

i23714578

Consulta Sala



UNIVERSIDAD
de SEVILLA

Tesis
44

Departamento de Matemática Aplicada I

ESCUELA TECNICA SUPERIOR INGENIERIA INFORMATICA - BIBLIOTECA -	
N.º ORDEN GENERAL	011509636
OBRA N.º TOMO.....
SIGNATURA
N.º EN ESPECIALIDAD
EJEMPLAR NUMERO	R.14.836

Inmersiones de Grafos de Línea, Medios y Totales en Superficies

Rafael Moyano Franco

Sevilla, 2000



UNIVERSIDAD DE SEVILLA
NEGOCIADO DE TESIS

Queda registrado este Título de Doctor al
folio 129 número 208 del libro
correspondiente.

Sevilla, 28 SET. 2000

El Jefe del Negociado.

P.D.






UNIVERSIDAD
de SEVILLA

RECTORADO

UNIVERSIDAD DE SEVILLA REGISTRO GENERAL TERCER CICLO	SALIDA	74102 N°. 200102000001474 20-02-2001 13:27:29
--	--------	--

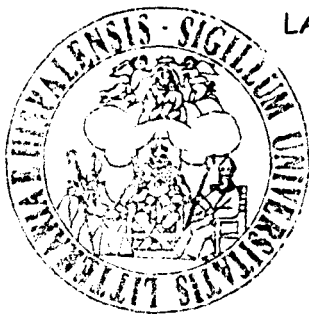
Sevilla, 19 de Febrero de 2001
N/Ref.: Negociado de Tesis EL/MAR
Asunto: Enviando Tesis Doctoral Leída

ILMO. SR. DIRECTOR DE LA BIBLIOTECA
FACULTAD DE INFORMÁTICA Y
ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Adjunto le remito ejemplares de Tesis Doctorales leídas en Departamentos vinculados a esa Facultad a fin de que pasen a formar parte de fondos bibliográficos de consulta de ese Centro.

AUTORES DE LAS TESIS LEÍDAS

- MOYANO FRANCO, RAFAEL



LA JEFA DE NEGOCIADO DE TESIS

Fdo.: Elena Laffitte Alaminos

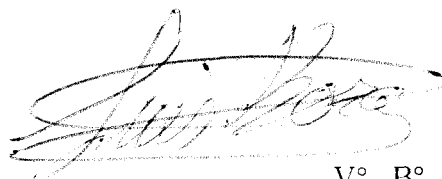
UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Departamento de Matemática Aplicada I

Inmersiones de Grafos de Línea, Medios y Totales en Superficies



Memoria presentada por Rafael Moyano
Franco para optar al grado de Doctor en
Matemáticas por la Universidad de Sevilla



Vº. Bº.
del Director,

Fdo. Luis Boza Prieto, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada I de la Universidad de Sevilla.

Sevilla, Septiembre de 2000.



A MI ESPOSA Y A MI HIJA.



Partita 2^{da} à Violino Solo senza Basso di
J. S. Bach

Allemanda

3a
7
10
13
15a
19
21a
24a
28
31a

Spina de Corvino

Allemande. Partita para violín solo n° 2 BWV 1004.
J. S. Bach



Resumen

Tal como nos apunta Harary [27], el concepto de grafo de línea es un concepto tan natural, que fue introducido simultáneamente por diversos autores: Ore [37], Sabidussi [42], Beineke [10], Whitney [55], etc. Por otra parte, los conceptos de grafo total y medio son introducidos por Behzad [9] y Akiyama, Hamada y Yoshimura [2], respectivamente.

Haciendo referencia a la Teoría de Grafos Topológicos, uno de los aspectos estudiados sobre este tipo de grafos es su planaridad, esto es, condiciones que debe cumplir el grafo original, o bien subgrafos minimales prohibidos, para que su grafo de línea, medio y total sea plano. Existe abundante literatura a este respecto, entre la que cabe citar los trabajos de los siguientes autores: Akiyama [1], Akiyama, Hamada y Yoshimura [2], Behzad [9], Boza y Márquez [12], Chartrand, Geller y Hedetniemi [16], Greenwell y Hemminger [25], Kulli y Sampathkumar [33], Sedláček [45, 44], etc.

No obstante, toda la literatura que estudia inmersiones de grafos de línea, medios y totales se centra en el plano, por lo que dedicamos la primera parte de esta memoria a completar dicho estudio; la segunda a extrapolarlo a la siguiente superficie más simple, el plano proyectivo, y la tercera a generalizarlo a cualquier superficie.

Concretamente, en la primera parte de esta memoria observamos dos aspectos; por un lado, si consideramos los operadores L , M y T que a un grafo le asocian, respectivamente, su grafo de línea, medio y total, caracterizamos a los grafos G tales que $\mathcal{R}(G)$ es plano, donde \mathcal{R} es una composición de los operadores L , M y T , y diseñamos un algoritmo que decide si $\mathcal{R}(G)$ es plano en tiempo de orden $\mathcal{O}(n)$, donde n es el número de vértices de G . En un segundo aspecto, generalizamos la caracterización de los grafos con grafo de línea, medio y total plano a grafos no numerables (a partir del resultado de Wagner [53] que caracteriza a los grafos no



numerables planos), y, en el caso de grafos medios y totales, a los grafos numerables sin acumulación (el caso de grafos con grafo de línea sin acumulación ya estaba resuelto por Boza y Márquez [14]).

En la segunda parte nos planteamos el estudio de los grafos cuyos grafos de línea, medio y total admitan inmersiones en el plano proyectivo, extendiendo así de forma natural el problema de las inmersiones planas. En efecto, el plano proyectivo es la superficie compacta más simple después de la esfera, y la única, junto con ésta, que posee un teorema de "Kuratowski" (ver [3, 4, 24]). También tratamos el problema para los iterados correspondientes. Asimismo generalizamos el concepto de periplanaridad al plano proyectivo, hablando así de periproyectividad, y caracterizamos a los grafos con grafo de línea, medio y total, y sus iterados correspondientes, periproyectivos.

En la tercera y última parte de esta memoria abordamos el problema con un carácter aún más general, considerando una superficie cualquiera y estudiando los grafos cuyos grafos de línea, medio y total puedan admitir una inmersión en ella. Surge así, de forma inevitable, el problema del género.

Por un lado estudiamos las relaciones entre inmersiones peri de grafos de línea, peri generalizadas de grafos medios e inmersiones sin propiedades adicionales de grafos totales en una superficie cualquiera, y por otro caracterizamos los grafos de línea, medios y totales no numerables de género k a partir de la caracterización correspondiente para grafos finitos en la superficie. Finalmente acotamos y, en algunos casos, calculamos de forma exacta, el género de los grafos de línea de algunas familias de grafos conocidas.

Agradecimientos

Son muchas las personas que, en mayor o menor medida, me han ayudado en la realización de esta memoria. Sirvan estas líneas para expresar, aunque sea de forma humilde, mi profundo y sincero agradecimiento.

En primer lugar quisiera citar a Alberto Márquez, quién me inició en este proyecto y quién siempre ha estado abierto a prestarme su colaboración y apoyo.

También los profesores Manuel Emilio Gegúndez y María Pastora Revuelta me han prestado una gran ayuda y una valiosa colaboración.

No quisiera dejar de mencionar a los profesores Ana Diánez y José Ramón Portillo, al que agradezco especialmente su valioso asesoramiento técnico en cuestiones relacionadas con el manejo del \LaTeX ; y, en general, a todo el Departamento de Matemática Aplicada I.

En mi ámbito de trabajo también he recibido apoyo y comprensión; cabe citar sobre todo al Departamento de Matemáticas y al Equipo Directivo del I. E. S. Ramón y Cajal de Tocina.

Aunque lejano en el tiempo, quisiera recordar aquí a mi profesor de Historia en Bachillerato, Francisco Romero, quién ya en aquel entonces me animó a aceptar en un futuro el difícil reto de un doctorado en ciencias.

Quisiera tener presente a mi familia, a mis suegros y, muy especialmente, a mis padres, con quienes siempre he podido contar y los cuales siempre han estado alentándome y apoyándome.

Por último, pero no por ello menos importante, quisiera mencionar a las tres personas



claves para la realización de esta memoria sin las que, probablemente, nunca hubiera visto la luz. En primer lugar cito a Luis Boza, mi director y buen amigo, quién ha guiado mis pasos de manera firme y certera en el apasionante mundo de la Teoría de grafos, y con quién siempre he podido contar, incluso en los momentos difíciles. En segundo lugar quisiera rendir un pequeño homenaje a mi esposa, María Teresa Dávila, compañera incluso en el trabajo, porque a la inestimable ayuda matemática que me ha prestado he de añadir la comprensión de que ha hecho gala y el apoyo que me ha prestado, facilitándome la labor en todo momento, sacrificando su propio trabajo en aras del mío y cuidando a esa personita a quién quisiera homenajear en tercer lugar, a mi hija María Teresa Moyano, que es fuente de alegría e inspiración, centro de mis pensamientos y lo más hermoso de mi vida.

A todos, GRACIAS.

Introducción

La Teoría de Grafos Topológicos es una rama de la Teoría de Grafos que tiene por objeto el estudio de las representaciones de los grafos en superficies, de su existencia y de su clasificación. La Teoría de Grafos Topológicos es aplicable en campos tales como la arquitectura [41], el diseño de redes de comunicaciones [21] o el diseño de circuitos integrados [51], por mencionar algunos.

Por otra parte, usando el concepto de grafo de línea, podemos modelizar algunos problemas, tales como el del transporte de mercancías peligrosas [18]. No obstante, la gran mayoría de problemas estudiados sobre grafos de línea surgen al intentar encontrar relaciones entre las propiedades de un grafo y las de su grafo de línea. Otro tanto ocurre con la gran mayoría de problemas planteados y estudiados acerca de grafos medios y totales, es decir; se trata de predecir comportamientos y estudiar propiedades del grafo medio y del grafo total a partir del grafo original.

Uno de estos problemas así planteado y estudiado por diversos autores, que relaciona los conceptos de grafo de línea, medio y total con la Teoría de Grafos Topológicos, es el de la planaridad del grafo de línea, medio y total a partir del grafo inicial.

En 1930 Kuratowski [34] publicó el que sería, atendiendo al número de veces que es citado, el Teorema más importante del siglo. Dicho resultado afirma y demuestra que K_5 y $K_{3,3}$ son las únicas obstrucciones básicas para la planaridad.

Este resultado nos muestra, además, una forma de caracterización muy usada; en término de grafos prohibidos.

El estudio de la planaridad se generaliza al caso infinito numerable [20], no numerable [53], o bien exigiendo a la inmersión propiedades adicionales, tales como la periplanaridad [17], o, en el caso infinito numerable, la ausencia de acumulación en



vértices [48] o en aristas [7].

Como ya hemos señalado, diversos autores han relacionado los grafos de línea, medios y totales con los grafos planos, periplanos y periplanos generalizados. En el Capítulo 0 detallamos todas estas relaciones a la vez que damos todas las definiciones y resultados previos.

En esta memoria vamos a concluir el estudio de los grafos de línea, medios y totales en el plano y después vamos a relacionar estos conceptos con la generalización inmediata de la idea de planaridad, es decir; las inmersiones en otras superficies.

Dejando aparte el ya mencionado capítulo de preliminares, esta memoria se divide en tres partes bien diferenciadas dedicadas, respectivamente al plano, al plano proyectivo y a superficies genéricas.

En la primera parte de esta memoria vamos a completar el estudio de las inmersiones de los grafos de línea, medios y totales en el plano.

En el primer capítulo caracterizamos a los grafos G tales que $\mathcal{R}(G)$ es plano, donde \mathcal{R} es una composición de los operadores L , M y T , y diseñamos un algoritmo que decide si $\mathcal{R}(G)$ es plano en tiempo de orden $\mathcal{O}(n)$, donde n es el número de vértices de G .

En el segundo capítulo, generalizamos la caracterización de los grafos con grafo de línea, medio y total plano a grafos no numerables (a partir del resultado de Wagner [53] que caracteriza a los grafos no numerables planos), y, en el caso de grafos medios y totales, a los grafos numerables sin acumulación (el caso de grafos con grafo de línea VAP y EAP-plano ya estaba resuelto por Boza y Márquez [14]).

En la segunda parte de esta memoria extendemos el estudio de las inmersiones de los grafos de línea, medios y totales al plano proyectivo que es, junto con el plano, la única superficie en la que los grafos que admiten una inmersión en ella están caracterizados. Dicha caracterización es, como ya hemos señalado, en términos de grafos prohibidos y fue obtenida por Archdeacon, Glover, Huneke y Wang [3, 4, 24].

En el tercer capítulo caracterizamos los grafos con grafos de línea, medio y total proyectivos y periprojectivos, así como sus iterados correspondientes.

En la tercera parte de la memoria tratamos de estudiar algunos aspectos de las

inmersiones de grafos de línea, medios y totales en una superficie cualquiera.

En el capítulo cuarto, partiendo de que en el plano la periplanaridad del grafo de línea, la periplanaridad generalizada del grafo medio y la planaridad del grafo total son equivalentes [12], establecemos cuáles de estas relaciones se conservan en una superficie cualquiera y cuáles no. Asimismo, caracterizamos los grafos con grafo de línea, medio y total de género k a partir de los subgrafos finitos prohibidos para dicho género.

Por último, en el quinto capítulo, acotamos y, en algunos casos, calculamos de forma exacta, el género de los grafos de línea de algunas familias de grafos conocidas.



Índice General

Resumen	v
Agradecimientos	vii
Introducción	ix
Índice	6
0 Preliminares	7
0.1 Conceptos básicos	7
0.2 Grafos planos	10
0.3 Grafos periplanos	15
0.4 Planaridad de grafos de línea	17
0.5 Planaridad de grafos totales	24
0.6 Planaridad de grafos medios	27



I	El Plano	29
1	Composiciones de L, M y T	31
1.1	Las familias E_n	31
1.2	Algoritmo para testear E_n	36
1.3	Problemas abiertos	37
2	Grafos infinitos	39
2.1	Grafos con $M(G)$ y $T(G)$ VAP y EAP-planos	39
2.1.1	Preliminares	40
2.1.2	Grafos con grafo medio VAP-plano	43
2.1.3	Grafos con grafo medio EAP-plano	43
2.1.4	Grafos con grafo total VAP-plano	45
2.1.5	Grafos con grafo total EAP-plano	49
2.2	Grafos infinitos no numerables	50
2.2.1	Caracterización de los grafos con grafo de línea plano	50
2.2.2	Caracterización de los grafos con grafo medio plano	55
2.2.3	Caracterización de los grafos con grafo total plano	57
2.3	Problemas abiertos	59

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	3
II El Plano Proyectivo	61
3 Inmersiones en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$	63
3.1 Introducción	63
3.2 Grafos de línea proyectivos	64
3.2.1 Grafos con grafo de línea proyectivo	71
3.2.2 Grafos con segundo grafo de línea proyectivo	92
3.2.3 Grafos con tercer grafo de línea proyectivo	109
3.2.4 Grafos con cuarto grafo de línea proyectivo	115
3.2.5 Grafos con n -ésimo grafo de línea proyectivo ($n \geq 5$)	117
3.3 Grafos medios proyectivos	119
3.3.1 Grafos con grafo medio proyectivo	121
3.3.2 Grafos con grafo medio iterado proyectivo	126
3.4 Grafos totales proyectivos	129
3.4.1 Grafos con grafo total proyectivo	131
3.4.2 Grafos con grafo total iterado proyectivo	134
3.5 Grafos de línea periproyectivos	136
3.5.1 Grafos con grafo de línea periproyectivo	139
3.5.2 Grafos con segundo grafo de línea periproyectivo	146
3.5.3 Grafos con tercer grafo de línea periproyectivo	151



3.5.4	Grafos con n -ésimo grafo de línea periproyectivo ($n \geq 4$)	154
3.6	Grafos medios periproyectivos	155
3.6.1	Grafos con grafo medio periproyectivo	155
3.6.2	Grafos con grafo medio iterado periproyectivo	157
3.7	Grafos totales periproyectivos	158
3.7.1	Grafos con grafo total periproyectivo	158
3.7.2	Grafos con grafo total iterado periproyectivo	160
3.8	Problemas abiertos	161

III Superficies Genéricas 163

4	Relaciones entre $L(G)$, $M(G)$ y $T(G)$ 165	
4.1	Introducción	165
4.2	Definiciones y propiedades	166
4.3	Relación entre $\gamma(G)$ y $\gamma(L(G))$	168
4.4	Relaciones generales	174
4.5	Contraejemplos	175
4.5.1	En el plano proyectivo	176
4.5.2	En el toro	177
4.5.3	En una superficie cualquiera	180
4.6	Grafos infinitos no numerables	183

4.6.1	Grafos de línea de género k	184
4.6.2	Grafos medios de género k	185
4.6.3	Grafos totales de género k	186
4.6.4	Grafos de línea proyectivos	187
4.6.5	Grafos medios proyectivos	188
4.6.6	Grafos totales proyectivos	189
4.7	Problemas abiertos	190
5	Género de $L(G)$	191
5.1	Introducción	191
5.2	Acotaciones del género de algunos grafos de línea	193
5.2.1	Género del grafo de línea de $G_{m,n}$	193
5.2.2	Género del grafo de línea de $K_{2,n}$	198
5.2.3	Género del grafo de línea de K_n	202
5.2.4	Género del grafo de línea de $K_{m,n}$	204
5.2.5	Género del grafo de línea de Q_n	206
5.3	Acotaciones de géneros no orientables	209
5.3.1	Género no orientable de $L(K_{2,n})$	209
5.3.2	Género no orientable de $L(K_n)$	211
5.3.3	Género no orientable de $L(K_{m,n})$	212



5.3.4 Género no orientable de $L(Q_n)$	214
5.4 Problemas abiertos	217
Bibliografía	223

Capítulo 0

Preliminares

En este capítulo vamos a presentar los conceptos y resultados clásicos que se utilizarán como referencia a lo largo de esta memoria. La terminología usada es la estándar en Teoría de Grafos, véase, por ejemplo, el libro de Harary [27] para grafos finitos y el survey de Thomassen [48] en lo referente a grafos infinitos.

0.1 Conceptos básicos

Un grafo G es un par (V, A) donde V es un conjunto no vacío, a cuyos elementos llamaremos vértices, y A es un conjunto formado por pares no ordenados distintos de elementos distintos de V que llamaremos aristas. Si $a = \{u, v\}$ es una arista de G , a u y a v se les denomina extremos de a .

Diremos que dos vértices de un grafo son adyacentes si determinan una arista. Dos aristas son incidentes si tienen un vértice común. Un vértice v y una arista a son incidentes si v es extremo de a .

Dado un grafo G y $v \in V(G)$ denotaremos por $\delta(v)$ a su valencia en G , es decir, al número de aristas de G incidentes con v . Denotaremos por $\Delta(G)$ a la máxima valencia de un vértice de G .

Sea G un grafo y u, v dos de sus vértices. Un recorrido en G que une a u con v

es un conjunto ordenado de vértices $P = \{u, u_1, u_2, \dots, u_n, v\}$ tal que cada vértice es adyacente con el anterior y con el siguiente. Definimos la longitud de P como $n + 1$. Un camino es un recorrido en el que todos los vértices que lo componen son distintos. Un ciclo es un recorrido en el que los únicos vértices iguales son el inicial y el final.

Diremos que un grafo G es conexo si para cualesquiera dos vértices de G existe un camino que los une. Definimos en G la siguiente relación de equivalencia en el conjunto de vértices: $u\mathcal{R}v$ si existe un camino que los une. Llamaremos componentes conexas de G a las clases de equivalencia del conjunto cociente G/\mathcal{R} . Obviamente G es conexo si y sólo si tiene sólo una componente conexa.

Si G es un grafo y v un vértice de G , denotaremos por $G - \{v\}$ al grafo formado por todos los vértices de G excepto v y todas sus aristas excepto las incidentes con v ; en este caso diremos que $G - \{v\}$ se ha obtenido de G borrando un vértice. Al grafo que se obtiene a partir de G borrando sucesivamente los vértices v_1, \dots, v_n lo denotaremos por $G - \{v_1, \dots, v_n\}$. De la misma forma, si x es una arista de G , denotaremos por $G - \{x\}$ al grafo que se obtiene de G borrando la arista x , esto es, al grafo formado por todos los vértices de G y por todas las aristas de G , excepto la arista x . Denotaremos por $G - \{x_1, \dots, x_n\}$ al grafo que se obtiene de G borrando sucesivamente las aristas x_1, \dots, x_n .

Sean G y H dos grafos. Diremos que H es un subgrafo de G y lo denotaremos por $H \subseteq G$ si se ha obtenido mediante una sucesión de borrados de vértices o aristas de G . Si, además, $H \neq \emptyset, G$, diremos que H es un subgrafo propio de G . Dado un subconjunto W de vértices de G llamaremos subgrafo inducido por W , y lo denotaremos por $\langle W \rangle$, al grafo que tiene como conjunto de vértices a W y como conjunto de aristas a todas las aristas de G tales que sus dos extremos están en W .

Dado un grafo G y una arista suya $x = \{u, v\}$, denotaremos por G/x al grafo que se obtiene de G quitando los vértices u y v y añadiendo un nuevo vértice w y las aristas $\{w, u_i\}$ donde u_i son los vértices adyacentes a u o a v en G , para $i = 1, \dots, n$. Diremos que G/x se ha obtenido de G contrayendo la arista x , o bien que G se ha obtenido de G/x dividiendo el vértice w .

Si G y H son dos grafos de forma que H se ha obtenido de G mediante una secuencia de borrados de vértices o aristas, o una secuencia de contracciones de aristas, diremos que H es un menor de G . Si, además, $H \neq \emptyset$ y G , diremos que H es un menor propio de G .

Sea G un grafo conexo. Un punto de corte de G es un vértice $v \in V(G)$ tal que $G - \{v\}$ no es conexo. Un puente de G es una arista $x \in A(G)$ tal que $G - \{x\}$ no es conexo. Diremos que un grafo es n -conexo si se necesitan borrar al menos n vértices para desconectar el grafo. Observemos que un grafo no conexo es 0-conexo y que si un grafo es n -conexo entonces es también m -conexo, para $m \leq n$. Un resultado muy usado relativo al grado de conexión de un grafo es el Teorema de Menger [35]:

Teorema 0.1. *Sea G un grafo conexo y $u, v \in V(G)$ no adyacentes. El número mínimo de vértices cuyo borrado desconecta a u y a v es el máximo número de caminos disjuntos que los unen.*

Sean $G_1 = (V_1, A_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2)$ dos grafos y $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ una aplicación. Si ϕ es inyectiva y cumple que dados dos vértices adyacentes u y v de G_1 se tiene que $\phi(u)$ y $\phi(v)$ son adyacentes en G_2 , entonces se dice que ϕ es una inmersión de G_1 en G_2 . Si ϕ es una inmersión de G_1 en G_2 biyectiva tal que ϕ^{-1} es una inmersión de G_2 en G_1 , entonces ϕ es un isomorfismo entre los grafos G_1 y G_2 que a su vez se dicen isomorfos.

Sea una arista $x = \{u, v\}$. Llamaremos subdivisión de x o bien a un conjunto, no necesariamente finito, de aristas $P = \{\{u, u_1\}, \{u_1, u_2\}, \dots, \{u_n, v\}\}$ con todos los vértices distintos, o bien a la misma arista x . Si G es un grafo, llamaremos subdivisión de G al grafo obtenido al sustituir las aristas de G por subdivisiones suyas, de manera que los vértices que están en los interiores de las subdivisiones de una arista son distintos entre sí y distintos de los vértices de G , y si x es una arista de G , llamaremos x -subdivisión de G al grafo que se obtiene al sustituir todas las aristas de G por subdivisiones suyas en los términos que acabamos de describir, excepto la arista x . Diremos que los grafos G_1 y G_2 son homeomorfos si existe un grafo G_3 que sea subdivisión de G_1 y G_2 . Diremos que el grafo G_1 es un menor topológico del grafo G_2 si una subdivisión de G_1 es subgrafo de G_2 y diremos que el grafo G_1 es un x -menor topológico del grafo G_2 si una x -subdivisión de G_1 es subgrafo de G_2 .

Un 1-camino W en un grafo infinito G es un subgrafo infinito y conexo de G tal que todos los vértices de W tienen valencia 2 en W salvo un vértice que tiene valencia 1.

Sean x e y dos elementos (vértices o aristas) de un grafo G . Diremos que x e y están a distancia n , y lo denotaremos $d(x, y) = n$ si n es el mínimo de las longitudes de los caminos que unen x con y .

El contorno de un grafo G , denotado $g(G)$, es el mínimo de las longitudes de los ciclos de G . Si G es un árbol entonces $g(G) = 0$.

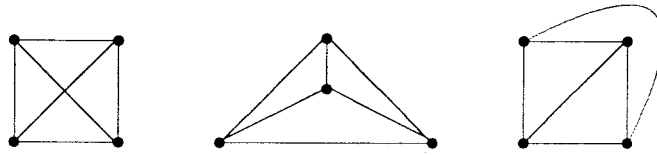
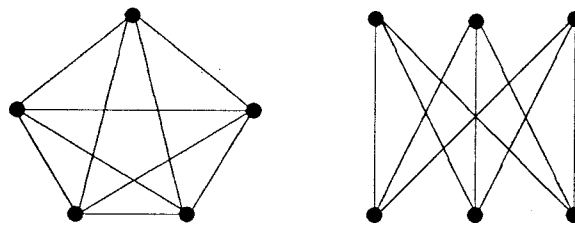
A lo largo de esta memoria nos referiremos a algunos grafos siguiendo la notación clásica:

- Un árbol es un grafo conexo sin ciclos.
- Dado un grafo G denotamos por \overline{G} a su grafo complementario, es decir, al grafo cuyo conjunto de vértices es $V(G)$ y tal que $\{u, v\}$ es arista de \overline{G} si y sólo si no es arista de G , para todo $u, v \in V(G)$.
- K_n es el grafo completo de n vértices, con $n \geq 0$.
- P_n es el grafo formado sólo por un camino de longitud $n - 1$, con $n \geq 1$.
- C_n es un ciclo de longitud n .
- $K_{m,n}$ es el grafo $\overline{K_m} + \overline{K_n}$
- Q_n es el grafo $K_2 \times Q_{n-1}$, donde $Q_1 = K_2$.

0.2 Grafos planos

Una de las formas más habituales de definir un grafo es mediante un "dibujo", es decir, elegimos como vértices algunos puntos del plano y representamos las aristas como arcos de curva (sin precisar su tamaño ni su longitud) entre ellos. Este "dibujo" no tiene por qué ser único. En la Figura 1 se muestran los dibujos que representan al grafo K_4 .

Sin embargo, la primera de las representaciones de K_4 que se muestran en la Figura 1 presenta un cruce de dos aristas en un punto que no es un vértice. Esto es un inconveniente, ya que estos puntos son indistinguibles de los vértices, topológicamente hablando. Por tanto, no es deseable que aparezcan. Dado un grafo G , si existe una representación gráfica tal que dos aristas se cortan únicamente en los vértices, se dice que esa representación es una representación plana de G , que el grafo admite una inmersión en el plano o que G es un grafo plano. Como ejemplo, K_4 es

Figura 1: Diversas representaciones de K_4 .Figura 2: Los grafos K_5 y $K_{3,3}$.

un grafo plano pues, volviendo a la Figura 1, observamos que la segunda y tercera representación de dicho grafo cumplen esta condición.

La representación plana de un grafo divide al plano en regiones que llamaremos caras del grafo. Dichas regiones pueden ser acotadas o no. A una cara no acotada de un grafo la llamaremos cara exterior.

Un primer resultado relacionado con la planaridad de grafos y realmente el origen de la teoría topológica de grafos data de 1736 y es la famosa Fórmula de Euler, que, en el lenguaje propio de la teoría de grafos, viene dado por el siguiente Teorema (ver para más detalles [27]):

Teorema 0.2. *Sea G un grafo conexo con p vértices y q aristas y tal que admite una representación en el plano con r caras. Entonces $p - q + r = 2$*

Una primera consecuencia de este resultado es que no todos los grafos son planos. Al no verificar esta relación, no es posible dibujar los grafos de la Figura 2 sin que dos aristas se crucen en algún punto que no sea vértice.



En 1930, Kuratowski demostró, además, que K_5 y $K_{3,3}$ son las únicas obstrucciones básicas para la planaridad. Es un resultado ya clásico en Teoría de Grafos [34].

Teorema 0.3. *Un grafo es plano si y sólo si no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.*

La caracterización de los grafos que cumplen una determinada propiedad en función de los grafos mínimos que no han de contener en algún sentido, se conoce como caracterización de tipo Kuratowski, caracterización en términos de grafos prohibidos o caracterización mediante grafos minimales. Gran parte de los resultados obtenidos a lo largo de la memoria son de esta naturaleza.

La caracterización obtenida por Kuratowski, como probaron Dirac y Schuster en [20], es válida tanto para grafos finitos como para grafos infinitos (numerables y localmente finitos). En el caso de grafos infinitos no numerables, la caracterización de los grafos planos viene dada por el siguiente teorema de Wagner [53]:

Teorema 0.4. *Un grafo es plano si y sólo si verifica las siguientes condiciones*

1. *No contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5 o a $K_{3,3}$.*
2. $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.
3. *G contiene, como máximo, una cantidad numerable de vértices de valencia mayor o igual que 3.*

Una generalización de éste resultado a cualquier superficie orientable de género k (esto es, la esfera con k asas) fue publicada por Hutchinson y Wagon en [30]. Dicho teorema caracteriza a los grafos que admiten una inmersión en una superficie de género orientable k a partir del teorema de Kuratowski correspondiente para grafos finitos en dicha superficie. En el mismo trabajo, los autores afirman que el teorema sigue siendo válido para superficies de género no orientable k .

Como consecuencia, este resultado sólo se puede explicitar en el caso del plano (Teorema de Wagner) y del plano proyectivo (ver el Capítulo 3 para más detalles).

Teorema 0.5. *Un grafo admite una inmersión en una superficie de género orientable k si y sólo si verifica las siguientes condiciones*

1. Todo subgrafo finito de G admite una inmersión en una superficie de género orientable k .
2. $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.
3. G contiene, como máximo, una cantidad numerable de vértices de valencia mayor o igual que 3.

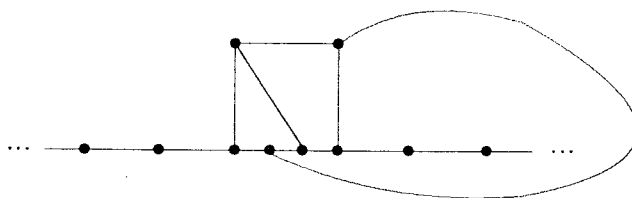


Figura 3: Un grafo plano que no es VAP-plano.

Volviendo al caso numerable, varios autores (ver [48]) han señalado la importancia de asegurar representaciones planas sin acumulación de vértices. En este caso, se dice que tenemos una representación VAP-plana o que el grafo es VAP-plano. Aun siendo el grafo plano, no siempre es posible encontrar una representación del mismo con estas características, como muestra el ejemplo de la Figura 3.

La caracterización de los grafos VAP-planos fue obtenida por Halin en 1966 y viene dada por el siguiente resultado [26].

Teorema 0.6. *Un grafo plano es VAP-plano si y sólo si no contiene un subgrafo que sea una subdivisión de K_5^∞ , $L_{3,3}^\infty$, $K_{3,3}^\infty$, L_5^∞ .*

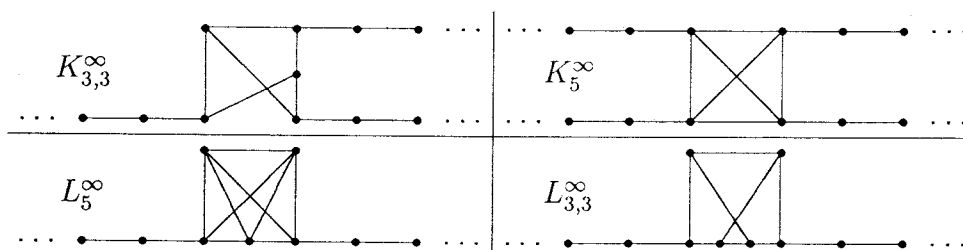


Figura 4: Grafos prohibidos VAP-planos.

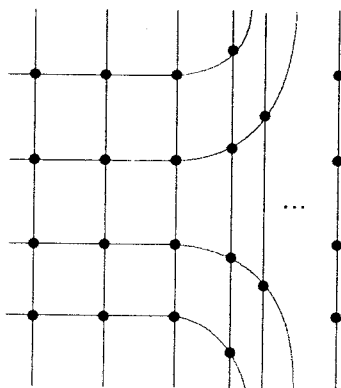


Figura 5: Un grafo VAP-plano que no es EAP-plano.

Todavía se puede presentar otra situación no deseable en la representación plana de un grafo infinito. Existen grafos que, aún siendo VAP-planos, es decir, admitiendo al menos una representación plana en la que no hay acumulación de vértices, presentan otro tipo de acumulaciones en toda representación gráfica suya en el plano. Pensemos, por ejemplo, en un grafo con dos componentes conexas: una cuadrícula infinita y un 2-camino. De este grafo es posible dar una representación VAP-plana tal como muestra la Figura 5, pero no podemos evitar en ninguna de sus representaciones en el plano que se acumulen puntos interiores de sus aristas.

Un grafo infinito que admite una representación en el plano sin ningún tipo de acumulación (ni de vértices ni de aristas) recibe el nombre de EAP-plano o bien diremos que admite una representación EAP-plana. Obviamente, si un grafo es EAP-plano, también es VAP-plano. Sin embargo, Thomassen demostró en [48] que si el grafo es conexo ambos conceptos son equivalentes.

La caracterización de los grafos EAP-planos fue obtenida por Ayala, Domínguez, Márquez y Quintero en [7] y es la siguiente:

Teorema 0.7. *Un grafo es EAP-plano si y sólo si es VAP-plano y no tiene ningún subgrafo que sea una subdivisión de $P(K_5) \cup P_\omega$ ó $P(K_{3,3}) \cup P_\omega$.*

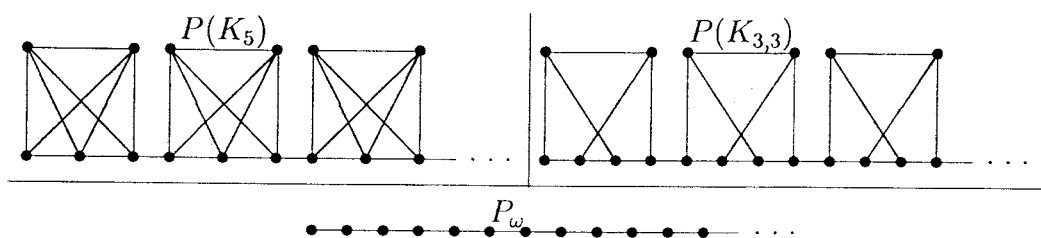


Figura 6: Grafos prohibidos EAP-planos.

0.3 Grafos periplanos

En determinados contextos no basta exigir que un grafo admita una inmersión plana. Conviene, además, que dicha inmersión verifique propiedades adicionales. De esta forma surgen algunos conceptos importantes, como el de periplanaridad. Un grafo se dice periplano si admite una representación plana de forma que todos los vértices estén en una misma cara. Se pueden enumerar multitud de aplicaciones de los grafos periplanos; baste citar a modo de ejemplo, aplicaciones en Arquitectura [41], en el diseño de circuitos impresos [50] o en el estudio de redes de comunicaciones [21]. En Matemáticas son especialmente interesantes porque resultan una herramienta útil para resolver problemas para los que no se conoce, o no existe, una solución general. Citemos, como ejemplo, el cálculo de los árboles de Steiner [56]. Los grafos periplanos fueron introducidos por Chartrand y Harary en [17] quienes proporcionaron, además, la siguiente caracterización de los mismos en términos de subgrafos prohibidos (ver Figura 7):

Teorema 0.8. *Un grafo es periplano si y sólo si no contiene como subgrafo ninguna subdivisión de K_4 ó $K_{2,3}$.*

Buena parte del interés en el estudio de los grafos periplanos se ha centrado en encontrar conceptos más amplios que la periplanaridad para los cuales se conservaran ciertas propiedades consideradas interesantes. En este sentido, Sedláček en [43] define el concepto de grafo periplano generalizado. Un grafo se dice periplano generalizado si admite un representación plana en la que cada arista tiene al menos un vértice en la cara exterior. Como ejemplo de grafo periplano generalizado tenemos a K_4 (ver Figura 1).

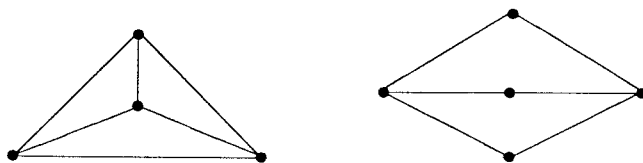


Figura 7: Grafos prohibidos para la periplanaridad.

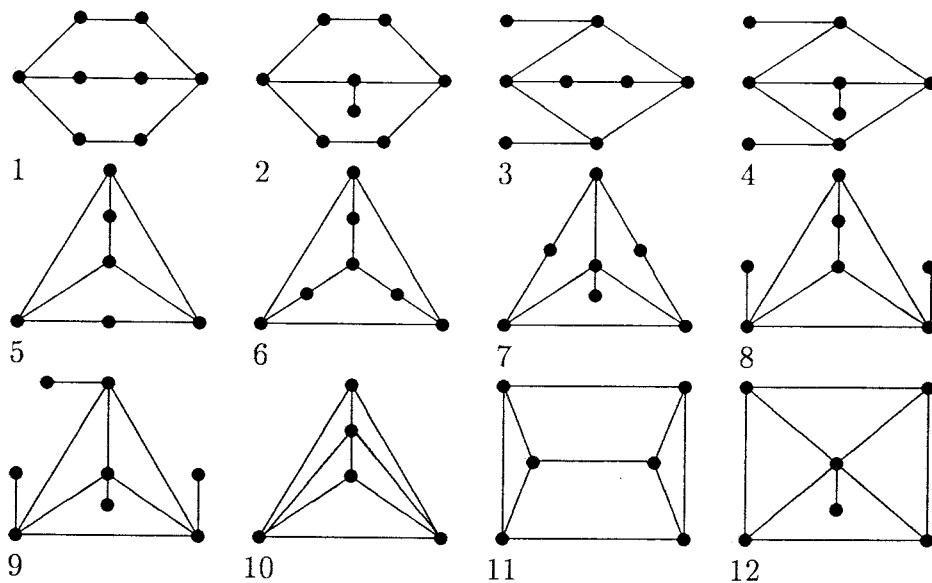


Figura 8: Grafos prohibidos para la periplanaridad generalizada.

En el mismo trabajo [43], Sedláček obtiene una caracterización de los grafos periplanos generalizados en términos de subgrafos prohibidos.

Teorema 0.9. *Un grafo es periplano generalizado si y sólo si no tiene un subgrafo que sea una subdivisión de uno de los doce grafos dados en la Figura 8.*

Respecto a la periplanaridad en el caso de grafos infinitos, y al igual que ocurría con los grafos planos, también es válido el Teorema de Chartrand y Harary [17] para ellos. Pero igualmente es importante en este caso asegurar, además, que no hay puntos de acumulación en la representación plana correspondiente. En [13], Boza, Diáñez y Márquez fijan y caracterizan los grafos p -periplanos, es decir, los grafos infinitos que tienen una representación plana sin acumulación de vértices ni

de aristas tal que todos los vértices están situados en una cara. La caracterización que obtuvieron es la siguiente:

Teorema 0.10. *Un grafo infinito es p -periplano si y sólo si no posee como subgrafo a una subdivisión de K_4 , $K_{2,3}$, L_4 ó $L_{2,3}$ (ver Figura 9).*

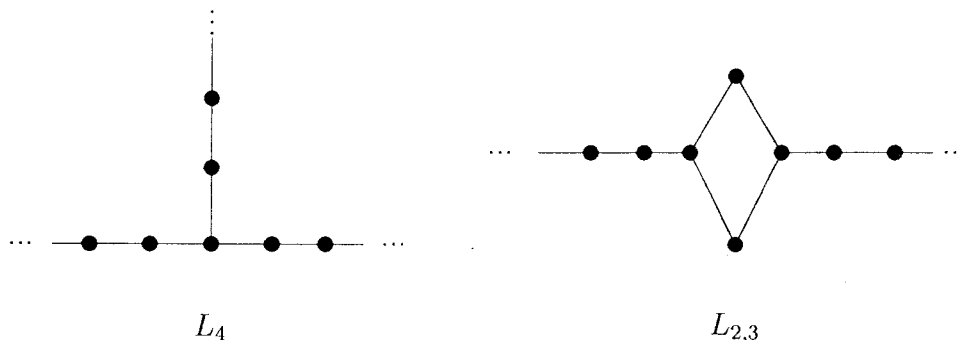


Figura 9: Los grafos infinitos prohibidos no p -periplanos.

De la misma forma es interesante exigir a los grafos infinitos periplanos generalizados que, en su inmersión periplana generalizada no aparezcan puntos de acumulación. Surge el concepto de grafo p -periplano generalizado como aquel que admite una inmersión EAP-plana y periplana generalizada. En [11] Boza, Cáceres, Diánez y Márquez caracterizan los grafos p -periplanos generalizados en función de subgrafos prohibidos:

Teorema 0.11. *Un grafo es p -periplano generalizado si y sólo si es periplano generalizado y no posee un subgrafo que sea una subdivisión de alguno de los que muestra la Figura 10.*

0.4 Planaridad de grafos de línea

Sea G un grafo. Se define el grafo de línea de G , y lo denotamos por $L(G)$, como el grafo cuyo conjunto de vértices es el conjunto de aristas de G y dos vértices son



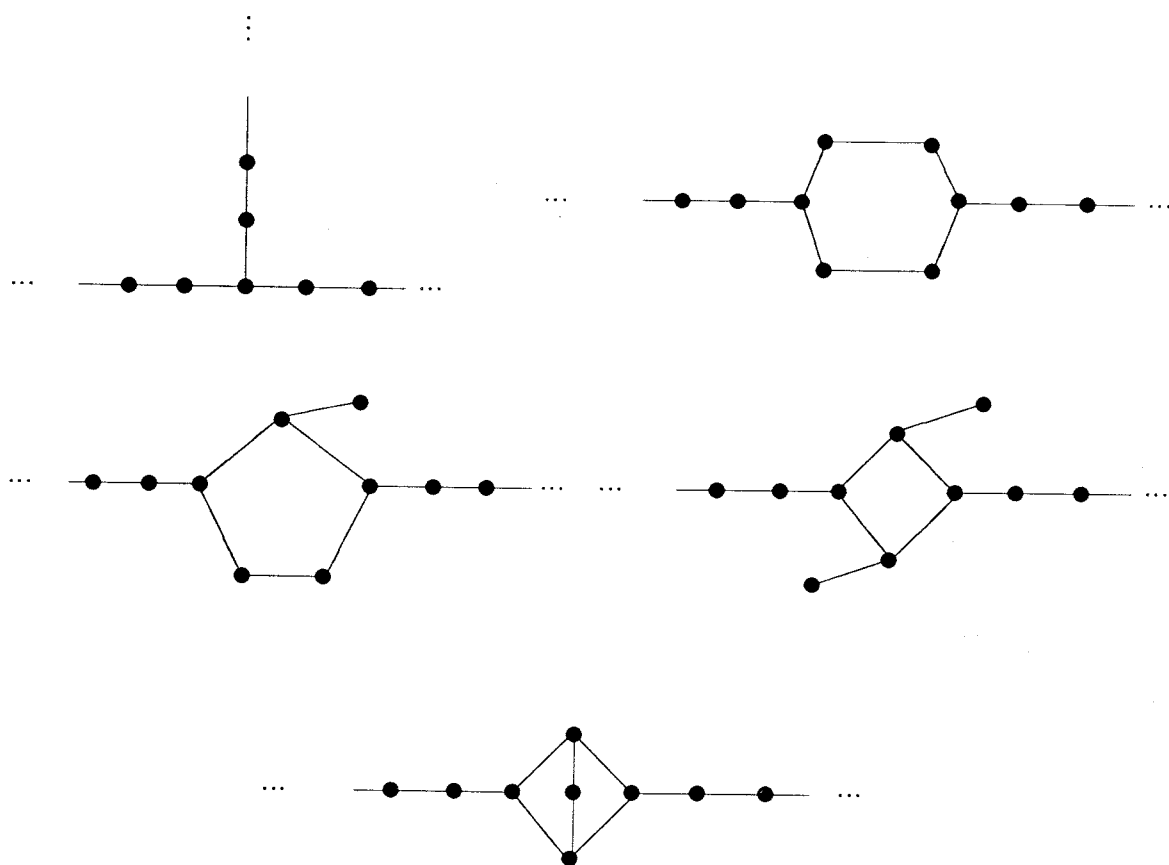


Figura 10: Los grafos infinitos prohibidos no p-periplanos generalizados.

adyacentes si provienen de dos aristas incidentes. En la Figura 17 podemos ver un ejemplo.

A este concepto llegaron de forma independiente diferentes autores como Ore [37], Sabidussi [42], Beineke [10], Seshu y Reed [46], Kasteleyn [31] y Menon [36], siendo Hoffman [28] quien les dio el actual nombre de grafo de línea (*line graph*) y Whitney [55] el primero en definirlo.

De forma natural podemos definir el concepto de grafo de línea iterado. Si denotamos como $L^1(G)$ a $L(G)$ entonces $L^n(G) = L(L^{n-1}(G))$, para todo $n > 1$.

En lo que respecta a inmersiones de grafos en superficies, un primer problema que surge respecto a grafos de línea es estudiar las propiedades que debe verificar un grafo para que su grafo de línea admita una inmersión en el plano. Podemos exigir, además, que dicha inmersión sea periplana o periplana generalizada. Existe una cierta cantidad de bibliografía que relaciona los grafos de línea con los grafos planos, periplanos y periplanos generalizados.

Sedláček caracterizó en [45] los grafos con grafo de línea plano mediante el siguiente resultado:

Teorema 0.12. *Un grafo tiene grafo de línea plano si y sólo si es plano, la valencia máxima de un vértice es a lo más 4 y si un vértice tiene valencia 4, entonces es un punto de corte.*

Greenwell y Hemminger dieron en [25] la caracterización de los grafos con grafo de línea plano en términos de subgrafos prohibidos:

Teorema 0.13. *Un grafo tiene grafo de línea plano si y sólo si no contiene como subgrafo una subdivisión de $K_{3,3}$, $K_1 + P_4$, $K_{1,5}$ ó $K_2 + \overline{K_3}$ (ver Figura 11).*

Los grafos con grafo de línea iterado plano fueron caracterizados por Kulli y Sampathkumar en [33] mediante el siguiente resultado:

Teorema 0.14. *Sea G un grafo. Se verifican las siguientes condiciones.*

1. $L^2(G)$ es plano si y sólo si G es plano, la valencia máxima es a lo sumo 4, la suma de las valencias de dos vértices adyacentes es a lo más 6 y si la suma de las valencias de dos vértices adyacentes es 6, entonces la arista que los une es un puente.

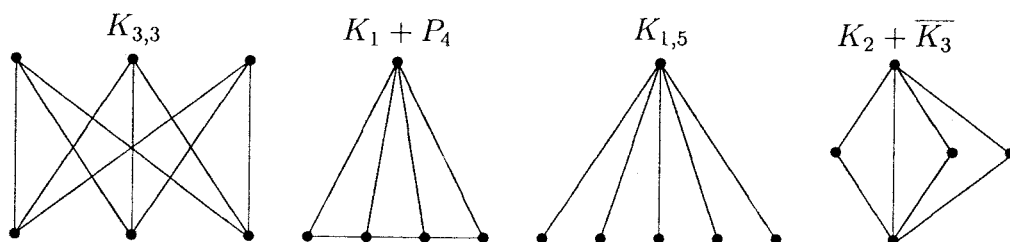


Figura 11: Los grafos prohibidos para grafos de línea planos.

2. $L^3(G)$ es plano si y sólo si $\Delta(G) \leq 3$ y si la valencia de un vértice es 3, entonces la suma de las valencias de sus vértices adyacentes es a lo sumo 4.
3. $L^n(G)$ es plano, con $n \geq 4$, si y sólo si $\Delta(G) \leq 3$ y si la valencia de un vértice es 3 entonces la componente de dicho vértice es $K_{1,3}$.

La caracterización de los grafos de línea iterados planos es debida a Akiyama, quién nos muestra los siguientes resultados en [1].

Teorema 0.15. *Sea G un grafo. Se verifican las siguientes condiciones.*

1. $L^2(G)$ es plano si y sólo si G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,5}$, $K_{3,3}$ ó $K_1 + (2K_1 \cup K_2)$ y no tiene un subgrafo que sea una x -subdivisión de A , B ó C (ver Figura 12).
2. $L^3(G)$ es plano si y sólo si G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_1 + (K_1 \cup K_2)$ ó $K_{3,3} - P_5$ (ver Figura 12).
3. $L^n(G)$ es plano, con $n \geq 4$, si y sólo si G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_1 + (K_1 \cup K_2)$ ó $K_{2,3} - K_{1,2}$ (ver Figura 12).

Chartrand, Geller y Hedetniemi caracterizan en [16] los grafos con grafo de línea periplano mediante el siguiente resultado:

Teorema 0.16. *Un grafo tiene grafo de línea periplano si y sólo si la valencia máxima de un vértice es a lo más 3 y si un vértice tiene valencia 3, entonces es un punto de corte.*

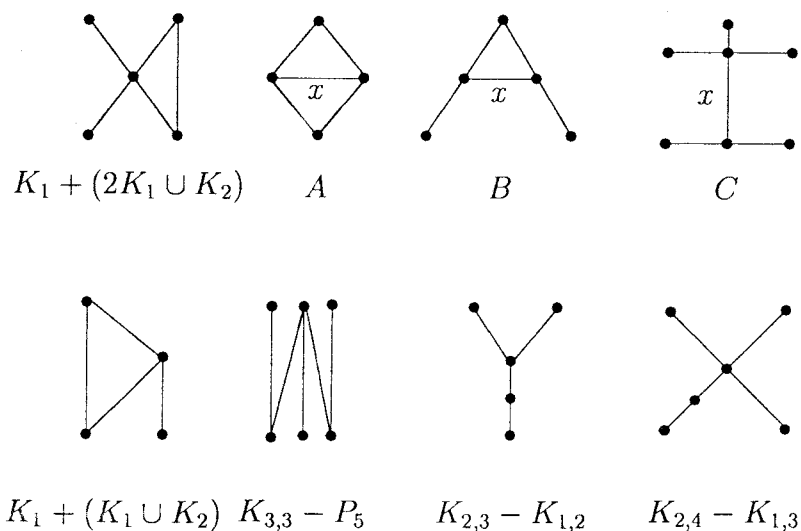


Figura 12: Grafos prohibidos para grafos de línea iterados planos.

En [1], Akiyama caracteriza los grafos cuyos grafos de línea son periplanos en términos de subgrafos prohibidos:

Teorema 0.17. *Un grafo tiene grafo de línea periplano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_1 + P_3$ ó $K_{1,4}$ (ver Figura 18).*

La caracterización de los grafos con grafo de línea iterado periplano viene dada por el siguiente teorema:

Teorema 0.18. *Sea G un grafo. Se verifican los siguientes enunciados:*

1. $L^2(G)$ es periplano si y sólo si no contiene como menores topológicos a $K_{1,4}$ ni a $K_1 + (K_1 \cup K_2)$, y no contiene una x -subdivisión de H_x (ver Figura 13).
2. $L^n(G)$ es periplano, con $n \geq 3$, si y sólo si no contiene como menores topológicos a $K_{1,4}$, $K_1 + (K_1 \cup K_2)$ ni a $K_{2,3} - K_{1,2}$ (ver Figura 13).

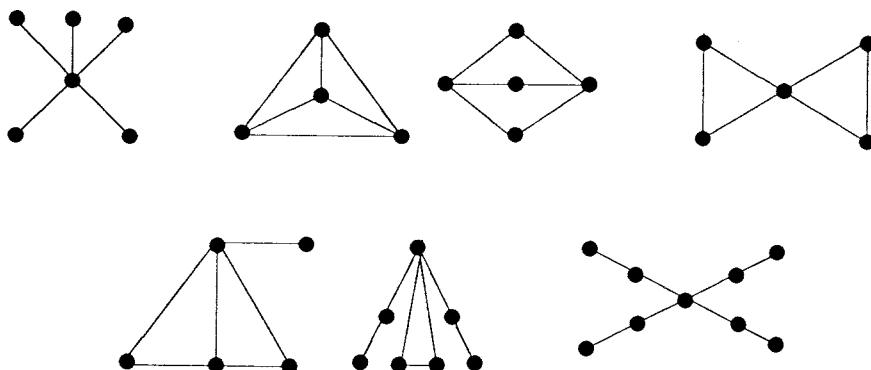


Figura 14: Grafos prohibidos para grafos de línea periplanos generalizados.

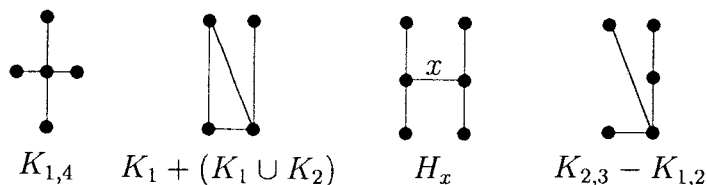


Figura 13: Grafos prohibidos para grafos de línea iterados planos.

