo . . . . .   | 180 |
| 4.4.2 | Ejemplo . . . . .   | 181 |
| 4.4.3 | Complejidad del Algoritmo . . . . .                                 | 182 |

## **Capítulo 1.**

# **Preliminares: Localización sobre redes**

# Capítulo 1.

## Preliminares: Localización sobre redes

En el presente capítulo se realiza una revisión de las funciones objetivo que han sido propuestas en la literatura para modelizar matemáticamente los problemas en los que el decisor desea localizar un servicio en un vértice de una red general, ya sea ésta física (carreteras, líneas de ferrocarriles, cableados ópticos, etc.) o virtual (organigramas, estructuras funcionales, etc.), de modo que se satisfaga la demanda de la forma más igualitaria posible.

La revisión pone de manifiesto la conveniencia de realizar el amplio estudio computacional que se aborda a continuación, con el fin de determinar cuál es el grado de similitud entre los distintos criterios, en cuanto a la localización del servicio.

Para ello con carácter preliminar se introducen los conceptos básicos y los principales resultados que se emplearán en la memoria, prestándose una especial atención a las propiedades de la función distancia sobre la totalidad de la red y sobre algunos puntos y conjuntos, que facilitan el desarrollo de algoritmos para la obtención de la localización óptima para diversos criterios de igualdad.



## 1.1 Definiciones iniciales

En toda red los dos principales elementos son los vértices y las aristas. Los vértices pueden ser abstracciones establecidas sobre nodos de transporte, cruces de carreteras, estaciones de ferrocarriles, subestaciones eléctricas, ciudades, polígonos industriales, fábricas, almacenes, depuradoras, o depósitos, en definitiva los puntos del problema a modelar en los que se concentra algún tipo de demanda o servicio, mientras que las aristas son los elementos que unen o relacionan los vértices.

Para modelizar estas situaciones recurrimos al concepto matemático de grafo que viene definido de la siguiente forma

**Definición 1.1.1** *Se denomina grafo dirigido, y se denota mediante  $G(V, E)$ , al par  $(V, E)$  donde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es el conjunto de vértices y  $E \subseteq V \times V$  es su conjunto de arcos, donde cada elemento es un par ordenado de vértices distintos.*

En el modelo matemático, una arista  $e_{ij} = [v_i, v_j] \in E$  si y sólo si en el espacio real existe una carretera, comunicación, relación, etc. (según la situación a modelar) que una los vértices  $v_i$  con  $v_j$  sin pasar por otros vértices del grafo.

Cuando  $E$  es un conjunto de pares no ordenados sobre  $V$ , la estructura  $G(V, E)$  es la de un grafo no dirigido. En la presente memoria vamos a considerar este tipo de grafos, por lo tanto  $[v_i, v_j] = [v_j, v_i]$  para cada par  $i, j$ . Supondremos además que no existen lazos (aristas del tipo  $[v_i, v_i]$ ), ni aristas múltiples (si existe la arista  $[v_i, v_j]$ , ésta será única).

Dados dos vértices  $v_i, v_j \in G$ , un camino  $P(v_i, v_j)$  desde el vértice  $v_i$  hasta el  $v_j$  es una secuencia ordenada de vértices  $\{v_i, u_1, \dots, u_k, v_j\}$  con la condición de que cada vértice sea adyacente al anterior y posterior.



Un grafo se dice conexo si entre cada par de vértices existe un camino que los une.

En la presente memoria se consideran grafos ponderados, en los que la demanda estará asociada a los vértices, denotando por  $w_i$  la demanda del vértice  $v_i$ . Supondremos que  $w_i \geq 0$  y sin pérdida de generalidad consideraremos que el sistema está normalizado,  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ . La demanda podrá ser interpretada como el número de clientes potenciales, la proporción de población en una localidad respecto a la total, la cuantificación de un riesgo potencial sobre un determinado vértice, o en general la importancia relativa de alguna medida.

**Definición 1.1.2** Una red ponderada no dirigida, conexa  $\mathcal{G}$  consta de un grafo no dirigido y conexo  $G(V, E)$ , de unos pesos  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  asociados a los vértices y de una función  $l : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  que para cada arista  $e_{ij} = [v_i, v_j]$  asigna un valor  $l(e_{ij}) = l_{ij} > 0$

Aunque  $l$  puede ser cualquier función que cumpla las propiedades señaladas, la denominaremos longitud para seguir con la nomenclatura usual en localización.

Se asume que las aristas de la red son rectificables, siendo  $f_{ij} : [0, l_{ij}] \rightarrow \mathbb{R}^d$ , la descripción paramétrica de la inmersión de la arista  $(v_i, v_j)$  en  $\mathbb{R}^d$ . Obsérvese que ha de verificarse  $f_{ij}(0) = v_i$ ,  $f_{ij}(l_{ij}) = v_j$ , y que si  $x \neq x'$   $x, x' \in [0, l_{ij}]$  entonces  $f(x) \neq f(x')$ .

De la propiedad de continuidad de la función  $f$  se deduce que cada arista de la red  $[v_i, v_j]$  es un conjunto compacto.

**Definición 1.1.3** La inmersión de la red  $\mathcal{G}$  en el espacio  $\mathbb{R}^d$  es el subconjunto  $G \subseteq \mathbb{R}^d$  definido como:

$$G = \bigcup_{[v_i, v_j] \in E} f_{ij}([0, l_{ij}])$$



tal que la intersección de las inmersiones en  $\mathbb{R}^d$  de dos aristas de  $E$  contenga como máximo un punto común, imagen del vértice en el que inciden dichas aristas.

Nótese que con objeto de simplificar la notación, se ha denotado exactamente igual al grafo y su inmersión en el espacio métrico  $\mathbb{R}^d$ .

**Definición 1.1.4** *Dados dos puntos  $x_1, x_2 \in [v_i, v_j]$  se define la subarista  $[x_1, x_2]$  como el subconjunto de puntos de la arista  $[v_i, v_j]$  comprendidos entre  $x_1$  y  $x_2$  incluyendo a ambos.*

La función inversa

$$(f_{ij})^{-1} : [v_i, v_j] \longrightarrow [0, l_{ij}] \quad (1.1)$$

de la función continua y biyectiva

$$f_{ij} : [0, l_{ij}] \longrightarrow [v_i, v_j] \subset G \subset \mathbb{R}^d$$

hace corresponder a cada  $x \in [v_i, v_j]$  un único valor  $(f_{ij})^{-1}(x)$ . Esta función permite identificar cada punto  $x$  de la red con su inmersión en el espacio métrico  $\mathbb{R}^d$  en el que está contenida. Para cada arista  $e_{ij}$ , la aplicación  $f_{ij}$  induce una orientación en el recorrido de la arista en el que uno de los vértices,  $v_i$ , se selecciona como inicial.

**Definición 1.1.5** *La longitud de la subarista  $[x_1, x_2]$  se define por*

$$|(f_{ij})^{-1}(x_1) - (f_{ij})^{-1}(x_2)|$$

**Definición 1.1.6** *Un camino  $P(x_1, x_2)$  que conecta  $x_1 \in G$  con  $x_2 \in G$  es un subconjunto conexo minimal de  $G$  que contiene a  $x_1$  y a  $x_2$ .*

**Definición 1.1.7** *La longitud del camino  $P(x_1, x_2)$ , que se denotará por  $|P(x_1, x_2)|$ , es la suma de las longitudes de todas las aristas y subaristas que lo forman.*

**Definición 1.1.8** *Se denomina camino más corto que conecta  $x_1 \in G$  con  $x_2 \in G$  al camino de menor longitud de entre los que conectan  $x_1$  con  $x_2$ .*

## 1.2 Función distancia

**Definición 1.2.1** *La función distancia entre dos puntos cualquiera del grafo  $G$   $d : G \times G \rightarrow \mathbb{R}^+$ , se define como la longitud del camino más corto que une  $x_1$  con  $x_2$*

$$d(x_1, x_2) = |P(x_1, x_2)|$$

Dados cualesquiera  $x, x_1, x_2 \in G$  se verifica

- $d(x_1, x_2) \geq 0$
- $d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$
- $d(x_1, x_2) \leq d(x_1, x) + d(x, x_2)$

La función distancia define por tanto una métrica sobre  $G$ .

**Definición 1.2.2** *Dados  $x, x_1, x_2 \in G$ , se dice que  $x \in G$  está en un camino  $P(x_1, x_2)$  si  $d(x_1, x_2) = d(x_1, x) + d(x, x_2)$ .*

En adelante, para simplificar la notación se denotará por  $G(V, E)$  el espacio métrico inducido por la función distancia sobre el grafo. Por el mismo motivo, la



función biyectiva  $f_{ij} : [0, l_{ij}] \rightarrow [v_i, v_j]$  permitirá identificar en la propia arista, al vértice inicial  $v_i$  con 0, al vértice final  $v_j$  con  $l_{ij}$  y en general

$$d(v_i, x) \text{ con } x, \quad \text{y por tanto} \quad d(x, v_j) \text{ con } l_{ij} - x$$

La distancia de cualquier vértice  $v \in V$  al punto  $x \in [v_i, v_j]$  será

$$d(v, x) = \min\{d(v, v_i) + x, \quad d(v, v_j) + l_{ij} - x\}$$

Con las anteriores definiciones una propiedad de la función distancia sobre redes generales es la siguiente.

**Proposición 1.2.3** (*Labbé, Peeters y Thisse [33]*) Sea  $G(V, E)$  un grafo conexo, no dirigido. Sea  $y \in G$  un punto fijo cualquiera del grafo, y  $x \in [v_i, v_j] \in E$ . Entonces  $d(y, x)$  la función distancia del punto  $y$  a lo largo de la arista  $[v_i, v_j]$  es:

- continua y cóncava sobre  $[0, l_{ij}]$  y
- lineal creciente con pendiente 1 sobre  $[0, \bar{x}[$  y lineal decreciente con pendiente  $-1$  sobre  $]\bar{x}, l_{ij}]$ , donde

$$\bar{x} = \frac{l_{ij} + d(\bar{x}, v_j) - d(\bar{x}, v_i)}{2}$$

Se define un árbol como un grafo conexo y sin ciclos, es decir, un grafo tal que cualquier par de vértices distintos están unidos por un único camino. Es habitual en la literatura denotar a los árboles por  $T$ .

Si se considera una red tipo árbol, se verifica el siguiente

**Teorema 1.2.4** (*Dearing, Francis y Lowe [13]*) Sean  $x_1, x_2$  y  $x_3$  tres puntos cualesquiera de un árbol  $T$ . Si  $x \in P(x_1, x_2)$  entonces a lo largo del camino  $P(x_1, x_2)$ , la función distancia  $d(x_3, x)$  es continua, lineal a trozos en  $[0, d(x_1, x_2)]$  con a lo sumo dos segmentos, de pendientes  $-1$ , y  $1$ , y por tanto convexa.

Además de las anteriores propiedades en la presente memoria se utilizan los conjuntos que se definen a continuación.

El conjunto de vértices que acceden al punto  $x$  por el extremo de la arista  $u$  se denotará mediante:

$$V_u(x) = \{v_i \in V : d(v_i, u) + x \leq d(v_i, v) + l - x, \text{ para } x \in [u, v]\}$$

y el conjunto de vértices que acceden a  $x$  por el extremo  $v$  mediante:

$$V_v(x) = V \setminus V_u(x)$$

**Definición 1.2.5** *Un punto  $x$  interior a la arista  $[u, v]$  de longitud  $l$ , se llama punto cuello de botella para el vértice  $v_i$  cuando  $d(v_i, x) = d(v_i, u) + x = d(v_i, v) + l - x$*

**Definición 1.2.6** *El conjunto de vértices relativos al punto cuello de botella  $x_k$ , se define como:*

$$VB(x_k) = \{v_s \in V : d(v_s, u) + x_k = d(v_s, v) + l - x_k\}$$

Al recorrer la arista  $[u, v]$ , primero se determinan los puntos cuello de botella y los conjuntos  $VB(x_k)$  asociados.

Sea  $BP$  el conjunto de puntos cuello de botella para la arista  $[u, v]$

$$BP = \{x \in [u, v] : \exists v_i \in V / d(v_i, u) + x = d(v_i, v) + l - x\}$$

Al considerar ordenados dichos puntos y añadir los vértices extremos de la arista, se obtiene el conjunto

$$BP1 = BP \cup \{u\} \cup \{v\} = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_p = l\}$$

Sea  $I_0 = [x_0, x_0]$ , e  $I_k = (x_{k-1}, x_k]$ , para  $k = 1, 2, \dots, p$ . Cada uno de los subintervalos  $I_k$  se denomina región primaria.



En el caso de árboles las regiones primarias coinciden con las aristas.

**Lema 1.2.7** *A lo largo de cada región primaria, la función distancia desde cualquier vértice  $v_k$  es lineal, estrictamente creciente o estrictamente decreciente.*

**Lema 1.2.8** (Hansen y Zheng [26]) *Los conjuntos  $V_u(x), V_v(x)$  aunque van cambiando a lo largo de la arista, permanecen fijos en cada región primaria.*

Así denotando por  $V_u(I_k) = \{v_i \in V : d(v_i, u) + x \leq d(v_i, v) + l - x, \text{ para } x \in I_k\}$ , se verifica que

$$V_u(I_0) \supset V_u(I_1) \supset \cdots \supset V_u(I_p)$$

y para  $k = 1, 2, \dots, p$

$$V_u(I_k) = V_u(I_{k-1}) \setminus VB(x_{k-1}) \quad (1.2)$$

Si se denota por  $B$  al conjunto de puntos cuello de botella asociados con el grafo  $G$ , como cada vértice genera como mucho uno de estos puntos sobre cada arista, se verifica que una cota para  $B$  es  $|V||E|$ . En el caso particular de que el grafo sea un árbol  $T$ , como los caminos entre pares de vértices son únicos, se verifica que  $|B| = 0$ .

Con las anteriores definiciones y propiedades se está en condiciones de introducir la primera función empleada en localización sobre redes.

**Definición 1.2.9** *La función mediana sobre  $G$  es  $z_m : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida por:*

$$z_m(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x) \quad (1.3)$$

**Proposición 1.2.10** (Tamir [63]) *Sobre cada arista, la función mediana  $z_m(x)$  es continua, cóncava, y tiene  $O(n)$  puntos de cambio de pendiente (correspondientes a los puntos cuello de botella).*

La demostración permite introducir algunos coeficientes que se emplearán a lo largo de la memoria, y consiste en que para  $x \in I_k$

$$\begin{aligned}
 z_m(x) &= \sum_{v_i \in V_u(I_k)} w_i d(v_i, x) + \sum_{v_i \in V_v(I_k)} w_i d(v_i, x) = \\
 &= \sum_{v_i \in V_u(I_k)} w_i (d(v_i, u) + x) + \sum_{v_i \in V_v(I_k)} w_i (d(v_i, v) + l - x) = \\
 &= \left( \sum_{v_i \in V_u(I_k)} w_i - \sum_{v_i \in V_v(I_k)} w_i \right) x + \sum_{v_i \in V_u(I_k)} w_i d(v_i, u) + \sum_{v_i \in V_v(I_k)} w_i (d(v_i, v) + l)
 \end{aligned}$$

Por tanto, la función mediana  $z_m$  en cada región primaria es lineal, siendo para  $x \in I_k$

$$z_m(x) = g_k x + c_k \quad (1.4)$$

donde

$$g_k = \sum_{v_i \in V_u(I_k)} w_i - \sum_{v_i \in V_v(I_k)} w_i = W(V_u(I_k)) - W(V_v(I_k)) \quad (1.5)$$

$$c_k = \sum_{v_i \in V_u(I_k)} w_i d(v_i, u) + \sum_{v_i \in V_v(I_k)} w_i (l + d(v_i, v)) \quad (1.6)$$

resultando que  $-1 \leq g_k \leq 1$ , y  $c_k \geq 0$ .

Si se considera el subintervalo  $I_k = (x_{k-1}, x_k]$ , el paso de este subintervalo al siguiente  $I_{k+1}$ , haciendo uso de la relación (1.2) supone el cambio de acceso de vértices desde el conjunto  $V_u(I_k)$  al  $V_v(I_{k+1})$ , por ello, el valor de  $g$  a lo largo de la arista es siempre no creciente, resultando que  $z_m(x)$  es una poligonal a trozos y cóncava.

Para actualizar los valores de  $g_k$  y  $c_k$  al pasar de una zona primaria a la siguiente se conoce (Hansen y Zheng [26]) que:



$$g_k = g_{k-1} - 2 \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i \quad (1.7)$$

$$c_k = c_{k-1} + \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i (d(v_i, v) + l) - \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i d(v_i, u) \quad (1.8)$$

Estas relaciones se emplearán para disminuir la complejidad en los algoritmos para el cálculo de los valores de algunas de las funciones de igualdad que se desarrollarán en los siguientes capítulos.

### 1.3 Problema general de localización

Sea  $G(V, E)$  una red general,  $D$  una colección de subconjuntos de  $G$ , donde se sitúa la demanda,  $\mathcal{X}$  es una colección de subconjuntos de  $G(V, E)$  de un tipo especificado y  $f_D : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^p$  una función vectorial.

El problema general de localización consiste en encontrar un  $X^* \in \mathcal{X}$  de modo que

$$f_D(X^*) \equiv \text{óptimo}\{f_D(X) : X \in \mathcal{X}\}$$

donde  $f_D$  es la función objetivo, y si hay restricciones, éstas están contenidas en la condición  $X \in \mathcal{X}$ .

El conjunto  $\mathcal{X}$  puede ser un conjunto de puntos aislados de  $G$ , de conjuntos de  $p$ -puntos, o de estructuras tales como aristas, caminos, árboles. Dependiendo de la estructura del conjunto  $\mathcal{X}$ , se considera el problema de localización puntual, localización múltiple ( $p$  servicios), o localización de servicios extensos. En lo que sigue de éste y en el siguiente capítulo se consideran servicios puntuales, mientras que en el capítulo tercero se estudian problemas de localización múltiple y en el capítulo cuarto se estudian situaciones en que el servicio es extenso.



## 1.4 Medidas de igualdad

Como hemos señalado en la introducción del capítulo, esta memoria se centra en el estudio de medidas de igualdad. En primer lugar se realiza un estudio comparado del comportamiento de diversas medidas propuestas en la literatura para medir la igualdad, algunas de las cuales sólo se han considerado hasta ahora teóricamente, mientras que otras han sido utilizadas en contextos distintos al de localización en redes, como por ejemplo en Economía o Geografía. En este capítulo se estudia el caso discreto, es decir cuando el servicio sólo puede ubicarse en uno de los vértices del grafo.

### 1.4.1 Formulación del problema

Como ya se ha mencionado  $G(V, E)$  denotará la inmersión de un grafo general, conexo, no dirigido, con un conjunto finito de vértices  $V$ ,  $|V| = n$  y un conjunto de aristas  $E$ , con  $|E| = m$ , y donde cada arista  $e \in E$  tiene asociada una longitud positiva  $l(e)$ .

Suponemos que la demanda está concentrada en los vértices y que se pretende localizar un servicio en alguno de ellos. Como se ha señalado, la distancia entre cada dos vértices es la que se obtiene como la suma de las longitudes de las aristas del camino más corto que los une.

Para simplificar la notación, al no haber ambigüedad, se denota mediante  $d_i(k) = d(v_i, v_k)$  la distancia del vértice  $v_k$  al vértice  $v_i$ .

Estudiaremos el problema de encontrar el vértice  $v_k$  tal que

$$f(k) = \min_i \{f(i)\}$$

para algunas funciones  $f$ , que de cierta forma miden la desigualdad en la distribución de distancias.

De entre las citadas por Marsh y Schilling [44] y Eiselt y Laporte [14] en este capítulo se consideran las siguientes funciones objetivos de igualdad:

- **Centro**

$$f_1(k) = \max_i \{w_i d_i(k)\} \quad (1.9)$$

- **Mediana**<sup>1</sup>

$$f_2(k) = \bar{d}(k) = z_m(v_k) = \sum_{i=1}^n w_i d_i(k) \quad (1.10)$$

- **Varianza**

$$f_3(k) = \sum_{i=1}^n w_i (d_i(k) - \bar{d}(k))^2 \quad (1.11)$$

- **Coefficiente de Variación**

$$f_4(k) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i (d_i(k) - \bar{d}(k))^2}}{\sum_{i=1}^n w_i d_i(k)} \quad (1.12)$$

- **Desviación Absoluta Media**

$$f_5(k) = \sum_{i=1}^n w_i |d_i(k) - \bar{d}(k)| \quad (1.13)$$

- **Índice de Schutz**

$$f_6(k) = \frac{1}{2\bar{d}(k)} \sum_{i=1}^n w_i |d_i(k) - \bar{d}(k)| \quad (1.14)$$

- **Suma de Diferencias Absolutas**

$$f_7(k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |w_i d_i(k) - w_j d_j(k)| \quad (1.15)$$

---

<sup>1</sup>El problema de encontrar el vértice  $v_k$  que minimiza  $\bar{d}(k)$  es el denominado 1-mediana, y no se considera dentro del conjunto de las medidas de igualdad.

- **Índice de Gini**

$$f_8(k) = \frac{1}{2n^2\bar{d}(k)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |w_i d_i(k) - w_j d_j(k)| \quad (1.16)$$

- **Coefficiente de entropía de Theil<sup>2</sup>**

$$f_9(k) = \frac{1}{\bar{d}(k)} \sum_{i \neq k} w_i |d_i(k) \log d_i(k) - \bar{d}(k) \log \bar{d}(k)| \quad (1.17)$$

- **Varianza de logaritmos<sup>2</sup>**

$$f_{10}(k) = \sum_{i \neq k} w_i (\log d_i(k) - \log \bar{d}(k))^2 \quad (1.18)$$

- **Diferencia máxima**

$$f_{11}(k) = \max_{i \neq k} \{w_i d_i(k)\} - \min_{i \neq k} \{w_i d_i(k)\} \quad (1.19)$$

( si no se exige la restricción  $i \neq k$  esta medida coincide con el centro, que para el problema en estudio es igual al rango)

- **Máxima Desviación Absoluta**

$$f_{12}(k) = \max_i |w_i d_i(k) - \bar{d}(k)| \quad (1.20)$$

- **Máxima suma de diferencias absolutas**

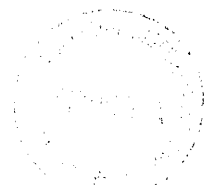
$$f_{13}(k) = \max_i \sum_{j=1}^n |w_i d_i(k) - w_j d_j(k)| \quad (1.21)$$

- **Suma de las máximas diferencias absolutas**

$$f_{14}(k) = \sum_{i=1}^n \max_j |w_i d_i(k) - w_j d_j(k)| \quad (1.22)$$

---

<sup>2</sup>Es preciso exigir la condición  $i \neq k$  para que los logaritmos estén definidos



Como se ha señalado en la introducción no se ha desarrollado aún una clasificación de los problemas de localización tan exhaustiva como las disponibles para modelos de colas o de secuenciación, sin embargo hay elementos que permiten clasificaciones parciales. Una de ellas es la referencia respecto a la que se mide la igualdad. Desde este punto de vista, hay dos grandes grupos, en el primero se incluyen los criterios que pretenden minimizar alguna función de la diferencia entre la distancia de los usuarios al servicio y alguna medida promedio del conjunto de distancias de los usuarios. En el segundo grupo se incluyen los criterios que persiguen minimizar alguna función de la diferencia entre las distancias de los usuarios al servicio.

El segundo elemento es el carácter absoluto o relativo de las funciones. Con estos dos elementos las medidas definidas se pueden agrupar de la siguiente forma

|           | Diferencias<br>respecto a la media  | Diferencias<br>de pares de distancias   |
|-----------|---|---|
| Absolutas | Varianza<br>Desviación Absoluta media<br>Varianza de logaritmos<br>Máxima desviación absoluta | Suma de diferencias absolutas<br>Diferencia máxima<br>Máxima suma de diferencias absolutas<br>Suma de máximas diferencias absolutas |
| Relativas | Coeficiente de variación<br>Índice de Schutz<br>Coeficiente de entropía de Theil              | Índice de Gini  |

### 1.4.2 Comparación en el caso discreto

Con sólo observar el cuadro anterior es fácil proponer nuevas medidas, y ello sin considerar las posibilidades de sustituir las métricas implícitas  $l_1$ ,  $l_2$ , o  $l_\infty$  por cualquier  $l_p$ .

El que existan infinitas medidas posibles nos obliga a centrar nuestro trabajo, por ello hemos considerado inicialmente aquellas que se destacan en la literatura por haberse aplicado, al menos teóricamente en algún problema.

Algunas de las medidas que se han definido en el apartado anterior han sido objeto de comparaciones parciales en, por ejemplo, Erkut [15] y Mulligan [52]. El que por el momento sean muy escasos y puntuales los estudios de este tipo realizados, motiva que en Eiselt y Laporte [14] se señale que sería deseable llevar a cabo un estudio a gran escala que pudiera proporcionar alguna información sobre cuál o cuáles de dichas medidas es más conveniente utilizar en determinados contextos. Siguiendo esta recomendación se realizará una comparación del comportamiento de las medidas que se han seleccionado, en distintos conjuntos de grafos.

### Caso equiponderado

Se estudia en primer lugar el caso discreto, localización sobre vértices, para grafos equiponderados con el fin de evitar que los pesos puedan enmascarar la estructura subyacente de las medidas.

Dada la matriz de distancias más cortas, la búsqueda del vértice  $v_k$  que minimiza una determinada  $f_i$ , para  $i = 1, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11$  y  $12$ , requiere  $O(n^2)$  operaciones, mientras que para las  $f_i$  con  $i = 7, 8, 13$  y  $14$ , requiere  $O(n^3)$  operaciones.

La comparación empírica del comportamiento de las medidas no puede abordarse por el método deductivo que caracteriza a las matemáticas. Por ello debemos considerar la metodología científica antes de abordar un estudio como el que se propone.

El método inductivo-deductivo, fundamento de las ciencias experimentales, consta de dos fases: la de observación y la de generalización, y se fundamenta en dos premisas:



- que las observaciones son objetivas y fiables,
- que la generalización es admisible.

La refutación, en la línea de Popper, ha intentado superar las limitaciones del método científico clásico, al subrayar que el hecho de que una afirmación general no pueda nunca ser probada mediante la observación, se complementa con el hecho de que con una única observación que no verifique esa afirmación general basta para refutarla. Desde este punto de vista el método científico se transforma en la elaboración de tesis y en intentar refutarlas.

La aproximación de la presente memoria tiene en cuenta ambas consideraciones y por ello antes de exponer los resultados del amplio estudio comparativo que se ha realizado, se considera conveniente poner de manifiesto el comportamiento de las medidas en un caso concreto, pero de interés, como es el descrito en el grafo de la Figura 1.1. En paralelo se definen los indicadores que se emplearán para comparar el comportamiento de las medidas.

El grafo de la Figura 1.1. corresponde a un modelo de la red principal de carreteras de Andalucía, donde las ocho capitales andaluzas están representadas por los vértices:

$v_1$ : Almería,  $v_2$ : Cádiz,  $v_3$ : Córdoba,  $v_4$ : Granada,  
 $v_5$ : Huelva,  $v_6$ : Jaén,  $v_7$ : Málaga,  $v_8$ : Sevilla.

Es un grafo que es empleado por las autoridades autonómicas en los procesos de toma de decisiones relativas a diversos campos.

Cuando los vértices se sitúan en las siguientes coordenadas,

$v_1(511.9, 37.5)$ ,  $v_2(80.6, 1.9)$ ,  $v_3(253.1, 155.6)$ ,  $v_4(382.5, 75.0)$ ,  
 $v_5(5.6, 84.4)$ ,  $v_6(361.9, 142.5)$ ,  $v_7(290.6, 24.4)$ ,  $v_8(114.4, 99.4)$ .

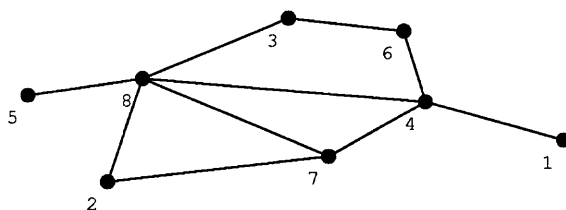


Figura 1.1: Ejemplo de grafo con 8 vértices

las longitudes de las aristas, con la distancia euclídea, son

$$\begin{aligned}
 l(v_1, v_4) &= 134.7 & l(v_2, v_7) &= 211.2 & l(v_2, v_8) &= 103.2 \\
 l(v_3, v_6) &= 109.6 & l(v_3, v_8) &= 149.7 & l(v_4, v_6) &= 70.5 \\
 l(v_4, v_7) &= 104.9 & l(v_4, v_8) &= 269.2 & l(v_5, v_8) &= 109.8 \\
 l(v_7, v_8) &= 191.5
 \end{aligned}$$

La matriz de distancias más cortas es la que aparece en el cuadro de la Figura 1.2

|       |       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0.0   | 450.8 | 314.8 | 134.7 | 513.7 | 205.2 | 239.6 | 403.9 |
| 450.8 | 0.0   | 252.8 | 316.1 | 213.0 | 362.4 | 211.2 | 103.2 |
| 314.8 | 252.8 | 0.0   | 180.1 | 259.5 | 109.6 | 285.0 | 149.7 |
| 134.7 | 316.1 | 180.1 | 0.0   | 379.0 | 70.5  | 104.9 | 269.2 |
| 513.7 | 213.0 | 259.5 | 379.0 | 0.0   | 369.0 | 301.4 | 109.8 |
| 205.2 | 362.4 | 109.6 | 70.5  | 369.0 | 0.0   | 175.5 | 259.2 |
| 239.6 | 211.2 | 285.0 | 104.9 | 301.4 | 175.5 | 0.0   | 191.5 |
| 403.9 | 103.2 | 149.7 | 269.2 | 109.8 | 259.2 | 191.5 | 0.0   |

Figura 1.2: Matriz de distancias entre los vértices del ejemplo

Si definimos  $r_i^k$  como el rango <sup>3</sup> del vértice  $k$  con la medida  $i$ , el valor de las

<sup>3</sup>Si se producen valores iguales de cualquier función en varios vértices, se utiliza el orden lexicográfico



funciones para los vértices  $(v_1, v_2, \dots, v_8)$  y el rango de cada vértice para dicha medida son los que aparecen en el cuadro de la Figura 1.3

Por tanto, mientras que la distancia media alcanza su mínimo en el vértice 4 (Granada) las restantes trece medidas tienen sus mínimos en el vértice 7 (Málaga).

Para cada par de funciones objetivo, la primera medida del grado de similitud de las mismas (Erkut [15]) es la que mide la coincidencia o no, en el vértice en donde se localiza el servicio:

$$I_1(i, j) = \begin{cases} 100, & \text{si } v_i^* = v_j^* \\ 0, & \text{si } v_i^* \neq v_j^* \end{cases}$$

siendo  $v_i^*$  el vértice donde alcanza el óptimo la medida  $i$ .

En nuestro ejemplo, al ser total la coincidencia para las trece medidas de igualdad se tiene que  $I_1(i, j) = 100 \quad \forall i, j$ .

La segunda medida propuesta es la función de tolerancia que viene dada por el valor de una medida sobre los óptimos de las otras

$$I_2(i, j) = 100 \times \frac{f_i(v_j^*) - f_i(v_i^*)}{f_i(v_i^*)}$$

En el ejemplo,  $I_2$  es igual a cero para todo par  $i, j$  con  $i \neq 2$  y  $j \neq 2$ . Los valores de  $I_2(2, j) = 3.75$  para  $j = 1, 3, 4, 5, \dots, 14$  y para  $I_2(i, 2)$  son:

$$\begin{aligned} I_2(1, 2) &= 25.76 & I_2(3, 2) &= 74.05 & I_2(4, 2) &= 36.87 & I_2(5, 2) &= 46.70 \\ I_2(6, 2) &= 52.19 & I_2(7, 2) &= 37.16 & I_2(8, 2) &= 42.30 & I_2(9, 2) &= 96.52 \\ I_2(10, 2) &= 25.76 & I_2(11, 2) &= 57.04 & I_2(12, 2) &= 4.54 & I_2(13, 2) &= 4.54 \\ I_2(14, 2) &= 24.57 \end{aligned}$$



```

f Centro:
1
{{ 513.7}, { 450.8}, { 314.8}, { 379.0}, { 513.7}, { 369.0}, { 301.4}, { 403.9}}
{7, 6, 2, 4, 8, 3, 1, 5}
f Media:
2
{{ 282.9}, { 238.7}, { 193.9}, { 181.8}, { 268.2}, { 193.9}, { 188.6}, { 185.8}}
{8, 6, 4, 1, 7, 5, 3, 2}
f Varianzas:
3
{{ 25880.2}, { 17906.5}, { 9694.4}, { 14768.2}, { 22997.7}, { 15466.8}, { 8485.1}, {
13548.7}}
{8, 6, 2, 4, 7, 5, 1, 3}
f Coeficiente de Variación:
4
{{ 0.569}, { 0.561}, { 0.508}, { 0.668}, { 0.565}, { 0.641}, { 0.488}, { 0.626}}
{5, 3, 2, 8, 4, 7, 1, 6}
f Desviación Absoluta Media:
5
{{ 138.0}, { 106.9}, { 84.1}, { 104.7}, { 122.6}, { 105.0}, { 71.4}, { 95.2}}
{8, 6, 2, 4, 7, 5, 1, 3}
f Índice de Schutz:
6
{{ 0.0305}, { 0.0280}, { 0.0271}, { 0.0360}, { 0.0286}, { 0.0339}, { 0.0237}, { 0.0320}}
{5, 3, 2, 8, 4, 7, 1, 6}
f Suma de Diferencias Absolutas:
7
{{ 11695.8}, { 9613.0}, { 6966.3}, { 8838.8}, { 10904.6}, { 9042.9}, { 6444.4}, {
8295.7}}
{8, 6, 2, 4, 7, 5, 1, 3}
f Índice de Gini:
8
{{ 0.323}, { 0.315}, { 0.281}, { 0.380}, { 0.318}, { 0.364}, { 0.267}, { 0.349}}
{5, 3, 2, 8, 4, 7, 1, 6}
f Coeficiente de entropía de Theil:
9
{{ 0.147}, { 0.133}, { 0.115}, { 0.183}, { 0.132}, { 0.166}, { 0.093}, { 0.157}}
{5, 4, 2, 8, 3, 7, 1, 6}
f Varianza de logaritmos:
10
{{ 0.0387}, { 0.0386}, { 0.0248}, { 0.0659}, { 0.0420}, { 0.0645}, { 0.0209}, { 0.0431}}
{4, 3, 2, 8, 5, 7, 1, 6}
f Diferencia máxima:
11
{{ 379.0}, { 347.6}, { 205.2}, { 308.5}, { 403.9}, { 298.5}, { 196.4}, { 300.7}}
{7, 6, 2, 5, 8, 3, 1, 4}
f Máxima Desviación Absoluta:
12
{{ 282.9}, { 238.7}, { 193.9}, { 197.2}, { 268.2}, { 193.9}, { 188.6}, { 218.1}}
{8, 6, 2, 4, 7, 3, 1, 5}
f Máxima suma de diferencias absolutas:
13
{{ 2262.8}, { 1909.5}, { 1551.5}, { 1577.6}, { 2145.4}, { 1551.5}, { 1509.1}, {
1744.8}}
{8, 6, 2, 4, 7, 3, 1, 5}
f Suma de las máximas diferencias absolutas:
14
{{ 3158.6}, { 2658.1}, { 1977.5}, { 2369.3}, { 3041.0}, { 2316.6}, { 1902.0}, {
2397.8}}
{8, 6, 2, 4, 7, 3, 1, 5}

```

Figura 1.3: Valores de las 14 medidas en todos los vértices

La tercera medida del grado de coincidencia  $I_3(i, j)$  es la propuesta por Marsh y Schilling [43], que para un par dado de funciones objetivos  $(f_i, f_j)$  viene definida por el porcentaje de pares de vértices que son ordenados del mismo modo por ambos criterios.

$$I_3(i, j) = 100 \times \frac{\sum_{k1=1}^n \sum_{k2=1}^n O_{i,j}(k1, k2)}{n^2}$$

donde

$$O_{i,j}(k1, k2) = \begin{cases} 1, & \text{si } f_i(k1) \leq f_i(k2) \wedge f_j(k1) \leq f_j(k2) \text{ o} \\ & \text{si } f_i(k1) > f_i(k2) \wedge f_j(k1) > f_j(k2) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Los valores de  $I_3$  para el grafo del ejemplo se muestran en el cuadro siguiente

|    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    |
| 1  | 100.0 | 78.1  | 87.5  | 62.5  | 87.5  | 62.5  | 87.5  | 62.5  | 59.4  | 65.6  | 96.9  | 96.9  | 96.9  | 96.9  |
| 2  | 78.1  | 100.0 | 84.4  | 53.1  | 84.4  | 53.1  | 84.4  | 53.1  | 50.0  | 50.0  | 75.0  | 81.3  | 81.3  | 81.3  |
| 3  | 87.5  | 84.4  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 65.6  | 65.6  | 90.6  | 90.6  | 90.6  | 90.6  |
| 4  | 62.5  | 53.1  | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 96.9  | 96.9  | 65.6  | 65.6  | 65.6  | 65.6  |
| 5  | 87.5  | 84.4  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 65.6  | 65.6  | 90.6  | 90.6  | 90.6  | 90.6  |
| 6  | 62.5  | 53.1  | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 96.9  | 96.9  | 65.6  | 65.6  | 65.6  | 65.6  |
| 7  | 87.5  | 84.4  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 65.6  | 65.6  | 90.6  | 90.6  | 90.6  | 90.6  |
| 8  | 62.5  | 53.1  | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 68.8  | 100.0 | 96.9  | 96.9  | 65.6  | 65.6  | 65.6  | 65.6  |
| 9  | 59.4  | 50.0  | 65.6  | 96.9  | 65.6  | 96.9  | 65.6  | 96.9  | 100.0 | 93.8  | 62.5  | 62.5  | 62.5  | 62.5  |
| 10 | 65.6  | 50.0  | 65.6  | 96.9  | 65.6  | 96.9  | 65.6  | 96.9  | 93.8  | 100.0 | 68.8  | 62.5  | 62.5  | 62.5  |
| 11 | 96.9  | 75.0  | 90.6  | 65.6  | 90.6  | 65.6  | 90.6  | 65.6  | 62.5  | 68.8  | 100.0 | 93.8  | 93.8  | 93.8  |
| 12 | 96.9  | 81.3  | 90.6  | 65.6  | 90.6  | 65.6  | 90.6  | 65.6  | 62.5  | 62.5  | 93.8  | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 13 | 96.9  | 81.3  | 90.6  | 65.6  | 90.6  | 65.6  | 90.6  | 65.6  | 62.5  | 62.5  | 93.8  | 100.0 | 100.0 | 100.0 |
| 14 | 96.9  | 81.3  | 90.6  | 65.6  | 90.6  | 65.6  | 90.6  | 65.6  | 62.5  | 62.5  | 93.8  | 100.0 | 100.0 | 100.0 |

Figura 1.4: Valores de  $I_3$  para las 14 medidas

La última medida se basa en la propuesta por Erkut [15] que consideró

$$S_4(i, j) = \sum_{k=1}^n |\tau_i^k - \tau_j^k|$$

siendo  $\tau_i^k$  el rango del vértice  $k$  con la medida  $i$ .

Sus valores para el ejemplo son los que aparecen en la Figura 1.5

Dado que estos valores dependen de  $n$  para poder comparar esta medida sobre grafos de distintos tamaños definimos

$$I_4(i, j) = 100 \times \frac{S_4(i, j)}{M(n)}$$

$$M(n) = \begin{cases} \frac{n^2}{2}, & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n^2 - 1}{2}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

ya que la función  $M(n)$  nos proporciona el máximo que puede alcanzar  $S_4$  para un grafo de  $n$  vértices.

Los valores de  $I_4$  son los que aparecen en el cuadro de la Figura 1.6.

Los estadísticos  $I_1, I_2, I_3$ , e  $I_4$  nos indican el grado de similitud entre cada par de funciones objetivo, aunque no del mismo modo. Mientras que valores altos de  $I_1$  e  $I_3$  indican mayor concordancia entre los objetivos, cuanto más próximos a cero sean los de  $I_2$  e  $I_4$  nos encontraremos con un comportamiento más análogo de los objetivos comparados.

Del análisis de los cuatro estadísticos para el grafo de la Figura 1 puede comprobarse que la Mediana  $f_2$ , no muestra similitud con ninguna de las trece medidas que pretenden alcanzar la igualdad.

En segundo lugar se ve que las funciones  $f_{12}, f_{13}$  y  $f_{14}$  tienen un comportamiento idéntico para el ejemplo, siendo muy similares a la función  $f_1$ , Centro, y  $f_{11}$ , Diferencia Máxima, en este orden.

En tercer lugar se comprueba el comportamiento idéntico de las medidas  $f_3$ , Varianza,  $f_5$ , Desviación Absoluta Media, y  $f_7$ , Suma de Diferencias Absolutas.

|    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0  | 14 | 6  | 18 | 6  | 18 | 6  | 18 | 18 | 18 | 2  | 2  | 2  | 2  |
| 14 | 0  | 8  | 26 | 8  | 26 | 8  | 26 | 26 | 26 | 14 | 12 | 12 | 12 |
| 6  | 8  | 0  | 18 | 0  | 18 | 0  | 18 | 18 | 18 | 6  | 4  | 4  | 4  |
| 18 | 26 | 18 | 0  | 18 | 0  | 18 | 0  | 2  | 2  | 18 | 18 | 18 | 18 |
| 6  | 8  | 0  | 18 | 0  | 18 | 0  | 18 | 18 | 18 | 6  | 4  | 4  | 4  |
| 18 | 26 | 18 | 0  | 18 | 0  | 18 | 0  | 2  | 2  | 18 | 18 | 18 | 18 |
| 6  | 8  | 0  | 18 | 0  | 18 | 0  | 18 | 18 | 18 | 6  | 4  | 4  | 4  |
| 18 | 26 | 18 | 0  | 18 | 0  | 18 | 0  | 2  | 2  | 18 | 18 | 18 | 18 |
| 18 | 26 | 18 | 2  | 18 | 2  | 18 | 2  | 0  | 4  | 18 | 18 | 18 | 18 |
| 18 | 26 | 18 | 2  | 18 | 2  | 18 | 2  | 4  | 0  | 18 | 18 | 18 | 18 |
| 2  | 14 | 6  | 18 | 6  | 18 | 6  | 18 | 18 | 18 | 0  | 4  | 4  | 4  |
| 2  | 12 | 4  | 18 | 4  | 18 | 4  | 18 | 18 | 18 | 4  | 0  | 0  | 0  |
| 2  | 12 | 4  | 18 | 4  | 18 | 4  | 18 | 18 | 18 | 4  | 0  | 0  | 0  |
| 2  | 12 | 4  | 18 | 4  | 18 | 4  | 18 | 18 | 18 | 4  | 0  | 0  | 0  |

Figura 1.5: Valores de  $S_4$  para las 14 medidas

|    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    | 14    |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1  | 0.00  | 43.75 | 18.75 | 56.25 | 18.75 | 56.25 | 18.75 | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 6.25  | 6.25  | 6.25  | 6.25  |
| 2  | 43.75 | 0.00  | 25.00 | 81.25 | 25.00 | 81.25 | 25.00 | 81.25 | 81.25 | 81.25 | 43.75 | 37.50 | 37.50 | 37.50 |
| 3  | 18.75 | 25.00 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 18.75 | 12.50 | 12.50 | 12.50 |
| 4  | 56.25 | 81.25 | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 6.25  | 6.25  | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 56.25 |
| 5  | 18.75 | 25.00 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 18.75 | 12.50 | 12.50 | 12.50 |
| 6  | 56.25 | 81.25 | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 6.25  | 6.25  | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 56.25 |
| 7  | 18.75 | 25.00 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 18.75 | 12.50 | 12.50 | 12.50 |
| 8  | 56.25 | 81.25 | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 0.00  | 6.25  | 6.25  | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 56.25 |
| 9  | 56.25 | 81.25 | 56.25 | 6.25  | 56.25 | 6.25  | 56.25 | 6.25  | 0.00  | 12.50 | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 56.25 |
| 10 | 56.25 | 81.25 | 56.25 | 6.25  | 56.25 | 6.25  | 56.25 | 6.25  | 12.50 | 0.00  | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 56.25 |
| 11 | 6.25  | 43.75 | 18.75 | 56.25 | 18.75 | 56.25 | 18.75 | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 0.00  | 12.50 | 12.50 | 12.50 |
| 12 | 6.25  | 37.50 | 12.50 | 56.25 | 12.50 | 56.25 | 12.50 | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 12.50 | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 13 | 6.25  | 37.50 | 12.50 | 56.25 | 12.50 | 56.25 | 12.50 | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 12.50 | 0.00  | 0.00  | 0.00  |
| 14 | 6.25  | 37.50 | 12.50 | 56.25 | 12.50 | 56.25 | 12.50 | 56.25 | 56.25 | 56.25 | 12.50 | 0.00  | 0.00  | 0.00  |

Figura 1.6: Valores de  $I_4$  para las 14 medidas

En cuarto lugar ocurre lo mismo para sus correspondientes medidas relativas  $f_4$ , Coeficiente de Variación,  $f_6$ , Índice de Schutz, y  $f_8$ , Índice de Gini. Cuyo comportamiento es el más próximo a las funciones en las que intervienen logaritmos:  $f_9$ , Índice de Entropía de Theil, y  $f_{10}$ , Varianza de logaritmos.

Para buscar indicios de la robustez de estas medidas ante pequeñas modificaciones en la matriz de distancias, consideramos el mismo grafo con las siguientes longitudes para las aristas

$$\begin{aligned} l(v_1, v_4) &= 166.0 & l(v_2, v_7) &= 265.0 & l(v_2, v_8) &= 125.0 \\ l(v_3, v_6) &= 104.0 & l(v_3, v_8) &= 138.0 & l(v_4, v_6) &= 99.0 \\ l(v_4, v_7) &= 129.0 & l(v_4, v_8) &= 256.0 & l(v_5, v_8) &= 94.0 \\ l(v_7, v_8) &= 219.0 & & & & \end{aligned}$$

que coinciden con la actual distancia kilométrica, entre las capitales de provincia, a través de la red viaria principal.

Vemos que el óptimo de la mediana cambia del vértice 4 (Granada), al 8 (Sevilla), once medidas mantienen su óptimo en el vértice 7 (Málaga) mientras que las funciones  $f_{12}$  y  $f_{13}$  cambian al vértice 4 (Granada). Las funciones y los rangos de los vértices aparecen en el cuadro de la Figura 1.7.

Para este caso los valores de la función de tolerancia son:

$$\begin{aligned} I_2(2, j) &= 19.05 & \text{para } j &= 1, \dots, 14 & j &\neq 12, 13 \\ I_2(2, j) &= 5.88 & \text{para } j &= 13, 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2(1, 2) &= 27.11 & I_2(3, 2) &= 33.16 & I_2(4, 2) &= 37.38 & I_2(5, 2) &= 22.24 \\ I_2(6, 2) &= 45.52 & I_2(7, 2) &= 19.58 & I_2(8, 2) &= 42.36 & I_2(9, 2) &= 77.61 \\ I_2(10, 2) &= 27.11 & I_2(11, 2) &= 61.58 & I_2(12, 2) &= 18.69 & I_2(13, 2) &= 18.69 \\ I_2(14, 2) &= 12.94 & & & & & & \end{aligned}$$



```

f Centro:
1
{{ 547.0}, { 547.0}, { 369.0}, { 381.0}, { 516.0}, { 367.0}, { 332.0}, { 422.0}}
{7, 8, 3, 4, 6, 2, 1, 5}
f Media:
2
{{ 322.5}, { 270.9}, { 205.1}, { 198.0}, { 257.5}, { 205.1}, { 222.6}, { 187.0}}
{8, 7, 3, 2, 6, 4, 5, 1}
f Varianzas:
3
{{ 29058.3}, { 24381.6}, { 12979.6}, { 14346.5}, { 22474.0}, { 14045.6}, {
10691.7}, { 14237.3}}
{8, 7, 2, 5, 6, 3, 1, 4}
f Coeficiente de Variación:
4
{{ 0.529}, { 0.576}, { 0.555}, { 0.605}, { 0.582}, { 0.578}, { 0.464}, { 0.638}}
{2, 4, 3, 7, 6, 5, 1, 8}
f Desviación Absoluta Media:
5
{{ 141.0}, { 120.6}, { 93.9}, { 99.5}, { 121.3}, { 103.1}, { 80.0}, { 97.8}}
{8, 6, 2, 4, 7, 5, 1, 3}
f Índice de Schutz:
6
{{ 0.0273}, { 0.0278}, { 0.0286}, { 0.0314}, { 0.0294}, { 0.0314}, { 0.0225}, {
0.0327}}
{2, 3, 4, 6, 5, 7, 1, 8}
f Suma de Diferencias Absolutas:
7
{{ 12248.0}, { 11110.0}, { 8254.0}, { 8680.0}, { 10648.0}, { 8502.0}, {
7018.0}, { 8392.0}}
{8, 7, 2, 5, 6, 4, 1, 3}
f Índice de Gini:
8
{{ 0.297}, { 0.320}, { 0.314}, { 0.342}, { 0.323}, { 0.324}, { 0.246}, { 0.351}}
{2, 4, 3, 7, 5, 6, 1, 8}
f Coeficiente de entropía de Theil:
9
{{ 0.126}, { 0.141}, { 0.127}, { 0.155}, { 0.135}, { 0.131}, { 0.085}, { 0.150}}
{2, 6, 3, 8, 5, 4, 1, 7}
f Varianza de logaritmos:
10
{{ 0.0292}, { 0.0374}, { 0.0351}, { 0.0427}, { 0.0489}, { 0.0472}, { 0.0171}, {
0.0449}}
{2, 4, 3, 5, 8, 7, 1, 6}
f Diferencia máxima:
11
{{ 381.0}, { 422.0}, { 265.0}, { 282.0}, { 422.0}, { 268.0}, { 203.0}, { 328.0}}
{6, 7, 2, 4, 8, 3, 1, 5}
f Máxima Desviación Absoluta:
12
{{ 322.5}, { 276.1}, { 205.1}, { 198.0}, { 258.5}, { 205.1}, { 222.6}, { 235.0}}
{8, 7, 2, 1, 6, 3, 4, 5}
f Máxima suma de diferencias absolutas:
13
{{ 2580.0}, { 2209.0}, { 1641.0}, { 1584.0}, { 2068.0}, { 1641.0}, {
1781.0}, { 1880.0}}
{8, 7, 2, 1, 6, 3, 4, 5}
f Suma de las máximas diferencias absolutas:
14
{{ 3359.0}, { 3158.0}, { 2264.0}, { 2320.0}, { 3034.0}, { 2336.0}, {
2187.0}, { 2470.0}}
{8, 7, 2, 3, 6, 4, 1, 5}

```

Figura 1.7: Valores de las 14 medidas en todos los vértices

Para  $j = 12, 13$

$$\begin{aligned}
 I_2(1, j) &= 14.76 & I_2(2, j) &= 5.88 & I_2(3, j) &= 34.18 & I_2(4, j) &= 30.24 \\
 I_2(5, j) &= 24.42 & I_2(6, j) &= 39.90 & I_2(7, j) &= 23.68 & I_2(8, j) &= 39.06 \\
 I_2(9, j) &= 83.02 & I_2(10, j) &= 14.76 & I_2(11, j) &= 38.92 & I_2(14, j) &= 6.08
 \end{aligned}$$

Los valores de los indicadores  $I_3$  e  $I_4$  son los de las Figuras 1.8 y 1.9 respectivamente.

|    | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    |
|----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 12 | 100.0 | 65.6  | 90.6  | 62.5  | 81.3  | 53.1  | 87.5  | 59.4  | 65.6  | 62.5  | 90.6  |
| 13 | 78.1  | 100.0 | 75.0  | 34.4  | 78.1  | 31.3  | 78.1  | 31.3  | 43.8  | 46.9  | 62.5  |
| 14 | 78.1  | 78.1  | 100.0 | 59.4  | 90.6  | 50.0  | 96.9  | 56.3  | 68.8  | 59.4  | 87.5  |
| 1  | 65.6  | 100.0 | 75.0  | 34.4  | 78.1  | 31.3  | 78.1  | 31.3  | 43.8  | 46.9  | 62.5  |
| 2  | 87.5  | 87.5  | 75.0  | 59.4  | 90.6  | 50.0  | 96.9  | 56.3  | 68.8  | 59.4  | 87.5  |
| 3  | 90.6  | 75.0  | 100.0 | 59.4  | 90.6  | 50.0  | 96.9  | 56.3  | 68.8  | 59.4  | 87.5  |
| 4  | 62.5  | 34.4  | 59.4  | 100.0 | 56.3  | 90.6  | 56.3  | 96.9  | 90.6  | 87.5  | 71.9  |
| 5  | 81.3  | 78.1  | 90.6  | 56.3  | 100.0 | 53.1  | 93.8  | 53.1  | 59.4  | 68.8  | 84.4  |
| 6  | 53.1  | 31.3  | 50.0  | 90.6  | 53.1  | 100.0 | 46.9  | 93.8  | 81.3  | 84.4  | 62.5  |
| 7  | 87.5  | 78.1  | 96.9  | 56.3  | 93.8  | 46.9  | 100.0 | 53.1  | 65.6  | 62.5  | 84.4  |
| 8  | 59.4  | 31.3  | 56.3  | 96.9  | 53.1  | 93.8  | 53.1  | 100.0 | 87.5  | 84.4  | 68.8  |
| 9  | 65.6  | 43.8  | 68.8  | 90.6  | 59.4  | 81.3  | 65.6  | 87.5  | 100.0 | 78.1  | 68.8  |
| 10 | 62.5  | 46.9  | 59.4  | 87.5  | 68.8  | 84.4  | 62.5  | 84.4  | 78.1  | 100.0 | 71.9  |
| 11 | 90.6  | 62.5  | 87.5  | 71.9  | 84.4  | 62.5  | 84.4  | 68.8  | 68.8  | 71.9  | 100.0 |
| 12 | 78.1  | 87.5  | 81.3  | 46.9  | 78.1  | 43.8  | 78.1  | 43.8  | 50.0  | 53.1  | 75.0  |
| 13 | 78.1  | 87.5  | 81.3  | 46.9  | 78.1  | 43.8  | 78.1  | 43.8  | 50.0  | 53.1  | 75.0  |
| 14 | 90.6  | 75.0  | 93.8  | 59.4  | 90.6  | 56.3  | 90.6  | 56.3  | 62.5  | 65.6  | 87.5  |

Figura 1.8: Valores de  $I_3$  para las 14 medidas

Se comprueba que excepto la función  $f_5$ , Desviación Absoluta Media, todas las funciones experimentan algún cambio en la ordenación de los vértices, y que

|       | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    | 13    |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 14    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 1     | 0.00  | 43.75 | 18.75 | 56.25 | 31.25 | 68.75 | 25.00 | 62.50 | 50.00 | 56.25 | 18.75 | 31.25 | 31.25 |
| 18.75 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 2     | 43.75 | 0.00  | 37.50 | 81.25 | 37.50 | 93.75 | 31.25 | 87.50 | 75.00 | 81.25 | 50.00 | 25.00 | 25.00 |
| 31.25 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 3     | 18.75 | 37.50 | 0.00  | 56.25 | 18.75 | 68.75 | 6.25  | 62.50 | 50.00 | 56.25 | 18.75 | 25.00 | 25.00 |
| 12.50 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 4     | 56.25 | 81.25 | 56.25 | 0.00  | 56.25 | 18.75 | 56.25 | 6.25  | 18.75 | 25.00 | 56.25 | 75.00 | 75.00 |
| 56.25 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 5     | 31.25 | 37.50 | 18.75 | 56.25 | 0.00  | 68.75 | 12.50 | 62.50 | 56.25 | 50.00 | 25.00 | 37.50 | 37.50 |
| 18.75 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 6     | 68.75 | 93.75 | 68.75 | 18.75 | 68.75 | 0.00  | 68.75 | 12.50 | 31.25 | 25.00 | 68.75 | 87.50 | 87.50 |
| 68.75 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 7     | 25.00 | 31.25 | 6.25  | 56.25 | 12.50 | 68.75 | 0.00  | 62.50 | 50.00 | 56.25 | 25.00 | 31.25 | 31.25 |
| 12.50 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 8     | 62.5  | 87.5  | 62.50 | 6.25  | 62.50 | 12.50 | 62.50 | 0.00  | 18.75 | 25.00 | 62.50 | 81.25 | 81.25 |
| 62.50 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 9     | 50.00 | 75.00 | 50.00 | 18.75 | 56.25 | 31.25 | 50.00 | 18.75 | 0.00  | 37.50 | 50.00 | 68.75 | 68.75 |
| 50.00 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 10    | 56.25 | 81.25 | 56.25 | 25.00 | 50.00 | 25.00 | 56.25 | 25.00 | 37.50 | 0.00  | 43.75 | 75.00 | 75.00 |
| 56.25 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 11    | 18.75 | 50.00 | 18.75 | 56.25 | 25.00 | 68.75 | 25.00 | 62.50 | 50.00 | 43.75 | 0.00  | 31.25 | 31.25 |
| 18.75 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 12    | 31.25 | 25.00 | 25.00 | 75.00 | 37.50 | 87.50 | 31.25 | 81.25 | 68.75 | 75.00 | 31.25 | 0.00  | 0.00  |
| 18.75 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 13    | 31.25 | 25.00 | 25.00 | 75.00 | 37.50 | 87.50 | 31.25 | 81.25 | 68.75 | 75.00 | 31.25 | 0.00  | 0.00  |
| 18.75 |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 14    | 18.75 | 31.25 | 12.50 | 56.25 | 18.75 | 68.75 | 12.50 | 62.50 | 50.00 | 56.25 | 18.75 | 18.75 | 18.75 |
| 0.00  |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |

Figura 1.9: Valores de  $I_4$  para las 14 medidas



disminuye el nivel de coincidencia aunque manteniéndose similares agrupaciones en función de los valores de los índices  $I_3$  e  $I_4$ .

Con este ejemplo podemos refutar cualquier afirmación de carácter general relativa a la robustez de estas medidas, ya que pequeñas modificaciones originan numerosos cambios en la ordenación de los vértices.

Se constata que el comportamiento de las medidas  $f_{12}$  y  $f_{13}$  es idéntico en los dos casos estudiados hasta ahora, por ello se analizan estas dos funciones antes de proceder al estudio a gran escala.

- Máxima Desviación Absoluta

$$f_{12}(k) = \max_i |d_i(k) - \bar{d}(k)|$$

Sea un vértice fijo  $v_k$ , considerando que  $\bar{d}(k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i(k)$  y sustituirlo en la expresión  $|d_i(k) - \bar{d}(k)|$  resulta:

$$\begin{aligned} |d_i(k) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_j(k)| &= \frac{1}{n} |nd_i(k) - \sum_{j=1}^n d_j(k)| = \\ &= \frac{1}{n} \left| \sum_{j=1}^n d_j(k) - nd_i(k) \right| \end{aligned}$$

Cuando se calcula el máximo en  $i$ , éste se alcanza en uno de los dos casos siguientes:

1. Cuando  $\sum_{j=1}^n d_j(k) - nd_i(k) > 0$ , como  $\sum_{j=1}^n d_j(k)$  es independiente del vértice  $i$ , resulta que

$$\max_i \left\{ \sum_{j=1}^n d_j(k) - nd_i(k) \right\} = \sum_{j=1}^n d_j(k) - \min_i \{nd_i(k)\}$$

y por tanto, denotando por  $v_p$  al vértice más próximo al vértice  $v_k$ , el máximo se alcanza para dicho vértice con un valor de la función

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_j(k) - d_p(k) = \bar{d}(k) - d_p(k)$$

2. Cuando  $\sum_{j=1}^n d_j(k) - nd_i(k) < 0$  resulta

$$\begin{aligned} \max_i \left| \sum_{j=1}^n d_j(k) - nd_i(k) \right| &= -\min_i \left\{ \sum_{j=1}^n d_j(k) - nd_i(k) \right\} = \\ &= -\left\{ \sum_{j=1}^n d_j(k) - \max_i nd_i(k) \right\} \end{aligned}$$

y por tanto, denotando por  $v_l$  al vértice más lejano al vértice  $v_k$ , el máximo se alcanza para dicho vértice con un valor de la función

$$d_l(k) - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n d_j(k) = d_l(k) - \bar{d}(k)$$

Como consecuencia

$$f_{12}(k) = \max\{(\bar{d}(k) - d_p(k)), (d_l(k) - \bar{d}(k))\}$$

- Máxima Suma de Diferencias Absolutas

$$f_{13}(k) = \max_i \sum_{j=1}^n |d_i(k) - d_j(k)|$$

Para el mismo vértice fijo  $v_k$ , se consideran las distancias  $\{d_j(k) : j = 1, \dots, n\}$

Denotando por  $v_l$  al vértice más lejano del  $v_k$ , y por  $v_p$  al más próximo al  $v_k$ , es decir

$$d_l(k) = \max_j d_j(k) \quad \text{y} \quad d_p(k) = \min_j d_j(k)$$

Cualquier vértice  $v_i$ , con  $i \neq k$  verifica  $0 = d_k(k) = d_p(k) \leq d_i(k) \leq d_l(k)$

Sea  $x \in [d_p(k), d_l(k)]$ . Es conocido que la función  $\sum_{j=1}^n |x - d_j(k)|$  es una poligonal convexa en su dominio  $[d_p(k), d_l(k)]$ , y que por tanto el máximo se obtendrá sobre uno de los extremos del intervalo, es decir en el vértice  $v_p$  más próximo al  $v_k$  o en  $v_l$  el vértice más lejano del  $v_k$ . En estos dos vértices la función resulta:

1. Para  $v_p = v_k$  el vértice más próximo a  $v_k$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |d_p(k) - d_j(k)| &= \sum_{j=1}^n (d_j(k) - d_p(k)) = \\ &= \sum_{j=1}^n d_j(k) - nd_p(k) \end{aligned}$$

2. Para  $v_l$  el vértice más lejano de  $v_k$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n |d_l(k) - d_j(k)| &= \sum_{j=1}^n (d_l(k) - d_j(k)) = \\ &= nd_l(k) - \sum_{j=1}^n d_j(k) \end{aligned}$$

Como consecuencia

$$\begin{aligned} f_{13}(k) &= \max_i \sum_{j=1}^n |d_i(k) - d_j(k)| = \\ &= \max\{(nd_{\bar{d}}(k) - nd_p(k)), (nd_l(k) - n\bar{d}(k))\} \end{aligned}$$

Es decir, se comprueba que además de que para cada vértice fijo  $v_k$ , las imágenes que proporcionan las funciones  $f_{12}$  y  $f_{13}$ , están asociados al mismo vértice  $v_i$ , también sus valores son proporcionales, ya que para  $n = |V|$  resulta

$$f_{13}(k) = n f_{12}(k)$$

En consecuencia, queda demostrado el siguiente



**Lema 1.4.1** *En el caso de grafos equiponderados, las funciones Máxima Desviación Absoluta,  $f_{12}$  y Máxima Suma de Diferencias Absolutas,  $f_{13}$ , restringidas a los vértices, obtienen los mínimos para el mismo vértice y sus valores son proporcionales.*

Puede concluirse que estas dos medidas de localización se van a comportar siempre del mismo modo, en el caso equiponderado, localizando el servicio en el mismo vértice, y con valores proporcionales. Aunque en dicha situación podemos dejar de considerar una de ellas, dado que ambas están propuestas en la literatura, y que en el caso ponderado no se verifica esta propiedad, se ha modificado levemente el procedimiento de cálculo de  $f_{12}$  de forma que si se produce igualdad en el óptimo para varios vértices, utilizando el orden lexicográfico inverso se ponga de manifiesto la existencia de óptimos múltiples.

Como se ha señalado, hasta ahora en la literatura sólo se han realizado comparaciones sobre el comportamiento de algunas de estas medidas y para un conjunto reducido de grafos. Por ello en la presente memoria se aborda una extensa comparación utilizando dos conjuntos de grafos. En primer lugar se ha procedido a estudiar el comportamiento de las medidas en los grafos que están disponibles bajo ftp anónimo en la dirección

*ftp : //ftp.cs.sunysb.edu/pub/Combinatorica/graf fiti/*

De los 195 grafos que aparecen en la citada dirección, hemos seleccionado los 150 conexos de mayor tamaño.

En el Anexo 1 en primer lugar se encuentra el programa desarrollado para la obtención de los óptimos de los distintos criterios. A continuación están los resultados, que comienzan con los vértices que proporcionan los óptimos para cada una de las catorce funciones  $f_i$  y para los 150 grafos seleccionados.

Como podemos constatar para este conjunto de grafos el número de vértices  $n$

varía de 6 a 144, y el  $p = \frac{m}{\binom{n}{2}}$  desde 0.02 hasta 1.

A continuación se presentan los valores del índice  $I_1$ , que para cada par de medidas muestra el porcentaje de grafos en los que se localiza el servicio en el mismo vértice, mientras que para los otros tres índices  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$  se han recogido sus valores medios y las desviaciones típicas de los mismos.

A la vista de los valores de los índices  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$  se comprueba la coherencia de estos cuatro índices ya que, para un par dado de funciones, a pequeños valores del índice  $I_4$  y de la función de tolerancia  $I_2$  corresponden altos valores de  $I_1$  e  $I_3$ .

Las agrupaciones que resultan son las siguientes:

$$\{f_1, f_{11}, f_{12}, f_{13}, f_{14}\}, \quad \{f_3, f_5, f_7, f_9\}, \quad \{f_4, f_6, f_8, f_{10}\}$$

Son de destacar así mismo los bajos valores de las desviaciones típicas de los índices para los pares de funciones consideradas dentro de cada agrupación.

Para las medidas  $f_{12}$  y  $f_{13}$  se constata que se obtienen valores idénticos para  $I_2$  mientras que son diferentes los otros tres índices, esto es debido a que, como hemos señalado, en el caso de existir óptimos múltiples se ha optado por elegir para el criterio  $f_{12}$  el vértice de menor etiqueta y para  $f_{13}$  el de mayor etiqueta. Por ejemplo, el grafo etiquetado “graffiti-038” es uno de los que tiene más de un vértice para los que  $f_{12}$  y  $f_{13}$  obtienen idéntico valor.

Como segunda fase de la comparación, a fin de contrastar si este resultado se verifica con mayor generalidad se ha empleado el algoritmo de generación de grafos aleatorios incluido en “Combinatorica” del paquete “Mathematica”.

Dado que los grafos generados los representa mediante unas posiciones de los vértices en el plano que tienden a distribuirse en círculos, se ha realizado una segunda aleatorización de forma que, manteniendo la matriz de adyacencia del grafo, y en



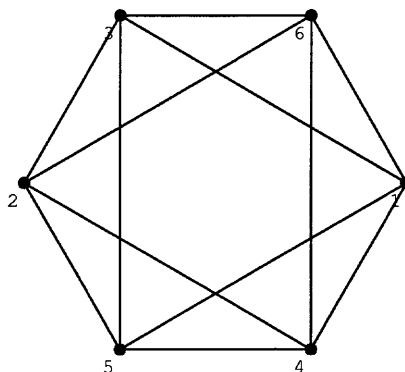


Figura 1.10: Grafo 38 de Skiena

consecuencia su topología, los vértices se han redistribuido mediante otra rutina de aleatorización de puntos en el plano.

El diseño de generación ha sido el que aparece en la siguiente tabla.

| n   | p    | nb  | ng  |
|-----|------|-----|-----|
| 10  | 0.5  | 400 | 394 |
| 20  | 0.25 | 400 | 379 |
| 50  | 0.1  | 400 | 300 |
| 100 | 0.05 | 500 | 263 |

donde  $nb$  = número de grafos generados,  $ng$  = número de grafos generados que resultan conexos,  $n$  = número de vértices, y  $p$  = probabilidad de que exista una arista entre un par fijo de vértices.

Al igual que para el primer conjunto de grafos estudiados, en el Anexo 2 aparecen las matrices correspondientes a los valores medios de  $I_1$  y a los valores medios y las

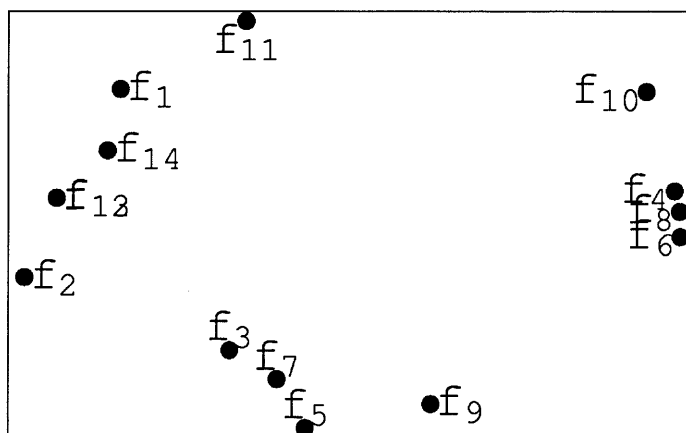
desviaciones típicas de los índices  $I_2$ ,  $I_3$  e  $I_4$  para los grafos de igual número de vértices para cada una de las muestras de grafos.

Aunque se puede comprobar que se mantiene la agrupación de las medidas, analizando los valores de los índices, se ha buscado una representación gráfica que haga más visible estas relaciones, de acuerdo con la técnica de escalamiento multidimensional (Cox y Cox [11]). Para ello hemos recurrido al algoritmo PROXCAL del grupo DTSS (Data Theory Scaling System) de la Facultad de Ciencias Sociales y del Comportamiento de la Universidad de Leiden que se incluye en el paquete SPSS.

Utilizando la matriz de valores medios de  $I_4$  de los grafos de tamaño 100 como matriz de “similaridad” o proximidad se obtienen las coordenadas asignadas a cada una de las  $f_i$  que aparecen en la siguiente tabla,

|          | Dimensión 1 | Dimensión 2 |
|----------|-------------|-------------|
| $f_1$    | -.529       | .296        |
| $f_2$    | -.776       | -.097       |
| $f_3$    | -.246       | -.251       |
| $f_4$    | .910        | .082        |
| $f_5$    | -.049       | -.413       |
| $f_6$    | .925        | -.014       |
| $f_7$    | -.123       | -.311       |
| $f_8$    | .924        | .039        |
| $f_9$    | .278        | -.363       |
| $f_{10}$ | .837        | .290        |
| $f_{11}$ | -.203       | .438        |
| $f_{12}$ | -.693       | .069        |
| $f_{13}$ | -.693       | .069        |
| $f_{14}$ | -.561       | .168        |

y cuya representación es la siguiente:



### Caso ponderado

Tras el estudio de instancias en las que los pesos son idénticos para todos los vértices, se procede al estudio del caso en que los pesos de los vértices difieren. Para esta situación se han generado, de acuerdo con los parámetros anteriormente señalados, 1700 grafos aleatorios con la siguiente distribución:

| n   | p    | nb  | ng  |
|-----|------|-----|-----|
| 10  | 0.5  | 400 | 388 |
| 20  | 0.25 | 400 | 359 |
| 50  | 0.1  | 400 | 304 |
| 100 | 0.05 | 500 | 269 |

Para cada grafo se ha generado un conjunto de pesos aleatorios normalizado, empleando la rutina `Random[ ]` de la versión 4 del paquete "Mathematica". En el anexo 3 aparecen los valores medios de los índices  $I_1, I_2, I_3$  e  $I_4$  y las desviaciones típicas de  $I_2, I_3$  e  $I_4$ , para cada uno de los conjuntos de grafos de igual número de vértices.



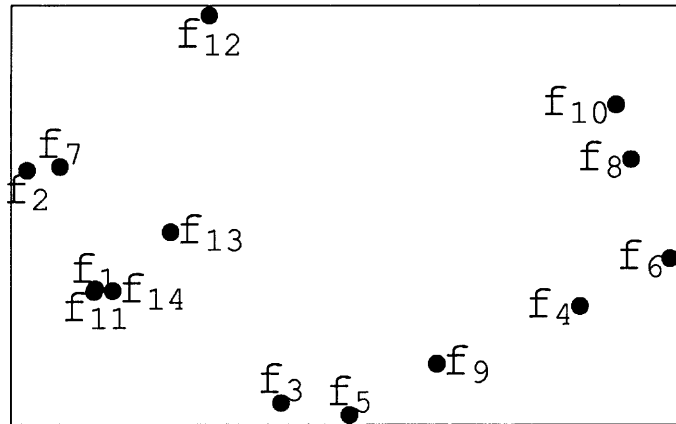
A la vista de estos resultados, puede señalarse que la introducción de pesos ha supuesto por un lado una disminución de la “proximidad” entre algunas medidas consecuencia de la forma en que se introduce la ponderación, según sean criterios que pretenden minimizar la diferencia entre distancias y distancia media, o entre pares de distancias, y por otro un aumento de la “proximidad” entre las medidas “tipo rango”.

Análogamente al caso equiponderado se ha utilizado la matriz de valores medios de  $I_4$  de los grafos de tamaño 100 como matriz de “similaridad” o proximidad para el escalamiento multidimensional, resultando las siguientes coordenadas:

|          | Dimensión 1 | Dimensión 2 |
|----------|-------------|-------------|
| $f_1$    | -.568       | -.120       |
| $f_2$    | -.743       | .227        |
| $f_3$    | -.075       | -.437       |
| $f_4$    | .714        | -.161       |
| $f_5$    | .107        | -.471       |
| $f_6$    | .952        | -.025       |
| $f_7$    | -.657       | .238        |
| $f_8$    | .848        | .260        |
| $f_9$    | .338        | -.325       |
| $f_{10}$ | .809        | .418        |
| $f_{11}$ | -.564       | -.112       |
| $f_{12}$ | -.265       | .672        |
| $f_{13}$ | -.376       | -.050       |
| $f_{14}$ | -.519       | -.117       |

cuya representación es la de la página siguiente.

Se puede comprobar, en primer lugar, que las funciones  $f_{12}$ , Máxima Desviación Absoluta y  $f_{13}$ , Máxima Suma de Diferencias Absolutas, no sólo se comportan de forma distinta sino que existe una gran diferencia reflejada por los índices  $I_1(12, 13)$ ,



$I_2(12, 13)$ ,  $I_3(12, 13)$  e  $I_4(12, 13)$ .

Podemos señalar que en este escalamiento multidimensional se han producido las siguientes agrupaciones:  $\{f_1, f_{11}, f_{13}, f_{14}\}$ ,  $\{f_3, f_5, f_9\}$  y  $\{f_4, f_6, f_8, f_{10}\}$ .

Las medidas incluidas en la primera agrupación están más relacionadas que en el caso equiponderado, para la segunda se detecta un nivel “análogo” de agrupación, mientras para la tercera agrupación se observa un menor nivel de relación. Así mismo, se constata que las funciones  $f_{12}$  y  $f_7$  se separan de las tres agrupaciones señaladas.

## 1.5 Preliminares para el caso continuo

De las funciones planteadas en la sección previa, por lógicas razones de extensión de esta memoria y dado el interés en centrarnos en medidas de igualdad, se han considerado inicialmente las incluidas en el conjunto  $\{f_3, f_5, f_7, f_9\}$  así como las del  $\{f_4, f_6, f_8, f_{10}\}$ , para los problemas en los que el servicio puede ser localizado en cualquier punto del grafo.

Por tanto, el problema consiste en, dada una función objetivo  $f$  que cuantifica la desigualdad, encontrar  $x^* \in G$  tal que

$$f(x^*) = \min_{x \in G} \{f(x)\}.$$

Distintos autores, (Mulligan (1991), Mandel (1991), Campbel (1990), Allison y Kolm (1976), Champernowne (1974), Atkinson (1970)), han propuesto varios criterios y propiedades que pueden ser considerados al seleccionar una medida de igualdad. Estas funciones objetivo proceden de diversas disciplinas y a menudo del estudio de problemas particulares. Por ello, su importancia en algunas situaciones no implica su relevancia en otras.

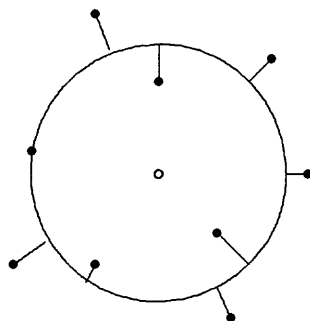
Una recopilación de las propiedades más citadas en la literatura es la de Marsh y Schilling [44], que a continuación describimos brevemente, siendo destacable que ninguna de las funciones planteadas cumple todos los principios deseables.

**Tratabilidad analítica.** Es el primer aspecto a tener en cuenta, pues dependiendo del tamaño del problema y la función objetivo a optimizar, el costo computacional requerido puede ser más o menos importante, o incluso hacer inviable la obtención de la solución por métodos analíticos o numéricos.

De las medidas consideradas, en lo que respecta, a la tratabilidad analítica presentan más dificultad las que involucran valores absolutos o logaritmos, debido a la no diferenciabilidad de las primeras y al comportamiento en torno al cero de las segundas.

**Adecuación.** Este criterio representa la concordancia o acuerdo de la función con los valores u opiniones del decisor. Es importante que las medidas matemáticas de igualdad no resulten difíciles de entender o interpretar por parte del decisor.

Como pone de manifiesto Erkut con el siguiente ejemplo,



si el centro del círculo representa al servicio y los puntos los usuarios o clientes, el radio de la circunferencia representa la distancia media de los usuarios al servicio, y por tanto los segmentos representan la desviación absoluta de la distancia al servicio respecto a la distancia media. En nuestro caso la Varianza sería la media de los cuadrados de estas desviaciones, mientras que la Desviación Absoluta Media sería la media de estos valores. Por ello ambas medidas son “adecuadas” desde el punto de vista de su fácil interpretación.

**Imparcialidad.** Este criterio lo cumplen todas las medidas matemáticas, puesto que la indexación de los grupos es “ciega” y arbitraria.

**Principio de transferencia,** o de Pigou-Dalton. Establece que dados dos usuarios, uno más lejano al servicio que el otro, si se acerca al servicio el lejano, mientras que se aleja en la misma distancia al cercano, el valor de una medida de igualdad debe mejorar si en la nueva posición la diferencia entre las distancias al servicio de esos dos usuarios ha disminuido. Es decir, si las distancias de los usuarios al servicio son:

$$\{d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_j, \dots, d_n\} \quad \text{con } d_i < d_j$$

y al modificar la posición del servicio resulta que las distancias son:

$$\{d_1, d_2, \dots, d_i + \varepsilon, \dots, d_j - \varepsilon, \dots, d_n\}$$

con  $\varepsilon > 0$ , y  $|(d_j - \varepsilon) - (d_i + \varepsilon)| < |d_j - d_i|$  para la nueva situación el valor de la función objetivo debe ser menor.

El principio de transferencia sólo lo cumplen  $f_4$ , coeficiente de variación, y  $f_6$ , Índice de Gini.

**Invarianza de escala.** Para una medida  $f$ , se debe verificar que  $f(x) = f(\lambda x)$  con  $\lambda$  constante. Establece que no se modifica el nivel de igualdad si por ejemplo tomamos distintas unidades de distancia como el metro, el kilómetro o la milla.

Las medidas  $f_3, f_5, f_7$  no lo verifican, de ahí la popularidad en el campo de la economía de las correspondientes medidas normalizadas que sí lo verifican  $f_4, f_6, f_8$ .

**Optimalidad Pareto.** Concepto introducido en economía al estudiar la distribución de ingresos. En general, el principio de optimalidad Pareto implica que cuando la solución mejora, ninguno de los individuos o grupos afectados estará peor. En el contexto de localización, con objetivos atractivos significa que si la medida del sistema mejora, al menos algún individuo se acercará al servicio. Campbell (1990) advierte que la optimalidad Pareto considera sólo la eficiencia, y pone de manifiesto que cuando el espacio es el plano, las medidas de igualdad pueden alejar el servicio de los usuarios como fórmula de igualar las distancias. Este efecto puede estar atenuado cuando el espacio de localización es un grafo.

**Normalización.** Esta característica es más restrictiva que el principio de invarianza de escala. Sugiere que la medida tenga rango en  $[0, 1]$ , indicando el 0 la perfecta igualdad. Alker [2] considera que las medidas normalizadas permiten la comparación entre las distribuciones para diferentes medidas, sin embargo si la función está acotada, no existe dificultad para normalizarla. Cuestión distinta es el que no se considere necesaria, por muchos autores, esta transformación.

## 1.6 Resultados previos

### Varianza

El problema de localización en redes con el criterio Varianza, ha sido estudiado entre otros, por Maimon [39], que en el caso de árboles plantea un algoritmo de complejidad temporal  $O(n)$  para obtener el punto de mínima varianza. Kincaid y Maimon ([32],[31]) consideran el problema sobre grafos triangulares en los casos discreto y continuo y proponen un algoritmo de tiempo lineal, haciendo una transformación del grafo original en una estructura árbol.

Posteriormente Hansen y Zheng [26], generalizan el problema estudiándolo sobre una red cíclica, y proponen un algoritmo de tiempo  $O(mn \log n)$  para determinar un punto de la red de  $m$  aristas y  $n$  vértices, que minimiza la varianza de las distancias ponderadas a los vértices.

Además, en nuestro grupo de investigación (código PAI-FQM-241), López de los Mozos y Mesa ([35], [36]) han aportado resultados en redes cíclicas, generalizando el problema al establecimiento de  $p$  servicios y teniendo en cuenta otros aspectos como es la consideración de demanda continuamente distribuida, y Cáceres, López de los Mozos y Mesa [7] han estudiado el camino de mínima varianza para el caso particular de redes árbol.

### Desviación Absoluta Media

Berman y Kaplan [4] demuestran que cuando se disminuye la función desviación absoluta media de distancias de los usuarios al servicio, respecto de la media se consigue minimizar la desigualdad de acceso entre los usuarios, y por tanto la función  $f_5$  es claramente una función que busca el objetivo de igualdad. Además estos autores para el caso de establecer un servicio sobre una red general, proponen un algoritmo de complejidad temporal  $O(mn^2)$ . Posteriormente, Tamir [63] diseña una estrategia por la que disminuye la complejidad del procedimiento, resultando ser

$O(mn \log n)$ .

### Suma de Diferencias Absolutas

Mientras las funciones Varianza y Desviación Absoluta Media consideran las diferencias de distancias de los usuarios al servicio y la distancia media, ésta función utiliza las diferencias de distancias al servicio entre los usuarios. En cierto sentido se puede interpretar como el nivel de envidias entre usuarios. Keeny en 1989 la utiliza en un problema para establecer la localización de residuos peligrosos. Recientemente, López de los Mozos y Mesa [38], siguiendo la línea de trabajo en la profundización de las medidas de igualdad, realizan un estudio de la misma aportando un algoritmo de complejidad temporal  $O(mn^2 \log n)$  para obtener la localización de un servicio sobre una red general, para la que se minimiza esta función.

Las funciones anteriores son absolutas, dependen de distancias respecto de la media. Usando estas medidas se pueden comparar dos soluciones con la misma media y la que tenga menor valor se puede considerar menos desigual. Sin embargo, no podemos comparar soluciones con distintos valores de la distancia media  $\bar{d}$ . Para cada una de estas medidas, dividiendo por la distancia media  $\bar{d}$  obtenemos la correspondiente medida relativa.

### Coefficiente de variación

Es una modificación de la varianza, que se define como la desviación típica dividida por la media. Podemos considerarla como:

$$f_A(k) = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n w_i (d_i(k) - \bar{d}(k))^2}}{\bar{d}(k)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i \left(\frac{d_i(k)}{\bar{d}(k)} - 1\right)^2}$$

Los economistas la han utilizado para comparar distribuciones de ingresos de distintos países, (Atkinson, 1970) o también, para comparar el poder político y la riqueza (Allison [3]). En el contexto de redes solo conocemos el trabajo de Cáceres, Mesa y Pino [9].