Los grafos con grafo de línea periplano generalizado también están caracterizados. Dicha caracterización se debe a Sedláček, quién en [44] nos demuestra el siguiente resultado:

Teorema 0.19. *Sea G un grafo. Se verifican las siguientes condiciones.*

1. $L(G)$ es periplano generalizado si y sólo es G periplano, la valencia de cada vértice es a lo sumo 4, hay al menos dos puentes incidentes con cada vértice de valencia 4 y al menos uno de ellos incide con una hoja.
2. $L(G)$ es periplano generalizado si y sólo si G no tiene un subgrafo que sea una subdivisión de uno de los grafos dados en la Figura 14.

Para terminar esta sección hagamos referencia a la planaridad de los grafos de línea de grafos infinitos. Aunque los autores arriba indicados no especifican si sus resul-

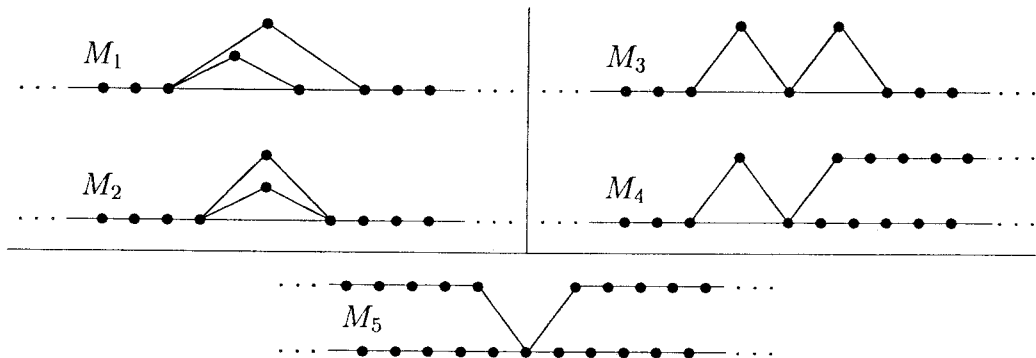


Figura 15: Grafos prohibidos para grafos de línea VAP-planos.

tados son válidos para grafos infinitos, como la caracterización de Kuratowski sí lo es tal como hemos señalado anteriormente (ver [20]), se deduce directamente que no es necesario añadir la hipótesis de finitud a sus teoremas. Sin embargo también aquí es interesante que las inmersiones de los grafos de línea en el plano no tengan acumulación de vértices o de aristas. En [14] Boza y Márquez caracterizan los grafos con grafo de línea VAP-plano y EAP-plano mediante los siguientes resultados:

Teorema 0.20. *Sea G un grafo infinito. Se verifican las siguientes condiciones.*

1. $L(G)$ es VAP-plano si y sólo si G es VAP-plano, $\Delta(G) \leq 4$ y cada vértice de valencia 4 es un punto de corte siendo al menos una de las partes que separa finita.
2. $L(G)$ es VAP-plano si y sólo G si tiene grafo de línea plano y no tiene un subgrafo homeomorfo a $L_{3,3}^\infty$, $K_{3,3}^\infty$, M_1 , M_2 , M_3 , M_4 ó M_5 (ver Figura 15).

Teorema 0.21. *Un grafo tiene un grafo de línea EAP-plano si y sólo si tiene un grafo de línea VAP-plano y no tiene un subgrafo homeomorfo a $N_1 \cup P_\omega$, $N_2 \cup P_\omega$, $N_3 \cup P_\omega$ ó $N_4 \cup P_\omega$ (ver Figura 16).*

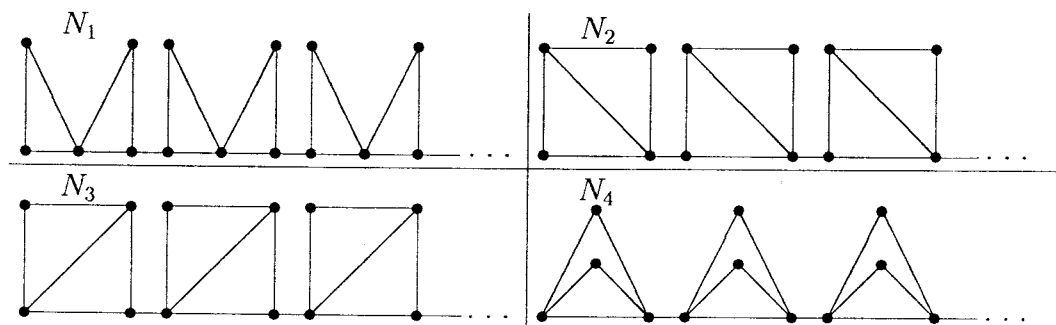


Figura 16: Grafos prohibidos para grafos de línea EAP-planos.

0.5 Planaridad de grafos totales

Behzad definió en [9] el grafo total, $T(G)$, de un grafo G como el grafo cuyo conjunto de vértices es la unión de los conjuntos de vértices y aristas de G y dos vértices del grafo total son adyacentes si provienen de dos vértices adyacentes en G , de un vértice y una arista incidentes o de dos aristas incidentes.

En la Figura 17 podemos ver, como ejemplo, $L(K_{1,3})$, $M(K_{1,3})$ y $T(K_{1,3})$.

De la misma forma que con grafos de línea, podemos definir el concepto de grafo total iterado. Si denotamos como $T^1(G)$ a $T(G)$ entonces $T^n(G) = T(T^{n-1}(G))$, para todo $n > 1$.

También en el caso de grafos totales encontramos en la literatura relaciones de éstos con los grafos planos, periplanos y periplanos generalizados. En este sentido, Behzad caracteriza en [9] a los grafos cuyo grafo total es plano mediante el siguiente resultado:

Teorema 0.22. *Un grafo tiene grafo total plano si y sólo si la valencia máxima de un vértice es a lo más 3 y si un vértice tiene valencia 3, entonces es un punto de corte.*

La caracterización de los grafos con grafo total plano en términos de subgrafos prohibidos se debe a Akiyama [1].

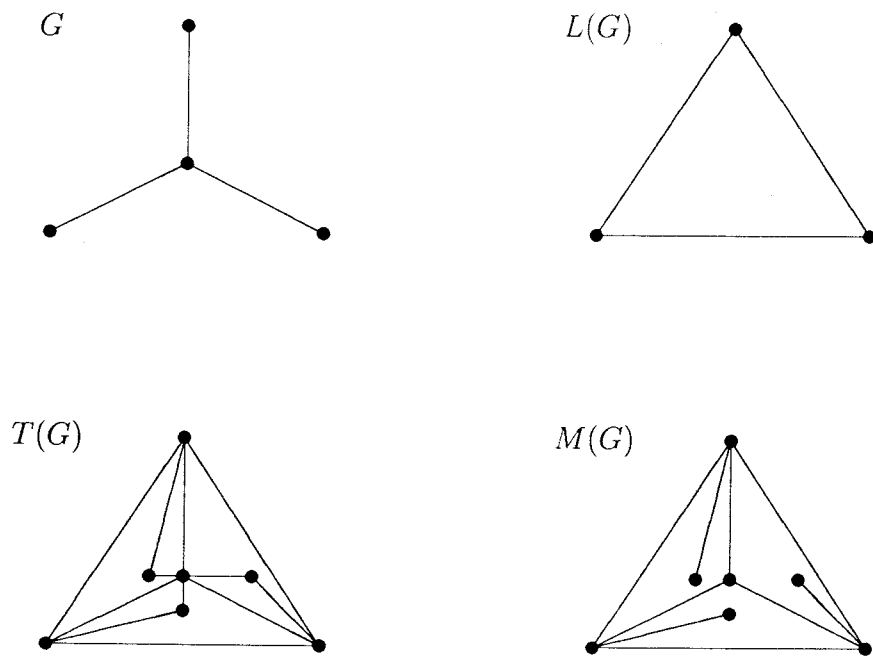


Figura 17: Ejemplo de grafo de línea, medio y total.

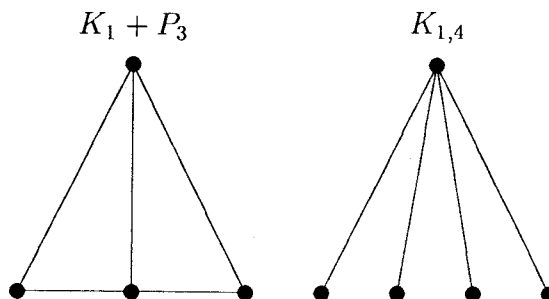


Figura 18: Grafos prohibidos para grafos totales planos.

Teorema 0.23. *Un grafo tiene grafo total plano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$ ó $K_1 + P_3$ (ver Figura 18).*

Observemos que esta caracterización coincide con la de los grafos con grafo de línea periplano, como probaron Chartrand, Geller y Hedetniemi [16].

La caracterización de los grafos totales iterados planos la obtiene Akiyama en [1].

Teorema 0.24. *Sea G un grafo. Se verifican las siguientes condiciones.*

1. $T^2(G)$ es plano si y sólo si las componentes de G son K_2 ó K_1 .
2. $T^2(G)$ es plano si y sólo si G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,2}$.
3. $T^n(G)$ es plano, con $n \geq 3$, si y sólo si las componentes de G son K_1 .
4. $T^n(G)$ es plano, con $n \geq 3$, si y sólo si G no tiene un subgrafo homeomorfo a K_2 .

Respecto a la periplanaridad, la caracterización de los grafos con grafo total periplano se debe a Akiyama [1].

Teorema 0.25. *Un grafo tiene grafo total periplano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,3}$ ó K_3 .*

Por último, la caracterización de los grafos con grafo total periplano generalizado fue dada por Boza, Dávila, Márquez y Moyano en [12], donde probaron que un grafo tiene grafo total periplano generalizado si y sólo si tiene grafo total periplano.

0.6 Planaridad de grafos medios

Akiyama, Hamada y Yoshimura definen en [2] el grafo medio, $M(G)$ de un grafo G como el grafo cuyo conjunto de vértices es la unión de los conjuntos de vértices y aristas de G y dos vértices son adyacentes si provienen de de dos aristas incidentes o de un vértice y una arista incidentes. En la Figura 17 podemos ver un ejemplo.

También en este caso podemos definir de una forma natural el concepto de grafo medio iterado. Definimos $M^n(G) = M(M^{n-1}(G))$, para $n \geq 1$, donde $M^1(G) = M(G)$.

La relación entre los grafos medios y los grafos planos, periplanos y periplanos generalizados también ha sido estudiada por varios autores. Akiyama, Hamada y Yoshimura caracterizan en [2] los grafos con grafo medio plano.

Teorema 0.26. *Un grafo tiene grafo medio plano si y sólo si es plano y la valencia máxima de un vértice es a lo más 3.*

La caracterización en términos de grafos prohibidos la dio Akiyama en [1].

Teorema 0.27. *Un grafo tiene grafo medio plano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ ó $K_{1,4}$.*

El estudio de la planaridad para grafos medios iterados también fue realizada por Akiyama en el mismo trabajo [1]. En este artículo, el autor demuestra que la planaridad de $M^n(G)$ es equivalente a la de $T^{n-1}(G)$, para $n \geq 3$. Para el segundo grafo medio, la caracterización es la siguiente.

Teorema 0.28. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $M^2(G)$ es plano
2. Las componentes de G son $K_{1,2}$, K_2 ó K_1 .
3. G no contiene un subgrafo homeomorfo a P_4 , $K_{1,3}$ ó K_3 .

La periplanaridad de los grafos medios vuelve a ser estudiada por Akiyama en el mismo trabajo [1]. Este es el resultado que caracteriza a los grafos con grafo medio periplano.

Teorema 0.29. *Un grafo tiene grafo medio periplano si y sólo si no tiene un sub-grafo homeomorfo a $K_{1,3}$.*

Para terminar, la caracterización de los grafos con grafo medio periplano generalizado fue obtenida por Boza, Dávila, Márquez y Moyano en [12] mediante el siguiente resultado, que muestra, además una curiosa equivalencia que amplía la encontrada por Chartrand, Geller y Hedetniemi [16] y que trataremos de generalizar a otras superficies más adelante en esta memoria.

Teorema 0.30. *Son equivalentes:*

1. *El grafo medio de un grafo es periplano generalizado.*
2. *El grafo de línea de un grafo es periplano.*
3. *El grafo total de un grafo es plano.*

Parte I

El Plano



Capítulo 1

Composiciones de L , M y T

En el Capítulo 0 aparecen las caracterizaciones de los grafos con grafo de línea, medio y total planos, así como sus iterados correspondientes.

En este capítulo, a partir de tales resultados, caracterizamos los grafos G tales que $\mathcal{R}(G)$ es plano, donde \mathcal{R} es una composición de los operadores grafo de línea, medio y total.

Además, damos un algoritmo que decide si $\mathcal{R}(G)$ es plano en tiempo $\mathcal{O}(n)$, donde n es el número de vértices de G .

1.1 Las familias E_n

Consideremos los operadores $L : G \mapsto L(G)$, $M : G \mapsto M(G)$ y $T : G \mapsto T(G)$, que llamaremos operador grafo de línea, operador grafo medio y operador grafo total.

Dada una familia de grafos F , denotamos $\mathcal{L}(F) = \{L(G)/G \in F\}$. Del mismo modo, denotamos $\mathcal{M}(F) = \{M(G)/G \in F\}$ y $\mathcal{T}(F) = \{T(G)/G \in F\}$.

Dados dos grafos K y G denotamos $K \angle G$ si G contiene una subdivisión de K como subgrafo. Además denotamos $K \angle_x G$ si G tiene un subgrafo que es una x -subdivisión de K .



En esta sección vamos a caracterizar los grafos G tales que $\mathcal{R}(G)$ es plano, donde \mathcal{R} es una composición de los operadores grafo de línea, medio y total.

Para ello definiremos una partición $\{E_n, n \geq 0\}$ del conjunto de los grafos finitos tal que $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ es el conjunto de los grafos planos finitos y si N es uno de los operadores L , M o T , y G_1, G_2 son dos grafos de una misma familia, entonces $N(G_1)$ y $N(G_2)$ están también en otra misma familia. Además, si $G \in E_k$ para cualquier k y R es una composición de los operadores L , M y T , obtendremos el único n con $n \geq 0$ tal que $R(G) \in E_n$.

Vamos a definir algunas familias auxiliares para construir las familias E_n antes mencionadas. Los grafos que aparecen en estas definiciones pueden verse en la Figura 12.

$$F_0 = \{G/K_{1,4} \angle G\}, F_1 = \{G/K_1 + (2K_1 \cup K_2) \angle G \circ A, B \circ C \angle_x G\}, F_2 = \{G/K_{2,4} - K_{1,3} \angle G\}, F_3 = \{G/A \circ B \angle_x G\}, F_4 = \{G/K_1 + P_3 \angle G\}, F_5 = \{G/B \angle_x G\}, F_6 = \{G/K_1 + (K_1 \cup K_2) \angle G\}, F_7 = \{G/K_{3,3} - P_5 \angle G\}, F_8 = \{G/K_{2,3} - K_{1,2} \angle G\}, F_9 = \{G/K_3 \angle G\}, F_{10} = \{G/K_{1,3} \angle G\}.$$

A partir de las familias F_m , con $m = 0, \dots, 10$, definimos las familias E_n :

$$E_0 = \{G/K_5 \angle G\} \cup \{K_{3,3} \angle G\}, E_1 = (\{G/K_{1,5} \angle G\} \cup \{G/K_1 + P_4 \angle G\} \cup \{G/K_2 + \overline{K_3} \angle G\}) - E_0, E_2 = (F_0 \cap F_1) - (E_0 \cup E_1), E_3 = F_2 - (E_0 \cup E_1 \cup F_1), E_4 = F_0 - (E_0 \cup E_1 \cup F_1 \cup F_2), E_5 = (F_3 \cap F_4) - (E_0 \cup F_0), E_6 = F_4 - (E_0 \cup F_0 \cup F_3), E_7 = F_5 - (F_0 \cup F_4), E_8 = F_6 - (F_0 \cup F_4 \cup F_5), E_9 = F_7 - (F_0 \cup F_6), E_{10} = F_8 - (F_0 \cup F_6 \cup F_7), E_{11} = F_9 - (F_0 \cup F_6 \cup F_8), E_{12} = F_{10} - (F_0 \cup F_8 \cup F_9), E_{n+12} = (\{G/P_n \subset G\} \cap \{G/P_{n+1} \not\subset G\}) - (F_9 \cup F_{10}) \text{ for } n \geq 1.$$

Por construcción $\{E_n, n \geq 0\}$ es una partición del conjunto de los grafos finitos. Una vez definidas las familias E_n , $n \geq 0$ vamos a enunciar y demostrar el resultado principal de esta sección.

Proposición 1.1. *En las condiciones anteriores, se verifican los siguientes enunciados:*

1. $\mathcal{L}(E_0) \subset E_0$, $\mathcal{M}(E_0) \subset E_0$, $\mathcal{T}(E_0) \subset E_0$.
2. $\mathcal{L}(E_1) \subset E_0$, $\mathcal{M}(E_1) \subset E_0$, $\mathcal{T}(E_1) \subset E_0$.

3. $\mathcal{L}(E_2) \subset E_1, \mathcal{M}(E_2) \subset E_0, \mathcal{T}(E_2) \subset E_0.$
4. $\mathcal{L}(E_3) \subset E_2, \mathcal{M}(E_3) \subset E_0, \mathcal{T}(E_3) \subset E_0.$
5. $\mathcal{L}(E_4) \subset E_5, \mathcal{M}(E_4) \subset E_0, \mathcal{T}(E_4) \subset E_0.$
6. $\mathcal{L}(E_5) \subset E_1, \mathcal{M}(E_5) \subset E_1, \mathcal{T}(E_5) \subset E_0.$
7. $\mathcal{L}(E_6) \subset E_5, \mathcal{M}(E_6) \subset E_1, \mathcal{T}(E_6) \subset E_0.$
8. $\mathcal{L}(E_7) \subset E_1, \mathcal{M}(E_7) \subset E_1, \mathcal{T}(E_7) \subset E_1.$
9. $\mathcal{L}(E_8) \subset E_5, \mathcal{M}(E_8) \subset E_1, \mathcal{T}(E_8) \subset E_1.$
10. $\mathcal{L}(E_9) \subset E_7, \mathcal{M}(E_9) \subset E_1, \mathcal{T}(E_9) \subset E_1.$
11. $\mathcal{L}(E_{10}) \subset E_8, \mathcal{M}(E_{10}) \subset E_1, \mathcal{T}(E_{10}) \subset E_1.$
12. $\mathcal{L}(E_{11}) \subset E_{11}, \mathcal{M}(E_{11}) \subset E_1, \mathcal{T}(E_{11}) \subset E_1.$
13. $\mathcal{L}(E_{12}) \subset E_{11}, \mathcal{M}(E_{12}) \subset E_1, \mathcal{T}(E_{12}) \subset E_1.$
14. $\mathcal{L}(E_{13}), \mathcal{M}(E_{13}), \mathcal{T}(E_{13}) \subset E_{13}.$
15. $\mathcal{L}(E_{14}) \subset E_{13}, \mathcal{M}(E_{14}) \subset E_{15}, \mathcal{T}(E_{14}) \subset E_{11}.$
16. $\mathcal{L}(E_{15}) \subset E_{14}, \mathcal{M}(E_{15}) \subset E_7, \mathcal{T}(E_{15}) \subset E_1.$
17. $\mathcal{L}(E_{12+n}) \subset E_{11+n}, \mathcal{M}(E_{12+n}) \subset E_2, \mathcal{T}(E_{12+n}) \subset E_1, \text{ for } n \geq 4.$

Demostración.

1. Observemos que $K_2 + \overline{K_3}$ y $K_{1,4}$ son subgrafos de K_5 y $K_1 + P_3 \angle K_{3,3}$. Por tanto, si K_5 o $K_{3,3} \angle G$ entonces $L(G)$, $M(G)$ y $T(G)$ no son planos por [1, 25]. Entonces contienen una subdivisión de K_5 o $K_{3,3}$ según [34].
2. Es evidente a partir de [1, 25].
3. Observemos que $L^2(G)$ no es plano por [1]. Por tanto, por [25] $K_1 + P_4$, $K_{1,5}$ o $K_2 + \overline{K_3} \angle L^1(G)$, pero no $K_{3,3}$ porque no está contenido en G . Para $M(G)$ y $T(G)$ se tiene por [1].
4. $K_{1,4} \angle L(K_{2,4} - K_{1,3})$ y $A \angle_x L(K_{2,4} - K_{1,3})$. Más aún, $K_{1,4} \angle K_{2,4} - K_{1,3}$ por tanto si $G \in E_3$ entonces $M(G)$ y $T(G)$ contienen un K_5 .

5. Observemos que $K_1 + P_3 \angle L(K_{1,4})$, $A \angle_x L(K_{1,4})$ y $L(G)$ no contiene ningún $K_{1,4}$ para todo $G \in E_4$. Para \mathcal{M} y \mathcal{T} se tiene por [1].
6. Es evidente a partir de [1, 25].
7. Se tiene para \mathcal{M} y \mathcal{T} a partir de [1]. Más aún, si A o $B \angle G$, $G \in E_6$ la arista x debe estar subdividida, por tanto $L(G)$ contiene a B y no contiene a $K_{1,4}$.

Para terminar la demostración observemos que los enunciados 8. a 17. se tienen a partir de [1] y de la forma en que los E_n han sido definidos, para $n \geq 7$. \square

En la Figura 1.1 podemos ver una representación gráfica de los enunciados de la Proposición 1.1.

Como consecuencia de este resultado tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *Sea $G \in E_n$ y sea \mathcal{R} una composición de los operadores L , M y T . Entonces $\mathcal{R}(G)$ está al final del recorrido mostrado en la Figura 1.1 que comienza en E_n y contiene los operadores de \mathcal{R} .*

A partir del Teorema 1.2, se tiene el resultado sobre la planaridad de $\mathcal{R}(G)$ que mencionamos anteriormente.

Corolario 1.3. *Sea $G \in E_n$ y sea \mathcal{R} una composición de los operadores L , M y T . $\mathcal{R}(G)$ es plano si y sólo si el recorrido mostrado en la Figura 1.1 que comienza en E_n y que contiene los operadores de \mathcal{R} termina en E_0 .*

Usando este resultado, podemos testear la planaridad de $\mathcal{R}(G)$ según el siguiente teorema.

Teorema 1.4. *Sea $G \in E_n$. La planaridad de $\mathcal{R}(G)$ puede testearse en tiempo lineal respecto al número de operaciones de \mathcal{R} .*

Nota: Este tiempo no depende del número de vértices y aristas de G .

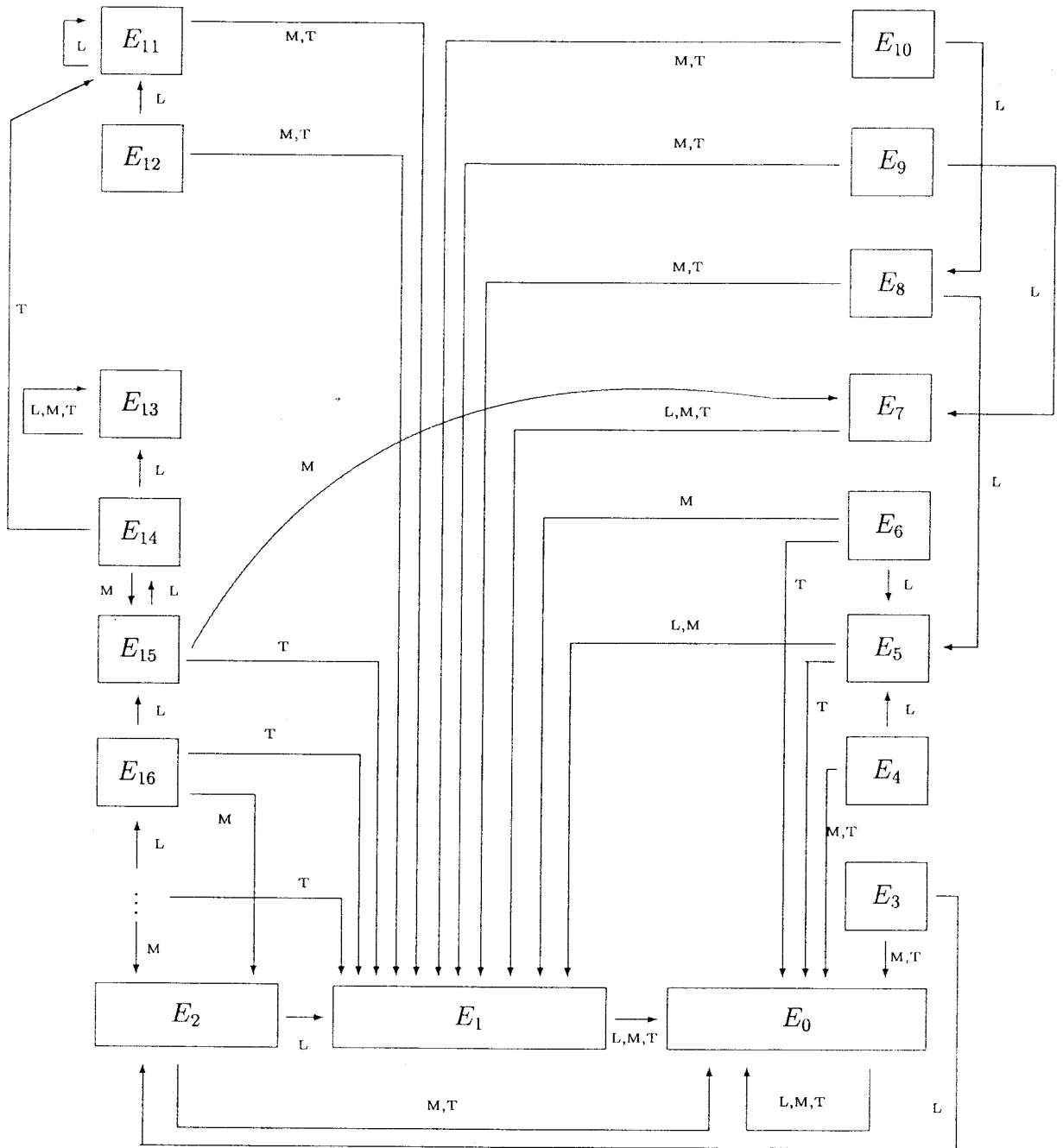


Figura 1.1:



1.2 Algoritmo para testear E_n

En esta sección vamos a dar un algoritmo que comprueba si $\mathcal{R}(G)$ es plano en tiempo $\mathcal{O}(n)$, donde n es el número de vértices de G .

Sea G un grafo. Si somos capaces de encontrar el E_n tal que $G \in E_n$ en tiempo lineal entonces, según los resultados obtenidos en la sección anterior, también tendremos la planaridad de $\mathcal{R}(G)$ en tiempo lineal.

Como complemento del capítulo vamos a mostrar un algoritmo que nos muestra el E_n tal que $G \in E_n$, para un grafo dado G . Este algoritmo usa un algoritmo de planaridad en tiempo lineal. Existen varios algoritmos para testear la planaridad de un grafo en tiempo lineal (véase, por ejemplo, [29]).

Descripción del algoritmo.

Paso 1. Si existe $v \in V(G)$ tal que $\delta(v) \geq 4$ ir al **Paso 6**.

Paso 2. Si existe $v \in V(G)$ tal que $\delta(v) = 3$ entonces ir al **Paso 4**.

Paso 3. Si G contiene un ciclo entonces $\boxed{G \in E_{11}}$. **FIN.**

En otro caso sea N el número de vértices del camino más largo de G . Entonces $\boxed{G \in E_{N+12}}$. **FIN.**

Paso 4. Si existe $v \in V(G)$ tal que $\delta(v) = 3$ y $\delta(v_1) + \delta(v_2) + \delta(v_3) > 3$ donde v_1 , v_2 y v_3 son los vértices adyacentes a v entonces ir al **Paso 6**.

Paso 5. Si G contiene un ciclo entonces $\boxed{G \in E_{11}}$. **FIN.**

En otro caso $\boxed{G \in E_{12}}$. **FIN.**

Paso 6. Comprobar la planaridad de G . Si G no es plano entonces $\boxed{G \in E_0}$. **FIN.**

Paso 7. Comprobar la planaridad de $L(G)$. Si $L(G)$ no es plano entonces $\boxed{G \in E_1}$. **FIN.**

Paso 8. Comprobar la planaridad de $L^2(G)$. Si $L^2(G)$ no es plano entonces:

- a) Comprobar la planaridad de $M(G)$. Si $M(G)$ no es plano entonces $G \in E_2$.
FIN.
- b) Comprobar la planaridad de $T(G)$. Si $T(G)$ no es plano entonces $G \in E_5$.
FIN.
en otro caso $G \in E_7$. FIN.

Paso 9. Comprobar la planaridad de $L^3(G)$. Si $L^3(G)$ es plano entonces $G \in E_{10}$.
FIN.

Paso 10. Comprobar la planaridad de $M(G)$. Si $M(G)$ no es plano entonces comprobar la planaridad de $M(L(G))$. Si $M(L(G))$ no es plano entonces $G \in E_3$.
FIN.

en otro caso $G \in E_4$. FIN.

en otro caso:

- a) Comprobar la planaridad de $T(G)$. Si $T(G)$ no es plano entonces $G \in E_6$.
FIN.
- b) Comprobar la planaridad de $T(L(G))$. Si $T(L(G))$ no es plano entonces $G \in E_8$. FIN.
en otro caso $G \in E_9$. FIN.

Observemos que el algoritmo trabaja en tiempo $\mathcal{O}(n)$, donde n es el número de vértices de G . Como ya hemos mencionado, testear la planaridad de un grafo es una tarea ejecutable en tiempo lineal [29].

Cuando el algoritmo comprueba la planaridad de $L(G)$ es porque G es plano. En este caso, siendo G un grafo con n vértices y m aristas, $m \leq 3n - 6$. Por tanto se puede testear la planaridad de $L(G)$ en tiempo $\mathcal{O}(n)$.

Por un razonamiento similar concluimos en que la tarea de testear la planaridad de $L^2(G)$, $L^3(G)$, $M(G)$, $T(G)$, $M(L(G))$ y $T(L(G))$ puede realizarse en tiempo $\mathcal{O}(n)$.

1.3 Problemas abiertos

Tal como hemos visto en el Capítulo 0, los grafos con grafo de línea, medios y totales periplanos están caracterizados, así como los iterados correspondientes. A partir de



tales resultados queda como problema abierto caracterizar a los grafos G tales que $\mathcal{R}(G)$ es periplano, donde \mathcal{R} es, siguiendo la notación anterior, una composición de los operadores L , M y T así como encontrar un algoritmo que decida si $\mathcal{R}(G)$ es periplano en tiempo $\mathcal{O}(n)$, donde n es el número de vértices de G .

También queda abierto el tratamiento de las mismas cuestiones para periplanos generalizados.

Capítulo 2

Grafos infinitos

Siguiendo en la línea de exigir determinadas propiedades a las inmersiones de grafos en el plano, o en otras superficies, varios autores (ver [48]) han señalado la importancia de asegurar representaciones planas de grafos numerables localmente finitos sin acumulación de vértices. En este caso, se dice que tenemos una representación VAP-plana o que el grafo es VAP-plano. En este capítulo vamos a caracterizar a los grafos cuyo grafo medio y total admite una inmersión plana sin acumulación.

En una segunda sección, vamos a extender las caracterizaciones de los grafos con grafos de línea, medio y total planos al caso no numerable. Procederemos de igual forma con los iterados.

2.1 Grafos con $M(G)$ y $T(G)$ VAP y EAP-planos

Los grafos que vamos a considerar a lo largo de esta sección tienen una cantidad numerable de vértices y son localmente finitos, es decir, la valencia de cada vértice es finita. Veamos, en primer lugar, los resultados que se tienen al respecto.



2.1.1 Preliminares

En el Capítulo 0 tenemos las caracterizaciones de los grafos con grafo medio y total planos, dadas respectivamente por Akiyama, Hamada y Yoshimura en [2] y Behzad en [9], y por Akiyama en [1] mediante subgrafos prohibidos (véanse los Teoremas 0.22, 0.23, 0.26 y 0.27).

Como ya hemos señalado anteriormente, estas caracterizaciones son válidas para grafos infinitos numerables y localmente finitos ya que el Teorema de Kuratowski sí lo es (ver [20]). Sin embargo, tal como indicábamos al comienzo del capítulo, son interesantes las inmersiones de grafos planos que satisfagan, además, ciertas propiedades adicionales, en particular, el admitir una inmersión de forma que el conjunto de vértices del grafo no tenga un punto de acumulación en \mathbb{R}^2 (lo que Thomassen llama inmersión VAP-plana) o admitir una inmersión de forma que cualquier compacto de \mathbb{R}^2 corte sólo un conjunto finito de aristas (inmersión EAP-plana).

Usando estos conceptos, obtenemos el siguiente lema:

Lema 2.1. *Si G_1 es un menor de G_2 y G_2 es VAP-plano (respectivamente EAP-plano) entonces G_1 es VAP-plano (respectivamente EAP-plano).*

Demostración: Basta comprobar que una inmersión VAP-plana (respectivamente EAP-plana) de G_2 induce una inmersión VAP-plana (respectivamente EAP-plana) de G_1 . \square

Halin obtuvo en [26] la siguiente caracterización de los grafos VAP-planos en función de subgrafos prohibidos.

Teorema 2.2. *Un grafo plano es VAP-plano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a K_5^∞ , $L_{3,3}^\infty$, $K_{3,3}^\infty$, L_5^∞ .*

Ayala, Domínguez, Márquez y Quintero probaron en [7] que, para un grafo conexo, los conceptos VAP-plano y EAP-plano son equivalentes. En el mismo trabajo, los autores dieron la siguiente caracterización de los grafos EAP-planos.

Teorema 2.3. *Un grafo es EAP-plano si y sólo si es VAP-plano y no tiene un subgrafo homeomorfo a $P(K_5) \cup P_\omega$ ó $P(K_{3,3}) \cup P_\omega$.*

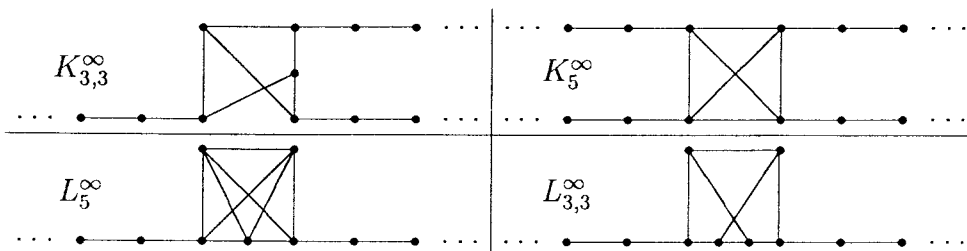


Figura 2.1: Grafos prohibidos VAP-planos.

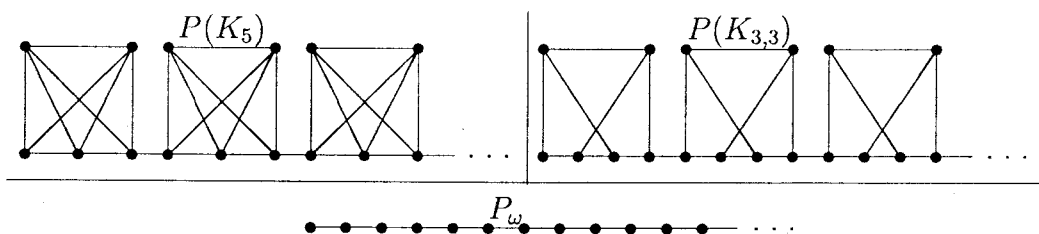


Figura 2.2: Grafos prohibidos EAP-planos.

También en [7], los autores definen un grafo *recubridor* de \mathbb{R}^2 como un grafo EAP-plano tal que toda inmersión EAP-plana suya tiene todas sus caras acotadas, y dan la siguiente caracterización de los grafos recubridores del plano.

Teorema 2.4. *Sea G un grafo infinito. G es recubridor del plano si y sólo si G es EAP-plano y contiene un subgrafo homeomorfo a $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$.*

Nota 2.5. *De los Teoremas 0.7 y 2.4 se tiene que G es EAP-plano si y sólo si G es VAP-plano y, o bien G no es recubridor o bien G tiene sólo una componente conexa infinita. Nótese que toda componente conexa infinita de un grafo G contiene a P_{ω} .*

Por último señalar que los grafos con grafo de línea VAP y EAP-planos fueron caracterizados por Boza y Márquez en [14] mediante los siguientes resultados:

Teorema 2.6. *Sea G un grafo infinito. Se verifican las siguientes condiciones.*

1. $L(G)$ es VAP-plano si y sólo si G es VAP-plano, $\Delta(G) \leq 4$ y cada vértice de valencia 4 es un punto de corte siendo al menos una de las partes que separa finita.

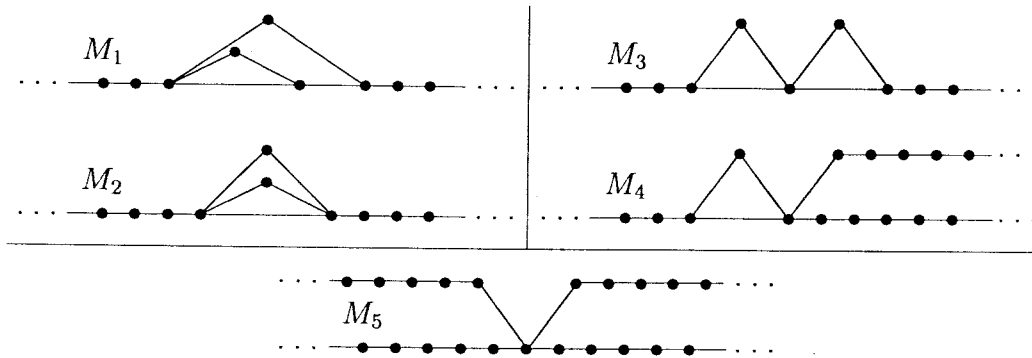


Figura 2.3: Grafos prohibidos para grafos de línea VAP-planos.

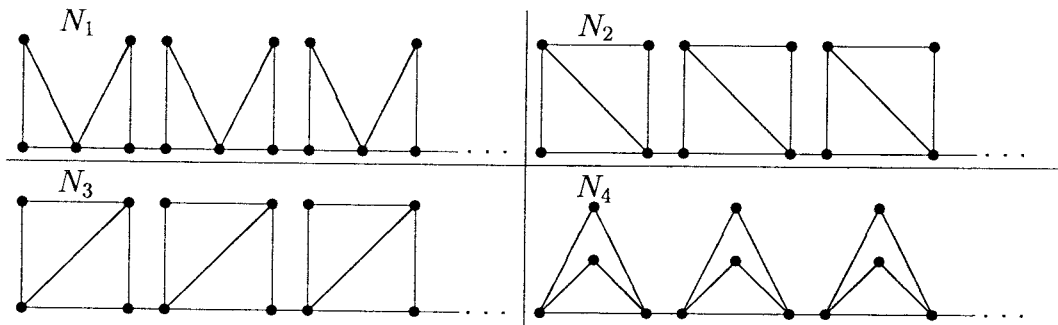


Figura 2.4: Grafos prohibidos para grafos de línea EAP-planos.

2. $L(G)$ es VAP-plano si y sólo si G tiene grafo de línea plano y no tiene un subgrafo homeomorfo a $L_{3,3}^\infty$, $K_{3,3}^\infty$, M_1 , M_2 , M_3 , M_4 ó M_5 (ver Figura 15).

Teorema 2.7. *Un grafo tiene un grafo de línea EAP-plano si y sólo si tiene un grafo de línea VAP-plano y no tiene un subgrafo homeomorfo a $N_1 \cup P_\omega$, $N_2 \cup P_\omega$, $N_3 \cup P_\omega$ ó $N_4 \cup P_\omega$ (ver Figura 16).*

En esta sección vamos a completar éste resultado, añadiendo caracterizaciones en los mismos términos para grafos medios y totales.

2.1.2 Grafos con grafo medio VAP-plano

Teorema 2.8. *Sea G un grafo infinito. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $M(G)$ es VAP-plano.
2. G es VAP-plano y $\Delta(G) \leq 3$.
3. G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_{3,3}$, $K_{3,3}^\infty$ ó $L_{3,3}^\infty$

Demostración: Veamos que la segunda y la tercera condición son equivalentes. Por el Teorema 0.26 se tiene que G es plano y $\Delta(G) \leq 3$ si y sólo si G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$ ó $K_{3,3}$, por lo que sólo hay que probar que, dado un grafo G plano y con $\Delta(G) \leq 3$ entonces G es VAP-plano si y sólo si G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}^\infty$ ó $L_{3,3}^\infty$.

Por el Teorema 0.6, G es VAP-plano si y sólo si G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a K_5^∞ , L_5^∞ , $K_{3,3}^\infty$ ó $L_{3,3}^\infty$, pero como $\Delta(K_5^\infty) = \Delta(L_5^\infty) = 4$ y estamos suponiendo que G es plano y $\Delta(G) \leq 3$, se obtiene el resultado.

Por otra parte, se tiene que la primera condición implica la segunda, puesto que G es un subgrafo de $M(G)$ con lo que si G no es VAP-plano, $M(G)$ tampoco lo es, y si $\Delta(G) \geq 4$ entonces, por el Teorema 0.26, $M(G)$ no es plano y, por tanto, no es VAP-plano.

Veamos, por último, que la segunda condición implica la primera. Como $\Delta(G) \leq 3$, dada una inmersión VAP-plana de G , dos aristas incidentes comparten cara, con lo que podemos trazar una arista entre los puntos medios de dos aristas incidentes a través de una de las caras comunes, de forma que estas nuevas aristas no se cortan. Así construimos una inmersión VAP-plana de $M(G)$ a partir de la que teníamos de G . □

2.1.3 Grafos con grafo medio EAP-plano

Para dar una caracterización de los grafos cuyos grafos medios sean EAP-planos necesitamos caracterizar, previamente, los grafos cuyos grafos medios son recubridores, a partir del siguiente resultado.



Proposición 2.9. *Sea G un grafo infinito. Entonces $M(G)$ es recubridor si y sólo si $M(G)$ es VAP-plano y G es recubridor.*

Demostración: La condición suficiente se tiene de forma inmediata puesto que si $M(G)$ es VAP-plano y G es recubridor entonces $M(G)$ tiene que ser recubridor, ya que G es un subgrafo de $M(G)$.

Veamos la condición necesaria. Si $M(G)$ no es VAP-plano, trivialmente se tiene que $M(G)$ no es recubridor.

Si $M(G)$ es VAP-plano, por el Teorema 2.8, G es VAP-plano y $\Delta(G) \leq 3$. Supongamos que G no es recubridor, y consideremos una inmersión VAP-plana de G con una cara C no acotada. A partir de dicha inmersión de G se puede construir una de $M(G)$ tal como se hizo en la demostración del Teorema 2.8. La cara C induce en la inmersión de $M(G)$ una cara C' que tampoco es acotada, por lo que $M(G)$ no es recubridor. \square

Como consecuencia inmediata de la Nota 2.5, del Teorema 2.8 y de la Proposición 2.9 se tiene la siguiente caracterización de los grafos cuyos grafos medios son EAP-planos.

Teorema 2.10. *Sea G un grafo infinito. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $M(G)$ es EAP-plano.
2. $M(G)$ es VAP-plano y, o bien G tiene sólo una componente conexa infinita o bien G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a $P(K_5)$ ó $P(K_{3,3})$.
3. G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_{3,3}$, $K_{3,3}^\infty$, $L_{3,3}^\infty$, $P(K_5) \cup P_\omega$ ó $P(K_{3,3}) \cup P_\omega$

Veamos, para terminar esta sección, que no existen grafos infinitos con grafos medios iterados VAP-planos:

Teorema 2.11. *Sea G un grafo infinito. $M^n(G)$ no es VAP-plano para $n \geq 2$.*

Demostración: Si G es infinito, P_ω es un subgrafo de G y, por tanto, $M(P_\omega)$ es un subgrafo de $M(G)$. Como $M(P_\omega)$ tiene vértices de valencia 4, por el Teorema 2.8

$M(M(G))$ no es VAP-plano, luego el segundo grafo medio de cualquier grafo infinito no es VAP-plano. Como $M^n(G) = M^2(M^{n-2}(G))$, para $n \geq 2$, se tiene que $M^n(G)$ no es VAP-plano. \square

2.1.4 Grafos con grafo total VAP-plano

Antes de enunciar y demostrar el resultado principal de esta sección veamos los siguientes lemas:

Lema 2.12. *Sea G un grafo con un punto de corte v tal que $\delta(v) = 3$ y todas las componentes de $G - v$ son infinitas. Entonces G contiene un subgrafo homeomorfo a O_1 ó O_2 (ver Figura 2.5).*

Demostración: Sea v un punto de corte de G tal que $\delta(v) = 3$ y todas las componentes de $G - v$ son infinitas. Entonces, $G - v$ tiene 2 ó 3 componentes conexas. En el primer caso G contiene un subgrafo homeomorfo a O_2 y en el segundo, G contiene un subgrafo homeomorfo a O_1 . \square

Lema 2.13. *Sea G un grafo que contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_2 + \overline{K_2}$, O_1 ó O_2 . Entonces $T(G)$ no es VAP-plano.*

Demostración: Si G contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$ ó $K_2 + \overline{K_2}$ entonces $T(G)$ no es plano por el Teorema 0.23. Por último, observemos que K_5^∞ es subgrafo de $T(O_1)$ y de $T(O_2)$ (véase la Figura 2.6), con lo que, de contener G un subgrafo homeomorfo a O_1 ó O_2 , $T(G)$ no sería VAP-plano. \square

Teorema 2.14. *Sea G un grafo infinito. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $T(G)$ es VAP-plano.
2. $\Delta(G) \leq 3$ y si $\delta(v) = 3$, con $v \in V(G)$, entonces v es un punto de corte y si C es la componente que contiene a v en G entonces al menos una componente de $C - v$ es finita.
3. G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_2 + \overline{K_2}$, O_1 ó O_2 .

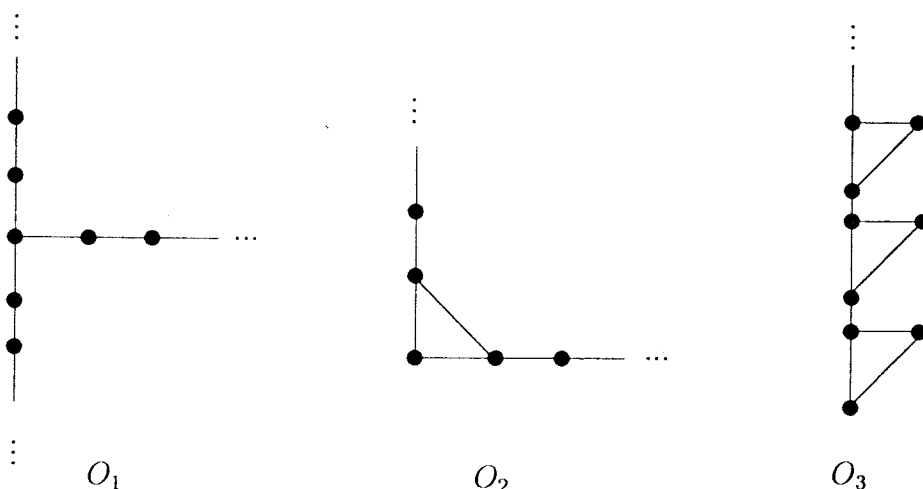


Figura 2.5:

Como se tiene que un grafo G verifica las condiciones del teorema anterior si y sólo si cada componente conexa de G las verifica, podemos suponer que G es conexo y, por tanto, basta probar el siguiente teorema.

Teorema 2.15. *Sea G un grafo infinito y conexo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $T(G)$ es VAP-plano.
2. $\Delta(G) \leq 3$ y si $\delta(v) = 3$, con $v \in V(G)$, entonces v es un punto de corte y al menos una componente de $G - v$ es finita.
3. G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_2 + \overline{K_2}$, O_1 ó O_2 .

Demostración: Veamos que la segunda y la tercera condición son equivalentes. Por el Teorema 0.23 se tiene que G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$ ó a $K_2 + \overline{K_2}$ si y sólo si $\Delta(G) \leq 3$ y si $\delta(v) = 3$ entonces v es un punto de corte. Por tanto, sólo hay que probar que, verificándose lo anterior, G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a O_1 ó a O_2 si y sólo si al menos una componente de $G - v$ es finita, para todo $v \in V(G)$ tal que $\delta(v) = 3$.

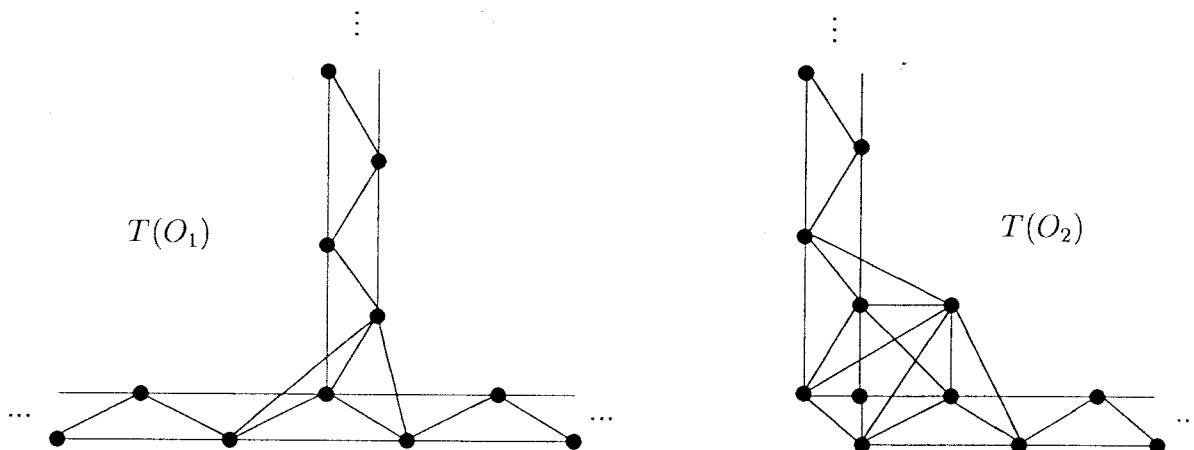


Figura 2.6:

Por el Lema 2.12 se tiene la primera implicación. Para el recíproco, observemos que los grafos O_1 y O_2 contiene vértices de valencia tres tal que, al quitarlos, todas las componentes que quedan son infinitas. Por tanto, si G contiene un subgrafo homeomorfo a O_1 ó O_2 , cualquiera de los vértices de valencia tres antes mencionados son puntos de corte de G , y todas las componentes resultantes de quitar dichos vértices de G son infinitas.

La primera condición implica la tercera por el Lema 2.13. Veamos, para terminar la demostración, que las condiciones segunda y tercera implican la primera. Vamos a distinguir dos casos.

Caso I: Supongamos que G contiene un subgrafo $R = (\{v_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \{a_n = \{v_{n-1}, v_n\}\}_{n \in \mathbb{Z}})$ homeomorfo a un 2-camino. En este caso todas las aristas a_n han de ser puentes ya que, de lo contrario, G tendría un subgrafo homeomorfo a O_2 .

Sea G_n la componente de $G - R$ que contiene a v_n . Entonces v_n tiene en G_n valencia 0 (en cuyo caso $G_n = v_n$) o valencia 1. En cualquier caso, G_n es finito ya que, de lo contrario, G contendría un subgrafo homeomorfo a O_1 .

Si $\delta_{G_n}(v_n) = 1$, sea u_n el vértice de G_n incidente con v_n y b_n la arista que los une. Los grafos $T(G_n)$ son planos por el Teorema 0.23 y como $\delta_{G_n}(v_n) = 1$, podemos dar una inmersión de $T(G_n)$ en el plano de forma que la cara exterior esté formada por las aristas $\{w_{v_n}, w_{u_n}\}$, $\{w_{u_n}, w_{b_n}\}$, $\{w_{b_n}, w_{v_n}\}$, donde w_i es el vértice de $T(G)$ que proviene del elemento i de G .

Si $\delta_{G_n}(v_n) = 0$, sea $T_n = \{\{w_{v_n}, w_{a_n}\}, \{w_{v_n}, w_{a_{n+1}}\}, \{w_{a_n}, w_{a_{n+1}}\}\}$ y si $\delta_{G_n}(v_n) = 1$, sea $T_n = G_n \cup \{\{w_{v_n}, w_{a_n}\}, \{w_{v_n}, w_{a_{n+1}}\}, \{w_{b_n}, w_{a_n}\}, \{w_{b_n}, w_{a_{n+1}}\}, \{w_{a_n}, w_{a_{n+1}}\}\}$. En cualquier caso, existe una inmersión de T_n en el plano cuya cara exterior está formada por las aristas $\{w_{v_n}, w_{a_n}\}$, $\{w_{v_n}, w_{a_{n+1}}\}$ y $\{w_{a_n}, w_{a_{n+1}}\}$. A partir de las inmersiones de los T_n se puede construir una inmersión VAP-plana de $T(G)$, tal como muestra la Figura 2.7

Caso II: Supongamos que G no tiene un subgrafo homeomorfo a un 2-camino. Sea S un 1-camino. Entonces S tiene infinitos puntos de corte pues, en caso contrario, consideremos v el último punto de corte de S y u el siguiente vértice de S . Todos los vértices de S a partir de v tienen valencia 2 en G (pues de lo contrario, serían puntos de corte), por lo que la componente S' de $G - v$ que contiene a u está formada únicamente por aristas de S , y es un 1-camino. Por tanto todo camino entre v y S' pasa necesariamente por u con lo que u es punto de corte y llegamos a contradicción.

Sean v_1, \dots, v_n, \dots los puntos de corte de S y sea G_n la unión de las componentes finitas de $G - v_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos distinguir dos subcasos no necesariamente excluyentes:

Caso II.1: Existen infinitos valores de n para los que $\delta_{G_n}(v_n) = 1$. Sean dichos valores $u_1 = v_{m_1}, \dots, u_n = v_{m_n}$, sea $H_n = G_{m_n}$, y sea x_n la arista de H_n que incide con u_n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Existe una inmersión de $T(H_1)$ en el plano con la arista $\{w_{x_1}, w_{u_1}\}$ en la cara exterior y existe otra de $T(H_2)$ con la arista $\{w_{x_2}, w_{u_2}\}$ en la cara exterior y que conserva la inmersión de $T(H_1)$, y así sucesivamente.

Caso II.2: Existen infinitos valores de n para los que $\delta_{G_n}(v_n) = 2$. Sean dichos valores $u_1 = v_{m_1}, \dots, u_n = v_{m_n}$, sea $H_n = G_{m_n}$, y sean x_n e y_n las aristas de H_n que inciden con u_n , para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una inmersión de $T(H_1)$ en el plano con las aristas $\{w_{x_1}, w_{u_1}\}$, $\{w_{y_1}, w_{u_1}\}$ y $\{w_{x_1}, w_{y_1}\}$ en la cara exterior. Existe otra de $T(H_2)$ con las aristas $\{w_{x_2}, w_{u_2}\}$, $\{w_{y_2}, w_{u_2}\}$ y $\{w_{x_2}, w_{y_2}\}$ en la cara exterior y que conserva la inmersión de $T(H_1)$, y así sucesivamente.

Por tanto, en ambos subcasos puede darse una inmersión en el VAP-plana de $T(G)$ pues las aristas que se añaden en cada etapa están en la cara exterior de la etapa anterior.

Con esto concluye la demostración del teorema. □

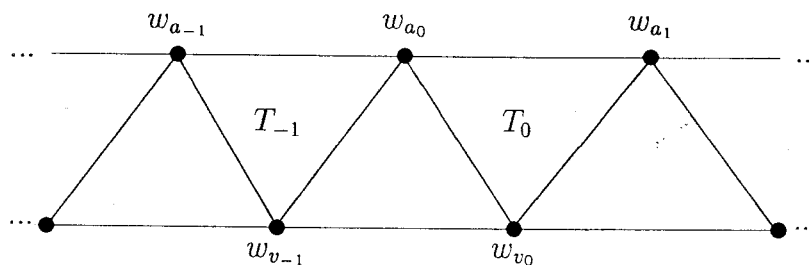


Figura 2.7:

2.1.5 Grafos con grafo total EAP-plano

Para dar una caracterización de los grafos cuyos grafos totales sean EAP-planos necesitamos caracterizar, previamente, los grafos cuyos grafos totales son recubridores, a partir del siguiente resultado.

Proposición 2.16. *Sea G un grafo infinito tal que $T(G)$ es VAP-plano. Entonces $T(G)$ es recubridor si y sólo si G contiene un subgrafo homeomorfo a O_3 y sólo tiene una componente conexa infinita.*

Demostración: Si G contiene un subgrafo homeomorfo a O_3 entonces $T(G)$ contiene un subgrafo homeomorfo a $P(K_{3,3})$. Además $T(G)$ es VAP-plano y sólo tiene una componente finita. Por el Teorema 2.4 se tiene que $T(G)$ es recubridor.

Recíprocamente, supongamos que G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a O_3 . Podemos suponer, sin pérdida de generalidad que G es conexo; de lo contrario aplicamos el razonamiento que sigue a cada componente conexa de G . Entonces, G contiene un 1-camino S tal que todas las componentes de $G - S$ son finitas y todos los vértices de S son puntos de corte en G . Como sólo una arista de cada componente de $G - S$ incide con dos aristas de S , se puede dar fácilmente una inmersión no recubridora de $T(G)$ en el plano a partir de una de $T(S)$, introduciendo los grafos totales de componentes de $G - S$ en caras finitas de la inmersión no recubridora de $T(S)$.

Para terminar la demostración, observemos que si G contiene un subgrafo homeomorfo a O_3 y tiene más de una componente conexa, $T(G)$ contiene un subgrafo homeomorfo a $P(K_{3,3}) \cup P_\omega$, con lo que no es EAP-plano y, por tanto, no es recubridor. \square

Como consecuencia inmediata de la Nota 2.5, del Teorema 2.14 y de la Proposición 2.16 se tiene la siguiente caracterización de los grafos cuyo grafo total es EAP-plano.

Teorema 2.17. *Sea G un grafo infinito. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $T(G)$ es EAP-plano.
2. $T(G)$ es VAP-plano y G tiene sólo una componente conexa infinita o bien G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a O_3 .
3. G no contiene ningún subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_2 + \overline{K_2}$, O_1 , O_2 ó $O_3 \cup P_\omega$

Para terminar esta sección, observemos que no existen grafos infinitos con $T^n(G)$ VAP-plano para $n \geq 2$ puesto que, de lo contrario, $M^n(G)$ también es VAP-plano al ser un subgrafo de $T^n(G)$, lo que contradice el Teorema 2.11.

2.2 Grafos infinitos no numerables

En el Capítulo 0 hemos visto la caracterización de los grafos finitos o numerables y localmente finitos con grafo de línea plano, dadas por Sedláček ([45]) y Greenwell y Hemminger ([25]), así como las de los grafos medios y totales, que aparecen referenciadas en la sección anterior. También, en dicho capítulo, aparecen las caracterizaciones de los grafos con grafo de línea, medio y total iterados planos (ver [1, 33]).

En esta sección vamos a dar unos resultados generales que caracterizan a los grafos infinitos no numerables con grafos de línea medio y total planos, de los que, los anteriores, son un caso particular. Asimismo daremos la caracterización de los grafos con grafos de línea medio y total iterados planos.

2.2.1 Caracterización de los grafos con grafo de línea plano

Para caracterizar los grafos con grafo de línea plano, sean finitos o no, usamos el siguiente resultado, publicado por Wagner en [53]:

Teorema 2.18. *Sea G un grafo. G es plano si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. *No contiene una subdivisión de K_5 ó $K_{3,3}$.*
2. *$|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.*
3. *No hay \aleph_1 vértices de valencia mayor o igual que 3.*

La caracterización de los grafos con grafo de línea plano viene dada por el siguiente resultado:

Teorema 2.19. *Sea G un grafo. $L(G)$ es plano si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. *No contiene una subdivisión de $K_{3,3}$, $K_1 + P_4$, $K_{1,5}$ ó $K_2 + \overline{K_3}$.*
2. *$|E(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.*
3. *No contiene $\aleph_1 K_{1,4}$, $\aleph_1 Y_2$ ó $\aleph_1(K_1 + (K_1 \cup K_2))$.*

Demostración: Por el Teorema 0.13, $L(G)$ contiene una subdivisión de K_5 ó $K_{3,3}$ si y sólo si G contiene una subdivisión de $K_{3,3}$, $K_1 + P_4$, $K_{1,5}$ ó $K_2 + \overline{K_3}$.

Por la definición de grafo de línea, $|V(L(G))| \leq 2^{\aleph_0}$ si y sólo si $|E(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.

Basta probar, pues, que $L(G)$ no tiene \aleph_1 vértices de valencia mayor o igual que 3 si y sólo si G no contiene $\aleph_1 K_{1,4}$, $\aleph_1 Y_2$ ó $\aleph_1(K_1 + (K_1 \cup K_2))$. Puesto que G no puede contener a $K_{1,5}$, $\Delta(G) \leq 4$.

La condición suficiente se tiene de forma evidente. Veamos la condición necesaria.

Por definición de grafo de línea, $L(G)$ tiene \aleph_1 vértices de valencia mayor o igual que 3 si y sólo si G tiene \aleph_1 aristas incidentes con al menos tres aristas. Como $\Delta(G) \leq 4$, las aristas de G son incidentes, a lo sumo, con seis aristas.

Diremos que dos aristas de un grafo están a distancia n si están en una misma componente conexa y el camino más corto que las une es de longitud n .



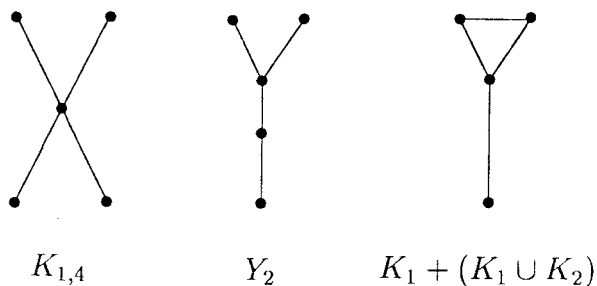


Figura 2.8:

Sea \mathcal{M} el subconjunto de $E(G)$ de todas las aristas incidentes con tres o más aristas. Si hay \aleph_1 aristas de \mathcal{M} en componentes conexas distintas, por cada una de dichas componentes se elige una arista de \mathcal{M} . Al ser incidente con tres o más, dicha arista debe formar parte de un $K_{1,4}$, $(K_1 + (K_1 \cup K_2))$ ó Y_2 , con lo que se tiene lo que queríamos.

Si la cantidad de aristas de \mathcal{M} en componentes conexas distintas es numerable, entonces ha de haber una componente conexa de G con \aleph_1 aristas de \mathcal{M} . Llamemos G' a dicha componente conexa y \mathcal{N} al conjunto de todas las aristas de \mathcal{M} que están en G' .

Sea \mathcal{N}' un subconjunto maximal de \mathcal{N} tal que toda arista de \mathcal{N}' está a distancia mayor que cuatro de otra arista de \mathcal{N} . Entonces \mathcal{N}' es no numerable. De lo contrario, el conjunto de las aristas de G' incidentes con las de \mathcal{N}' sería numerable también, puesto que $\Delta(G) \leq 4$. Por la misma razón, los conjuntos de las aristas de G' que están a distancia 2, 3 y 4 de las de \mathcal{N}' serían, respectivamente, numerables. Pero esto contradice el hecho de que \mathcal{N} sea no numerable, puesto que \mathcal{N} es la unión de \mathcal{N}' y los conjuntos citados anteriormente.

Por definición, las aristas incidentes con cualquiera de \mathcal{N}' son incidentes con otra, como máximo; luego cada arista de \mathcal{N}' debe formar parte de un $K_{1,4}$, $(K_1 + (K_1 \cup K_2))$ ó Y_2 . □

Basándonos en el Teorema 2.19, podemos caracterizar a los grafos con segundo grafo de línea plano mediante el siguiente resultado.

Teorema 2.20. *Sea G un grafo. $L^2(G)$ es plano si y sólo si verifica las siguientes*

condiciones:

1. G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,5}$, $K_{3,3}$ ó $K_1 + (2K_1 \cup K_2)$ y no tiene un subgrafo que sea una x -subdivisión de A , B ó C (ver Figura 12).
2. $|W(G)| \leq 2^{N_0}$, donde $W(G) = \{v \in V(G) / \delta(v) \geq 2\}$.
3. G no contiene $\aleph_1 K_{1,4}$, $\aleph_1 Y_2$ ó $\aleph_1(K_1 + (K_1 \cup K_2))$.

Demostración: Si G tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,5}$, $K_{3,3}$ ó $K_1 + (2K_1 \cup K_2)$, o bien tiene un subgrafo que sea una x -subdivisión de A , B ó C entonces $L^2(G)$ no es plano por el Teorema 0.15.

Si $|W(G)| > 2^{N_0}$ entonces $|V(L^2(G))| > 2^{N_0}$ con lo que $L^2(G)$ no es plano por el Teorema 2.18.

Si G contiene $\aleph_1 K_{1,4}$, $\aleph_1 Y_2$ ó $\aleph_1(K_1 + (K_1 \cup K_2))$ entonces $L^2(G)$ contiene, al menos, \aleph_1 vértices de valencia mayor o igual que 3 y, por el Teorema 2.18, no es plano.

Recíprocamente, supongamos que G verifica las condiciones 1., 2. y 3. Vamos a probar que, en este caso, $L(G)$ verifica las condiciones 1., 2. y 3. del Teorema 2.19 y, por tanto, $L^2(G)$ es plano.

Si G verifica 1. entonces, por el Teorema 0.15, $L(G)$ verifica 1. del Teorema 2.19.

Si $|W(G)| \leq 2^{N_0}$ entonces $|E(L(G))| \leq 2^{N_0}$ por definición de grafo de línea.

Por último, supongamos que $L(G)$ no verifica 3. del Teorema 2.19. Entonces $L(G)$ contiene \aleph_1 vértices de valencia, al menos, 3. Pero según vimos en la demostración del Teorema 2.19, esto implica que G contiene $\aleph_1 K_{1,4}$, $\aleph_1 Y_2$ ó $\aleph_1(K_1 + (K_1 \cup K_2))$ y, por consiguiente, G no verifica 3. □

La caracterización de los grafos con su tercer grafo de línea plano viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 2.21. *Sea G un grafo. $L^3(G)$ es plano si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_1 + (K_1 \cup K_2)$ ó $K_{3,3} - P_5$.

2. El cardinal del conjunto de componentes conexas que son ciclos o P_k , con $k \geq 4$ es, a lo sumo, 2^{\aleph_0} .
3. G no contiene $\aleph_1 Y_2$.

Demostración: Si G tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_1 + (K_1 \cup K_2)$ ó $K_{3,3} - P_5$ entonces $L^3(G)$ no es plano por el Teorema 0.15. Si G tiene más de 2^{\aleph_0} ciclos o caminos de 4 o más vértices entonces $L(G)$ contiene más de 2^{\aleph_0} vértices de valencia al menos dos, con lo que, por el Teorema 2.20, $L^3(G)$ no es plano. Si G contiene $\aleph_1 Y_2$ entonces $L(G)$ contiene $\aleph_1 K_1 + (K_1 \cup K_2)$ y, por el Teorema 2.20, $L^3(G)$ no es plano.

Recíprocamente, supongamos que G verifica las condiciones 1., 2. y 3. Vamos a probar que, en este caso, $L(G)$ verifica las condiciones 1., 2. y 3. del Teorema 2.20 y, por tanto, $L^3(G)$ es plano.

Si G verifica 1. entonces, por el Teorema 0.15, $L(G)$ verifica 1. del Teorema 2.20. Si G verifica 2. entonces, por definición de grafo de línea, el cardinal del conjunto de vértices de valencia 2 ó 3 de $L(G)$ es, a lo más, 2^{\aleph_0} .

Supongamos, por último, que $L(G)$ no verifica 3. del Teorema 2.20. Entonces $L(G)$ contiene \aleph_1 vértices de valencia, al menos, 3. Por la demostración del Teorema 2.19 y la condición 1. se tiene que G contiene $\aleph_1 Y_2$ con lo que G no verifica 3. \square

Por último, vamos a dar la caracterización de los grafos cuyo n -ésimo grafo de línea es plano, para $n \geq 4$.

Teorema 2.22. *Sea G un grafo. $L^n(G)$ es plano, con $n \geq 4$, si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_1 + (K_1 \cup K_2)$ ó Y_2 .
2. El cardinal del conjunto de componentes conexas que son ciclos o P_k , con $k \geq n + 2$, es, a lo sumo, 2^{\aleph_0} .

Demostración: Si G tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_1 + (K_1 \cup K_2)$ ó Y_2 entonces $L^n(G)$ no es plano para $n \geq 4$ por el Teorema 0.15. Si G tiene más de 2^{\aleph_0} ciclos o caminos de $n + 2$ o más vértices entonces $L^{n-3}(G)$ contiene más de 2^{\aleph_0} ciclos

o caminos de 4 o más vértices, con lo que, por el Teorema 2.21, $L^n(G)$ no es plano para $n \geq 4$.

Recíprocamente, si G verifica la condición 1. entonces $L^{n-3}(G)$ verifica la condición 1. del Teorema 2.21 y, por el Teorema 0.15, también la condición 3. del Teorema 2.21. Asimismo, si G verifica 2. entonces, por definición de grafo de línea, el cardinal del conjunto de componentes conexas de $L^{n-3}(G)$ que son ciclos o caminos con al menos 4 vértices es, a lo más, 2^{\aleph_0} . Por tanto, si G verifica las condiciones 1. y 2. entonces, por el Teorema 2.21, $L^n(G)$ es plano para $n \geq 4$. \square

Nota 2.23. De la caracterización dada en el Teorema 2.19 se deduce que existen grafos no planos cuyo grafo de línea sí lo es, e.g. $G = 2^{\aleph_0} K_1$. Téngase en cuenta que para grafos numerables y localmente finitos si el grafo de línea es plano entonces el grafo también lo es puesto que $L(K_5)$ y $L(K_{3,3})$ no son planos.

Asimismo, podemos dar grafos no planos cuyo grafo de línea n -ésimo sí lo es, e.g. $G_n = 2^{\aleph_0} P_n$. La relación que se verifica es la siguiente: si $L^n(G)$ es plano, entonces lo es $L^m(G)$, para $m \geq n \geq 4$.

2.2.2 Caracterización de los grafos con grafo medio plano

De nuevo nos basamos en el Teorema 2.18 para obtener la siguiente caracterización.

Teorema 2.24. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $M(G)$ es plano.
2. G es plano, $\Delta(G) \leq 3$ y, a lo más, hay una cantidad numerable de vértices de valencia 2.
3. G no contiene como menores topológicos a $K_{3,3}$ ó $K_{1,4}$, G no contiene $\aleph_1 K_{1,2}$ y $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.

Demostración: Veamos que las condiciones 2. y 3. son equivalentes. Por los Teoremas 0.27 y 2.18 se tiene que G es plano y $\Delta(G) \leq 3$ si y sólo si G no contiene como menores topológicos a $K_{3,3}$ ó $K_{1,4}$ y $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$. Además, se tiene trivialmente



que G tiene a lo más una cantidad numerable de vértices de valencia 2 si y sólo si G no contiene $\aleph_1 K_{1,2}$.

Veamos que la condición 1. implica la condición 3. Si G contiene a $K_{3,3}$ ó $K_{1,4}$ como menor topológico, por el Teorema 0.27 $M(G)$ no es plano. Si G contiene $\aleph_1 K_{1,2}$ entonces $M(G)$ contiene \aleph_1 vértices de valencia, al menos, 3 y por el Teorema 2.18 $M(G)$ no es plano. Por último, puesto que todo vértice de G lo es también de $M(G)$, si $|V(G)| > 2^{\aleph_0}$ entonces $|V(M(G))| > 2^{\aleph_0}$ y por el Teorema 2.18 $M(G)$ no es plano.

Para terminar la demostración veamos que la condición 2. implica la condición 1. De las hipótesis deducimos que G tiene, a lo más, \aleph_0 componentes con vértices de valencia 2 ó 3 y 2^{\aleph_0} componentes isomorfas a K_1 ó K_2 . El grafo medio de la unión de éstas últimas es plano por el Teorema 2.18 y el de las anteriores también (por el Teorema 0.26). \square

Veamos ahora la caracterización de los grafos cuyo segundo grafo medio es plano.

Teorema 2.25. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $M^2(G)$ es plano.
2. G es plano, las componentes de G son $K_{1,2}$, K_2 ó K_1 y hay a lo más una cantidad numerable de aristas.
3. G no contiene a P_4 , $K_{1,3}$, K_3 ó $\aleph_1 K_2$ y $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.

Demostración: Las condiciones 2. y 3. son equivalentes usando los Teoremas 0.27 y 2.18. Si G contiene a P_4 , $K_{1,3}$ ó K_3 entonces $M^2(G)$ no es plano por el Teorema 0.27. Si G contiene $\aleph_1 K_2$, entonces $M(G)$ contiene $\aleph_1 K_{1,2}$ y, por el Teorema 2.24, $M^2(G)$ no es plano. Puesto que $|V(G)| \leq |V(M(G))|$, si $|V(G)| > 2^{\aleph_0}$, por el Teorema 2.24 $M^2(G)$ no es plano. Esto demuestra que la condición 1. implica la condición 3.

Para terminar la demostración, veamos que la condición 2. implica la condición 1. Si G verifica 2. entonces $M(G)$ tiene, a lo más, una cantidad numerable de vértices de valencia 3 y $|V(M(G))| \leq 2^{\aleph_0}$, por tanto es plano; además $\Delta(M(G)) \leq 3$ y tiene, a lo más, una cantidad numerable de vértices de valencia 2, con lo que, por el Teorema 2.24 $M^2(G)$ es plano. \square

La caracterización de los grafos cuyo tercer grafo medio es plano se basa en el Teorema 2.25.

Teorema 2.26. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $M^3(G)$ es plano.
2. G es plano, las componentes de G son K_2 ó K_1 y hay a lo más una cantidad numerable de aristas.
3. G no contiene a $K_{1,2}$ ó $\aleph_1 K_2$ y $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.

Demostración: Las condiciones 2. y 3. son equivalentes usando los Teoremas 0.27 y 2.18. Si G contiene a $K_{1,2}$ entonces $M^3(G)$ no es plano por el Teorema 0.27. Si G contiene $\aleph_1 K_2$, entonces $M(G)$ contiene también $\aleph_1 K_2$ y, por el Teorema 2.25, $M^3(G)$ no es plano. Puesto que $|V(G)| \leq |V(M(G))|$, si $|V(G)| > 2^{\aleph_0}$, por el Teorema 2.25 $M^3(G)$ no es plano. Esto demuestra que la condición 1. implica la condición 3.

Para terminar la demostración, veamos que la condición 2. implica la condición 1. Si G verifica 2. entonces $M(G)$ tiene, a lo más, una cantidad numerable de aristas, las componentes de $M(G)$ son $K_{1,2}$, K_2 ó K_1 y $M(G)$ es plano, con lo que, por el Teorema 2.25 $M^3(G)$ es plano. \square

Para terminar esta sección, vamos a caracterizar los grafos cuyo n -ésimo grafo medio es plano, para $n \geq 4$.

Teorema 2.27. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $M^n(G)$ es plano, para todo $n \geq 4$.
2. G es plano y no tiene aristas.
3. G no contiene a K_2 y $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.

Demostración: Se obtiene de forma análoga a las anteriores a partir de los Teoremas 2.26, 0.27 y 2.18. \square

2.2.3 Caracterización de los grafos con grafo total plano

Al igual que hicimos en el apartado anterior, y basándonos en el Teorema 2.18, obtenemos la siguiente caracterización de los grafos con grafo total plano.

Teorema 2.28. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $T(G)$ es plano.
2. G es plano, $\Delta(G) \leq 3$, todo vértice de valencia 3 es punto de corte y, a lo más, hay una cantidad numerable de vértices de valencia 2.
3. No contiene como menores topológicos a $K_2 + \overline{K_2}$ ó $K_{1,4}$, no contiene $\aleph_1 K_{1,2}$ y $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.

Demostración: Veamos que las condiciones 2. y 3. son equivalentes. Por los Teoremas 0.23 y 2.18 se tiene que G es plano, $\Delta(G) \leq 3$ y v es punto de corte para todo $v \in V(G)$ tal que $\delta(v) = 3$ si y sólo si G no contiene como menores topológicos a $K_2 + \overline{K_2}$ ó $K_{1,4}$ y $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$. Además, se tiene trivialmente que G tiene a lo más una cantidad numerable de vértices de valencia 2 si y sólo si G no contiene $\aleph_1 K_{1,2}$.

Veamos que la condición 1. implica la condición 3. Si G contiene a $K_2 + \overline{K_2}$ ó $K_{1,4}$ como menor topológico, por el Teorema 0.23 $T(G)$ no es plano. Si G contiene $\aleph_1 K_{1,2}$ entonces $T(G)$ contiene \aleph_1 vértices de valencia, al menos, 3 y por el Teorema 2.18 $T(G)$ no es plano. Por último, puesto que todo vértice de G lo es también de $T(G)$, si $|V(G)| > 2^{\aleph_0}$ entonces $|V(T(G))| > 2^{\aleph_0}$ y por el Teorema 2.18 $T(G)$ no es plano.

Para terminar la demostración veamos que la condición 2. implica la condición 1. De las hipótesis deducimos que G tiene, a lo más, \aleph_0 componentes con vértices de valencia 2 ó 3 y 2^{\aleph_0} componentes isomorfas a K_1 ó K_2 . El grafo medio de la unión de éstas últimas es plano por el Teorema 2.18 y el de las anteriores también (por el Teorema 0.22). \square

Teorema 2.29. *Sea G un grafo. $T^n(G)$ es plano si y sólo si $M^{n+1}(G)$ es plano, para todo $n \geq 2$.*

Demostración: Vamos a distinguir dos casos.

Caso $n = 2$. En primer lugar vamos a probar que si $T^2(G)$ es plano entonces G verifica la condición 3. del Teorema 2.26. Si G contiene a $K_{1,2}$, entonces $T^2(G)$ no es plano por el Teorema 0.24. Si G contiene $\aleph_1 K_2$ entonces $T(G)$ contiene $\aleph_1 K_{1,2}$ y, por el Teorema 2.28 $T^2(G)$ no es plano. Si $|V(G)| > 2^{\aleph_0}$, puesto

que todo vértice de G lo es también de $T(G)$, $T(G)$ no es plano y, por el Teorema 2.28, tampoco lo es $T^2(G)$.

Para terminar este caso, veamos que si G verifica la condición 2. del Teorema 2.26, entonces $T^2(G)$ es plano. Si las componentes de G son K_2 ó K_1 y hay, a lo más, una cantidad numerable de aristas, entonces $\Delta(T(G)) \leq 3$, todo vértice de valencia 3 es punto de corte y hay, a lo más, una cantidad numerable de vértices de valencia 2 ó 3. Además, si G es plano, entonces $|V(T(G))| \leq 2^{\aleph_0}$. Por el Teorema 2.28 se tiene que $T^2(G)$ es plano.

Caso $n \geq 3$. Veamos en primer lugar que si $T^n(G)$ es plano para $n \geq 3$ entonces G verifica la condición 3. del Teorema 2.27. Si G contiene a K_2 entonces $T(G)$ contiene a $K_{1,2}$ y, por el caso anterior, $T^n(G)$ no es plano. Si $|V(G)| > 2^{\aleph_0}$ entonces $T(G)$ no es plano, y por el caso anterior, tampoco lo es $T^n(G)$.

Por último, veamos que si G verifica la condición 2. del Teorema 2.27 entonces $T^n(G)$ es plano para $n \geq 3$. Si G es plano y no tiene aristas, entonces $T^n(G)$ es un grafo sin aristas y con 2^{\aleph_0} vértices a lo sumo. Por tanto, por el Teorema 2.18, $T^n(G)$ es plano. \square

Nota 2.30. En el caso de grafos medios y totales se verifican las siguientes relaciones: si $M^n(G)$ es plano entonces $M^m(G)$ es plano, para $m = 0, \dots, n$ y si $T^n(G)$ es plano entonces $T^m(G)$ es plano, para $m = 0, \dots, n$.

2.3 Problemas abiertos

En el caso de grafos infinitos numerables queda abierta caracterizar a los grafos cuyos grafo de línea, medio y total sean p-periplanos y p-periplanos generalizados, así como sus iterados correspondientes.

Para grafos infinitos no numerables, queda abierta la caracterización de los grafos con grafo de línea, medio y total periplanos, y periplanos generalizados, así como sus iterados correspondientes.

Parte II

El Plano Proyectivo

Capítulo 3

Inmersiones en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$

En el Capítulo 0 hemos visto que diversos autores han estudiado las condiciones que un grafo debe cumplir para que su grafo de línea, medio y total sean planos, periplanos y periplanos generalizados. La misma cuestión se plantea y resuelve para los iterados correspondientes. Es natural tratar de generalizar el problema a otras superficies. En este sentido la superficie compacta sin borde más simple después de la esfera es el plano proyectivo ($\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$) y, además del plano (o la esfera), es la única que posee un Teorema de Kuratowski conocido, es decir, una lista de subgrafos prohibidos para que un grafo pueda dibujarse en ella (ver [3, 4, 24]).

En este capítulo vamos a caracterizar los grafos cuyo grafo de línea, medio y total admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Asimismo, generalizaremos el concepto de periplanaridad (hablaremos de periproyectividad) y caracterizaremos los grafos cuyos grafos de línea medio y total sean periproyectivos.

3.1 Introducción

Una vez estudiado el problema de la planaridad de un grafo, esto es, dado un grafo ver si se puede dibujar en el plano de forma que dos aristas no se crucen excepto en un vértice, y resuelto por Kuratowski [34], surge de manera natural el extender dicho problema a otras superficies. Así, Erdős conjeturó en los años 30 que la lista de subgrafos prohibidos en cualquier superficie es finita (ver [52]), es decir,



que cada superficie tiene un Teorema de Kuratowski propio. Glover y Huneke [23] demostraron dicha conjetura para el plano proyectivo, Archdeacon y Huneke [6] para cualquier superficie no orientable y finalmente, Robertson y Seymour [40, 39] para cualquier superficie orientable.

Archdeacon, Glover, Huneke y Wang [3, 4, 24] dan explícitamente las listas de subgrafos y menores prohibidos para el plano proyectivo. La lista de subgrafos prohibidos contiene 103 elementos, y la de menores, 35.

Diremos que un grafo es proyectivo si admite una inmersión en el plano proyectivo, esto es, si podemos dibujarlo en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de forma que dos aristas no se crucen, salvo en un vértice.

La caracterización de los grafos proyectivos en función de menores prohibidos viene dada por el siguiente resultado [3, 4, 24].

Teorema 3.1. *Un grafo es proyectivo si y sólo si no contiene como menor a ningún grafo de la Figura 3.1 (donde los puntos de aristas opuestos se identifican).*

Una vez visto que disponemos de un Teorema de Kuratowski en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ vamos a caracterizar los grafos con grafo de línea, medio y total proyectivo, como generalización natural del problema análogo en el plano.

3.2 Grafos de línea proyectivos

Sedláček caracterizó en [45] los grafos con grafo de línea plano mediante el siguiente resultado:

Teorema 3.2. *Un grafo tiene grafo de línea plano si y sólo si es plano, la valencia máxima de un vértice es a lo más 4 y si un vértice tiene valencia 4, entonces es un punto de corte.*

Greenwell y Hemminger dieron en [25] la caracterización de los grafos con grafo de línea plano en términos de subgrafos prohibidos:

Teorema 3.3. *Un grafo tiene grafo de línea plano si y sólo si no contiene como subgrafo una subdivisión de $K_{3,3}$, $K_1 + P_4$, $K_{1,5}$ ó $K_2 + \overline{K_3}$ (ver Figura 11).*

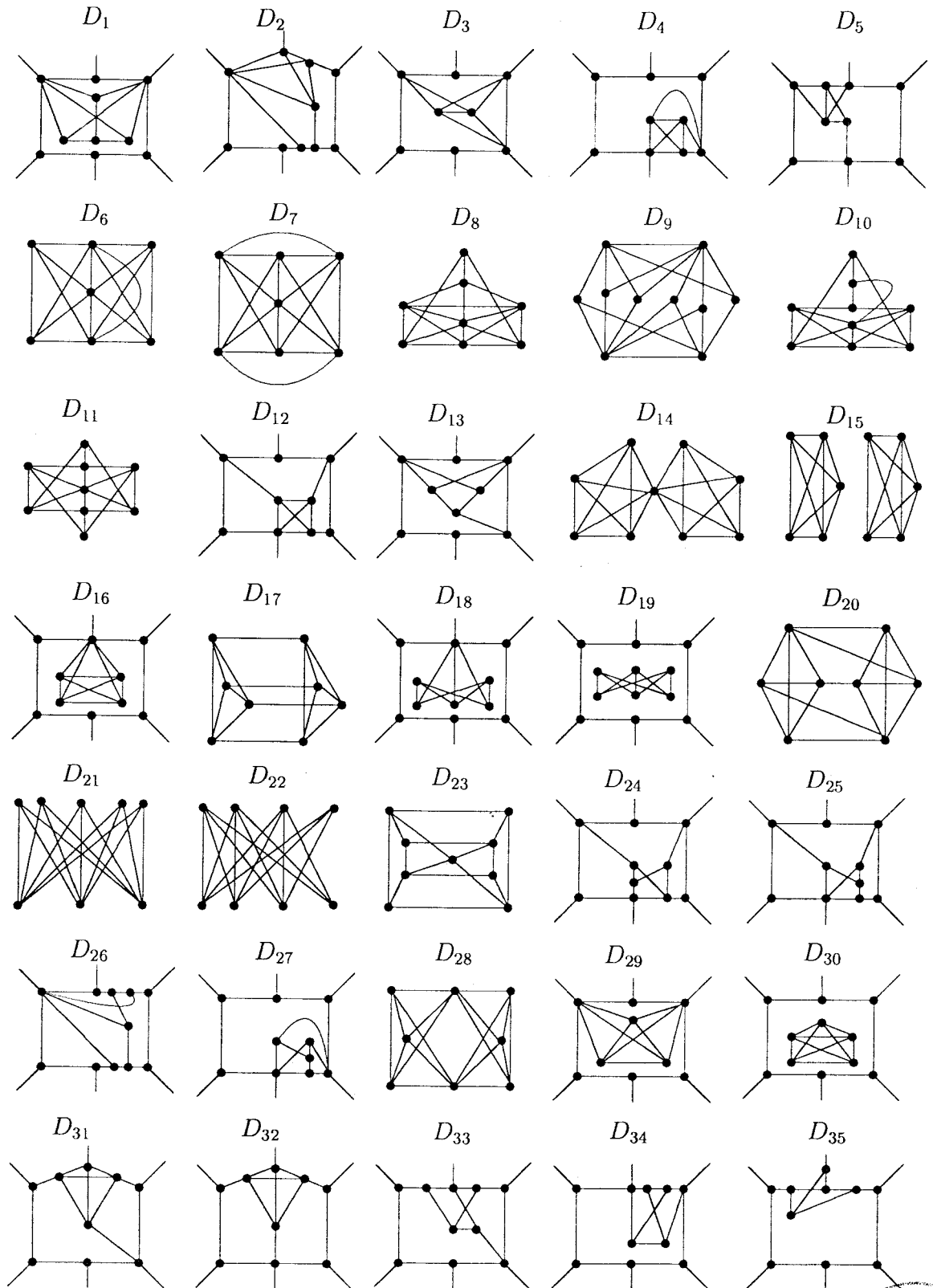


Figura 3.1: Los 35 menores prohibidos para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.



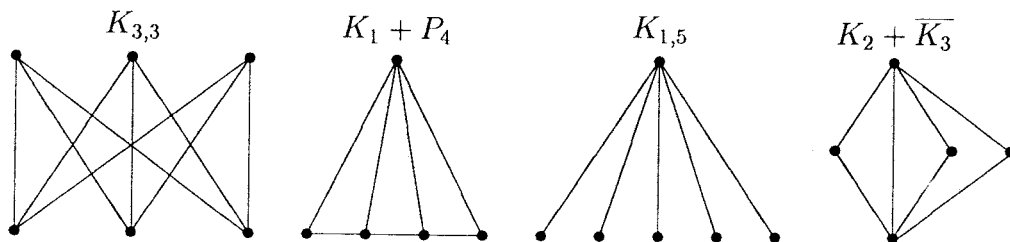


Figura 3.2: Los grafos prohibidos para grafos de línea planos.

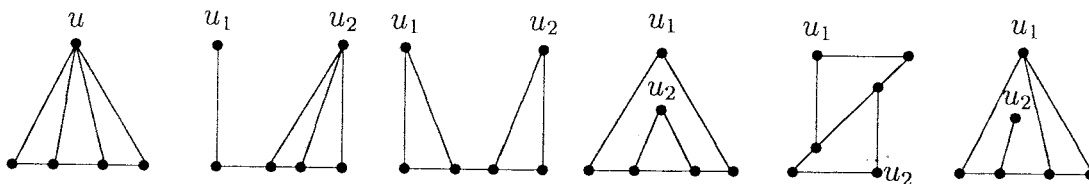


Figura 3.3: Todas las formas posibles de cortar el vértice u .

La demostración de ambas caracterizaciones se apoya en el Teorema de Kuratowski para el plano. En una línea análoga, y usando la caracterización de los grafos proyectivos que nos dan Archdeacon, Glover, Huneke y Wang [3, 4, 24] en términos de menores prohibidos vamos a extender los resultados de Sedláček y Greenwell y Hemminger a $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

La caracterización que vamos a obtener de los grafos con grafo de línea proyectivo es en términos de subgrafos prohibidos. Para que la lista de tales subgrafos sea lo menos numerosa posible (recordemos que los subgrafos prohibidos para inmersiones en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ son 103) vamos a definir una nueva relación de orden parcial.

Sea H un grafo y $v \in V(H)$ de valencia mayor o igual que dos. Construyamos un nuevo grafo H' a partir de H de la forma siguiente: reemplazamos v por dos nuevos vértices u y w y conectamos algunas de las aristas incidentes con v en H a u en H' y el resto a w , de tal forma que tanto u como w reciban alguna arista. Diremos que el grafo H' así construido se ha obtenido de H cortando el vértice v . En la Figura 3.3 podemos ver un ejemplo.

Sean G y G' dos grafos. Decimos que G' es un *Menor Topológico Cortable* de G ($G' \ll G$) si G' se obtiene a partir de G mediante una secuencia de borrados de

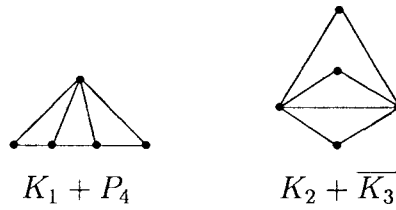


Figura 3.4: Los grafos $K_1 + P_4$ y $K_2 + \overline{K_3}$.

aristas o vértices, contracciones de aristas incidentes con un vértice de valencia dos, o cortes de vértices.

La relación “ \ll ” que acabamos de definir es un orden parcial. Además se verifica la siguiente propiedad.

Proposición 3.4. *Si G' es un MTC de G entonces $L(G')$ es un menor de $L(G)$.*

Demostración: Si G' es subgrafo de G entonces $L(G')$ es subgrafo de $L(G)$. Supongamos que G' resulta de contraer en G la arista $x_1 = \{u, v\}$ donde $\delta(v) = 2$. Sea $x_2 = \{v, w\}$ la otra arista incidente con v . Sean y_1, \dots, y_n las aristas distintas de x_1 incidentes con u en G . Al contraer la arista x_1 , en G' las aristas y_1, \dots, y_n son incidentes con v con lo que $L(G') = L(G)/\{x_1, x_2\}$.

Finalmente, cortar un vértice de G es equivalente a borrar algunas aristas de $L(G)$, con lo que $L(G')$ sería subgrafo de $L(G)$. □

El resultado anterior justifica que esta relación de orden es adecuada para encontrar la caracterización que pretendemos ya que si G' es un MTC de G y $L(G')$ no es proyectivo, entonces $L(G)$ tampoco lo es.

A continuación vamos a enunciar y demostrar algunos resultados previos a la presentación del teorema principal de esta sección.

Lema 3.5. *Sea G un grafo. Si $L(G)$ es proyectivo entonces $\Delta(G) \leq 6$.*

Demostración: En otro caso, $L(G)$ contiene a K_7 que no es proyectivo (ver Figura 3.1). □



Lema 3.6. *Sea G_1 y G_2 dos grafos tales que $L(G_1)$ y $L(G_2)$ no son planos. Entonces $L(G_1 \cup G_2)$ no es proyectivo.*

Demostración: Si $L(G_i)$ no es plano para $i = 1, 2$, contiene una subdivisión de K_5 ó $K_{3,3}$. Entonces D_{15} , D_{30} ó D_{19} es un menor de $L(G_1 \cup G_2)$. \square

Lema 3.7. *Sea G un grafo cuyo grafo de línea es proyectivo. Entonces G tiene, a lo más, un vértice de valencia 5.*

Demostración: De lo contrario, D_{14} ó D_{15} sería un menor de $L(G)$. \square

En la prueba que Greenwell y Hemminger dan de su caracterización de los grafos con grafo de línea plano en términos de subgrafos prohibidos [25] enuncian y demuestran el siguiente lema:

Lema 3.8. *Si un grafo tiene un vértice de valencia cuatro que no es punto de corte entonces contiene un subgrafo homeomorfo a $K_1 + P_4$ o a $K_2 + \overline{K_3}$ (ver Figura 3.4).*

Continuamos ahora con otra serie de resultados previos a la caracterización de los grafos con grafo de línea proyectivo.

Lema 3.9. *Sea G un grafo cuyo grafo de línea es plano y sea v un vértice de G de valencia 3. Sean x_1 , x_2 y x_3 las aristas de G incidentes con v . Entonces existe una inmersión plana de $L(G)$ que tiene a x_1 , x_2 y x_3 en una misma cara.*

Demostración: Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que G es conexo. Consideremos, en primer lugar, que $G - v$ es conexo. En este caso toda inmersión plana de $L(G)$ tiene a x_1 , x_2 y x_3 en una misma cara.

Sea Γ una inmersión plana de $L(G)$. Si x_1 , x_2 y x_3 no estuvieran en la misma cara en Γ , entonces se tiene la situación que muestra la Figura 3.5, con y , z elementos de $L(G)$ distintos de x_i , $i = 1, 2, 3$.

Puesto que $G - v$ es conexo, existe un camino entre y y z en $L(G)$ que no contiene a x_1 , x_2 ni a x_3 , pero este camino tiene que atravesar el triángulo de vértices $\{x_1, x_2, x_3\}$ por un cierto punto, con lo que Γ no es una inmersión.

Si $G - v$ no es conexo, sea G_1 la componente conexa de $G - v$ incidente con un solo x_i (e.g. x_1) y $G_2 = (G - v) - G_1$. $L(G_1)$ y $L(G_2)$ son planos al serlo $L(G)$.

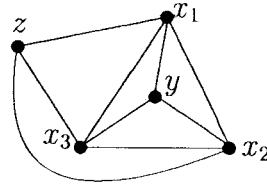


Figura 3.5: Situación planteada con x_1, x_2 y x_3 en distintas caras.

Además, podemos dar fácilmente una inmersión de $L(G_1)$ en el plano con x_1 en la cara exterior y otra de $L(G_2)$ con x_2 y x_3 también en la cara exterior. A partir de estas inmersiones podemos construir una de $L(G)$ en la que el triángulo de vértices $\{x_1, x_2, x_3\}$ es una cara, tal como muestra la Figura 3.6. \square

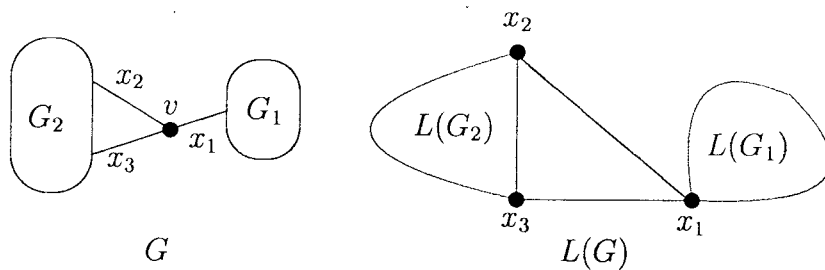


Figura 3.6: Inmersión de $L(G)$ en el plano con x_1, x_2 y x_3 en una cara

Lema 3.10. *Sea G un grafo tal que $L(G)$ no es proyectivo y minimal para el orden “ \ll ” (es decir, no existe otro grafo G' distinto de G tal que $G' \ll G$ y $L(G')$ no proyectivo). Sea v un vértice de G con $\delta(v) = 4$ y v es punto de corte. Entonces v es adyacente a una hoja.*

Demostración: Puesto que v es punto de corte existen G_1 y G_2 subgrafos de G tales que $G_1 \cap G_2 = \{v\}$ y $G_1 \cup G_2 = G$.

Si $L(G_i)$ es plano para $i = 1, 2$ entonces $L(G)$ es plano y, por tanto, proyectivo.

Si $L(G_i)$ no es plano para $i = 1, 2$ entonces consideremos el grafo G' que resulta de cortar v en G de la forma siguiente: sean u y w los nuevos vértices añadidos. Unimos al vértice u las aristas incidentes con v en G_1 y a w las aristas incidentes con v en G_2 .

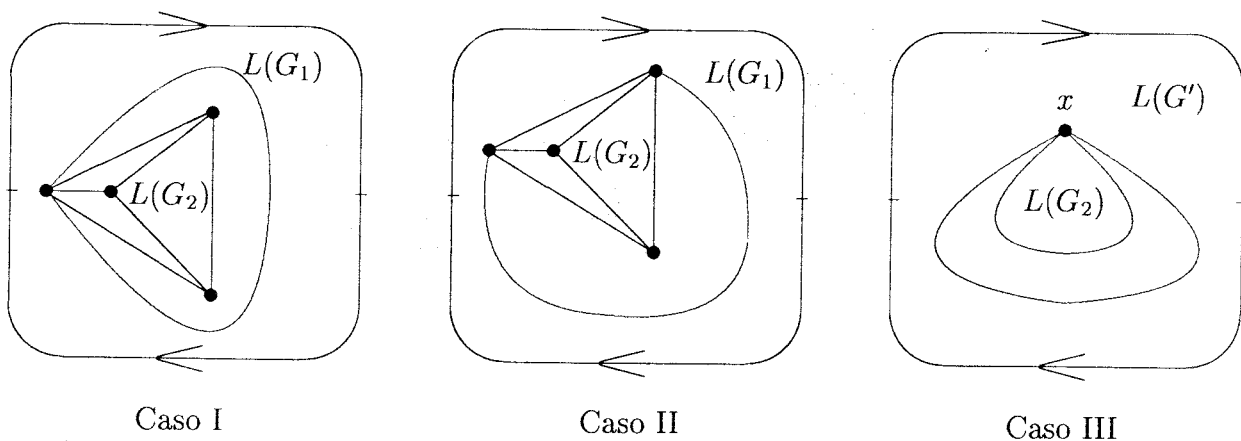


Figura 3.7: Distintas inmersiones de $L(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$.

Por construcción, $G' \ll G$ y $L(G')$ no es proyectivo por el Lema 3.6. Esto contradice la minimalidad de G .

Por tanto $L(G_1)$ no es plano y $L(G_2)$ sí lo es o viceversa. Supongamos, sin pérdida de generalidad, lo primero.

Si $\delta(v) = 1$ en G_1 y $\delta(v) = 3$ en G_2 , entonces podemos construir una inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ tal como muestra el Caso I de la Figura 3.7.

Si $\delta(v) = 2$ en G_1 y G_2 entonces $L(G)$ también es proyectivo (Figura 3.7, Caso II).

Si $\delta(v) = 3$ en G_1 y $\delta(v) = 1$ en G_2 , sea x la arista de G_2 incidente con v y supongamos que $G_2 \neq x$. Sea $G' = G_1 \cup \{x\}$. Por construcción $G' \ll G$. Si $L(G')$ es proyectivo entonces se puede construir una inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ a partir de una de $L(G')$ tal como muestra el Caso III de la Figura 3.7. Por tanto $L(G')$ no es proyectivo, pero esto contradice la minimalidad de G . \square

Nota 3.11. Posteriormente veremos que no existe ningún grafo en las condiciones del Lema 3.10.

Lema 3.12. Sea G un grafo finito. Si $L(G)$ es proyectivo, entonces G es proyectivo. Además, si $\Delta(G) \leq 3$ se tiene que G es proyectivo si y sólo si $L(G)$ es proyectivo.

Demostración: Supongamos que G no es proyectivo. Entonces G contiene como subgrafo una subdivisión de uno de los 103 grafos prohibidos para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ [3, 4, 24]. Por la Proposición 3.4, el grafo de línea de dicho subgrafo ha de ser un menor de $L(G)$. Sin embargo, podemos comprobar que ninguno de los 103 grafos prohibidos para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ tiene grafo de línea proyectivo, con lo que $L(G)$ tampoco lo es.

Supongamos que $\Delta(G) \leq 3$ y que G admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Puesto que la valencia máxima de un vértice es 3, dos aristas incidentes siempre comparten cara, por lo que, a partir de la inmersión de G en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, podemos construir una inmersión de $L(G)$ dibujando un punto en el interior de cada arista, uniendo los puntos dibujados en aristas incidentes a través de la cara que comparten y, por último, borrando los vértices de G . Por tanto, $L(G)$ es proyectivo. \square

Nota 3.13. *Posteriormente, en la Sección 4.3, veremos que si $L(G)$ admite una inmersión en una superficie, entonces G también.*

3.2.1 Grafos con grafo de línea proyectivo

A continuación, enunciaremos y demostramos el teorema principal de esta sección, que nos da una caracterización de los grafos cuyo grafo de línea admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ a partir de una lista de menores topológicos cortables prohibidos. Al final de la sección probaremos que la lista \mathcal{H} de grafos prohibidos es mínima, es decir, que cualquier grafo que sea un menor topológico cortable de alguno de los de la lista \mathcal{H} tiene grafo de línea proyectivo.

Teorema 3.14. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $L(G)$ es proyectivo.
2. Ningún grafo $H \in \mathcal{H}$ es un MTC de G , donde \mathcal{H} es la lista de grafos dada en la Figura 3.8

Demostración: Demostremos, en primer lugar que la primera condición implica la segunda. Por la Proposición 3.4 basta probar que $L(H)$ no es proyectivo para ningún $H \in \mathcal{H}$. Haremos referencia a los menores prohibidos para que un grafo sea proyectivo usando la notación que aparece en la Figura 3.1.



$L(H_1)$ no es proyectivo por el Lema 3.5. $L(H_i)$, con $i = 11, \dots, 20$ no es proyectivo por el Lema 3.6. $L(H_{10})$ no es proyectivo por el Lema 3.7.

Para los restantes, se puede comprobar que D_6 es un menor de $L(H_2)$ y $L(H_9)$; D_{17} es un menor de $L(H_3)$, $L(H_{22})$, $L(H_{23})$, $L(H_{30})$, $L(H_{31})$, $L(H_{32})$, $L(H_{38})$ y $L(H_{47})$; D_{28} de $L(H_4)$, $L(H_{21})$, $L(H_{24})$, $L(H_{25})$, $L(H_{26})$, $L(H_{27})$ y $L(H_{52})$; D_4 es un menor de $L(H_5)$, $L(H_6)$, $L(H_8)$, $L(H_{39})$, $L(H_{41})$, $L(H_{48})$ y $L(H_{49})$; D_{20} es un menor de $L(H_7)$, $L(H_{29})$, $L(H_{42})$, $L(H_{43})$, $L(H_{44})$, $L(H_{45})$, $L(H_{46})$ y $L(H_{51})$; D_{34} es un menor de $L(H_{33})$, $L(H_{34})$, $L(H_{40})$ y $L(H_{50})$; D_{22} es un menor de $L(H_{28})$; D_5 es un menor de $L(H_{35})$ y $L(H_{36})$; D_{35} es un menor de $L(H_{37})$ y D_{32} es un menor de $L(H_{53})$. Con ello concluimos en que ningún grafo de \mathcal{H} tiene grafo de línea proyectivo.

Demostremos ahora que la segunda condición implica la primera. Sea G un grafo tal que su grafo de línea no es proyectivo. Vamos a probar que, en este caso, existe algún $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \ll G$. Distinguimos varios casos:

Caso I. $\Delta(G) \geq 7$. En este caso $H_1 \ll G$.

Caso II. $\Delta(G) = 6$. Por el Lema 3.7 G sólo contiene un vértice de valencia 6. Sea, pues, v dicho vértice.

Si hubiera un bloque en G que contuviera 4 aristas incidentes con v entonces, aplicando el Lema 3.8, tendríamos que H_2 ó H_3 serían MTC de G , pues v tendría valencia 4 en dicho bloque y no sería punto de corte.

Si hubiera dos bloques en G tales que cada uno tuviera 3 aristas incidentes con v entonces $H_{28} \ll G$.

Por tanto, el grafo G ha de tener la forma que muestra la Figura 3.9, donde los G_i , con $i = 1, 2, 3$, pueden no ser conexos.

Si $L(G_i)$ es plano para $i = 1, 2, 3$, podemos dar una inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, ya que por el Lema 3.9 podemos dar una inmersión plana de G_1 con x_1, x_2 y x_3 en una misma cara. La inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ puede verse en la Figura 3.10.

Por tanto, $L(G_i)$ no es plano para algún $i \in \{1, 2, 3\}$. Pero aplicando la caracterización de grafos con grafo de línea plano obtenida por Greenwell y Hemminger (Teorema 3.3), dicho G_i ha de contener un subgrafo homeomorfo a $K_1 + P_4$, $K_2 + \overline{K_3}$, $K_{1,5}$ ó $K_{3,3}$. Sea G' dicho subgrafo. Entonces $v \in G'$ pues, de lo contrario G contendría como MTC a H_{11} , H_{12} , H_{13} ó H_{14} . Pero en este caso, si G' es homeomorfo a $K_1 + P_4$ entonces G contiene como MTC a H_7 , H_8 , ó H_9 .