### Índice de Schutz

Es la medida relativa correspondiente a  $f_5$ , la desviación absoluta media.

$$f_6(k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i \left| \frac{d_i(k)}{\bar{d}(k)} - 1 \right|$$

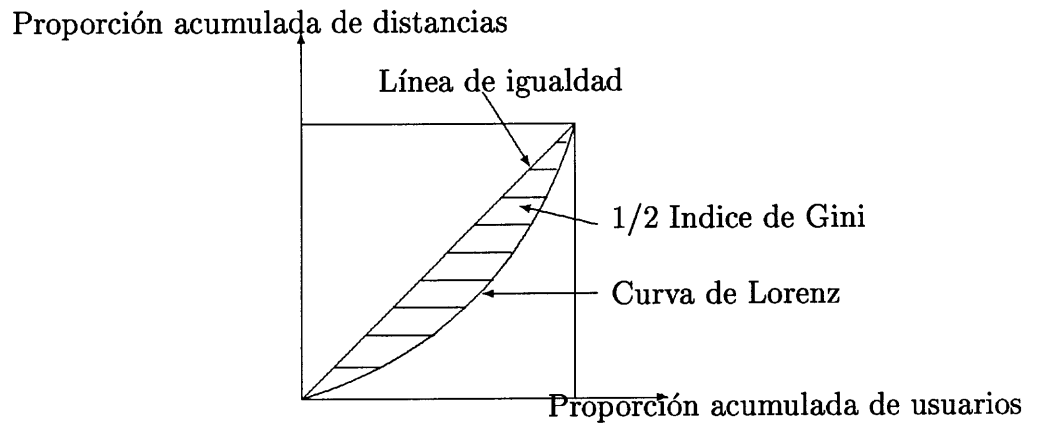
Igual que en el caso del coeficiente de variación se ha aplicado en el campo de la economía y sociología (Allison [3]). Para problemas de localización en los que intervengan la distribución de distancias al servicio, sólo se conocen algunas propiedades, expuestas anteriormente, y en el caso de grafos no tenemos constancia ni de su utilización, ni de estrategias para obtener soluciones.

### Índice de Gini

Esta medida se suele introducir a partir de la curva de Lorenz, estudiada en economía. Fueron Halpern y Maimon [24] quienes sugirieron el concepto de punto de Lorenz. Un punto de Lorenz para un problema de localización es aquel que minimiza la proporción de la distancia al servicio de los usuarios con relación a los usuarios que utilizan dicho servicio. Maimon [40] desarrolló un algoritmo para la obtención de los puntos de Lorenz sobre árboles cuya complejidad temporal es  $O(n^3 \log n)$ .

Geoméricamente, el valor del índice de Gini coincide con el área comprendida entre la línea de pendiente 1 (que se suele denominar como de perfecta igualdad) y la curva de Lorenz.





Además de por razones económicas, hay otros campos en los que se utiliza; por ejemplo, Mandel [52] considera que refleja la “media del nivel de envidias percibidas cuando existe desigualdad”.

### Varianza de logaritmos

La función  $f_{10}$ , es una transformación de la varianza para reducir la escala. Tiene el problema de que la no definición del logaritmo en cero obliga a eliminar la posibilidad de solución en los vértices, y también surgen problemas de convergencia de la función logaritmo en torno al origen. Sólo tenemos constancia de su propuesta como función que teóricamente pueda considerarse, pero no de aplicaciones a problemas concretos.

## **Capítulo 2.**

# **Localización de un servicio**

## Capítulo 2.

### Localización de un servicio

En el anterior resumen de resultados previos para el caso en que el servicio pueda ser localizado en cualquier punto de la red, se constata que el coeficiente de variación y el Índice de Schutz verifican algunas de las propiedades que algunos autores han considerado deseable que verifiquen las medidas de igualdad, y que hasta ahora no se han propuesto algoritmos para obtener la localización que minimiza el valor de estas funciones.

El Índice de Schutz verifica la propiedad de invarianza de escala y entre los autores que aconseja su uso está Gaile [18]. El Coeficiente de Variación también verifica la invarianza de escala y además el principio de transferencia. Por ello, en el presente capítulo se estudian ambos criterios.

#### 2.1 Índice de Schutz

Sea  $G(V, E)$  el grafo general en estudio, definido en el capítulo anterior.

**Definición 2.1.1** *Sea  $x$  un punto cualquiera del grafo  $G$ . El Índice de Schutz se*



define como

$$S(x) = \frac{1}{2z_m(x)} \sum_{v_i \in V} w_i |d(v_i, x) - z_m(x)|$$

El Índice de Schutz es la medida relativa correspondiente a la Desviación Absoluta Media que como ya se ha mencionado adopta la siguiente expresión

$$\text{DAM}(x) = \sum_{v_i \in V} w_i |d(v_i, x) - z_m(x)| \quad (2.1)$$

Por tanto se verifica que

$$S(x) = \frac{\text{DAM}(x)}{2z_m(x)}, \quad x \in G, \quad \text{donde} \quad z_m(x) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, x)$$

El problema de localización que se plantea es el de determinar un  $x^* \in G$  tal que

$$S(x^*) \leq S(x), \quad \forall x \in G$$

### 2.1.1 Problema restringido a una arista

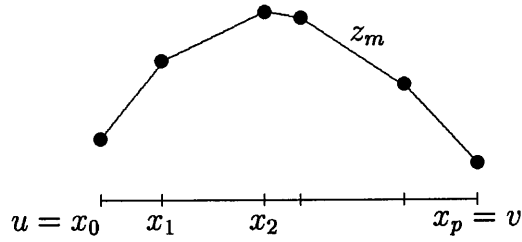
Al recorrer la arista  $[u, v]$ , de longitud  $l$ , se determinan los puntos cuello de botella así como los conjuntos de vértices asociados a cada uno de ellos  $VB(x_k)$ .

Se denota mediante CB al conjunto ordenado formado por los puntos cuello de botella y los vértices extremos de la arista, por tanto  $|CB| = p + 1$  puntos (ver página 21).

Como ya se señaló en el capítulo anterior, los conjuntos  $V_u(x)$ ,  $V_v(x)$  van cambiando a lo largo de la arista, pero permanecen fijos en cada región primaria  $I_k$ , y además en cada una de ellas se verifica que  $z_m(x) = g_k x + c_k$  donde  $g_k$  y  $c_k$  están expresadas en (1.5) y (1.6); más aún, dichos valores se actualizan para la siguiente

región primaria, en tiempo constante según (1.7) y (1.8). Se calcula de este modo el valor de la función mediana  $z_m$  para todos los puntos del conjunto CB.

En el siguiente dibujo se ilustra para una arista fija  $[u, v]$  los puntos del conjunto CB, así como el valor que toma en ellos la función  $z_m$ .



**Teorema 2.1.2** *La función DAM(x) es lineal a trozos y convexa sobre cada región primaria  $(x_{k-1}, x_k) \subset [u, v]$  con  $x_{k-1}, x_k \in CB$  (Berman y Kaplan [4]).*

Se verifica que:

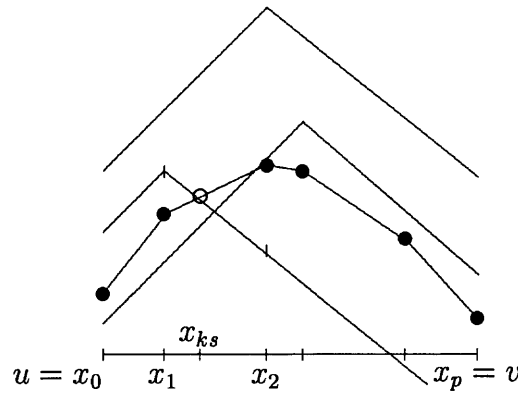
$$\begin{aligned} \text{DAM}(x) &= \sum_{i=1}^n w_i |d(v_i, x) - z_m(x)| = \\ &= \sum_{v_i \in V_u(I_k)} w_i |d(v_i, u) - c_k + (1 - g_k)x| + \sum_{v_i \in V_v(I_k)} w_i |d(v_i, v) + l - c_k - (1 + g_k)x| = \\ &= \sum_{i=1}^n |\Delta_i(x)| \end{aligned}$$

donde  $\Delta_i(x) = a_i x + b_i$  es una función lineal con

$$a_i = \begin{cases} (1 - g_k)w_i \geq 0, & \text{si } v_i \in V_u(I_k) \\ -(1 + g_k)w_i < 0, & \text{si } v_i \in V_v(I_k) \end{cases}$$

$$b_i = \begin{cases} w_i(d(v_i, u) - c_k), & \text{si } v_i \in V_u(I_k) \\ w_i(d(v_i, v) + l - c_k), & \text{si } v_i \in V_v(I_k) \end{cases}$$

Aplicando la **Proposición 1.2.3**, para el punto  $v_i \in G$  fijo y la arista  $[u, v]$ , la función  $d(v_i, x)$  con  $x \in [u, v]$  es continua y cóncava sobre  $[0, l]$ , lineal creciente con pendiente 1 sobre  $[0, \bar{x}[$  y lineal decreciente con pendiente -1 sobre  $]\bar{x}, l]$ , donde  $\bar{x}$  es su punto cuello de botella asociado. Debido a la forma de estas funciones distancia, las mismas se intersectan con la función  $z_m$  como máximo en cuatro puntos, tal como se ilustra en el siguiente dibujo (Tamir [63]).



Para cada vértice  $v_i$ , actuando por bisección se determina el intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  donde se cortan los segmentos  $[(x_{k-1}, z_m(x_{k-1})), (x_k, z_m(x_k))]$  con  $[(x_{k-1}, d(v_i, x_{k-1})), (x_k, d(v_i, x_k))]$ , conociendo al mismo tiempo dicho punto  $(x_{ks}, z_m(x_{ks}))$ . A estos puntos se les denomina puntos de ruptura.

De la definición se deduce que el signo de  $\Delta_i(x)$  para  $x \in (x_{k-1}, x_{ks}]$  es opuesto al signo de  $\Delta_i(x)$  para  $x \in (x_{ks}, x_k]$  y  $\Delta_i(x_{ks}) = 0$ .

Se consideran los subconjuntos de vértices, según conserven el signo de la expresión  $\Delta_i(x)$  o no.

**Definición 2.1.3** Los conjuntos de vértices  $A_{\alpha k}, B_{\alpha k}$  para  $\alpha = 1, 2$  se definen por

$$A_{1k} = \{v_i \in V_u(I_k) : b_i < 0\}, \quad A_{2k} = V_u(I_k) \setminus A_{1k}$$

$$B_{1k} = \{v_i \in V_v(I_k) : b_i > 0\}, \quad B_{2k} = V_v(I_k) \setminus B_{1k}$$

**Lema 2.1.4** En cada región primaria  $I_k$  se verifica que:

$$\text{si } v_i \in A_{2k} \implies \Delta_i(x) \geq 0, \text{ para } x \in I_k \text{ y}$$

$$\text{si } v_i \in B_{2k} \implies \Delta_i(x) \leq 0, \text{ para } x \in I_k$$

**Definición 2.1.5** Se denomina punto de ruptura para la zona primaria  $(x_{k-1}, x_k]$  al valor  $x_{ks} \in (x_{k-1}, x_k]$  en el que se verifica que existe un  $v_s \in A_{1k} \cup B_{1k}$  tal que  $d(v_s, x_{ks}) - z_m(x_{ks}) = 0$ .

Considerando el conjunto de puntos de ruptura  $PR$ , junto con los puntos cuello de botella se define el conjunto  $PCP$ , formado por todos los valores  $x \in [0, l]$  en los que la función Desviación Absoluta Media (DAM) presenta cambio de pendiente, es decir,  $PCP = PR \cup CB$ .

Junto con cada región primaria  $I_k$  se guardan los vértices asociados con los puntos de ruptura, en los conjuntos

$$VA2(x_{ks}) = \{v_i \in A_{1k} / d(v_i, x_{ks}) = z_m(x_{ks}), \quad x_{ks} \in PR\}$$

$$VB2(x_{ks}) = \{v_i \in B_{1k} / d(v_i, x_{ks}) = z_m(x_{ks}), \quad x_{ks} \in PR\}$$

**Definición 2.1.6** Se denomina región secundaria a la limitada por dos puntos de cambio de pendiente consecutivos.



Las siguientes notaciones serán útiles en el momento de establecer las componentes de la función  $DAM(X)$  que no varían en cada región secundaria

$$A_{1k}^1(s) = \{v_i \in A_{1k} : x_{ks-1} < \frac{-b_i}{a_i}\}, \quad A_{1k}^2(s) = A_{1k} \setminus A_{1k}^1(s)$$

$$B_{1k}^1(s) = \{v_i \in B_{1k} : x_{ks-1} \geq \frac{-b_i}{a_i}\}, \quad B_{1k}^2(s) = B_{1k} \setminus B_{1k}^1(s)$$

Con la anterior notación, se verifica el siguiente resultado:

**Lema 2.1.7** Para cada  $x \in [x_{ks-1}, x_{ks}]$ , región secundaria, se verifica:

$$\Delta_i(x) < 0 \quad \text{si } v_i \in A_{1k}^1(s) \cup B_{1k}^2(s),$$

$$\Delta_i(x) \geq 0 \quad \text{si } v_i \in A_{1k}^2(s) \cup B_{1k}^1(s).$$

En la correspondiente región secundaria  $[x_{ks-1}, x_{ks}]$ , los conjuntos  $A_{1k}^1(s)$ ,  $A_{1k}^2(s)$ ,  $B_{1k}^1(s)$ ,  $B_{1k}^2(s)$  permanecen constantes, así como  $A_{2k}$ ,  $B_{2k}$  en cada región primaria, por tanto en dicho intervalo la función  $DAM(x) = \sum_{i=1}^n \Delta_i(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)$  es lineal, por lo que se está en condiciones de expresar la función  $DAM(x)$ , sobre cada región secundaria,  $[x_{ks-1}, x_{ks}]$  como sigue:

$$DAM(x) = \sum_{i=1}^n \Delta_i(x) = M_{ks}x + N_{ks} \quad (2.2)$$

donde

$$M_{ks} = (1 - g_k) \left( \sum_{v_i \in A_{2k} \cup A_{1k}^2} w_i - \sum_{v_i \in A_{1k}^1} w_i \right) + (1 + g_k) \left( \sum_{v_i \in B_{1k}^1 \cup B_{2k}} w_i - \sum_{v_i \in B_{1k}^2} w_i \right)$$



$$\begin{aligned}
N_{ks} = & \sum_{v_i \in A_{2k} \cup A_{1k}^2} w_i [d(v_i, u) - c_k] - \sum_{v_i \in A_{1k}^1} w_i [d(v_i, u) - c_k] + \\
& + \sum_{v_i \in B_{1k}^2} w_i [d(v_i, v) + l - c_k] - \sum_{v_i \in B_{2k} \cup B_{1k}^1} w_i [d(v_i, v) + l - c_k]
\end{aligned}$$

Al pasar de una región secundaria a la contigua de la derecha, sólo pueden cambiar vértices, del conjunto  $A_{1k}^1(s)$  que pasen a  $A_{1k}^2(s+1)$ , o de  $B_{1k}^2(s)$  a  $B_{1k}^1(s+1)$ , puesto que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
A_{1k}^1(s) &= A_{1k}^1(s-1) \setminus VA2(x_{ks}), & A_{1k}^2(s) &= A_{1k}^2(s-1) \cup VA2(x_{ks}) \\
B_{1k}^2(s) &= B_{1k}^2(s-1) \setminus VB2(x_{ks}), & B_{1k}^1(s) &= B_{1k}^1(s-1) \cup VB2(x_{ks}) \quad (2.3)
\end{aligned}$$

En consecuencia el coeficiente de  $x$  es constante en cada región secundaria y no decrece cuando se pasa a la siguiente región secundaria.

Este resultado permitirá que las actualizaciones de los parámetros se obtengan en tiempo constante mediante las siguientes expresiones:

$$M_{ks} = M_{ks-1} + 2(1 - g_k) \sum_{v_i \in VA2(x_{ks})} w_i + 2(1 + g_k) \sum_{v_i \in VB2(x_{ks})} w_i \quad (2.4)$$

$$N_{ks} = N_{ks-1} + 2 \sum_{v_i \in VA2(x_{ks})} w_i [d(v_i, u) - c_k] - 2 \sum_{v_i \in VB2(x_{ks})} w_i [d(v_i, v) + l - c_k] \quad (2.5)$$

Al ser la mediana  $z_m$  una función lineal en cada región primaria, el Índice de Schutz dentro de cada región secundaria puede expresarse como

$$S(x) = \frac{M_{ks}x + N_{ks}}{2(g_kx + c_k)}$$

El numerador será siempre no negativo,  $M_{ks}x + N_{ks} \geq 0$  por ser suma de valores absolutos, y el denominador será positivo,  $2(g_kx + c_k) > 0$ , por ser suma ponderada de distancias a  $x$ .

Dentro de cada región primaria  $I_k$ , el Índice de Schutz es una función continua ya que lo son tanto el numerador (DAM)( $x$ ) como el denominador  $z_m(x)$ , aunque no es diferenciable, ya que en los puntos de ruptura DAM( $x$ ) no es diferenciable. Sin embargo la situación es distinta para cada región secundaria, verificándose la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.8** *Dentro de cada región secundaria, el mínimo se alcanza en uno de los extremos o bien la función es constante en dicho intervalo.*

**Demostración:**

Al ser la expresión  $2S(x) = \frac{M_{ks}x + N_{ks}}{g_kx + c_k}$  el cociente de dos funciones lineales en el que el denominador es no nulo, la función es diferenciable en el interior y tiene derivadas laterales en los extremos (en el resto de la memoria siempre que se hable de diferenciability de alguna función objetivo en un intervalo cerrado, no se reiterará que en los extremos se consideran derivadas laterales). La derivada es  $2S'(x) = \frac{M_{ks}c_k - g_kN_{ks}}{(g_kx + c_k)^2}$ , por lo que el signo del numerador determina el crecimiento o decrecimiento de  $S(x)$ .

Si  $M_{ks}c_k - g_kN_{ks} > 0$ , entonces  $S(x)$  crece y el mínimo se obtiene en  $x_s$ .

Si  $M_{ks}c_k - g_kN_{ks} < 0$ , entonces  $S(x)$  decrece y el mínimo se obtiene en  $x_{s+1}$ .

Si  $M_{ks}c_k - g_kN_{ks} = 0$ , entonces  $S(x)$  es constante en  $[x_s, x_{s+1}]$ , siendo además

$$\frac{M_{ks}}{g_k} = 2S(x) \text{ ya que } \frac{M_{ks}}{g_k} = \frac{N_{ks}}{c_k} = \frac{M_{ks}x}{g_kx} = \frac{M_{ks}x + N_{ks}}{g_kx + c_k} = 2S(x)$$

En consecuencia, el mínimo del índice de Schutz se obtendrá en un punto de cambio de pendiente, o bien en toda la región secundaria correspondiente.

Por ello, proponemos el siguiente algoritmo para obtener el mínimo Índice de Schutz sobre un grafo general.

### 2.1.2 Algoritmo

#### ALGORITMO IS/G

##### Entrada

Sea  $G(V, E)$  un grafo no dirigido con conjunto de vértices  $V$ ,  $|V| = n$  ordenados según la matriz de adyacencias,  $(w_1, \dots, w_n)$  los pesos normalizados asociados a los vértices,  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  conjunto de aristas de longitudes  $l(e_j)$ ;  $j = 1, \dots, m$  y  $D$  la matriz de distancias entre vértices.

Sea  $OPT = \infty$

Para  $j = 1$  hasta  $m$

$PCP = \emptyset$

**Determinar** los puntos cuello de botella  $x_1, \dots, x_{p-1}$ ,

de la arista  $e_j = [u, v]$ , añadirlos a  $PCP$  y ordenarlos desde  $u$  hasta  $v$ .

Guardar los conjuntos  $VB(x_k)$  asociados.

Para  $k = 0$  hasta  $p - 1$

**Determinar** los conjuntos de vértices  $V_u(I_k), V_v(I_k)$

**Calcular** los valores  $g_k, c_k$  y guardar en  $Vg$  y  $Vc$ .

**Evaluar**  $z_m(x_k)$  haciendo uso de las expresiones (1.5) y (1.6)

**Final para k**

**Para**  $i = 1$  hasta  $n$

**Determinar** por bisección los puntos  $x_{ks}$  donde  $\Delta_i(x_{ks}) = 0$ ,  
añadirlos a  $PCP$ , asociar a cada  $x_{ks}$  el índice de la región  
primaria  $I_k$  a la que pertenece,  
así como los conjuntos  $VA2(x_{ks}), VB2(x_{ks})$ .

**Final para**  $i$

**Ordenar** el conjunto de puntos  $PCP$

**Determinar**  $A_{11}^1(0), A_1^2(0), B_{11}^1(0), B_{11}^2(0)$

**Calcular**  $M_0, N_0$

**Evaluar**  $Num = M_0c_0 - g_0N_0$

**Si**  $Num < 0$ , entonces

$X \leftarrow x_1, SX \leftarrow S(x_1)$

**Si no**  $X \leftarrow x_0, SX \leftarrow S(x_0)$

**Si**  $SX < OPT$ , entonces

$OPT \leftarrow SX$

$X^* \leftarrow X$

$ARISTAS \leftarrow (j)$

**Para**  $s = 1$  hasta  $|PCP| - 1$

**Actualizar**  $A_{1k}^1(s), A_{1k}^2(s), B_{1k}^1(s), B_{1k}^2(s), M_{ks}, N_{ks}$

**Evaluar**  $Num = M_{ks}c_{x_s} - g_{x_s}N_{ks}$

**Si**  $Num < 0$ , entonces

$X \leftarrow x_{s+1}, SX \leftarrow S(x_{s+1})$

**Si no**  $X \leftarrow x_s, SX \leftarrow S(x_s)$

**Si**  $SX < OPT$ , entonces

$OPT \leftarrow SX$

$$X^* \leftarrow X$$

$$ARISTAS \leftarrow (j)$$

**Final para s**

**Final para j**

**Salida**

$\{X^*, OPT, ARISTAS\}$ : el punto óptimo se alcanza en la arista  $e_j = [u, v]$ , a una distancia  $X^*$  del vértice  $u$ , y su valor para el índice de Schutz es  $OPT$ .

### 2.1.3 Ejemplo

Considérese el grafo  $G$  de la Figura 2.1, en el que la matriz de adyacencias con longitudes de aristas es la que figura en la tabla que aparece a continuación.

|         |         |         |         |         |         |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 0       | 0       | .606388 | .850753 | .795457 | 0       |
| 0       | 0       | .20561  | .270058 | .544304 | 0       |
| .606388 | .20561  | 0       | .262905 | 0       | 0       |
| .850753 | .270058 | .262905 | 0       | .40032  | .660568 |
| .795457 | .544304 | 0       | .40032  | 0       | .322336 |
| 0       | 0       | 0       | .660568 | .322336 | 0       |

Para la arista  $(1,4)$ , el conjunto de puntos cuello de botella es  $CB = \{0, 0.154407, 0.196764, 0.227808, 0.253635, 0.850753\}$ , en la región primaria,  $\{0.227808, 0.253635\}$  se obtiene  $M = -0.322316$ ,  $N = 0.335186$ ,  $Mc - gN < 0$ , por tanto  $SX = S(0.253635) = 0.153486$ .

Hasta este momento  $OPT = 0.157441$ , por lo que se actualiza el valor del óptimo  $OPT = 0.153486$ ,  $X^* = 0.253635$  y  $ARISTA = (1,4)$



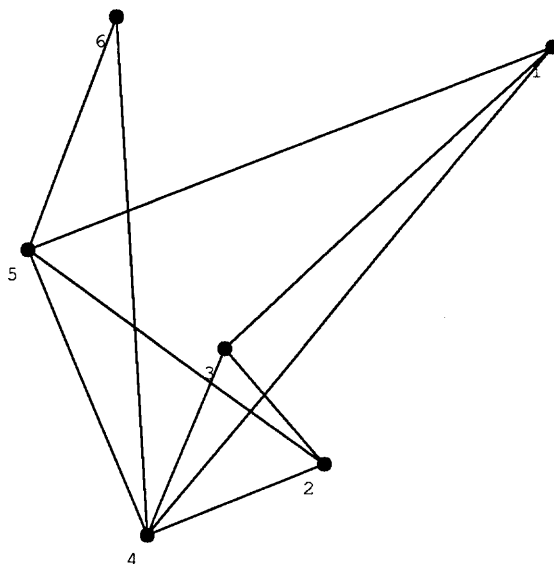


Figura 2.1: Ejemplo de grafo

Pasamos a la siguiente región primaria, en la que resultan los puntos de cambio de pendiente  $\{0.253635, 0.345627, 0.364743, 0.60544, 0.71285, 0.850753\}$ :

Para el primer subintervalo  $M = -0.543835$ ,  $N = 0.391371$ ,  $Mc - gN < 0$ ,  $SX = S(0.345627) = 0.132421$ , como mejora se actualiza  $OPT = 0.132421$ , para  $X^* = 0.345627$  y  $ARISTA = (1, 4)$ .

En el siguiente subintervalo,  $M = -0.392204$ ,  $N = 0.338963$ ,  $Mc - gN < 0$  de nuevo  $SX = S(0.364743) = 0.129558$  y como mejora, se actualiza el óptimo  $OPT = 0.129558$ , con  $X^* = 0.364743$  y  $ARISTA = (1, 4)$ .

Para el siguiente subintervalo,  $M = -0.273133$ ,  $N = 0.295533$ ,  $Mc - gN < 0$  de nuevo  $SX = S(0.60544) = 0.107498$  y como mejora,  $OPT = 0.107498$ , se asigna  $X^* = 0.60544$  y  $ARISTA = (1, 4)$ .

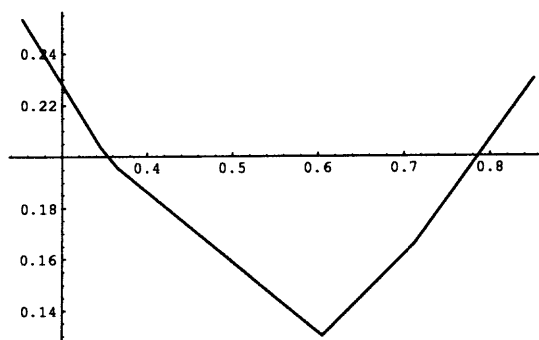


Figura 2.2: Función DAM sobre la arista (1,4) del grafo de la Figura 2.1

Para el siguiente subintervalo,  $M = 0.335241$ ,  $N = -0.0728009$ ,  $Mc - gN > 0$ ,  $SX = S(0.60544) = 0.107498$ , como no mejora, se pasa al siguiente subintervalo en el que  $M = 0.4633965$ ,  $N = -0.164155$ ,  $Mc - gN > 0$ ,  $SX = S(0.71285) = 0.154374$  que no mejora.

A continuación, el algoritmo evaluaría la siguiente arista, es decir, la denotada (1,5).

Después de la ejecución del algoritmo resulta que el óptimo se encuentra en la arista (1,4) a una distancia  $X^* = 0.60544$  del vértice 1 y su valor para el índice de Schutz es de 0.107498.

Las gráficas de las funciones Desviación Absoluta Media, Mediana, e Índice de Schutz para esta arista se muestran en las Figuras (2.2), (2.3) y (2.4) respectivamente. Además para este ejemplo hemos calculado la función Desviación Absoluta Media y resulta que el óptimo se alcanza en el mismo punto a  $X^* = 0.60544$  del vértice 1, con un valor para la función DAM ( $X^*$ ) = 0.130168. En este caso, el criterio Desviación Absoluta Media y el Índice de Schutz nos proporcionan la misma localización óptima.

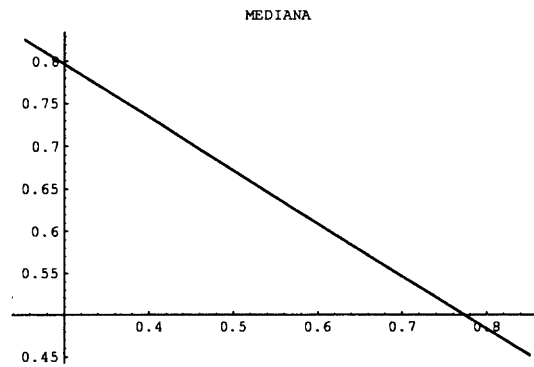


Figura 2.3: Mediana sobre la arista (1,4) del grafo de la Figura 2.1

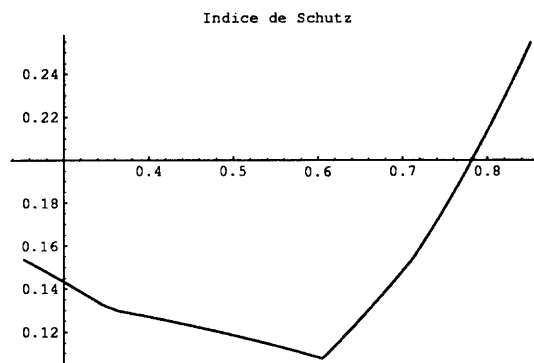


Figura 2.4: Índice de Schutz sobre la arista (1,4) del grafo de la Figura 2.1



### 2.1.4 Complejidad

Para un grafo de  $|V| = n$  vértices y de  $|E| = m$  aristas, tendremos que repetir el proceso para cada arista, lo que supone una complejidad  $O(m)$ .

La determinación del conjunto de puntos cuello de botella CB, y la obtención de los conjuntos  $VB(x_k)$  asociados conlleva el cómputo de los  $n - 2$  vértices ajenos a la arista; por tanto, teniendo en cuenta su ordenación se requieren  $O(n \log n)$  operaciones.

Dentro de cada región primaria, la construcción de los conjuntos  $V_u, V_v$  y la determinación de los valores  $g_q, c_q$  se obtienen en tiempo constante, haciendo uso de las fórmulas (1.7) y (1.8). La evaluación de la función mediana  $z_m$  en los puntos cuello de botella, requiere un número constante de operaciones haciendo uso de las actualizaciones (1.5) y (1.6). En consecuencia esta parte del algoritmo requiere  $O(n)$  operaciones.

Para los  $n$  vértices de  $G$ , la determinación de los puntos de ruptura, actuando por bisección, requiere  $O(\log n)$  para cada uno de ellos. Al haber como máximo  $4n$  intersecciones, se obtienen en tiempo  $O(n \log n)$ .

La ordenación del conjunto de puntos de cambio de pendiente PCP requiere  $O(n \log n)$ .

El cálculo para el primer punto requiere actuar sobre todos los vértices, por tanto se consume un tiempo  $O(n)$ ; pero para los restantes puntos del conjunto PCP, la evaluación de la función, su comparación con el óptimo provisional y la actualización en caso de mejora, se realizan en tiempo constante. Al ser  $|PCP| \leq 5n$ , este proceso supone una complejidad temporal  $O(n)$ .

Por tanto, globalmente la complejidad de algoritmo es  $O(mn \log n)$ , asumiendo conocida la matriz distancia entre vértices.



## 2.2 Coeficiente de variación

El Coeficiente de Variación es la medida relativa correspondiente a la varianza que se define de la siguiente forma

**Definición 2.2.1** *El Coeficiente de Variación es la función  $CV : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que*

$$CV(x) = \frac{\sqrt{z_s(x)}}{z_m(x)}$$

donde la función Varianza  $z_s$  sobre  $G$  es  $z_s : G \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definida para  $x \in G$  como

$$z_s(x) = \sum_{v_i \in V} w_i (d(v_i, x) - z_m(x))^2$$

El problema consiste en localizar un punto  $x^* \in G$  tal que

$$CV(x^*) \leq CV(x), \quad \forall x \in G$$

A los puntos  $x^*$  se les denominará puntos de mínimo Coeficiente de Variación para el grafo  $G$ .

### 2.2.1 Problema restringido a una arista

Se considera la arista  $(u, v)$  de longitud  $l$ ; en primer lugar se determina el conjunto CB formado por los puntos cuello de botella ordenados de modo creciente desde el vértice  $u$ , a los que se añaden los extremos de la arista. Las regiones primarias quedan determinadas por cada dos puntos consecutivos,  $I_k = [x_{k-1}, x_k]$  para  $k = 1, 2, \dots, p$ , asumiendo que  $x_0 = 0$  y  $x_p = l$ .

**Definición 2.2.2** La función mediana de  $x \in G$  sobre el conjunto de vértices  $V'$  la definimos como

$$z_m(x, V') = \sum_{v_i \in V'} w_i d(v_i, x)$$

Haciendo uso de la anterior definición podemos expresar para cada región primaria  $I_k$ :

$$z_m(u, V_u(I_k)) = \sum_{v_i \in V_u(I_k)} w_i d(v_i, u) \quad \text{y} \quad z_m(v, V_v(I_k)) = \sum_{v_i \in V_v(I_k)} w_i d(v_i, v)$$

**Definición 2.2.3** La función mediana cuadrática para una red general  $G$ , es una función  $z_m^{(2)} : G \rightarrow \mathbb{R}^+$  definida para cada  $x \in G$  como

$$z_m^{(2)}(x) = \sum_{v_i \in V} w_i (d(v_i, x))^2$$

Es conocido que para cada  $x \in G$ ,  $z_s(x) = z_m^{(2)}(x) - (z_m(x))^2$ , y que en cada región primaria  $I_k$  las funciones varianza y mediana tienen respectivamente las expresiones:

$$z_s(x) = (1 - g_k^2)x^2 + 2(b_k - c_k g_k)x + a_k - c_k^2 \quad \text{y} \quad z_m(x) = g_k x + c_k$$

donde las constantes  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ ,  $g_k$  toman los siguientes valores:

$$a_k = z_m^{(2)}(u, V_u) + \sum_{V_v} w_i (d(v_i, u) + l)^2, \quad b_k = z_m(u, V_u) - z_m(v, V_v) - lW(V_v)$$

$$c_k = z_m(u, V_u) + z_m(v, V_v) + lW(V_v)$$

$$g_k = W(V_u) - W(V_v), \text{ verificándose que } 1 - g_k^2 > 0$$

La actualización de los parámetros al pasar de una región primaria  $I_{k-1}$  a la contigua  $I_k$  se realiza, haciendo uso de los resultados de Hansen y Zheng [26], para  $g_k$  y  $c_k$  según las expresiones (1.7) y (1.8) y para los valores  $a_k$  y  $b_k$  del siguiente modo:

$$a_k = a_{k-1} + 4x_{k-1} \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i (d(v_i, u) + x_{k-1})$$

$$b_k = b_{k-1} - 2 \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i(d(v_i, u) + x_{k-1}) \quad (2.6)$$

Estas relaciones se deducen utilizando el hecho de que sólo los vértices del conjunto  $VB(x_{k-1})$  asociado con el punto cuello de botella  $x_{k-1}$ , cambian el camino de acceso al pasar de una región primaria a la siguiente, y que por tanto se verifica

$$\begin{aligned} z_m(u, V_u(I_k)) &= z_m(u, V_u(I_{k-1})) - \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i d(v_i, u) \\ z_m(v, V_v(I_k)) &= z_m(v, V_v(I_{k-1})) + \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i d(v_i, v) \\ z_m^{(2)}(u, V_u(I_k)) &= z_m^{(2)}(u, V_u(I_{k-1})) - \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i d(v_i, u)^2 \\ z_m^{(2)}(v, V_v(I_k)) &= z_m^{(2)}(v, V_v(I_{k-1})) + \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i d(v_i, v)^2 \\ W(V_u(I_k)) &= W(V_u(I_{k-1})) - \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i \end{aligned} \quad (2.7)$$

Si hacemos uso de estas igualdades, al aplicarlas en las expresiones de  $a_k$  y  $b_k$  obtendremos

$$\begin{aligned} a_k &= \sum_{V_u(I_k)} w_i(d(v_i, u))^2 + \sum_{V_v(I_k)} w_i(d(v_i, v) + l)^2 = \\ &= \sum_{V_u(I_{k-1})} w_i(d(v_i, u))^2 - \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i d(v_i, u)^2 + \\ &+ \sum_{V_v(I_{k-1})} w_i(d(v_i, v) + l)^2 + \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i(d(v_i, v) + l)^2 = \\ &= \sum_{V_u(I_{k-1})} w_i(d(v_i, u))^2 + \sum_{V_v(I_{k-1})} w_i(d(v_i, v) + l)^2 + \\ &+ \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i((d(v_i, v) + l)^2 - d(v_i, u)^2) = \\ &= a_{k-1} + 4x_{k-1} \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i(d(v_i, u) + x_{k-1}) \end{aligned}$$

ya que  $(d(v_i, v) + l) - d(v_i, u) = 2x_{k-1}$  y por tanto  $(d(v_i, v) + l) + d(v_i, u) = 2(d(v_i, u) + x_{k-1})$ . De modo similar la expresión señalada para  $b_k$ , haciendo uso de (2.7) se obtiene:

$$\begin{aligned} b_k &= z_m(u, V_u(I_{k-1})) - \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i d(v_i, u) - \\ &\quad - z_m(v, V_v(I_{k-1})) - \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i d(v_i, v) - l[W(V_v(I_{k-1})) + \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i] = \\ &= b_{k-1} - \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i (d(v_i, u) + l + d(v_i, v)) = b_{k-1} - 2 \sum_{v_i \in VB(x_{k-1})} w_i (d(v_i, u) + x_{k-1}) \end{aligned}$$

El Coeficiente de Variación sobre cada región primaria, puede ser expresado como:

$$CV(x) = \frac{\sqrt{(1 - g_k^2)x^2 + 2(b_k - c_k g_k)x + a_k - c_k^2}}{g_k x + c_k}$$

Para obtener el punto del intervalo  $[x_k, x_{k+1}]$  donde se obtiene el menor valor para el Coeficiente de Variación, a continuación se efectúa un estudio del comportamiento de la función  $CV$  sobre dicho intervalo.

El denominador  $g_k x + c_k$  es lineal y en consecuencia es una función continua; siempre será estrictamente positivo, ya que la mediana es una suma ponderada de distancias. El numerador es la raíz cuadrada de la varianza, deduciéndose por su definición que es no negativa,  $(1 - g_k^2)x^2 + 2(b_k - c_k g_k)x + a_k - c_k^2 \geq 0$ . Pero si para algún valor de  $x$ , resulta  $z_s(x) = 0$ , se obtendría un valor donde se alcanzase la perfecta igualdad, y por tanto el óptimo. Por ello, se estudiará el caso en que  $(1 - g_k^2)x^2 + 2(b_k - c_k g_k)x + a_k - c_k^2 > 0$ .

$$\begin{aligned} \text{Derivando } (CV)'(x) &= \\ &= \frac{-g_k((1 - g_k^2)x^2 + 2(b_k - c_k g_k)x + a_k - c_k^2) + (g_k x + c_k)((1 - g_k^2)x + b_k - c_k g_k)}{(g_k x + c_k)^2 \sqrt{(1 - g_k^2)x^2 + 2(b_k - c_k g_k)x + a_k - c_k^2}} = \\ &= \frac{x(c_k - g_k b_k) + c_k b_k - g_k a_k}{(g_k x + c_k)^2 \sqrt{(1 - g_k^2)x^2 + 2(b_k - c_k g_k)x + a_k - c_k^2}} \end{aligned}$$

se observa que el signo de la función derivada lo proporciona el numerador  $\{x(c_k - g_k b_k) + c_k b_k - g_k a_k\}$  que es una función lineal.

Si  $(CV)'(x_k)(CV)'(x_{k+1}) > 0$  la función  $CV$  es monótona, resultando creciente si  $(CV)'(x) > 0$  en el subintervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , con lo que el mínimo se obtiene en  $x_k$ , y decreciente si por el contrario,  $(CV)'(x) < 0$  en el subintervalo  $[x_k, x_{k+1}]$ , obteniéndose el mínimo en  $x_{k+1}$ .

Si  $(CV)'(x_k)(CV)'(x_{k+1}) < 0$ , y dado que la función es continua, existe un punto interior  $x^* = \frac{g_k a_k - c_k b_k}{c_k - g_k b_k}$  donde  $(CV)'(x^*) = 0$ . En este punto es donde se obtiene el mínimo del coeficiente de variación en la correspondiente región primaria, garantizándose con el siguiente lema la convexidad de  $(CV)(x)$ .

**Lema 2.2.4** Si  $(CV)'(x_k)(CV)'(x_{k+1}) < 0$ , entonces siempre  $(CV)'(x_k) < 0$  y  $(CV)'(x_{k+1}) > 0$

### Demostración:

Si  $CV'(x_k) > 0$  resulta que  $(c_k - g_k b_k)x_k + c_k b_k - g_k a_k > 0$ . Si  $CV'(x_{k+1}) < 0$  resulta que  $(c_k - g_k b_k)x_{k+1} + c_k b_k - g_k a_k < 0$

$$\text{Restando quedará: } (c_k - g_k b_k)(x_k - x_{k+1}) > 0$$

Dado que  $x_k - x_{k+1} < 0$ , resultará necesariamente que  $c_k - g_k b_k < 0$ . Sustituyendo los valores de  $c_k$ ,  $g_k$ ,  $b_k$  resulta

$$\begin{aligned} c_k - g_k b_k &= lW(V_v) - (W(V_u) - W(V_v))(z_m(u, V_u) - z_m(v, V_v) - lW(V_v)) + \\ &\quad + z_m(u, V_u) + z_m(v, V_v) = z_m(u, V_u)[1 - W(V_u) + W(V_v)] + \\ &\quad + z_m(v, V_v)[1 + W(V_u) - W(V_v)] + lW(V_v)[1 + W(V_u) - W(V_v)] = \\ &= z_m(u, V_u)2W(V_v) + z_m(v, V_v)2W(V_u) + lW(V_v)2W(V_u) > 0, \end{aligned}$$

ya que todos los términos son positivos.

Se ha llegado a una contradicción con que  $c - gb < 0$ ; por tanto, si  $(CV)'(x_k)(CV)'(x_{k+1}) < 0$  entonces es  $(CV)'(x_k) < 0$  y  $(CV)'(x_{k+1}) > 0$  y la función en  $[x_k, x_{k+1}]$  es convexa, con el mínimo en el interior.  $\square$

Al tener caracterizado el mínimo sobre cada región primaria, y el procedimiento de actualización de los parámetros, se plantea el siguiente algoritmo para obtener el punto de un grafo general, donde el Coeficiente de Variación tome el menor valor.

## 2.2.2 Algoritmo

### CoefVar/G

#### Entrada

Sea  $G(V, E)$  un grafo general no dirigido con conjunto de vértices  $V$ ,  $|V| = n$ , ordenado según la matriz de adyacencias,  $(w_1, \dots, w_n)$  los pesos asociados a los vértices de modo que  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ ,  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  conjunto de aristas de longitudes  $l_i$ ;  $i = 1, \dots, m$ , y  $D$  la matriz de distancias entre vértices.