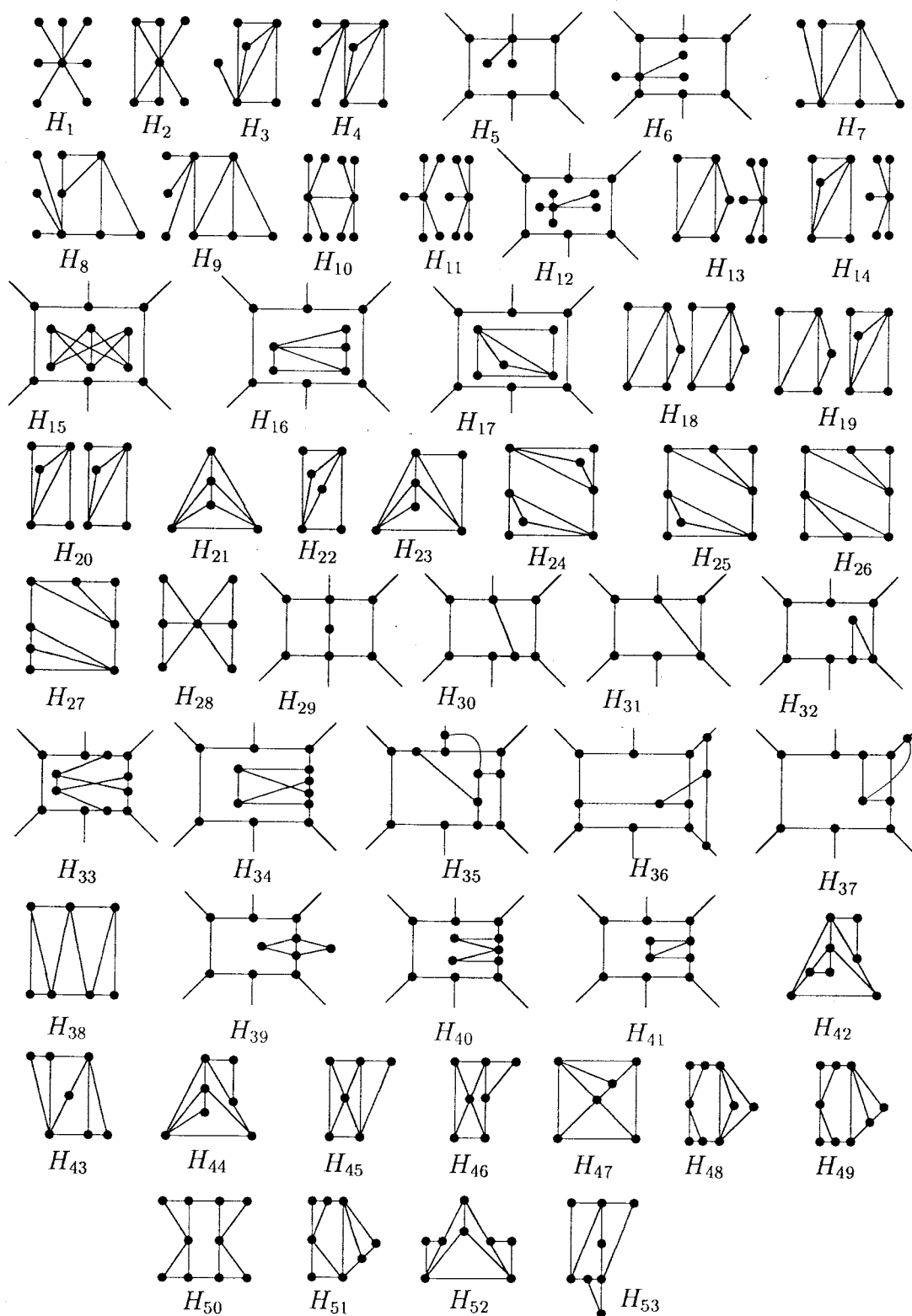


Figura 3.8: Lista \mathcal{H} de MTC prohibidos.

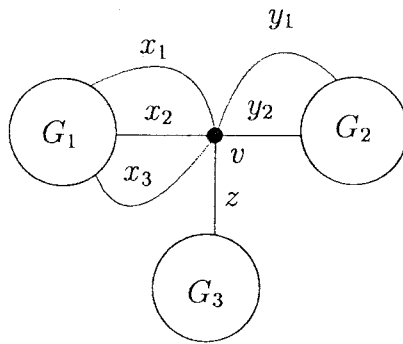


Figura 3.9: Forma del grafo G cuando $\Delta(G) = 6$.

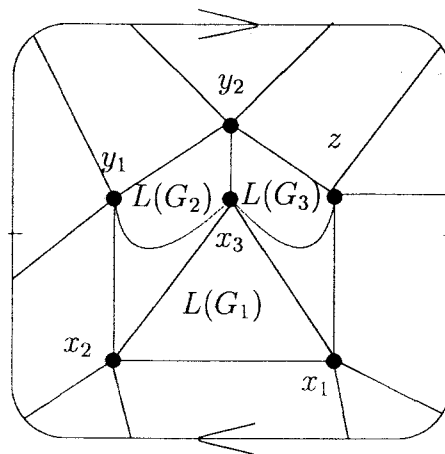


Figura 3.10: Inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Si G' es homeomorfo a $K_2 + \overline{K_3}$ entonces $H_4 \ll G$.

Si G' es homeomorfo a $K_{1,5}$ entonces $H_{10} \ll G$.

Por último, si G' es homeomorfo a $K_{3,3}$ entonces G contiene como MTC a H_5 ó H_6 .

Caso III. $\Delta(G) = 5$. Por el Lema 3.7 se tiene que G posee un único vértice de valencia 5. Sea, pues, v dicho vértice y llamemos x_i a las aristas incidentes con él, para $i = 1, \dots, 5$.

Llamemos G^* al grafo que resulta de cortar sucesivamente el vértice v y los nuevos que se van añadiendo durante el proceso de corte hasta que los vértices resultantes sean de valencia 1. Observemos que x_i son hojas (es decir, aristas incidentes con vértices de valencia 1) en G^* , para $i = 1, \dots, 5$.

Si G no es plano entonces, por el Teorema de Kuratowski (Teorema 0.3) contiene como subgrafo una subdivisión de K_5 ó $K_{3,3}$. En el primer caso, puesto que $K_1 + P_4$ es subgrafo de K_5 , G contendría como MTC a H_7, H_8, H_9 ó H_{14} . En el segundo caso, G contendría como MTC a H_5, H_6 ó H_{12} , dependiendo de si v es vértice de dicha subdivisión o no. Supongamos, por tanto, que G es plano. Si $L(G^*)$ no es plano, de nuevo por el Teorema 3.3, G^* contiene un subgrafo homeomorfo a $K_1 + P_4, K_2 + \overline{K_3}, K_{1,5}$ ó $K_{3,3}$, luego se tendría que H_{12}, H_{13} ó H_{14} es un MTC de G . Supongamos, por tanto, que $L(G^*)$ también es plano.

Si algún vértice de valencia 4 de G no fuera punto de corte, aplicando el Lema 3.8 G contendría a $K_1 + P_4$ ó $K_2 + \overline{K_3}$, con lo que G contendría como MTC a $H_3, H_4, H_7, H_8, H_9, H_{13}$ ó H_{14} . Por tanto, todos los vértices de valencia 4 de G son puntos de corte.

Consideremos un vértice u de valencia 4 en G^* y sean y_i , para $i = 1, \dots, 4$, las aristas incidentes con u . Sean G_1 y G_2 subgrafos de G^* tales que $G_1 \cap G_2 = \{u\}$ y $G_1 \cup G_2 = G^*$. Puesto que u también es punto de corte en G , las aristas x_i , para $i = 1, \dots, 5$, han de estar todas en G_1 o todas en G_2 . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que están en G_1 . Veamos que, en este caso, podemos construir una inmersión de $L(G^*)$ en el plano de forma que x_i sean vértices de la cara exterior, para $i = 1, \dots, 5$, y dicha inmersión induce otra de $L(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Si $y_1 \in G_1$ y $y_2, y_3, y_4 \in G_2$ entonces podemos construir la inmersión de $L(G)$ en el plano tal como muestra el Caso I de la Figura 3.11.

Si $y_1, y_2 \in G_1$ y $y_3, y_4 \in G_2$ entonces podemos construir la inmersión de $L(G)$ en el plano según el Caso II de la Figura 3.11.

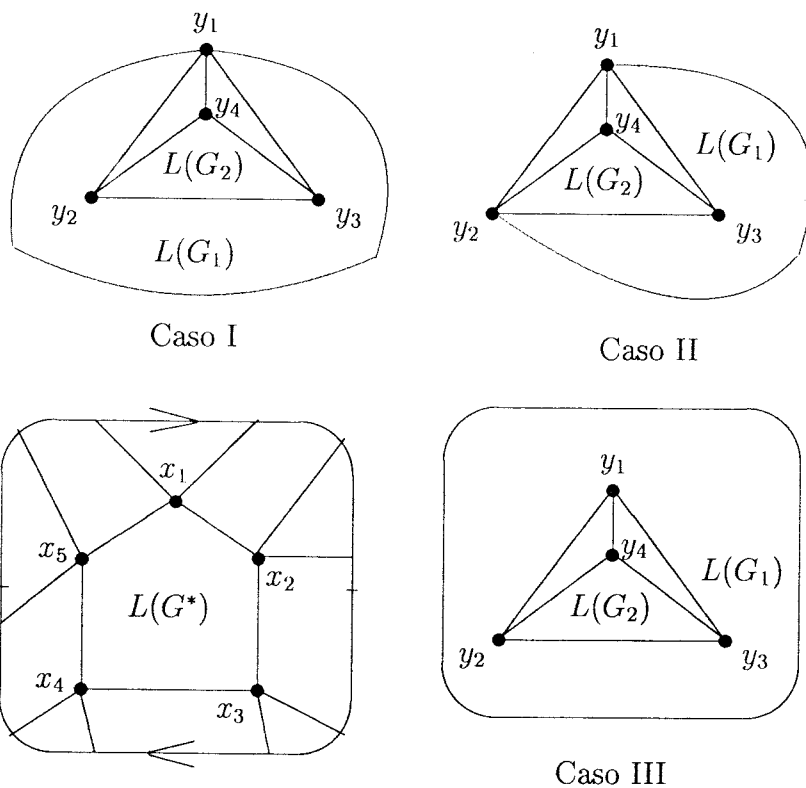


Figura 3.11: Inmersiones de $L(G^*)$ en el plano y de $L(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$.

Si $y_1, y_2, y_3 \in G_1$ y $y_4 \in G_2$ entonces podemos construir la inmersión de $L(G)$ en el plano según el Caso III de la Figura 3.11.

Una vez que tenemos una inmersión de $L(G^*)$ en el plano con x_i en la cara exterior, con $i = 1, \dots, 5$, podemos dar una inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ tal como muestra la Figura 3.11, lo que contradice nuestra hipótesis de partida.

Caso IV. $\Delta(G) = 4$. Supongamos que G contiene algún vértice de valencia 4 que es punto de corte. Llamemos v a dicho vértice. Sean G_1 y G_2 subgrafos de G tales que $G_1 \cap G_2 = \{v\}$ y $G_1 \cup G_2 = G$. Según hemos visto en la demostración del Lema 3.10 si $L(G_1)$ ó $L(G_2)$ es plano entonces $L(G)$ es proyectivo, por lo que podemos suponer que ninguno de los dos es plano. Sin embargo, aplicando de nuevo el Teorema 3.3, tenemos que tanto G_1 como G_2 contienen un subgrafo homeomorfo a $K_1 + P_4$, $K_2 + \bar{K}_3$, $K_{1,5}$ ó $K_{3,3}$, con lo que $H_i \ll G$, para algún $i \in \{11, \dots, 20\}$. Por tanto ningún vértice de valencia 4 de G es punto de corte. Si G no es plano, ha de contener una subdivisión de K_5 ó $K_{3,3}$. En el primer

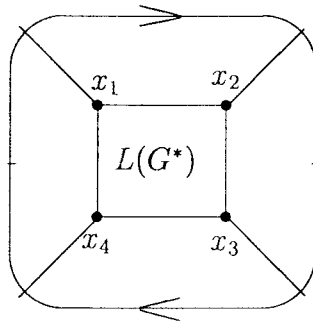


Figura 3.12: Inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

caso $H_{21} \ll G$. En el segundo, si v es un vértice del $K_{3,3}$ entonces $H_i \ll G$, para algún $i \in \{29, \dots, 32\}$. En otro caso $H_i \ll G$, para algún $i \in \{39, \dots, 42\}$. Por tanto G es plano.

Si G contiene un solo vértice de valencia 4, definamos G^* como en el Caso III, es decir, cortando sucesivamente v hasta que las aristas incidentes con v se conviertan en hojas. Sean x_i dichas aristas, para $i = 1, \dots, 4$. En esta situación, $\Delta(G^*) \leq 3$ y G^* es plano al serlo G . Por tanto, podemos dar una inmersión en el plano de $L(G^*)$ con x_i en la cara exterior, para $i = 1, \dots, 4$. Dicha inmersión induce una de $L(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, tal como muestra la Figura 3.12. Esto contradice nuestra hipótesis de partida.

Por tanto G tiene, al menos, dos vértices de valencia 4.

Si hay dos vértices de valencia 4 en distintos bloques, puesto que no son puntos de corte, aplicando el Lema 3.8 se tiene que $H_i \ll G$, para algún $i \in \{18, 19, 20\}$.

Luego todos los vértices de valencia 4 están en el mismo bloque.

Como los vértices de valencia 4 que contiene G no son puntos de corte, por el Lema 3.8, G debe contener una subdivisión de $K_1 + P_4$ ó $K_2 + \overline{K_3}$. Distinguimos dos casos en función de que contenga una u otra.

1. G contiene una subdivisión de $K_2 + \overline{K_3}$. Llamemos u y v a los vértices de valencia 4 de G que juegan el papel de los vértices de valencia 4 en $K_2 + \overline{K_3}$. Si la arista $\{u, v\}$ está subdividida entonces $K_{22} \ll G$. Podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que G tiene la forma que se indica en la Figura 3.13 ya que los vértices de valencia 4 están en el mismo bloque. El resto de los bloques del grafo serían de valencia 3 y

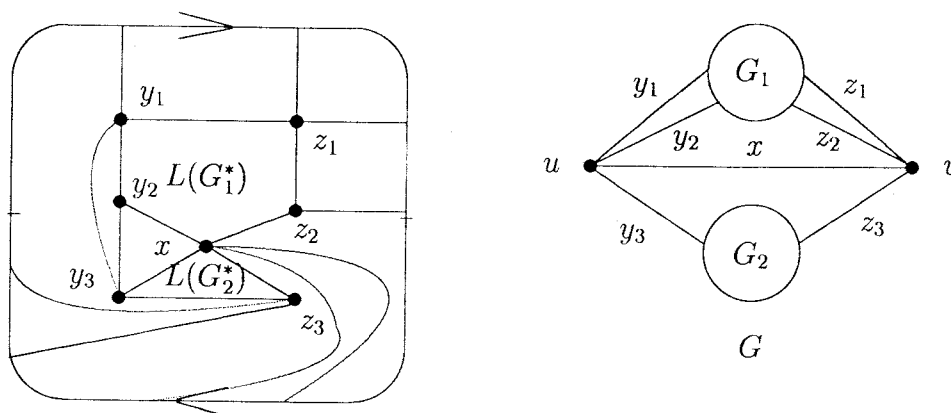


Figura 3.13: El grafo G y una inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

planos, con lo que el grafo de línea de cada bloque admite una inmersión en el plano con los vértices provenientes de las aristas de unión de cada bloque con el resto en la cara exterior.

Sea $B = (G - u) - v$. Si B es conexo entonces $H_{21} \ll G$. Sea, pues, $B = G_1 \cup G_2$, donde $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Sean y_1, y_2 las aristas que unen u con G_1 , z_1, z_2 las que unen v con G_1 , y_3 la arista que une u con G_2 y z_3 la que une v con G_2 . Sean $G_1^* = B - \{y_3, G_2, z_3\}$ y $G_2^* = B - \{y_1, y_2, G_2, z_1, z_2\}$. Si $\Delta(G_i^*) \leq 3$ entonces $L(G_i^*)$ es plano para $i = 1, 2$, y sus inmersiones planas inducen una inmersión proyectiva de $L(G)$ tal como muestra la Figura 3.13

Si $\Delta(G_2^*) = 4$, situando un vértice de valencia 4 en G_2^* de todas las formas posibles, sabiendo que no es punto de corte, aparecen las configuraciones que muestra la Figura 3.14, lo que demuestra que, en ese caso, H_{24} , H_{25} ó H_{48} es un MTC de G .

Si $\Delta(G_2^*) \leq 3$ y $\Delta(G_1^*) = 4$, G_1 ha de ser conexo ya que, de lo contrario, estaríamos en el caso que acabamos de ver (caso $\Delta(G_2^*) = 4$). Sean u_1 y u_2 los vértices de G_1 que juegan el papel de vértices de $\overline{K_3}$ en la subdivisión de $K_2 + \overline{K_3}$ que posee G (ver Figura 3.14) y sea w un vértice de valencia 4 de G_1^* , distinto de u y v . Entonces ha de haber un camino que una u_1 con u_2 .

Si $u_1 = w$ se tiene que H_{53} , H_{44} ó H_{23} es MTC de G .

Si w está en el camino que une u_1 con v , aparecen los grafos H_{24} , H_{25} y H_{47} , o bien casos anteriormente estudiados, haciendo una reenumeración de los vértices.

Por último, si w está en el camino que une u_1 y u_2 , tenemos que H_{25} , H_{27} ó H_{47} es MTC de G o bien aparecen casos anteriormente estudiados reenumerando los vértices (ver la Figura 3.14).

2. G no contiene una subdivisión de $K_2 + \overline{K_3}$. En este caso, G ha de contener una subdivisión de $K_1 + P_4$. Recordemos, además, que G es plano, tiene, al menos dos vértices de valencia 4 y ningún vértice de valencia 4 es punto de corte.

Sea u el vértice de G que juega el papel de K_1 en la subdivisión de $K_1 + P_4$ y sea v el otro vértice de valencia 4 que necesariamente ha de tener G . Podemos distinguir varias posibilidades en función de la posición que ocupe v .

Si v está fuera de la subdivisión de $K_1 + P_4$ que contiene G , aparecen casos anteriormente estudiados reenumerando los vértices, por tanto sólo consideraremos los casos que muestra la Figura 3.15, es decir, el caso en que v sea uno de los vértices de valencia 3 en la subdivisión de $K_1 + P_4$, el caso en que sea uno de los vértices de valencia 2 y el caso en que v subdivida a una arista de $K_1 + P_4$.

- (a) v es un vértice de valencia 3 en la subdivisión de $K_1 + P_4$ que contiene G . Entonces G ha de contener una subdivisión de H , H' , ó H'' , los cuales muestra la Figura 3.15 (del último no, pues contiene a $K_2 + \overline{K_3}$).

Supongamos que G contiene una subdivisión de H . Como en el punto anterior podemos suponer que G tiene la forma que se indica en la Figura 3.16 ya que todos los vértices de valencia 4 han de estar en el mismo bloque. Sean u_1 y u_2 los vértices que juegan el papel de vértices de valencia 3 en $K_1 + P_4$ y sea $B = G - \{x_1, x_2, x_3\}$, donde $x_1 = \{u, u_1\}$, $x_2 = \{u, u_2\}$ y $x_3 = \{u_1, u_2\}$. Sean G_1 , G_2 y G_3 subgrafos de G tales que $G_1 \cup G_2 \cup G_3 = B$, $G_1 \cap G_2 = \{u_1\}$, $G_1 \cap G_3 = \{u\}$ y $G_2 \cap G_3 = \{u_2\}$ (ver Figura 3.16).

Si existe un camino que une G_2 con G_3 sin pasar por G_1 se tiene que $H_{44} \ll G$.

Si $\Delta(G_i) \geq 3$, para $i = 1, 2, 3$, podemos dar una inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ según nos muestra la Figura 3.16.

Si alguna de las aristas x_i aparece subdividida, para $i = 1, 2, 3$, entonces $H_{22} \ll G$.

Por tanto, algún G_i ha de contener un vértice de valencia 4 distinto de u, u_1, u_2 . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que es G_1 el que contiene dicho vértice. Sabiendo que dicho vértice no puede

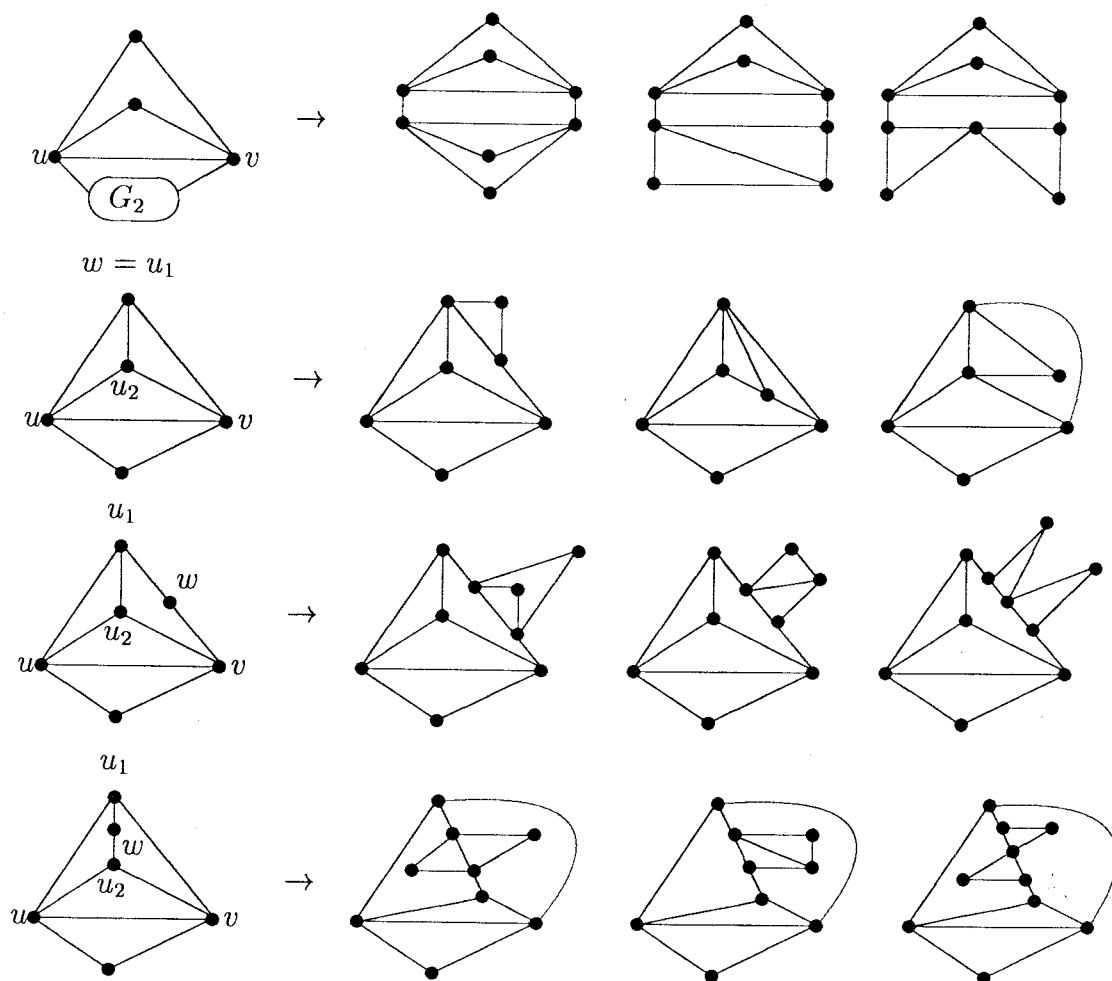


Figura 3.14: Distintas configuraciones para el caso $\Delta(G) = 4$.

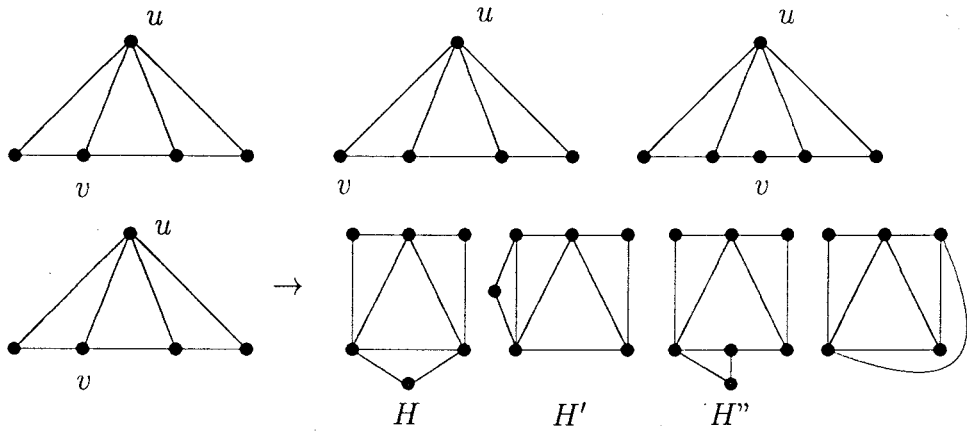


Figura 3.15: Distintas configuraciones para el caso $\Delta(G) = 4$.

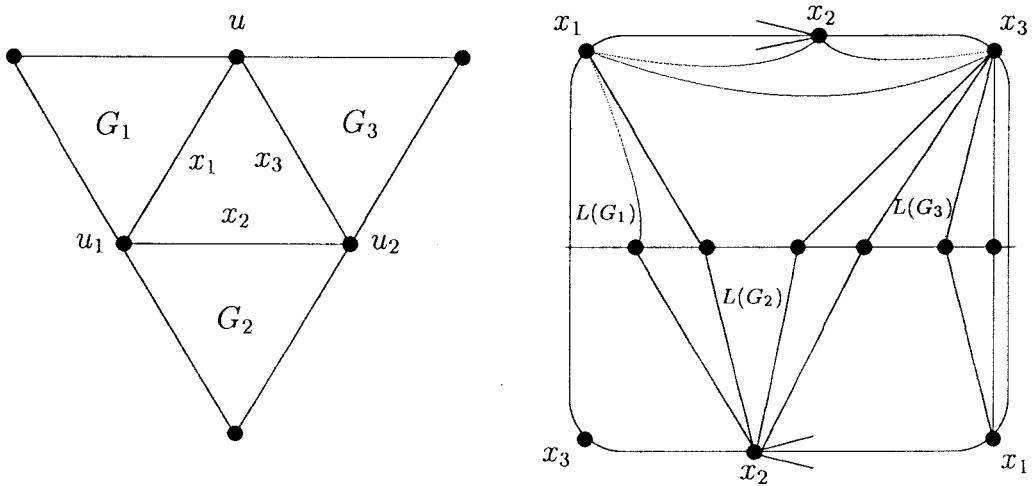


Figura 3.16: Inmersión de G en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$.



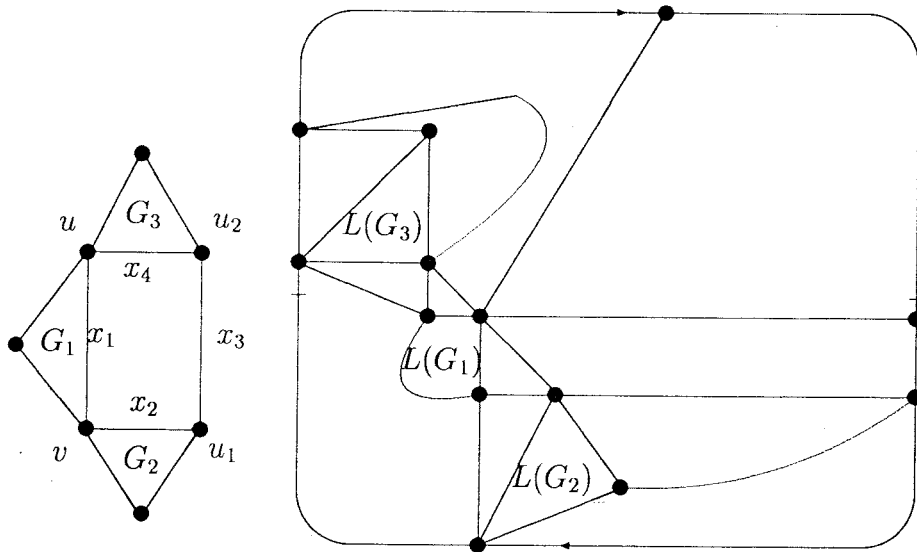


Figura 3.17: Inmersión de G en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$.

ser punto de corte, teniendo en cuenta todas las restricciones que hemos visto hasta ahora y situando el nuevo vértice en G_1 de todas las formas posibles, se obtienen casos vistos anteriormente o que G ha de contener como MTC a H_{48} , H_{49} ó H_{50} (ver Figura 3.18).

Supongamos ahora que G contiene una subdivisión de H'' , el cual podemos ver en la Figura 3.15. Entonces, como antes, G tiene la forma que se indica en la Figura 3.17 ya que todos los vértices de valencia 4 han de estar en el mismo bloque.

Sean v y u_2 los vértices que juegan el papel de vértices de valencia 3 en $K_1 + P_4$ y u_1 el vértice que subdivide a la arista $\{v, u_2\}$ de forma que de v a u_1 hay, al menos, dos caminos disjuntos. Sea $B = G - \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, donde $x_1 = \{u, v\}$, $x_2 = \{v, u_1\}$, $x_3 = \{u_1, u_2\}$ y $x_4 = \{u, u_2\}$. Sean G_1 , G_2 y G_3 subgrafos de G tales que $G_1 \cup G_2 \cup G_3 = B$, $G_1 \cap G_2 = \{v\}$, $G_1 \cap G_3 = \{u\}$ y $G_2 \cap G_3 = \emptyset$ (ver Figura 3.17).

Si existe un camino que une G_1 con G_2 sin pasar por G_3 ni por x_3 o si hay un camino que une G_1 con x_3 sin pasar por G_2 ni por G_3 se tiene que H_{45} , H_{53} ó H_{51} es un MTC de G .

Si existe un camino que une G_2 con G_3 sin pasar por G_1 ni x_3 se tiene que $H_{22} \ll G$ o bien aparecen casos que hemos visto anteriormente.

Si $\Delta(G_i) \geq 3$, para $i = 1, 2, 3$, podemos dar una inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ según nos muestra la Figura 3.17.

Por tanto, algún G_i ha de contener algún vértice más de valencia 4. Si es G_1 el que contiene dicho vértice, situando a éste de todas las formas posibles y teniendo en cuenta las restricciones que hemos visto, se tiene que G ha de contener como MTC a H_{25} , H_{26} ó H_{48} (ver Figura 3.18). Si es G_2 el que contiene dicho vértice de valencia 4, se reducen todas las configuraciones que se obtienen situando dicho vértice de todas las formas posibles al caso anterior, en que G_1 lo contiene, reenumerando los vértices. Por simetría, ocurre lo mismo si el nuevo vértice de valencia 4 está situado en G_3 .

Supongamos, para terminar este caso, que G contiene una subdivisión de H' , el cual podemos ver en la Figura 3.15. G tiene la forma que se indica en la Figura 3.19 al estar todos los vértices de valencia 4 en el mismo bloque. Sea $B = G - x$, donde $x = \{u, v\}$. Sean G_1 y G_2 subgrafos de G tales que $G_1 \cup G_2 = B$, $G_1 \cap G_2 = \{x\}$ (ver Figura 3.19).

Si existe algún camino que conecte a G_1 y G_2 sin contener a u , x ó v entonces H_{46} , H_{45} , H_{44} , H_{42} , H_{41} ó H_{23} es un MTC de G .

Si la arista x está subdividida, entonces $H_{43} \ll G$.

Si $\Delta(G_i) \geq 3$, para $i = 1, 2$, podemos dar una inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ según nos muestra la Figura 3.19.

Por tanto, algún G_i ha de contener otro vértice de valencia 4 distinto de u y v . Por simetría, supongamos que G_1 contiene dicho vértice. Situando este nuevo vértice de todas las formas posibles se obtienen casos ya vistos anteriormente o bien que H_{26} , H_{27} , H_{38} , H_{43} , H_{44} , H_{46} , H_{49} ó H_{51} es un MTC de G (ver Figura 3.18).

- (b) v es uno de los vértice de valencia 2 de $K_1 + P_4$ que contiene G . Como v no es punto de corte, conectándolo de todas las formas posibles con el resto de los elementos de la subdivisión de $K_1 + P_4$, aparecen casos anteriormente estudiados o bien se tiene que G ha de contener como MTC a H_{27} , H_{43} , H_{44} , H_{46} , H_{49} , ó H_{52} (ver Figura 3.20).
- (c) v subdivide a la arista incidente con los vértices de valencia 3 de $K_1 + P_4$. Igual que en el caso anterior, v no es punto de corte; conectándolo de todas las formas posibles con el resto de los elementos de la subdivisión de $K_1 + P_4$, aparecen casos anteriormente estudiados o bien se tiene que G ha de contener como MTC a H_{22} , H_{43} , H_{49} , H_{50} ó H_{53} (ver Figura 3.20).

Caso V. $\Delta(G) = 3$. En este caso, por el Lema 3.12, si $L(G)$ no es proyectivo, entonces G tampoco lo es. Por tanto G contiene como subgrafo una subdivisión



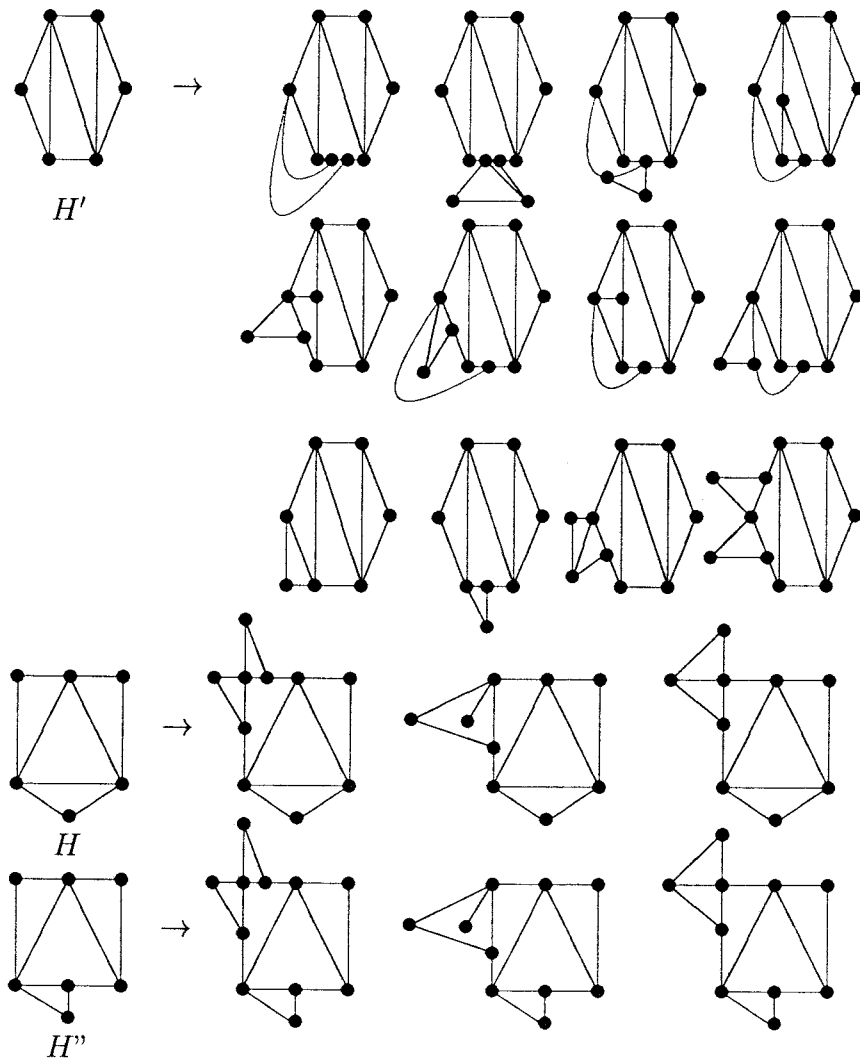
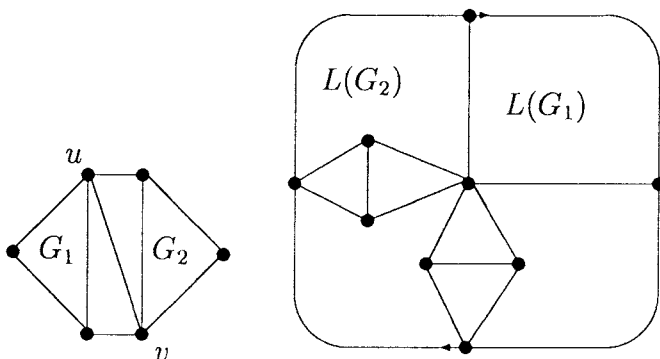


Figura 3.18: Distintas configuraciones para el caso $\Delta(G) = 4$.

Figura 3.19: Inmersión de G en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{IR})$.

de uno de los grafos de valencia 3 que aparecen en la lista de los 103 grafos prohibidos para $\mathbb{IP}_2(\mathbb{IR})$ [3, 4, 24]. Dichos grafos son H_i con $i = 33, \dots, 37$.

Con esto concluye la demostración. □

Para finalizar esta sección veamos que la lista \mathcal{H} es mínima, esto es, que cualquier grafo G tal que $G \ll H$ cumple que $L(G)$ es proyectivo, $\forall H \in \mathcal{H}$.

Proposición 3.15. *La lista \mathcal{H} de MTC prohibidos es mínima.*

Demostración: Es suficiente probar que, dado $H \in \mathcal{H}$, cualquier grafo obtenido a partir de él borrando una arista o cortando un vértice tiene grafo de línea proyectivo. Para ordenar la elección de los H_i , $i = 1, \dots, 53$ distinguimos varios casos:

- Grafos de \mathcal{H} no conexos. Son H_i con $i = 11, \dots, 20$. Sean C_{i1} y C_{i2} las dos componentes conexas de uno de estos H_i . En todos los casos C_{i1} y C_{i2} tienen grafo de línea proyectivo. Además cada C_{ij} , $j = 1, 2$, es un grafo prohibido para grafos de línea planos (ver Teorema 3.3). Por tanto, borrando una arista o cortando un vértice, e.g., en C_{i1} obtenemos que la componente resultante, C'_{i1} tiene grafo de línea plano, lo que induce una inmersión de $L(H_i)$ en el plano proyectivo si más que dibujar $L(C'_{i1})$ en una de las caras planas de $L(C_{i2})$.
- H_1 . Borrando cualquier arista se obtiene $K_{1,6}$, cuyo grafo de línea, K_6 , es proyectivo. Cortando el vértice de valencia 7, se obtiene $K_{1,i} \cup K_{1,j}$ con $i+j = 7$, $i, j \in \{1, \dots, 6\}$. En todos los casos, el grafo de línea de una componente es plano y el de la otra es proyectivo.



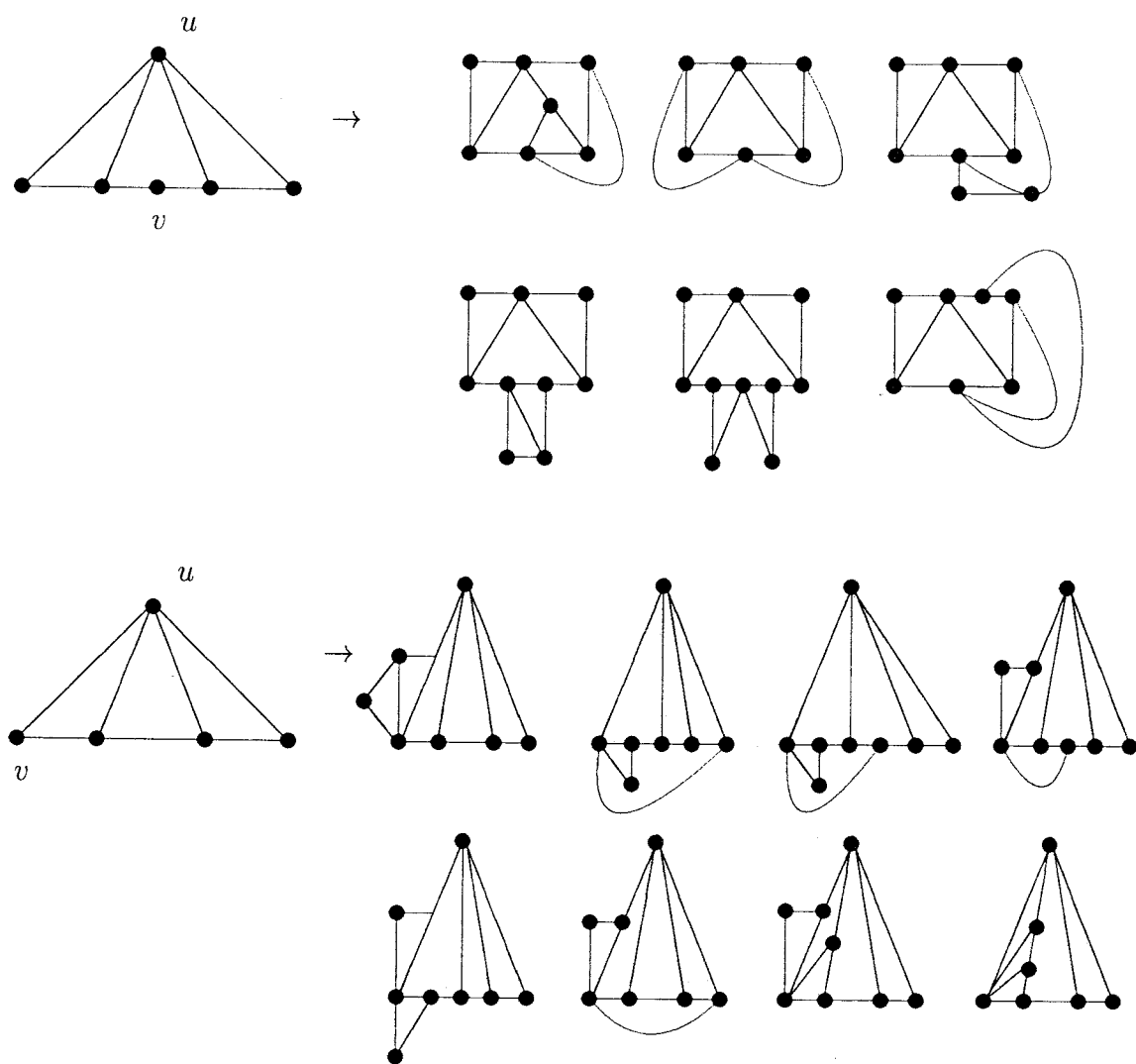
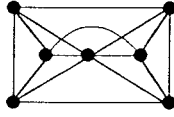


Figura 3.20: Distintas configuraciones para el caso $\Delta(G) = 4$.

Figura 3.21: Grafo menor de D_4 .

- $\Delta(H_i) = 6$. Son H_2 y H_{28} . Borrando una arista o cortando un vértice obtenemos en todos los casos un grafo cuyo grafo de línea consiste en un K_6 ó K_5 unido a un subgrafo plano que se puede dibujar en una de las caras de la inmersión proyectiva de éstos sin que se produzcan falsos cruces.
- H_{10} . Borrando una arista o cortando un vértice obtenemos un grafo cuyo grafo de línea es $K_5 \cup K_4$ o bien ambos pegados por un vértice. En ambos casos es fácil construir una inmersión proyectiva.
- $\Delta(H_i) = 5$. En el caso de $H_3, H_4, H_7, H_8,$ y H_9 , borrando una arista o cortando un vértice se obtienen grafos cuyo grafo de línea contiene un K_5 unido a un subgrafo plano sumergible en una de las caras de la inmersión proyectiva de éste, o bien grafos que contiene dos o más K_4 con, al menos, tres vértices distintos. En este último caso, se puede dar fácilmente una inmersión de estos grafos de línea en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ a partir de una del grafo que muestra la Figura 3.21. Pero dicho grafo es un menor de D_4 (Figura 3.1), con lo que ha de ser proyectivo.

En cuanto a H_5 y H_6 , se obtienen grafos cuyo grafo de línea contiene a $K_{3,3}$ ó a K_5 unido a un subgrafo plano sumergible en una cara de una inmersión proyectiva suya.

- $\Delta(H_i) = 4$. Son los grafos H_i con $i = 21, \dots, 32, 38, \dots, 53$. Consideremos el conjunto \mathcal{H}' de grafos que se obtiene de borrarles una arista o cortarles un vértice. Si existe $H' \in \mathcal{H}'$ tal que $L(H')$ no es proyectivo entonces, por el Teorema 3.14, existe $H \in \mathcal{H}$ tal que H es un menor topológico de H' . Además $\Delta(H) \geq 4$ y H es conexo, por lo que $H = H_j$, para algún $j \in \{21, \dots, 53\}$.

Se puede comprobar para todo $H' \in \mathcal{H}'$ que no existe ningún H_j con $j \in \{21, \dots, 53\}$ tal que H_j es un menor topológico de H' con lo que se tiene el resultado.

Nosotros hemos efectuado dicha comprobación con ayuda del ordenador. Primero hemos generado \mathcal{H}' borrando a H_i con $i = 21, \dots, 32, 38, \dots, 53$ una arista de todas las formas posible y eliminando isomorfos, y después cortando un

vértice. Si observamos que ninguno de éstos H_j con $j \in \{21, \dots, 53\}$ tiene hojas, podemos restringir el número de cortes; basta cortar los vértices de valencia 4 de forma que los resultantes tengan valencia 2. Después, hemos comprobado que no existe ningún H_j con $j \in \{21, \dots, 53\}$ que sea un menor topológico de los grafos de la lista así obtenida.

- $\Delta(H_i) = 3$. Son los grafos H_i con $i = 33, \dots, 37$. Por el Lema 3.12, el grafo de línea de un grafo obtenido borrando una arista o cortando un vértice es proyectivo si y sólo si lo es dicho grafo. Pero observemos que H_i con $i = 33, \dots, 37$ forman parte de la lista de menores prohibidos para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ (ver Figura 3.1), con lo que cualquier MTC suyo es proyectivo y, por tanto, su grafo de línea. \square

Subgrafos prohibidos

En la sección anterior hemos caracterizado los grafos con grafo de línea proyectivo en función de MTC prohibidos. Sin embargo, el orden “ \ll ” es menos usual que el orden de Kuratowski, que prescinde de la operación de cortar vértices.

Como la operación que queremos eliminar es la de cortar vértices, la lista de menores topológicos prohibidos para los grafos con grafo de línea proyectivo se obtendrá pegando de todas las formas posibles vértices entre sí o vértices a subdivisiones de aristas en todos los grafos de \mathcal{H} . Llamemos \mathcal{H}^* a dicha lista.

Para simplificar este procedimiento usaremos el siguiente lema previo.

Lema 3.16. *Sea $H \in \mathcal{H}$. Sea H' el grafo obtenido de efectuar pegamientos sucesivos de dos vértices o un vértice a una subdivisión de una arista a partir de H . Si existe $H'' \in \mathcal{H}$ tal que H'' es un menor topológico de H' entonces $H' \notin \mathcal{H}^*$.*

Demostración: De lo contrario, se contradice la minimalidad de \mathcal{H}^* . \square

Como consecuencia del lema anterior, si el grafo H' resulta de pegar en H dos vértices cuya suma de valencias es mayor o igual que 7 entonces H' no es minimal, ya que contiene a H_1 .

A continuación vamos a detallar el proceso a seguir para obtener la lista \mathcal{H}^* a partir de \mathcal{H} :

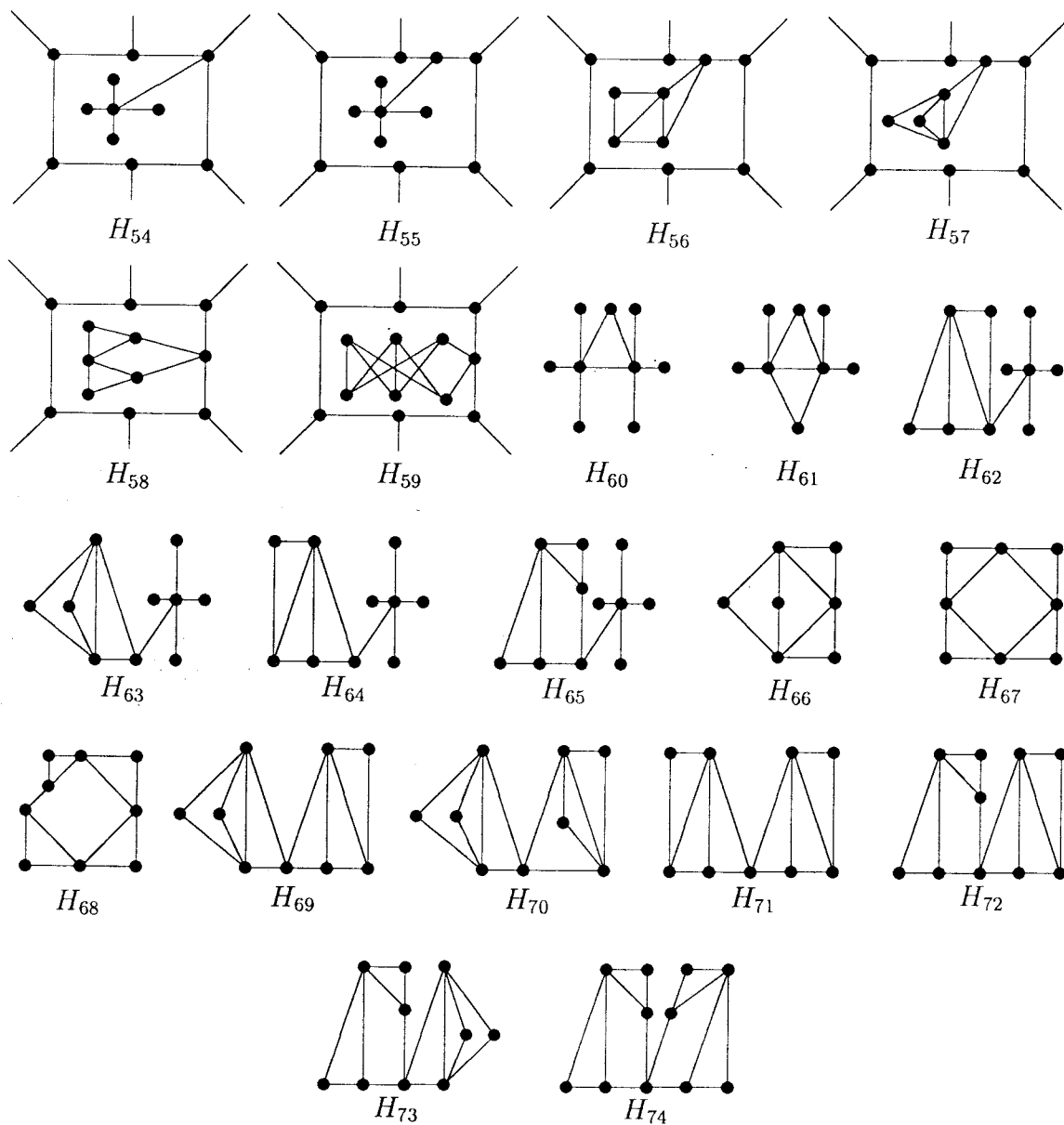


Figura 3.22: Lista $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$ de menores topológicos prohibidos.

- A partir de la lista \mathcal{H} generamos otra lista de grafos \mathcal{H}_1 efectuando un pegamiento *vértice- vértice* o *vértice-subdivisión* de todas las formas posibles a cada uno de los grafos de \mathcal{H} , teniendo en cuenta las siguientes restricciones:
 1. Las aristas incidentes con un vértice de valencia 1 ó 2 no se subdividen.
 2. El resto de las aristas se subdividen sólo una vez.
 3. El extremo de valencia 1 de una hoja no se pega a ningún vértice o subdivisión de arista incidente con dicha hoja.
 4. La valencia del vértice resultante de un pegamiento debe ser, a lo más, 6.
 5. Si resulta una arista doble de un pegamiento, se subdivide una de las dos. Si resulta un bucle, éste se subdivide dos veces.
 6. Si el grafo resultante contiene como menor topológico a un grafo de \mathcal{H} , se desecha.
- Iteramos este proceso, generando a partir de la lista \mathcal{H}_i otra \mathcal{H}_{i+1} siguiendo los mismos pasos salvo la restricción 6, pues eliminaremos los grafos que contengan como menor topológico a uno de $\mathcal{H} \cup \left(\bigcup_{j=1}^i \mathcal{H}_j \right)$.
- Este proceso es finito, es decir, existe un natural n tal que $\mathcal{H}_n = \emptyset$. En este caso $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \left(\bigcup_{j=1}^{n-1} \mathcal{H}_j \right)$.

La lista \mathcal{H}^* obtenida a partir del proceso anterior es la unión de \mathcal{H} (Figura 3.8) y de \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 (Figura 3.22).

Como consecuencia podemos enunciar el siguiente resultado, que caracteriza a los grafos con grafo de línea proyectivo ya en función de menores topológicos prohibidos.

Teorema 3.17. *Sea G un grafo. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $L(G)$ es proyectivo.
2. No existe $H \in \mathcal{H}^*$ tal que H es un menor topológico de G .

Demostración: Aplicando el proceso anterior, de la lista \mathcal{H} se obtiene en un primer paso $\mathcal{H}_1 = \{H_i, i = 54, \dots, 74, i \neq 61, i \neq 67\}$

A partir de \mathcal{H}_1 , e iterando el proceso, se obtiene $\mathcal{H}_2 = \{H_{61}, H_{67}\}$, y $\mathcal{H}_3 = \emptyset$, con lo que $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \cup \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$. \square

Por último observemos que el proceso seguido para la construcción de \mathcal{H}^* asegura que ésta es mínima.

El proceso descrito ha sido aplicado mediante la implementación del correspondiente algoritmo en el ordenador.



3.2.2 Grafos con segundo grafo de línea proyectivo

En el Capítulo 0 se ha definido el concepto de segundo grafo de línea; además hemos visto una caracterización de los grafos con segundo grafo de línea plano dada por Kulli y Sampathkumar en [33] mediante el siguiente resultado:

Teorema 3.18. *Sea G un grafo. $L^2(G)$ es plano si y sólo si G es plano, la valencia máxima es a lo sumo 4, la suma de las valencias de dos vértices adyacentes es a lo más 6 y si la suma de las valencias de dos vértices adyacentes es 6, entonces la arista que los une es un puente.*

La caracterización mediante subgrafos prohibidos se debe a Akiyama [1]:

Teorema 3.19. *Sea G un grafo. $L^2(G)$ es plano si y sólo si G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,5}$, $K_{3,3}$ ó $K_1 + (2K_1 \cup K_2)$ y no tiene un subgrafo que sea una x -subdivisión de A , B ó C (ver Figura 12).*

En esta sección vamos a caracterizar los grafos cuyo segundo grafo de línea admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Para ello nos vamos a basar tanto en la caracterización de los grafos proyectivos en términos de menores prohibidos [3, 4, 24] como en la de los grafos con grafo de línea proyectivo, dada en la Sección 3.2. La caracterización que vamos a obtener es en términos de subgrafos prohibidos.

Sin embargo la relación de orden " \ll " definida en la Sección 3.2 no nos es válida ahora. En efecto, si un grafo G' resulta de borrar vértices y aristas o cortar vértices de forma reiterada de otro grafo G entonces $L^2(G')$ es un subgrafo de $L^2(G)$. La demostración es análoga a la de la Proposición 3.4. Pero si G' resulta de subdividir reiteradamente aristas de G , se tiene que $L(G)$ es un menor de $L(G')$ por la Proposición 3.4, lo cual no implica relación alguna entre $L^2(G')$ y $L^2(G)$.

El grafo G' de la Figura 3.23 es una subdivisión de G , $L(G)$ es un menor de $L(G')$ y, sin embargo $L^2(G)$ y $L^2(G')$ no están relacionados.

No obstante, en algún caso particular, el grafo de línea de un grafo continúa siendo un menor topológico del de una subdivisión suya, tal como nos muestra el siguiente lema:

Lema 3.20. *Sea G un grafo y G' el grafo que resulta de subdividir en G una arista incidente con un vértice de valencia dos. Entonces $L(G)$ es un menor topológico de $L(G')$.*

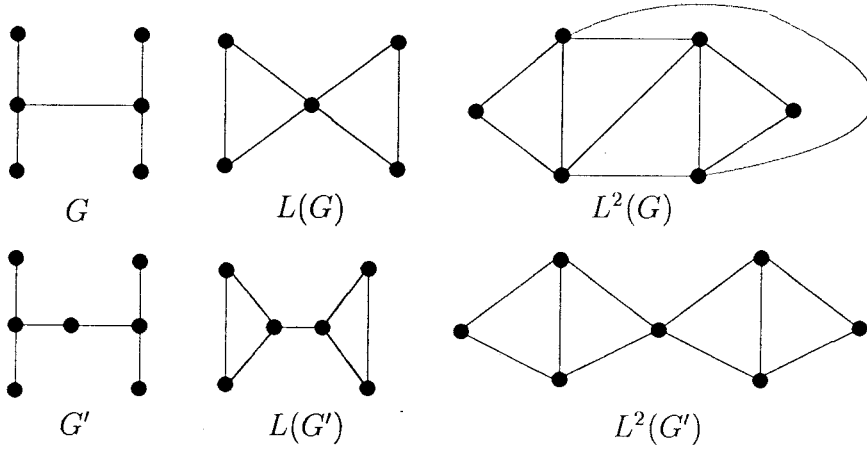


Figura 3.23: Contraejemplo.

Demostración: Supongamos que G' se obtiene subdividiendo la arista $x_1 = \{u, v\}$ de G , uno de cuyos extremos es de valencia 2 (e.g. v), y sea x_2 la otra arista incidente con v . Entonces, en G' , tenemos las aristas $x_{11} = \{u, w\}$ y $x_{12} = \{w, v\}$ en vez de x_1 , donde w es el nuevo vértice añadido. Entonces $L(G')$ se obtiene de $L(G)$ sustituyendo la arista $\{x_1, x_2\}$ por el camino $\{x_{11}, x_{12}, x_2\}$ donde $\delta(x_{12}) = 2$. Por tanto $L(G)$ es un menor topológico de $L(G')$. \square

Dados dos grafos G y G' y $x \in A(G)$, diremos que G' es un x -menor topológico cortable de G , y lo denotaremos por $G' \ll_x G$, si existe una secuencia finita de grafos $\{G_1, \dots, G_n\}$ tales que $G_1 = G'$, $G_n = G$ y para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, se tiene que G_i resulta de borrar un vértice o arista, o cortar un vértice de G_{i+1} o bien que G_{i+1} resulta de subdividir una arista de G_i que no sea x .

Del mismo modo, si $F \subset A(G)$, denotaremos $G' \ll_F G$ si existe una secuencia finita de grafos $\{G_1, \dots, G_n\}$ tales que $G_1 = G'$, $G_n = G$ y para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$, G_i resulta de borrar un vértice o arista, o cortar un vértice de G_{i+1} o bien que G_{i+1} resulta de subdividir una arista de G_i que no sea ninguna de las de F .

Como resultado previo a la demostración del teorema principal de esta sección damos el siguiente Lema:

Lema 3.21. *Sea G un grafo plano tal que $\Delta(G) \leq 4$ y que tiene, a lo más, un vértice de valencia 4 que no es punto de corte. Entonces $L(G)$ es proyectivo.*

Demostración: Si G no fuera proyectivo, por el Teorema 3.14, debería existir $H \in \mathcal{H}$ tal que $\Delta(H) \leq 4$ y $H \ll G$. Además H debería ser plano y, a lo más, con un vértice de valencia 4 que no fuera punto de corte. Pero en \mathcal{H} no hay grafos planos con valencia máxima menor que 4, y todos los de valencia 4 tienen, al menos, dos vértices de valencia 4 que no son puntos de corte. \square

También usaremos la versión del Teorema de Menger que Dirac enuncia y demuestra en [19]:

Teorema 3.22. *Un grafo G con, al menos, $2n$ vértices es n -conexo si y sólo si para todos $V_1, V_2 \subset G$ tales que $\#(V_1) = \#(V_2) = n$ existen n caminos disjuntos que unen V_1 y V_2 .*

A continuación vamos a enunciar y demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.23. *Sea G un grafo finito. Son equivalentes:*

1. $L^2(G)$ es proyectivo.
2. No existe $i \in \{1, \dots, 13\}$ tal que $A_i \ll G$; no existe $j \in \{14, \dots, 25\}$ tal que $A_j \ll_x G$ y no existe $k \in \{26, \dots, 40\}$ tal que $A_k \ll_{\{x,y\}} G$ (ver Figura 3.24, donde los puntos diametralmente opuestos en un grafo están identificados).

Demostración: Veamos primero la condición necesaria. Para ello, basta probar que ninguno de los grafos de la lista \mathcal{A} tiene segundo grafo de línea proyectivo usando la caracterización obtenida en el Teorema 3.14. Sin embargo, no es suficiente que para todo $A \in \mathcal{A}$ exista $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \ll L(A)$, ya que una subdivisión de A podría no contener a H como menor topológico cortable. Como ejemplo tenemos al grafo A_{38} . $L(A_{38})$ contiene como menor topológico a H_{22} y sin embargo el grafo de línea de la subdivisión de A_{38} que nos muestra la Figura 3.25 no lo contiene.

Sin embargo, teniendo en cuenta el Lema 3.20 y que el grafo que se obtiene de subdividir una hoja se contiene a sí mismo como subgrafo, basta probar que $H \ll L(G)$ para algún $H \in \mathcal{H}$, donde G es una E -subdivisión de A_i que se obtiene subdividiendo una sola vez aristas cuyos extremos tienen valencia mayor que 2, con $i \in \{1, \dots, 40\}$ y con $E = \emptyset, \{x\}$ ó $\{x, y\}$.

Denotemos \widetilde{A}_i a cualquier subdivisión de A_i en las condiciones anteriores (o bien al propio A_i). Se puede comprobar que:

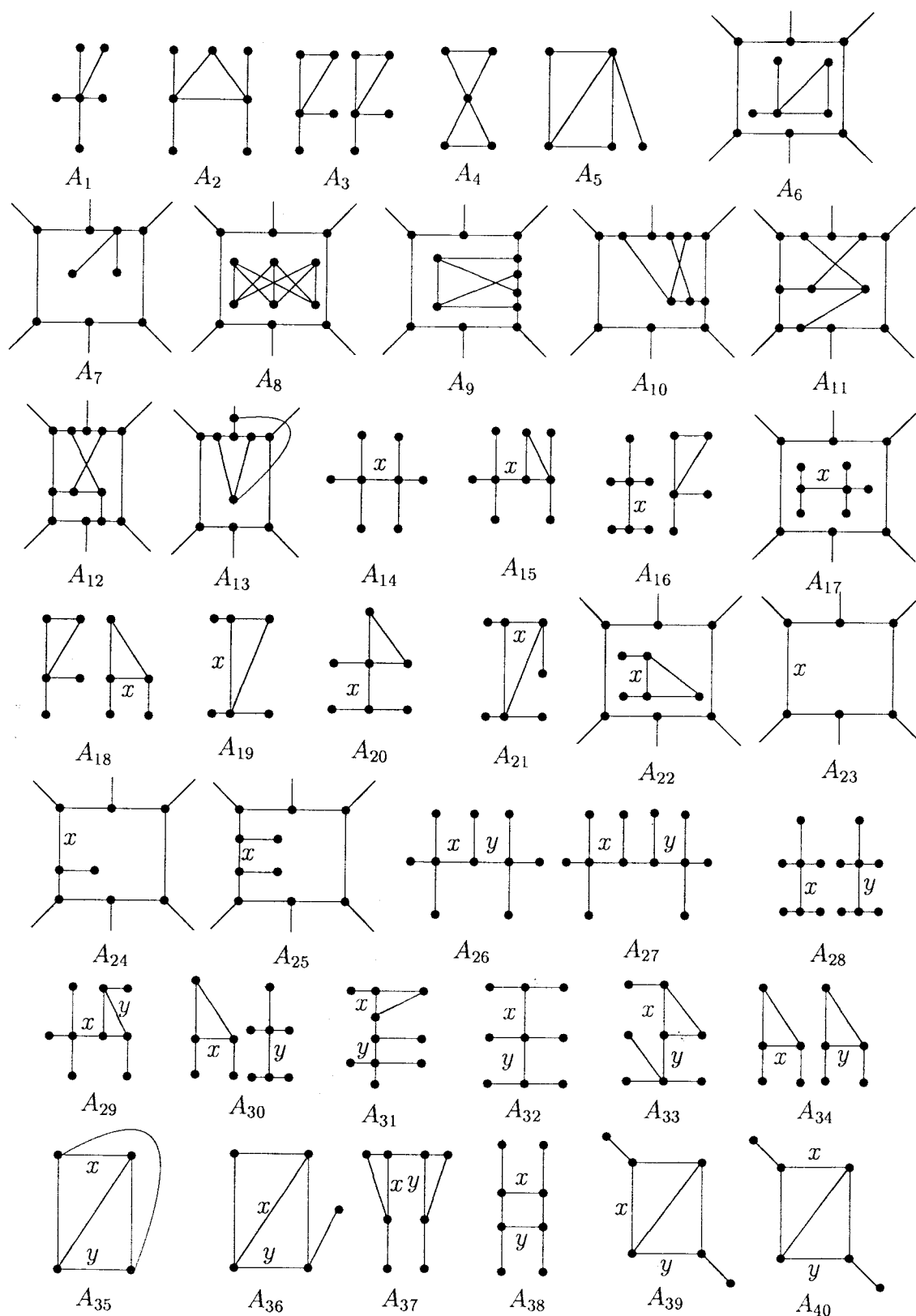


Figura 3.24: Lista A de MTC prohibidos para $L^2(G)$ proyectivo.



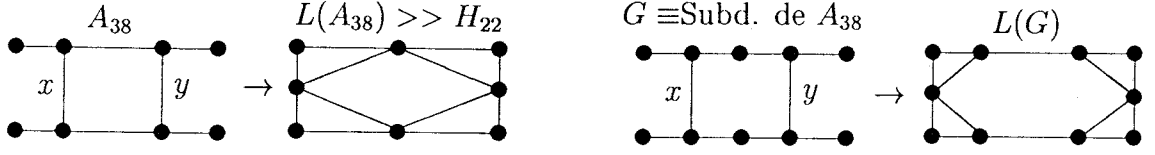


Figura 3.25: Los grafos de línea de A_{38} y de una subdivisión suya.

$H_{21} \ll L(\widetilde{A}_1)$, H_{24} ó $H_2 \ll L(\widetilde{A}_2)$, $H_{18} \ll L(\widetilde{A}_3)$, $H_{28} \ll L(\widetilde{A}_{14})$, $H_{10} \ll L(\widetilde{A}_{26})$, $H_{11} \ll L(\widetilde{A}_{27})$ y $L(\widetilde{A}_{28})$, H_{10} ó $H_4 \ll L(\widetilde{A}_{15})$, H_8 ó $H_9 \ll L(\widetilde{A}_{29})$, $H_{13} \ll L(\widetilde{A}_{16})$, $H_{23} \ll L(\widetilde{A}_4)$, H_{21} ó $H_{47} \ll L(\widetilde{A}_5)$, $H_{16} \ll L(\widetilde{A}_6)$, $H_{12} \ll L(\widetilde{A}_{17})$, $H_{18} \ll L(\widetilde{A}_{18})$, $H_{13} \ll L(\widetilde{A}_{30})$, $H_3 \ll L(\widetilde{A}_{19})$, $H_{13} \ll L(\widetilde{A}_{31})$, $H_{10} \ll L(\widetilde{A}_{32})$, $H_4 \ll L(\widetilde{A}_{20})$, $H_9 \ll L(\widetilde{A}_{33})$, H_3 , H_{48} ó $H_{51} \ll L(\widetilde{A}_{21})$, $H_{39} \ll L(\widetilde{A}_7)$, $H_{18} \ll L(\widetilde{A}_{34})$, H_{45} ó $H_{22} \ll L(\widetilde{A}_{35})$, H_{45} ó $H_{46} \ll L(\widetilde{A}_{36})$, $H_{18} \ll L(\widetilde{A}_{37})$, $H_{15} \ll L(\widetilde{A}_8)$, $H_{16} \ll L(\widetilde{A}_{22})$, H_{22} , H_{50} ó $H_{53} \ll L(\widetilde{A}_{16})$, A_i , $i \in \{9, \dots, 13\}$ son los subgrafos de valencia 3 prohibidos para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ [3, 4, 24], que también pertenecen a \mathcal{H} , $H_{30} \ll L(\widetilde{A}_{23})$, $H_{32} \ll L(\widetilde{A}_{24})$, $H_{40} \ll L(\widetilde{A}_{25})$, H_{22} , H_{45} , H_{46} ó $H_{52} \ll L(\widetilde{A}_{39})$, y, por último, H_{22} , H_{45} , H_{46} , H_{50} ó $H_{52} \ll L(\widetilde{A}_{16})$.

Demostremos ahora la condición suficiente. Sea G un grafo tal que $L^2(G)$ no es proyectivo. Vamos a probar que existe $i \in \{1, \dots, 40\}$ tal que $A_i \ll_E G$ donde $E = \emptyset, \{x\}$ ó $\{x, y\}$. Podemos suponer que G es mínimo, es decir, que $\forall F \ll_E G$, $F \neq G$ entonces $L^2(F)$ es proyectivo. En otro caso elegiríamos F en vez de G .

Vamos a distinguir varios casos:

Caso I: $\Delta(G) \geq 5$. En este caso A_1 es un subgrafo de G .

Caso II: Existe una arista $\{u, v\}$ de G con $\delta(u) + \delta(v) = 8$. Entonces A_{14} es un subgrafo de G .

Caso III: Existen dos aristas $a = \{u_1, v_1\}$ y $b = \{u_2, v_2\}$ de G tales que $\delta(u_i) + \delta(v_i) = 7$, $i = 1, 2$. Distinguiamos varios subcasos:

- $d(a, b) \geq 2$. Entonces $A_{28} \ll G$.
- $d(a, b) = 1$. Entonces A_{27} ó $A_{32} \ll G$.
- $d(a, b) = 0$. Entonces A_{26} ó $A_{32} \ll G$.

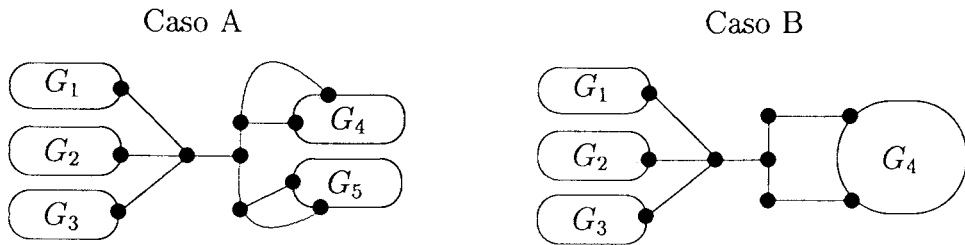


Figura 3.26: Formas de G en el Caso V.

Caso IV: Existe una arista $x = \{u, v\}$ de G con $\delta(u) + \delta(v) = 7$ y dicha arista no es un puente. En ese caso u y v han de estar conectados, además, por otro camino, con lo que $A_{19} \ll_x G$.

Caso V: Existe una arista $x = \{u, v\}$ de G con $\delta(u) + \delta(v) = 7$ siendo dicha arista un puente. Puesto que $\Delta(G) \leq 4$, uno de los extremos de x ha de tener valencia 4 y el otro valencia 3. Sean $y_i = \{v, v_i\}$, $i = 1, 2, 3$ las aristas de G incidentes con v y sean $z_j = \{u, u_j\}$, $j = 1, 2$ las aristas incidentes con u . Entonces $\delta(v_i) \leq 2$, $i = 1, 2, 3$ ya que, de lo contrario $A_{32} \ll_{\{x,y\}} G$, y además $\delta(u_j) \leq 2$, $j = 1, 2$ pues, en otro caso, $A_{26} \ll_{\{x,y\}} G$.

Por otra parte, si existen $i, j \in 1, 2, 3$ tales que v_i y v_j están conectados entre sí por un camino que no pase por v entonces $A_{20} \ll G$. Si $\delta(u_1) = 3$ ó $\delta(u_2) = 3$ y existe un camino que une u_1 con u_2 sin pasar por u entonces $A_{33} \ll_{\{x,y\}} G$.

Por tanto, G sólo puede tener una de las dos formas que muestra la Figura 3.26.

Estudiemos estos casos por separado:

- Supongamos que G tiene la forma que muestra el Caso A de la Figura 3.26, donde G_1 es el subgrafo inducido por los vértices de G conectados con w_1 por un camino que no pase por v_1 , siendo w_1 el extremo de la arista incidente con v_1 que no es adyacente con v y los otros G_i , $i = 2, \dots, 5$ se definen de forma análoga.

Si todos los G_i tienen segundo grafo de línea plano, podemos dar la inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ que nos muestra la Figura 3.27:

Si algún G_i tiene segundo grafo de línea no plano debe contener a alguno de los grafos prohibidos del Teorema 3.19, con lo que A_{30} ó $A_{28} \ll_{\{x,y\}} G$, o bien A_{16} ó $A_{28} \ll_x G$.

- Supongamos que G tiene la forma que muestra el Caso B de la Figura 3.26, donde G_i , $i = 1, \dots, 4$ se definen de forma análoga al caso anterior. De

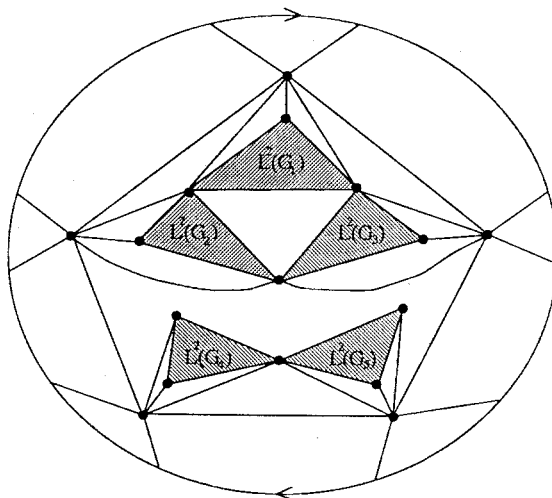


Figura 3.27: Inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

nuevo si todos los G_i tienen segundo grafo de línea plano, podemos dar la inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ que nos muestra la Figura 3.28 y si algún G_i tiene segundo grafo de línea no plano, por un razonamiento análogo al caso anterior, A_{30} ó $A_{28} \ll_{\{x,y\}} G$, o bien A_{16} ó $A_{28} \ll_x G$

Caso VI: Existe una arista $x = \{u, v\}$ de G con $\delta(u) + \delta(v) = 6$. Distinguiamos varios casos:

Caso VI, I: Uno de los extremos de x , e.g. u , tiene valencia 4. En este caso, si llamamos $x_i = \{u, u_i\}$, $i = 1, 2, 3$ al resto de las aristas incidentes con u , tenemos que $\delta(u_i) \leq 2$ (de lo contrario estaríamos en un caso anterior). Sea $y = \{v, u_4\}$ la arista incidente con v .

Si existen $i, j, k \in \{1, \dots, 4\}$ tales que u_i, u_j y u_k están conectados por caminos que no pasan por u entonces $A_5 \ll G$. Por otra parte, si los u_i están conectados dos a dos por caminos que no pasen por u , entonces $A_4 \ll G$.

Por tanto, G tiene la forma que nos muestra la Figura 3.29, a), donde G_1 es el subgrafo inducido por los vértices de G conectados con w_1 ó w_2 por un camino que no pase por u , siendo w_i , $i = 1, 2$ los extremos de las aristas incidentes con u_i que no son adyacentes con u ; los otros G_i , $i = 2, 3$ se definen de forma análoga. Vamos a distinguir varios subcasos:

1. Existen $i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$ con $L^2(G_i)$ y $L^2(G_j)$ no planos. Entonces,

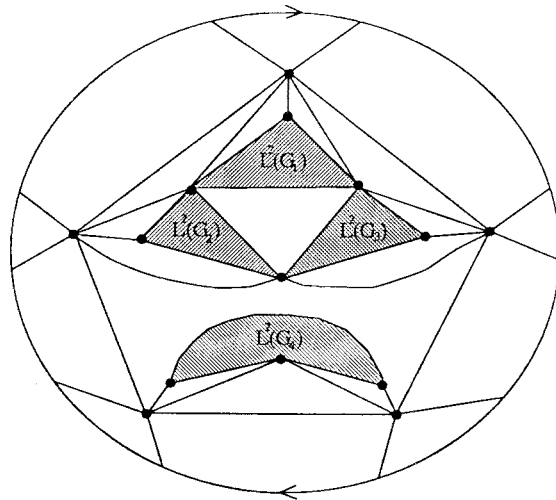


Figura 3.28: Inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

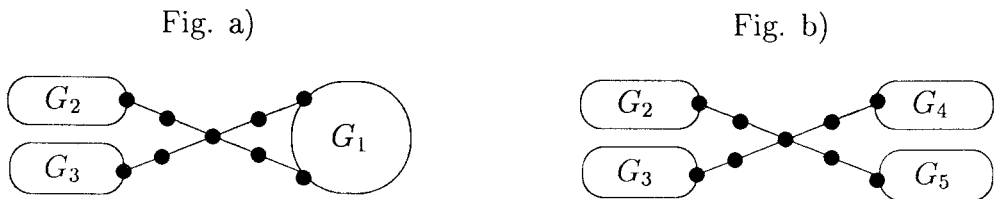


Figura 3.29: Formas de G en el Caso VI, I.

aplicando el Teorema 3.19, se tiene que $A_3, A_{28}, A_{16}, A_6, A_{17}, A_{18}, A_{30}, A_{34}, A_8$ ó $A_{22} \ll G$.

2. Existe un camino uniendo w_1 y w_2 que no pasa por u y $L^2(G_i)$, $i = 2, 3$ no es plano. Entonces, por el Teorema 3.19 se tiene que A_3, A_{16}, A_6, A_{18} ó $A_{34} \ll G$.
3. Existe un camino uniendo w_1 y w_2 que no pasa por u y $L^2(G_1)$ no es plano. Entonces, por el Teorema 3.19, G_1 contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ ó $K_1 + (2K_1 \cup K_2)$ o bien tiene un subgrafo que es una x -subdivisión de A ó C (ver Figura 12). Se puede comprobar que en el primer caso A_4 ó $A_7 \ll G$. En el segundo caso A_2, A_3 ó $A_5 \ll G$. En el tercer caso $A_5 \ll G$ o bien A_{18} ó $A_{21} \ll_x G$. Y en el último caso A_{27} ó $A_{30} \ll_{\{x,y\}} G$ o bien $A_{21} \ll_x G$.
4. Todo camino uniendo w_1 y w_2 pasa por u . Definimos entonces G_j , $j = 4, 5$ como el subgrafo inducido por los vértices de G conectados con w_{j-3} por un camino que no pase por u (ver Figura 3.29, b)). Supongamos, además, que $\exists i \in \{2, \dots, 5\}$ tal que $L^2(G_i)$ no es plano y $L^2(G_j)$ sí lo es, con $j \in \{2, \dots, 5\}, j \neq i$. Por simetría, no perdemos generalidad suponiendo $i = 2$.

G es minimal por hipótesis, por tanto $L^2(G_2)$ es proyectivo. Por otra parte, $L^2(G - G_2)$ es plano. Por tanto, podríamos dar una inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ según nos muestra la Figura 3.30, b).

5. Los segundos grafos de G_i , $i = 1, 2, 3$ son planos. En ese caso podemos construir la inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ que nos muestra la Figura 3.30, a).

Caso VI, II: La valencia de u y de v es 3. En este caso podemos suponer que $\Delta(G) = 3$, pues si G tuviera algún vértice de valencia 4, éste formaría parte de una componente conexa consistente en un $K_{1,4}$ ya que, en otro caso, estaríamos en el Caso VI, I. Como $L^2(K_{1,4})$ es plano, éste podría sumergirse en una de las caras planas de la inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ si fuera el caso:

También podemos suponer G conexo, o bien que toda componente conexa de G , salvo una, tiene segundo grafo de línea plano, pues, en otro caso, $A_{34} \ll G$.

Distinguimos varios casos:

1. La arista x es puente. Entonces G tiene la forma que nos muestra la Figura 3.31, donde G_1 es el subgrafo inducido por los vértices de G unidos a u por un camino que no pase por v y G_2 es el subgrafo inducido por

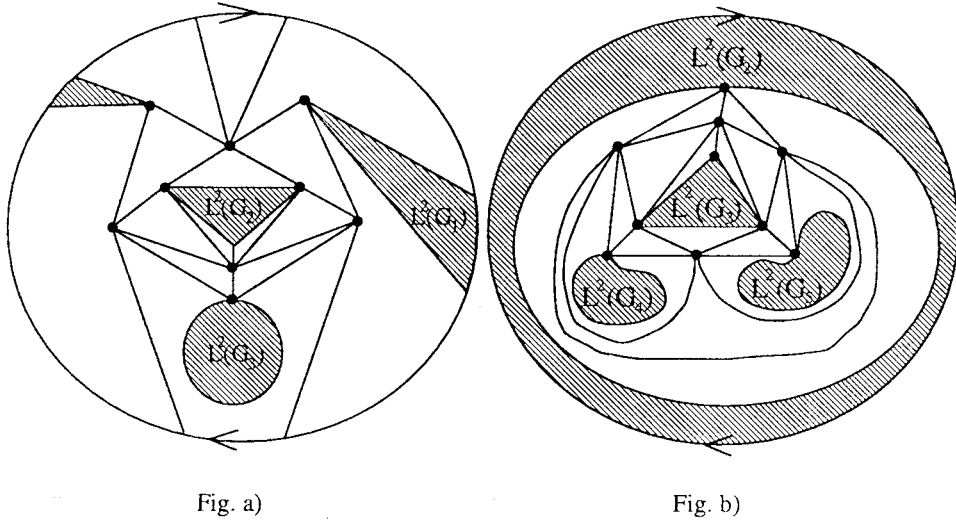


Figura 3.30: Inmersiones de $L^2(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

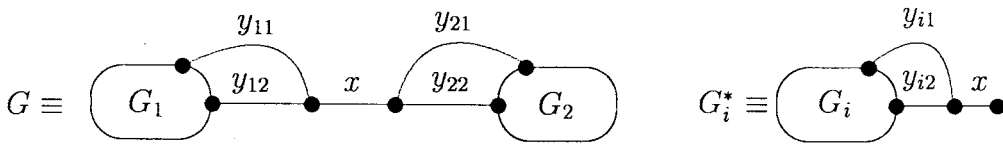


Figura 3.31: Forma de G en el Caso VI, II.

los vértices de G unidos a v por un camino que no pase por u . Sea $G_i^* = G_i \cup \{x, y_{i1}, y_{i2}\}$, $i = 1, 2$ donde y_{ij} , $j = 1, 2$ son las aristas incidentes con x (ver Figura 3.31).

- Supongamos que $L^2(G_1^*)$ es plano. Entonces podemos dar una inmersión suya en el plano con la arista $\{a, b\}$ en la cara exterior, donde $a = \{x, y_{11}\}$ y $b = \{x, y_{12}\}$. Por otra parte $L^2(G_2^*)$ es proyectivo por minimalidad de G . Podemos dar, por tanto, la inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ que nos muestra la Figura 3.32.
- $L^2(G_i^*)$ no son planos, para $i = 1, 2$. Entonces, por el Teorema 3.19, G_i^* contiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ o bien tiene un subgrafo que es una x -subdivisión de A (ver Figura 12).



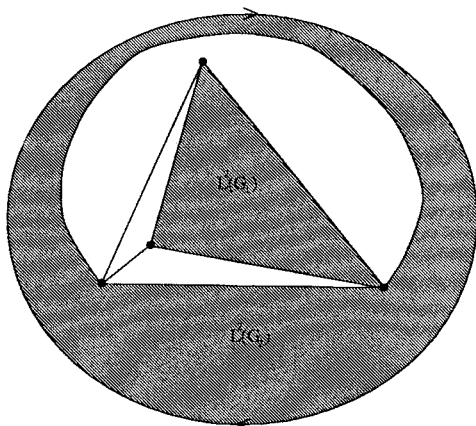


Figura 3.32: Inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Si ambos contienen un subgrafo que es una x -subdivisión de A entonces se puede comprobar que A_{34} ó $A_{37} \ll_{\{x,y\}} G$.

Si alguno contiene un subgrafo que sea subdivisión de $K_{3,3}$, x no puede formar parte de dicha subdivisión (e.o.c. no sería puente) y además x no puede estar unida por un camino a un vértice de $K_{3,3}$ (e.o.c. dicho vértice tendría valencia 4). Teniendo esto en cuenta, se puede comprobar que, en este caso, $A_8 \ll G$ ó $A_{22} \ll_x G$.

2. La arista x no es puente. Distinguimos varios subcasos:

(a) G no es plano. En este caso G contiene como subgrafo a una subdivisión de $K_{3,3}$.

Si x es una arista de dicha subdivisión, entonces A_{23} , A_{24} ó $A_{25} \ll_x G$.

Si x no es una arista de la subdivisión, puesto que no es puente, debe darse alguna de las situaciones que muestra la Figura 3.33. Reenumerando los vértices tal como se indica en la misma, encontramos una nueva subdivisión de $K_{3,3}$ de la que x sí es arista.

(b) G es plano. De nuevo distinguimos varios subcasos.

i. La arista x es la única con dos extremos de valencia 3 cada uno. Puesto que $\Delta(G) = 3$ y G es plano se tiene que $L(G)$ es plano. Además, x es el único vértice de $L(G)$ de valencia 4 que no es punto de corte (si lo fuera, x sería puente en G). Entonces, por el Lema 3.21, $L^2(G)$ es proyectivo.

ii. G contiene un puente que no es una hoja. Dicho puente no es x ,

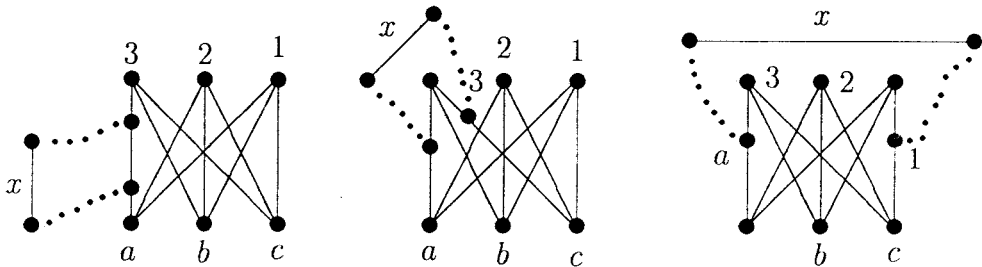


Figura 3.33: Situaciones posibles en el Caso VI, II con G no plano .

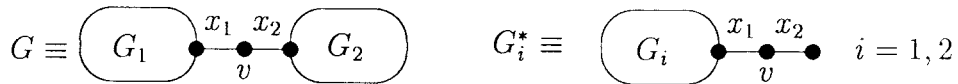


Figura 3.34: Forma de G en el Caso VI, II, b, i.

pues este caso ya ha sido estudiado, por lo que G tiene la forma que nos muestra la Figura 3.34, donde llamamos $x_1 = \{v_1, v\}$ a dicho puente, uno de cuyos extremos ha de ser de valencia 2. Sea v dicho extremo y $x_2 = \{v, v_2\}$ la otra arista incidente con v .

Definimos G_i como el subgrafo inducido por los vértices de G unidos a v_i por un camino que no pasa por v , para $i = 1, 2$ y $G_i^* = G_i \cup \{x_1, x_2\}$ (ver Figura 3.34).

Si $L^2(G_i^*)$ no es plano para $i = 1, 2$ entonces G_1^* contiene una x -subdivisión de A de la que no forma parte la arista x_2 . De la misma forma G_2^* contiene una x -subdivisión de A de la que no forma parte la arista x_1 . Cortando el vértice v se tiene que $A_{34} \ll_{\{x,y\}} G$.

Si G_1^* ó G_2^* tienen segundo grafo de línea plano entonces $L^2(G)$ es proyectivo. En efecto, supongamos que $L^2(G_1^*)$ es plano. Entonces $L^2(G_2^*)$ es proyectivo por minimalidad de G .

A partir de una inmersión de $L^2(G_2^*)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ podemos construir una de $L^2(G)$ sin más que pegar en la cara que contiene al vértice $\{x_1, x_2\}$ una inmersión plana de $L^2(G_1^*)$, tal como muestra la Figura 3.35

- iii. G contiene dos aristas $x = \{u_1, u_2\}$ e $y = \{v_1, v_2\}$ tales que $\delta(u_1) = \delta(u_2) = \delta(v_1) = \delta(v_2) = 3$ y x e y no son adyacentes. Por el Apartado 2(b)ii, el grafo obtenido de G al quitarle las hojas es 2-conexo. Puesto que x e y no son adyacentes, los conjuntos

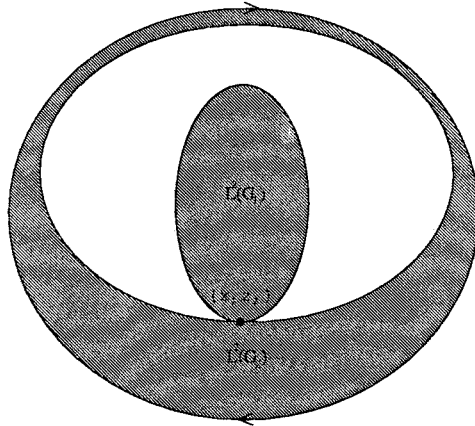


Figura 3.35: Inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

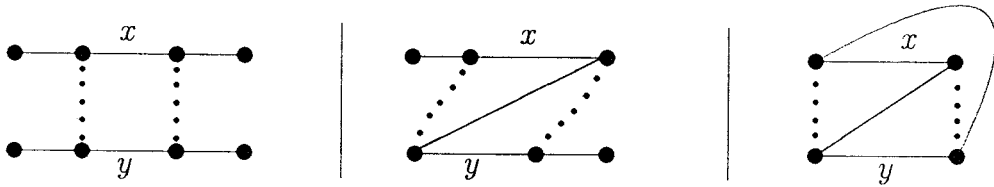


Figura 3.36: Situaciones diversas en G .

de vértices $\{u_1, u_2\}$ y $\{v_1, v_2\}$ están en las condiciones del Teorema 3.22, con lo que se da en G alguna de las tres situaciones que muestra la Figura 3.36.

En el primero de los casos $A_{38} \ll_{\{x,y\}} G$, en el segundo caso $A_{40} \ll_{\{x,y\}} G$ y en el tercero $A_{36} \ll_{\{x,y\}} G$.

- iv. G contiene tres aristas $x = \{u_1, u_2\}$, $y = \{v_1, v_2\}$ y $z = \{w_1, w_2\}$ tales que $\delta(u_1) = \delta(u_2) = \delta(v_1) = \delta(v_2) = \delta(w_1) = \delta(w_2) = 3$.

Si dos de ellas no fueran adyacentes, estaríamos en el caso anterior, por lo que G tiene una de las dos formas que aparecen en la Figura 3.37, a), donde G_1 es la componente conexa de $G - \{w_1, w_2\}$ que no contiene ningún extremo de x ni de y .

En el primer caso $L(G) = H_{45} - e$, por lo que $L^2(G)$ es proyectivo. En el segundo caso $A_{36} \ll_{\{x,y\}} G$, ya que G_1 es conexo pues, en otro caso, G tendría un puente.

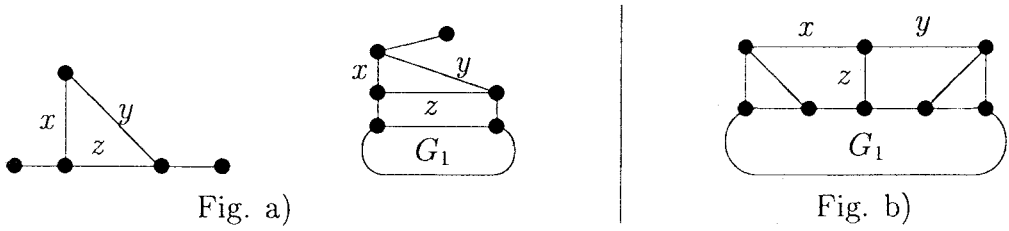


Figura 3.37: Distintas formas de G .

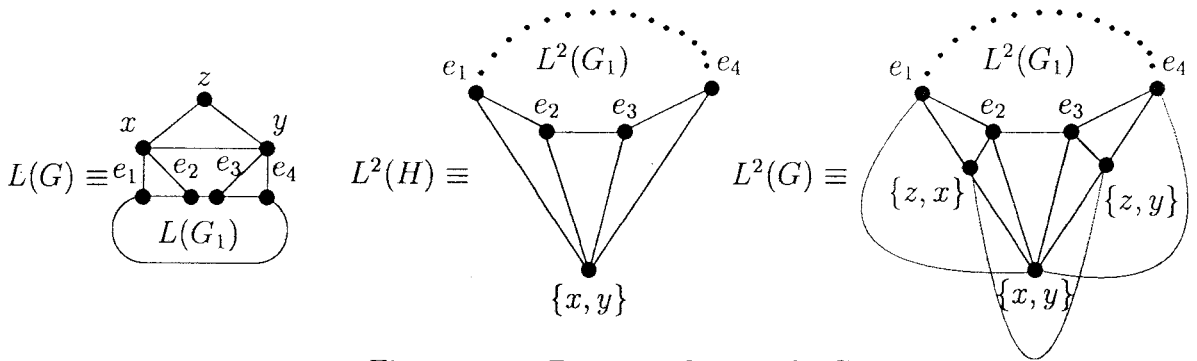


Figura 3.38: Distintas formas de G .

Por tanto, G contiene exactamente dos aristas $x = \{u_1, u_2\}$ e $y = \{u_2, u_3\}$ con $\delta(u_1) = \delta(u_2) = \delta(u_3) = 3$ (ver Figura 3.37, b)). Sea $z = \{u_2, v\}$ la arista incidente con x y con y . Se nos presentan dos nuevos subcasos.

A. La arista z es una hoja. Sea G_1 la componente conexa de $G - \{u_1, u_3\}$ que no contiene a z y llamemos e_1, e_2 a las aristas incidentes con x en $L(G)$ y e_3, e_4 a las aristas incidentes con y en $L(G)$, según nos muestra la Figura 3.38.

Consideremos $H = G - z$. $L^2(G_1)$ es plano porque $\Delta(G_1) \leq 3$ y $\Delta(L(G_1)) \leq 3$ ya que la suma de las valencias de los extremos de toda arista de G_1 es, a lo más, 5.

Además podemos dar una inmersión plana de $L^2(G_1)$ con $e_i, i = 1, \dots, 4$ en la cara exterior. Por tanto $L^2(H)$ es plano (ver Figura 3.38).

A partir de $L^2(H)$ se obtiene $L^2(G)$ añadiendo los vértices, $\{z, x\}$ y $\{z, y\}$, la arista que los une, y las aristas que unen al primero con e_1, e_2 , y $\{x, y\}$ y al segundo con e_3, e_4 , y $\{x, y\}$.

Ello nos permite dar la inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ que nos muestra la Figura 3.39.

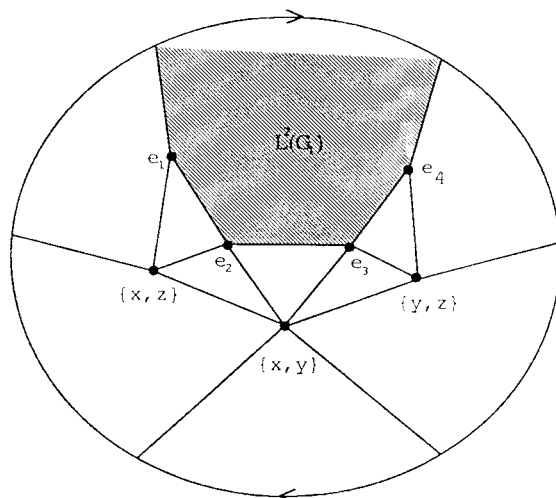


Figura 3.39: Inmersión de $L^2(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$.

- B. La arista z no es una hoja. Entonces existe un camino P_1 uniendo a u_1 y v que no pasa por u_2 y otro camino P_2 uniendo a u_3 y v que no pasa por u_2 tal que $P_1 \cap P_2 \neq \emptyset$ (ver Figura 3.40). Si existe un tercer camino P_3 disjunto con P_1 y P_2 que une u_1 y u_3 sin pasar por u_2 se tiene que $A_{36} \ll_{\{x,y\}} G$. En otro caso $A_{39} \ll_{\{x,y\}} G$.

Caso VII El grafo G contiene una arista $x = \{u, v\}$ tal que $\delta(u) + \delta(v) = 5$.

Al igual que en el Caso VI, II, podemos considerar que $\Delta(G) = 3$, con lo que supongamos que $\delta(u) = 3$.

Si G no es proyectivo, por [3, 4, 24] se tiene que existe $i \in \{31, \dots, 35\}$ tal que $A_i \ll G$.

Si G es proyectivo, una inmersión de G en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ induce una de $L(G)$. Además, la suma de las valencias de los extremos de las otras aristas de G es menor o igual que 5, con lo que $\Delta(L(G)) = 3$.

Una inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ induce, por tanto, una de $L^2(G)$, con lo que G tiene segundo grafo de línea proyectivo.

Caso VIII La suma de las valencias de los extremos de cualquier arista de G es, a lo más, 4. En este caso las componentes conexas de G son $K_{1,3}$ o caminos, con lo que $L^2(G)$ es plano y, por tanto, proyectivo.

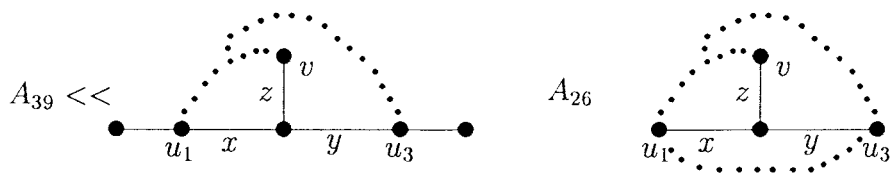


Figura 3.40: Distintas situaciones en G .

Esto concluye la demostración. □

Subgrafos prohibidos

Al igual que en la Sección 3.2.1, vamos a obtener ahora la caracterización de los grafos con segundo grafo de línea proyectivo en función de x -menores topológicos prohibidos a partir de la obtenida en la sección anterior con el orden “ \ll_x ”.

Como antes, la lista de x -menores topológicos prohibidos para los grafos con grafo de línea proyectivo se obtendrá pegando de todas las formas posibles vértices entre sí o vértices a subdivisiones de aristas, excepto a las etiquetadas, en todos los grafos de \mathcal{A} . Llamemos \mathcal{A}^* a dicha lista.

El procedimiento es el mismo que el expuesto en la Sección 3.2.1.

La lista \mathcal{A}^* obtenida a partir del proceso anterior es la unión de \mathcal{A} (Figura 3.24) y de \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 (Figura 3.41), donde $\mathcal{A}_1 = \{A_i, i = 41, \dots, 62\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{A_{63}, A_{64}\}$.

Como consecuencia podemos enunciar el siguiente resultado, que caracteriza a los grafos con segundo grafo de línea proyectivo ya en función de x -menores topológicos prohibidos.

Teorema 3.24. *Sea G un grafo finito. Son equivalentes:*

1. $L^2(G)$ es proyectivo.
2. No existe $i \in \{1, \dots, 13\} \cup \{41\}$ tal que A_i es un menor topológico de G ; no existe $j \in \{14, \dots, 25\} \cup \{42, \dots, 52\}$ tal que A_j es un x -menor topológico de

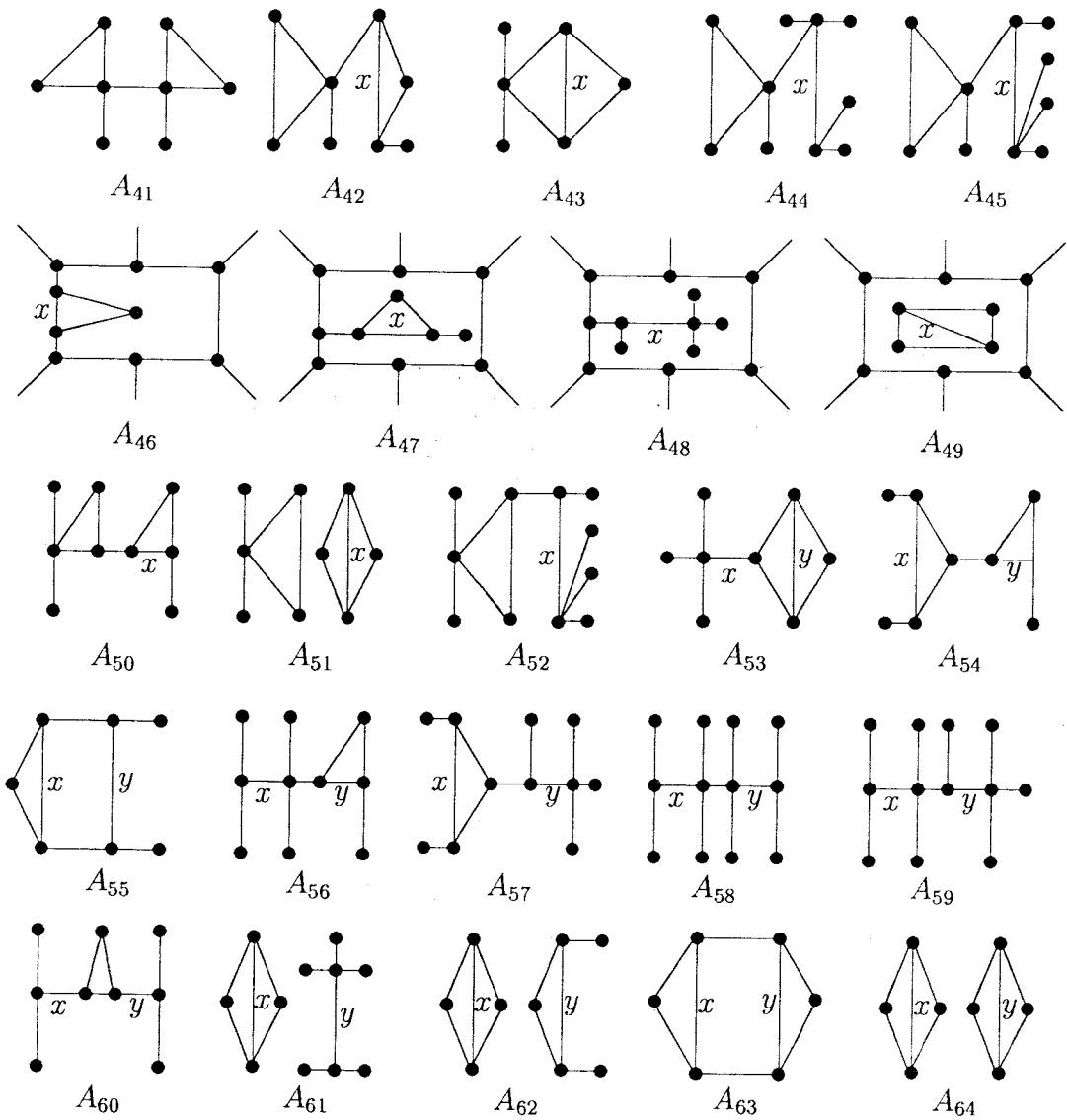


Figura 3.41: Lista $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ de x -menores topológicos prohibidos.

G y no existe $k \in \{26, \dots, 40\} \cup \{53, \dots, 64\}$ tal que A_k es un $\{x, y\}$ -menor topológico de G (ver Figuras 3.24 y 3.41. Los puntos diametralmente opuestos están identificados).

Demostración: Aplicando el proceso descrito en la Sección 3.2.1, de la lista \mathcal{A} se obtiene en un primer paso $\mathcal{A}_1 = \{A_i, i = 41, \dots, 62\}$

A partir de \mathcal{A}_1 , e iterando el proceso, se obtiene $\mathcal{A}_2 = \{A_{63}, A_{64}\}$, y $\mathcal{A}_3 = \emptyset$, con lo que $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$. \square

Por último, la minimalidad de \mathcal{A}^* se tiene a partir del proceso seguido.

El proceso descrito ha sido aplicado mediante la implementación del correspondiente algoritmo en el ordenador.

3.2.3 Grafos con tercer grafo de línea proyectivo

La definición de grafo de línea iterado de un grafo se encuentra, como hemos señalado anteriormente, en el Capítulo 0. Los grafos con tercer grafo de línea plano fueron caracterizados por Kulli y Sampathkumar en [33] mediante el siguiente resultado:

Teorema 3.25. $L^3(G)$ es plano si y sólo si $\Delta(G) \leq 3$ y si la valencia de un vértice es 3, entonces la suma de las valencias de sus vértices adyacentes es a lo sumo 4.

La caracterización mediante subgrafos prohibidos se debe a Akiyama [1]:

Teorema 3.26. $L^3(G)$ es plano si y sólo si G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_1 + (K_1 \cup K_2)$ ó $K_{3,3} - P_5$ (ver Figura 12).

En esta sección vamos a caracterizar los grafos con tercer grafo de línea proyectivo. Usaremos, además de las caracterizaciones de los grafos proyectivos en términos de menores prohibidos [3, 4, 24] y la de los grafos con grafo de línea proyectivo, dada en la Sección 3.2, la caracterización de los grafos con segundo grafo de línea proyectivo, que se desarrolla en la Sección 3.2.2.

La caracterización que vamos a obtener de los grafos con tercer grafo de línea proyectivo es en términos de subgrafos prohibidos para el orden parcial \ll_x descrito en la Sección 3.2.2, donde x es una arista.



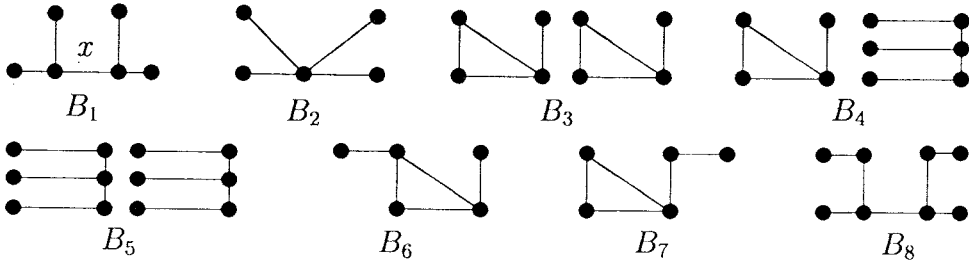


Figura 3.42: Lista \mathcal{B} de MTC prohibidos para $L^3(G)$ proyectivo.

A continuación vamos a enunciar y demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.27. *Sea G un grafo finito. Son equivalentes:*

1. $L^3(G)$ es proyectivo.
2. B_1 no es un x -menor topológico cortable de G y no existe $i \in \{2, \dots, 8\}$ tal que $B_i \ll G$ (ver Figura 3.42).