Sea  $OPT = \infty$

Para  $j = 1$  hasta  $m$

$CB = \emptyset$

**Determinar**  $x_1, \dots, x_{p-1}$ , los puntos cuello de botella

de la arista  $e_j = (u, v)$  y ordenarlos desde  $u$  hasta  $v$ , añadirlos a  $CB$

junto con  $x_0 = 0, x_p = l$ .

Guardar los conjuntos  $VB(x_i)$  asociados.

**Determinar** los conjuntos de vértices  $V_u(I_0), V_v(I_0)$ , así como



los valores  $z_m(u, V_u(I_0)), z_m(u, V_u(I_0)), W(V_u(I_0))$

**Calcular** los valores  $a_0, b_0, c_0, g_0$ .

**Calcular**  $(CV)'(x_0) = c_0b_0 - g_0a_0$

$$(CV)'(x_1) = (c_0 - g_0b_0)x_1 + c_0b_0 - g_0a_0$$

$$Prod = (CV)'(x_0)(CV)'(x_1)$$

**Si**  $Prod > 0$ , **entonces**

**Si**  $(CV)'(x_0) > 0$ , **entonces**  $X \leftarrow x_0$

**si no**  $X \leftarrow x_1$

$$\text{si no } X \leftarrow \frac{g_0a_0 - c_0b_0}{c_0 - g_0b_0}$$

**Evaluar**  $CV(X)$

**Si**  $CV(X) < OPT$ , **entonces**

$$OPT \leftarrow CV(X)$$

$$X^* \leftarrow X$$

$$ARISTA \leftarrow j$$

**Para**  $r = 1$  hasta  $|CB| - 1$

**Actualizar**  $a_r, b_r, c_r, g_r$ .

**Calcular**  $(CV)'(x_r) = (c_r - g_r b_r)x_r + c_r b_r - g_r a_r$

$$(CV)'(x_{r+1}) = (c_r - g_r b_r)x_{r+1} + c_r b_r - g_r a_r$$

$$Prod = (CV)'(x_r)(CV)'(x_{r+1})$$

**Si**  $Prod > 0$ , **entonces**

**Si**  $(CV)'(x_r) > 0$ , **entonces**  $X \leftarrow x_r$

**si no**  $X \leftarrow x_{r+1}$

$$\text{si no } X \leftarrow \frac{g_r a_r - c_r b_r}{c_r - g_r b_r}$$

**Evaluar**  $CV(X)$

**Si**  $CV(X) < OPT$ , **entonces**



$$OPT \leftarrow CV(X)$$

$$X^* \leftarrow X$$

$$ARISTA \leftarrow j$$

**Final para r**

**Final para j**

**Salida**

$\{X^*, ARISTA, OPT\}$ : el punto del grafo donde se obtiene el menor valor del Coeficiente de Variación está sobre la arista  $e_j$ , a una distancia  $X^*$  del inicio y su valor es  $OPT$ .

### 2.2.3 Ejemplo

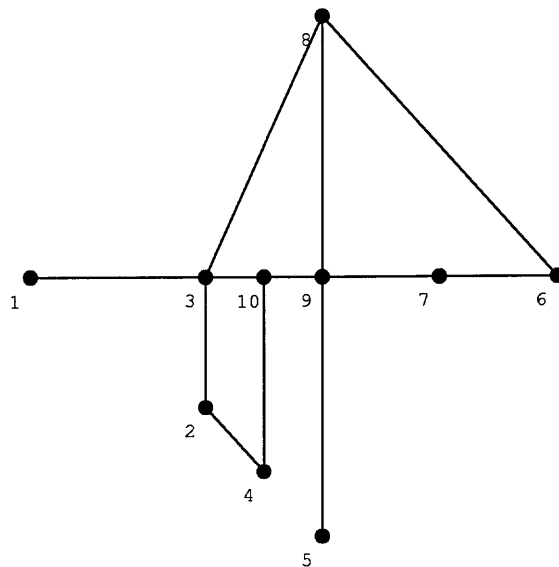


Figura 2.5: Ejemplo de grafo con 10 vértices

Para el grafo de la Figura 2.5, cuyos vértices tienen asignados los pesos  $\{0.172, 0.229, 0.123, 0.063, 0.051, 0.055, 0.105, 0.092, 0.061, 0.049\}$

El algoritmo empieza por la arista  $(1, 3)$ . El conjunto de puntos cuello de botella  $CB$  es  $\{0, 3\}$ , y por tanto la región primaria la forma todo la arista, obteniéndose el mínimo actual  $OPT = 0.518297$  a una distancia  $x = 1.77197$  del vértice 1. Se continúa el algoritmo, y al iniciar la ejecución de la arista  $(3, 8)$ , el valor óptimo actual se mantiene en  $OPT = 0.518297$ . El conjunto  $CB = \{0, 2.0645, 3.23607, 4.23607, 4.47214\}$

En la primera región primaria  $\{0, 2.0645\}$  el mínimo se obtiene en  $x = 2.0645$  con valor para el Coeficiente de Variación de 0.38432. En la siguiente región primaria  $\{2.0645, 3.23607\}$ , se mejora el óptimo a  $OPT = 0.358538$  en  $x = 3.00859$ .

En la siguiente región primaria  $\{3.23607, 4.23607\}$ , se mejora el óptimo a  $OPT = 0.351922$  en  $x = 3.64941$ . Y para la última región primaria correspondiente a esta arista  $\{4.23607, 4.47214\}$  ya no se mejora el óptimo.

Después de ejecutar el algoritmo resulta que el óptimo se encuentra en la arista  $(5, 9)$ , a una distancia  $x = 1.07219$  del vértice 5, y con un valor para el Coeficiente de Variación de  $OPT = 0.305175$ .

En la Figura 2.6, se muestra el comportamiento de la función coeficiente de variación para la arista  $(3, 8)$  del grafo de la Figura 2.5.

## 2.2.4 Complejidad del Algoritmo

Para un grafo de  $|V| = n$  vértices y de  $|E| = m$  aristas, el proceso se repite para cada arista, lo que supone una complejidad temporal  $O(m)$ . Determinar los puntos cuello de botella y ordenarlos sobre la arista requiere  $O(n \log(n))$  operaciones. En cada región primaria la actualización de los valores auxiliares  $g, c, a, b$ , que están

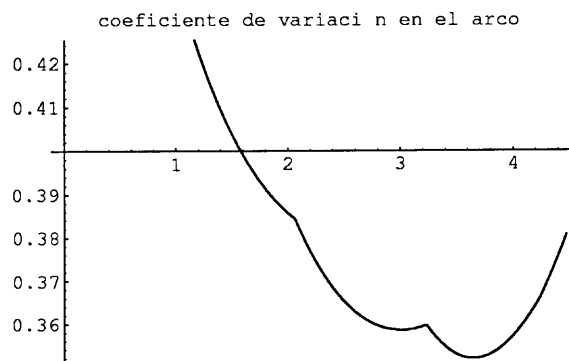


Figura 2.6: Coeficiente de Variación para la arista (3.8)

asociados a los puntos cuello de botella requiere tiempo constante empleando las relaciones que figuran en (2.6), (1.7) y (1.8).

La evaluación de la función Coeficiente de Variación  $CV$ , así como de su derivada  $CV'$ , se realiza en tiempo constante.

Por tanto la complejidad temporal global del algoritmo es  $O(mn \log n)$ .

## 2.3 Estudio comparado de las medidas

Los algoritmos desarrollados permiten obtener las localizaciones en las que el Índice de Schutz y el Coeficiente de Variación alcanzan su valor mínimo.

Para la Desviación Absoluta Media, Berman y Kaplan [4] propusieron un algoritmo de complejidad  $O(mn^2)$ , posteriormente Tamir [63] demostró que era posible obtener el mínimo de la Desviación Absoluta Media en tiempo  $O(mn \log n)$ .

Para la Varianza, Hansen y Zheng [26] y López de los Mozos [34] desarrollan

algoritmos de complejidad  $O(mn \log n)$ , para el caso de grafos generales. (para la obtención de los puntos del grafo donde se alcanza el mínimo de la función Varianza.)

Con los cuatro algoritmos anteriores estamos en condiciones de abordar el estudio comparativo de estas medidas.

Como primera etapa se ha elaborado un programa que permite representar gráficamente el comportamiento de las medidas para cada arista de un grafo.

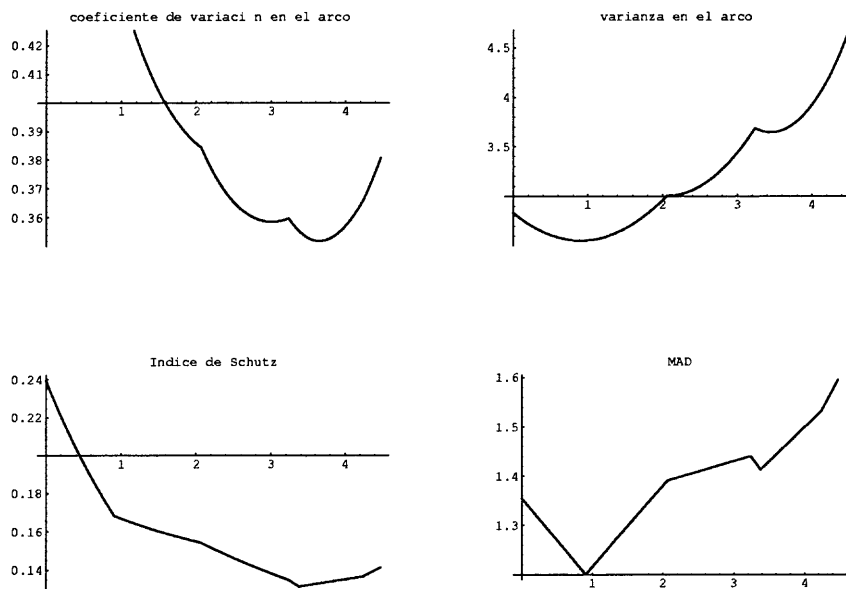


Figura 2.7: Comportamiento de las cuatro medidas sobre la arista (3,8)

Para ilustrar su funcionamiento se han elegido las aristas (3, 8) y (6, 8) del grafo de la Figura 2.5, resultando las gráficas de las Figuras 2.7 y 2.8 que nos sugieren una estrecha relación entre la Desviación Absoluta Media y la Varianza, así como entre el Índice de Schutz y el Coeficiente de Variación.

Para el caso discreto, en el Capítulo 1 habíamos definido cuatro índices que nos permitieron cuantificar el grado de coincidencia entre cada par de criterios. En el

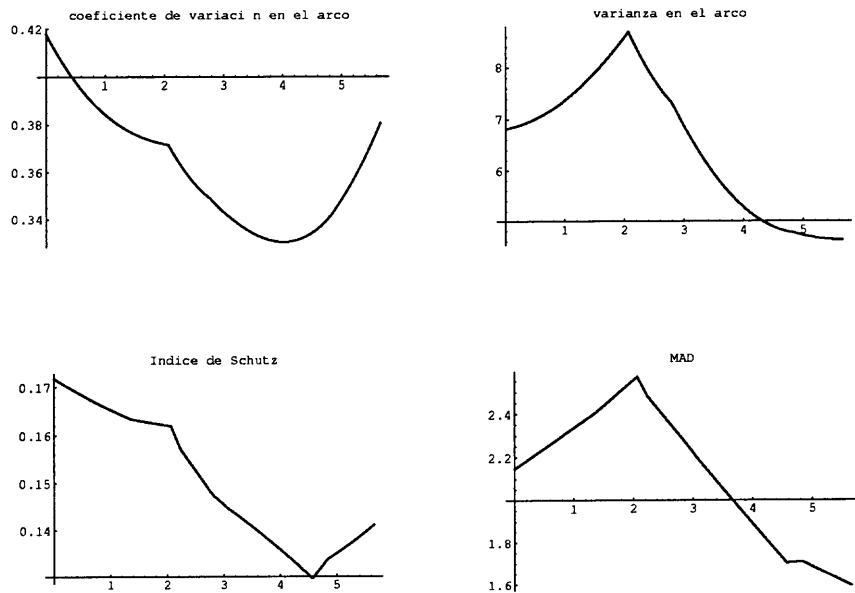


Figura 2.8: Comportamiento de las cuatro medidas sobre la arista (6,8)

caso continuo pueden seguir empleándose dos de ellos.

El primer índice de comparación estará definido por

$$I_1(i, j) = \begin{cases} 100, & \text{si } X_i^* \cap X_j^* \neq \emptyset \\ 0, & \text{si } X_i^* \cap X_j^* = \emptyset \end{cases}$$

siendo  $X_i^*$  el conjunto de puntos de la red para los que se obtiene el menor valor de  $f_i(x)$

$$X_i^* = \{x^* \in G : f_i(x^*) \leq f_i(x) \quad \forall x \in G\}$$

Si obtenemos los valores de  $I_1(i, j)$  para un conjunto de grafos, la media de los mismos representará el porcentaje de grafos en los que los criterios  $i$  y  $j$  tienen algún óptimo en común.



El segundo índice se define como

$$I_2(i, j) = 100 \times \frac{f_i(x_j^{i*}) - f_i(x_i^*)}{f_i(x_i^*)}$$

donde  $f_i(x_i^*)$  es el valor óptimo de  $f_i$ , y

$$x_j^{i*} \in X_j^* \quad / \quad f_i(x_j^{i*}) = \min\{f_i(x), \quad \forall x \in X_j^*\}$$

Para cada grafo,  $I_2(i, j)$  representa el porcentaje en el que aumenta el valor de la función  $f_i$  cuando se sustituye su óptimo por el de la función  $f_j$ . De las definiciones se deduce que cuando  $I_1(i, j)$  vale 100,  $I_2(i, j)$  vale 0 y recíprocamente, por ello nos basta calcular los valores de  $I_2$  para obtener los de  $I_1$ .

Para estudiar el comportamiento de  $I_2$  utilizaremos el concepto de grafo aleatorio.

**Definición 2.3.1** (Karonski [30]) *Un grafo aleatorio es un par  $(\mathcal{G}, \mathcal{P})$  donde  $\mathcal{G}$  es una familia de grafos y  $\mathcal{P}$  una distribución de probabilidad sobre  $\mathcal{G}$ .*

Si  $\mathcal{G}$  es la familia de los grafos etiquetados de  $n$  vértices, podemos obtener cada uno de los grafos  $G \in \mathcal{G}$  de dos formas mediante experimentos de Bernouilli:

- Partiendo del grafo vacío y añadiendo cada una de las  $\binom{n}{2}$  aristas posibles con probabilidad  $p$ ,  $0 \leq p \leq 1$ .
- Partiendo del grafo completo  $K_n$  y eliminando cada una de las  $\binom{n}{2}$  aristas con probabilidad  $1 - p$ .

Con ambos procedimientos obtenemos grafos  $G(n, p)$  con un número de aristas que se distribuye según una binomial, cuyo número esperado de aristas igual a  $\binom{n}{2} p$ .

Para comparar el comportamiento de los cuatro criterios seleccionados se ha generado un conjunto de grafos aleatorios con  $n$  variando de 10 hasta 100 y se han obtenido para cada uno de ellos los doce indicadores  $I_2(i, j)$ ; sus valores para cada grafo aparecen en el Anexo 4.

Para los grafos de tamaño 10, para cada nivel de  $p$  se ha generado un número similar de grafos ponderados y no ponderados. En el Anexo 4 los ponderados son los primeros 385 grafos de cada uno de los cinco conjuntos en que se dividen los grafos de tamaño 10 en función de los valores de  $p$ : 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 y 1.

El percentil 100 de  $I_2(i, j)$  nos da una indicación del menor grado de igualdad entre los criterios para los grafos de una muestra dada. Para eliminar los casos más extremos hemos calculado el percentil 95 para cada índice resultando:

#### Grafos equiponderados

|     | DAM  | IS   | VAR  | CV   |
|-----|------|------|------|------|
| DAM | -    | 54.9 | 15.5 | 61.3 |
| IS  | 57.2 | -    | 71.7 | 14.8 |
| VAR | 31.7 | 70.2 | -    | 31.0 |
| CV  | 56.2 | 14.0 | 52.4 | -    |

#### Grafos ponderados

|     | DAM  | IS    | VAR  | CV    |
|-----|------|-------|------|-------|
| DAM | -    | 56.6  | 23.9 | 81.1  |
| IS  | 58.8 | -     | 80.5 | 21.8  |
| VAR | 44.5 | 165.7 | -    | 151.1 |
| CV  | 70.1 | 18.5  | 57.5 | -     |

Podemos comprobar que, excepto para la tolerancia de la Varianza sobre los óptimos del Índice de Schutz, en todos los casos los valores son menores cuando

los vértices están equiponderados; por ello, los grafos generados para  $n > 10$  son ponderados.

En el Anexo 5 podemos observar los percentiles 5, 10, 25, 50, 75, 95, 99 y el rango de los indicadores para  $n$  y  $p$  que ponen de manifiesto que los valores más bajos de  $I_2$  se obtienen para los pares Desviación Absoluta Media - Varianza e Índice de Schutz - Coeficiente de Variación.

Como hemos señalado el grado de coincidencia entre criterios medido por el indicador  $I_1$  puede ser obtenido directamente de la frecuencia del valor cero para el índice  $I_2$ . En las tablas de percentiles se puede comprobar que sólo se supera el 25% de coincidencia en los óptimos de la Desviación Absoluta Media y del Índice de Schutz en la muestra de grafos de tamaño 10.

Los valores de  $I_1$  son

| n   | DAM-IS | DAM-VAR | DAM-CV | IS-VAR | IS-CV | VAR-CV |
|-----|--------|---------|--------|--------|-------|--------|
| 10  | 27.9   | 19.3    | 1.1    | 3.6    | 3.1   | 1.6    |
| 20  | 6.8    | 5.2     | 2.0    | 0.1    | 2.4   | 0.5    |
| 50  | 0.2    | 0.4     | 0.0    | 0.0    | 0.4   | 0.0    |
| 75  | 0.0    | 0.0     | 0.0    | 0.0    | 3.8   | 0.0    |
| 100 | 0.9    | 0.0     | 0.0    | 0.0    | 17.9  | 0.0    |

Para finalizar la comparación, hemos estudiado el porcentaje de grafos para los que sustituir el óptimo de un criterio dado por el obtenido por otro criterio, representa un empeoramiento del valor de la solución del 5% o del 10%.

Con un nivel de confianza del 95%, el error que cometemos por emplear la proporción calculada sobre los elementos de una muestra como estimador de la proporción poblacional, cuando la población es infinita, viene dada por

$$e = \sqrt{\pi(1 - \pi)} \left( \frac{1.96}{\sqrt{n_g}} \right)$$



donde  $\pi$  es la proporción de la población y  $n_s$  es el tamaño de la muestra.

Al no conocerse  $\pi$  la situación peor se dará cuando valga  $\frac{1}{2}$ . Por ello, con un nivel de confianza del 95% los errores de estimación serán como máximo en nuestro caso:

| n   | $n_s$ | e     | $100 \times e$ |
|-----|-------|-------|----------------|
| 10  | 1925  | 0.022 | 2.2            |
| 20  | 1096  | 0.030 | 3.0            |
| 50  | 491   | 0.044 | 4.4            |
| 75  | 184   | 0.072 | 7.2            |
| 100 | 106   | 0.095 | 9.5            |

Con estos errores la estimación del porcentaje de grafos para los que cada indicador  $I_2(i, j)$  toma valores menores que 5 aparece en el Anexo 6. Igualmente la estimación del porcentaje de grafos para los que cada indicador  $I_2(i, j)$  toma valores menores que 10 es la que aparece en el Anexo 7.

Cabe destacar los buenos valores que se obtienen para los pares Desviación Absoluta Media - Varianza e Índice de Schutz - Coeficiente de Variación. Este hecho se resume en el siguiente cuadro,

|        | n   | M-V   | V-M  | I-C  | C-I   |
|--------|-----|-------|------|------|-------|
| % < 10 | 10  | 79.5  | 65.4 | 78.9 | 84.2  |
|        | 20  | 91.5  | 74.6 | 92.5 | 96.3  |
|        | 50  | 95.3  | 83.3 | 97.8 | 99.0  |
|        | 75  | 100.0 | 90.2 | 99.5 | 100.0 |
|        | 100 | 99.1  | 90.6 | 98.1 | 98.1  |

que pone aún más de manifiesto la relación entre los dos pares de criterios absolutos y relativos, cuya tolerancia (al sustituir el óptimo de uno de los criterios por el del



otro) mejora cuando aumenta el tamaño del grafo, mientras que las funciones de tolerancia  $I_2$  para los restantes pares de criterios empeoran.

## Capítulo 3.

# Localización múltiple en un grafo con el criterio DAM

Como se ha señalado en la introducción de la presente memoria, uno de los criterios para la clasificación de los problemas de localización es el número de servicios que se pretende instalar. En la literatura se constata que para abordar los problemas con servicios múltiples es conveniente realizar un estudio separado del caso de dos servicios. Además, al igual que sucede para el problema de localizar un servicio, el estudio previo restringido a redes árbol suele suministrar resultados útiles para su generalización a redes cíclicas.

Esta estrategia ha sido utilizada para el problema centro (Handler [23]), mediana (Mirchandani y Oudjit [49], y Gavish y Sridhar [20]), y varianza (López de los Mozos y Mesa [37]). Por ello, para el criterio de la Desviación Absoluta Media se comenzará estudiando el problema de localizar dos servicios sobre un árbol.

### 3.1 Problema 2-DAM sobre un árbol.

**Definición 3.1.1** Para  $X = \{x_1, x_2\} \in T$ , un par de puntos sobre el árbol  $T$ , definiremos la distancia de un vértice cualquiera  $v$  del árbol a  $X$  como

$$d(v, X) = \min \{d(v, x_1), d(v, x_2)\}$$

Dado un árbol  $T$  y un par  $X = \{x_1, x_2\} \in T$ , la distancia  $d(v, X)$  induce una partición del conjunto de vértices en dos conjuntos  $V(1)$ ,  $V(2)$  según sean los vértices más próximos al servicio ubicado en  $x_1$ , o al servicio ubicado en  $x_2$ .

Convenio: En caso de que  $d(v, x_1) = d(v, x_2)$  asumiremos que  $v \in V(1)$ . En consecuencia,

$$V(1) = \{v \in V : d(v, x_1) \leq d(v, x_2)\}; \quad V(2) = V \setminus V(1)$$

Consideraremos definido un orden posterior sobre el conjunto de vértices con raíz en el vértice  $v_r$ , que establecerá un orden para las aristas:

$$[u_1, v_{t(1)}], [u_2, v_{t(2)}], \dots, [u_{n-1}, v_r]$$

Además sobre la arista  $e_i = [u_i, v_{t(i)}]$  se medirá  $x$  desde el vértice  $u_i$ .

**Definición 3.1.2** *La función 2-Desviación Absoluta Media (2-DAM) sobre un árbol  $T$ , se define como la aplicación 2-DAM:  $T \times T \rightarrow \mathbb{R}^+$  tal que*

$$2\text{-DAM}(X) = \sum_{v_i \in V} w_i |d(v_i, X) - z_m(X)|$$

donde  $X = \{x_1, x_2\}$  y  $z_m(X) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, X)$  es la función mediana.

Haciendo uso de la partición del conjunto de vértices  $V$  resultará:

$$2\text{-DAM}(X) = \sum_{v_i \in V(1)} w_i |d(v_i, x_1) - z_m(X)| + \sum_{v_i \in V(2)} w_i |d(v_i, x_2) - z_m(X)|$$

Supondremos que sobre cada arista sólo se localizará un servicio.

Sobre cada par de aristas la definición de la función de la expresión (1.1) nos permite denotar de igual forma a los puntos del árbol  $\{x_1, x_2\} \in T$  y a los pares  $(x_1, x_2) \in T^2$ .

Para el conjunto de dos aristas  $\{e_p, e_q\} \in E$  si  $\mathcal{E}^2 = [0, l(e_p)] \times [0, l(e_q)]$ , y si  $X = \{x_1, x_2\} \in T^2$  será  $x_1 \in e_p, x_2 \in e_q$ .

Para resolver el problema general primero analizaremos el problema restringido a un par de aristas fijas  $\{e_p, e_q\}$

### 3.1.1 Problema restringido a dos aristas fijas

Sean las aristas  $e_p = [u_p, v_{t(p)}]$ ,  $e_q = [u_q, v_{t(q)}]$  de longitudes  $l_p, l_q$  respectivamente. Se trata de encontrar un  $X^* \in \mathcal{E}^2 = [0, l_p] \times [0, l_q]$  tal que

$$2\text{-DAM}(X^*) \leq 2\text{-DAM}(X) \quad \forall X \in \mathcal{E}^2$$

Para ello procederemos primero a determinar los posibles puntos en  $P(e_p, e_q)$ , el único camino que conecta los vértices más cercanos de dichas aristas  $e_p, e_q$ , para los cuales alguno de los vértices tenga la misma distancia, y en consecuencia determinen un cambio de asignación. Esta situación es similar a la que presentaban los puntos cuello de botella para el problema de un solo servicio.

Por tanto, consideramos los vértices  $v$  en el camino  $P(e_p, e_q)$  para los cuales existe un  $x_1 \in e_p$  y un  $x_2 \in e_q$  de modo que  $d(v, x_1) = d(v, x_2)$ , ecuación que representa a una recta. Estas rectas al intersectarse con el rectángulo  $[0, l_p] \times [0, l_q]$  determinan las regiones primarias y, en consecuencia, la asignación de los vértices a los servicios permanece fija para todos los vértices en cada región primaria.

Se diferenciarán los vértices asignados a cada servicio, según accedan a él por un extremo u otro de la arista, denotando a los conjuntos de vértices asignados al

servicio ubicado en  $x_1$  como:

$$A(1) = \{v \in V(1) : d(v, x_1) = d(v, u_p) + x_1\}, \quad y$$

$$B(1) = \{v \in V(1) : d(v, x_1) = d(v, u_p) - x_1\}$$

y a los conjuntos de vértices asignados al servicio ubicado en  $x_2$  como:

$$A(2) = \{v \in V(2) : d(v, x_2) = d(v, u_q) + x_2\}, \quad y$$

$$B(2) = \{v \in V(2) : d(v, x_2) = d(v, u_q) - x_2\}$$

Haciendo uso de la partición de vértices, la función mediana podrá expresarse como sigue

$$\begin{aligned} z_m(X) &= \sum_{v_i \in A(1)} w_i x_1 - \sum_{v_i \in B(1)} w_i x_1 + \sum_{v_i \in A(2)} w_i x_2 - \sum_{v_i \in B(2)} w_i x_2 + \\ &+ \sum_{v_i \in V(1)} w_i d(v_i, u_p) + \sum_{v_i \in V(2)} w_i d(v_i, u_q) = g_1 x_1 + g_2 x_2 + z_m(u_p, u_q) \end{aligned} \quad (3.1)$$

donde  $g_1 = \sum_{v_i \in A(1)} w_i - \sum_{v_i \in B(1)} w_i$ ,  $g_2 = \sum_{v_i \in A(2)} w_i - \sum_{v_i \in B(2)} w_i$

Los valores  $g_1, g_2$  permanecen constantes sobre cada región primaria, ya que la asignación de vértices permanece fija.

Como consecuencia de la definición podemos considerar

$$\begin{aligned} 2\text{-DAM}(x_1, x_2) &= \sum_{v_i \in A(1)} w_i |d(v_i, u_p) + x_1 - z_m(X)| + \sum_{v_i \in B(1)} w_i |d(v_i, u_p) - x_1 - z_m(X)| + \\ &+ \sum_{v_i \in A(2)} w_i |d(v_i, u_q) + x_2 - z_m(X)| + \sum_{v_i \in B(2)} w_i |d(v_i, u_q) - x_2 - z_m(X)| \end{aligned}$$

Si sustituimos la expresión de la mediana  $z_m(X)$  obtenida en (3.1) obtenemos:

$$2\text{-DAM}(x_1, x_2) = \sum_{v_i \in A(1)} w_i |d(v_i, u_p) + (1 - g_1)x_1 - g_2 x_2 - z_m(u_p, u_q)| +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{v_i \in B(1)} w_i |d(v_i, u_p) - (1 + g_1)x_1 - g_2x_2 - z_m(u_p, u_q)| + \\
& + \sum_{v_i \in A(2)} w_i |d(v_i, u_q) - g_1x_1 + (1 - g_2)x_2 - z_m(u_p, u_q)| + \\
& + \sum_{v_i \in B(2)} w_i |d(v_i, u_q) - g_1x_1 - (1 + g_2)x_2 - z_m(u_p, u_q)|
\end{aligned}$$

Por lo que podemos expresar  $2\text{-DAM}(x_1, x_2) = \sum_{v_i \in V} |\Delta_i(x_1, x_2)|$ ,

donde cada  $\Delta_i(x_1, x_2) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i$  corresponde a la contribución del vértice genérico  $v_i$  a la función  $2\text{-DAM}(x_1, x_2)$ .

En función de la asignación de cada vértice  $v_i$ , los coeficientes vendrán dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
a_{i1} &= \begin{cases} (1 - g_1)w_i \geq 0, & \text{si } i \in A(1) \\ -(1 + g_1)w_i < 0, & \text{si } i \in B(1) \\ -g_1w_i, & \text{si } i \in A(2) \cup B(2) \end{cases} \\
a_{i2} &= \begin{cases} -g_2w_i, & \text{si } i \in A(1) \cup B(1) \\ (1 - g_2)w_i \geq 0, & \text{si } i \in A(2) \\ -(1 + g_2)w_i < 0, & \text{si } i \in B(2) \end{cases} \\
c_i &= \begin{cases} w_i(d(v_i, u_p) - z_m(u_p, u_q)), & \text{si } i \in A(1) \cup B(1) \\ w_i(d(v_i, u_q) - z_m(u_p, u_q)), & \text{si } i \in A(2) \cup B(2) \end{cases}
\end{aligned}$$

Los cambios de signo en la contribución  $\Delta_i(x_1, x_2)$  determinan segmentos que establecen una partición en zonas de asignación secundaria, en las que  $\Delta_i(x_1, x_2)$  mantendrán el signo para todos los vértices, y en las cuales la función  $2\text{-DAM}$  es lineal. La función  $2\text{-DAM}$  mantiene la continuidad al pasar a una zona contigua, aunque no será diferenciable.

A continuación se establecerán las zonas secundarias y el signo que cada término  $\Delta_i(x_1, x_2)$  tendrá para cada vértice.



Para los vértices asignados al servicio ubicado en  $x_1$  sobre el arista  $e_p$  se van a considerar los siguientes cuatro conjuntos.

$$A_2(1) = \{v_i \in A(1) : a_{i2}x_2 + c_i \geq 0, \quad x_2 \in [0, l_q]\}$$

$$A_1(1) = A(1) \setminus A_2(1)$$

$$B_2(1) = \{v_i \in B(1) : a_{i2}x_2 + c_i \leq 0, \quad x_2 \in [0, l_q]\}$$

$$B_1(1) = B(1) \setminus B_2(1)$$

Análogamente se considerarán otros cuatro conjuntos para los vértices asignados al servicio ubicado en  $x_2$  sobre la arista  $e_q$ .

$$A_2(2) = \{v_i \in A(2) : a_{i1}x_1 + c_i \geq 0, \quad x_1 \in [0, l_p]\}$$

$$A_1(2) = A(2) \setminus A_2(2)$$

$$B_2(2) = \{v_i \in B(2) : a_{i1}x_1 + c_i \leq 0, \quad x_1 \in [0, l_p]\}$$

$$B_1(2) = B(2) \setminus B_2(2)$$

**Lema 3.1.3** *Se verifica que:*

$$v_i \in A_2(1) \cup A_2(2) \implies \Delta_i(x_1, x_2) \geq 0; \quad v_i \in B_2(1) \cup B_2(2) \implies \Delta_i(x_1, x_2) < 0$$

Es suficiente observar que si  $v_i \in A_2(1)$  resulta que  $a_{i1} = (1 - g_1)w_i \geq 0$  y que  $a_{i2}x_2 + c_i \geq 0$ . Luego se verifica que la suma  $\Delta_i(x_1, x_2)$  es no negativa para toda la región primaria. Igualmente se razona en los demás casos.

En consecuencia, el signo de  $\Delta_i(x_1, x_2)$  puede cambiar solo para los vértices  $v_i \in \cup_{k=1}^2 (A_1(k) \cup B_1(k))$ . Estos vértices definen rectas  $\Delta_i(x_1, x_2) = 0$ , cuyas ecuaciones vendrán dadas por una de las siguientes expresiones:

$$g_2x_2 = (1 - g_1)x_1 + d(v_i, u_p) - z_m(u_p, u_q) \quad \text{si } v_i \in A_1(1)$$



$$\begin{aligned}
g_2x_2 &= -(1 + g_1)x_1 + d(v_i, u_p) - z_m(u_p, u_q) && \text{si } v_i \in B_1(1) \\
(1 - g_2)x_2 &= g_1x_1 - d(v_i, u_q) + z_m(u_p, u_q) && \text{si } v_i \in A_1(2) \\
(1 + g_2)x_2 &= -g_1x_1 + d(v_i, u_q) - z_m(u_p, u_q) && \text{si } v_i \in B_1(2)
\end{aligned}$$

Por tanto las rectas correspondientes a los vértices, que están en un mismo conjunto serán paralelas.

Las intersecciones de estas rectas entre sí, en la región primaria correspondiente, y con la frontera de esta región establecen una teselación en zonas a las que llamaremos regiones secundarias. Es importante observar que, sobre cada región secundaria, el signo de  $\Delta_i(x_1, x_2)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , no cambia.

Para obtener la expresión de la función 2-DAM( $X$ ) sobre cada región secundaria se descompondrán los subconjuntos de vértices  $A_1(k)$  y  $B_1(k)$ ,  $k = 1, 2$ , en los subconjuntos que aparecen a continuación:

Para los vértices asignados al servicio localizado en  $x_1$  sobre la arista  $e_p$ :

$$\begin{aligned}
A_1^1(1) &= \{v_i \in A_1(1) : g_2x_2 > (1 - g_1)x_1 + d(v_i, u_p) - z_m(u_p, u_q)\} \\
A_1^2(1) &= A_1(1) \setminus A_1^1(1) \\
B_1^1(1) &= \{v_i \in B_1(1) : g_2x_2 \geq -(1 + g_1)x_1 + d(v_i, u_1) - z_m(u_p, u_q)\} \\
B_1^2(1) &= B_1(1) \setminus B_1^1(1)
\end{aligned}$$

y para los vértices asignados al servicio localizado en  $x_2$  sobre la arista  $e_q$ :

$$\begin{aligned}
A_1^1(2) &= \{v_i \in A_1(2) : (1 - g_2)x_2 < g_1x_1 - d(v_i, u_q) + z_m(u_p, u_q)\} \\
A_1^2(2) &= A_1(2) \setminus A_1^1(2) \\
B_1^1(2) &= \{v_i \in B_1(2) : (1 + g_2)x_2 \geq -g_1x_1 + d(v_i, u_q) - z_m(u_p, u_q)\} \\
B_1^2(2) &= B_1(2) \setminus B_1^1(2)
\end{aligned}$$

**Lema 3.1.4** *Se verifica que para  $k = 1, 2$ :*

$$\begin{aligned} \Delta_i(x_1, x_2) < 0 & \quad \text{para } v_i \in A_1^1(k), & \Delta_i(x_1, x_2) \geq 0 & \quad \text{para } v_i \in A_1^2(k), \\ \Delta_i(x_1, x_2) \leq 0 & \quad \text{para } v_i \in B_1^1(k), & \Delta_i(x_1, x_2) > 0 & \quad \text{para } v_i \in B_1^2(k) \end{aligned}$$

De acuerdo con lo anterior la función 2-DAM( $x_1, x_2$ ), se puede expresar sobre cada región secundaria (para un par de aristas fijas), como sigue.

$$\text{2-DAM}(x_1, x_2) = \sum_{v_i \in V} |\Delta_i(x_1, x_2)| = Mx_1 + Nx_2 + C$$

donde

$$\begin{aligned} M &= (1 - g_1) \left( \sum_{i \in A_2(1) \cup A_1^2(1)} w_i - \sum_{i \in A_1^1(1)} w_i \right) + (1 + g_1) \left( \sum_{i \in B_1^1(1) \cup B_2(1)} w_i - \sum_{i \in B_1^2(1)} w_i \right) + \\ &\quad + g_1 \left( \sum_{i \in A_1^1(2) \cup B_1^1(2) \cup B_2(2)} w_i - \sum_{i \in A_2(2) \cup A_1^2(2) \cup B_1^2(2)} w_i \right) \\ N &= g_2 \left( \sum_{i \in A_1^1(1) \cup B_2(1) \cup B_1^1(1)} w_i - \sum_{i \in A_1^2(1) \cup A_2(1) \cup B_1^2(1)} w_i \right) + \\ &\quad + (1 - g_2) \left( \sum_{i \in A_2(2) \cup A_1^2(2)} w_i - \sum_{i \in A_1^1(2)} w_i \right) + (1 + g_2) \left( \sum_{i \in B_2(2) \cup B_1^2(2)} w_i - \sum_{i \in B_1^1(2)} w_i \right) \\ C &= \sum_{v_i \in A_2(1) \cup A_1^2(1) \cup B_1^2(1)} w_i [d(v_i, u_1) - z_m(u_1, u_2)] - \\ &\quad - \sum_{v_i \in A_1^1(1) \cup B_2(1) \cup B_1^1(1)} w_i [d(v_i, u_1) - z_m(u_1, u_2)] + \\ &\quad + \sum_{v_i \in A_2(2) \cup A_1^2(2) \cup B_1^2(2)} w_i [d(v_i, u_2) - z_m(u_1, u_2)] - \\ &\quad - \sum_{v_i \in A_1^1(2) \cup B_2(2) \cup B_1^1(2)} w_i [d(v_i, u_2) - z_m(u_1, u_2)] \end{aligned}$$

Cada región secundaria es un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$  y la función 2-Desviación Absoluta Media (2-DAM) cuando se restringe a una región secundaria es una porción

de plano. Por tanto, sobre cada región secundaria, el mínimo se alcanzará en un vértice o un segmento de la frontera. En consecuencia, será suficiente evaluar la función 2-DAM( $X$ ) en los vértices de cada región para obtener el mínimo.

Como consecuencia de los resultados anteriores proponemos el siguiente algoritmo para obtener la localización de dos puntos sobre un árbol que minimiza la Desviación Absoluta Media.

### 3.1.2 Algoritmo

#### ALGORITMO 2-DAM/T

##### **Entrada**

Sea  $T(V, E)$  un árbol no dirigido con un orden posterior sobre el conjunto de vértices  $V$ ,  $|V| = n$ ,  $(w_1, \dots, w_n)$  los pesos normalizados asociados a dichos vértices y  $E = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  el conjunto de aristas de longitudes  $l(e_i)$ ;  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Sea  $DAM = \infty$

**Para**  $p = 1$  hasta  $(n-2)$

**Para**  $q = (p + 1)$  hasta  $(n-1)$

**Determinar** las regiones primarias, estudiando los vértices en el camino  $P(e_p, e_q)$ .

**Para**  $ind = 1$  hasta número de regiones primarias

**Determinar** los conjuntos de vértices asignados a cada servicio  $V_1, V_2$  y los subconjuntos  $A(1), B(1), A(2), B(2)$

**Calcular** los valores  $g_1, g_2$ .

**Determinar** los vértices  $v_i$  donde el signo de  $\Delta_i$  cambia.



**Calcular** los segmentos  $S_i$  que resultan de  
intersectar  $\Delta_i(x_1, x_2) = 0$  con la región primaria.

**Obtener** la intersección de segmentos

$$S_i \cap S_j, \quad \forall i, j \text{ con } i \neq j$$

**Evaluar**  $2\text{-DAM}(x_1, x_2)$  para los puntos de intersección.

Si  $2\text{-DAM}(x_1, x_2) < DAM$ , entonces

$$DAM \leftarrow 2\text{-DAM}(x_1, x_2)$$

$$X^* \leftarrow X$$

$$\text{ARISTAS} \leftarrow (p, q)$$

**Final para ind**

**Final para q**

**Final para p**

**Salida**

$\{X^*, DAM\}$  conjunto de valores óptimos. Se alcanza en las aristas  $e_p, e_q$ , a una distancia  $x_1$  de  $u_p$ ,  $x_2$  de  $u_q$  y cuyo valor de la función  $2\text{-DAM}(x_1, x_2)$  es DAM.

### 3.1.3 Ejemplo

Considérese el árbol  $T$  de la Figura 3.1, con vértices en orden posterior y enraizado en  $v_{10}$ . Los valores  $\{0.172, 0.229, 0.123, 0.063, 0.051, 0.055, 0.105, 0.092, 0.061, 0.049\}$  corresponden a los pesos asignados a los vértices, y las longitudes de las aristas dadas en el correspondiente orden son  $\{3, 2, 1, 3, 4, 2, 2, 4, 1\}$ .

Se quiere localizar  $X = \{x_1, x_2\}$ , dos puntos sobre el árbol  $T$ , de modo que minimice la Desviación Absoluta Media,  $2\text{-DAM}(X)$ . Si consideramos el seguimiento

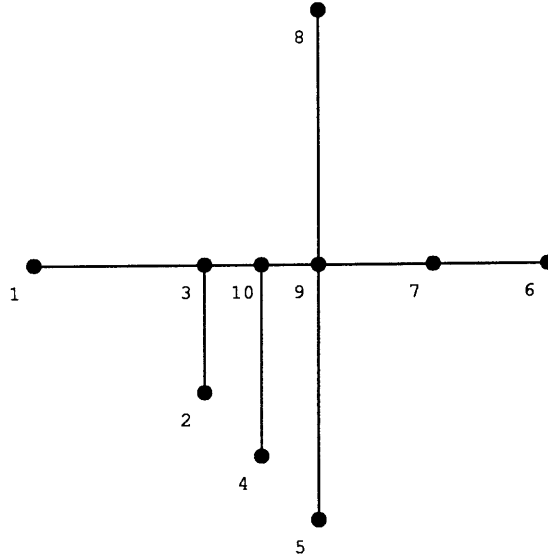


Figura 3.1: Ejemplo de árbol.

del algoritmo para las aristas  $e_1 = [v_1, v_3]$ ,  $e_8 = [v_8, v_9]$  al ser las longitudes de las aristas  $l(e_1) = 3$ ,  $l(e_8) = 4$  resulta que  $\mathcal{E}^2 = [0, 3] \times [0, 4]$ .