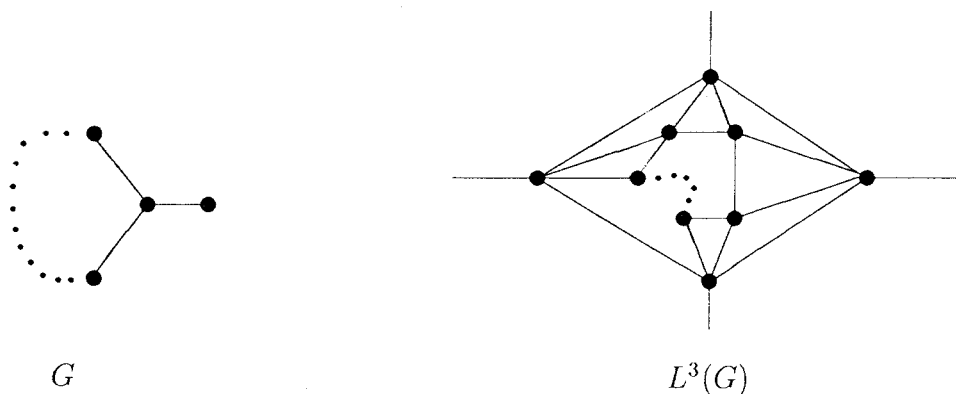
Demostración: Veamos primero la condición necesaria. Para ello, hemos de probar que ninguno de los grafos de la lista \mathcal{B} , y ninguna subdivisión o x -subdivisión suya, tiene tercer grafo de línea proyectivo usando la caracterización obtenida en el Teorema 3.23. Por el Lema 3.20 es suficiente probar que para todo $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \ll L(B)$, salvo en los casos de B_6 y B_8 , en el que hay que probar que $A \ll L(\widetilde{B}_i)$ para algún $A \in \mathcal{A}$, donde \widetilde{B}_i es una y -subdivisión de B_i siendo y la arista de B_i cuyos extremos tienen valencia 3, para $i = 6, 8$.

Se puede comprobar que:

A_4 ó $A_{38} \ll L(\widetilde{B}_6)$, A_4 ó $A_{37} \ll L(\widetilde{B}_8)$ y que $A_{35} \ll L(B_2)$, $A_4 \ll L(B_1)$, $A_{34} \ll L(B_3)$, $L(B_4)$ y $L(B_5)$ y que $A_{36} \ll L(B_7)$.

Vamos a probar ahora la condición suficiente. Sea G un grafo tal que $L^3(G)$ no es proyectivo. Vamos a probar que, o bien $B_1 \ll_x G$ o bien existe $i \in \{1, 3, \dots, 8\}$ tal que $B_i \ll G$.

Si G no es conexo entonces hay dos o más componentes conexas de G que no tienen tercer grafo de línea plano (en otro caso, si llamamos C a la única componente conexa

Figura 3.43: Inmersión de $L^3(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$.

de G tal que $L^3(C)$ no es plano, $L^3(G)$ es proyectivo si y sólo si $L^3(C)$ es proyectivo; y, por tanto, nos restringimos al estudio de C). Aplicando el Teorema 3.26 a cada componente conexa cuyo tercer grafo de línea no es plano se tiene que B_3 , B_4 ó $B_5 \ll G$.

Podemos suponer, pues, que G es conexo. Distinguimos varios casos:

Caso I: $\Delta(G) \leq 4$. Entonces $B_2 \ll G$.

Caso II: $\Delta(G) = 3$. Distinguimos varios subcasos:

1. G tiene más de un ciclo. En este caso B_1 , B_3 , B_6 ó $B_7 \ll G$, según los ciclos compartan o no aristas y según el número de vértices de valencia 3 que contengan.
2. G tiene un solo ciclo. Si hay más de un vértice de valencia 3 en el ciclo entonces $B_6 \ll G$. Si G contiene más de un vértice de valencia 3 pero sólo uno está en el ciclo entonces B_1 ó $B_7 \ll G$. Si G tiene un solo vértice de valencia 3 entonces $B_7 \ll G$ o bien G es de la forma que muestra la Figura 3.43, en cuyo caso $L^3(G)$ admite una inmersión en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$, tal como nos indica la misma figura, donde se identifican puntos diametralmente opuestos.
3. G es un árbol. Si G sólo tiene un vértice de valencia 3 entonces G tiene la forma que nos muestra el primer caso de la Figura 3.44. En este caso podemos dar una inmersión de $L^3(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ tal como muestra la Figura 3.45 con $G_1 = G_2 = G_3 = \emptyset$.

Sean, pues, $u, v \in V(G)$ tales que $\delta(u) = \delta(v) = 3$. Si u y v son adyacentes entonces $B_1 \ll G$. Llamemos u_i y v_i a los vértices adyacentes a u y v respectivamente, para $i = 1, 2, 3$ y consideremos que el camino que une u y v pasa por u_1 y v_1 donde, eventualmente, puede darse que $u_1 = v_1$.

Puesto que u y v no son adyacentes, $u_i \neq v$ y $v_i \neq u$, $i = 1, 2, 3$.

Si existe $i, j \in \{2, 3\}$ tales que $\delta(u_i) \geq 2$ y $\delta(v_j) \geq 2$ entonces $B_8 \ll G$. Por tanto, podemos suponer que $\delta(u_2) = \delta(u_3) = 1$. Si G ya no tiene más vértices de valencia 3 entonces G es de la forma que nos muestra el segundo caso de la Figura 3.44 por lo que $L^3(G)$ puede sumergirse en el plano proyectivo según nos muestra la Figura 3.45, donde $G_1 = G_2 = \emptyset$ y G_3 es un $K_1 + C_4$ con uno o dos de los vértices del C_4 adyacentes a x_4 y x_5 .

Luego, podemos suponer que G tiene un tercer vértice de valencia 3, w , siendo w_i , $i = 1, 2, 3$ los vértices adyacentes a w . Si w y v son adyacentes, entonces $B_1 \ll G$.

Consideremos que el camino que une v y w pasa por v_2 y w_2 donde, eventualmente, puede darse que $v_2 = w_2$. Si $\delta(w_1) \geq 2$ ó $\delta(w_3) \geq 2$ entonces $B_8 \ll G$, en otro caso G es de la forma que nos muestra el tercer caso de la Figura 3.44 por lo que $L^3(G)$ es proyectivo según nos muestra la Figura 3.45, donde $G_1 = \emptyset$ y G_2 y G_3 son $K_1 + C_4$ con uno o dos de los vértices del C_4 adyacentes a x_2, x_3 y x_4, x_5 respectivamente.

Podemos suponer que G tiene un cuarto vértice de valencia 4 que llamaremos t . De la misma forma que antes se tiene que t no es adyacente a v y que es incidente con dos hojas. Por tanto, G es de la forma que nos muestra el cuarto caso de la Figura 3.44 por lo que $L^3(G)$ es proyectivo (ver Figura 3.45), donde G_1, G_2 y G_3 son $K_1 + C_4$ con uno o dos de los vértices del C_4 adyacentes a x_6 y x_1 en el primer caso, a x_2 y x_3 en el segundo y a x_4 y x_5 en el tercer caso.

Por último, si G posee un quinto vértice de valencia 3 entonces B_5 ó $B_8 \ll G$.

Caso III: $\Delta(G) \leq 2$. En este caso $G = C_k$, con $k \geq 3$ ó $G = P_n$, con $n \geq 1$. Tanto $L^3(C_k)$ como $L^3(P_n)$ son planos, con lo que $L^3(G)$ es plano y, por tanto, proyectivo.

Esto concluye la demostración. □

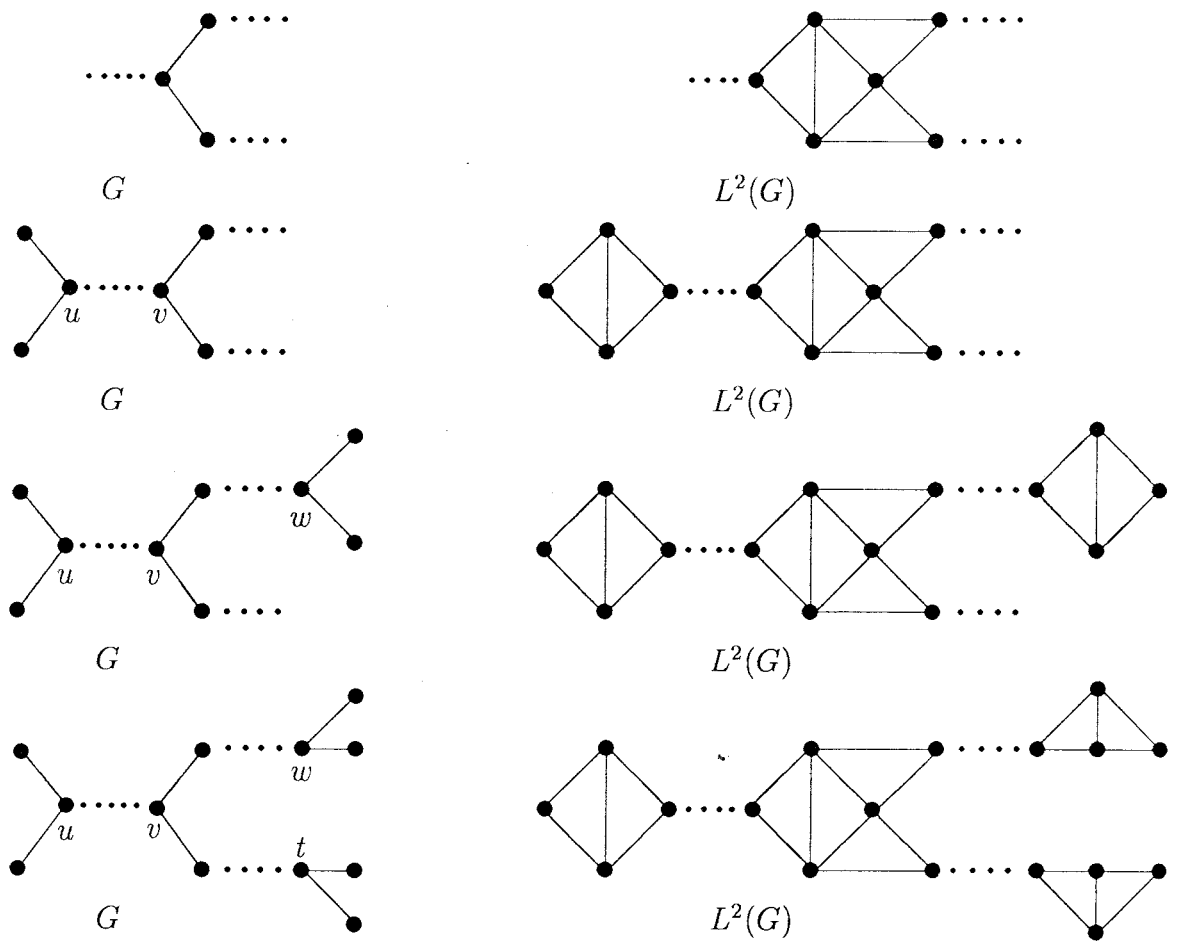


Figura 3.44: Diversas situaciones en caso de que G sea un árbol.

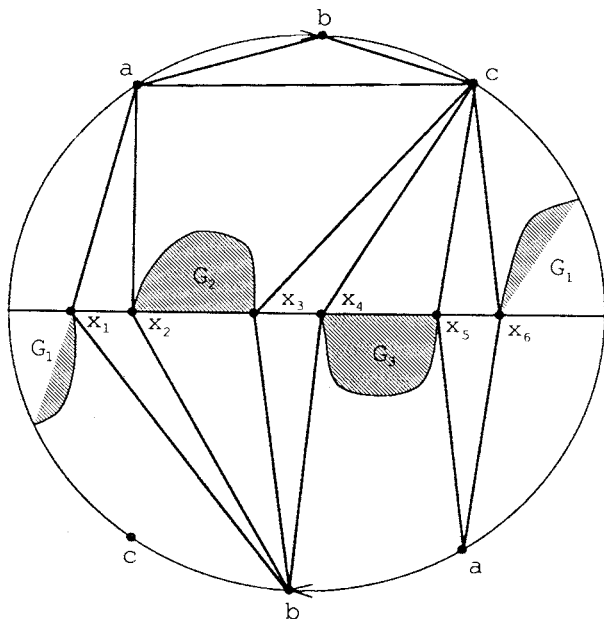


Figura 3.45: Inmersión de $L^3(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Nota 3.28. Observemos que en la lista de grafos prohibidos para el caso plano no aparecían x -menores topológicos, sólo menores topológicos.

Subgrafos prohibidos

Al igual que en la Sección 3.2.2, vamos a obtener ahora la caracterización de los grafos con tercer grafo de línea proyectivo en función de x -menores topológicos prohibidos a partir de la obtenida en la sección anterior con el orden " \ll_x ". Seguiremos el procedimiento descrito en la Sección 3.2.1.

La lista \mathcal{B}^* obtenida a partir del proceso anterior es la unión de \mathcal{B} y de $\mathcal{B}_1 = \{B_9\}$ (Figura 3.46).

Como consecuencia podemos enunciar el siguiente resultado, que nos muestra la caracterización de los grafos con tercer grafo de línea proyectivo en función de x -menores topológicos prohibidos.

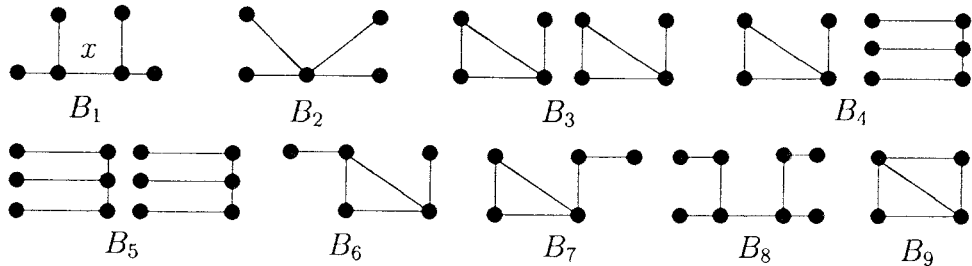


Figura 3.46: Lista \mathcal{B}^* de x -menores topológicos prohibidos.

Teorema 3.29. *Sea G un grafo finito. Son equivalentes:*

1. $L^3(G)$ es proyectivo.
2. B_1 no es un x -menor topológico de G y no existe $i \in \{2, \dots, 9\}$ tal que B_i es un menor topológico de G (ver Figura 3.46).

Demostración: Aplicando el proceso descrito en la Sección 3.2.1, de la lista \mathcal{B} se obtiene en un primer paso $\mathcal{B}_1 = \{B_9\}$ y $\mathcal{B}_2 = \emptyset$, con lo que $\mathcal{B}^* = \mathcal{B} \cup \mathcal{B}_1$. \square

Además, \mathcal{B}^* es mínima a partir del proceso seguido.

El proceso descrito ha sido aplicado mediante la implementación del correspondiente algoritmo en el ordenador.

3.2.4 Grafos con cuarto grafo de línea proyectivo

Tal como vimos en el Capítulo 0, Kulli y Sampathkumar caracterizaron en [33] los grafos con n -ésimo grafo de línea plano, con $n \geq 4$, mediante el siguiente teorema:

Teorema 3.30. $L^n(G)$ es plano, con $n \geq 4$, si y sólo si $\Delta(G) \leq 3$ y si la valencia de un vértice es 3 entonces la componente de dicho vértice es $K_{1,3}$.

Y de nuevo Akiyama [1] nos da la caracterización mediante subgrafos prohibidos:

Teorema 3.31. $L^n(G)$ es plano, con $n \geq 4$, si y sólo si G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,4}$, $K_1 + (K_1 \cup K_2)$ ó $K_{2,3} - K_{1,2}$ (ver Figura 12).

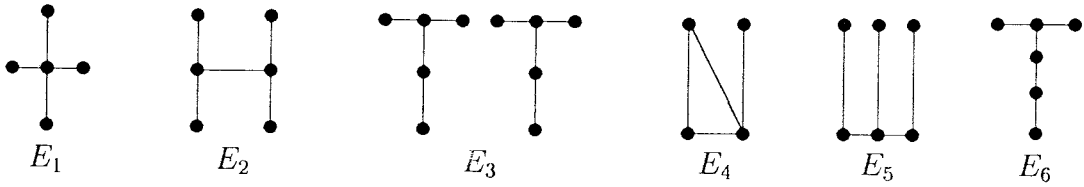


Figura 3.47: Lista \mathcal{E} de menores topológicos prohibidos para $L^4(G)$ proyectivo.

En esta sección vamos a caracterizar los grafos cuyo cuarto grafo de línea es proyectivo en términos de menores topológicos prohibidos. Usaremos la caracterización de los grafos con tercer grafo de línea proyectivo obtenida en la Sección 3.2.3.

A continuación pasaremos a enunciar y demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.32. *Sea G un grafo finito. Son equivalentes:*

1. $L^4(G)$ es proyectivo.
2. No existe $i \in \{1, \dots, 6\}$ tal que E_i es un menor topológico de G (ver Figura 3.47).

Demostración: Veamos primero la condición necesaria. Para ello, hay que probar que ninguno de los grafos de la lista \mathcal{E} , o ninguna subdivisión suya, tiene cuarto grafo de línea proyectivo usando la caracterización obtenida en el Teorema 3.27.

Por el Lema 3.20, sólo hay que estudiar, aparte de los grafos de \mathcal{E} el grafo obtenido de subdividir en E_2 la arista incidente con dos vértices de valencia 3. Llamaremos \tilde{E}_2 a dicho grafo.

Se tiene que B_6 es un MTC de $L(E_1)$, $L(E_4)$ y $L(E_5)$, B_7 es un MTC de $L(E_2)$, $L(\tilde{E}_2)$ y $L(E_6)$, y B_3 es un MTC de $L(E_3)$.

Vamos a probar ahora la condición suficiente. Sea G un grafo tal que $L^4(G)$ no es proyectivo. Vamos a probar que existe $i \in \{1, \dots, 6\}$ tal que E_i es un menor topológico de G .

Por un razonamiento análogo al empleado en la demostración del Teorema 3.27

podemos suponer G conexo ya que, en otro caso, o bien sólo una componente conexa de G no tienen cuarto grafo de línea plano o bien E_3 es un menor topológico de G .

Distinguimos varios casos:

1. $\Delta(G) \geq 4$. Entonces E_1 es un subgrafo de G .
2. $\Delta(G) = 3$. Si G contiene ciclos entonces E_4 es un menor topológico de G . Por tanto, supongamos que G es un árbol.

Si G tiene dos o más vértices de valencia 3 entonces E_2 es un menor topológico de G . Sea, pues, v el único vértice de G con $\delta(v) = 3$. Sean v_1, v_2 y v_3 los vértices adyacentes a v .

Si existen $i, j \in \{1, 2, 3\}$ tales que $\delta(v_i) = \delta(v_j) = 2$ entonces E_5 es un menor topológico de G .

Si v_1, v_2 ó v_3 tiene valencia 2, e.g. v_1 , y el vértice adyacente con él que no es v también tiene valencia 2 entonces E_6 es un menor topológico de G .

Por tanto G es $K_{1,3}$ ó Y_2 (ver Figura 3.48). En el primer caso, $L(K_{1,3}) = C_3$ por lo que $L^4(K_{1,3}) = C_3$, que es plano. En el segundo caso $L^3(Y_2) = K_1 + C_4$, lo que significa, por el Lema 3.21, que $L^4(Y_2)$ es proyectivo.

3. $\Delta(G) \leq 2$. Entonces G es un ciclo o un camino, en cuyo caso $L^4(G)$ es plano.

Con esto concluimos la demostración. □

3.2.5 Grafos con n -ésimo grafo de línea proyectivo ($n \geq 5$)

A continuación damos la caracterización, en términos de subgrafos prohibidos, de los grafos cuyo n -ésimo grafo de línea, con $n \geq 5$, admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$. Para ello usaremos la caracterización de los grafos con cuarto grafo de línea proyectivo obtenida en la Sección 3.2.4.

Teorema 3.33. *Sea G un grafo finito. Son equivalentes:*

1. $L^n(G)$ es proyectivo para $n \geq 5$.

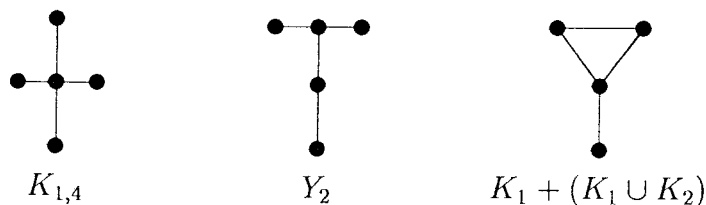


Figura 3.48: Grafos prohibidos para $L^n(G)$ proyectivo ($n \geq 5$).

2. G no contiene a $K_{1,4}$, a Y_2 ni a $K_1 + (K_1 \cup K_2)$ (ver Figura 3.48).

Demostración: Veamos la condición necesaria. E_4 es un menor topológico de $L(K_{1,4})$, de $L(Y_2)$ y de $L(K_1 + (K_1 \cup K_2))$ por tanto, por el Teorema 3.27, $L^n(K_{1,4})$, $L^n(Y_2)$ y $L^n(K_1 + (K_1 \cup K_2))$ no son proyectivos para $n \geq 5$.

Condición suficiente. Sea G un grafo tal que $L^n(G)$ no es proyectivo para algún $n \geq 5$. Distinguiamos varios casos:

1. $\Delta(G) \geq 4$. Entonces G contiene a $K_{1,4}$.
2. $\Delta(G) = 3$. Entonces G contiene a Y_2 , a $K_1 + (K_1 \cup K_2)$ o bien las componentes conexas de G son $K_{1,3}$, ciclos o caminos. En este caso $L^n(G)$ es plano para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. $\Delta(G) \leq 2$. Entonces las componentes conexas de G son ciclos o caminos. En este caso $L^n(G)$ es plano para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esto concluye la demostración. □

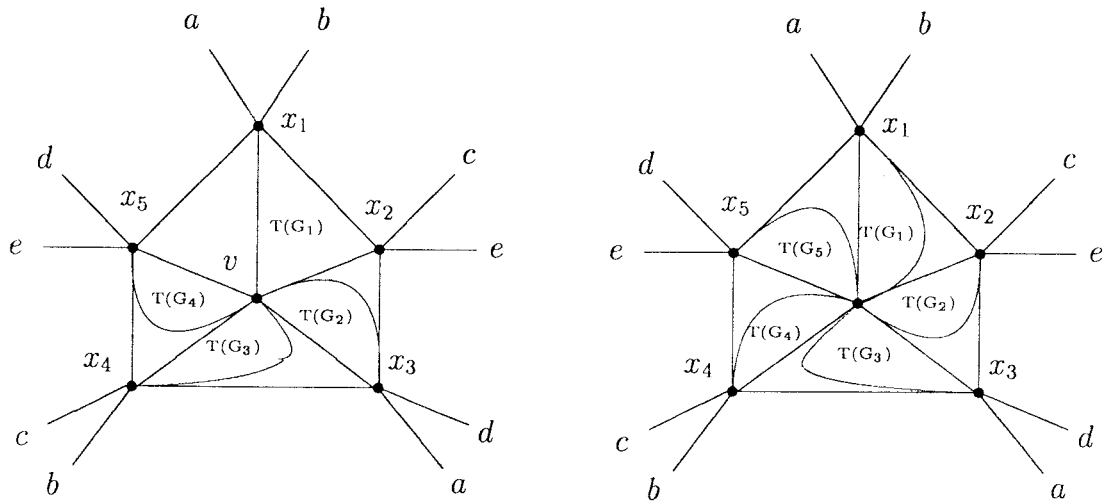


Figura 3.49: Inmersiones proyectivas de $T(G)$

3.3 Grafos medios proyectivos

Akiyama, Hamada y Yoshimura caracterizan en [2] los grafos con grafo medio plano.

Teorema 3.34. *Un grafo tiene grafo medio plano si y sólo si es plano y la valencia máxima de un vértice es a lo más 3.*

La caracterización en términos de grafos prohibidos la dio Akiyama en [1].

Teorema 3.35. *Un grafo tiene grafo medio plano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{3,3}$ ó $K_{1,4}$.*

Al igual que en las secciones anteriores, vamos a extender los resultados de Akiyama, Hamada y Yoshimura a $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ basándonos en la caracterización de los grafos proyectivos en términos de menores prohibidos [3, 4, 24].

Necesitamos antes unos resultados previos.

Dada una subdivisión S de un grafo G , diremos que $w \in V(S)$ es un G -vértice de S si $w \in V(G)$.



Como hicimos en la Sección 3.2, veamos qué relación existe entre el grafo medio de un grafo y el de un menor topológico suyo.

Lema 3.36. *Sea G_2 un grafo y G_1 un menor topológico suyo. Entonces $M(G_1)$ es un menor de $M(G_2)$.*

Demostración: Sea G_3 la subdivisión de G_1 que es un subgrafo de G_2 . De forma evidente $M(G_3)$ es un subgrafo de $M(G_2)$, con lo que basta probar que $M(G_1)$ es un menor de $M(G_3)$.

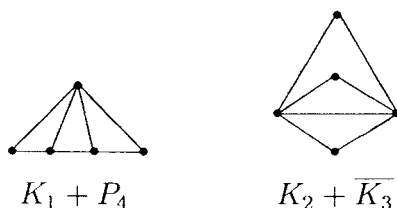
Podemos considerar que G_3 se obtiene de G_1 por la subdivisión de una sola arista $x = \{u, w\}$. El caso general se obtendría por inducción.

Sea v el vértice que subdivide $\{u, w\}$. Observemos que v es un vértice de G_3 , pero no de G_1 . Sean $x_1 = \{u, w\}$ y $x_2 = \{u, w\}$. Para concluir la demostración basta observar que $M(G_1)$ se obtiene de $M(G_3)$ borrando la arista $\{x_1, x_2\}$ y contrayendo las aristas $\{x_1, v\}$ y $\{v, x_2\}$. \square

Antes de enunciar y probar el resultado principal de esta sección, necesitamos otro lema previo.

Lema 3.37. *Sea G un grafo plano con $\Delta(G) \leq 3$. Sean v_1, \dots, v_n vértices de G con $\delta(v_i) = 1$, para $i = 1, \dots, n$, y tales que existe una inmersión de G en el plano con v_1, \dots, v_n en la misma cara. Sean x_1, \dots, x_n las aristas incidentes con v_1, \dots, v_n respectivamente. Entonces $M(G)$ es plano y existe una inmersión plana de $M(G)$ con x_1, \dots, x_n en la misma cara.*

Demostración: Podemos construir una inmersión plana de $M(G)$ a partir de la de G dibujando el punto medio de cada arista y uniendo los puntos medios de aristas incidentes entre sí. Puesto que $\Delta(G) \leq 3$, cada dos aristas incidentes comparten cara con lo que la arista que una sus puntos medios puede atravesar dicha cara y, por tanto, no se producen cruces entre las nuevas aristas, excepto en sus extremos. Además, por la forma en que hemos construido la inmersión, los vértices x_1, \dots, x_n de $M(G)$ están en la misma cara. \square

Figura 3.50: $K_1 + P_4$ and $K_2 + \overline{K_3}$.

3.3.1 Grafos con grafo medio proyectivo

A continuación vamos a caracterizar los grafos con grafo medio proyectivo en función de las propiedades que deben verificar y en términos de menores topológicos prohibidos. Lo haremos mediante el siguiente resultado.

Teorema 3.38. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $M(G)$ es proyectivo.
2. G no contiene a ningún grafo de la lista \mathcal{I} como menor topológico (ver Figura 3.51).
3. G verifica las siguientes condiciones:
 - (a) $\Delta(G) \leq 5$.
 - (b) G tiene, a lo más, un vértice de valencia mayor o igual que 4.
 - (c) Si $\delta(v) = 5$, con $v \in V(G)$, entonces no hay cuatro aristas incidentes con v en el mismo bloque.
 - (d) Si $\Delta(G) \geq 4$ entonces G es plano.
 - (e) G es proyectivo.

Demostración: Veamos que la primera condición implica la segunda. Para ello, por el Lema 3.36 basta comprobar que ningún grafo de \mathcal{N} tiene grafo medio proyectivo. Lo haremos viendo que el grafo medio de cualquier grafo de \mathcal{I} contiene como menor a uno de los 35 menores prohibidos para $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ (ver Figura 3.1).

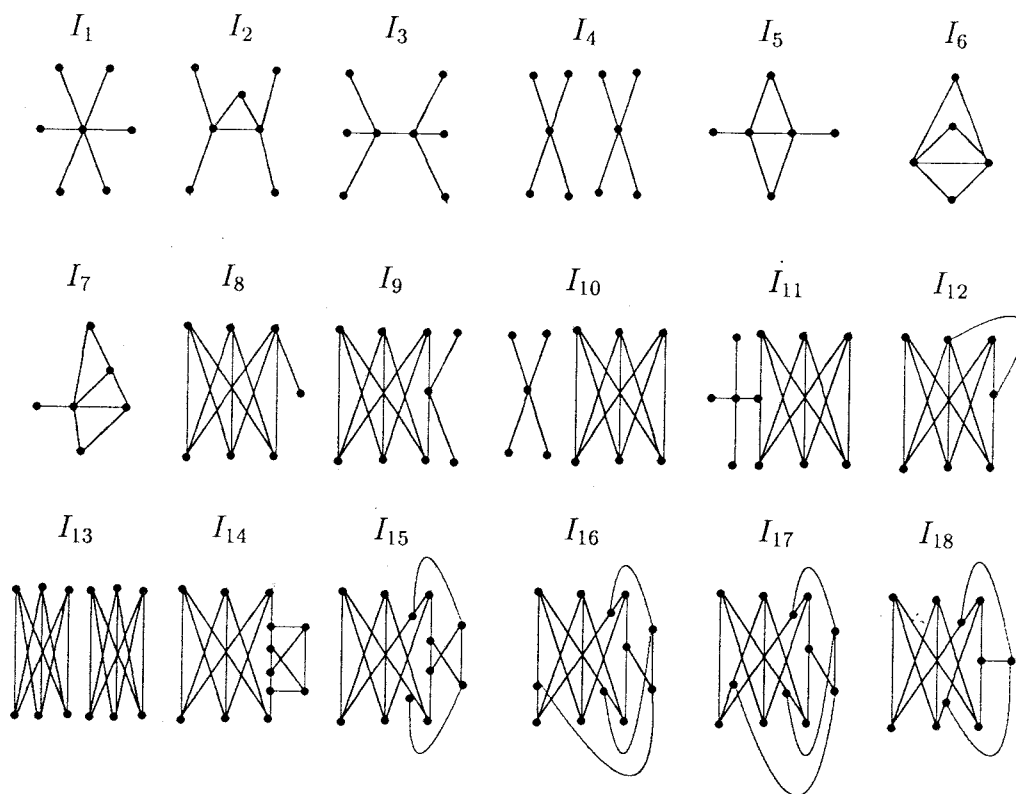


Figura 3.51: Lista \mathcal{I} de menores topológicos prohibidos.

Observemos que D_6 es un menor de I_1 , D_{14} de I_2, I_3, I_5 ; D_{15} de I_4, I_6 ; G de I_8, I_{12} ; D_4 de I_9 ; D_{30} de I_{10} ; D_{16} de I_{11} ; D_{17} de I_7 ; D_{19} de I_{13} ; D_{34} de I_{14}, I_{15} y D_5 de I_{16}, I_{17}, I_{18} .

Veamos ahora que la segunda condición implica la tercera.

Si $\Delta(G) > 5$ entonces G contiene a I_1 .

Si existe v_1, v_2 en $V(G)$ con $\delta(v_1), \delta(v_2) \geq 4$ entonces G contiene una subdivisión de I_2, I_3, I_4, I_5 ó I_6 , luego tenemos que el vértice v con $\delta(v) \geq 4$, si existe, es único.

Si $\delta(v) = 5$ y hay cuatro aristas incidentes con v en el mismo bloque, por el Lema 3.8, se tiene que G contiene una subdivisión de I_7 ó I_6 .

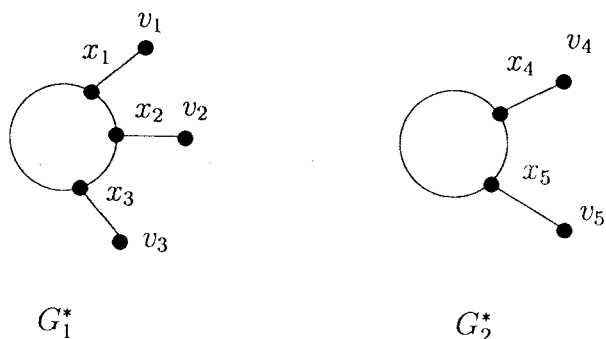
Si $\delta(v) \geq 4$ y G no es plano, G contiene una subdivisión S de $K_{3,3}$, ya que K_5 tiene más de un vértice de valencia 4. Distinguimos varios casos.

- v es un $K_{3,3}$ -vértice de S . Entonces G contiene a I_8 ó I_{12} .
- $v \in V(S)$ pero v no es un $K_{3,3}$ -vértice de S . Entonces G contiene a I_9 o bien otra subdivisión de $K_{3,3}$ en la que v sea un $K_{3,3}$ -vértice, lo cual se ha visto en el caso anterior.
- v y S no están en la misma componente conexa de G . Entonces G contiene una subdivisión de I_{10} .
- v y S están en la misma componente conexa pero $v \notin V(S)$. Si hay sólo un camino que una v con S , entonces G contiene una subdivisión de I_{11} ó I_8 .

Si hay dos caminos distintos que unan v con S , entonces G contiene una subdivisión S' de $K_{3,3}$ en la que v es un $K_{3,3}$ -vértice de S' , lo cual ya se ha visto en un caso anterior.

Finalmente, supongamos que G no es proyectivo. En este caso G debe contener una subdivisión de uno de los 103 subgrafos prohibidos para $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ (ver [3, 4, 24]). Los subgrafos prohibidos para $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ de valencia 3 son $I_{13}, I_{14}, I_{15}, I_{16}, I_{17}$ y I_{18} . Los de valencia 4 o mayor contienen en todos los casos una subdivisión de algún I_i , con $i = 1, \dots, 12$.

Para terminar la demostración, veamos que la tercera condición implica la primera.

Figura 3.52: Los grafos G_1^* y G_2^* .

Supongamos que $\Delta(G) = 5$. Sea v el único vértice de valencia 5 y sean $x_i, i = 1, \dots, 5$ las aristas incidentes con v . Por hipótesis, G es plano.

Puesto que no hay cuatro aristas incidentes con v en el mismo bloque, v es un punto de corte. Supongamos que x_1, x_2 y x_3 no están en el mismo bloque que x_4 y x_5 . Sea G_1 la componente de $G - \{x_4, x_5\}$ que contiene a v y sea G_2 la componente de $G - \{x_1, x_2, x_3\}$ que contiene a v .

Sea G_1^* el grafo obtenido de G_1 cortando v en v_1, v_2, v_3 , donde $\delta(v_i) = 1$ y x_i es incidente con v_i para $i = 1, \dots, 3$ (ver Figura 3.52).

Sea G_2^* el grafo obtenido de G_2 cortando v en v_4, v_5 , donde $\delta(v_i) = 1$ y x_i es incidente con v_i para $i = 4, 5$ (ver Figura 3.52).

Observemos que G_1^* y G_2^* no son necesariamente conexos.

G_1^* es plano y $\Delta(G_1^*) \leq 3$, luego $M(G_1^*)$ admite una inmersión plana de forma que x_i , para $i = 1, 2, 3$, están en la misma cara, según el Lema 3.37.

Análogamente, G_2^* es plano y $\Delta(G_2^*) \leq 3$, luego, por el Lema 3.37, $M(G_2^*)$ es plano.

Por tanto, podemos construir una inmersión de $M(G)$ en el plano dibujando el K_6 inducido por $v, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ con x_1, x_2, x_3 en una misma cara en la que dibujaremos G_1^* y G_2^* estará inmerso en otra cara plana con x_4, x_5 en su frontera, según muestra la Figura 3.53. Por tanto, $M(G)$ es proyectivo.

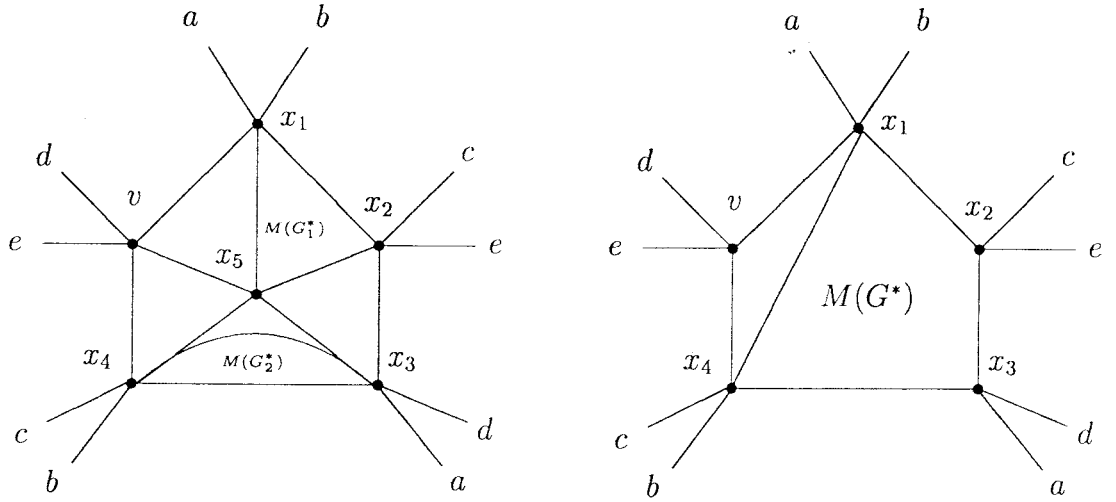


Figura 3.53: Inmersiones de $M(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ en los casos $\Delta(G) = 5$ y $\Delta(G) = 4$.

Si $\Delta(G) = 4$ entonces G es plano. Sea v el único vértice de valencia 4, sean x_i , $i = 1, \dots, 4$ las aristas incidentes con v en G y sea G^* el grafo obtenido de G cortando v en v_i , con $\delta(v_i) = 1$, y tal que cada v_i es incidente con x_i , para $i = 1, \dots, 4$. G^* es plano y $\Delta(G^*) \leq 3$, luego $M(G^*)$ es plano y se demuestra fácilmente que puede darse una inmersión suya en el plano con x_i en la cara exterior, para $i = 1, \dots, 4$.

Por tanto, podemos construir una inmersión de $M(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ dibujando el K_5 inducido por v, x_1, x_2, x_3, x_4 con x_1, x_2, x_3, x_4 en una misma cara en la que dibujaremos G^* , tal como muestra la Figura 3.53. Por tanto $M(G)$ es proyectivo.

Por último, si $\Delta(G) \leq 3$ entonces G es proyectivo por hipótesis. Podemos construir una inmersión proyectiva de $M(G)$ a partir de la de G por un procedimiento análogo al usado en la demostración del Lema 3.37, es decir, dibujando el punto medio de cada arista y uniendo los puntos medios de aristas incidentes entre sí. Puesto que $\Delta(G) \leq 3$, cada dos aristas incidentes comparten cara con lo que la arista que una sus puntos medios puede atravesar dicha cara y, por tanto, no se producen cruces entre las nuevas aristas, excepto en sus extremos. \square

Al igual que hemos hecho con las listas de grafos prohibidos anteriores, vamos a enunciar el siguiente resultado sobre la minimalidad de la lista \mathcal{I} , es decir, si G es un menor topológico de un grafo $I \in \mathcal{I}$ entonces $M(G)$ es proyectivo.

Proposición 3.39. *La lista \mathcal{I} de menores topológicos prohibidos es mínima.*

Demostración: Al igual que en las listas anteriores, basta probar que los grafos obtenidos borrando una arista de todas las formas posibles a los subgrafos de \mathcal{I} tienen grafo medio proyectivo.

Los grafos I_i con $i = 13, \dots, 18$ son los menores prohibidos para $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de valencia 3 (ver Figura 3.1) con lo que, si borramos una arista a alguno de ellos, el grafo obtenido es proyectivo y, por el Lema 3.37, también lo sería su grafo medio.

Borrando una arista a I_1 se obtiene $K_{1,5}$, cuyo grafo medio admite una inmersión en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ a partir de la de K_6 .

Borrando una arista a los grafos I_i con $i = 2, \dots, 6$ obtenemos en todos los casos un grafo cuyo grafo medio consiste en un K_5 unido a un subgrafo plano que se puede dibujar en una de las caras de la inmersión proyectiva de éste sin que se produzcan falsos cruces, en $K_5 \cup G$ con G plano o en $K_4 \cup K_4$, todos ellos proyectivos.

Borrando una arista a I_7 obtenemos grafos cuyo grafo medio consiste en K_5 ó K_6 unidos a un subgrafo plano sumergible en una de las caras de la inmersión proyectiva de éstos.

Finalmente, borrando una arista a los grafos I_i con $i = 8, \dots, 12$ se obtienen grafos cuyo grafo medio consiste en un $K_{3,3}$ o un K_5 unido o disjunto con un subgrafo plano sumergible en una cara de una inmersión proyectiva de dicho $K_{3,3}$ ó K_5 .

3.3.2 Grafos con grafo medio iterado proyectivo

Tal como hemos visto en el Capítulo 0, los conceptos de grafos medio y total iterados se definen de la manera natural, es decir; si denotamos como $M^1(G)$ a $M(G)$, y como $T^1(G)$ a $T(G)$ entonces $M^n(G) = M(M^{n-1}(G))$ y $T^n(G) = T(T^{n-1}(G))$, para todo $n > 1$.

Los grafos medios iterados planos fueron caracterizados por Akiyama en [1]. En este artículo, el autor demuestra que la planaridad de $M^n(G)$ es equivalente a la de $T^{n-1}(G)$, para $n \geq 3$. Para el segundo grafo medio, la caracterización viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 3.40. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

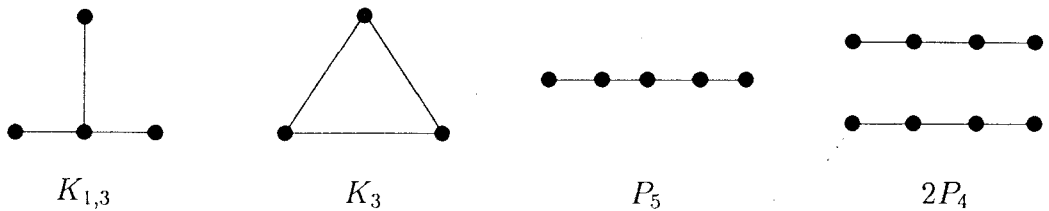


Figura 3.54: Grafos prohibidos para $M^2(G)$ proyectivo.

1. $M^2(G)$ es plano
2. Las componentes de G son $K_{1,2}$, K_2 ó K_1 .
3. G no contiene un subgrafo homeomorfo a P_4 , $K_{1,3}$ ó K_3 .

En esta sección vamos a caracterizar a los grafos G tales que $M^n(G)$ es proyectivo, para $n \geq 2$, basándonos en la caracterización que hemos obtenido para los grafos con grafos medio proyectivo..

Veamos primero el segundo grafo medio. La caracterización de los grafos cuyo segundo grafo medio es proyectivo viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 3.41. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $M^2(G)$ es proyectivo.
2. $G = P_k \cup G'$ donde $k \leq 4$ y las componentes conexas de G' son P_j con $j \leq 3$.
3. G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,3}$, K_3 , P_5 ó $2P_4$ (ver Figura 3.54).

Demostración: Es evidente que las condiciones 2. y 3. son equivalentes.

Para demostrar que la condición 1. implica la condición 3. por el Lema 3.36 basta probar que $M^2(H)$ no es proyectivo, con $H \in \{K_{1,3}, K_3, P_5, 2P_4\}$. Para ello, basta



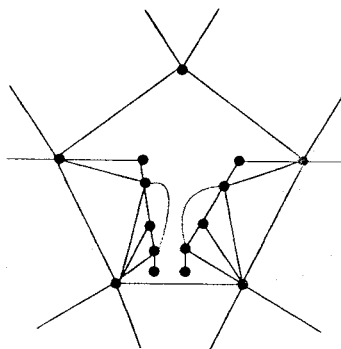


Figura 3.55: Inmersión de $M^2(P_4)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$.

comprobar que $M(K_{1,3})$ contiene a I_3 como menor topológico, $M(K_3)$ a I_5 , $M(P_5)$ a I_2 y $M(2P_4)$ a I_4 , y aplicar el Teorema 3.38.

Por último, veamos que la condición 2. implica la condición 1. Consideremos $P_4 \cup nP_3$. $M^2(P_3)$ es plano y $M^2(P_4)$ admite una inmersión en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$, según nos muestra la Figura 3.55, a partir de la cual podemos construir otra de $M^2(P_4 \cup nP_3)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ dibujando $nM^2(P_3)$ en una cara plana. Cualquier otro grafo G que cumpla 2. es subgrafo de $P_4 \cup nP_3$, con lo que su segundo grafo medio también sería proyectivo. \square

Para los terceros grafos medios obtenemos la siguiente caracterización.

Teorema 3.42. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $M^3(G)$ es proyectivo.
2. Las componentes conexas de G tienen, a lo más, una arista.
3. G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,2}$.

Demostración: Es evidente que las condiciones 2. y 3. son equivalentes.

La condición 1. implica la condición 3. ya que $M(K_{1,2})$ contiene a K_3 , por tanto, por el Teorema 3.41, se tiene que $M^3(K_{1,2}) = M^2(M(K_{1,2}))$ no es proyectivo.

Por último, la condición 2. implica la condición 1. puesto que $M^3(K_2)$ es plano. \square

La caracterización de los grafos con n-ésimo grafo medio proyectivo, con $n \geq 4$, viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 3.43. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $M^n(G)$ es proyectivo, con $n \geq 4$.
2. Las componentes conexas de G no tienen ninguna arista.
3. G no tiene un subgrafo homeomorfo a K_2 .

Demostración: Es evidente que las condiciones 2. y 3. son equivalentes.

La condición 1. implica la condición 3. ya que $M(K_2)$ es isomorfo a $K_{1,2}$ y, por tanto, por el Teorema 3.42, se tiene que $M^4(K_2) = M^3(K_{1,2})$ no es proyectivo. Como $M^n(G) = M^{n-4}(M^4(G))$ para $n \geq 4$, se tiene lo que queríamos.

Por último, la condición 2. implica la condición 1. puesto que $M^n(K_1)$ es isomorfo a K_1 , para todo n , y, por tanto, es proyectivo. \square

3.4 Grafos totales proyectivos

Behzad, en [9], nos da la siguiente caracterización de los grafos con grafo total plano:

Teorema 3.44. *Un grafo G tiene grafo total plano si y sólo si $\Delta(G) \leq 3$ y si $\delta(v) = 3$ para algún vértice v de G entonces v es un punto de corte.*

Akiyama nos da en [1] la siguiente caracterización de los grafos con grafo total plano en términos de subgrafos prohibidos.

Teorema 3.45. *Un grafo G tiene un grafo total plano si y sólo si no contiene como subgrafo ninguna subdivisión de $K_{1,4}$ ni de $K_1 + P_3$.*



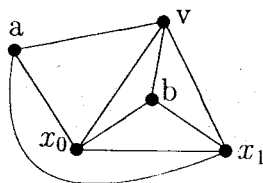


Figura 3.56: $T(G)$ con v , x_0 y x_1 en caras distintas.

De nuevo, la demostración de ambos resultados se apoya en el Teorema de Kuratowski para el plano. En una línea análoga a la empleada en la sección anterior, vamos a extender los resultados de Behzad y Akiyama a $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$.

Al igual que para grafos medios, vamos a ver qué relación guarda el grafo total de un grafo y el de un menor topológico suyo.

Lema 3.46. *Sea G_2 un grafo y G_1 un menor topológico suyo. Entonces $T(G_1)$ es un menor de $T(G_2)$.*

Demostración: Sea G_3 la subdivisión de G_1 que es subgrafo de G_2 . Es evidente que $T(G_3)$ es un subgrafo de $T(G_2)$, por lo que es suficiente probar que $T(G_1)$ es un menor de $T(G_3)$.

Para ello, basta considerar que G_3 se obtiene de G_1 subdividiendo sólo la arista $x = \{u, w\}$. El caso general se obtendría a partir de éste por inducción.

Sea v el vértice que subdivide a $\{u, w\}$, con lo que v es un vértice de G_3 , pero no de G_1 . Sean $x_1 = \{u, w\}$ y $x_2 = \{u, w\}$.

En este caso, $T(G_1)$ se obtiene de $T(G_3)$ borrando las aristas $\{x_1, v\}$ y $\{x_2, w\}$ y contrayendo las aristas $\{u, v\}$ y $\{x_1, x_2\}$. \square

Lema 3.47. *Sea G un grafo tal que $T(G)$ es plano. Sea v un vértice tal que $\delta(v) = 2$ y $G - v$ es conexo. Sean x_0 y x_1 las aristas incidentes con v . Entonces existe una inmersión de $T(G)$ en el plano con v , x_0 y x_1 en la misma cara y, además, dicha cara es un triángulo.*

Demostración: Sea Γ una inmersión plana de $T(G)$. Por definición de grafo total v ,

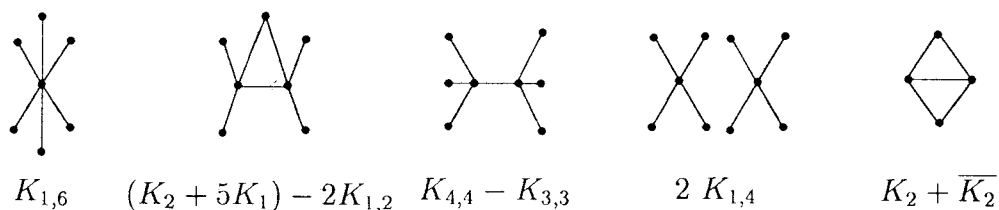


Figura 3.57: Lista \mathcal{J} de menores topológicos prohibidos para grafos con grafo total proyectivo.

x_0 y x_1 son adyacentes en $T(G)$. Si no estuvieran en la misma cara, tendríamos una situación similar a la que muestra la Figura 3.56, donde a y b son dos elementos de $T(G)$.

Puesto que $G - v$ es conexo, existe un camino en G entre a y b que no contiene a v , x_0 y x_1 . $T(G)$ ha de contener un camino en las mismas condiciones, pero este camino tiene que atravesar el triángulo de vértices $\{v, x_0, x_1\}$ por un cierto punto, con lo que Γ no es una inmersión y llegamos, por tanto, a contradicción. \square

3.4.1 Grafos con grafo total proyectivo

Al igual que hicimos con los grafos medios, vamos a caracterizar los grafos cuyo grafo total es proyectivo de dos formas: en función de las propiedades que deben verificar y en términos de menores topológicos prohibidos. Lo haremos mediante el siguiente teorema.

Teorema 3.48. *Sea G un grafo finito. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $T(G)$ es proyectivo.
2. G no contiene como menor topológico a ningún grafo de la lista \mathcal{J} (ver Figura 3.57).
3. G verifica las siguientes condiciones:
 - (a) $\Delta(G) \leq 5$.
 - (b) G tiene, como máximo, un vértice de valencia mayor o igual que 4.

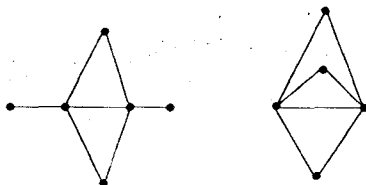


Figura 3.58: Dos grafos que contienen a $K_2 + \overline{K_2}$.

(c) Todo vértice de G de valencia 3 es un punto de corte.

Demostración: Veamos que la primera condición implica la segunda.

Por el Lema 3.46, basta probar que $T(J)$ no es proyectivo para todo $J \in \mathcal{J}$.

Observemos que D_6 es un menor de $T(K_{1,6})$; D_{14} es un menor de $T((K_2 + 5K_1) - 2K_{1,2})$ y $T(K_{4,4} - K_{3,3})$; D_{15} es un menor de $T(K_{1,4})$, y D_{23} es un menor de $T(K_2 + \overline{K_2})$ (ver Figura 3.1).

A continuación probaremos que la segunda condición implica la tercera.

Si $\Delta(G) > 5$ entonces G contiene a $K_{1,6}$.

Si G tiene, al menos, dos vértices de valencia mayor o igual que 4 entonces $(K_2 + 5K_1) - 2K_{1,2}$, $K_{4,4} - K_{3,3}$, $2K_{1,4}$ o uno de los grafos de la Figura 3.58 es un menor topológico de G , donde $K_2 + \overline{K_2}$ es subgrafo de éstos últimos.

Finalmente, si un vértice de valencia 3 de G no es punto de corte entonces $K_2 + \overline{K_2}$ es un menor topológico de G .

Para terminar la demostración, veamos que la tercera condición implica la primera.

Supongamos que v es un vértice de G tal que $\delta(v) = 5$. Puesto que $\Delta(G - v) \leq 3$ y todo vértice de valencia 3 es un punto de corte, v también ha de ser punto de corte y $K_2 + \overline{K_2}$ no puede ser un menor topológico de G . Luego G ha de tener una de las formas que nos muestra la Figura 3.59, donde $\Delta(G_i) \leq 3$, $i = 1, \dots, 5$.