Las regiones primarias son:

$$R(1) = \mathcal{E}^2 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 \leq x_1 - 1\}$$

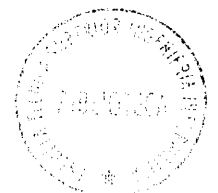
$$R(2) = \mathcal{E}^2 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 \geq x_1 - 1 \wedge x_2 \leq x_1 + 1\}$$

$$R(3) = \mathcal{E}^2 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 \geq x_1 + 1 \wedge x_2 \leq x_1 + 3\}$$

$$R(4) = \mathcal{E}^2 \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 \geq x_1 + 3\},$$

como se muestra en la Figura 3.2.

Hay tres vértices  $v_3, v_{10}, v_9$  en el camino  $P(e_1, e_8)$  que generan rectas primarias.



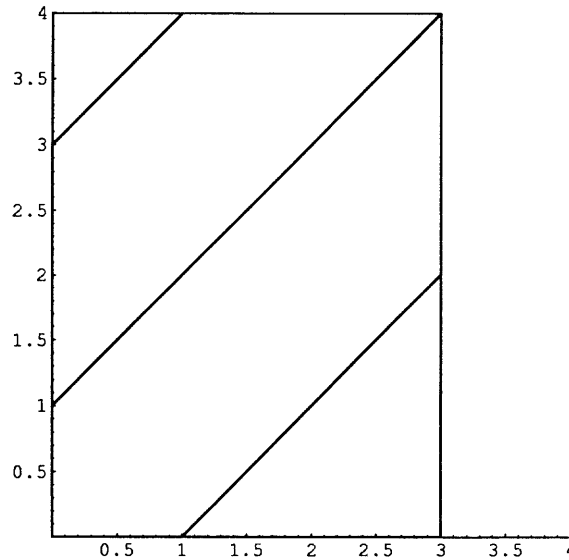


Figura 3.2: Regiones primarias para las aristas 1 y 8.

Para la primera de las regiones primarias se obtiene:

$$A(1) = \{v_1\}, \quad B(1) = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{10}\}$$

$$A(2) = \{v_8\}, \quad B(2) = \emptyset$$

$$g_1 = -0.564, \quad g_2 = 0.092$$

Los vértices donde  $\Delta_i$  cambia de signo son:  $v_1, v_2$ , y  $v_9$ . Hay cuatro puntos de intersección y el óptimo se alcanza para el señalado en la Figura 3.3.

Para la segunda región primaria

$$A(1) = \{v_1\}, \quad B(1) = \{v_2, v_3, v_4, v_{10}\}$$

$$A(2) = \{v_8\}, \quad B(2) = \{v_5, v_6, v_7, v_9\}$$

$$g_1 = -0.292, \quad g_2 = -0.18$$

Los vértices donde  $\Delta_i$  cambia de signo son:  $\{v_1, v_2, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ .

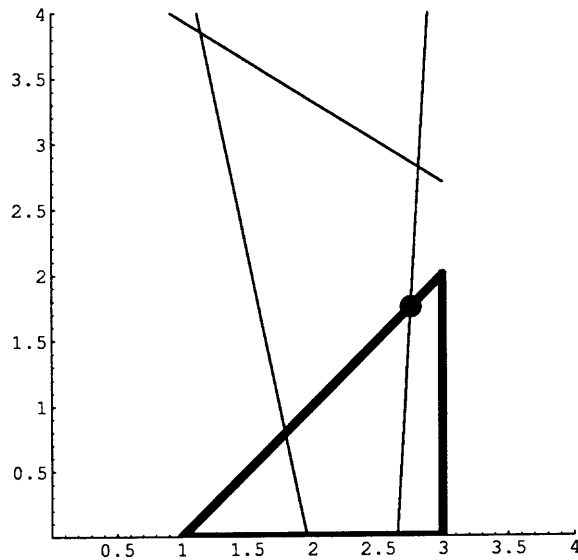


Figura 3.3: Regiones secundarias y punto óptimo.

Se obtienen los puntos de intersección y de entre ellos el óptimo se logra para  $(2.47538, 3.47538)$ , siendo 0.850939 el valor de 2-DAM (ver Figura 3.4).

Se continúa del mismo modo para las otras dos regiones que quedan, resultando que el óptimo sobre las aristas  $(e_1, e_8)$ , que también es el óptimo para el árbol, se logra para el valor anterior;  $X^* = (2.47538, 3.47538)$  y  $2\text{-DAM}(X^*) = 0.850939$ .

La función 2-DAM para el par de aristas  $e_1, e_8$  se muestra en la Figura 3.5, consiste en una unión de porciones de planos, es continua, pero ni cóncava ni convexa y con segmentos donde no es diferenciable.



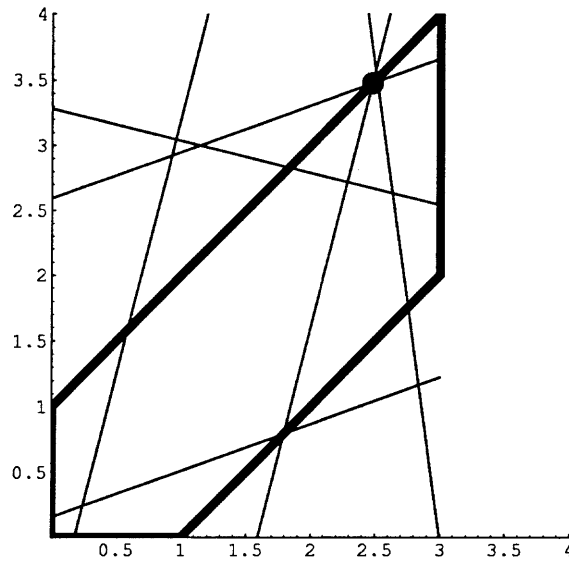


Figura 3.4: Regiones secundarias y punto óptimo.

### 3.1.4 Complejidad del Algoritmo

Se designará por  $V(P(x_1, x_2))$  al conjunto de los vértices del camino  $P(x_1, x_2)$ , y mediante  $T_v$  a la componente conexa obtenida al desconectar el árbol tras eliminar las aristas del camino.

**Lema 3.1.5** *Sea  $(e_p, e_q)$  un par de aristas fijas y sea  $v \in P(e_p, e_q)$  un vértice en el camino para el cual existen  $x_1 \in e_p$ ,  $x_2 \in e_q$  de modo que  $d(v, x_1) = d(v, x_2)$ . Entonces todos los vértices de la componente conexa  $T_v$  cambian la asignación de servicios de igual modo que  $v$  y además para los mismos valores  $x_1 \in e_p$ ,  $x_2 \in e_q$ .*

#### **Demostración:**

En efecto, si  $u$  es un vértice del subárbol  $T_v$ ,

$$d(u, x_1) = d(u, v) + d(v, x_1)$$



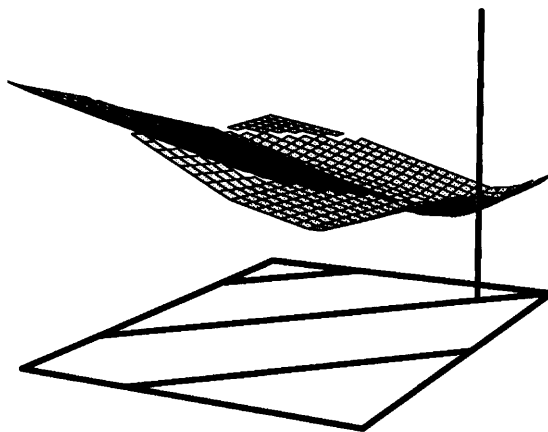


Figura 3.5: Función 2-DAM sobre las arista 1 y 8 con el punto óptimo.

$$d(u, x_2) = d(u, v) + d(v, x_2)$$

por tanto  $d(u, x_1) = d(u, x_2)$  equivale a  $d(v, x_1) = d(v, x_2)$ . □

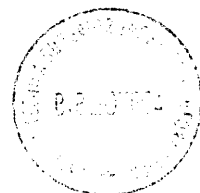
Esto implica que  $d(v, X)$ ,  $d(u, X)$  son superficies paralelas y que la proyección de las rectas, donde las superficies no son diferenciables, sobre  $\mathcal{E}$  sea el mismo segmento que delimita las regiones primarias.

**Lema 3.1.6** *El número máximo de intersecciones entre los segmentos  $\{d(v_i, X) - z_m(X) = 0; (x_1, x_2) \in \mathcal{E}^2\}$  está acotado por  $n^2$ .*

**Demostración:**

Para cada par de aristas y en cada zona de asignación primaria se divide el conjunto de vértices en cuatro grupos: A(1), B(1), A(2), B(2). Para cada uno de los vértices  $v_i$  que mantienen su pertenencia a estos conjuntos resulta que las funciones  $d(v_i, X)$ , para todo  $X = (x_1, x_2) \in \mathcal{E}^2$ , son porciones de planos.

Notar que los vértices que cambian su asignación son los que están en el camino que une  $e_p$  con  $e_q$  y los de los subárboles enraizados en éstos. Para estos vértices,



$d(v, X)$  es la unión de dos semiplanos (función cóncava). Las superficies asociadas a vértices del mismo grupo son paralelas. Solo se intersectarán las superficies asociadas a vértices de distinto grupo.

Globalmente sólo hay cuatro direcciones de planos y/o semiplanos, según los grupos de vértices.

$$\begin{aligned} (1, 0, -1), & \quad (d(v, X) = d(v, u_p) + x_1) \\ (-1, 0, -1), & \quad (d(v, X) = d(v, u_p) - x_1) \\ (0, 1, -1), & \quad (d(v, X) = d(v, u_q) + x_2) \\ (0, -1, -1), & \quad (d(v, X) = d(v, u_q) - x_2) \end{aligned}$$

La mediana  $z_m(X) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, X)$  sobre cada región primaria es una porción de plano, y para el par de aristas, resulta una función cóncava con segmentos paralelos no diferenciables. Por tanto, la intersección de las superficies  $d(v, X)$  con  $z_m(X)$  son segmentos o bien una poligonal no cerrada cuya proyección sobre  $\mathcal{E}^2$  da lugar a los segmentos que determinan las regiones secundarias.

Para dos vértices de distinto grupo, en el peor caso, sus superficies se intersectan dos veces con  $z_m(X)$  y la peor situación se produce cuando los cuatro grupos de vértices tienen similar número de elementos  $\frac{n}{4}$ .

Por ello, una cota del número de intersecciones será:

$$2 \frac{n}{4} \left\{ 3 \frac{n}{4} + \frac{2n}{4} + \frac{n}{4} \right\} = \frac{3}{4} n^2 < n^2$$

□

En la implementación del algoritmo, las intersecciones se obtienen con el empleo de nueve sumas y seis multiplicaciones en el peor de los casos mediante el algoritmo de Franklin, A. [17]. También puede emplearse el resultado de Mairson y Stolfi

(1983) recogido en Preparata y Shamos [55], que establece: Dados dos conjuntos  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  de segmentos sin intersecciones entre los elementos de cada uno de los conjuntos, con  $|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| = n$ , sólo se precisa tiempo  $O(H + n \log n)$  para determinar las  $H$  intersecciones de los segmentos de  $\mathcal{A}$  con los segmentos de  $\mathcal{B}$ ; siendo además ésta la cota inferior.

### Complejidad del Algoritmo

Como el proceso se repite para cada par de aristas, su realización comporta  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  veces. Por el lema 3.1.10, para cada par de aristas la complejidad del proceso de determinación de los puntos de intersección está acotada por  $n^2$ . El cálculo de la función 2-DAM sobre cada uno de ellos requiere la suma de  $n$  sumandos. Por tanto, el número total de evaluaciones de la función 2-DAM es  $O(n^5)$ .

## 3.2 Problema p-DAM sobre un grafo general.

Tras estudiar el caso de localizar un servicio en grafo general y el de localizar dos en el caso de redes árbol, se considerará la localización de servicios múltiples sobre una red general.

Es conocido que los problemas p-centro, p-mediana (Kariv y Hakimi [28], [29]) y p-varianza con  $p$  como entrada son NP-duros (López de los Mozos [34]). Por ello vamos a analizar el problema p-desviación absoluta media.

En lo que sigue se demostrará que el problema de la p-desviación absoluta media es NP-equivalente al problema de decisión del conjunto dominante finito definido por: "Dado un grafo  $G(V, E)$  y un entero positivo  $p$  ( $1 < p < n$ ). ¿Existe un subconjunto  $V_p^* \subset V$  con  $|V_p^*| \leq p$  tal que cada vértice de  $G$  está en  $V_p^*$  o es adyacente a un vértice de  $V_p^*$ ?", conocido problema NP-completo (Garey y Johnson [19]) incluso para grafos planos de grado máximo para los vértices igual a tres.

**Lema 3.2.1** Sea  $G(V, E)$  un grafo plano, no dirigido, con todas sus aristas de longitud 1, todos los vértices de igual peso y de grado menor o igual a tres. Entonces existe un subconjunto  $V_p^* \subset V$  de  $p$  vértices de modo que  $DAM(V_p^*) = \frac{2p}{n} \frac{n-p}{n}$ .

**Demostración:**

Como todos los vértices son de igual peso  $\frac{1}{n}$ , la situación más igualitaria se producirá cuando los  $p$  vértices en los que se ubiquen los  $p$  servicios, atiendan de igual modo a los  $n-p$  vértices del grafo. Es decir, para  $\forall v_i \in V \setminus V_p^*$ ,  $d(v_i, V_p^*) = 1$  ya que todas las aristas son de longitud 1.

La mediana de éste conjunto  $V_p^*$  será:

$$z_m(V_p^*) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(v_i, V_p^*) = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V \setminus V_p^*} 1 = \frac{n-p}{n}$$

La función  $p$ -desviación absoluta media de  $V_p^*$  será:

$$\begin{aligned} DAM(V_p^*) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d(v_i, V_p^*) - z_m(V_p^*)| = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V_p^*} |z_m(V_p^*)| + \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V \setminus V_p^*} |1 - z_m(V_p^*)| = \\ &= \frac{1}{n} (p \frac{n-p}{n}) + \frac{1}{n} (n-p) (1 - \frac{n-p}{n}) = \frac{n-p}{n} (\frac{p}{n} + 1 - \frac{n-p}{n}) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$DAM(V_p^*) = \frac{(n-p)}{n} \frac{2p}{n} \quad (3.2)$$

□

**Lema 3.2.2** En el mismo grafo  $G(V, E)$  anterior de  $n$  vértices de igual peso y de grado menor o igual a tres, para cualquier otro subconjunto  $V_p \subset V$  de  $p$  vértices,

$$DAM(V_p) \geq DAM(V_p^*) = \frac{2p}{n} \frac{(n-p)}{n}$$

**Demostración:**

Consideremos que en  $V_p$  están todos los vértices de  $V_p^*$  excepto el vértice  $v_k$  que se sustituye por un vértice adyacente.



Para los  $n - p$  vértices de demanda que no están en  $V_p$ , por las características del grafo (grado de los vértices menor o igual a tres) resultará, según se ilustra en el dibujo anterior, que

- sólo un vértice aumenta su distancia respecto de  $V_p^*$  en 1 unidad, permaneciendo los  $n - p - 1$  restantes a la misma distancia que antes, o
- dos vértices aumentan su distancia respecto de  $V_p^*$  en 1 unidad, permaneciendo los  $n - p - 2$  restantes invariables.

Para el primer caso

$$z_m(V_p) = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V \setminus V_p} d(v_i, V_p) = \frac{n - p - 1}{n} + \frac{2}{n} = \frac{n - p}{n} + \frac{1}{n}$$

$$z_m(V_p) = z_m(V_p^*) + \frac{1}{n}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \text{DAM}(V_p) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d(v_i, V_p) - z_m(V_p)| = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V_p} |z_m(V_p)| + \frac{n - p - 1}{n} |1 - z_m(V_p)| + \frac{1}{n} |2 - z_m(V_p)| = \\ &= \frac{p}{n} \frac{(n - p + 1)}{n} + \frac{n - p - 1}{n} \left(1 - \frac{n - p + 1}{n}\right) + \frac{1}{n} \left(2 - \frac{n - p + 1}{n}\right) = \\ &= \frac{p}{n} \frac{(n - p + 1)}{n} + \frac{(n - p - 1)(p - 1)}{n} + \frac{1}{n} \frac{(n + p - 1)}{n} = \frac{2p}{n} \frac{(n - p)}{n} + \frac{1}{n} \frac{2p}{n} \end{aligned}$$

Como sabemos por (3.2) que  $\text{DAM}(V_p^*) = \frac{2p}{n} \frac{n-p}{n}$ , sustituyendo podemos expresar

$$\text{DAM}(V_p) = \text{DAM}(V_p^*) + \frac{1}{n} \frac{2p}{n}$$

y al ser  $1 < p < n$ , resulta que

$$\text{DAM}(V_p) > \text{DAM}(V_p^*)$$

Para el segundo caso, la mediana será

$$z_m(V_p) = \frac{n-p-2}{n} + 2 \frac{2}{n} = \frac{n-p+2}{n} = z_m(V_p^*) + \frac{2}{n}$$

y la desviación absoluta media,

$$\begin{aligned} \text{DAM}(V_p) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d(v_i, V_p) - z_m(V_p)| = \\ &= \frac{p}{n} \frac{(n-p+2)}{n} + \frac{n-p-2}{n} \left| 1 - \frac{n-p+2}{n} \right| + \frac{2}{n} \left| 2 - \frac{n-p+2}{n} \right| = \\ &= \frac{p}{n} \frac{(n-p)}{n} + \frac{p}{n} \frac{2}{n} + \frac{(n-p-2)}{n} \frac{p-2}{n} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n} \frac{(p-2)}{n} = \\ &= \frac{n-p}{n} \frac{2p}{n} - \frac{2}{n} \frac{(n-p)}{n} + \frac{2}{n} \left( \frac{p}{n} + 1 \right) = \frac{n-p}{n} \frac{2p}{n} + \frac{2}{n} \frac{2p}{n} \end{aligned}$$

Al sustituir (3.2) resulta que

$$\text{DAM}(V_p) = \text{DAM}(V_p^*) + \frac{2}{n} \frac{2p}{n}$$

y al ser  $1 < p < n$ , se verifica también para el segundo caso el que

$$\text{DAM}(V_p) \geq \text{DAM}(V_p^*)$$

Para cualquier otra configuración de  $p$  vértices  $V_p$ , se puede repetir de modo recursivo el razonamiento, quedando demostrado el lema.  $\square$

**Teorema 3.2.3** *Sea  $G(V, E)$  un grafo plano, no dirigido, con todas sus aristas de longitud 1, los  $n$  vértices de igual peso y de grado menor o igual a tres. Entonces el subconjunto  $V_p^* \subset V$  de  $p$  vértices, definido anteriormente en el que  $\forall v_i \in V \setminus V_p^*$ ,  $d(v_i, V_p^*) = 1$  es un conjunto de  $p$  vértices para el que se obtiene el mínimo de la función  $p$ -desviación absoluta media, siendo  $DAM(V_p^*) = \frac{2p}{n} \frac{n-p}{n}$ .*

**Demostración:**

Con los dos lemas previos, hemos encontrado un conjunto  $V_p^* \subset V$  de  $p$  vértices, de modo que cualquier otro subconjunto  $V_p \subset V$  verifica

$$DAM(V_p) > DAM(V_p^*)$$

□

Los conjuntos de  $p$  vértices para los que se alcanza el mínimo de la función DAM se denominarán conjuntos de vértices  $p$ -desviación absoluta media.

**Teorema 3.2.4** *El problema discreto de encontrar un conjunto de vértices  $p$ -desviación absoluta media es NP-duro, incluso cuando la red es plana, todos sus vértices tienen igual peso, las aristas la misma longitud y el grado máximo de cada vértice es tres.*

**Demostración:**

Según el teorema anterior, el conjunto  $V_p^*$  es un conjunto  $p$ -desviación absoluta media si y sólo si  $\forall v_i \in V \setminus V_p^*$ ,  $d(v_i, V_p^*) = 1$ , pero ésta condición equivale a que  $V_p^*$  es un conjunto dominante de cardinal  $p$  y en consecuencia el problema de encontrar un conjunto  $p$ -desviación absoluta media, es equivalente al problema de decisión del conjunto dominante finito que, según Garey y Johnson, es NP-completo; lo que implica que el correspondiente problema de búsqueda es NP-duro. □



**Teorema 3.2.5** *El problema  $p$ -desviación absoluta media es NP-duro, incluso cuando la red es un grafo plano en el que todos los vértices tienen igual peso, todas las aristas la misma longitud, y el grado máximo de cada vértice es tres.*

**Demostración:**

Consideremos el grafo  $G(V, E)$  con  $|V| = n$ . Sin pérdida de generalidad supondremos que todas las aristas son de longitud 1. Al ser indistinguibles todos los vértices, la situación más igualitaria se producirá cuando todos los vértices en los que se concentra la demanda tengan la misma distancia al servicio más próximo.

Sea  $X_p$  un conjunto de  $p$  puntos cualesquiera de la red. Dado que el caso  $p = n$  es trivial, se verificará que  $\forall v_i \in V \quad v_i \notin X_p \quad d(v_i, X_p) = d > 0$ .

Sea  $S \subset G$  el conjunto de puntos medios de las aristas

$$S = \{x_{ij} \in [v_i, v_j] \in E : d(x_{ij}, v_i) = d(x_{ij}, v_j) = \frac{1}{2}\}$$

Si suponemos que la demanda equidista de los servicios  $X_p \subset S \cup V$ , sólo se presentan dos situaciones para esta distancia común:  $d = 1$  o  $d = \frac{1}{2}$

Si  $d = 1$ , entonces  $X_p \subset V$ , reduciéndose el problema al estudiado anteriormente: el conjunto de vértices  $p$ -desviación absoluta media que hemos demostrado que es NP-duro.

Si  $d = \frac{1}{2}$ , entonces  $X_p \cap S \neq \emptyset$ .  $\forall v_i \in V_{(1/2)} = \{v_i \in V : v_i \notin X_p\}$  resulta que  $d(v_i, X_p) = \frac{1}{2}$

Ya que el valor de la función mediana correspondiente a  $X_p$  es:

$$z_m(X_p) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(v_i, X_p) = \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V_{(1/2)}} d(v_i, X_p) = \frac{|V_{(1/2)}|}{2n},$$



el valor de la función p-desviación absoluta media de  $X_p$  será:

$$\begin{aligned}
\text{DAM}(X_p) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |d(v_i, X_p) - z_m(X_p)| = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{v_i \in V_{(1/2)}} \left| \frac{1}{2} - z_m(X_p) \right| + \sum_{v_i \in V \setminus V_{(1/2)}} |z_m(X_p)| = \\
&= \frac{1}{n} |V_{(1/2)}| \left| \frac{1}{2} - \frac{|V_{(1/2)}|}{2n} \right| + \frac{1}{n} \frac{|V_{(1/2)}|}{2n} (n - |V_{(1/2)}|) = \\
&= \frac{1}{2n} |V_{(1/2)}| \frac{n - |V_{(1/2)}|}{n} + \frac{1}{2n} |V_{(1/2)}| \frac{n - |V_{(1/2)}|}{n} = \frac{|V_{(1/2)}|}{n} \frac{n - |V_{(1/2)}|}{n} \\
\text{DAM}(X_p) &= \frac{|V_{(1/2)}|}{n} \frac{n - |V_{(1/2)}|}{n}
\end{aligned}$$

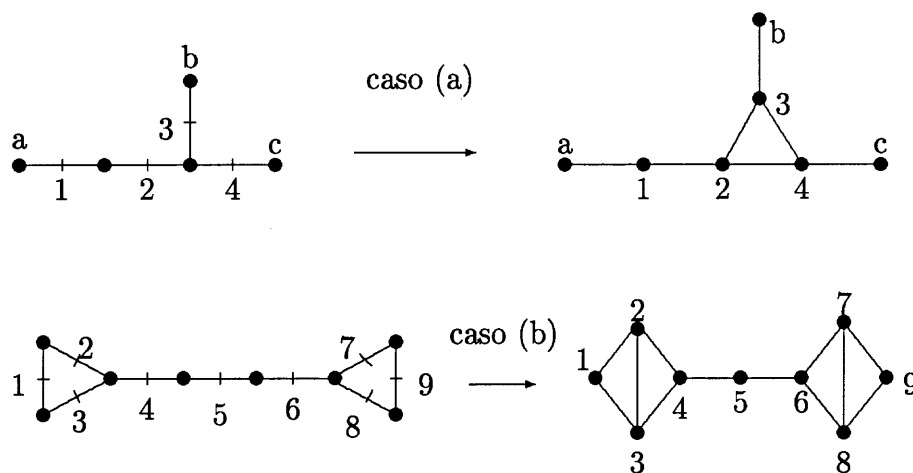
El mínimo se alcanza cuando  $|V_{(1/2)}| = n$  o  $|V_{(1/2)}| = 0$ . El caso  $|V_{(1/2)}| = 0$  coincide con el ya estudiado, mientras que  $|V_{(1/2)}| = n$  equivale a que  $V_{(1/2)} = V$  y  $X_p \subset S$ . Podemos garantizar que si existe un conjunto  $X_p^* \subset S$ , con  $|X_p^*| = p$ , tal que  $\forall v \in V$ ,  $d(v, X_p^*) = \frac{1}{2}$ , entonces  $X_p^*$  es un conjunto p-desviación absoluta media de la red y además  $\text{MAD}(X_p) = 0$ .

A partir del grafo  $G(V, E)$ , se construirá  $\tilde{G}(\tilde{V}, \tilde{E})$  como sigue:

$\tilde{V} = S \cup V^{(1)}$ , siendo  $V^{(1)} = \{v \in V : \delta(v) = 1\}$  el conjunto de vértices extremos de  $G$ ,  $\tilde{E} = E^{(1)} \cup E_{(1/2)}$ , donde  $E_{(1/2)} = \{[x_{ij}, x_{jk}] : x_{ij}, x_{jk} \in S \wedge [v_i, v_j], [v_j, v_k] \in E \text{ adyacentes en } G\}$  el conjunto de nuevas aristas que enlazan los puntos medios de aristas adyacentes del grafo inicial  $G$ , y  $E^{(1)} = \{[v_i, x_{ij}] : \delta(v_i) = 1, x_{ij} \in S \wedge [v_i, v_j] \in E\}$ .

Se supone que los vértices de  $\tilde{V}$  están equiponderados y que todas las aristas tienen de longitud la unidad.

La siguiente figura ilustra, mediante dos ejemplos, la construcción de  $\tilde{G}$ .



Podemos suponer  $\tilde{V}_p^* \subset \tilde{V} \setminus V^{(1)} = S$  sin perder generalidad, pues si  $V^{(1)} = \emptyset$  (caso (b)), claramente  $\tilde{V}_p^* \subset S$ . Si  $V^{(1)} \neq \emptyset$  (caso (a)) y  $\tilde{V}_p^*$  tuviera un vértice  $\tilde{v} \in V^{(1)}$ , podríamos actuar del siguiente modo: suprimirlo si el vértice adyacente pertenece a  $\tilde{V}_p^*$ , o bien sustituirlo por el vértice adyacente, que es de  $S$  sin que varíe el valor de la función DAM.

Con esta construcción existirá un conjunto p-desviación absoluta media  $X_p^* \subset S$  en la red inicial  $G$  tal que  $\text{DAM}(X_p^*) = 0$  si y sólo si existe un conjunto de  $p$  vértices  $\tilde{V}_p^* \subset \tilde{V} \setminus V^{(1)}$  que es un conjunto dominante de la red  $\tilde{G}$ .

Por todo ello, la anterior equivalencia demuestra que el problema de decisión planteado es NP-completo y por tanto el correspondiente problema de obtención de  $p$  puntos de la red que minimice la desviación absoluta media es NP-duro.  $\square$

### 3.3 Problema 2-DAM sobre un grafo general.

Sea  $G(V, E)$  un grafo no dirigido, con un conjunto de vértices  $V$  finito,  $|V| = n$  y con la demanda  $(w_1, \dots, w_n)$  situada en los vertices de la red, que consideraremos

normalizada,  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  y  $E$  conjunto de aristas ( $|E| = m$ ) con longitudes positivas asociadas  $\{l(e)\}_{e \in E}$ .

**Definición 3.3.1** Para un par de puntos sobre el grafo  $G$ ,  $X = \{x_1, x_2\} \in G$ , se define la distancia desde un vértice cualquiera  $v$  del grafo al par  $X$  como

$$d(v, X) = \min \{d(v, x_1), d(v, x_2)\}$$

La distancia  $d(v, X)$  induce una partición del conjunto de vértices en dos conjuntos  $V(1)$ ,  $V(2)$  de acuerdo con la mayor proximidad al servicio ubicado en  $x_1$  o al servicio ubicado en  $x_2$ . Análogamente al caso en que la estructura era un árbol, cuando  $d(v, x_1) = d(v, x_2)$ , se supondrá que  $v \in V(1)$ . Es decir:

**Definición 3.3.2** La función 2-Desviación Absoluta Media (2-DAM) sobre el grafo 2-DAM:  $G \times G \rightarrow \mathbb{R}^+$  se define por:

$$2\text{-DAM}(X) = \sum_{v_i \in V} w_i |d(v_i, X) - z_m(X)|$$

donde  $X = \{x_1, x_2\}$  y  $z_m(X) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, X)$  es la función mediana.

Teniendo en cuenta la partición del conjunto de vértices  $V$ , podremos expresar

$$2\text{-DAM}(X) = \sum_{v_i \in V(1)} w_i |d(v_i, x_1) - z_m(X)| + \sum_{v_i \in V(2)} w_i |d(v_i, x_2) - z_m(X)|$$

También aquí supondremos que sobre cada arista sólo se localizará un servicio, ya que con ello no perdemos generalidad.

Una vez ordenado el conjunto de  $n$  vértices, consideraremos definidas las aristas según el orden de la matriz de adyacencias; es decir, el orden de los vértices sobre la

arista  $e_p = [v_i, v_j]$  será siempre  $i < j$ . Igualmente, un punto  $x$  sobre una arista  $[v_i, v_j]$  lo referenciaremos por su distancia al extremo  $v_i$ , siendo por tanto  $x := d(v_i, x)$ .

Para resolver el problema general primero analizaremos el restringido a un par de aristas fijas  $\{e_p, e_q\}$ .

Para el conjunto de dos aristas  $\{e_p, e_q\} \in E$ , sea  $\mathcal{E}^2 = [0, l(e_p)] \times [0, l(e_q)]$ ; si  $X = \{x_1, x_2\} \in G$ , será  $x_1 \in e_p$  y  $x_2 \in e_q$ .

### 3.3.1 Problema general restringido a dos aristas fijas

El objetivo ahora es determinar  $x_1 \in e_p$  y  $x_2 \in e_q$  con  $X = \{x_1, x_2\} \in \mathcal{E}^2$ , de modo que

$$PR(e_p, e_q) \equiv \min_{X \in \mathcal{E}^2} \sum_{v_i \in V} w_i |d(v_i, X) - z_m(X)|$$

Sean las aristas  $e_p = [v_p, v_r]$ , con  $p < r$  y  $e_q = [v_q, v_s]$ , con  $q < s$ , de longitudes  $l_1, l_2$  respectivamente.

Dado que se necesitará conocer la asignación de vértices a los servicios así como el extremo de la arista por la que acceden, empezaremos por obtener los vértices que verifiquen alguna de las dos condiciones siguientes:

$$\min\{d(v, v_p), d(v, v_r)\} \geq d(v, v_q) + \frac{1}{2}(d(v, v_s) - d(v, v_q) + l_2)$$

$$\min\{d(v, v_q), d(v, v_s)\} \geq d(v, v_p) + \frac{1}{2}(d(v, v_r) - d(v, v_p) + l_1)$$

Para estos vértices la asignación al servicio es fija: en el primer caso, al servicio  $x_2$  en  $e_q$  y en el segundo, al servicio  $x_1$  en  $e_p$ .

Obsérvese que para cada vértice el punto más alejado de la arista que conserva la misma asignación es el punto cuello de botella asociado. Son puntos  $x_1 \in e_p$ , de modo que para  $v \in V(1)$ , resulta  $d(v, x_1) = d(v, v_p) + x_1 = d(v, v_r) + l_1 - x_1$ , lo que da lugar a  $x_1 = \frac{1}{2}(d(v, v_r) - d(v, v_p) + l_1)$  y para  $v \in V(2)$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}(d(v, v_s) - d(v, v_q) + l_2)$ . Para los vértices que faltan por asignar averiguaremos también si hay puntos cuello de botella.

Ordenaremos en sentido creciente estos valores.

$$0 < x_1^1 < \dots < x_1^k = l_p, \quad 0 < x_2^1 < \dots < x_2^h = l_q$$

Posteriormente, de modo ordenado para cada pareja  $[x_1^i, x_1^{i+1}] \times [x_2^j, x_2^{j+1}]$  estudiaremos la asignación. Sabemos que el camino de cada vértice a cada una de las porciones de aristas está determinado, estamos por tanto en la misma situación que en el caso de árboles, por lo que realizamos a partir de aquí un proceso análogo. Es decir, hemos dividido las aristas en subaristas, donde el camino desde cada vértice a ellas es único; considerando a estas subaristas como aristas el proceso continúa, de forma similar al caso de grafos tipo árbol.

Estudiaremos si hay valores  $x_1 \in [x_1^i, x_1^{i+1}]$  y  $x_2 \in [x_2^j, x_2^{j+1}]$  para los cuales existe un vértice  $v$  de modo que  $d(v, x_1) = d(v, x_2)$ , que al intersectarse con el rectángulo  $[x_1^i, x_1^{i+1}] \times [x_2^j, x_2^{j+1}]$  determinarán cambios de asignación a los servicios, así como distintas regiones primarias.

En cada región primaria, la asignación de los vértices a los servicios y el camino, permanecen fijos para todos los vértices.

Vamos a mostrar con un ejemplo la situación de las regiones primarias.

Consideramos el grafo de la Figura 3.6 que se obtiene al añadir las aristas (2, 4), (3, 8) y (6, 8) al árbol de la Figura 3.1.

Para el par de aristas (1, 3) y (6, 7) de longitudes 3 y 2 respectivamen-

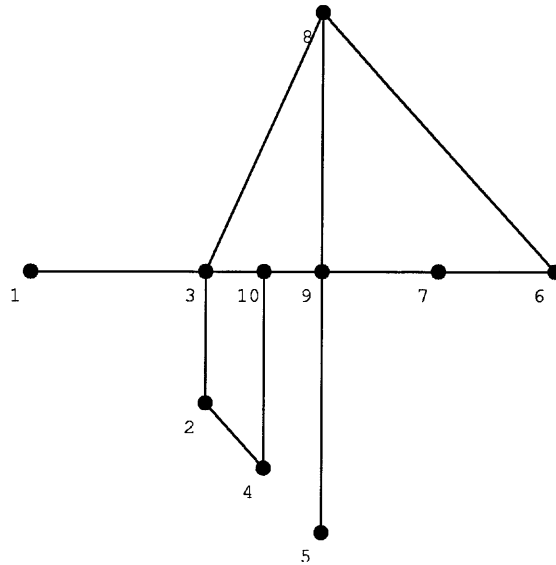


Figura 3.6: Ejemplo de grafo cíclico.

te sólo se obtiene un punto cuello de botella  $x_2^1 = 1.17157$ , por tanto tendremos dos rectángulos, el primero de ellos queda dividido en cinco regiones primarias por los segmentos  $[(1, 0), (2.17157, 1.17157)]$ ,  $[(0, 1), (0.17157, 1.17157)]$ ,  $[(0.643709, 1.17157), (1.81528, 0)]$  generados por los vértices  $v_9, v_{10}$  y  $v_8$ .

En la Figura 3.8 se pueden apreciar las distintas regiones primarias correspondientes al primero de los dos rectángulos considerado. Análogamente, en el segundo rectángulo las regiones primarias son las de la Figura 3.9.

Se distinguirán los vértices asignados a cada servicio, según accedan a él, por un extremo u otro de la arista. Así los conjuntos de vértices asignados al servicio ubicado en  $x_1$  serán denotados por:

$$A(1) = \{v \in V(1) : d(v, x_1) = d(v, v_p) + x_1\}, y$$

$$B(1) = \{v \in V(1) : d(v, x_1) = d(v, v_r) + l_1 - x_1\}$$

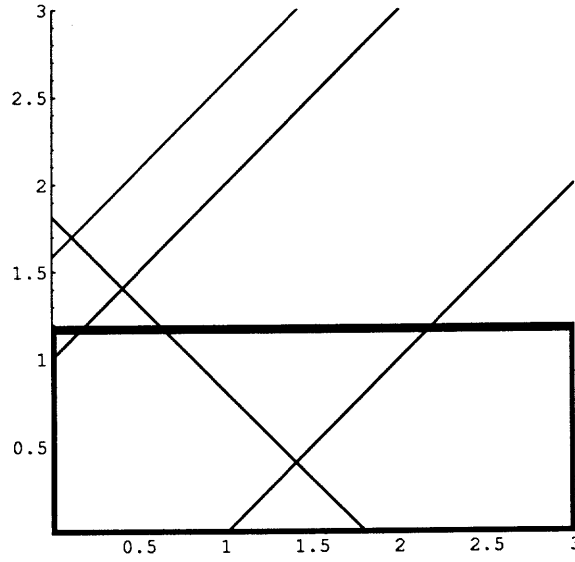


Figura 3.7: Primeras regiones primarias para las aristas (1,3), (6,7)

mientras que los conjuntos de vértices asignados al servicio ubicado en  $x_2$  serán:

$$A(2) = \{v \in V(2) : d(v, x_2) = d(v, v_q) + x_2\}, y$$

$$B(2) = \{v \in V(2) : d(v, x_2) = d(v, v_s) + l_2 - x_2\}$$

Haciendo uso de la partición de vértices, la función mediana

$$z_m(X) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, X), \text{ se puede expresar}$$

$$\begin{aligned} z_m(X) = & \sum_{v_i \in A(1)} w_i x_1 - \sum_{v_i \in B(1)} w_i x_1 + \sum_{v_i \in A(2)} w_i x_2 - \sum_{v_i \in B(2)} w_i x_2 + \\ & + \sum_{v_i \in A(1)} w_i d(v_i, v_p) + \sum_{v_i \in B(1)} w_i (d(v_i, v_r) + l_1) + \sum_{v_i \in A(2)} w_i d(v_i, v_q) + \sum_{v_i \in B(2)} w_i (d(v_i, v_s) + l_2) \end{aligned}$$

$$z_m(x_1, x_2) = g_1 x_1 + g_2 x_2 + C \tag{3.3}$$

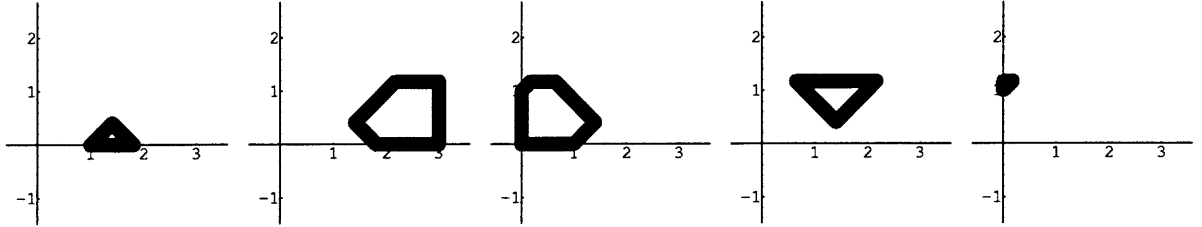


Figura 3.8: Regiones primarias independientemente.

$$\text{donde } g_1 = \sum_{v_i \in A(1)} w_i - \sum_{v_i \in B(1)} w_i, \quad g_2 = \sum_{v_i \in A(2)} w_i - \sum_{v_i \in B(2)} w_i$$

$$C = \sum_{v_i \in A(1)} w_i d(v_i, v_p) + \sum_{v_i \in B(1)} w_i (d(v_i, v_r) + l_1) + \sum_{v_i \in A(2)} w_i d(v_i, v_q) + \sum_{v_i \in B(2)} w_i (d(v_i, v_s) + l_2)$$

permanecen constantes sobre cada región primaria, lo que implica que  $z_m(X)$  es una porción de plano en cada región primaria.

La función 2-DAM resultará:

$$2\text{-DAM}(x_1, x_2) = \sum_{v_i \in V(1)} w_i |d(v_i, x_1) - z_m(X)| + \sum_{v_i \in V(2)} w_i |d(v_i, x_2) - z_m(X)|$$

Teniendo en cuenta el acceso a cada arista adoptará la expresión:

$$\begin{aligned} 2\text{-DAM}(x_1, x_2) = & \sum_{v_i \in A(1)} w_i |d(v_i, v_p) + x_1 - z_m(X)| + \sum_{v_i \in B(1)} w_i |d(v_i, v_r) + l_1 - x_1 - z_m(X)| + \\ & + \sum_{v_i \in A(2)} w_i |d(v_i, v_q) + x_2 - z_m(X)| + \sum_{v_i \in B(2)} w_i |d(v_i, v_s) + l_2 - x_2 - z_m(X)| \end{aligned}$$

Sustituyendo  $z_m(X)$  según la expresión (3.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} 2\text{-DAM}(x_1, x_2) = & \sum_{v_i \in A(1)} w_i |d(v_i, v_p) + (1 - g_1)x_1 - g_2x_2 - C| + \\ & + \sum_{v_i \in B(1)} w_i |d(v_i, v_r) + l_1 - (1 + g_1)x_1 - g_2x_2 - C| + \end{aligned}$$



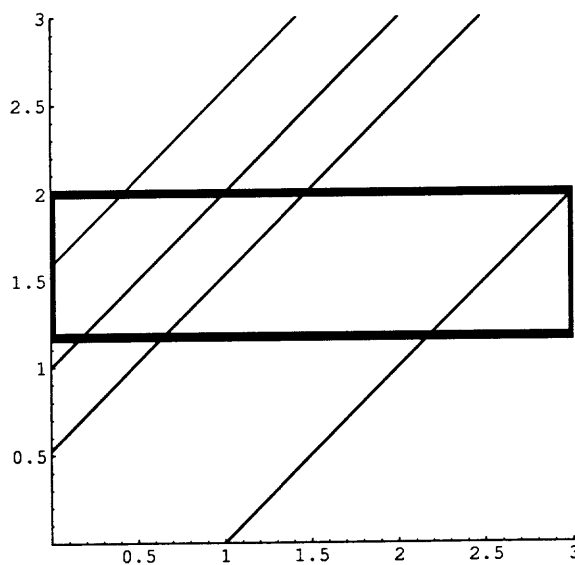


Figura 3.9: Segundas regiones primarias para las aristas (1,3), (6,7).