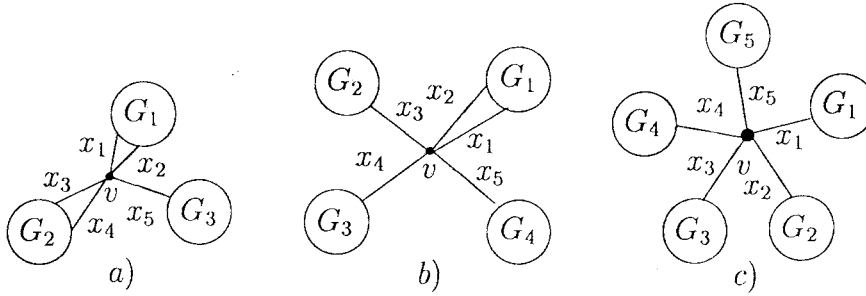


Figura 3.59: Formas de G con $\Delta(G) = 5$.

Consideremos el primer caso. $T(G_i)$, $i = 1, 2, 3$, son planos según el Teorema 3.44. Por el Lema 3.47, existen inmersiones planas de $T(G_1 \cup \{x_1, x_2\})$ y $T(G_2 \cup \{x_3, x_4\})$ con v, x_1, x_2 y v, x_3, x_4 en caras triangulares respectivamente. Además se tiene trivialmente que existe una inmersión plana de $T(G_3 \cup \{x_5\})$ con v, x_5 en una misma cara.

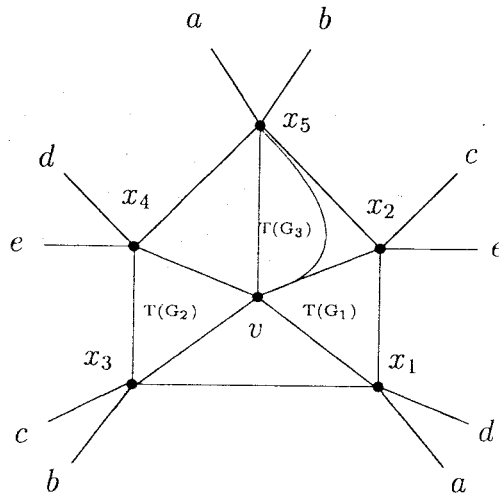
Teniendo en cuenta lo anterior, podemos construir una inmersión de $T(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ según muestra la Figura 3.60, donde $T(G_1)$, $T(G_2)$ y $T(G_3)$ tienen como cara exterior vx_1x_2 , vx_3x_4 y vx_5x_2 respectivamente. Por tanto $T(G)$ es proyectivo.

Si G es de la forma que muestra la Figura 3.59 b) ó c), podemos construir una inmersión de $T(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ de forma análoga, según muestra la Figura 3.49.

Supongamos que $\Delta(G) = 4$ y sea v el único vértice de valencia 4. Consideremos $G' = G \cup \{x\}$ donde x es una nueva arista incidente con v . G' verifica la condición 3. y $\Delta(G') = 5$ por tanto, de acuerdo con el caso anterior, $T(G')$ es proyectivo, lo que implica que $T(G)$ también lo es pues $T(G) \subset T(G')$.

Finalmente, si $\Delta(G) \leq 3$ se tiene que $T(G)$ es plano por el Teorema 3.44, luego $T(G)$ es proyectivo. Esto concluye la demostración del teorema. \square

Terminamos esta sección, al igual que hemos hecho con las listas de grafos prohibidos para grafos con grafo de línea y medio proyectivo, enunciando el siguiente resultado sobre la minimalidad de la lista \mathcal{J} , es decir, si G es un menor topológico de un grafo $J \in \mathcal{J}$ entonces $T(G)$ es proyectivo. Para obtener dicha minimalidad, basta comprobar que el grafo total de los grafos resultantes de borrar una arista de todas las formas posibles a los grafos de \mathcal{J} es proyectivo.

Figura 3.60: Una inmersión proyectiva de $T(G)$.

Proposición 3.49. *La lista \mathcal{J} de menores topológicos prohibidos es mínima.*

3.4.2 Grafos con grafo total iterado proyectivo

La caracterización de los grafos totales iterados planos viene dada por el Teorema 0.24.

En esta sección vamos a caracterizar a los grafos G tales que $T^n(G)$ son proyectivos, para $n \geq 2$, basándonos en la caracterización que hemos obtenido para los grafos con grafo total proyectivo. Curiosamente, y al igual que en el plano, se vuelve a obtener que el hecho de que $M^n(G)$ sea proyectivo es equivalente a que lo sea $T^{n-1}(G)$, pero esta vez para $n \geq 2$.

Veamos primero la caracterización de los grafos cuyo segundo grafo total es proyectivo, dada por el siguiente resultado.

Teorema 3.50. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $T^2(G)$ es proyectivo.
2. Las componentes conexas de G tienen, a lo más, una arista.

3. G no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_{1,2}$.

Demostración: Es evidente que las condiciones 2. y 3. son equivalentes.

La condición 1. implica la condición 3. ya que $T(K_{1,2})$ contiene a $K_2 + \overline{K_2}$ (ver Figura 3.57), por tanto, por el Teorema 3.48, se tiene que $T^2(K_{1,2})$ no es proyectivo.

Por último, la condición 2. implica la condición 1. puesto que $T^2(K_2)$ es plano. \square

Para los n -ésimos grafos totales, con $n \geq 3$, obtenemos la siguiente caracterización.

Teorema 3.51. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $T^n(G)$ es proyectivo, con $n \geq 3$.
2. Las componentes conexas de G no tienen ninguna arista.
3. G no tiene un subgrafo homeomorfo a K_2 .

Demostración: Es evidente que las condiciones 2. y 3. son equivalentes.

La condición 1. implica la condición 3. ya que $T(K_2)$ contiene a $K_{1,2}$, por tanto, por el Teorema 3.50, se tiene que $T^3(K_2) = T^2(T(K_2))$ no es proyectivo. Como $T^n(G) = T^{n-3}(T^3(G))$ para $n \geq 3$, se tiene lo que queríamos.

Por último, la condición 2. implica la condición 1. puesto que $T^n(K_1)$ es isomorfo a K_1 , para todo n , y, por tanto, es plano. \square

Concluimos esta sección enunciando el siguiente corolario, que se obtiene directamente de los resultados anteriores y que resulta curioso, pues pone de manifiesto, tal como señalábamos anteriormente, que la relación entre grafos medios y grafos totales iterados planos se mantiene en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, incluso se acentúa.

Corolario 3.52. *Sea G un grafo. $T^n(G)$ es proyectivo si y sólo si $M^{n+1}(G)$ es proyectivo, para todo $n \geq 2$.*

3.5 Grafos de línea periprojectivos

Como señalábamos en el capítulo anterior, el concepto de periplanaridad surge al exigir a la inmersión plana de un grafo algunas propiedades adicionales. Un grafo se dice periplano si admite una representación plana de forma que todos los vértices estén en una misma cara. Los grafos periplanos fueron introducidos por Chartrand y Harary en [17] quienes proporcionaron, además, su caracterización.

Este concepto es generalizable de forma natural al plano proyectivo, y, en general a cualquier superficie. En este sentido, diremos que un grafo G es periprojectivo si admite una inmersión en el plano proyectivo de forma que todos sus vértices estén en una misma cara.

Los grafos periprojectivos fueron caracterizados de forma independiente por Cáceres y Revuelta y por Archdeacon, Hartsfield, Little y Mohar ([5, 15, 38]). A continuación enunciamos el resultado que los caracteriza.

Teorema 3.53. *Sea G un grafo. G es periprojectivo si y sólo si no contiene como menor a ninguno de los grafos de $Per(\mathbb{P}_2(\mathbb{R}))$ (ver Figura 3.61).*

La relación entre planaridad y grafos de línea fue hallada por Chartrand, Geller y Hedetniemi, quienes caracterizan en [16] los grafos con grafo de línea periplano mediante el siguiente resultado:

Teorema 3.54. *Un grafo tiene grafo de línea periplano si y sólo si la valencia máxima de un vértice es a lo más 3 y si un vértice tiene valencia 3, entonces es un punto de corte.*

En [1], Akiyama caracteriza los grafos cuyos grafos de línea son periplanos en términos de subgrafos prohibidos:

Teorema 3.55. *Un grafo tiene grafo de línea periplano si y sólo si no tiene un subgrafo homeomorfo a $K_1 + P_3$ ó $K_{1,4}$ (ver Figura 18).*

En este capítulo vamos a caracterizar los grafos con grafo de línea periprojectivo basándonos en la caracterización de los grafos periprojectivos y utilizando la relación " \ll " definida en la Sección 3.2

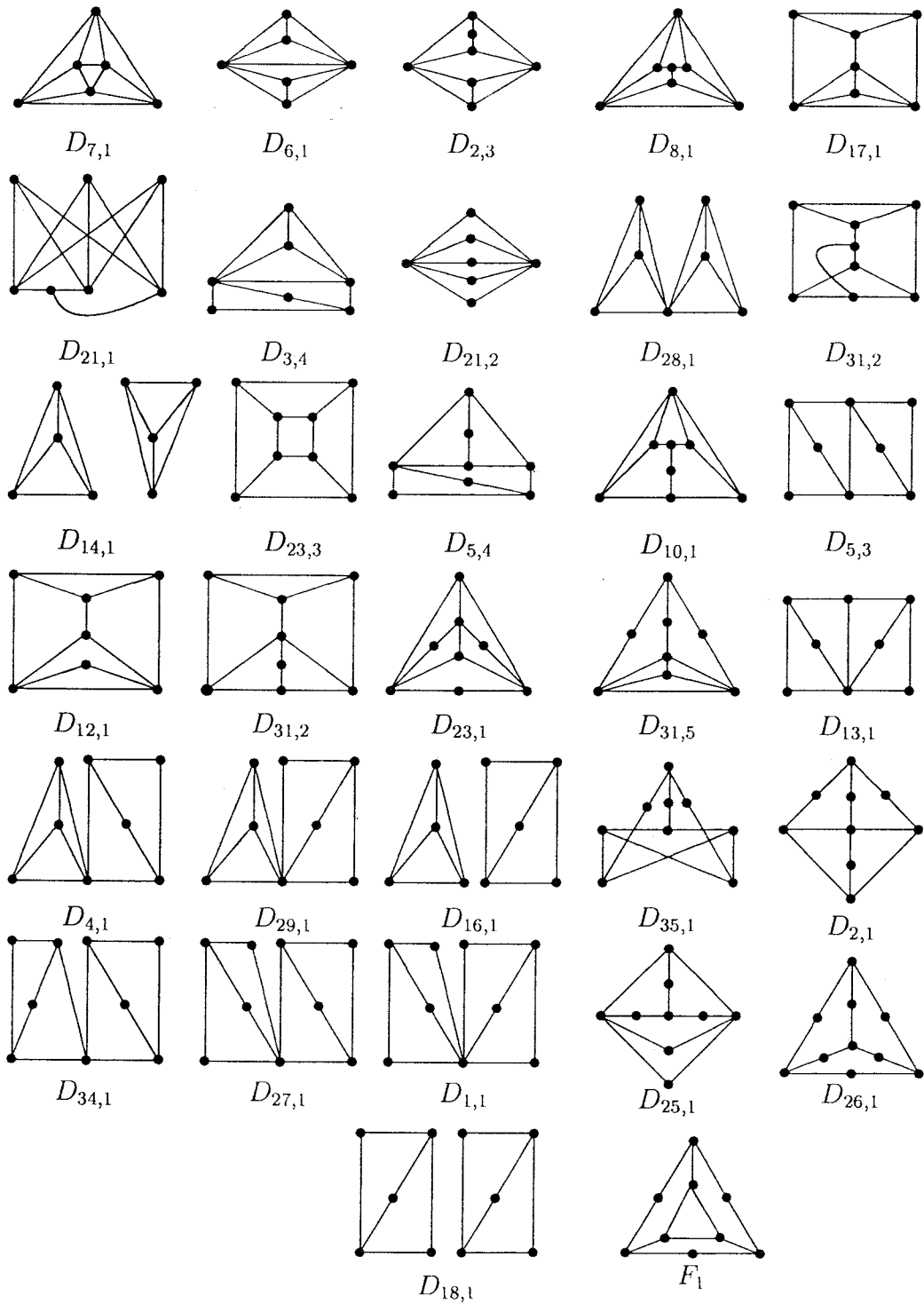


Figura 3.61: Lista $Per(\mathbb{IP}_2(\mathbb{R}))$ de menores prohibidos para grafos periprojectivos.

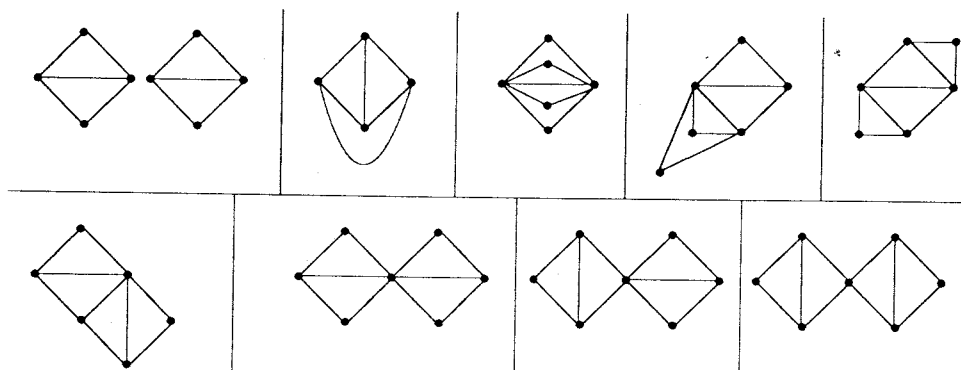


Figura 3.62: Menores minimales prohibidos para $1\text{-IP}_2(\mathbb{R})$ -cubierto

Antes de enunciar y demostrar el resultado principal haremos algunas consideraciones.

En [22], dada una superficie S y un natural n , Gegúndez define un grafo G n - S - *cubierto* si hay una representación de G en S de manera que existen n caras que contienen a todas las aristas del grafo. Cáceres demuestra el siguiente resultado [15].

Teorema 3.56. *Un grafo G es $1\text{-IP}_2(\mathbb{R})$ -cubierto si, y sólo si no contiene como menor a ninguno de los grafos de la Figura 3.62.*

Podemos, pues, enunciar el siguiente resultado:

Lema 3.57. *Sea G un grafo tal que $\Delta(G) = 3$ y G es $1\text{-IP}_2(\mathbb{R})$ -cubierto. Entonces $L(G)$ es periproyectivo.*

Demostración: Por hipótesis, G posee una inmersión en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ con todas las aristas en una misma cara. A partir de dicha inmersión podemos construir una inmersión de $L(G)$ situando un vértice en el punto medio de cada arista y uniendo los vértices correspondientes a aristas adyacentes. No se producen falsos cruces puesto que $\Delta(G) = 3$ y, por tanto, dos aristas incidentes siempre comparten cara. Por construcción, esta inmersión de $L(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ posee los vértices en una misma cara, lo que demuestra que $L(G)$ es periproyectivo. \square

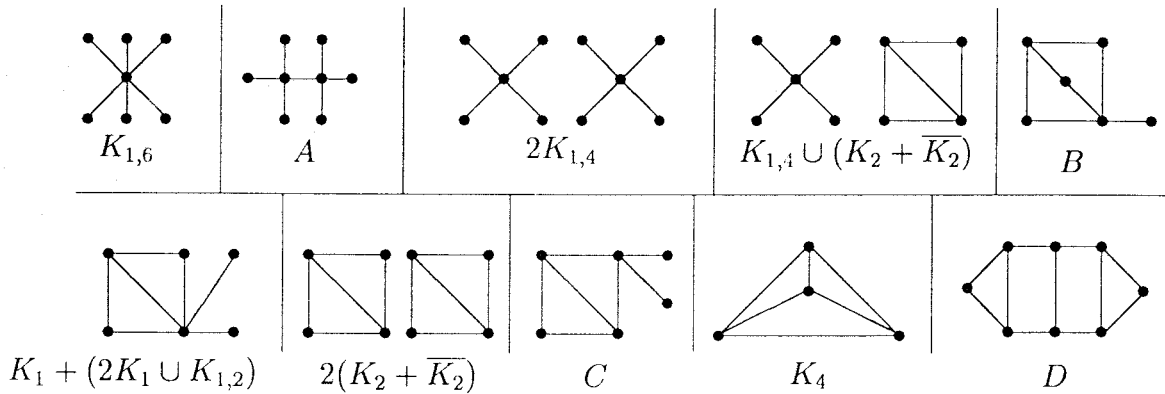


Figura 3.63: Lista \mathcal{B}^* de grafos prohibidos.

3.5.1 Grafos con grafo de línea periprojectivo

Llamemos \mathcal{B}^* a la lista de grafos dada en la Figura 3.63. La caracterización de los grafos con grafo de línea periprojectivo viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 3.58. *Sea G un grafo. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $L(G)$ es periprojectivo.
2. No existe $H \in \mathcal{B}^*$ tal que $H \ll G$.

Demostración: Veamos que la primera condición implica la segunda.

Para ello basta probar que ningún grafo $H \in \mathcal{B}^*$ tiene grafo de línea periprojectivo comprobando que todos sus grafos de línea tienen como menor a alguno de los de la Figura 3.61.

En efecto, $L(K_{1,6})$ tiene como menor a $D_{7,1}$, $L(A)$ tiene como menor a $D_{28,1}$, $L(2K_{1,4})$ a $D_{14,1}$, $L(K_{1,4} \cup (K_2 + \overline{K_2}))$ a $D_{16,1}$, $L(B)$ a $D_{17,1}$, $L(K_1 + (2K_1 \cup K_{1,2}))$ a $D_{6,1}$, $L(2(K_2 + \overline{K_2}))$ a $D_{18,1}$, $L(C)$ a $D_{3,4}$, $L(K_4)$ a $D_{7,1}$ y $L(D)$ a $D_{5,3}$.

Veamos que la segunda condición implica la primera.

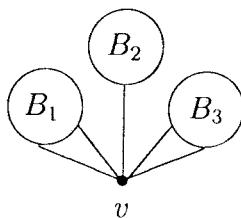


Figura 3.64:

Supongamos que $L(G)$ no es periproyectivo. Si G no es conexo y tiene al menos dos componentes no periplanas, por [1] contiene a $2K_{1,4}$, $K_{1,4} \cup (K_2 + \overline{K_2})$ ó a $2(K_2 + \overline{K_2})$ como menor topológico.

Si todas las componentes de G son periplanas, G es periplano y, por tanto, periproyectivo, lo que contradice nuestra hipótesis.

Si G tiene exactamente una componente conexa no periplana G' , tenemos que para todo $H \in \mathcal{B}$, $H \ll G$ si y sólo si $H \ll G'$, luego podemos suponer que G es conexo.

Distinguimos varios casos.

Caso 1. $\Delta(G) = 6$. Entonces $K_{1,6} \ll G$.

Caso 2. $\Delta(G) = 5$. Si hubiera más de un vértice de valencia 5 G entonces $A \ll G$ ó $2K_{1,4} \ll G$. Sea, pues, v el único vértice de G de valencia 5.

Si existiera un bloque con tres o más aristas incidentes con v entonces $K_1 + (2K_1 \cup K_{1,2}) \ll G$. Luego G tiene la forma que muestra la Figura 3.64, donde B_1 , B_2 y B_3 no tienen que ser necesariamente bloques.

Si $L(B_1)$, $L(B_2)$ y $L(B_3)$ fueran periplanos, podríamos construir la inmersión periproyectiva de $L(G)$ que muestra la Figura 3.65, donde se identifican puntos diametralmente opuestos; lo que contradice nuestra hipótesis.

Por tanto, algún B_i , $i = 1, 2, 3$ ha de tener grafo de línea no periplano y, según [1], contener a $K_{1,4}$ o a $K_2 + \overline{K_2}$. Pero entonces A , $2K_{1,4}$, $K_{1,4} \cup (K_2 + \overline{K_2})$, $2(K_2 + \overline{K_2})$, B , $K_1 + (2K_1 \cup K_{1,2})$ ó $C \ll G$.

Caso 3. $\Delta(G) = 4$. En este caso, G ha de tener un único vértice de valencia 4. De lo contrario, $A \ll G$ ó $2K_{1,4} \ll G$. Sea v dicho vértice.

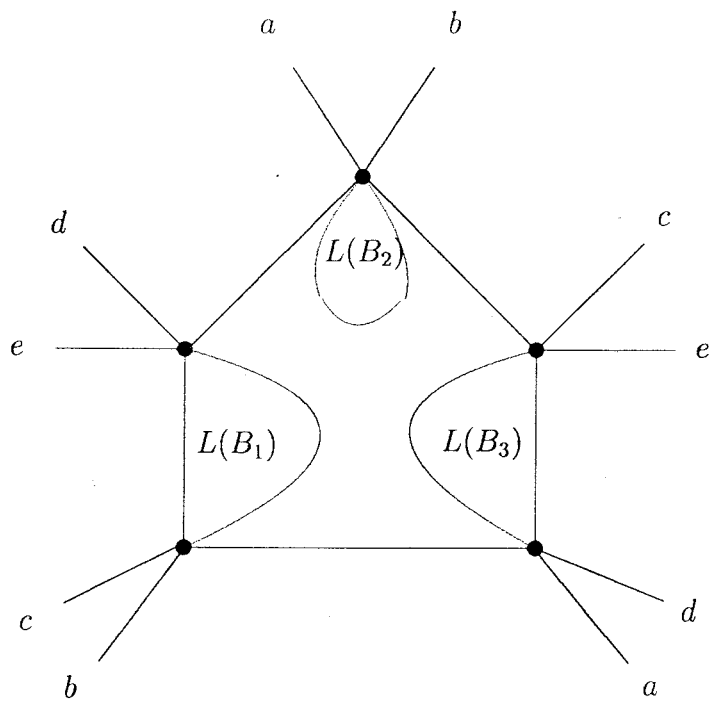


Figura 3.65:



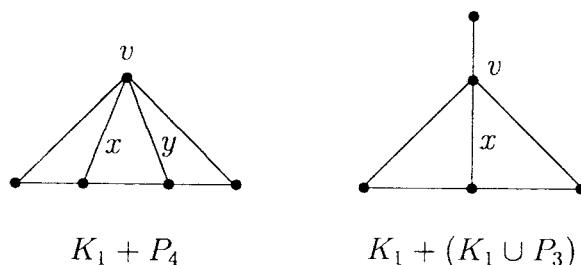


Figura 3.66:

Si $K_2 + \overline{K_2}$ es un menor topológico de $G - v$ entonces se tiene que $K_{1,4} \cup (K_2 + \overline{K_2}) \ll G$. Por tanto, todos los vértices de $G - v$ de valencia 3 son puntos de corte.

Distinguimos varios casos:

Caso 3.1. Si v no es punto de corte en G , según Greenwell y Hemminger [25], $K_1 + P_4$ es un menor topológico de G . Llamemos x e y a las aristas de $K_1 + P_4$ adyacentes con v y con un vértice de valencia 3 (Figura 3.66).

Si x ó y se encuentran subdivididas en la subdivisión de $K_1 + P_4$ que contiene G , entonces $B \ll G$.

En otro caso, podemos construir una inmersión periproyectiva de G tal como muestra la Figura 3.67, en la que se identifican puntos diametralmente opuestos, a partir de una inmersión periproyectiva de K_4 y de una inmersión periplana de $L(G - v)$; ésta última viene inducida por una inmersión periplana de $G - v$ porque, según hemos visto, $\Delta(G - v) = 3$ y todo vértice de valencia 3 en $G - v$ es punto de corte.

Caso 3.2. Si v es punto de corte, llamaremos G_i , $i = 1, \dots, 4$ a cada una de las componentes conexas de $G - v$. G tiene una de las formas que indica la Figura 3.68.

Las componentes G_i tienen grafo de línea periplano por no contener subdivisiones de $K_{1,4}$ ni de $K_2 + \overline{K_2}$. En el primer caso, G contiene a una subdivisión de $K_1 + (K_1 \cup P_3)$. Si la arista x aparece subdividida en la subdivisión de $K_1 + (K_1 \cup P_3)$ entonces $C \ll G$. De lo contrario podemos construir una inmersión periproyectiva de $L(G)$ tal como se vio en el Caso 3.1. (Figura 3.67).

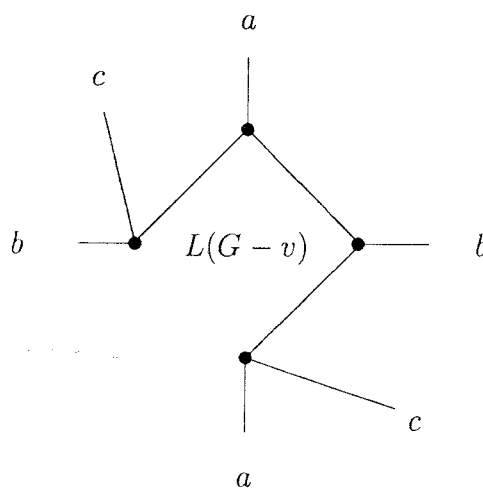


Figura 3.67:

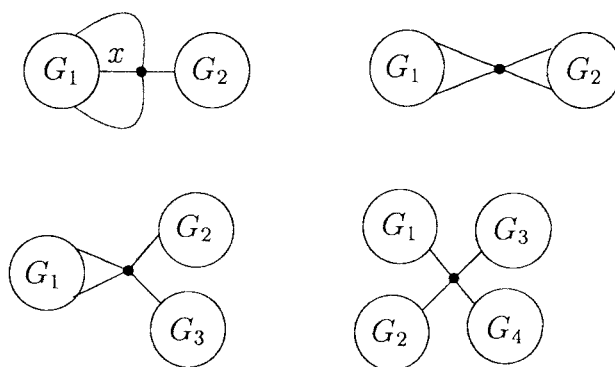


Figura 3.68:



En los otros tres casos $L(G)$ es periproyectivo de forma análoga al anterior (Figura 3.67).

Caso 4. $\Delta(G) = 3$. En este caso, por el Lema 3, G no puede ser $1\text{-}\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ -cubierto. Aplicando el Teorema 3.56, G debe contener como menor a alguno de los grafos de la Figura 3.62. Pero todos los grafos que se obtienen descontrayendo de todas las formas posibles los vértices de los grafos de la Figura 3.62 contienen como MTC a alguno de los de la Lista \mathcal{B}^* . Concretamente, los grafos que se obtienen de descontrair de todas las formas posibles los vértices del primer grafo de la Figura 3.62 contienen como MTC a $2(K_2 + \overline{K_2})$. Los del segundo contienen como MTC a K_4 . Los del tercero y cuarto a A, B ó D . Los del quinto a A, C ó D . Los del sexto a $K_1 + (2K_1 \cup K_{1,2})$, C ó D . Los del séptimo a $K_{1,6}$, $2K_{1,4}$, $K_1 + (2K_1 \cup K_{1,2})$, $2(K_2 + \overline{K_2})$, C ó D y los del octavo y noveno a $2K_{1,4}$, $K_1 + (2K_1 \cup K_{1,2})$, $2(K_2 + \overline{K_2})$, C ó D .

Por último, todo grafo G con $\Delta(G) \leq 2$ es periproyectivo y su grafo de línea también lo es, ya que al ser 2 la valencia máxima de los vértices de G , las componentes conexas de éste son C_n ó P_m , donde $L(C_n) = C_n$ para $n \geq 3$ y $L(P_m) = P_{m-1}$ para $m \geq 1$. \square

Subgrafos prohibidos

Tal como hicimos en la Sección 3.2.1, vamos a sustituir el orden “ \ll ” por el de Kuratowski en la caracterización de los grafos con grafo de línea periproyectivo.

Para ello, la lista \mathcal{B}_1 se obtendrá de \mathcal{B}^* pegando de todas las formas posibles vértices entre sí o vértices a subdivisiones de aristas en todos los grafos de \mathcal{B}^* , siendo \mathcal{B}_1 la lista de menores topológicos prohibidos.

Para simplificar este procedimiento usaremos un lema previo análogo al Lema 3.16.

Lema 3.59. *Sea $H \in \mathcal{B}^*$. Sea H' el grafo obtenido de efectuar pegamientos sucesivos de dos vértices o un vértice a una subdivisión de una arista a partir de H . Si existe $H'' \in \mathcal{B}^*$ tal que H'' es un menor topológico de H' entonces $H' \notin \mathcal{B}_1$.*

Como consecuencia del lema anterior, si el grafo H' resulta de pegar en H dos vértices cuya suma de valencias es mayor o igual que 6 entonces H' no es minimal, ya que contiene a $K_{1,6}$.

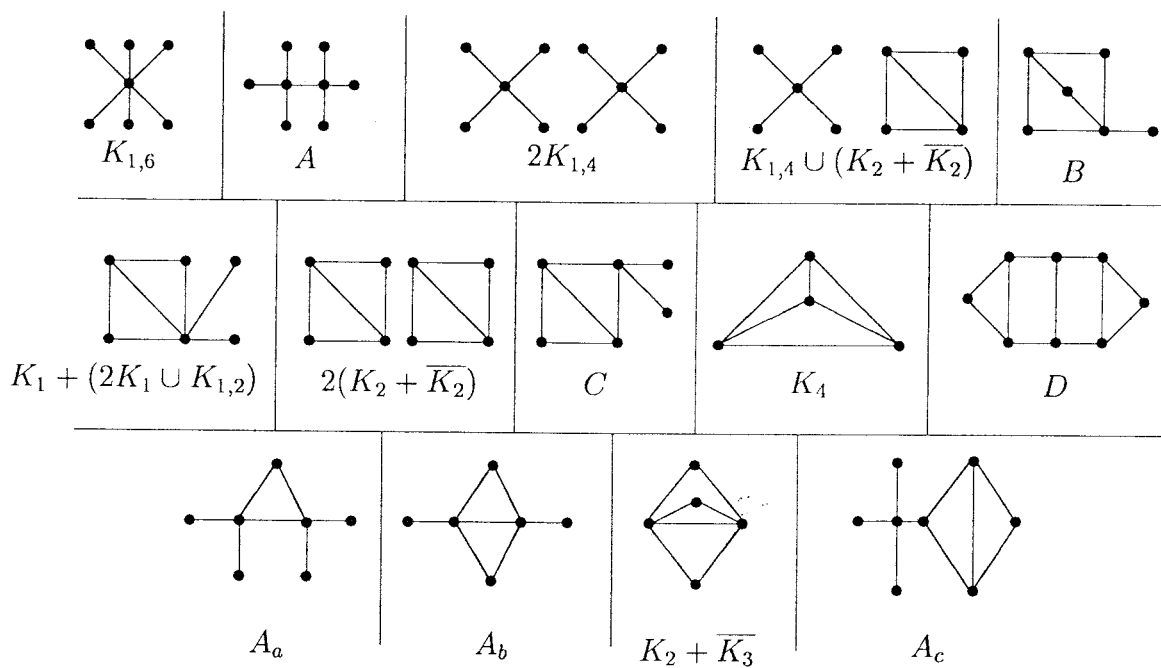


Figura 3.69: Lista \mathcal{B}_1 de menores topológicos prohibidos.

El proceso a seguir para obtener la lista \mathcal{B}_1 a partir de \mathcal{B}^* se detalla en la referida Sección 3.2.1, donde las listas intermedias serán llamadas ahora \mathcal{A}_i y $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}^* \cup (\bigcup_{i=1}^{n-1} \mathcal{A}_i)$, siendo n el menor natural tal que $\mathcal{A}_n = \emptyset$.

La lista \mathcal{B}_1 obtenida a partir del proceso anterior puede verse en la Figura 3.69.

Como consecuencia podemos enunciar el siguiente resultado, que caracteriza a los grafos con grafo de línea periproyectivo ya en función de menores topológicos prohibidos.

Teorema 3.60. *Sea G un grafo. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $L(G)$ es periproyectivo.
2. No existe $H \in \mathcal{B}_1$ tal que H es un menor topológico de G .

Demostración: Aplicando el proceso anterior, del grafo A se obtiene A_a y del grafo $K_{1,4} \cup (K_2 + \overline{K_2})$ se obtiene A_c .

Del resto se obtienen grafos que contienen a alguno de los de \mathcal{A} , con lo que no son minimales.

Por tanto $\mathcal{A}_1 = \{A_a, A_c\}$.

A partir de \mathcal{A}_1 , e iterando el proceso, se obtienen sucesivamente $\mathcal{A}_2 = \{A_b\}$, $\mathcal{A}_3 = \{K_2 + \overline{K_3}\}$ y $\mathcal{A}_4 = \emptyset$, con lo que $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}^* \cup \{A_a, A_b, A_c, K_2 + \overline{K_3}\}$. \square

Por último observemos que el proceso seguido para la construcción de \mathcal{B}_1 asegura que ésta es mínima.

3.5.2 Grafos con segundo grafo de línea periprojectivo

Al igual que en el estudio de la proyectividad de los grafos de línea, una vez que hemos obtenido una caracterización de los grafos con grafo de línea periprojectivo en términos de menores topológicos prohibidos, vamos a hacer lo mismo con los grafos de línea iterados.

En esta sección vamos a caracterizar a los grafos cuyo segundo grafo de línea es periprojectivo a partir de una lista mínima de menores topológicos prohibidos. Para ello nos basaremos en la caracterización de los primeros grafos de línea periplanos (Teorema 3.54) y en la caracterización de los primeros grafos de línea periprojectivos en términos de subgrafos prohibidos (Teorema 3.60).

A continuación vamos a enunciar y demostrar el resultado principal de esta sección.

Teorema 3.61. *Sea G un grafo. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $L^2(G)$ es periprojectivo.
2. G no contiene como menor topológico a $K_{1,4}$, $K_2 + \overline{K_2}$, $2(K_3 \cdot K_2)$ ni a $(K_3 \times K_2) - C_4$, no contiene una x -subdivisión de \hat{A} , $(K_3 \cdot K_2) \cup H_x$ ni de \hat{D} , y no contiene una $\{x, y\}$ -subdivisión de \hat{B} , \hat{C} , $H_x \cup H_y$, \hat{E} ni de \hat{F} .

La Figura 3.70 nos muestra la lista \mathcal{B}_2 de menores topológicos prohibidos.

Demostración: Veamos que la primera condición implica la segunda. Por un razonamiento análogo al que se muestra en la Sección 3.2.2, hemos de probar que

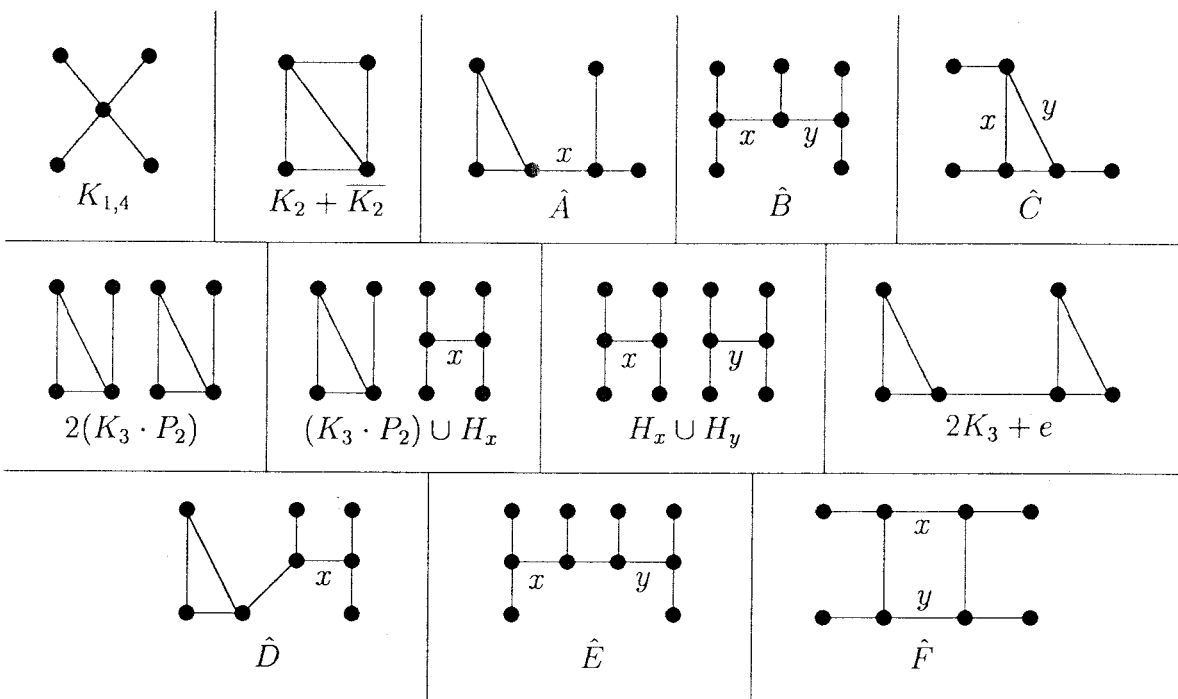


Figura 3.70: Lista \mathcal{B}_2 de menores topológicos prohibidos.

tanto el grafo de línea de los grafos de la lista \mathcal{B}_2 como el grafo de línea de una E -subdivisión suya (con $E = \emptyset, \{x\}$ ó $\{x, y\}$) contienen como menor topológico a alguno de los grafos de la lista \mathcal{B} (ver Figura 3.69). Además, es suficiente obtener las E -subdivisiones a partir de subdividir aristas (que no estén en E) cuyos extremos tengan valencia mayor o igual que 3.

Al igual que en la Sección 3.2.2, dado $G \in \mathcal{B}_2$, denotaremos \widetilde{G} a cualquier subdivisión suya en las condiciones anteriores o bien al propio G . Se puede comprobar que:

K_4 es un menor topológico de $L(\widetilde{K_{1,4}})$ y de $L(\widetilde{K_2 + \overline{K_2}})$, C es un menor topológico de $L(\widetilde{\hat{A}})$, A_a de $L(\widetilde{\hat{B}})$, A_b de $L(\widetilde{\hat{C}})$, $2(K_2 + \overline{K_2})$ de $L(2(\widetilde{K_3 \cdot P_2}))$, $K_{1,4} \cup (K_2 + \overline{K_2})$ de $L((\widetilde{K_3 \cdot P_2}) \cup H_x)$, $2K_{1,4}$ de $L(\widetilde{H_x \cup H_y})$, C y $2(K_2 + \overline{K_2})$ de $L(2\widetilde{K_3 + e})$, A_a y $K_{1,4} \cup (K_2 + \overline{K_2})$ de $L(\widetilde{\hat{D}})$, A y $2K_{1,4}$ de $L(\widetilde{\hat{E}})$, y, por último, A_b y $2K_{1,4}$ son menores



topológicos de $L(\tilde{F})$.

Veamos a continuación que la condición segunda implica la primera. Sea G un grafo tal que $L^2(G)$ no es periproyectivo. Distinguiamos varios casos:

Caso I: $\Delta(G) \geq 4$. Entonces $K_{1,4}$ es un menor topológico de G .

Caso II: $\Delta(G) = 3$. En este caso todo vértice de G de valencia 3 es punto de corte. De lo contrario $K_2 + \overline{K_2}$ sería un menor topológico de G .

Además G tiene sólo una componente conexa cuyo segundo grafo de línea no es periplano pues, en otro caso, $2(K_3 \cdot P_2)$ sería un menor topológico de G , G contendría una x -subdivisión de $(K_3 \cdot P_2) \cup H_x$ o bien una $\{x, y\}$ -subdivisión de $H_x \cup H_y$, según el Teorema 0.18. Podemos, por tanto, considerar sin pérdida de generalidad que G es conexo.

Distinguiamos varios subcasos:

1. G tiene, al menos, dos aristas cuyos extremos tienen valencia 3. Sean x e y dos aristas en estas condiciones.

Si x e y son adyacentes entonces G contiene una $\{x, y\}$ -subdivisión de \hat{B} ó \hat{C} .

Si x e y no son adyacentes y hay dos caminos disjuntos que conectan los dos extremos de x a los dos de y respectivamente, entonces G contiene una $\{x, y\}$ -subdivisión de \hat{F} .

Si x e y no son adyacentes y hay dos caminos disjuntos que conectan los dos extremos de x a un solo extremo de y entonces G contiene una $\{x\}$ -subdivisión de \hat{A} .

En cualquier otro caso se tiene que G contiene una $\{x\}$ -subdivisión de \hat{A} ó $(K_3 \cdot P_2) \cup H_x$, G contiene una $\{x, y\}$ -subdivisión de \hat{E} ó \hat{B} , o bien $2K_3 + e$ es un menor topológico de G .

2. G tiene exactamente una arista cuyos extremos tienen valencia 3. Sea x dicha arista. Distinguiamos dos nuevos subcasos:

- (a) La arista x no es puente. En este caso G contiene una $\{x, y\}$ -subdivisión de \hat{C} o bien G tiene una de las dos formas que nos muestra la Figura 3.71.

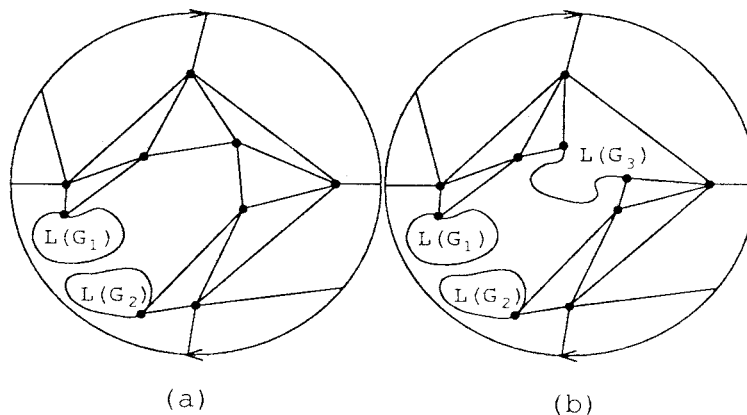


Figura 3.72: Inmersiones periproyectivas de $L^2(G)$.

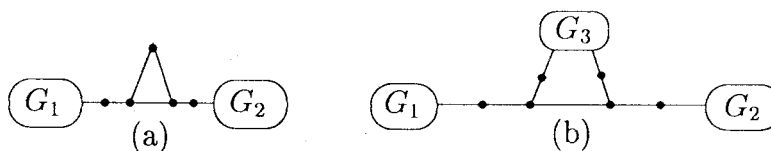


Figura 3.71: Formas de G .

Supongamos que G tiene la forma del caso (a) de la Figura 3.71. Sean u y v los extremos de la arista x , sea \bar{u} el vértice de G incidente con u y no con v y sea \bar{v} el vértice de G incidente con v y no con u . Obviamente $\delta(u) \leq 2$ y $\delta(v) \leq 2$ ya que, de lo contrario, estaríamos en un caso anteriormente estudiado. Sea G_1 el subgrafo inducido por los vértices de G para los que existe un camino que los conecta con \bar{u} sin pasar por x y sea G_2 el subgrafo inducido por los vértices de G para los que existe un camino que los conecta con \bar{v} sin pasar por x . Si $L^2(G_1)$ o bien $L^2(G_2)$ contienen ciclos se tiene que $2K_3 + e$ es un menor topológico de G . En otro caso, para $i = 1, 2$ se tiene que $\Delta(G_i) \leq 3$ y no hay en G_i vértices de valencia 3 adyacentes, por tanto $\Delta(L(G_i)) \leq 3$ y todo vértice de valencia 3 de $L(G_i)$ es punto de corte. Aplicando el Teorema 0.16 se tiene que $L^2(G_i)$ es periplano, para $i = 1, 2$. Por tanto, se puede construir una inmersión periproyectiva de $L^2(G)$ tal como muestra la Figura 3.72,(a). Supongamos ahora que G tiene la forma del caso (b) de la Figura 3.71. Sean G_1, G_2 y G_3 subgrafos de G construidos de forma análoga a los

del caso (a) de la mencionada Figura 3.72.

Si algún G_i contiene ciclos, para $i = 1, 2, 3$ entonces G contiene una x -subdivisión de \hat{A} o bien $K_2 + \overline{K_2}$ ó $2K_3 + e$ es un menor topológico de G . De lo contrario, por un razonamiento análogo al utilizado en el caso (a), llegamos a que $L^2(G_i)$ es periplano, con $i = 1, 2, 3$. A partir de aquí, podemos construir una inmersión periproyectiva de G , tal como muestra la Figura 3.72,(b).

- (b) La arista $x = \{u, v\}$ es puente. Sean \bar{u}_1, \bar{u}_2 los otros vértices incidentes con u y \bar{v}_1, \bar{v}_2 los otros vértices incidentes con v . La valencia de \bar{u}_i y de \bar{v}_i es, a lo más, 2, con $i = 1, 2$; de lo contrario estaríamos en un caso anterior.

Si \bar{u}_1, \bar{u}_2 están conectados por un camino que no pasa por u o bien \bar{v}_1, \bar{v}_2 están conectados por un camino que no pasa por v entonces G contiene una x -subdivisión de \hat{A} o bien contiene a $(K_3 \times K_2) - C_4$ como menor topológico. En otro caso G tiene la forma que nos muestra la Figura 3.73, (a).

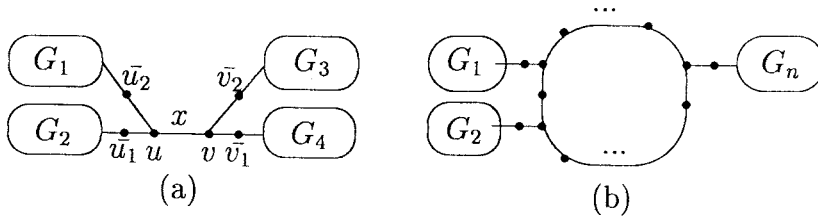


Figura 3.73: Formas de G .

Consideremos los subgrafos G_i , con $i = 1, \dots, 4$, construidos como en el apartado anterior (Figura 3.73 (a)). Si algún G_i , con $i = 1, \dots, 4$ contiene ciclos, entonces G contiene una x -subdivisión de \hat{A} . De lo contrario y a partir de un razonamiento análogo al que usamos en el apartado anterior se tiene que $L^2(G_i)$ es periplano, para $i = 1, \dots, 4$. Entonces podemos dar una inmersión periproyectiva de G tal como muestra la Figura 3.74, (a).

3. Ninguna arista tiene los dos extremos con valencia 3. Si G no contiene ciclos, entonces, como $\Delta(G) \leq 3$ y no hay dos vértices de valencia 3 adyacentes, $\Delta(L(G)) \leq 3$ y los vértices de valencia 3 de $L(G)$ son puntos de corte, por lo que, por el Teorema 0.16, $L^2(G)$ es periproyectivo.

Si G contiene ciclos y existen dos vértices u y v de G tales que $\delta(u) = \delta(v) = 3$ y u y v están en dos ciclos disjuntos entonces G contiene a

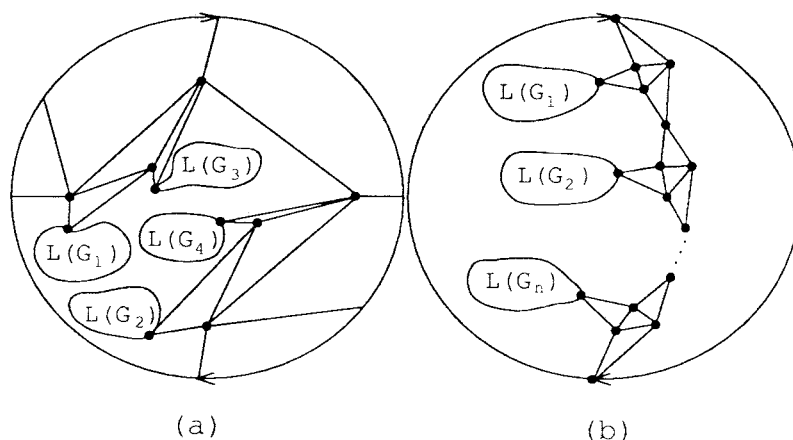


Figura 3.74: Inmersiones periproyectivas de $L^2(G)$.

$2(K_3 \cdot P_2)$ o a $2K_3 + e$ como menor topológico. En otro caso G tiene la forma que nos muestra la Figura 3.73,(b), donde los G_i , con $i = 1, \dots, n$, se definen de la forma anteriormente descrita. Por un razonamiento análogo al que usamos al comienzo del párrafo, $L^2(G_i)$ es periplano para $i = 1, \dots, n$, con lo que podemos dar una inmersión periproyectiva de G tal como muestra la Figura 3.74, (b).

Caso III: $\Delta(G) \leq 2$. En este caso $L^2(G)$ es periplano y, por tanto, periproyectivo.

Con esto concluye la demostración. □

3.5.3 Grafos con tercer grafo de línea periproyectivo

Vamos a caracterizar a continuación a los grafos con tercer grafo de línea periproyectivo en función de menores topológicos prohibidos.

Teorema 3.62. *Sea G un grafo. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $L^3(G)$ es periproyectivo.



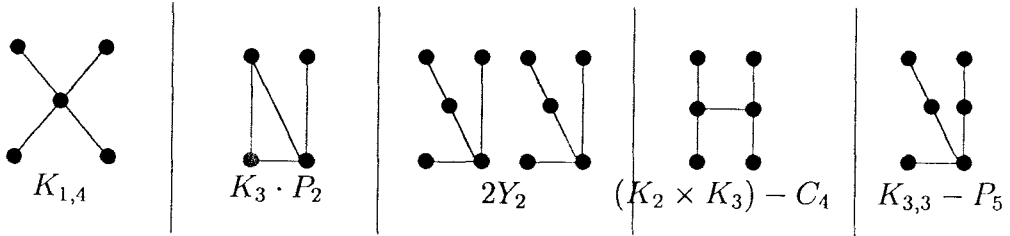


Figura 3.75: Lista \mathcal{B}_3 de menores topológicos prohibidos.

2. G no contiene como menor topológico a $K_{1,4}$, $K_3 \cdot P_2$, $2Y_2$, $(K_2 \times K_3) - C_4$ ni a $K_{3,3} - P_5$.

La Figura 3.75 nos muestra la lista \mathcal{B}_3 de menores topológicos prohibidos.

Demostración: Veamos que la primera condición implica la segunda. Razonando igual que en la Sección 3.2.2 y, según el Teorema 3.61, hemos de probar que tanto el grafo de línea de los grafos de la lista \mathcal{B}_3 como el grafo de línea de una subdivisión suya contienen como menor topológico a alguno de los grafos de la lista \mathcal{B}_2 (ver Figura 3.69). Además, es suficiente obtener las subdivisiones a partir de subdividir aristas cuyos extremos tengan valencia mayor o igual que 3.

Al igual que en la Sección 3.2.2, dado $G \in \mathcal{B}_3$, denotaremos \widetilde{G} a cualquier subdivisión suya en las condiciones anteriores o bien al propio G . Se puede comprobar que:

$K_2 + \overline{K_2}$ es un menor topológico de $L(\widetilde{K_{1,4}})$ y de $L(\widetilde{K_3 \cdot P_2})$, $2(K_3 \cdot P_2)$ es un menor topológico de $L(\widetilde{2Y_2})$, $K_{1,4}$ o bien $2K_3 + e$ es un menor topológico de $L(\widetilde{(K_2 \times K_3) - C_4})$ y \widehat{C} es un menor topológico de $L(\widetilde{K_{3,3} - P_5})$.

A continuación vamos a probar que la segunda condición implica la primera. Consideremos un grafo G tal que $L^3(G)$ no es periproyectivo. Distinguiamos varios casos:

Caso I: $\Delta(G) \geq 4$. Entonces $K_{1,4}$ es un menor topológico de G .

Caso II: $\Delta(G) = 3$. Si G contiene ciclos entonces $(K_3 \cdot P_2)$ es un menor de G .

Además G tiene sólo una componente conexa cuyo tercer grafo de línea no es periplano pues, en otro caso, $2Y_2$ sería un menor topológico de G según el

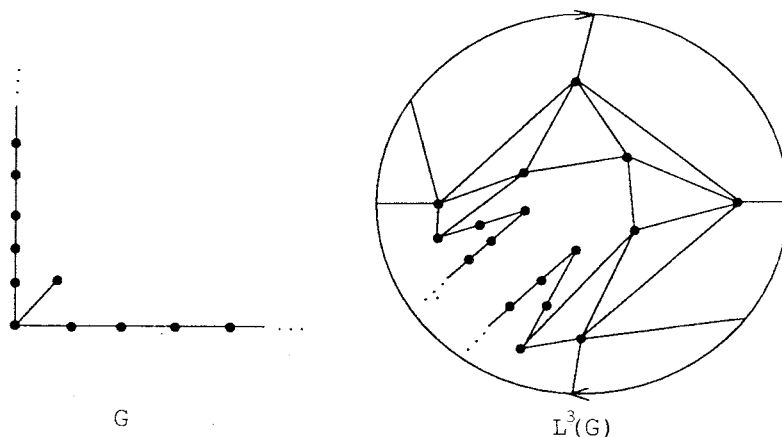


Figura 3.76: Inmersión periproyectiva de $L^3(G)$.

Teorema 0.18. Podemos, pues, considerar sin pérdida de generalidad que G es conexo.

Distinguimos varios subcasos:

1. G tiene dos o más vértices de valencia 3. Entonces $2Y_2$ ó $(K_2 \times K_3) - C_4$ es un menor topológico de G .
2. G tiene sólo un vértice de valencia 3. Sea v dicho vértice y v_1, v_2 y v_3 los vértices adyacentes con v . Si $\delta(v_i) = 2$ para $i = 1, 2, 3$ entonces $K_{3,3} - P_5$ es un menor topológico de G . En otro caso podemos dar una inmersión periproyectiva de $L^3(G)$, tal como nos muestra la Figura 3.76.