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{v_i \in A(2)} w_i |d(v_i, v_q) - g_1 x_1 + (1 - g_2) x_2 - C| + \\
 & + \sum_{v_i \in B(2)} w_i |d(v_i, v_s) + l_2 - g_1 x_1 - (1 + g_2) x_2 - C| = \sum_{v_i \in V} |\Delta_i(x_1, x_2)|,
 \end{aligned}$$

donde cada  $\Delta_i(x_1, x_2) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + c_i$  es la contribución correspondiente del vértice genérico  $v_i$  a la función 2-DAM( $x_1, x_2$ ).

En función de la asignación de cada vértice  $v_i$ , los coeficientes vendrán dados por las siguientes expresiones:

$$a_{i1} = \begin{cases} (1 - g_1)w_i \geq 0, & \text{si } i \in A(1) \\ -(1 + g_1)w_i < 0, & \text{si } i \in B(1) \\ -g_1 w_i, & \text{si } i \in A(2) \cup B(2) \end{cases}$$



$$a_{i2} = \begin{cases} -g_2 w_i, & \text{si } i \in A(1) \cup B(1) \\ (1 - g_2) w_i \geq 0, & \text{si } i \in A(2) \\ -(1 + g_2) w_i < 0, & \text{si } i \in B(2) \end{cases}$$

$$c_i = \begin{cases} w_i(d(v_i, v_p) - C), & \text{si } i \in A(1) \\ w_i(d(v_i, v_r) + l_1 - C), & \text{si } i \in B(1) \\ w_i(d(v_i, v_q) - C), & \text{si } i \in A(2) \\ w_i(d(v_i, v_s) + l_2 - C), & \text{si } i \in B(2) \end{cases}$$

Los cambios de signo en la contribución  $\Delta_i(x_1, x_2)$  determinan segmentos que establecen una partición en zonas de asignación secundaria, en las que  $\Delta_i(x_1, x_2)$  mantendrán el signo para todos los vértices, y en las cuales la función 2-DAM es lineal. De una zona secundaria a otra contigua la función 2-DAM será continua, ya que el valor absoluto lo es, aunque también sabemos que no será diferenciable.

A continuación se establecerán las zonas secundarias y el signo que cada término  $\Delta_i(x_1, x_2)$  tendrá para cada vértice.

Para los vértices asignados al servicio ubicado en  $x_1$  sobre el segmento  $[x_1^i, x_1^{i+1}]$  de la arista  $e_p$  se empleará la siguiente notación:

$$A_2(1) = \{v_i \in A(1) : a_{i2}x_2 + c_i \geq 0, \quad x_2 \in [x_2^j, x_2^{j+1}]\}$$

$$A_1(1) = A(1) \setminus A_2(1)$$

$$B_2(1) = \{v_i \in B(1) : a_{i2}x_2 + c_i \leq 0, \quad x_2 \in [x_2^j, x_2^{j+1}]\}$$

$$B_1(1) = B(1) \setminus B_2(1)$$

Análogamente para los vértices asignados al servicio ubicado en  $x_2$  sobre la arista  $e_q$  se denotará:

$$A_2(2) = \{v_i \in A(2) : a_{i1}x_1 + c_i \geq 0, \quad x_1 \in [x_1^k, x_1^{k+1}]\}$$

$$\begin{aligned}
A_1(2) &= A(2) \setminus A_2(2) \\
B_2(2) &= \{v_i \in B(2) : a_{i1}x_1 + c_i \leq 0, \quad x_1 \in [x_1^k, x_1^{k+1}]\} \\
B_1(2) &= B(2) \setminus B_2(2)
\end{aligned}$$

**Lema 3.3.3** *Se verifica que:*

si  $v_i \in A_2(1) \cup A_2(2) \implies \Delta_i(x_1, x_2) \geq 0$ , y si  $v_i \in B_2(1) \cup B_2(2) \implies \Delta_i(x_1, x_2) < 0$

Es suficiente observar que si por ejemplo  $v_i \in A_2(1)$  resulta que  $a_{i1} = (1 - g_1)w_i \geq 0$  y que  $a_{i2}x_2 + c_i \geq 0$ , luego  $\Delta_i(x_1, x_2) \geq 0$  para toda la región primaria.

En consecuencia, el signo de  $\Delta_i(x_1, x_2)$  puede cambiar sólo para los vértices  $v_i \in \cup_{k=1}^2 (A_1(k) \cup B_1(k))$ . Estos vértices definen una recta  $\Delta_i(x_1, x_2) = 0$ , cuyas ecuaciones vendrán dadas por una de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
g_2x_2 &= (1 - g_1)x_1 + d(v_i, v_p) - C && \text{si } v_i \in A_1(1) \\
g_2x_2 &= -(1 + g_1)x_1 + d(v_i, v_r) + l_1 - C && \text{si } v_i \in B_1(1) \\
(1 - g_2)x_2 &= g_1x_1 - d(v_i, v_q) + C && \text{si } v_i \in A_1(2) \\
(1 + g_2)x_2 &= -g_1x_1 + d(v_i, v_s) + l_2 - C && \text{si } v_i \in B_1(2)
\end{aligned}$$

Por tanto las rectas correspondientes a los vértices, que están en un mismo conjunto, serán paralelas. Las intersecciones de estas rectas entre sí, en la región primaria correspondiente con la frontera de esta región, establecen una teselación en zonas a las que llamaremos regiones secundarias. Es importante observar que sobre cada región secundaria el signo de  $\Delta_i(x_1, x_2)$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , no cambia.

Para obtener la expresión de la función 2-DAM( $X$ ) sobre cada región secundaria se descompondrán los subconjuntos de vértices  $A_1(k)$  y  $B_1(k)$ ,  $k = 1, 2$ , en los subconjuntos que aparecen a continuación:



Para los vértices asignados al servicio localizado en  $x_1$  sobre  $[x_1^i, x_1^{i+1}]$  en la arista  $e_p$ :

$$A_1^1(1; R) = \{v_i \in A_1(1) : g_2 x_2 > (1 - g_1)x_1 + d(v_i, v_p) - C, \forall (x_1, x_2) \in R\}$$

$$A_1^2(1) = A_1(1) \setminus A_1^1(1)$$

$$B_1^1(1; R) = \{v_i \in B_1(1) : g_2 x_2 \geq -(1 + g_1)x_1 + d(v_i, v_r) + l_1 - C, \forall (x_1, x_2) \in R\}$$

$$B_1^2(1) = B_1(1) \setminus B_1^1(1)$$

y para los vértices asignados al servicio localizado en  $x_2$  sobre  $[x_2^j, x_2^{j+1}]$  en la arista  $e_q$

$$A_1^1(2; R) = \{v_i \in A_1(2) : (1 - g_2)x_2 < g_1 x_1 - d(v_i, v_q) + C, \forall (x_1, x_2) \in R\}$$

$$A_1^2(2) = A_1(2) \setminus A_1^1(2)$$

$$B_1^1(2; R) = \{v_i \in B_1(2) : (1 + g_2)x_2 \geq -g_1 x_1 + d(v_i, v_s) + l_q - C, \forall (x_1, x_2) \in R\}$$

$$B_1^2(2) = B_1(2) \setminus B_1^1(2)$$

**Lema 3.3.4** *Se verifica que para  $k = 1, 2$ :*

$$\Delta_i(x_1, x_2) < 0 \quad \text{para } v_i \in A_1^1(k; R), \quad \Delta_i(x_1, x_2) \geq 0 \quad \text{para } v_i \in A_1^2(k; R),$$

$$\Delta_i(x_1, x_2) \leq 0 \quad \text{para } v_i \in B_1^1(k; R), \quad \Delta_i(x_1, x_2) > 0 \quad \text{para } v_i \in B_1^2(k; R).$$

Ahora estamos en condiciones de expresar la función 2-DAM( $x_1, x_2$ ), sobre cada región secundaria, para un par de aristas fijas. Se tiene

$$2\text{-DAM}(x_1, x_2) = \sum_{v_i \in V} |\Delta_i(x_1, x_2)| = Mx_1 + Nx_2 + D$$

donde

$$M = (1 - g_1) \left( \sum_{i \in A_2(1) \cup A_1^2(1)} w_i - \sum_{i \in A_1^1(1)} w_i \right) + (1 + g_1) \left( \sum_{i \in B_1^1(1) \cup B_2(1)} w_i - \sum_{i \in B_1^2(1)} w_i \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +g_1\left(\sum_{i \in A_1^1(2) \cup B_1^1(2) \cup B_2(2)} w_i - \sum_{i \in A_2(2) \cup A_1^2(2) \cup B_1^2(2)} w_i\right) \\
N = & g_2\left(\sum_{i \in A_1^1(1) \cup B_2(1) \cup B_1^1(1)} w_i - \sum_{i \in A_1^2(1) \cup A_2(1) \cup B_1^2(1)} w_i\right) + \\
& +(1-g_2)\left(\sum_{i \in A_2(2) \cup A_1^2(2)} w_i - \sum_{i \in A_1^1(2)} w_i\right) + (1+g_2)\left(\sum_{i \in B_2(2) \cup B_1^1(2)} w_i - \sum_{i \in B_1^2(2)} w_i\right) \\
D = & \sum_{v_i \in A_2(1) \cup A_1^2(1)} w_i[d(v_i, v_p) - C] - \sum_{v_i \in A_1^1(1)} w_i[d(v_i, v_p) - C] + \\
& + \sum_{v_i \in B_1^2(1)} w_i[d(v_i, v_r) + l_p - C] - \sum_{v_i \in B_2(1) \cup B_1^1(1)} w_i[d(v_i, v_r) + l_p - C] + \\
& + \sum_{v_i \in A_2(2) \cup A_1^2(2)} w_i[d(v_i, v_q) - C] - \sum_{v_i \in A_1^1(2)} w_i[d(v_i, v_q) - C] + \\
& + \sum_{v_i \in B_1^2(2)} w_i[d(v_i, v_s) + l_q - C] - \sum_{v_i \in B_2(2) \cup B_1^1(2)} w_i[d(v_i, v_s) + l_q - C]
\end{aligned}$$

Cada región secundaria es un conjunto compacto de  $\mathbb{R}^2$  y la función 2-Desviación Absoluta Media (2-DAM) definida sobre  $\mathbb{R}^2$  es un plano. Por tanto, sobre cada región secundaria, el mínimo se alcanzará en un vértice o un segmento de la frontera. En consecuencia para obtenerlo, será suficiente evaluar la función 2-DAM( $X$ ) en los vértices de cada región y guardar el mínimo.

Como consecuencia de los resultados anteriores proponemos el siguiente algoritmo para obtener la localización de dos puntos sobre un grafo que minimiza la Desviación Absoluta Media.



### 3.3.2 Algoritmo

#### ALGORITMO 2-DAM/G

##### Entrada

Sea  $G(V, E)$  un grafo no dirigido con conjunto de vértices  $V$ ,  $|V| = n$ , ordenados según la matriz de adyacencias,  $(w_1, \dots, w_n)$  los pesos normalizados asociados a los vértices,  $E = \{e_1, \dots, e_m\}$  el conjunto de aristas con sus longitudes asociadas y  $D$  la matriz de distancias entre vértices

Sea  $DAM = \infty$

Para  $p = 1$  hasta  $m-1$

Para  $q = (p + 1)$  hasta  $m$

**Determinar** los conjuntos de puntos cuello de botella y

ordenarlos  $x_1^0, x_1^2, \dots, x_1^k; x_2^0, x_2^2, \dots, x_2^h$

Para  $ind1 = 0$  hasta  $k-1$

Para  $ind2 = 0$  hasta  $h-1$

**Determinar** las regiones primarias, estudiando los vértices en el camino  $P(e_p, e_q)$ .

Para  $ind3 = 1$  hasta número de regiones primarias

**Actualizar** los conjuntos de vértices  $A_i(1), B_i(1), A_i(2), B_i(2)$ , para  $i = 1, 2$

**Calcular** los valores  $g_1, g_2$  y  $C$ .

**Determinar** los vértices  $v_i$  donde el signo de  $\Delta_i$  cambia.

**Calcular** los segmentos  $S_i$  que resultan de intersectar  $\Delta_i(x_1, x_2) = 0$  con la región primaria.

**Obtener** la intersección de segmentos

$$S_i \cap S_j, \quad \forall i, j \text{ con } i \neq j$$

**Evaluar** 2-DAM( $x_1, x_2$ ) para los puntos de intersección.

**Si** 2-DAM( $x_1, x_2$ ) < DAM, entonces

$$DAM \leftarrow 2\text{-DAM}(x_1, x_2)$$

$$X^* \leftarrow X$$

$$\text{ARISTAS} \leftarrow (p, q)$$

**Final para ind3**

**Final para ind2**

**Final para ind1**

**Final para q**

**Final para p**

**Salida**

$\{X^*, DAM\}$  conjunto de valores óptimos. Se alcanza en las aristas  $e_p, e_q$ , a una distancia  $x_1$  del vértice  $u_p$ , y  $x_2$  de  $u_q$  con un valor para la función 2-DAM( $x_1, x_2$ ) igual a DAM.

### 3.3.3 Complejidad del Algoritmo

Para el comportamiento del algoritmo es importante notar que el modo de considerar dos aristas de entre un conjunto de  $m$ , de todas las formas posibles sin tener en cuenta el orden, es  $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2}$ ; con lo que la complejidad que aporta al proceso es  $O(m^2)$ .

Para un par de aristas fijas, en el proceso de determinación de los puntos cuello de botella intervienen en el peor caso  $n - 2$  vértices, que se agrupan en dos subconjuntos que deberán ser ordenados independientemente. Por tanto, el proceso requiere  $O(n \log n)$  operaciones.

La peor agrupación posible es la que subdivide en dos grupos de igual tamaño ind1 hasta  $\frac{n}{2} - 1$  e ind2 también hasta  $\frac{n}{2} - 1$ , por tanto se deberán estudiar  $O(\frac{n^2}{4})$  rectángulos. La actualización de los conjuntos  $A_i, B_i$  para  $i = 1, 2$ , así como las constantes  $g_1, g_2, C$  se realizan en tiempo constante.

La principal dificultad de implementación del algoritmo se deriva de la determinación de las fronteras de las regiones primarias, que como hemos visto en el ejemplo pueden ser de formas muy dispares, no siendo en general paralelogramos como ocurre para el caso de redes árbol.

Para una región primaria, los vértices para los que cambia el signo de  $\Delta_i$  son los que están en los conjuntos  $A_1(k) \cup B_1(k)$  para  $k = 1, 2$ . Para estos deberemos determinar el segmento intersección con la región primaria, así como las intersecciones entre todos ellos, para lo que se emplea el algoritmo rápido de Franklin [17], que reduce considerablemente el número de operaciones y además detecta la no intersección con una simple comparación con 0, evitando en dicho caso el proceso. Por el Lema 3.1.6 el número máximo de intersecciones está acotado por  $n^2$ , y tal como se señaló, la cota mínima para la determinación de las  $H$  intersecciones es  $O(H + n \log n)$ .

Por último es preciso evaluar la función en cada intersección, lo que requiere la suma de  $n$  términos.

Por todo ello, dado que las operaciones a realizar son del orden de  $m^2(n \log n + n^2 \cdot n^2 \cdot n)$ , el algoritmo propuesto es de complejidad temporal  $O(m^2 n^5)$ .



## **Capítulo 4.**

# **Localización de servicios extensos**

## Capítulo 4.

### Localización de servicios extensos

Como señalamos en la introducción, un aspecto que se tiene en cuenta cuando se clasifican los problemas de localización es la estructura del servicio a ser localizado.

Cuando éstos son demasiado grandes (con respecto a sus actividades de interés y a su entorno) para ser representados como puntos, los modelos de localización puntual no pueden ser aplicados, ya que el conjunto a localizar no consta sólo de puntos aislados sino que se ajusta a una determinada estructura, sugerida por la forma del servicio.

Citemos como ejemplo situaciones en las que se pretende localizar oleoductos o rutas de evacuación, diseñar líneas de transporte de pasajeros o mercancías, realizar perfiles geológicos, establecer rutas de transporte de materiales peligrosos, etc. (ver Mesa [48]).

Sea  $G(V, E)$  un grafo conexo no dirigido, sin bucles, con longitudes sobre las aristas y pesos sobre el conjunto de vértices. La definición de distancia puede extenderse a cada par punto-estructura mediante

$$d(z, X) = \min\{d(z, x) : x \in X\} \quad X \subset G, \quad z \in G$$

Si consideramos a  $X$  como un camino, un árbol, o cualquier otro subconjunto



conexo de  $G$  y tenemos en cuenta, como ya hemos hecho en los apartados previos, distintas funciones objetivos, resultan los problemas de localización conocidos como camino centro, camino mediana, camino varianza, etc. (Slater [60], López de los Mozos [34]).

El paso de la localización puntual a la localización de estructuras no es una mera extensión, sino que supone la consideración de problemas más complejos, ya que ciertas propiedades dejan de verificarse. Por ejemplo, tal es el caso de la propiedad de convexidad de la función Coeficiente de Variación puntual, que cuando se intenta extenderla al caso de la función Coeficiente de Variación de caminos, incluso sobre redes árbol, se demostrará en este capítulo que dicha función tan solo verifica una propiedad más débil: la pseudoconvexidad.

La localización puntual sobre una red general con el criterio centro o mediana se resuelve con un algoritmo de tipo polinomial; sin embargo, los correspondientes problemas de localización del camino centro y del camino mediana sobre redes generales son  $NP$ -duros (Hakimi [22]). Cuando la red sea tipo árbol, el algoritmo diseñado en Morgan y Slater [53] para determinar un camino mediana es destacable por tener una complejidad de tiempo lineal tras explotar las propiedades de la función objetivo y de la propia estructura de árbol de la red. Asimismo, Hedetniemi et al. [27], y Slater [61], partiendo del centro puntual y añadiendo aristas, obtuvieron independientemente un algoritmo de tiempo lineal para el camino centro. López de los Mozos, [34] haciendo uso del criterio varianza demuestra el siguiente

**Teorema 4.0.5** *El problema del camino de mínima varianza sobre un grafo general es  $NP$ -duro, incluso cuando la red tiene todas las aristas de igual longitud y los vértices de igual peso.*

La demostración se basa en que el camino de mínima varianza puede ser transformado en el problema del camino hamiltoniano, que como es sabido (Garey y Johnson [19]) es  $NP$ -completo, y su correspondiente problema de búsqueda es  $NP$ -duro.

A continuación, se restringirá el dominio a redes árboles y se estudiará la localización de caminos en los que los extremos puedan ser puntos cualesquiera de la red, según la definición (1.9), empleando los criterios varianza y su correspondiente medida relativa, el coeficiente de variación.

La tercera sección de este capítulo la dedicamos al estudio de propiedades que relacionan el punto de mínima varianza sobre un árbol con la arista y el camino de mínima varianza del mismo árbol  $T$ .

## 4.1 Camino de mínima varianza con extremos libres

Sea  $T(V, E)$  un árbol no dirigido, con  $|V| = n$ , en el que se ha definido un orden posterior y donde  $(w_1, \dots, w_n)$  es el vector demanda situado en los nodos de la red, que consideraremos normalizada.

Sea  $P(x_1, x_2) \subset T$  el camino enlazando los puntos  $x_1, x_2 \in T$ . La distancia de un vértice del árbol  $v \in T$  al camino  $P(x_1, x_2)$  se define como  $d(v, P(x_1, x_2)) = \min\{d(v, x) : x \in P(x_1, x_2)\}$ .

**Definición 4.1.1** *La función mediana para  $P(x_1, x_2)$  se define como*

$$z_m(P(x_1, x_2)) = \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, P(x_1, x_2))$$

El orden en los vértices establece un orden para las aristas.

Para el conjunto de dos aristas  $e_j, e_k \in \mathcal{E}^2 = [0, l_j] \times [0, l_k]$ , se define a continuación la varianza del camino que enlaza los puntos  $\{x_1, x_2\} \in T$  con  $x_1 \in e_j$ ;  $x_2 \in e_k$ .

**Definición 4.1.2** Para cada par de aristas sobre un árbol, la función varianza del camino que enlaza los puntos  $\{x_1, x_2\}$  en las aristas  $e_j, e_k$ , respectivamente, es  $z_s(P(x_1, x_2)) : [0, l_j] \times [0, l_k] \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ , definida como

$$z_s(P(x_1, x_2)) = \sum_{v_i \in V} w_i [d(v_i, P(x_1, x_2)) - z_m(P(x_1, x_2))]^2$$

Con esta notación, el objetivo consistirá en buscar un camino  $P^* \subset T$  de modo que  $z_s(P^*) \leq z_s(P) : \forall P \subset T$

Sean las aristas  $e_j = (u_j, u)$ ,  $e_k = (u_k, v)$ . En lo que sigue  $x_1$ , y  $x_2$  se medirán desde los vértices más alejados entre sí, es decir desde  $u_j$  y  $u_k$  o bien desde  $u_j$  y  $v$  según la disposición de las aristas.

Si el camino desde  $x_1$  hacia  $x_2$  enlaza por el vértice  $v$  su longitud es

$$|P(x_1, x_2)| = |P(u_j, u_k)| - x_1 - x_2$$

mientras que si el camino desde  $x_1$  hacia  $x_2$  enlaza por el vértice  $u_j$ , entonces su longitud es

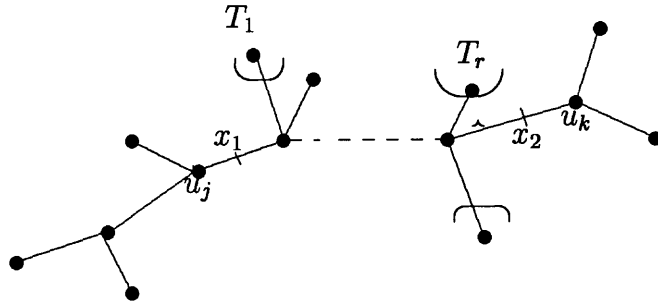
$$|P(x_1, x_2)| = |P(u_j, v)| - x_1 - x_2$$

Ambos casos se reducen a una misma situación considerando  $x_2$  medido desde el vértice más alejado de la arista  $e_j$ . Supongamos que  $u_j$  y  $u_k$  son los vértices más alejados.

Mediante  $V_s$  se denotará el conjunto de vértices del subárbol enraizado en el vértice  $s$ , que no contiene a las aristas  $e_j$  y  $e_k$ , y por  $W(V_s) = \sum_{v \in V_s} w$ , su peso.

$$\bar{V}_s = V \setminus V_s.$$

Designaremos por  $V(P(x_1, x_2))$  los vértices del camino  $P(x_1, x_2)$ , siendo  $T_1, T_2, \dots, T_r$  las componentes conexas (subárboles) obtenidas al desconectar el subárbol de vértices en  $T \setminus (T_{u_j} \cup T_{u_k})$  por eliminación de los vértices del camino  $P(x_1, x_2)$  y de las aristas que los unen.



La función mediana del camino tiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 z_m(P(x_1, x_2)) &= \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, P(x_1, x_2)) = \\
 &= \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_i [d(v_i, u_j) + x_1] + \sum_{h=1}^r \left( \sum_{v_i \in V_h} w_i d(v_i, P(x_1, x_2)) \right) + \sum_{v_i \in V_{u_k}} w_i [d(v_i, u_k) + x_2] \\
 z_m(P(x_1, x_2)) &= z_m(P) + W(V_{u_j})x_1 + W(V_{u_k})x_2 \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

donde denotamos por  $z_m(P)$  a la mediana  $z_m(P(u_j, u_k))$ .

Desarrollando la expresión de la función varianza para el camino  $P(x_1, x_2)$  resulta

$$\begin{aligned}
 z_s(P(x_1, x_2)) &= \sum_{v_i \in V} w_i [d(v_i, P(x_1, x_2)) - z_m(P(x_1, x_2))]^2 \\
 z_s(P(x_1, x_2)) &= \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_i ((d(v_i, u_j) - z_m(P))^2 + (x_1)^2 (W(\bar{V}_{u_j}))^2 + (x_2)^2 (W(V_{u_k}))^2 + \\
 &+ 2(d(v_i, u_j) - z_m(P))W(\bar{V}_{u_j})x_1 - 2(d(v_i, u_j) - z_m(P))W(V_{u_k})x_2 - 2W(\bar{V}_{u_j})W(V_{u_k})x_1x_2 + \\
 &+ \sum_{h=1}^r [ \sum_{v_i \in V_h} w_i ((d(v_i, P) - z_m(P))^2 + (x_1)^2 (W(V_{u_j}))^2 + \\
 &+ (x_2)^2 (W(V_{u_k}))^2 - 2(d(v_i, P) - z_m(P))W(V_{u_j})x_1 - \\
 &- 2(d(v_i, P) - z_m(P))W(V_{u_k})x_2 + 2W(V_{u_j})W(V_{u_k})x_1x_2 ] +
 \end{aligned}$$



$$+ \sum_{v \in \bar{V}_{u_k}} w_i [(d(v_i, u_k) - z_m(P))^2 + (x_1)^2 (W(V_{u_j}))^2 + (x_2)^2 (W(\bar{V}_{u_k}))^2 + \\ + 2(d(v_i, u_k) - z_m(P)) W(\bar{V}_{u_k}) x_2 - 2(d(v_i, u_k) - z_m(P)) W(V_{u_j}) x_1 - 2W(\bar{V}_{u_k}) W(V_{u_j}) x_1 x_2]$$

Asociando los términos de igual grado

$$z_s(P(x_1, x_2)) = \sum_{v_i \in V} w_i (d(v_i, P) - z_m(P))^2 + \\ + (x_1)^2 \{ (W(\bar{V}_{u_j}))^2 W(V_{u_j}) + (W(V_{u_j}))^2 (1 - W(V_{u_j}) - W(V_{u_k})) + (W(V_{u_j}))^2 W(V_{u_k}) \} + \\ + (x_2)^2 \{ (W(V_{u_k}))^2 W(V_{u_j}) + (W(V_{u_k}))^2 (1 - W(V_{u_j}) - W(V_{u_k})) + (W(\bar{V}_{u_k}))^2 W(V_{u_k}) \} + \\ + 2x_1 (W(\bar{V}_{u_j}) \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_i (d(v_i, u_j) - z_m(P)) - W(V_{u_j}) \sum_{v_i \in \bar{V}_{u_j}} w_i (d(v_i, P) - z_m(P))) + \\ + 2x_2 (W(\bar{V}_{u_k}) \sum_{v_i \in V_{u_k}} w_i (d(v_i, u_k) - z_m(P)) - W(V_{u_k}) \sum_{v_i \in \bar{V}_{u_k}} w_i (d(v_i, P) - z_m(P))) + \\ + 2x_1 x_2 (W(V_{u_j}) W(V_{u_k}) (1 - W(V_{u_j}) - W(V_{u_k})) - W(V_{u_k}) W(V_{u_j}) W(\bar{V}_{u_j})) - \\ - 2x_1 x_2 (W(\bar{V}_{u_k}) W(V_{u_k}) W(V_{u_j}))$$

Haciendo operaciones resulta una función cuadrática de dos variables

$$z_s(P(x_1, x_2)) = W(V_{u_j}) W(\bar{V}_{u_j}) (x_1)^2 + W(\bar{V}_{u_k}) W(V_{u_k}) (x_2)^2 - 2W(V_{u_j}) W(V_{u_k}) x_1 x_2 + \\ + 2(z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j}) z_m(P)) x_1 + 2(z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_k}) z_m(P)) x_2 + z_s(P) \quad (4.2)$$

donde  $z_s(P)$  denota la varianza del camino discreto  $P(u_j, u_k)$

Para obtener los valores  $x_1, x_2$ , donde la función anterior alcanza el mínimo calcularemos el gradiente, e impondremos que se anule, obteniéndose así el sistema lineal de dos ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

que genera:

$$\begin{cases} 2W(V_{u_j})W(\bar{V}_{u_j})(x_1) - 2W(V_{u_j})W(V_{u_k})x_2 + 2(z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P)) = 0 \\ 2W(\bar{V}_{u_k})W(V_{u_k})(x_2) - 2W(V_{u_j})W(V_{u_k})x_1 + 2(z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_k})z_m(P)) = 0 \end{cases}$$

Al despejar  $x_1$  en la primera ecuación y sustituir en la segunda se obtiene:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{W(P)}(z_m(P) - z_m(u_k, V_{u_k}) - z_m(u_j, V_{u_j})\frac{W(\bar{V}_{u_k})}{W(V_{u_j})}) \\ x_2 = \frac{1}{W(P)}(z_m(P) - z_m(u_j, V_{u_j}) - z_m(u_k, V_{u_k})\frac{W(\bar{V}_{u_j})}{W(V_{u_k})}) \end{cases} \quad (4.3)$$

donde  $W(P) = 1 - W(V_{u_k}) - W(V_{u_j})$

Además se debe tener en cuenta que  $0 \leq x_1 \leq l_j$  y  $0 \leq x_2 \leq l_k$ .

La matriz Hessiana asociada para este punto, resultará definida positiva, lo que garantiza un mínimo. En efecto,

$$\frac{\partial^2 z_s}{\partial x_1^2} = 2W(V_{u_j})W(\bar{V}_{u_j}), \quad \frac{\partial^2 z_s}{\partial x_2^2} = 2W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_k})$$

$$\frac{\partial^2 z_s}{\partial x_1 \partial x_2} = -2W(V_{u_j})W(V_{u_k})$$

$$H = \begin{pmatrix} 2W(V_{u_j})W(\bar{V}_{u_j}) & -W(V_{u_j})W(V_{u_k}) \\ -W(V_{u_j})W(V_{u_k}) & 2W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_k}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |H| &= 4(W(V_{u_j})W(\bar{V}_{u_j})W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_k}) - W(V_{u_j})^2W(V_{u_k})^2) = \\ &= W(V_{u_j})W(V_{u_k})(4W(\bar{V}_{u_j})W(\bar{V}_{u_k}) - W(V_{u_j})W(V_{u_k})) \end{aligned}$$



Nótese el carácter definido positivo, ya que se verifica que:

$$W(\bar{V}_{u_j}) = W(P) + W(V_{u_k})$$

$$W(\bar{V}_{u_k}) = W(P) + W(V_{u_j})$$

En consecuencia, si dicho punto  $(x_1, x_2)$  no está en el compacto  $[0, l_j] \times [0, l_k]$  entonces el óptimo se alcanza en la frontera. Por lo cual, estudiaremos el comportamiento de la función en los cuatro segmentos de la frontera del dominio compacto.

1. Si  $x_1 \leq 0 \Rightarrow x_1 = 0$ , y el valor para  $x_2$  será  $x_2 = \frac{W(V_{u_k})z_m(P) - z_m(u_k, V_{u_k})}{W(\bar{V}_{u_k})W(V_{u_k})}$

En caso de que  $x_2 \leq 0 \rightarrow x_2 = 0$ , y si  $x_2 \geq l_k \rightarrow x_2 = l_k$

2. Si  $x_1 \geq l_j \Rightarrow x_1 = l_j$ , siendo  $x_2 = \frac{W(V_{u_k})(z_m(P) + W(V_{u_j})l_j) - z_m(u_k, V_{u_k})}{W(\bar{V}_{u_k})W(V_{u_k})}$

En caso de que  $x_2 \leq 0 \rightarrow x_2 = 0$ , y si  $x_2 \geq l_k \rightarrow x_2 = l_k$

3. Si  $0 < x_1 < l_j$ .

En caso de que  $x_2 \leq 0 \rightarrow x_2 = 0$ ,

sobre dicho lateral  $x_1 = \frac{W(V_{u_j})z_m(P) - z_m(u_j, V_{u_j})}{W(\bar{V}_{u_j})W(V_{u_j})}$ .

Pero si  $x_1 \leq 0 \rightarrow x_1 = 0$ , y si  $x_1 \geq l_j \rightarrow x_1 = l_j$

En caso de que  $x_2 \geq l_k \rightarrow x_2 = l_k$ , y sobre dicho lateral  $x_1 = \frac{z_m(P) + W(V_{u_k})l_k}{W(\bar{V}_{u_j})}$ .

Pero si  $x_1 \leq 0 \rightarrow x_1 = 0$ , y si  $x_1 \geq l_j \rightarrow x_1 = l_j$

Ya tenemos caracterizado el punto donde se alcanza el óptimo del camino de mínima varianza con los extremos libres sobre dos aristas predefinidas.

La estrategia del algoritmo que presentamos es de tipo exhaustivo, recorriendo todos los posibles caminos, calculando su mínimo en cada caso y actualizando el valor del óptimo si procede.

Haciendo uso de los resultados obtenidos por López de los Mozos [34] calcularemos los valores auxiliares necesarios al principio del algoritmo mediante un procedimiento recursivo, efectuando una pasada sobre los vértices del árbol  $T$ . Estos valores auxiliares son  $H(v_i)$ , el conjunto de hijos del vértice  $v_i$ ,  $W(V_{v_i})$ ,  $z_m(v_i, V_{v_i})$ ,  $z_m^{(2)}(v_i, V_{v_i})$ ,  $z_m(v_i)$ .

Para el caso en que el camino que enlaza la arista  $[u_j, u]$  con  $[u_k, v]$  esté dispuesto de modo que sea el vértice  $v$  el más alejado del  $u_j$ , hay que adaptar los datos. Este caso se presenta cuando las aristas  $[u_j, u]$  y  $[u_k, v]$  están en la misma rama del árbol; es decir, si  $u_k$  es antecesor de  $u_j$ .

El modo de adaptar los datos para el caso que  $v$  sea el vértice extremo derecho del camino es como sigue:

$$\begin{aligned} W(V_v) &= 1 - W(V_{u_k}) \\ W(\bar{V}_v) &= W(V_{u_k}) \\ W(P) &= 1 - W(V_v) - W(V_{u_j}) = W(V_{u_k}) - W(V_{u_j}) \\ z_m(v, V_v) &= z_m(v) - z_m(u_k, V_{u_k}) - l_{u_k v} W(V_{u_k}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Además debemos considerar el modo en que se van generando todos los posibles caminos en el algoritmo, aprovechando el orden posterior de los vértices. Conforme se va generando el camino, se calcula el valor de  $z_m(P)$ . Si  $l$  es la longitud de la arista que añadimos, tanto si el vértice que se añade es antecesor del último añadido como si es hijo de éste, la actualización de  $z_m(P)$  es  $z_m(P) \leftarrow z_m(P) - W(V_v) \cdot l$

El procedimiento para generar todos los caminos siguiendo el esquema de búsqueda en profundidad, consiste en ir desde  $v_1$  a su antecesor, enlazando con un hermano (en caso de tenerlos), o enlazando con el antecesor de un nivel inferior, luego con los descendientes de éste (si los tiene) y sus descendientes, hasta llegar, sucesivamente, a un vértice de grado uno. Al terminar todos los caminos desde  $v_1$ , eliminamos la arista  $(v_1, u)$ , y continuamos con los caminos que comienzan en  $v_2$  del mismo modo.



### 4.1.1 Algoritmo

#### CamVar/T

##### **Entrada**

$T(V, E)$  un árbol no dirigido con un orden posterior sobre el conjunto de vértices  $V$ ,  $|V| = n$ ,  $(w_1, \dots, w_n)$  los pesos asociados a los vértices de modo que  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  y  $E = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  el conjunto de aristas de longitudes  $l_i$ ;  $i = 1, \dots, n - 1$ .

Sea  $CamVar = \infty$

Para  $i = 1$  hasta  $n$

**Determinar**  $H(i)$ , el conjunto de hijos de  $i$ ,

$W(V(i))$ , el peso del árbol enraizado en  $i$

$z_m(i, V(i))$ , la mediana relativa del árbol enraizado en  $i$

$z_m(i)$ , la mediana de  $i$

**Final para**  $i$

Para  $p = 1$  hasta  $(n-2)$

Recorrer en profundidad el árbol desde  $v_p$ , generando

todos los caminos posibles desde  $v_p$

Para el camino  $P = P(v_p, v_{der})$  **determinar** los valores

$z_m(P)$ ,  $z_m^{(2)}(P)$ ,  $W(P)$ ,  $z_s(P)$

**Calcular**  $(x_1, x_2)$  según las fórmulas (4.3)

**Si**  $(x_1, x_2)$  es interior, **entonces** evaluar  $z_s(P(x_1, x_2))$

**si no**, obtener  $(x_1, x_2)$  en la frontera y  $z_s(P(x_1, x_2))$

**Si**  $z_s(P(x_1, x_2)) < CamVar$ , **entonces**

$$CamVar \leftarrow z_s(P(x_1, x_2))$$

$$X^* \leftarrow X$$

$$P^* \leftarrow P$$

**Final para p**

**Salida**

$\{X^*, P^*, CamVar\}$  El camino de mínima varianza está en  $P^*$ , a una distancia  $x_1$  del inicio y  $x_2$  del final, con un valor de la varianza igual a  $CamVar$ .

### 4.1.2 Ejemplo

Considérese el árbol de la figura 4.1,  $T$  cuyos vértices se enumeran en orden posterior enraizados en  $v_{10}$ . El conjunto de pesos localizados en los vértices  $\{0.172, 0.229, 0.123, 0.063, 0.051, 0.055, 0.105, 0.092, 0.061, 0.049\}$ , y  $\{3, 2, 1, 3, 4.12, 2, 1, 4\sqrt{2}, 2\}$ , indica las longitudes de las aristas, ambos de acuerdo con el orden establecido.

Se desean localizar dos puntos  $x_1, x_2$  sobre dos aristas del árbol  $T$  de modo que la varianza del camino que los une sea mínima. Si aplicamos el algoritmo anterior, después de calcular los valores auxiliares, y consideramos la iteración correspondiente a las aristas  $e_1 = [v_1, v_3]$ ,  $e_8 = [v_8, v_9]$ , como las longitudes de las aristas son  $l(e_1) = 3$ ,  $l(e_8) = 4\sqrt{2}$  resulta que  $\mathcal{E}^2 = [0, 3] \times [0, 4\sqrt{2}]$ .

El vértice más alejado del  $v_1$  es el  $v_8$ , por lo que  $v_{der} = v_8$ .

El camino  $P$  es el que contiene los vértices  $P\{v_1, v_3, v_{10}, v_9, v_8\}$  y su peso  $W(P) = 0.736$

Los valores que se obtienen son  $x_1 = 1.53163$ , y  $x_2 = 1.53163$ , siendo su varianza  $z_s(P(x_1, x_2)) = 1.22343$ .

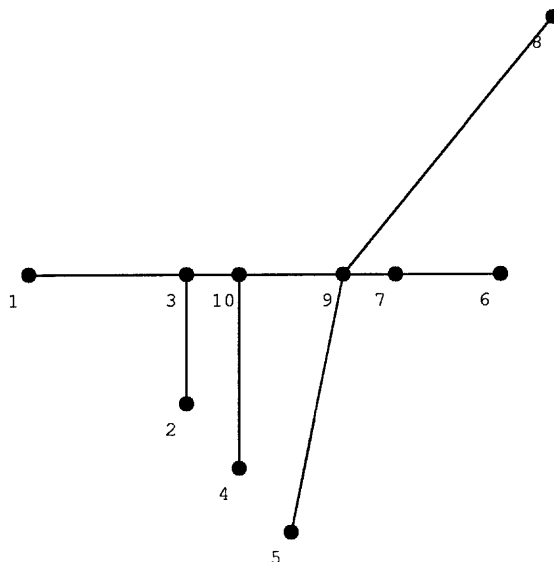


Figura 4.1: Ejemplo de árbol.

Sobre estas aristas se obtiene el óptimo para el árbol, resultando por tanto el camino  $P(x_1, x_2)$ , que se muestra con trazo más grueso en la Figura 4.2

### 4.1.3 Complejidad del Algoritmo

La fase de preproceso requiere  $O(n)$  operaciones, ya que se realiza recorriendo los vértices del árbol una sola vez.

Son estudiados  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  caminos, y todos los cálculos se consiguen en tiempo constante, haciendo uso de los datos del preprocesamiento. Por ello, la complejidad global del algoritmo resulta  $O(n^2)$ .

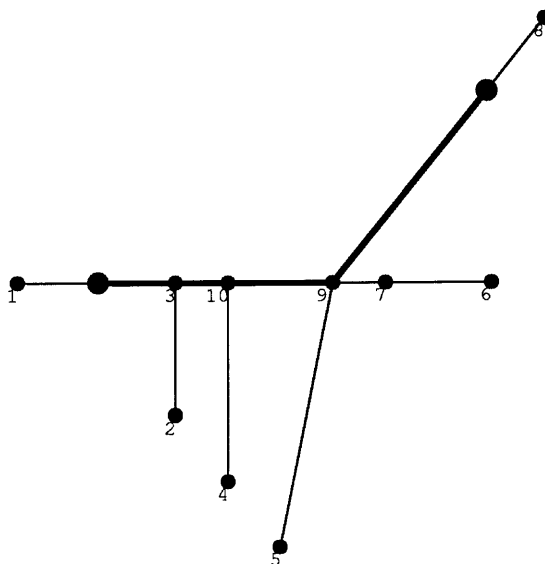


Figura 4.2: Camino de mínima varianza para el árbol de la figura 4.1

## 4.2 Caso sobre una única arista

Vamos aquí a estudiar el caso particular en que ambos extremos del camino estén sobre una sola arista; llamemos  $e_j = (u_j, u_k)$ . Se considera por tanto que  $P(x_1, x_2) \subset (u_j, u_k)$ , y que  $0 \leq x_1 + x_2 \leq l$ , siendo  $l$  la longitud de la arista  $e_j$ .

Tendremos una partición del conjunto de vértices en dos conjuntos:

$$V_{u_j} = \{v \in V / d(v, u_j) \leq d(v, u_k)\} \quad \text{y} \quad V_{u_k} = V - V_{u_j},$$

siendo  $W(V_{u_j}) + W(V_{u_k}) = 1$ . La función mediana se puede expresar como

$$\begin{aligned} z_m(P(x_1, x_2)) &= \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, P(x_1, x_2)) = \\ &= \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_i [d(v_i, u_j) + x_1] + \sum_{v_i \in V_{u_k}} w_i [d(v_i, u_k) + x_2] = \end{aligned}$$

$$= \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_i d(v_i, u_j) + x_1 W(V_{u_j}) + \sum_{v_i \in V_{u_k}} w_i d(v_i, u_k) + W(V_{u_k}) x_2,$$

que coincide con la expresión obtenida cuando los extremos del camino se encuentran sobre dos aristas distintas:

$$z_m(P(x_1, x_2)) = z_m(P(u_j, u_k)) + W(V_{u_j})x_1 + W(V_{u_k})x_2$$

La varianza del camino  $P(x_1, x_2)$  también se puede expresar como función polinómica en  $x_1, x_2$ .

$$\begin{aligned} z_s(P(x_1, x_2)) &= \sum_{v_i \in V} w_i [d(v_i, P(x_1, x_2)) - z_m(P(x_1, x_2))]^2 = \\ &= \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_i [d(v_i, u_j) + x_1 - z_m(P) - W(V_{u_j})x_1 - W(V_{u_k})x_2]^2 + \\ &+ \sum_{v_i \in V_{u_k}} w_i [d(v_i, u_k) + x_2 - z_m(P) - W(V_{u_j})x_1 - W(V_{u_k})x_2]^2 = \\ &= \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_i [(d(v_i, P) - z_m(P))^2 + (x_1)^2 (1 - W(V_{u_j}))^2 + \\ &\quad + (W(V_{u_k}))^2 (x_2)^2 + 2[d(v_i, u_j) - z_m(P)]W(V_{u_k})x_1 - \\ &\quad - 2[d(v_i, u_j) - z_m(P)]W(V_{u_k})x_2 - 2W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_j})x_1 x_2] + \\ &+ \sum_{v_i \in V_{u_k}} w_i [(d(v_i, u_k) - z_m(P))^2 + (x_1)^2 (W(V_{u_j}))^2 + (x_2)^2 (W(\bar{V}_{u_k}))^2 + \\ &+ 2[d(v_i, u_k) - z_m(P)]W(\bar{V}_{u_k})x_2 - 2[d(v_i, u_k) - z_m(P)]W(V_{u_j})x_1 - 2W(\bar{V}_{u_k})W(V_{u_j})x_1 x_2] = \\ &= \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_i (d(v_i, u_j) - z_m(P))^2 + (x_1)^2 (W(\bar{V}_{u_j}))^2 W(V_{u_j}) + (x_2)^2 (W(V_{u_k}))^2 W(V_{u_j}) + \\ &\quad + 2x_1 [W(\bar{V}_{u_j}) \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_i d(v_i, u_j) - W(V_{u_j})z_m(P)] - \\ &\quad - 2x_2 [W(V_{u_k}) \sum_{v_i \in V_{u_j}} w_i d(v_i, u_j) - W(V_{u_j})z_m(P)] - 2x_1 x_2 W(V_{u_j})W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_j}) + \\ &\quad + \sum_{v_i \in V_{u_k}} w_i [d(v_i, u_k) - z_m(P)]^2 + \\ &\quad + (x_1)^2 W(V_{u_k})(W(V_{u_j}))^2 + (x_2)^2 W(V_{u_k})(W(\bar{V}_{u_k}))^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2W(\bar{V}_{u_k})\left[\sum_{v_i \in V_{u_k}} w_i d(v_i, u_k) - z_m(P)W(V_{u_k})\right]x_2 - \\
& -2W(V_{u_j})\left[\sum_{v_i \in V_{u_k}} w_i d(v_i, u_k) - z_m(P)W(V_{u_k})\right]x_1 - \\
& -2W(\bar{V}_{u_k})W(V_{u_k})W(V_{u_j})x_1x_2
\end{aligned}$$

Asociando los términos de igual grado resulta

$$\begin{aligned}
z_s(P(x_1, x_2)) &= \sum_{v_i \in V} w_i (d(v_i, P) - z_m(P))^2 + \\
& + (x_1)^2 \{ (W(\bar{V}_{u_j}))^2 W(V_{u_j}) + (W(V_{u_j}))^2 W(V_{u_k}) \} + \\
& + (x_2)^2 \{ (W(V_{u_k}))^2 W(V_{u_j}) + (W(\bar{V}_{u_k}))^2 W(V_{u_k}) \} + \\
& + 2x_1 \{ (W(\bar{V}_{u_j})(z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P)) + W(V_{u_j})(W(V_{u_k})z_m(P) - z_m(u_k, V_{u_k}))) \} + \\
& + 2x_2 \{ W(V_{u_k})(W(V_{u_j})z_m(P) - z_m(u_j, V_{u_j})) + W(\bar{V}_{u_k})(z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_k})z_m(P)) \} - \\
& - 2x_1x_2 \{ W(V_{u_j})W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_j}) + W(V_{u_j})W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_k}) \} = \\
& = z_s(P) + W(V_{u_j})W(V_{u_k})(x_1)^2 + W(V_{u_j})W(V_{u_k})(x_2)^2 - 2W(V_{u_j})W(V_{u_k})x_1x_2 + \\
& + 2\{z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P)\}x_1 + 2\{z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_k})z_m(P)\}x_2,
\end{aligned}$$

donde  $z_s(P) = z_s(P(u_j, u_k))$  y  $z_m(P) = z_m(P(u_j, u_k))$ .

Finalmente, asociando términos, se obtiene

$$\begin{aligned}
z_s(P(x_1, x_2)) &= z_s(P) + W(V_{u_j})W(V_{u_k})[x_1 - x_2]^2 + \\
& + 2\{z_m(u_j, V_{u_j})W(V_{u_k}) - z_m(u_k, V_{u_k})W(V_{u_j})\}[x_1 - x_2]
\end{aligned}$$

El desarrollo anterior proporciona la siguiente conclusión:

**Proposición 4.2.1** *El valor de la función varianza coincide para cualquier camino contenido en la arista  $e_j$  centrado en el punto medio de la arista, es decir, tal que sus extremos equidisten del punto medio.*



*En particular, coinciden los valores de la función varianza para el camino que comprende toda la arista y para el camino degenerado constituido únicamente por el punto medio.*

Para buscar los valores  $x_1, x_2$  donde se alcanza el mínimo para la función varianza del camino, calcularemos el gradiente, e impondremos su anulación. A partir del sistema lineal de dos ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2W(V_{u_j})W(V_{u_k})(x_1) - 2W(V_{u_j})W(V_{u_k})x_2 + 2(z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P)) = 0 \\ 2W(V_{u_j})W(V_{u_k})(x_2) - 2W(V_{u_j})W(V_{u_k})x_1 + 2(z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_k})z_m(P)) = 0 \end{cases}$$

Este sistema equivale al:

$$\begin{cases} W(V_{u_j})W(V_{u_k})(x_1 - x_2) + z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P) = 0 \\ W(V_{u_j})W(V_{u_k})(x_2 - x_1) + (z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_k})z_m(P)) = 0 \end{cases}$$

Dado que se verifica  $z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P) = W(V_{u_k})z_m(P) - z_m(u_k, V_{u_k})$ , el sistema es compatible indeterminado, y su única condición asociada es:

$$x_1 - x_2 = \frac{z_m(P)}{W(V_{u_k})} - \frac{z_m(u_j, V_{u_j})}{W(V_{u_j})W(V_{u_k})}, \quad 0 \leq x_1 + x_2 \leq l$$

que admite la expresión

$$x_1 - x_2 = \frac{z_m(u_k, V_{u_k})}{W(V_{u_k})} - \frac{z_m(u_j, V_{u_j})}{W(V_{u_j})}$$

$0 \leq x_1 \leq l, 0 \leq x_2 \leq l, \text{ y } 0 \leq x_1 + x_2 \leq l$ , (dominio representado en la Figura 4.3).

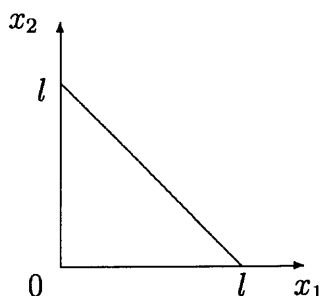


Figura 4.3: Dominio donde  $(x,y)$  pueden variar

Sea  $\frac{z_m(u_k, V_{u_k})}{W(V_{u_k})} - \frac{z_m(u_j, V_{u_j})}{W(V_{u_j})} = \alpha$ . Se presentan tres casos:

**Caso 1:**  $-l < \alpha < l$ . Entonces  $\forall P(x_1, x_2)$ , donde  $x_1 - x_2 = \alpha$ , la varianza tiene un valor común:  $z_s(P(x_1, x_2)) =$

$$\begin{aligned} &= z_s(P) + \alpha^2 W(V_{u_j})W(V_{u_k}) + 2\alpha\{W(V_{u_k})z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(u_k, V_{u_k})\} = \\ &= z_s(P) - \frac{[z_m(u_k, V_{u_k})W(V_{u_j}) - z_m(u_j, V_{u_j})W(V_{u_k})]^2}{W(V_{u_j})W(V_{u_k})} = \\ &= z_s(P) - \alpha^2 W(V_{u_j})W(V_{u_k}) \end{aligned}$$

Sobre todos estos puntos recaen los mínimos, ya que la matriz Hessiana es definida positiva. Por tanto se verifica el siguiente lema.

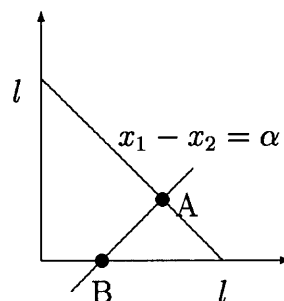
**Lema 4.2.2** Si  $-l < \alpha < l$  entonces el segmento de mínima varianza no es único, de hecho todos los puntos  $(x_1, x_2)$  tales que  $x_1 - x_2 = \alpha$ ,  $0 \leq x_1 + x_2 \leq l$ ,  $0 \leq x_1, x_2 \leq l$  proporcionan caminos  $P(x_1, x_2)$  de mínima varianza.

El punto A intersección de  $x_1 + x_2 = l$  con  $x_1 - x_2 = \alpha$ , es el punto de mínima varianza sobre dicha arista, que corresponde con  $x_1 = \frac{\alpha + l}{2}$ ,  $x_2 = \frac{l - \alpha}{2}$ .



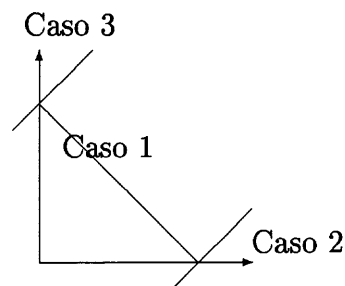
Si denotamos por B la intersección de  $x_1 - x_2 = \alpha$  con uno de los ejes, cualquier otro punto del segmento AB, nos proporciona un segmento contenido en la arista en estudio con mínima varianza.

Tenemos por tanto infinitas soluciones en dicha arista.



**Caso 2:** Si  $\alpha \geq l$ , resulta que o no hay intersección de la recta  $x_1 - x_2 = \alpha$  con el dominio, o en el caso de igualdad se cortan en el vértice  $(l, 0)$ . Resulta que siempre el mínimo está en la frontera, concretamente en el vértice  $(l, 0)$  siendo un caso degenerado; es decir, el camino de mínima varianza se reduce al punto de mínima varianza para la arista  $e_j = (u_j, u_k)$  considerada, en el vértice  $u_k$ .

**Caso 3:** Si  $\alpha \leq -l$ , también resulta un caso degenerado; el mínimo está en la frontera, concretamente en el vértice  $(0, l)$ . Esta situación implica que el camino de mínima varianza se reduce al punto de mínima varianza sobre la arista  $e_j$ ; es decir,  $u_j$ .



Tenemos así probadas las siguientes propiedades.

**Proposición 4.2.3** *El punto  $x^*$  de mínima varianza sobre una arista  $(u_j, u_k)$  es interior a la arista si y sólo si*

$$|\alpha| = \left| \frac{z_m(u_k, V_{u_k})}{W(V_{u_k})} - \frac{z_m(u_j, V_{u_j})}{W(V_{u_j})} \right| < l$$

**Proposición 4.2.4** *Sólo si el punto de mínima varianza sobre una arista es interior existe un camino no degenerado  $P(x_1, x_2) \subset (u_j, u_k)$  de varianza mínima.*

Como consecuencia de la igualdad  $z_s(P(x_1, x_2)) = z_s(P) - \alpha^2 W(V_{u_j}) W(V_{u_k})$ , eligiendo  $x_1 = \frac{\alpha + l}{2}$  y  $x_2 = \frac{l - \alpha}{2}$ , resulta

**Proposición 4.2.5** *La varianza del punto de mínima varianza sobre una arista es estrictamente inferior a la varianza de dicha arista si  $\alpha \neq 0$ .*

### 4.2.1 Algoritmo

#### CamVar1/T

##### **Entrada**

$T(V, E)$  un árbol no dirigido con un orden posterior sobre el conjunto de vertices  $V$ ,  $|V| = n$ ,  $(w_1, \dots, w_n)$  el conjunto de pesos asociados a los vértices tal que  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  y  $E = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  el conjunto de aristas de longitudes  $l_i$   $i = 1, \dots, n - 1$ .

Sea  $CamVar1 = \infty$

**Para**  $i = 1$  hasta  $n$

**Determinar**  $H(i)$ , el conjunto de hijos de  $i$ ,

$W(V(i))$ , el peso del árbol enraizado en  $i$

$z_m(i, V(i))$ , la mediana relativa del árbol enraizado en  $i$

$z_m(i)$ , la mediana de  $i$

**Final para**  $i$

**Para**  $p = 1$  hasta  $(n-1)$

**Calcular**  $\alpha$  según las fórmulas

**Determinar**  $xmin$ , punto de mínima varianza puntual de la arista  $e_p$ ,

**Determinar**  $xcam$ , punto de mínima varianza para un camino contenido en la arista  $e_p$

**Evaluar**  $z_s(xcam)$



Si  $z_s(xcam) < CamVar1$ , entonces

$$CamVar1 \leftarrow z_s(xcam)$$

$$X^* \leftarrow xcam$$

$$P^* \leftarrow P$$

$$PtoX^* \leftarrow xmin$$

**Final para p**

**Salida**

$\{X^*, P^*, CamVar1, PtoX^*\}$ . El camino de mínima varianza está en  $P^*$ , a una distancia  $x_1$  del inicio y  $x_2$  del final, con un valor de la varianza igual a  $CamVar1$ .  $PtoX^*$  es el punto de mínima varianza del árbol.

### 4.2.2 Complejidad

Nótese que solo hay que estudiar  $n-1$  caminos por lo que se simplifica la complejidad respecto del caso en que los extremos del camino están en aristas distintas. La complejidad total resulta  $O(n)$ .

### 4.2.3 Ejemplo

Para el mismo árbol considerado en la Figura 4.1, la Figura 4.4 destaca con un punto más grueso sobre la arista  $[8, 9]$  dónde se obtiene el óptimo para el punto de mínima varianza, a una distancia 4.20303 del vértice 8 y a una distancia 1.45383 del vértice 9, con un valor para la varianza de 2.59896.

En la Figura 4.5 se marca con un trazo más grueso un camino de mínima varianza restringido a estar contenido en una sola arista. Ésta es la arista  $[8, 9]$ , siendo el camino de mínima varianza el que está a una distancia  $x_1 = 2.7492$  del vértice 8 y

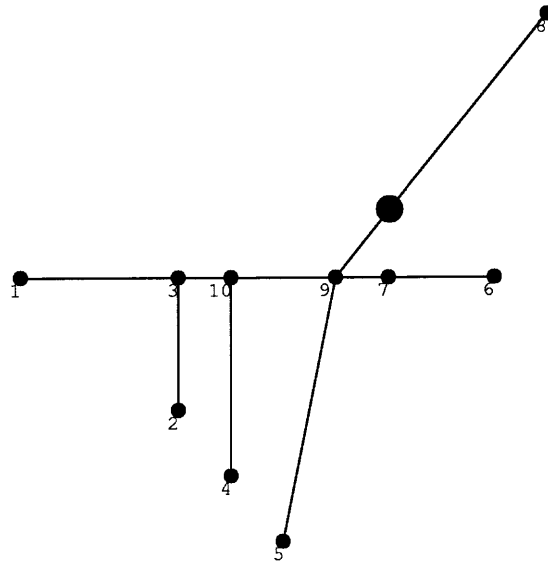


Figura 4.4: Punto de mínima varianza

termina en el propio vértice 9, ya que  $x_2 = 0$ . El valor de su varianza coincide con el valor de la varianza del punto de mínima varianza.

### 4.3 Relación entre servicios extensos y puntuales con el criterio varianza.

En esta sección vamos a estudiar las relaciones existentes entre el servicio extenso y el servicio puntual con el criterio varianza. Los resultados se han obtenido al intentar demostrar que un punto de mínima varianza está contenido en un camino de mínima varianza. Dicha propiedad, posiblemente interesante para rebajar la complejidad del problema del camino de mínima varianza, no ha podido ser demostrada en su generalidad, pero si se han demostrado resultados que afectan a la estructura de ambos problemas, el puntual y el de caminos, y a sus interrelaciones.

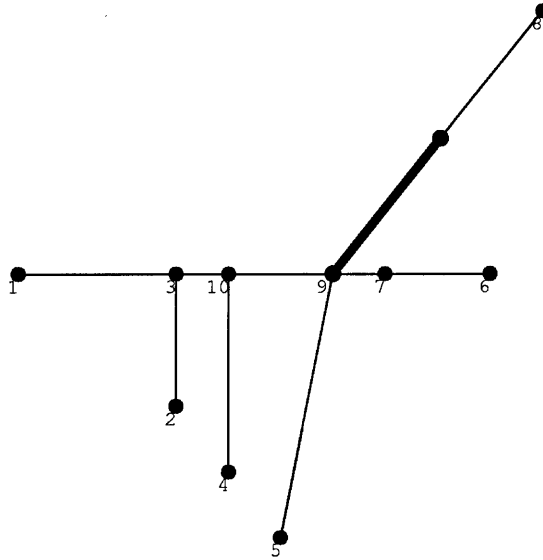


Figura 4.5: Un camino con igual varianza que el punto de mínima varianza

En la sección anterior se demostró que sobre cualquier árbol, un punto de mínima varianza, si es interior a una arista, está en un camino de mínima varianza, contenido en la arista, siendo el valor de las respectivas funciones varianza el mismo. Consideraremos por tanto los caminos que en general abarquen más de una arista.

### 4.3.1 Grafos tipo estrella

En primer lugar vamos a considerar grafos tipo estrella. Sin perder generalidad, la estrella la supondremos de  $n + 1$  vértices, siendo  $v_0$  el central, las aristas serán por tanto  $(v_0, v_1), (v_0, v_2), \dots, (v_0, v_n)$ . Los pesos iguales  $w_i = \frac{1}{n}$ , para  $i = 1, 2, \dots, n$  y para el central  $w_0 = 0$ . Asumiremos que las longitudes  $l_i$  de las aristas son distintas en general, verificando  $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$ .

El primer resultado debido a Tamir [64] en comunicación personal a la autora,

razón por la que ha sido recogido en esta memoria, señala que el punto de mínima varianza está contenido en el camino de mínima varianza en un árbol tipo estrella.

**Lema 4.3.1** *Un punto de mínima varianza está sobre  $(v_0, v_1)$ , la arista más larga, a una distancia  $x^* = \frac{nl_1 - B}{2(n-1)}$  de  $v_0$ , donde  $B = \sum_{i=1}^n l_i$*

**Demostración:**

Consideremos fija una arista cualquiera  $e_j = (v_0, v_j)$ , sea  $x \in (v_0, v_j)$  y en consecuencia  $0 \leq x \leq l_j$ .

Los valores de las funciones mediana y varianza para dicho punto genérico  $x$  serán:

$$\begin{aligned} z_m(x) &= \sum_{i \neq j} \frac{1}{n} (l_i + x) + \frac{1}{n} (l_j - x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i + \frac{(n-2)x}{n} = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i + x) - \frac{2x}{n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_s(x) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(v_i, x) - [z_m(x)]^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i + x)^2 - \frac{(l_j + x)^2}{n} + \frac{(l_j - x)^2}{n} - \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i + x) - \frac{2x}{n} \right)^2 \end{aligned}$$

Si denotamos por  $L2(x) = \sum_{i=1}^n (l_i + x)^2$  y por  $L1(x) = \sum_{i=1}^n (l_i + x)$  podemos escribir

$$z_s(x) = \frac{1}{n} (L2(x) - 4l_j x) - \frac{1}{n^2} (L1(x) - 2x)^2$$

Como resulta que las expresiones  $L1(x)$  y  $L2(x)$  no dependen de la arista  $(v_0, v_i)$  considerada, para cada  $x$  se verifica que  $4l_1 x \geq 4l_2 x \geq \dots \geq 4l_n x$  y por tanto el menor valor se alcanzará para la arista de mayor longitud,  $j = 1$ .





$$\begin{aligned} \text{Desarrollando } L2(x) &= \sum_{i=1}^n (l_i + x)^2 = \sum_{i=1}^n (l_i^2 + x^2 + 2l_i x) = \\ &= \sum_{i=1}^n l_i^2 + nx^2 + 2x \sum_{i=1}^n l_i = A + nx^2 + 2Bx \end{aligned}$$

$$\text{donde } A = \sum_{i=1}^n l_i^2, \quad B = \sum_{i=1}^n l_i \quad (4.5)$$

y sustituyendo en la expresión de la varianza resulta

$$z_s(x) = \frac{1}{n}A + x^2 + \frac{2B - 4l_1}{n}x - \frac{B^2}{n^2} - \left(\frac{n-2}{n}\right)^2 x^2 - 2B \frac{n-2}{n^2}x$$

Derivando e igualando a cero se obtiene el punto estacionario

$$x^* = \frac{nl_1 - B}{2(n-1)}$$

que resulta mínimo, puesto que  $z_s''(x^*) > 0$  □

**Lema 4.3.2** *Existe un camino de mínima varianza con extremos libres  $P^*(x, y)$  que está contenido en  $P(v_1, v_2)$ .*

#### **Demostración:**

Cuando el camino está contenido en una arista, ya se ha probado en el caso de un árbol general, que se puede reducir a un punto. Supongamos pues que el camino se extienda sobre dos aristas, siendo éstas  $(v_0, v_j), (v_0, v_k)$ . Si medimos  $x$  e  $y$  desde el vértice central  $v_0$

$$z_m(P(x, y)) = \frac{1}{n} \sum_{i \neq j, k} l_i + \frac{l_j - x}{n} + \frac{l_k - y}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i - \frac{x+y}{n} = \frac{1}{n}(B - x - y)$$

$$\begin{aligned}
z_s(P(x, y)) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(v_i, P) - [z_m(P(x, y))]^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i \neq j, k} l_i^2 + \frac{1}{n} (l_j - x)^2 + \frac{1}{n} (l_k - y)^2 - \frac{1}{n^2} (B - x - y)^2 = \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n l_i^2 + \frac{x^2}{n} + \frac{y^2}{n} - \frac{2l_j x}{n} - \frac{2l_k y}{n} - \frac{1}{n^2} (B - x - y)^2 = \\
&= \frac{1}{n} [(A - 2l_j x - 2l_k y + x^2 + y^2) - \frac{1}{n} (B - x - y)^2]
\end{aligned}$$

Como  $l_1 \geq l_2 \geq \dots \geq l_n$ , el mínimo se obtiene sobre las aristas de longitudes  $l_1$  y  $l_2$ , resultando

$$z_s(P(x, y)) = \frac{1}{n} [(A - 2l_1 x - 2l_2 y + x^2 + y^2) - \frac{1}{n} (B - x - y)^2] \quad (4.6)$$

□

**Lema 4.3.3** *Las distancias de los vértices  $v_1, v_2$  al camino de mínima varianza  $P^*(x, y)$  son iguales.*

#### **Demostración:**

Considerando la expresión (4.6) correspondiente a la función varianza de  $P(x, y)$  sobre las aristas  $(v_0, v_1)$ ,  $(v_0, v_2)$ , comprobamos que es una función de dos variables, cuadrática y por ello continua y diferenciable sobre su dominio compacto  $[0, l_1] \times [0, l_2]$ .

Calculando las derivadas parciales e igualándolas a cero para obtener los puntos estacionarios resulta

$$\begin{cases} \frac{\partial z_s(P(x, y))}{\partial x} = \frac{-2l_1}{n} + \frac{2x}{n} + \frac{2}{n^2} (B - x - y) = 0 \\ \frac{\partial z_s(P(x, y))}{\partial y} = \frac{-2l_2}{n} + \frac{2y}{n} + \frac{2}{n^2} (B - x - y) = 0 \end{cases}$$



Este sistema equivale a

$$\frac{B - x - y}{n} = l_1 - x = l_2 - y$$

Sustituyendo  $B$ , según la expresión de (4.5), obtenemos

$$\sum_{i=3}^n l_i + 2(l_1 - x) = n(l_1 - x)$$

$$\sum_{i=3}^n l_i + 2(l_2 - y) = n(l_2 - y)$$

resultando que el punto estacionario  $(x, y)$  se obtiene para  $l_1 - x = l_2 - y = \frac{\sum_{i=3}^n l_i}{n-2}$ . Es decir, los vértices  $v_1$  y  $v_2$  están a igual distancia del camino de mínima varianza.

Siendo

$$x = \frac{1}{n-2} \sum_{i=3}^n (l_1 - l_i), \quad y = \frac{1}{n-2} \sum_{i=3}^n (l_2 - l_i)$$

El carácter de mínimo se garantiza por ser la función definida positiva, ya que

$$\frac{\partial^2 z_s(P(x, y))}{\partial x^2} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} > 0 \quad \text{y} \quad |H| > 0$$

□

**Teorema 4.3.4** *En un árbol tipo estrella el punto de mínima varianza está contenido en el camino de mínima varianza. (Tamir [64])*

**Demostración:**

Deberemos probar que el punto  $x^* = \frac{nl_1 - B}{2n - 2}$ , donde se alcanza el mínimo de la varianza, es menor que el extremo  $x$  del camino, ya que  $x^* \in (v_0, v_1)$

Para el camino, su extremo en la arista  $(v_0, v_1)$  es

$$x = \frac{1}{n-2} \sum_{i=3}^n (l_1 - l_i) = \frac{nl_1 - B - (l_1 - l_2)}{n-2}$$

Demostrar que  $x^* < x$  equivale a demostrar que

$$\frac{nl_1 - B}{2n - 2} < \frac{nl_1 - B - (l_1 - l_2)}{n - 2}$$

que a su vez equivale a

$$\frac{l_1 - l_2}{n - 2} < \frac{nl_1 - B}{n - 2} - \frac{nl_1 - B}{2n - 2} \Leftrightarrow \frac{l_1 - l_2}{n - 2} < \frac{n(nl_1 - B)}{2(n - 1)(n - 2)}$$

Una nueva equivalencia es  $2(n - 1)(l_1 - l_2) < n(nl_1 - B)$

$$(2n - 2)(l_1 - l_2) < n[(l_1 - l_2) + (l_1 - l_3) + \cdots + (l_1 - l_n)]$$

$$(n - 2)(l_1 - l_2) < n[(l_1 - l_3) + \cdots + (l_1 - l_n)]$$

y como partíamos del supuesto que  $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_n$  resulta

$$(l_1 - l_2) \leq (l_1 - l_3) \leq \cdots \leq (l_1 - l_n)$$

quedando demostrado el teorema.  $\square$

### 4.3.2 Árboles

Consideremos ahora  $T(V, E)$  un árbol general, no dirigido, con un conjunto de vértices  $V$  finito,  $|V| = n$  y con la demanda  $(w_1, \dots, w_n)$  situada en los vertices de la red, que consideraremos normalizada,  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  con un orden posterior sobre los vértices.

Para una arista fija  $(u, v)$  de longitud  $l > 0$ , denotaremos por  $V_u$  al conjunto de vértices del subárbol enraizado en  $u$ , incluyendo a  $u$ , y por  $\bar{V}_u$  a su complementario  $V \setminus V_u$ , considerando el vértice  $u$  como inicial, según el orden inducido por el orden posterior. Se sabe que las regiones primarias coinciden con las aristas y en consecuencia, según (1.4) para  $x \in (u, v)$  la función mediana es  $z_m(x) = gx + z_m(u)$ , donde  $g = W(V_u) - W(\bar{V}_u) = \sum_{v_i \in V_u} w_i - \sum_{v_i \in \bar{V}_u} w_i$ , y la varianza  $z_s(x) = (1 - g^2)x^2 + 2bx + z_s(u)$  donde  $1 - g^2 = 4W(V_u)W(\bar{V}_u) = 4c > 0$  y  $b = 2(z_m(u)W(\bar{V}_u) - z_m(u, \bar{V}_u))$ .

Por tanto, la función  $z_s$  es estrictamente convexa sobre cada arista, dado que su expresión es cuadrática

$$z_s(x) = 4cx^2 + 2bx + z_s(u) \quad (4.7)$$

Denotemos por  $P(x)$  el camino con vértice inicial fijo  $u$ , avanzando sobre la arista  $(u, v)$  con extremo en  $x \leq l$ .

**Definición 4.3.5** *La varianza del camino sobre la arista fija  $(u, v)$  y extremo inicial fijo  $u$  es  $z_s(P(x)) : [0, l_u] \rightarrow R^+ \cup \{0\}$ , definida como  $z_s(P(x)) = z_s(P(u, x))$*

Nótese que si se calcula se calcula la expresión correspondiente a  $z_m(P(x))$  es posible posteriormente sustituirla en la expresión de la varianza.

$$\begin{aligned} z_m(P(x)) &= \sum_{v_i \in V_u} w_i d(v_i, u) + \sum_{v_i \in V_v} w_i (d(v_i, u) - x) = \\ &= \sum_{v_i \in V} w_i d(v_i, u) - W(V_v)x = z_m(u) - W(V_v)x \quad (4.8) \\ z_s(P(x)) &= \sum_{v_i \in V_u} w_i (d(v_i, u) - z_m(u) + W(V_v)x)^2 + \sum_{v_i \in V_v} w_i (d(v_i, u) - x - z_m(u) + W(V_v)x)^2 = \\ &= \sum_{v_i \in V_u} w_i [(d(v_i, u) - z_m(u))^2 + W(V_v)^2 x^2 + 2W(V_v)x(d(v_i, u) - z_m(u))] + \\ &+ \sum_{v_i \in V_v} w_i [(d(v_i, u) - z_m(u))^2 + (1 - W(V_v))^2 x^2 - 2(1 - W(V_v))x(d(v_i, u) - z_m(u))] = \\ &= z_s(u) + [W(V_v)^2 W(V_u) + W(V_u)^2 W(V_v)]x^2 + \\ &+ 2x[W(V_v) \sum_{v_i \in V_u} w_i (d(v_i, u) - z_m(u)) - (1 - W(V_v)) \sum_{v_i \in V_v} w_i (d(v_i, u) - z_m(u))] = \\ &= z_s(u) + W(V_u)W(V_v)x^2 + 2(W(V_v)z_m(u) - z_m(u, V_v))x \end{aligned}$$

Obteniéndose el siguiente resultado

**Proposición 4.3.6** Para la arista  $(u, v)$ , la función camino varianza desde  $u$  sobre la arista resulta tener la siguiente expresión:

$$z_s(P(x)) = cx^2 + bx + z_s(u) \tag{4.9}$$

donde  $b = 2(z_m(u)W(V_v) - z_m(u, V_v))$  y  $0 \leq c = W(V_u)W(V_v) \leq \frac{1}{4}$

El siguiente lema establece para una arista fija  $(u, v)$ , la relación existente entre la función varianza puntual y la función varianza del camino sobre dicha arista con origen fijo  $u$ .

**Lema 4.3.7** La varianza del camino  $P(u, x)$  dentro de la arista  $(u, v)$ , donde  $0 < x < l$  verifica que coincide con la varianza puntual para  $\bar{x}$  cuando  $x = 2\bar{x}$

**Demostración:**

Para  $x = 2\bar{x}$  resulta que  $z_s(P(x)) = cx^2 + bx + z_s(u) = c(2\bar{x})^2 + b2\bar{x} + z_s(u) = 4c\bar{x}^2 + 2b\bar{x} + z_s(u) = z_s(\bar{x})$

□

**Lema 4.3.8** La solución óptima del problema varianza restringida a la arista  $(u, v)$  se obtendrá en:

$$\bar{x}^* = \begin{cases} 0, & \text{si } x_0 \leq 0 \\ x_0, & \text{si } 0 < x_0 \leq l \\ l, & \text{si } x_0 > l \end{cases}$$

siendo  $x_0 = \frac{-b}{4c}$

Sea  $x_p^*$  la solución del problema que minimiza la varianza del camino desde  $u$  sobre la arista  $(u, v)$ . Derivando  $z'_s(P(x)) = b + 2cx$ , igualando a cero y despejando  $x$  resulta  $x = \frac{-b}{2c}$  y por tanto se demuestra el siguiente resultado



**Lema 4.3.9** *La solución óptima del problema que minimiza la varianza del camino  $P(u, x_P^*)$  se obtendrá para:*

$$x_P^* = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{-b}{2c} \leq 0 \\ \frac{-b}{2c}, & \text{si } 0 < \frac{-b}{2c} \leq l \\ l, & \text{si } \frac{-b}{2c} > l \end{cases}$$

**Proposición 4.3.10** *Los valores donde se alcanzan los óptimos para el problema varianza puntual y para el de la subarista resultan tener la relación  $2\bar{x}^* = x_P^*$ , cuando  $\bar{x}^* \leq \frac{l}{2}$ . Además,*

1. Si  $\bar{x}^* = 0 \Rightarrow x_P^* = 0$
2. Si  $0 < \bar{x}^* \leq \frac{l}{2} \Rightarrow 0 < x_P^* \leq l$
3. Si  $\frac{l}{2} < \bar{x}^* \leq l \Rightarrow x_P^* = l$

Además, los valores óptimos coinciden si  $\bar{x}^* \leq \frac{l}{2}$  puesto que

$$\begin{aligned} z_s(\bar{x}^*) &= a + 2b\bar{x}^* + 4c(\bar{x}^*)^2 \quad \text{y} \quad z_s(P(x_P^*)) = a + bx_P^* + c(x_P^*)^2 = \\ &= a + b(2\bar{x}^*) + c(2\bar{x}^*)^2 = a + 2b(\bar{x}^*) + 4c(\bar{x}^*)^2 = z_s(\bar{x}^*) \end{aligned}$$

La varianza del punto de mínima varianza, sobre cada arista es menor o igual que la varianza de dicha arista.

**Proposición 4.3.11** *Para cada arista fija  $(u, v)$  se verifica que  $z_s(\bar{x}^*) \leq z_s(P(u, v))$ , cumpliéndose la siguiente relación  $z_s(\bar{x}^*) = z_s(P(u, v)) - \frac{(2cl + b)^2}{4c}$ .*

**Demostración:**

$$\text{Partiendo de: } z_s(\bar{x}^*) = a + 2b\bar{x}^* + 4c(\bar{x}^*)^2 \quad z_s(P(u, v)) = a + bl + c(l)^2$$

se obtiene al restar ambas expresiones,

$$z_s(P(u, v)) - z_s(\bar{x}^*) = b(l - 2\bar{x}^*) + c(l^2 - 4(\bar{x}^*)^2) = (l - 2\bar{x}^*)(b + c(l + 2\bar{x}^*))$$

$$\begin{aligned} \text{Como } \bar{x}^* = \frac{-b}{4c}, \quad z_s(P(u, v)) - z_s(\bar{x}^*) &= \left(l + \frac{b}{2c}\right)\left(b + cl - \frac{b}{2}\right) = \\ &= \left(l + \frac{b}{2c}\right)\left(\frac{b}{2} + cl\right) = \left(l + \frac{b}{2c}\right)\left(\frac{b}{2c} + l\right)c = \frac{(2cl + b)^2}{4c} \end{aligned}$$

Quedando demostrada la proposición.  $\square$

Como consecuencia inmediata del resultado anterior resulta

**Proposición 4.3.12** *La varianza del punto de mínima varianza de un árbol es menor que la varianza de la arista de mínima varianza.*

Sin embargo, un punto de mínima varianza puede estar, y puede no estar, en la arista de mínima varianza como pone de manifiesto el siguiente ejemplo.

Consideremos un grafo tipo estrella como los del apartado 4.3.1 en el que la arista  $e_1$  tenga una longitud  $l_1 = \frac{5}{4}$ , la arista  $e_n$  de longitud  $l_n = \frac{1}{4}$  y todas las demás arista de longitud  $l_i = 1$ ,  $i = 2, 3, \dots, (n - 1)$ .

El cálculo de las medianas y varianzas para los tres tipos de aristas posibles da lugar a:

$$1. \text{ Para } e_1, \quad z_m(e_1) = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{n} + \frac{1}{4n} = \frac{n-2}{n} + \frac{1}{4n} = \frac{4(n-2) + 1}{4n} = 1 - \frac{7}{4n}$$



$$\begin{aligned} z_s(e_1) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(v_i, e_1) - [z_m(e_1)]^2 = \frac{n-2}{n} + \frac{1}{4^2 n} - \left(1 - \frac{7}{4n}\right)^2 = \\ &= 1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{16n} - 1 - \frac{49}{16n^2} + \frac{7}{2n} = \frac{1}{16n} \left(25 - \frac{49}{n}\right) \end{aligned}$$

$$2. \text{ Para } e_n, \quad z_m(e_n) = \sum_{i=2}^{n-1} \frac{1}{n} + \frac{5}{4n} = \frac{4(n-2) + 5}{4n} = 1 - \frac{3}{4n}$$

$$\begin{aligned} z_s(e_n) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(v_i, e_n) - [z_m(e_n)]^2 = \frac{n-2}{n} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{3}{4n}\right)^2 = \\ &= 1 - \frac{2}{n} + \frac{25}{16n} - 1 - \frac{9}{16n^2} + \frac{6}{4n} = \frac{1}{16n} \left(17 - \frac{9}{n}\right) \end{aligned}$$

3. Y por último para cualquiera de las demás aristas  $e_j$ , con  $j = 2, 3, \dots, (n-1)$

$$z_m(e_j) = \frac{5}{4n} + \frac{1}{4n} + \frac{n-3}{n} = \frac{6 + 4n - 12}{4n} = 1 - \frac{6}{4n}$$

$$\begin{aligned} z_s(e_j) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(v_i, e_j) - [z_m(e_j)]^2 = \frac{1}{n} \left(\frac{25}{16} + \frac{1}{16} + (n-3)\right) - \left(1 - \frac{3}{2n}\right)^2 = \\ &= 1 + \frac{1}{n} \left(\frac{26}{16} - \frac{48}{16}\right) - 1 - \frac{9}{4n^2} + \frac{3}{n} = \frac{1}{4n} \left(\frac{13}{2} - \frac{9}{n}\right) \end{aligned}$$

Comparando  $z_s(e_1)$  con  $z_s(e_n)$  y con  $z_s(e_j)$ ,  $j = 2, 3, \dots, (n-1)$  se obtiene:

$$z_s(e_1) - z_s(e_n) = \frac{1}{16n} \left(25 - \frac{49}{n}\right) - \frac{1}{16n} \left(17 - \frac{9}{n}\right) = \frac{1}{16n} \left(8 - \frac{40}{n}\right) = \frac{1}{2n} \left(1 - \frac{5}{n}\right)$$

como consecuencia  $z_s(e_1) > z_s(e_n)$  siempre que el número de aristas sea  $n > 5$ .

$$z_s(e_j) - z_s(e_n) = \frac{1}{4n} \left(\frac{13}{2} - \frac{9}{n}\right) - \frac{1}{16n} \left(17 - \frac{9}{n}\right) = \frac{1}{16n} \left(9 - \frac{27}{n}\right)$$

por tanto para  $j = 2, 3, \dots, (n-1)$ ,  $z_s(e_j) > z_s(e_n)$  siempre que el número de aristas sea  $n > 3$ .

Es decir, si el número de aristas del grafo estrella es  $n > 5$ , la arista de mínima varianza es  $e_n$  la de menor longitud, estando un punto de mínima varianza en la arista de mayor longitud (Lema 4.3.1). Dado que en principio es posible que otro

punto de mínima varianza se encuentre en la arista más corta, comprobaremos que para el caso particular de  $n = 10$ , la arista  $e_n$  no contiene punto de mínima varianza.

Sea  $x \in e_n$ ,  $z_m(x) = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{n-2}{n}x$ , para  $n = 10$ ,  $z_m(x) = \frac{19}{20} + \frac{8}{10}x$

$$\begin{aligned} z_s(x) &= \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} d^2(v_i, x) - [z_m(x)]^2 = \\ &= \frac{1}{10} \left[ \left(\frac{5}{4} + x\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - x\right)^2 + 8(1+x)^2 \right] - \left(\frac{19}{20} + \frac{8}{10}x\right)^2 = \\ &= \frac{9}{25}x^2 + \frac{7}{25}x + \frac{3}{50}, \end{aligned}$$

parábola que tiene el mínimo en  $x = \frac{-7}{18}$ , con lo cual en dicha arista el punto de mínima varianza se sitúa en el vértice extremo inicial (vértice central del grafo). Comprobándose que, en este caso, en la arista de mínima varianza no se encuentra ningún punto de mínima varianza.

Si en cambio el número de aristas del grafo estrella es  $n = 4$ , se verifica que  $z_s(e_1) < z_s(e_n) < z_s(e_j)$  para  $j \neq 1, n$  es decir, la arista de mínima varianza es  $e_1$ , la de mayor longitud, y en ella se encuentra un punto de mínima varianza.

### 4.3.3 Varianza puntual y varianza sobre la arista.

Para una arista fija  $(u, v)$  conocemos que

$$z_s(x) = a + 2bx + 4cx^2$$

siendo  $a = z_s(u)$ ,  $b = 2(z_m(u)W(\bar{V}_u) - z_m(u, \bar{V}_u))$ ,

$$\text{y } 0 \leq c = W(V_u)W(\bar{V}_u) \leq \frac{1}{4}$$

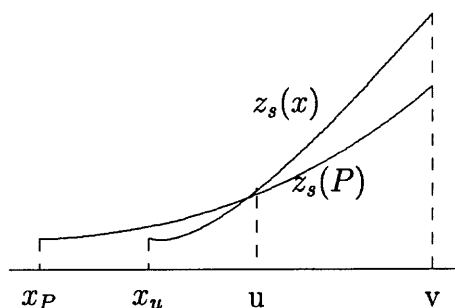
Sea  $x_0 = \frac{-b}{4c}$  el valor resultante de igualar a cero la derivada de  $z_s(x)$ .

Hay cuatro situaciones posibles:



1. Si  $x_0 < 0$ , el óptimo se alcanza en  $u$  ya que se verifica:

$$z_s(\bar{x}^*) = z_s(u) < z_s(P(u, v)) < z_s(v)$$



Esta situación se presenta cuando  $b > 0$  que equivale a

$$z_m(u)W(\bar{V}_u) - z_m(u, \bar{V}_u) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad [z_m(u, V_u) + z_m(u, \bar{V}_u)]W(\bar{V}_u) - z_m(u, \bar{V}_u) > 0$$

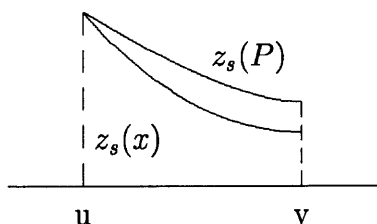
$$z_m(u, V_u)W(\bar{V}_u) - z_m(u, \bar{V}_u)[1 - W(\bar{V}_u)] > 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_m(u, V_u)W(\bar{V}_u) > z_m(u, \bar{V}_u)W(V_u)$$

$$\frac{z_m(u, V_u)}{W(V_u)} > \frac{z_m(u, \bar{V}_u)}{W(\bar{V}_u)}$$

y como  $z_m(u, \bar{V}_u) = z_m(v, \bar{V}_u) + W(\bar{V}_u)l$  equivale a

$$\frac{z_m(u, V_u)}{W(V_u)} - \frac{z_m(v, \bar{V}_u)}{W(\bar{V}_u)} > l$$

2. Si  $x_0 \geq l$  entonces  $z_s(\bar{x}^*) = z_s(v) < z_s(P(u, v)) < z_s(u)$



En este caso,  $\frac{z_m(u, \bar{V}_u) - z_m(u)W(\bar{V}_u)}{2W(V_u)W(\bar{V}_u)} > l$  que equivale a

$$\frac{z_m(u, \bar{V}_u)}{W(\bar{V}_u)} - z_m(u) > 2W(V_u)l \Leftrightarrow \frac{z_m(u, \bar{V}_u)}{W(\bar{V}_u)} > z_m(u) + 2W(V_u)l$$

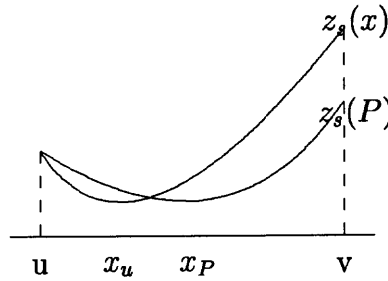
$$z_m(u, \bar{V}_u)\left(\frac{1}{W(\bar{V}_u)} - 1\right) > z_m(u, V_u) + 2W(V_u)l$$

$$z_m(u, \bar{V}_u)\frac{W(V_u)}{W(\bar{V}_u)} > z_m(u, V_u) + 2W(V_u)l$$

$$\frac{z_m(u, V_u)}{W(V_u)} + 2l < \frac{z_m(u, \bar{V}_u)}{W(\bar{V}_u)} \Leftrightarrow l < \frac{z_m(u, \bar{V}_u)}{W(\bar{V}_u)} - \frac{z_m(u, V_u)}{W(V_u)}$$

3. Si  $0 \leq x_0 < \frac{l}{2}$ , entonces el óptimo se alcanza en el interior

$$z_s(\bar{x}^*) < z_s(u) < z_s(P(u, v)) < z_s(v)$$



Para esta situación  $0 < \frac{z_m(u, \bar{V}_u) - z_m(u)W(\bar{V}_u)}{2W(V_u)W(\bar{V}_u)} < \frac{l}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z_m(u, \bar{V}_u) > z_m(u)W(\bar{V}_u) \\ z_m(u, \bar{V}_u) - z_m(u)W(\bar{V}_u) < W(V_u)W(\bar{V}_u)l \end{cases}$$

$$0 < z_m(u, \bar{V}_u) - (z_m(u, V_u) + z_m(u, \bar{V}_u))W(\bar{V}_u) < W(V_u)W(\bar{V}_u)l$$

$$0 < z_m(u, \bar{V}_u)(1 - W(\bar{V}_u)) - z_m(u, V_u)W(\bar{V}_u) < W(V_u)W(\bar{V}_u)l$$

$$0 < z_m(u, \bar{V}_u)W(V_u) - z_m(u, V_u)W(\bar{V}_u) < W(V_u)W(\bar{V}_u)l$$

$$0 < \frac{z_m(u, \bar{V}_u)}{W(\bar{V}_u)} - \frac{z_m(u, V_u)}{W(V_u)} < l$$

como  $z_m(u, \bar{V}_u) = z_m(v, \bar{V}_u) + W(\bar{V}_u)l$

$$0 < \frac{z_m(v, V_v)}{W(V_v)} + l - \frac{z_m(u, V_u)}{W(V_u)} < l$$

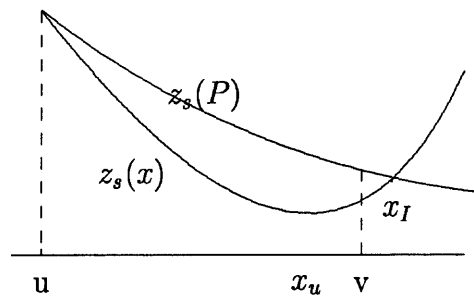
$$l > \frac{z_m(u, V_u)}{W(V_u)} - \frac{z_m(v, \bar{V}_u)}{W(\bar{V}_u)} > 0$$

4. Si  $\frac{l}{2} \leq x_0 < l$ , entonces consideraremos el punto de intersección de las funciones que describen la varianza puntual y la varianza del camino de origen fijo el vértice  $u$ .

Sea  $x_I$  la abscisa del punto de intersección de las curvas.

$$x_I = \frac{-b}{3c} = \frac{2[z_m(u, \bar{V}_u) - z_m(u)W(\bar{V}_u)]}{W(V_u)W(\bar{V}_u)}$$

- Si  $x_I < l \Rightarrow z_s(x^*) < z_s(P(u, v)) < z_s(v) < z_s(u)$
- Si  $x_I > l \Rightarrow z_s(x^*) < z_s(v) < z_s(P(u, v)) < z_s(u)$



Para este caso,

$$W(V_u)W(\bar{V}_u)l < z_m(u, \bar{V}_u) - (z_m(u, V_u) + z_m(u, \bar{V}_u))W(\bar{V}_u) < W(V_u)W(\bar{V}_u)2l$$

$$W(V_u)W(\bar{V}_u)l < z_m(u, \bar{V}_u)(1 - W(\bar{V}_u)) - z_m(u, V_u)W(\bar{V}_u) < W(V_u)W(\bar{V}_u)2l$$

$$W(V_u)W(\bar{V}_u)l < z_m(u, \bar{V}_u)W(V_u) - z_m(u, V_u)W(\bar{V}_u) < W(V_u)W(\bar{V}_u)2l$$

$$l < \frac{z_m(u, \bar{V}_u)}{W(\bar{V}_u)} - \frac{z_m(u, V_u)}{W(V_u)} < 2l$$

como  $z_m(u, \bar{V}_u) = z_m(v, \bar{V}_u) + W(\bar{V}_u)l$

$$l < \frac{z_m(v, V_v)}{W(V_v)} + l - \frac{z_m(u, V_u)}{W(V_u)} < 2l$$

$$0 < \frac{z_m(v, \bar{V}_u)}{W(\bar{V}_u)} - \frac{z_m(u, V_u)}{W(V_u)} < l$$

Podemos por tanto concluir el siguiente lema

**Lema 4.3.13** *Sea  $(u, v)$  una arista y sea el punto  $x^*$  donde se obtiene la mínima varianza para la arista. Si  $0 < x^* < l$ , entonces*

$$l > \left| \frac{z_m(v, \bar{V}_u)}{W(\bar{V}_u)} - \frac{z_m(u, V_u)}{W(V_u)} \right|$$

## 4.4 Camino de mínimo coeficiente de variación con extremos libres

Marsh y Schilling [44] señalan que una de las propiedades que es conveniente que cumplan las medidas de equidad es la invarianza de escala y el principio de transferencia. El Coeficiente de Variación verifica ambas, de ahí que estudiemos para el caso de los árboles el camino de mínimo coeficiente de variación.

Sea  $T(V, E)$  un árbol no dirigido, con  $|V| = n$  y sea  $(w_1, \dots, w_n)$  el vector demanda situado en los nodos de la red, que consideraremos normalizada. Aprovecharemos la estructura de árbol, habiendo definido previamente un orden posterior sobre los vértices.

Sea  $P(x_1, x_2) \subset T$  el camino enlazando los puntos  $x_1, x_2 \in T$ .



**Definición 4.4.1** *El coeficiente de variación para  $P(x_1, x_2)$  se define como*

$$CV(P(x_1, x_2)) = \frac{\sqrt{z_s(P(x_1, x_2))}}{z_m(P(x_1, x_2))}$$

Consideraremos el problema para un par de aristas fijas. Sean  $e_j, e_k \in E$  cuyas longitudes son  $l_j, l_k$  respectivamente.

Para  $\mathcal{E}_{jk}^2 = [0, l_j] \times [0, l_k]$ , se define a continuación el coeficiente de variación del camino que enlaza los puntos  $\{x_1, x_2\} \in T$  con  $x_1 \in e_j; x_2 \in e_k$ .

**Definición 4.4.2** *Para cada par de aristas sobre un árbol, el coeficiente de variación del camino que enlaza los puntos  $\{x_1, x_2\}$  en las aristas  $e_j, e_k$  respectivamente es  $CV(x_1, x_2) : [0, l_j] \times [0, l_k] \rightarrow R^+$  de modo que  $CV(x_1, x_2) = CV(P(x_1, x_2))$*

El objetivo es buscar un camino  $P^* \subset T$  de modo que

$$CV(P^*) \leq CV(P) : \forall P \subset T$$

Sean las aristas  $e_j = (u_j, u)$ ,  $e_k = (u_k, v)$ . Siempre  $x_1$ , y  $x_2$  se miden desde los vértices más alejados entre sí, es decir desde  $u_j$  y  $u_k$ , o bien desde  $u_j$  y  $v$  según la disposición de las aristas, de igual modo que se hizo el estudio del camino de mínima varianza.

En ambos casos,  $x_2$  es medido desde el vértice más alejado de la arista  $e_j$ , reduciéndose el estudio a una sola situación. Supongamos que  $u_j$  y  $u_k$  son los vértices más alejados. Sean  $T_{u_j}$  y  $T_{u_k}$  los árboles enraizados  $u_j$  y  $u_k$  que no contienen a las aristas  $e_j$  y  $e_k$ , respectivamente.

Designaremos por  $V(P(x_1, x_2))$  los vértices del camino  $P(x_1, x_2)$ , siendo  $T_1, T_2, \dots, T_r$  las componentes conexas (subárboles) obtenidas al desconectar el

subárbol  $T \setminus (T_{u_j} \cup T_{u_k})$  tras eliminar los vértices del camino  $P(x_1, x_2)$  y las aristas que los unen.

Dado que la expresión de la función mediana (4.1) es

$$z_m(P(x_1, x_2)) = z_m(P) + W(V_{u_i})x_1 + W(V_{u_j})x_2,$$

donde por  $z_m(P) = z_m(P(u_i, u_j))$ ,

la correspondiente para el coeficiente de variación de caminos resulta:

$$CV(P(x_1, x_2)) = \frac{\sqrt{z_s(P(x_1, x_2))}}{z_m(P(u_i, u_j)) + W(V_{u_i})x_1 + W(V_{u_j})x_2} \quad (4.10)$$

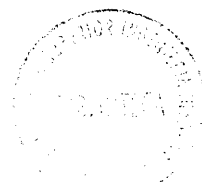
donde

$$\begin{aligned} z_s(P(x_1, x_2)) &= W(V_{u_i})W(\bar{V}_{u_i})(x_1)^2 + W(\bar{V}_{u_j})W(V_{u_j})(x_2)^2 - 2W(V_{u_i})W(V_{u_j})x_1x_2 + \\ &+ 2(z_m(u_i, V_{u_i}) - W(V_{u_i})z_m(P))x_1 + 2(z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P))x_2 + z_s(P) \end{aligned}$$

y  $z_s(P) = z_s(P(u_i, u_j))$

La función  $CV(P(x_1, x_2))$  es continua en  $\mathcal{E}_{jk}^2 = [0, l_j] \times [0, l_k]$  y diferenciable en el abierto  $\dot{\mathcal{E}}_{jk}^2$ . Estamos interesados en obtener los valores  $x_1, x_2$ , donde la función anterior alcanza el mínimo, para ello calcularemos el gradiente, e impondremos que se anule.

$$\begin{cases} \frac{\partial CV(P(x_1, x_2))}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial CV(P(x_1, x_2))}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$





$$\begin{cases} \frac{\sqrt{z_s(P(x_1, x_2))}}{z_m(P(x_1, x_2))} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_1} - \frac{\partial z_m(P(x_1, x_2))}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{\sqrt{z_s(P(x_1, x_2))}}{z_m(P(x_1, x_2))} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_2} - \frac{\partial z_m(P(x_1, x_2))}{\partial x_2} \right) = 0 \end{cases}$$

Se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} CV(P(x_1, x_2)) \left( \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_1} - \frac{2 \partial z_m(P(x_1, x_2))}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \frac{1}{2} CV(P(x_1, x_2)) \left( \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_2} - \frac{2 \partial z_m(P(x_1, x_2))}{\partial x_2} \right) = 0 \end{cases}$$

Puesto que  $CV(P(x_1, x_2)) \neq 0$ , las soluciones del sistema anterior serán las que nos proporcione el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_1} - \frac{2 \partial z_m(P(x_1, x_2))}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_2} - \frac{2 \partial z_m(P(x_1, x_2))}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

Haciendo uso de las fórmulas (4.1) y (4.2), y que las respectivas derivadas son:

$$\begin{cases} \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_1} = 2[W(V_{u_j})W(\bar{V}_{u_j})x_1 - W(V_{u_j})W(V_{u_k})x_2 + z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P)] \\ \frac{\partial z_s(P(x_1, x_2))}{\partial x_2} = 2[W(\bar{V}_{u_k})W(V_{u_k})x_2 - W(V_{u_j})W(V_{u_k})x_1 + z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_k})z_m(P)] \end{cases}$$

Sustituyendo en el sistema, se obtienen las soluciones para la primera componente

$$x_1 = \frac{1}{W(V_{u_j})W(V_{u_k})} (z_m(u_k, V_{u_k})W(V_{u_j}) - z_m(u_j, V_{u_j})W(V_{u_k}) +$$

$$+ \frac{z_m(u_k, V_{u_k})W(V_{u_j})(z_m(P) - z_m(u_j, V_{u_j}))}{z_m(u_j, V_{u_j}) + z_m(u_k, V_{u_k}) - z_m(P)} +$$

$$+ \frac{W(V_{u_k})(z_m(u_j, V_{u_j})^2 - z_s(P)W(V_{u_j}) - z_m(P)^2W(V_{u_j}))}{z_m(u_j, V_{u_j}) + z_m(u_k, V_{u_k}) - z_m(P)}$$

y para la segunda componente:

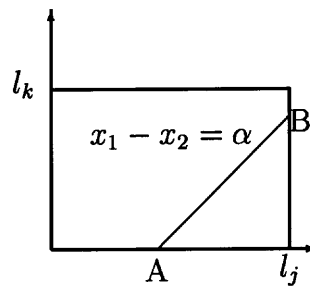
$$x_2 = \frac{1}{W(V_{u_j})W(V_{u_k})} \left( \frac{z_m(u_k, V_{u_k})W(V_{u_j})(z_m(P) - z_m(u_j, V_{u_j}))}{z_m(u_j, V_{u_j}) + z_m(u_k, V_{u_k}) - z_m(P)} + \right.$$

$$\left. + \frac{W(V_{u_k})(z_m(u_j, V_{u_j})^2 - z_s(P)W(V_{u_j}) - z_m(P)^2W(V_{u_j}))}{z_m(u_j, V_{u_j}) + z_m(u_k, V_{u_k}) - z_m(P)} \right)$$

Así pues, el sistema es compatible indeterminado verificando que

$$x_1 - x_2 = \frac{z_m(u_k, V_{u_k})}{W(V_{u_k})} - \frac{z_m(u_j, V_{u_j})}{W(V_{u_j})} = \alpha$$

Además teniendo en cuenta los rangos  $0 \leq x_1 \leq l_j$  y  $0 \leq x_2 \leq l_k$ , se deduce que las posibles soluciones serán todos los puntos del segmento de intersección de la recta  $x_1 - x_2 = \alpha$  con el rectángulo  $[0, l_j] \times [0, l_k]$



Sin embargo, la matriz Hessiana en estos puntos resulta ser indefinida, por lo que no garantiza el mínimo. Por tanto es necesario un estudio alternativo en términos de convexidad generalizada.

**Definición 4.4.3** Una función  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , diferenciable en  $S$  se dice que es pseudo-convexa sobre un dominio convexo y abierto  $S$  si  $\forall x, y \in S$ ,  $f(y) < f(x)$  implica que  $(y - x)\nabla f(x) < 0$

**Teorema 4.4.4** El coeficiente de variación de caminos es una función pseudo-convexa sobre el rectángulo abierto  $\dot{\mathcal{E}}_{jk}^2 = (0, l_j) \times (0, l_k)$ .

### Demostración

La función varianza  $z_s(P(x_1, x_2))$  es estrictamente convexa sobre el rectángulo  $\mathcal{E}_{jk}^2$ .

Una función monótona no decreciente y no lineal de una función convexa es una función convexa (Márquez [42], Martos [45]); por ello, el numerador  $\sqrt{z_s(P(x_1, x_2))}$  es una función convexa y no negativa (al considerar la raíz positiva). La función  $z_m(P(x_1, x_2))$  es lineal (por tanto cóncava) y positiva, excepto el caso trivial en el cual el camino coincide con todo el árbol.

Finalmente, como es conocido que el cociente entre una función convexa, no negativa y diferenciable sobre un convexo abierto, y una función cóncava positiva, definida sobre el mismo dominio, es una función pseudo-convexa en dicho dominio, resulta que la función  $CV(P(x_1, x_2))$  es pseudo-convexa.  $\square$

Al ser pseudo-convexa se tiene garantizado que la condición  $\nabla CV(P(x_1, x_2)) = 0$  implica que  $(x_1, x_2)$  sea mínimo, y que todo mínimo local es global.

Dado que la función  $CV(P(x_1, x_2))$  es pseudo-convexa en  $\dot{\mathcal{E}}_{jk}^2$ , los puntos que anulan  $\nabla CV(P(x_1, x_2))$ , es decir,  $\{(x_1, x_2) \in \dot{\mathcal{E}}_{jk}^2 : x_1 - x_2 = \frac{z_m(u_k, V_{u_k})}{W(V_{u_k})} - \frac{z_m(u_j, V_{u_j})}{W(V_{u_j})}\}$  son mínimos globales de la función en el abierto. Para completar el análisis se estudiará el comportamiento en la frontera.

En  $\delta\mathcal{E}_{jk}$  la función también es pseudo-convexa, puesto que sobre cada uno de los segmentos abiertos de la frontera, la función coeficiente de variación es el cociente de una función convexa  $\sqrt{z_s(P(x_1))}$  entre una cóncava positiva. Por ello analizaremos los cuatro segmentos abiertos de la frontera y los cuatro vértices del rectángulo.

1. En el segmento  $x_2 = 0$ ,  $z_m(P(x_1, 0)) = z_m(P) + W(V_{u_j})x_1$

$$z_s(P(x_1, 0)) = z_s(P) + W(V_{u_j})W(\bar{V}_{u_j})x_1^2 + 2[z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P)]x_1$$

se buscan los puntos estacionarios, derivando e igualando a cero.

La condición  $CV'(P(x_1, 0)) = 0$ , equivale a resolver

$$\frac{\sqrt{z_s(P(x_1, 0))}}{z_m(P(x_1, 0))} \left( \frac{W(V_{u_j})W(\bar{V}_{u_j})x_1 + z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P)}{z_s(P(x_1, 0))} - \frac{W(V_{u_j})}{z_m(P(x_1, 0))} \right) = 0$$

es decir,

$$\frac{W(V_{u_j})W(\bar{V}_{u_j})x_1 + z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P)}{z_s(P(x_1, 0))} = \frac{W(V_{u_j})}{z_m(P(x_1, 0))}$$

cuya solución única es

$$x_1 = \frac{W(V_{u_j})[z_m(P)^2 + z_s(P)] - z_m(P)z_m(u_j, V_{u_j})}{W(V_{u_j})[z_m(P) - z_m(u_j, V_{u_j})]}, \quad 0 < x_1 < l_j.$$

2. Caso  $x_2 = l_k$ . En este segmento,  $CV(P(x_1, l_k)) = \frac{\sqrt{z_s(P(x_1, l_k))}}{z_m(P(x_1, l_k))}$ , donde

$$z_s(P(x_1, l_k)) = W(V_{u_j})W(\bar{V}_{u_j})x_1^2 + 2[z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P) - W(V_{u_j})W(V_{u_k})l_k]x_1 + \\ + W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_k})l_k^2 + 2[(z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_k})z_m(P))]l_k + z_s(P),$$

$$z_m(P(x_1, l_k)) = z_m(P) + W(V_{u_j})x_1 + W(V_{u_k})l_k.$$

Repitiendo el proceso del caso anterior:

$$CV'(P(x_1, l_k)) = CV(P(x_1, l_k)) \left( \frac{z'_s(P(x_1, l_k))}{2z_s(P(x_1, l_k))} - \frac{z'_m(P(x_1, l_k))}{z_m(P(x_1, l_k))} \right)$$

La condición  $CV'(P(x_1, l_k)) = 0$ , equivale a resolver  $\frac{z'_s(P(x_1, l_k))}{2z_s(P(x_1, l_k))} = \frac{z'_m(P(x_1, l_k))}{z_m(P(x_1, l_k))}$  donde

$$z'_s(P(x_1, l_k)) = 2(W(V_{u_j})W(\bar{V}_{u_j})x_1 + z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P) - W(V_{u_j})W(V_{u_k})l_k)$$

De lo que resulta

$$x_1 = \frac{z_m(P)^2 + z_s(P) + W(V_{u_k})l_k^2 + 2z_m(u_k, V_{u_k})l_k}{z_m(P) - z_m(u_j, V_{u_j}) + W(V_{u_k})l_k} - \frac{z_m(u_j, V_{u_j})}{W(V_{u_j})} \frac{z_m(P) + W(V_{u_k})l_k}{z_m(P) - z_m(u_j, V_{u_j}) + W(V_{u_k})l_k}, \quad 0 < x_1 < l_j$$

### 3. Caso $x_1 = 0$

$$z_s(P(0, x_2)) = z_s(P) + W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_k})x_2^2 + 2[z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_k})z_m(P)]x_2,$$

$$z_m(P(0, x_2)) = z_m(P) + W(V_{u_k})x_2.$$

Los puntos estacionarios verifican:

$$CV'(P(0, x_2)) = \frac{\sqrt{z_s(P(0, x_2))}}{z_m(P(0, x_2))} \left( \frac{z'_s(P(0, x_2))}{2z_s(P(0, x_2))} - \frac{z'_m(P(0, x_2))}{z_m(P(0, x_2))} \right) = 0$$

$$\text{donde } z'_s(P(0, x_2)) = 2W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_k})x_2 + 2[z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_k})z_m(P)].$$

La solución de  $\frac{z'_s(P(0, x_2))}{2z_s(P(0, x_2))} = \frac{z'_m(P(0, x_2))}{z_m(P(0, x_2))}$  se obtiene para

$$x_2 = \frac{W(V_{u_k})[z_m(P)^2 + z_s(P)] - z_m(P)z_m(u_k, V_{u_k})}{W(V_{u_k})[z_m(P) - z_m(u_k, V_{u_k})]}, \quad 0 < x_2 < l_k$$

### 4. Caso $x_1 = l_j$ , $CV(P(l_j, x_2)) = \frac{\sqrt{z_s(P(l_j, x_2))}}{z_m(P(l_j, x_2))}$ , donde

$$z_s(P(l_j, x_2)) = z_s(P) + W(V_{u_j})W(\bar{V}_{u_j})l_j^2 + W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_k})x_2^2 +$$

$$+ 2[z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_j})W(V_{u_k})l_j - W(V_{u_k})z_m(P)]x_2 + 2[z_m(u_j, V_{u_j}) - W(V_{u_j})z_m(P)]l_j,$$

$$z_m(P(x_1, l_j)) = z_m(P) + W(V_{u_i})l_i + W(V_{u_j})x_2$$

Los puntos estacionarios verifican

$$\frac{z'_s(P(l_j, x_2))}{2z_s(P(l_j, x_2))} = \frac{z'_m(P(l_j, x_2))}{z_m(P(l_j, x_2))}, \text{ donde}$$

$$z'_s(P(l_j, x_2)) = 2W(V_{u_k})W(\bar{V}_{u_k})x_2 + 2[z_m(u_k, V_{u_k}) - W(V_{u_j})W(V_{u_k})l_j - W(V_{u_k})z_m(P)],$$

Por tanto, resulta

$$x_2 = \frac{z_m(P)^2 + z_s(P) + W(V_{u_j})l_j^2 + 2z_m(u_j, V_{u_j})l_j}{z_m(P) - z_m(u_k, V_{u_k}) + W(V_{u_j})l_j} - \frac{z_m(u_k, V_{u_k})}{W(V_{u_k})} \frac{[z_m(P) + W(V_{u_j})l_j]}{[z_m(P) - z_m(u_k, V_{u_k}) + W(V_{u_j})l_j]}, \quad 0 < x_2 < l_k$$

Los posibles valores donde se alcance el mínimo han sido seleccionados, pues coinciden con los cuatro puntos estacionarios de la frontera junto con los del segmento interior, siempre que estén en el dominio, y los vértices del rectángulo. Evaluaremos la función en ellos (nueve valores, en el peor caso) y guardaremos el mínimo. En caso de que mejore la solución obtenida hasta el momento para otros caminos con extremos en distintas aristas, actualizaremos el valor del óptimo. Si el óptimo se alcanzara en el interior guardaremos los dos extremos del segmento, que sobre el árbol representarán respectivamente los caminos más corto y más largo con extremos en las aristas  $e_j, e_k$  determinadas y con igual valor de la función coeficiente de variación.

La estrategia del algoritmo que presentamos es similar a la empleada para obtener el camino de mínima varianza con extremos libres. Es un proceso exhaustivo que calcula el camino de mínimo coeficiente de variación con extremos sobre dos aristas predefinidas. Las aristas extremas varían de todos los modos posibles, actualizando el camino y el valor de la función coeficiente de variación, si procede.



### 4.4.1 Algoritmo

#### CV/T

##### **Entrada**

Sea  $T(V, E)$  un árbol no dirigido con un orden posterior sobre el conjunto de vértices  $V$ ,  $|V| = n$  y sea  $(w_1, \dots, w_n)$  los pesos asociados a los vértices de modo que  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ .

Sea  $E = \{e_1, \dots, e_{n-1}\}$  conjunto de aristas de longitudes  $l_i$ ;  $i = 1, \dots, n-1$ .

Sea  $CamCV = \infty$

**Para**  $i = 1$  hasta  $n$

**Determinar**  $H(i)$ , el conjunto de hijos de  $i$ ,

$W(V(i))$ , el peso del árbol enraizado en  $i$

$z_m(i, V(i))$ , la mediana relativa del árbol enraizado en  $i$

$z_m(i)$ , la mediana de  $i$

**Final para**  $i$

**Para**  $p = 1$  hasta  $(n-2)$

Recorrer el árbol desde  $v_p$  generando todos los caminos posibles desde  $v_p$

Para el camino  $P = P(v_p, v_{der})$  **determinar** su peso  $W(P)$  y los valores  $z_m(P)$ ,  $z_m^{(2)}(P)$ ,  $z_s(P)$

**Calcular**  $(x_1, x_2)$  el punto estacionario según las fórmulas desarrolladas

**Calcular** los puntos estacionarios en la frontera

**Si** los puntos son interiores, **entonces** evaluar  $CV(P(x_1, x_2))$

**Evaluar**  $CV(P(x_1, x_2))$  en los vértices del rectángulo

**Obtener** el mínimo de todos ellos y guardarlo

en el vector  $(CV(P), x_1, x_2)$

**Si**  $CV(P) < CamCV$ , entonces

$CamCV \leftarrow CV(P)$

$X^* \leftarrow X$

$P^* \leftarrow P$

**Final para p**

**Salida**

$\{X^*, P^*, CamCV\}$ . El camino de mínimo coeficiente de variación está en  $P^*$ , a una distancia  $x_1$  del inicio, y  $x_2$  del final, con un valor del coeficiente igual a  $CamCV$ .

#### 4.4.2 Ejemplo

Sobre el árbol  $T$  de la Figura 4.1, se pretende localizar dos puntos  $x_1, x_2$  sobre dos aristas del árbol  $T$  de modo que se minimice el coeficiente de variación del camino que los une. Si aplicamos el algoritmo anterior, después de calcular los valores auxiliares, y consideramos la iteración correspondiente a las aristas  $e_8 = [v_8, v_9]$ ,  $e_9 = [v_9, v_{10}]$ , como las longitudes de las aristas son  $l(e_8) = 5.65$ ,  $l(e_9) = 2$  resulta que  $\mathcal{E}_{89}^2 = [0, 5.65] \times [0, 2]$ .

El vértice más alejado del  $v_8$  es el  $v_{10}$ , por lo que  $v_{der} = v_{10}$ . El camino  $P$  es el que contiene los vértices  $P\{v_8, v_9, v_{10}\}$ , cuyo peso es  $W(P) = 0.303$

Los valores que se obtienen son  $x_1 = 4.41115$  y  $x_2 = 2$  y el correspondiente valor del coeficiente de variación es 0.383682.

Sobre estas aristas se obtiene el óptimo para el árbol, resultando por tanto el camino  $P(x_1, x_2)$ , que se muestra con trazo grueso en la Figura 4.6.



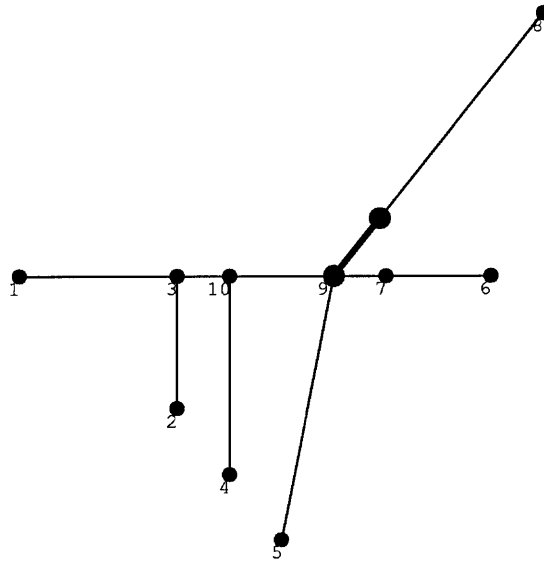


Figura 4.6: Camino de mínimo coeficiente de variación para el árbol de la figura 4.1

### 4.4.3 Complejidad del Algoritmo

Debido a que el algoritmo tiene la misma estructura que el algoritmo que calcula el camino de mínima varianza, la complejidad temporal de este algoritmo es la misma,  $O(n^2)$ . Hay que destacar que aunque la complejidad no aumenta respecto del algoritmo de mínima varianza, para cada camino (en cada bucle) se realizan más operaciones, ya que hay que obtener 9 valores, evaluar la función en ellos y realizar las correspondientes comparaciones para guardar el menor valor en cada caso.

# Bibliografía

- [1] AHO, A., HOPCROFT, J. Y ULLMAN, J., The design and analysis of computer algorithms. *Addison-Wesley*, 1974.
- [2] ALKER, J. Y RUSSETT, B.M., On measuring of inequity, *Behavioral Science*, **9**, 1964, 207–218.
- [3] ALLISON, P.D., Measures of inequality, *American Sociological Review*, **43**, 1978, 865–880.
- [4] BERMAN O. Y KAPLAN E., Equity Maximizing Facility Location Schemes, *Transportation Schemes*, **24**, 1990, 137–144.
- [5] BERMAN O., Mean-Variance Location Problems, *Transportation Science*, **24**, 1990, 287–293.
- [6] BOFFEY, T.B. Y MESA, J.A., A review of extensive facility location in networks, *European Journal of Operational Research*, **95**, 1996, 592–603.
- [7] CÁCERES, M.T., LÓPEZ DE LOS MOZOS, M.C. Y MESA, J.A., The path-variance problem on tree networks. Presentado en GO IV, Leukerbad (Suiza), 2000, y sometido a publicación.
- [8] CÁCERES, M.T., MESA, J.A. Y PINO, J.L., Comparación del comportamiento de medidas de igualdad para la localización de un servicio sobre una Red General. Comunicación presentada en el congreso Euro Working Group in Location Analysis (EWGLA), Barcelona 2000.

- [9] CÁCERES, M.T., MESA, J.A. Y PINO, J.L., Camino de mínimo coeficiente de variación con extremos libres sobre redes árbol. Remitido al *XXVI Congreso Nacional de Estadística e Investigación Operativa*, 2001.
- [10] CORMEN, T., LEISERSON, C. Y RIVEST, R., Introduction to algorithms, *Mc. Graw Hill*, 1990.
- [11] COX, TREVOR F. Y COX MICHAEL A.A., Multidimensional Scaling, *Mono-graphs on Statistics and Applied Probability*, **59**, Chapman Hall 1994.
- [12] DASKIN, M., Network and Discrete Location. Models, algorithms, and applications. *Wiley Interscience*, 1995.
- [13] DEARING, P.M., FRANCIS, R.L. Y LOWE, T.J., Convex location problems on tree networks. *Operations Research*, **24**, 1976, 628–642.
- [14] EISELT, H.A. Y LAPORTE, G., Objectives in Location Problems, in *Facility Location: A survey of Applications and Methods*, Drezner Z. Ed., Springer. Series in Operations Research, New York 1995, 151–180.
- [15] ERKUT, E., Inequality measures for location problems, *Location Science*, **1**, 1993, 199–217.
- [16] FRANCIS, R.L. Y GOLDSTEIN, J.M., Location theory: A selective bibliography, *Operatins Research*, **22**, 1974, 400–410.
- [17] FRANKLIN, A., Faster line segment intersection, en Graphics Gems, Vol. III, Edited by Kirk, D., *Academic Press*, 1992.
- [18] GAILE G.L., Measures of spatial equality, en *Spatial Statistics and Models*, Gaile, G.L. y Willmott, C.J. Reidel Eds., Dordrecht 1984, 223–233.
- [19] GAREY, M.R. Y JOHNSON, D.S., Computers and intractability. W.H. Freeman, New York, 1979.
- [20] GAVISH, B. Y SRIDHAR, S., Computing the 2-median on tree networks in  $O(n \log n)$  time. *Networks* **26**, 1995, 305–317.

- [21] GREENE, N., Detecting intersection of a rectangular solid and a convex polyhedron, en Graphics Gems, Vol. IV, Edited by Heckbert, P., *Academic Press*, 1994.
- [22] HAKIMI, S.L., SCHMEICHEL, E.F. Y LABBÉ, M., On locating path - or tree-shaped facilities on networks. *Networks* **23**, 1993, 543–555.
- [23] HANDLER G.Y., Finding two-centers of a tree: the continuous case. *Transportation Science* **12**, 1978, 93–106.
- [24] HALPERN J. Y MAIMON O., Accord and Conflict Among Several Objectives in Locational Decisions on Tree Networks, in "Locational Analysis of Public Facilities" J.F. Thisse and H.G. Zoller Eds., *Studies in Mathematical and Managerial Economics*, 301–314, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [25] HANSEN P. PEETERS D. Y THISSE J.F., Public facility location models: A selective survey, in "Locational Analysis of Public Facilities" J.F. Thisse and H.G. Zoller Eds., *Studies in Mathematical and Managerial Economics*, 301–314, North-Holland, Amsterdam, 1983.
- [26] HANSEN, P. Y ZHENG, M., An Algorithm for the minimum variance point of a network, *Operations Research* **25**, 1991, 119–126.
- [27] HEDETNIEMI, S.M., COCKAINE, E.J. Y HEDETNIEMI, S.T., Linear algorithm for finding the Jordan center and path center of a tree. *Transportation Science* **15**, 1981, 98–114.
- [28] KARIV, O. Y HAKIMI, S.L., An Algorithmic approach to network location problems. I: The p-centers, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **37**, 1979, 513–538.
- [29] KARIV O. Y HAKIMI S.L., An Algorithmic approach to network location problems. II: The p-medians, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **37**, 1979, 539–560.

- [30] KARONSKI, M., Random Graphs, in Hand Book of Combinatorics, Vol. I, Edited by Graham R.L., Grötschel M., Lovász I. Elsevier Science 1995.
- [31] KINCAID, R.K. Y MAIMON, O., A central vertex of a 3-cactus graphs, *Computers & Operations Research*, **17**, 315–320, (1990).
- [32] KINCAID, R.K. Y MAIMON, O., Locating a point of minimum variance on triangular graphs, *Transportation Science*, **23**, 1989, 216–219.
- [33] LABBÉ, M., PEETERS, D. Y THISSE, J.F., Network Routing, in Location on Networks. *Handbooks in OR & MS*, **8**, Elsevier Science, 1995.
- [34] LÓPEZ DE LOS MOZOS, M.C., Localización en redes con criterio varianza. Tesis doctoral presentada en la Universidad de Sevilla, 1997.
- [35] LÓPEZ DE LOS MOZOS, M.C. Y MESA, J.A., The variance location problem on a network with continuously distributed demand. *RAIRO Operations Research*, **34**, 2000, 155–181.
- [36] LÓPEZ DE LOS MOZOS, M.C. Y MESA, J.A., Heuristic for multiple facility location in a network using the variance criterion. *Journal of the Operational Research Society*, **51** 2000, 971–981.
- [37] LÓPEZ DE LOS MOZOS, M.C. Y MESA, J.A., The 2-variance location problem in a tree network. *Studies in Locational Analysis*, **11**, 1970, 73–87.
- [38] LÓPEZ DE LOS MOZOS, M.C. Y MESA, J.A., Estudio de la función Suma de diferencias Absolutas. Comunicación presentada en el congreso Euro Working Group in Location Analysis (EWGLA), Barcelona 2000.
- [39] MAIMON, O.,: The variance equity measure in Locational decision theory. *Annals of Operations Research*, **6**, 1986, 147–160.
- [40] MAIMON, O.,: An algorithm for the Lorenz measure in Locational decision on trees. *Journals of Algorithms*, **9**, 1988, 583–596.

- [41] MANDELL, M., Modelling effectiveness-equity trade-offs in public service delivery systems. *Management Science*, **37**, 1991, 467-482.
- [42] MÁRQUEZ, J., Fundamentos de teoría de Optimización. *Limusa, Mexico*, (1987).
- [43] MARSH M. Y SCHILLING D., Comparison of inequality measures in facility siting decisions. *International Decision Sciences Institute Proceedings*, 1991, 244-247.
- [44] MARSH, M. Y SCHILLING, D., Equity measurement in facility location analysis: A review and framework. *European Journal of Operational Research*, **74**, 1994, 1-17.
- [45] MARTOS, B., Nonlinear programming theory and methods. North-Holland (1975).
- [46] MCALLISTER, D., Equity and efficiency in public facility location. *Geographical Analysis*, **8**, 1976, 47-63.
- [47] MESA, J.A., Localización de estructuras dimensionales en *Lecturas de Teoría de Localización*. Editor: Puerto, J. Publicaciones de la Universidad de Sevilla 1996, 91-105.
- [48] MESA, J.A., Location of extensive facilities: potencial applications *Investigação Operacional*, **12**, 1992, 35-42.
- [49] MIRCHANDANI, P. Y OUDJIT, A., Localizing 2-Medians on probabilistic and deterministic tree networks, *Networks*, **10**, 1980, 329-350.
- [50] MIRCHANDANI, P. Y FRANCIS, R., Discrete location theory, *Wiley-Interscience*, 1990.
- [51] MORRILL, R. Y SYMONS, J., Efficiency and equity aspects of optimum location. *Geographical Analysis*, **9**, 1977, 215-225.



- [52] MULLIGAN, G., Equality measures and facility location. *Papers in Regional Science*, **70**, 1991, 345–365.
- [53] MORGAN, C.A. Y SLATER, P.J., A linear algorithm for a core of a tree. *Journal of Algorithms*, **1**, 1980, 247–258.
- [54] OGRYZACK, W., Inequality measures and equitable approaches to location problems. *European Journal of Operational Research*, **122**, 2000, 374–391.
- [55] PREPARATA, F.P. Y SHAMOS, M.I., Computational geometry, an introduction. Texts and monographs in Computer Science. Ed. Springer-Verlag, New York, 1985.
- [56] RAWLS, J., Teoría de la justicia. *Fondo de cultura económica S.A.*, Madrid, 1979.
- [57] SEDGEWICK, R., Algorithms, Ed. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.
- [58] STIGLITZ J.E., Economics of the public sector, W.W. Norton, New York, 1986.
- [59] SAVAS E.S., On equity in providing public service. *Management Science*, **24**, 1978, 800–808.
- [60] SLATER, P.J., Some definitions of central structures. *Lecture Notes in Mathematics*, 1073. Springer-Verlag, Berlin, 1984, 169–178.
- [61] SLATER, P.J., Locating central paths in a graph. *Transportation Science*, **16**, 1982, 1-18.
- [62] SKIENA S., Implementing discrete mathematics combinatorics and graph theory with Mathematica. *Addison Wesley*, 1990.
- [63] TAMIR A., On the complexity of some classes of Location Problems. *Transportation Science*, **26**, 1992, 352–354.
- [64] TAMIR A., Documento técnico, Enero 2001.