Caso III: $\Delta(G) \leq 2$. En este caso G es C_n o P_n ; en ambos casos $L^3(G)$ es periproyectivo.

Con esto concluye la demostración. □

3.5.4 Grafos con n -ésimo grafo de línea periproyectivo ($n \geq 4$)

En esta sección vamos a caracterizar a los grafos G tales que $L^n(G)$ es periproyectivo, con $n \geq 4$, en función de menores topológicos prohibidos.

Teorema 3.63. *Sea G un grafo. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $L^n(G)$ es periproyectivo, con $n \geq 4$.
2. G no contiene como menor topológico a $K_{1,4}$, $K_3 \cdot P_2$ ni a Y_2 .

Demostración: Veamos que la primera condición implica la segunda. Aplicaremos inducción para $n \geq 4$. Para $n = 4$ observemos que $L(K_{1,4})$, $L(K_3 \cdot P_2)$ y $L(Y_2)$ contienen como menor topológico a $K_3 \cdot P_2$, luego por el Teorema 3.62, $L^4(K_{1,4})$, $L^4(K_3 \cdot P_2)$ y $L^4(Y_2)$ no son periproyectivos.

Supongamos la implicación cierta para n . Para $n + 1$ se tiene por la hipótesis de inducción y por el hecho de que $L(K_{1,4})$, $L(K_3 \cdot P_2)$ y $L(Y_2)$ contienen como menor topológico a $K_3 \cdot P_2$.

Veamos ahora que la segunda condición implica la primera. Sea G tal que $L^n(G)$ no es periproyectivo, con $n \geq 4$. Distinguiamos varios casos:

Caso I: $\Delta(G) \geq 4$. Entonces $K_{1,4}$ es un menor topológico de G .

Caso II: $\Delta(G) = 3$. Si G contiene ciclos entonces $K_3 \cdot P_2$ es un menor de G .

Si G contiene un vértice de valencia 3 adyacente a otro de valencia al menos 2 entonces Y_2 es un menor topológico de G .

En otro caso toda componente conexa de G con un vértice de valencia 3 es un $K_{1,3}$, pero $L^n(K_{1,3}) = K_3$ con $n \geq 1$, con lo que $L^n(G)$ sería periproyectivo, para $n \geq 4$.

Caso III: $\Delta(G) \leq 2$. Entonces las componentes conexas de G son C_k ó P_k . Teniendo en cuenta que $L^n(C_k) = C_k$ para $n \geq 1$ y que $L^n(P_k)$ es P_{k-n} si $n < k$ y es \emptyset si $n \geq k$, se tiene que $L^n(G)$ es periproyectivo para $n \geq 4$. \square

3.6 Grafos medios periproyectivos

Vamos a caracterizar en esta sección los grafos cuyo grafo medio es periproyectivo mediante una lista de menores topológicos prohibidos basándonos, como en la Sección 3.5, en la caracterización de los grafos periproyectivos enunciada en el Teorema 3.53.

3.6.1 Grafos con grafo medio periproyectivo

A continuación vamos a enunciar y demostrar el teorema que caracteriza a los grafos con grafo medio periproyectivo.

Teorema 3.64. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $M(G)$ es periproyectivo.
2. G no contiene como menor topológico a $2K_{1,3}$, $(K_2 \times K_3) - C_4$, A' , $K_1 + \overline{K_2}$ ni a $K_{1,5}$ (ver Figura 3.77).

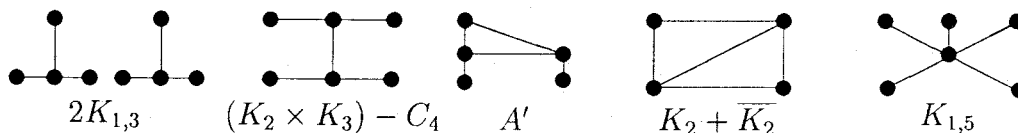
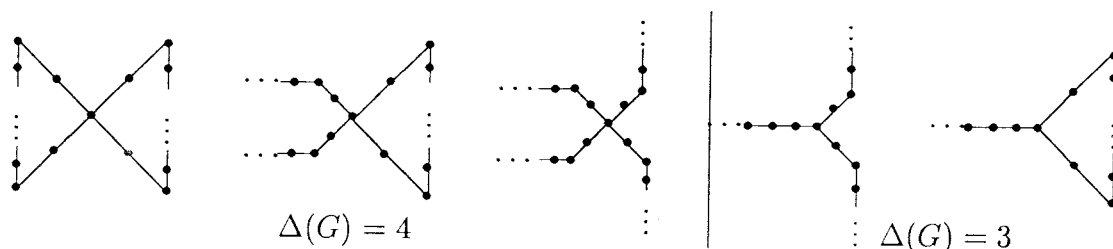


Figura 3.77: Lista de menores topológicos prohibidos para $M(G)$ periproyectivo.

Demostración: Veamos que la primera condición implica la segunda. Para ello basta probar que ninguno de los grafos de la Figura 3.77 tiene grafo medio periproyectivo.

Observemos que $D_{14,1}$ es subgrafo de $M(2K_{1,3})$, $D_{28,1}$ es subgrafo de $M((K_2 \times K_3) - C_4)$, de $M(A')$ y de $M(K_2 + \overline{K_2})$, y $D_{7,1}$ es subgrafo de $M(K_{1,5})$, donde $D_{14,1}$, $D_{28,1}$ y $D_{7,1}$ pueden verse en la Figura 3.61.

Demostremos a continuación que la segunda condición implica la primera. Consideremos un grafo G tal que $M(G)$ no es periproyectivo. Distinguiamos varios casos:

Figura 3.78: Diferentes formas de G .

Caso I: $\Delta(G) \geq 5$. En este caso $K_{1,5}$ es un menor topológico de G .

Caso II: $3 \leq \Delta(G) < 5$. En este caso sólo una componente conexa de G tiene grafo medio no periplano pues, de lo contrario $2K_{1,3}$ sería un subgrafo de G aplicando los Teoremas 0.30 y 0.25. Podemos suponer, pues, que G es conexo. Distinguiamos varios subcasos.

1. G contiene al menos un vértice de valencia 3 o mayor que no es un punto de corte. Entonces $K_2 + \overline{K_2}$ es un menor topológico de G .
2. G contiene dos o más vértice de valencia mayor o igual que 3. Entonces $(K_2 \times K_3) - C_4$ ó A' es un menor topológico de G .

Por tanto G ha de tener alguna de las formas que nos muestra la Figura 3.78, según su valencia máxima sea 3 ó 4. En todos los casos podemos construir una inmersión de su grafo medio en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, con lo que llegamos a contradicción con nuestra hipótesis de $M(G)$ no periproyectivo. La Figura 3.79 nos muestra una inmersión de $M(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ en el primero de los casos de la Figura 3.78. En el resto de los casos la inmersión se puede obtener de una manera similar, eliminando los elementos sobrantes.

Caso III $\Delta(G) \leq 2$. En este caso G es C_n ó P_n . En cualquiera de los casos su grafo medio es periproyectivo.

Y esto concluye la demostración. □

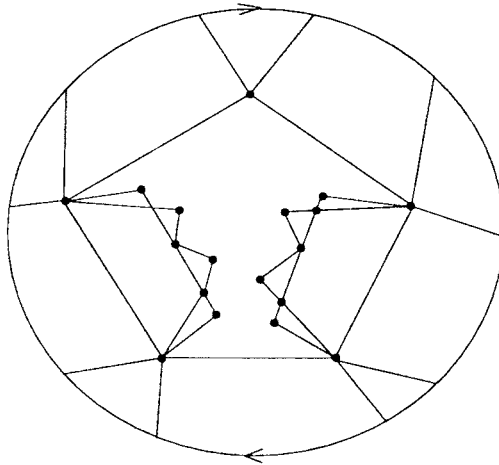


Figura 3.79: Inmersión de $M(G)$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

3.6.2 Grafos con grafo medio iterado periprojectivo

Como complemento a las Sección 3.6 vamos a enunciar y demostrar los resultados que caracterizan a los grafos medios iterados periprojectivos. Para ello nos basaremos en la caracterización que nos ofrece el Teorema 3.64.

Teorema 3.65. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $M^2(G)$ es periprojectivo.
2. Las componentes conexas de G contienen, a lo más, una arista.
3. G no contiene como subgrafo a $K_{1,2}$.

Demostración: Es evidente que las condiciones segunda y tercera son equivalentes.

Veamos que la primera condición implica la tercera. Para ello observemos que $M(K_{1,2}) = A'$ (Figura 3.77), luego, por el Teorema 3.64, $M^2(K_{1,2})$ no es periprojectivo.

Veamos, para terminar, que la tercera condición implica la primera. Sea G tal que $M^2(G)$ no es periprojectivo. Si $\Delta(G) \geq 2$ entonces $K_{1,2}$ es subgrafo de G . En otro

caso las componentes de G son K_1 ó K_2 y las de $M^2(G)$ son K_1 o bien A' , que admiten una inmersión periproyectiva de forma evidente. \square

Enunciemos ahora el resultado que nos caracteriza a los n -ésimos grafos medios periproyectivo con $n \geq 3$.

Teorema 3.66. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $M^n(G)$ es periproyectivo, con $n \geq 3$.
2. $A(G) = \emptyset$.
3. G no contiene como subgrafo a K_2 .

Demostración: La segunda condición y la tercera son equivalentes de forma evidente.

Veamos que la primera implica la tercera. $M(K_2) = K_{1,2}$ luego, por el Teorema 3.65 tenemos que $M^3(K_2)$ no es periproyectivo. Puesto que $M^3(K_2)$ es subgrafo de $M^n(K_2)$ para $n \geq 3$ se tiene que $M^n(K_2)$, con $n \geq 3$, no es periproyectivo.

Para terminar la demostración, probemos que la tercera condición implica la primera. Por hipótesis, G no contiene a K_2 como subgrafo, luego las componentes de $M^n(G)$ son K_1 , para $n \geq 1$, con lo que $M^n(G)$ es periproyectivo. \square

3.7 Grafos totales periproyectivos

Vamos a caracterizar en esta sección los grafos con grafo total periproyectivo. Lo haremos mediante una lista de menores topológicos prohibidos y, al igual que en la Sección 3.5, nos basaremos en la caracterización de los grafos periproyectivos enunciada en el Teorema 3.53.

3.7.1 Grafos con grafo total periproyectivo

A continuación vamos a enunciar y demostrar el teorema que caracteriza a los grafos cuyo grafo total es periproyectivo.

Teorema 3.67. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

1. $T(G)$ es periproyectivo.
2. G no contiene como subgrafo a $2K_{1,3}$, K_3 , $(K_2 \times K_3) - C_4$, ni a $K_{1,4}$ (ver Figura 3.80).

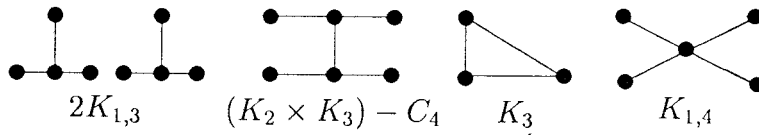


Figura 3.80: Lista de menores topológicos prohibidos para $T(G)$ periproyectivo.

Demostración: Veamos que la primera condición implica la segunda. Para ello basta probar que ninguno de los grafos de la Figura 3.80 tiene grafo total periproyectivo.

Observemos que $D_{14,1}$ es subgrafo de $T(2K_{1,3})$, $D_{7,1}$ es subgrafo de $T(K_3)$, $D_{28,1}$ es subgrafo de $T((K_2 \times K_3) - C_4)$ y $D_{25,1}$ es subgrafo de $T(K_{1,5})$, donde $D_{14,1}$, $D_{7,1}$, $D_{28,1}$ y $D_{25,1}$ pueden verse en la Figura 3.61.

Para demostrar que la segunda condición implica la primera consideremos un grafo G tal que $T(G)$ no es periproyectivo. Distinguiamos varios casos:

Caso I: $\Delta(G) \geq 4$. Entonces $K_{1,4}$ es un menor topológico de G .

Caso II: $\Delta(G) = 3$. Si G contiene ciclos entonces K_3 es un menor topológico de G . Supongamos, pues que G es un árbol.

Además, sólo una componente conexa de G tiene grafo total no periplano pues, de lo contrario $2K_{1,3}$ sería un subgrafo de G según el Teorema 0.25.

Por último, si G tiene más de un vértice de valencia 3 entonces $(K_2 \times K_3) - C_4$ es un menor topológico de G . Por tanto G ha de ser de la forma que nos muestra la Figura 3.81 en cuyo caso $T(G)$ admite una inmersión periproyectiva, tal como nos muestra la misma figura.

Caso III: $\Delta(G) \leq 2$. En este caso G es C_n ó P_n . En ambos casos su grafo total es periproyectivo.

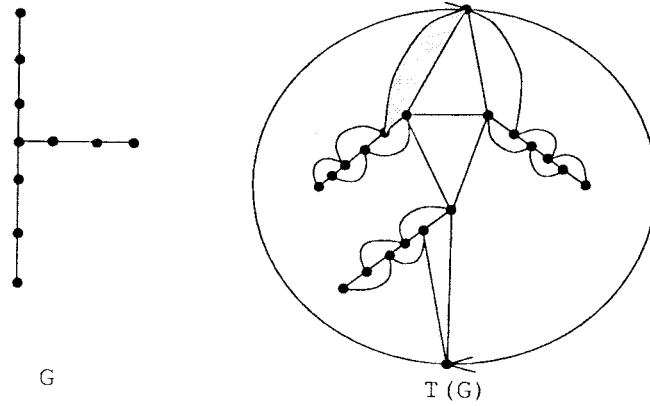


Figura 3.81: El grafo G y una inmersión de $T(G)$ en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$.

Esto concluye la demostración. □

3.7.2 Grafos con grafo total iterado periproyectivo

Para completar la Sección 3.7 vamos a enunciar y demostrar el resultado que caracteriza a los grafos totales iterados periproyectivos. Para ello nos basaremos en la caracterización que nos ofrece el Teorema 3.67.

Los grafos con grafo total iterado periproyectivo vienen caracterizados por el siguiente resultado:

Teorema 3.68. *Sea G un grafo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $T^n(G)$ es periproyectivo, con $n \geq 2$.
2. $A(G) = \emptyset$.
3. G no contiene como subgrafo a K_2 .

Demostración: Es evidente que la segunda condición y la tercera son equivalentes.

Veamos que la primera implica la tercera. $T(K_2) = K_3$ luego, por el Teorema 3.67 tenemos que $T^2(K_2)$ no es periproyectivo. Puesto que $T^2(K_2)$ es subgrafo de $T^n(K_2)$ para $n \geq 2$ se tiene que $T^n(K_2)$, con $n \geq 2$, no es periproyectivo.

Para terminar la demostración, probemos que la tercera condición implica la primera. K_2 no es un subgrafo de G luego las componentes de $T^n(G)$ son K_1 , para $n \geq 1$, con lo que $T^n(G)$ es periproyectivo. \square

Finalmente observemos que las caracterizaciones de los grafos G tales que $M^n(G)$ es periproyectivo para $n \geq 3$ y $T^m(G)$ es periproyectivo con $m \geq 2$ son equivalentes. Como consecuencia tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.69. *Sea G un grafo. $T^n(G)$ es periproyectivo si y sólo si $M^{n+1}(G)$ es periproyectivo, para todo $n \geq 2$.*

3.8 Problemas abiertos

Para completar la extensión del estudio de inmersiones de grafos de línea, medios y totales al plano proyectivo quedaría la caracterización de los grafos con grafo de línea, medio y total periproyectivo generalizado, así como sus iterados.

Previamente habría de estudiarse la caracterización de los grafos que admiten una inmersión periproyectiva generalizada, problema que actualmente sigue abierto.

Parte III

Superficies Genéricas



Capítulo 4

Relaciones entre $L(G)$, $M(G)$ y $T(G)$

Por construcción, el género (tanto orientable como no orientable) de un grafo es menor o igual que el de sus grafos medio y total. En este capítulo probamos que esta relación sigue siendo válida respecto al grafo de línea. A partir de este resultado, el problema de determinar el género de $L(G)$ resulta NP-completo.

Por otra parte, Boza, Dávila, Márquez y Moyano obtienen en [12] la equivalencia entre la periplanaridad del grafo de línea de un grafo, la periplanaridad generalizada de su grafo medio y la planaridad de su grafo total. Nos planteamos de forma natural si dicha equivalencia se mantiene en una superficie cualquiera

En este capítulo estudiaremos las relaciones que se pueden generalizar a una superficie cualquiera y veremos contraejemplos de las que no se conservan.

4.1 Introducción

Chartrand, Geller y Hedetniemi demostraron en [16] que el grafo de línea de cualquier grafo es periplano si y sólo si su grafo total es plano. Boza, Dávila, Márquez y Moyano probaron en [12] que estas dos condiciones son, a su vez, equivalentes a que su grafo medio sea periplano generalizado.

Por tanto, en el plano se tiene el siguiente resultado:



Teorema 4.1. *Son equivalentes:*

1. *El grafo medio de un grafo es periplano generalizado.*
2. *El grafo de línea de un grafo es periplano.*
3. *El grafo total de un grafo es plano.*

En este capítulo veremos que el resultado anterior no se puede generalizar de forma global a una superficie cualquiera S , aunque algunas de las implicaciones sí se mantienen.

En primer lugar, vamos a generalizar los conceptos de planaridad, periplanaridad y periplanaridad generalizada a otras superficies. Para ello, usaremos la notación que Cáceres nos propone en [15].

4.2 Definiciones y propiedades

Diremos que un grafo G es S -representable si admite una inmersión en S , donde S es una superficie cualquiera. Asimismo, diremos que un grafo G es $peri-S$ -representable si admite una inmersión en S de forma que todos sus vértices estén en una misma cara. Por último, diremos que G es $peri-S$ -representable generalizado si admite una inmersión en S de forma que todas las aristas tengan, al menos, un vértice en la misma cara.

La caracterización de los grafos S -representables y $peri-S$ -representables sólo se tiene en el caso del plano \mathbb{R}^2 en [17, 34] y del plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ en [3, 5, 15, 24, 38]. En el caso de los $peri-S$ -representables generalizados, sólo se tiene una caracterización para \mathbb{R}^2 [44].

No obstante, en [15], Cáceres obtiene el siguiente resultado sobre grafos $peri-S$ -representables generalizados a partir de la siguiente definición: dado un grafo G y $W \subseteq V(G)$, se llama *cono de G* , G^W , al grafo formado al añadir a G un nuevo vértice v y las aristas que unen v con cada vértice de W .

Proposición 4.2. *Sea G un grafo finito. Se cumplen las siguientes afirmaciones:*

1. G es *peri- S -representable* si y sólo si $G^{V(G)}$ es S -representable.
2. G es *peri- S -representable generalizado* si y sólo si existe $W \subseteq V(G)$ tal que al menos un vértice de cada arista de G está en W y G^W es S -representable.

En el caso de los grafos de línea, medios y totales, los tres tipos de representabilidad están caracterizados en el plano [1, 9, 25, 45].

En $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ hemos obtenido en capítulos anteriores caracterizaciones de los grafos con grafo de línea, medio y total proyectivo y periproyectivo. Los grafos con grafo de línea, medio o total periproyectivo generalizado no están caracterizados. En concreto, la caracterización de los grafos con grafo de línea periproyectivo en términos de subgrafos prohibidos aparece en la Sección 3.5 y la de los grafos con grafo total proyectivo viene dada en la Sección 3.4.

Por último vamos a hacer referencia a la relación que existe entre el género de un grafo y el de sus bloques.

Battle, Harary, Kodama y Youngs demuestran en [8] la siguiente igualdad.

$$\gamma(G) = \sum_{i=1}^n \gamma(G_i) \quad (4.1)$$

donde G_i , con $i = 1, \dots, n$ son los bloques de G .

Esto no es cierto en el caso no orientable. Por ejemplo, $\tilde{\gamma}(K_7) = 3$ y, sin embargo, $\tilde{\gamma}(K_7 \cup K_7) = 5$. No obstante se verifica la siguiente igualdad, obtenida por Stahl y Beineke ([47]).

$$\tilde{\gamma}(G) = \begin{cases} 1 - n + \sum_{i=1}^n \tilde{\gamma}(G_i) & \text{si } \tilde{\gamma}(G_i) = 2\gamma(G_i) + 1 \text{ para } i = 1, \dots, n \\ 2n - \sum_{i=1}^n \mu(G_i) & \text{e.o.c.} \end{cases} \quad (4.2)$$

donde G_i , con $i = 1, \dots, n$ son los bloques de G y $\mu(G_i) = \max\{2 - 2\gamma(G_i), 2 - \tilde{\gamma}(G_i)\}$.

4.3 Relación entre $\gamma(G)$ y $\gamma(L(G))$

En esta sección vamos a demostrar que todo grafo tal que todas sus componentes conexas no son árboles es un menor topológico de su grafo de línea. La importancia de este resultado radica, sobre todo en una de sus consecuencias: el género del grafo de línea de un grafo es mayor o igual que el de dicho grafo. Para grafos medios y totales este resultado es obvio por la construcción de los mismos, no siendo así en el caso de los grafos de línea.

Antes de enunciar y demostrar el resultado principal veamos dos lemas previos:

Lema 4.3. *Sea G un grafo tal que $\Delta(G) \leq 3$. Entonces $\gamma(L(G)) \leq \gamma(G)$ y $\gamma(M(G)) = \gamma(G)$*

Demostración: A partir de una inmersión de G se pueden construir una de $L(G)$ y otra de $M(G)$ sin más que añadir un punto interior a cada arista y unir los que pertenezcan a aristas consecutivas a través de la cara que comparten. En el caso de $L(G)$ borraremos después los vértices de G .

Por otra parte $\gamma(G) \leq \gamma(M(G))$ porque G es un subgrafo de $M(G)$. □

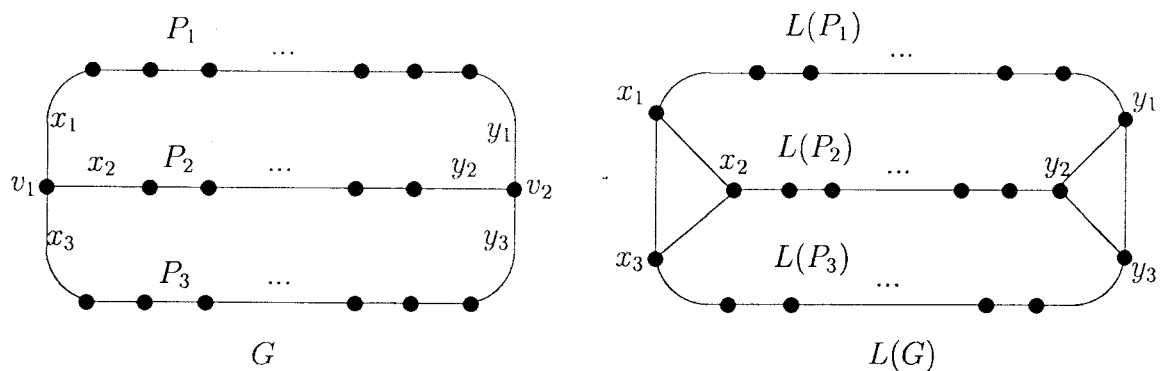
Lema 4.4. *Sea G un grafo conexo con $\Delta(G) = 3$, con ciclos, y tal que existe un vértice de valencia 3 de G que al cortarlo en tres vértices el grafo resultante no contiene ciclos. Entonces G es un menor topológico de $L(G)$.*

Demostración: Sea G^* el grafo resultante de cortar un vértice v de valencia tres de G en tres vértices.

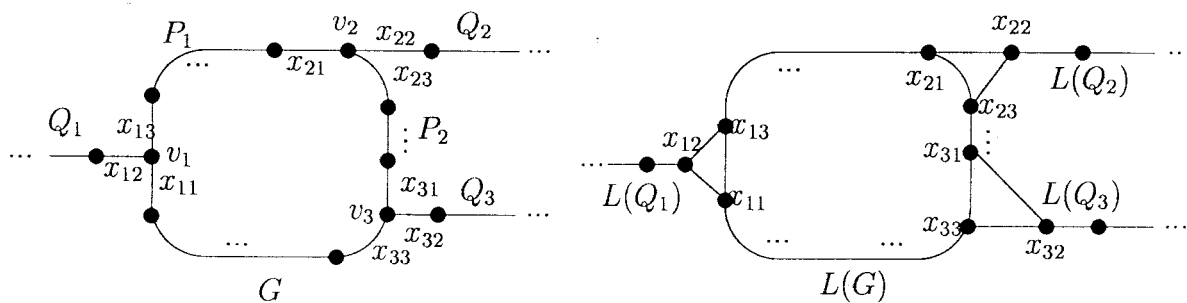
Supongamos que G^* no contiene ciclos. En este caso todos los vértices de valencia 3 en G están en todos los ciclos (de lo contrario, eligiendo como v un vértice de valencia 3 que estuviera fuera de un ciclo se podría construir un G^* con ciclos).

Por tanto, G tiene una de las dos formas que nos muestra la Figura 4.1, donde todos los vértices excepto los v_i son de valencia 1 ó 2.

En el primer caso, sean x_1, x_2 y x_3 las aristas incidentes con v_1 y sean y_1, y_2 e y_3 las aristas incidentes con v_2 . Sean P_1, P_2 y P_3 los tres caminos disjuntos que unen v_1 con v_2 , cada uno de longitud n_i , con $i = 1, 2, 3$.



Caso 1



Caso 2

Figura 4.1: Distintas formas de G .



Entonces en $L(G)$ se tiene que $\delta(x_1) = \delta(y_3) = 3$ y existen tres caminos disjuntos que los unen, que son $\tilde{P}_1 = L(P_1) \cup \{y_1, y_3\}$, $\tilde{P}_2 = \{x_1, x_2\} \cup L(P_1) \cup \{y_2, y_3\}$ y $\tilde{P}_3 = \{x_1, x_3\} \cup L(P_3)$. Además la longitud de (\tilde{P}_1) es n_1 , la de (\tilde{P}_2) es $n_2 + 1$ y la de (\tilde{P}_3) es n_3 . Luego $L(G)$ contiene como subgrafo a una subdivisión de G (ver Figura 4.1).

En el segundo, sean v_1, \dots, v_n los vértices de G de valencia 3 y sean x_{i1}, x_{i2} y x_{i3} las aristas incidentes con v_i , $i = 1, \dots, n$. Sea P_i el camino que une v_i con v_{i+1} para $i = 1, \dots, n-1$ y P_n el que une a v_n con v_1 . Sea n_i la longitud de P_i . Sean Q_i los caminos que parten de v_i y contienen a x_{i2} , según muestra la Figura 4.1.

Entonces en $L(G)$ se tiene que $\delta(x_{i1}) = 3$, que x_{i1} y $x_{i+1,1}$ están conectados por el camino $\tilde{P}_i = \{x_{i1}, x_{i3}\} \cup L(P_i)$ para $i = 1, \dots, n-1$ y que x_n y x_1 están conectados por el camino $\tilde{P}_n = \{x_{n1}, x_{n3}\} \cup L(P_n)$, siendo la longitud de \tilde{P}_i igual a n_i , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$.

De la misma forma el camino $\tilde{Q}_i = \{x_{i1}, x_{i2}\} \cup L(Q_i)$ de $L(G)$ tienen la misma longitud que Q_i de G , $\forall i \in \{1, \dots, n\}$. Luego $L(G)$ contiene un subgrafo homeomorfo (en realidad isomorfo) a G . \square

A continuación enunciamos y demostramos el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.5. *Sea G un grafo tal que todas sus componentes conexas contienen ciclos. Entonces G es un menor topológico de $L(G)$.*

Demostración: Lo veremos por doble inducción, primero en $\Delta(G)$ y después en el número de vértices v de G tales que $\delta(v) = \Delta(G)$.

Podemos suponer que G es conexo pues, en otro caso, sea $G' = G - H$ donde H es una componente conexas de G que contiene algún vértice de valencia n con $n = \Delta(G)$. Por hipótesis de inducción, para G' se verifica el teorema. Por tanto, sólo quedaría probar que para H también es cierto.

$\Delta(G) \leq 2$. En este caso G es un ciclo con lo que $L(G) = G$.

$\Delta(G) \geq 3$. Supongamos cierto el resultado para G con $\Delta(G) \leq n-1$ y $n \geq 3$.

Sea k el número de vértices de G de valencia n .

El caso $k = 0$ se verifica trivialmente. Veamos el caso $k \geq 1$.

Sea v un vértice de G tal que $\delta(v) = n$. Sea G^* el grafo que resulta de cortar v en tres vértices, v_1, v_2 y v_3 tales que $\delta(v_1) = n - 2$ y $\delta(v_2) = \delta(v_3) = 1$, y pegar a cada v_i un camino P_i de longitud $i \cdot h$, con $i = 1, 2, 3$ y $h > \#(V(G))$. Sea x_i la arista de P_i incidente con v_i , $i = 1, 2, 3$. Sean y_j , $j = 1, \dots, k - 2$ las aristas incidentes con v_1 distintas de x_1 , sea y_{k-1} la arista incidente con v_2 distinta de x_2 y sea y_k la arista incidente con v_3 distinta de x_3 (ver la Figura 4.2).

Si $\Delta(G) \geq 4$ el grafo G^* contiene ciclos. Esto es evidente si G tiene algún ciclo que no pase por v ; en otro caso, dado un ciclo que pase por v , puesto que $\delta(v) \geq 4$, al cortar separo de v dos de las aristas que no estuvieran en dicho ciclo. Si $\Delta(G) = 3$ podemos suponer que G^* contiene ciclos ya que, de lo contrario, se tiene el resultado aplicando el Lema 4.4

Por construcción, el número de vértices de G^* con valencia n es, a lo más, $k - 1$, luego, por hipótesis de inducción, $L(G^*)$ contiene como subgrafo a una subdivisión H^* de G^* . Como la longitud de los caminos que en H^* juegan el papel de P_i es $i \cdot h$ con $h > \#(V(G))$, éstos deben estar incluidos en $L(P_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Uno de los y_j , $j = 1, \dots, k - 2$ juega en H^* el mismo papel que v_1 en G^* , e.g. y_1 . De la misma forma, y_{k-1} juega en H^* el mismo papel que v_2 en G^* y y_k juega el mismo papel que v_3 .

A partir de $L(G^*)$ se obtiene $L(G)$ cortando los y_j en y'_j e y''_j donde $\delta(y''_j) = 1$ para $j = 1, \dots, k$ y, además, y''_l , $l = 1, \dots, k - 2$ son adyacentes a x_1 , y''_{k-1} es adyacente a x_2 y y''_k es adyacente a x_3 , y añadiendo las aristas $\{y'_{k-1}, y'_j\}$ y $\{y'_k, y'_j\}$ para todo $j = 1, \dots, k - 2$.

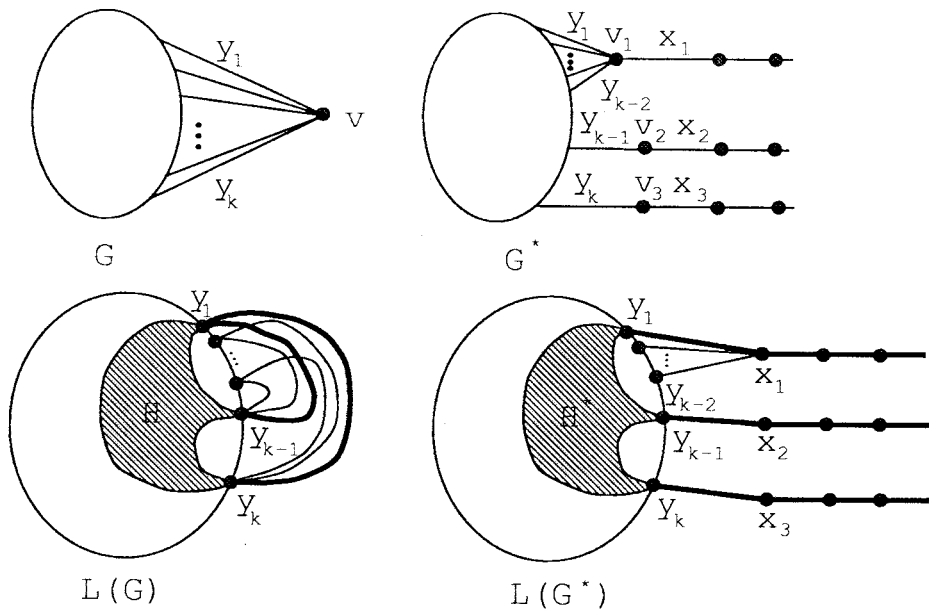
Sea H el subgrafo de $L(G)$ que resulta de realizar a H^* esta operación. Si borramos a H las aristas $\{y'_{k-1}, y'_j\}$ y $\{y'_k, y'_j\}$ para $j = 2, \dots, k - 2$ resulta, por construcción, una subdivisión de G . \square

Observemos que si G es un árbol el resultado no es cierto ya que $\#(V(L(G))) = \#(V(G)) - 1$.

A partir del Teorema 4.5 se tienen como consecuencia los siguientes resultados:

Corolario 4.6. *Sea G un grafo numerable. Entonces $\gamma(G) \leq \gamma(L(G))$ y $\tilde{\gamma}(G) \leq \tilde{\gamma}(L(G))$.*

Además, si $\Delta(G) = 3$ entonces $\gamma(G) = \gamma(L(G))$ y $\tilde{\gamma}(G) = \tilde{\gamma}(L(G))$.

Figura 4.2: Construcción de G^* .

Demostración: Podemos suponer que todas las componentes conexas de G contienen ciclos pues, en otro caso, sea G' el grafo que resulta de quitar a G todas sus componentes conexas que sean árboles. Puesto que un árbol es plano $\gamma(G) = \gamma(G')$ y $\tilde{\gamma}(G) = \tilde{\gamma}(G')$. Sin embargo $\gamma(L(G')) \leq \gamma(L(G))$ y $\tilde{\gamma}(L(G')) \leq \tilde{\gamma}(L(G))$.

Pero en este caso el resultado se tiene de forma inmediata a partir del Teorema 4.5.

En el caso de $\Delta(G) = 3$ la otra desigualdad se tiene por el Lema 4.3 □

Corolario 4.7. *Sea S una superficie o bien una pseudosuperficie en la que para todo grafo K sumergible en S se puede dar una inmersión en la que ningún punto singular de S es punto interior de una arista. Si $L(G)$ admite una inmersión en S entonces G admite una inmersión en S*

Corolario 4.8. *Sea el problema que tiene como datos de entrada $n \in \mathbb{N}$ y G un grafo; y como salida responde si $\gamma(L(G)) \leq n$. Este problema es NP-completo.*

Demostración: Si el problema que tiene como datos de entrada $n \in \mathbb{N}$ y G un grafo cúbico; y como salida responde si $\gamma(L(G)) \leq n$ es NP-completo, entonces se tiene el resultado, pues se trata de un caso más general.

Thomassen demuestra en [49] que el problema de decidir si $\gamma(G) \leq n$ con $n \in \mathbb{N}$ y G grafo cúbico es NP-completo.

Pero, por el Corolario 4.6, si G es cúbico entonces $\gamma(L(G)) = \gamma(G)$, luego decidir si $\gamma(L(G)) \leq n$ es equivalente a decidir si $\gamma(G) \leq n$. □

Puesto que el problema de decidir si $\tilde{\gamma}(G) \leq n$ con $n \in \mathbb{N}$ y G grafo cúbico es NP-completo (ver [49]) se tiene también que el problema que tiene como datos de entrada $n \in \mathbb{N}$ y G un grafo; y como salida responde si $\tilde{\gamma}(L(G)) \leq n$ es NP-completo. La demostración es análoga a la del Corolario 4.8

Antes de enunciar y demostrar el siguiente corolario necesitamos un resultado previo:

Lema 4.9. *Consideremos los problemas que tienen como datos de entrada $n \in \mathbb{N}$ y G una subdivisión de un grafo cúbico; y como salida responden respectivamente si $\gamma(G) \leq n$ y si $\tilde{\gamma}(G) \leq n$. Estos problemas son NP-completos.*

Demostración: El resultado se tiene de forma inmediata teniendo en cuenta que los problemas de decidir si $\gamma(G) \leq n$ y $\tilde{\gamma}(G) \leq n$ respectivamente, con $n \in \mathbb{N}$ y G grafo

cúbico son NP-completos (ver [49]) y que, si G' es una subdivisión de G entonces $\gamma(G') = \gamma(G)$ y $\tilde{\gamma}(G') = \tilde{\gamma}(G)$. \square

Corolario 4.10. *Los problemas que tienen como datos de entrada $n \in \mathbb{N}$ y G un grafo; y como salida responden, respectivamente, si $\gamma(M(G)) \leq n$, $\gamma(L^2(G)) \leq n$, $\tilde{\gamma}(L(G)) \leq n$, $\tilde{\gamma}(M(G)) \leq n$, ó si $\tilde{\gamma}(L^2(G)) \leq n$ son NP-completos.*

Demostración: En el caso del problema $\gamma(M(G)) \leq n$, nos restringimos a que el grafo G sea cúbico y razonamos como en el Corolario 4.8 teniendo en cuenta que, según el Lema 4.3, $\gamma(M(G)) = \gamma(G)$.

En el caso de los problemas $\tilde{\gamma}(L(G)) \leq n$ y $\tilde{\gamma}(M(G)) \leq n$ nos restringimos a un grafo G cúbico y razonamos como en el Corolario 4.8, usando el problema NP-completo que tiene como entrada $n \in \mathbb{N}$ y G un grafo cúbico; y como salida responde si $\tilde{\gamma}(G) \leq n$ (ver [49]).

Por último, para los problemas $\gamma(L^2(G)) \leq n$ y $\tilde{\gamma}(L^2(G)) \leq n$ nos restringimos al caso en que G es una subdivisión de un grafo cúbico. En este caso $\gamma(G) = \gamma(L(G)) = \gamma(L^2(G))$ y $\tilde{\gamma}(G) = \tilde{\gamma}(L(G)) = \tilde{\gamma}(L^2(G))$. Aplicando el Lema 4.9 y razonando como antes se tiene lo que queríamos. \square

4.4 Relaciones generales

Pasemos ahora a enunciar el resultado principal de esta sección, que nos muestra las relaciones que se verifican en cualquier superficie.

Teorema 4.11. *Sea G un grafo y S una superficie. Se verifican las siguientes condiciones:*

1. *Si $T(G)$ es S -representable entonces $L(G)$ es peri- S -representable.*
2. *Si $M(G)$ es peri- S -representable generalizado entonces $L(G)$ es peri- S -representable.*

Demostración: Demostremos la primera condición. Supongamos, en primer lugar, que G es conexo. Sea Γ una inmersión de $T(G)$ en S y Γ_L la inmersión de $L(G)$

en S inducida por Γ . Como Γ_L se obtiene a partir de Γ borrando los puntos que representan vértices de G , y éstos están unidos, los puntos que representan aristas de G quedan en la misma cara de Γ_L , con lo que $L(G)$ es peri- S -representable.

En el caso general, sean G_i , $i = 1, \dots, n$ las componentes conexas de G . Sea H el grafo obtenido identificando un vértice de cada $T(G_i)$ proveniente de un vértice de G_i para $i = 1, \dots, n$. Aplicando las igualdades (4.1) y (4.2) se tiene que el género, orientable o no, de H es igual que el de $\bigcup_{i=1}^n T(G_i)$, luego H admite una inmersión en S . Procediendo con dicha inmersión igual que en el caso conexo se obtiene otra de $L(G)$ en S con todos sus vértices en una misma cara, por lo que $L(G)$ es peri- S -representable.

Veamos, para terminar la demostración, la segunda condición. Sea Γ una inmersión de $M(G)$ en S de forma que todas sus aristas tienen al menos un vértice en la misma cara, y sea C' dicha cara. Sea Γ_L la inmersión de $L(G)$ que induce Γ y C la cara de Γ_L que contiene a C' . Vamos a probar que todos los vértices de $L(G)$ están en C .

Consideremos $a \in V(L(G))$. Por definición de $L(G)$, $a \in E(G)$. Si $a \in C'$ en Γ entonces $a \in C$ en Γ_L .

Si $a \notin C'$, sea v un extremo de a . Por definición de grafo medio, $\{a, v\} \in E(M(G))$; puesto que C' contiene, al menos, un vértice de cada arista de $M(G)$, $v \in C'$. Pero v es un vértice de G , con lo que no está en $L(G)$. Por tanto $\{a, v\} \subset C$ luego $a \in C$. Como Γ_L es una inmersión en S de $L(G)$ con todos los vértices en la cara C , $L(G)$ es peri- S -representable. Obsérvese que el razonamiento es válido tanto si G es conexo como si no lo es. \square

4.5 Contraejemplos

La equivalencia entre la periplanaridad de $L(G)$, la periplanaridad generalizada de $M(G)$ y la planaridad de $T(G)$ no se puede generalizar a una superficie cualquiera. En la sección anterior hemos mostrado las relaciones que se conservan en cualquier superficie, sea orientable o no. Veremos que las demás relaciones no se verifican para las superficies de género positivo. Consideremos primero el plano proyectivo $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ y el toro \mathbb{T} .

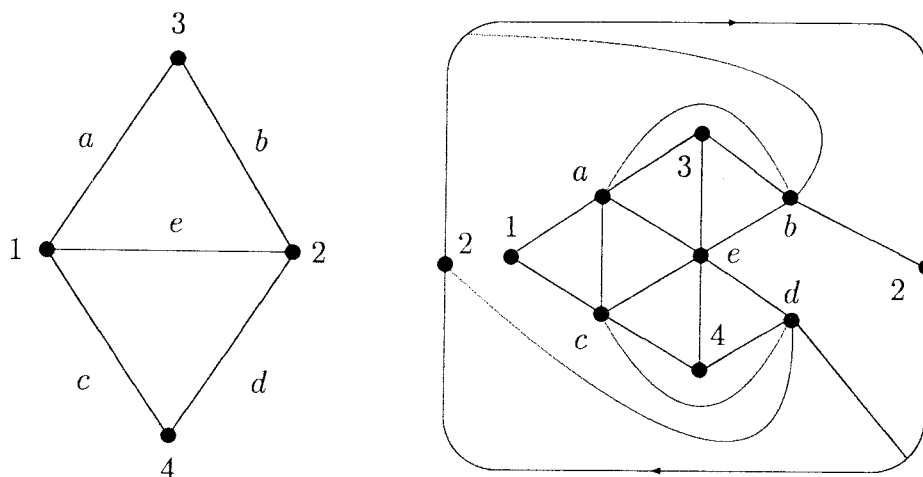


Figura 4.3:

4.5.1 En el plano proyectivo

Consideremos los siguiente resultados previos:

Lema 4.12. $M(K_{1,5})$ no es periproyectivo generalizado.

Demostración: Observemos que $K_6 \subset M(K_{1,5})$. Sea W un conjunto de vértices de $M(K_{1,5})$ que contenga, al menos, un vértice de cada arista. Necesariamente W ha de contener 5 vértices del K_6 luego G^W contiene $K_7 - K_2$, que no es proyectivo ya que no verifica la fórmula de Euler. Por la Proposición 4.2 se tiene lo que queríamos. \square

Lema 4.13. $M(K_2 + \overline{K_2})$ es periproyectivo generalizado.

Demostración: La Figura 4.3 nos muestra una inmersión de $M(K_2 + \overline{K_2})$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ en la que todas las aristas tienen, al menos, un vértice en la misma cara. \square

Veamos a continuación que existen grafos tales que su grafo de línea es periproyectivo pero su grafo medio no es periproyectivo generalizado. Asimismo hay grafos con grafo total proyectivo y grafo medio que no es periproyectivo generalizado. Como ejemplo consideremos $K_{1,5}$. Su grafo total es proyectivo según nos muestra la Figura 4.4 y, por el Teorema 4.11, su grafo de línea es periproyectivo. Sin embargo su grafo medio no es periproyectivo generalizado por el Lema 4.12.

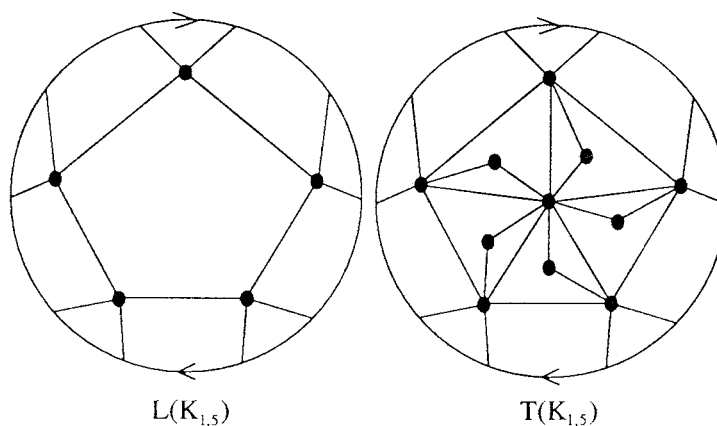


Figura 4.4: Inmersiones de $L(K_{1,5})$ y $T(K_{1,5})$ en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

También existen grafos con grafo de línea periprojectivo y grafo total no projectivo, así como con grafo medio periprojectivo generalizado y grafo total no projectivo. Como ejemplo tenemos $K_2 + \overline{K_2}$. Su grafo medio es periprojectivo generalizado por el Lema 4.13 y, aplicando de nuevo el Teorema 4.11, su grafo de línea es periprojectivo; sin embargo su grafo total no es projectivo por el Teorema 3.48.

La Figura 4.5 resume las relaciones que se tienen.

4.5.2 En el toro

Consideremos los siguientes resultados previos:

Lema 4.14. $L(K_2 + \overline{K_3})$ es peritórico.

Demostración: La Figura 4.6 nos muestra una inmersión de $L(K_2 + \overline{K_3})$ en \mathbb{T} con todos los vértices en la misma cara. \square

Lema 4.15. $M(K_2 \times K_3)$ es peritórico generalizado.

Demostración: La Figura 4.7 nos muestra una inmersión de $M(K_2 \times K_3)$ en \mathbb{T} tal que todas las aristas tienen, al menos, un vértice en la misma cara. \square

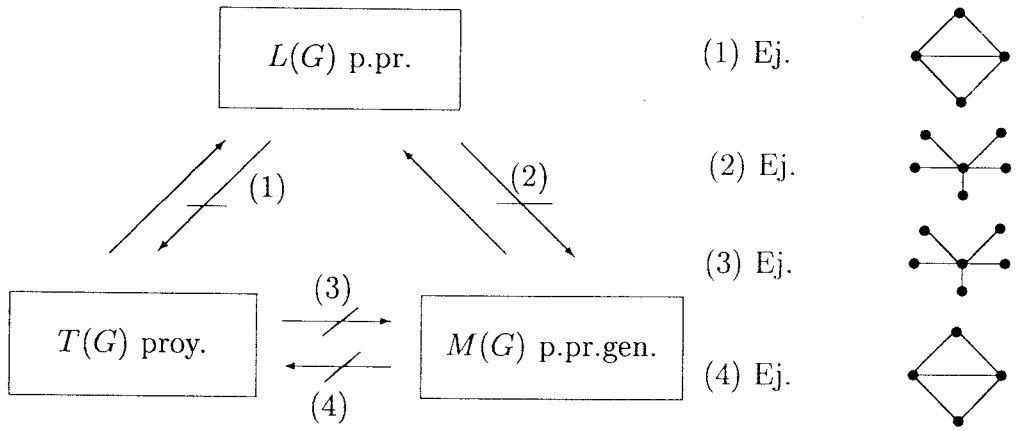


Figura 4.5:

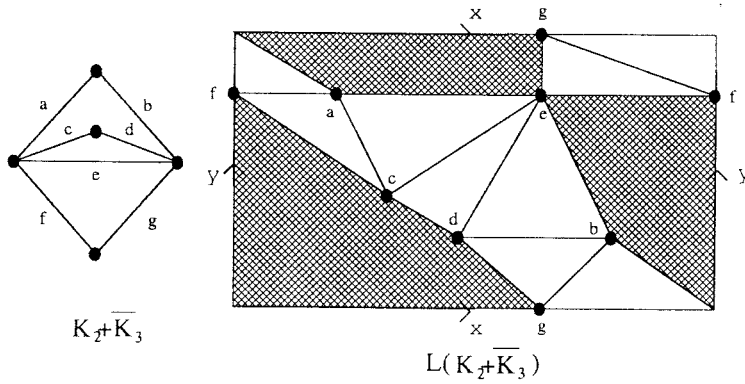


Figura 4.6: Inmersión de $L(K_2 + \overline{K_3})$ en \mathbb{I} .

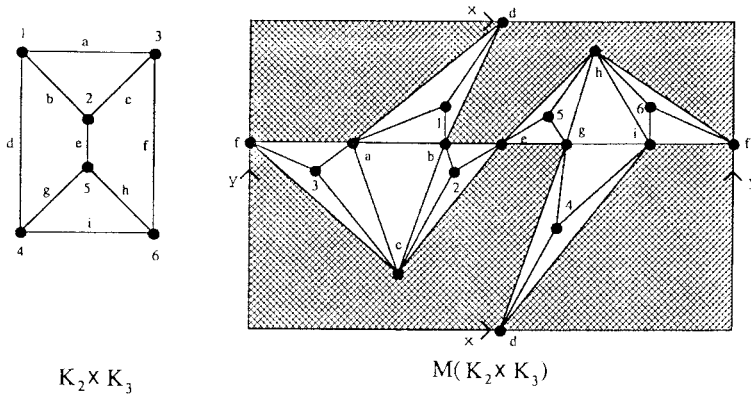
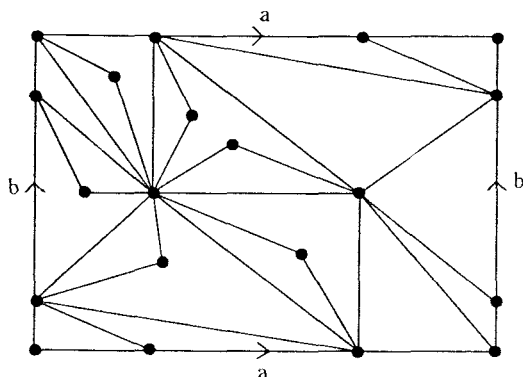


Figura 4.7: Inmersión de $M(K_2 \times K_3)$ en \mathbb{T} .

Igual que en el caso de $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$, en \mathbb{T} existen grafos tales que su grafo de línea es peritórico pero su grafo medio no es peritórico generalizado y su grafo total no es tórico. Como ejemplo consideremos $K_2 + \overline{K_3}$. Su grafo de línea admite una inmersión peritórica por el Lema 4.14. Sin embargo su grafo medio no es peritórico generalizado al no ser tórico, ya que contiene como subgrafo a dos K_5 pegados por un vértice. Como el género de un grafo es la suma del género de cada uno de sus bloques, tenemos que el género de $M(K_2 + \overline{K_3}) > 1$. Puesto que el grafo medio es un subgrafo del grafo total, $T(K_2 + \overline{K_3})$ tampoco es tórico.

También existen grafos con grafo medio peritórico generalizado y grafo total no tórico. Como ejemplo tenemos $K_2 \times K_3$. Su grafo medio es peritórico generalizado por el Lema 4.15; sin embargo su grafo total no es tórico, ya que $T(K_2 \times K_3)$ tiene 45 aristas y 15 vértices. Contrayendo en $T(K_2 \times K_3)$ una de las aristas provenientes del grafo original se obtiene un menor con 43 aristas y 14 vértices. Dicho menor no es tórico pues al ser el número de aristas mayor que el triple del número de vértices no se verifica la fórmula de Euler. En consecuencia $T(K_2 \times K_3)$ tampoco es tórico.

Por último, existen grafos con grafo total tórico y cuyo grafo medio no es peritórico generalizado. Un ejemplo de este tipo de grafos es $K_{1,6}$. Su grafo total es K_7 con seis aristas duplicadas (y una de cada par de aristas dobles subdividida), que es tórico según nos muestra la Figura 4.8. Su grafo medio también contiene a K_7 . Sea W un conjunto de vértices de $M(K_{1,6})$ que contenga, al menos, un vértice de cada arista. Necesariamente W ha de contener seis vértices del K_7 luego G^W contiene $K_8 - K_2$, que no es tórico al ser el número de aristas mayor que el triple del número

Figura 4.8: Inmersión de $T(K_{1,6})$ en \mathbb{T} .

de vértices. Por tanto, aplicando la Proposición 4.2, se tiene que $M(K_{1,6})$ no es peritórico generalizado.

La Figura 4.9 resume las relaciones que se tienen.

4.5.3 En una superficie cualquiera

El Teorema de clasificación de superficies de Brahaná (véase [54]) implica que toda superficie compacta orientable conexa es homeomorfa a una esfera o a la suma conexa de n toros y que toda superficie compacta conexa no orientable es homeomorfa a la suma conexa de n planos proyectivos.

La suma conexa de dos superficies se obtiene quitando de ambas un disco e identificando los bordes de dichos discos ([32]). La Figura 4.10 nos ilustra este proceso.

En esta sección podemos restringirnos sin pérdida de generalidad a una superficie compacta y conexa, puesto que una superficie no compacta es homeomorfa a otra compacta menos un número finito de puntos o discos en el caso de superficies con frontera, como la banda de Möebius. (Ver [32]).

Como consecuencia de las secciones 4.5.1 y 4.5.2 tenemos el siguiente resultado:

Teorema 4.16. *Sea S una superficie compacta y conexa. Son equivalentes:*

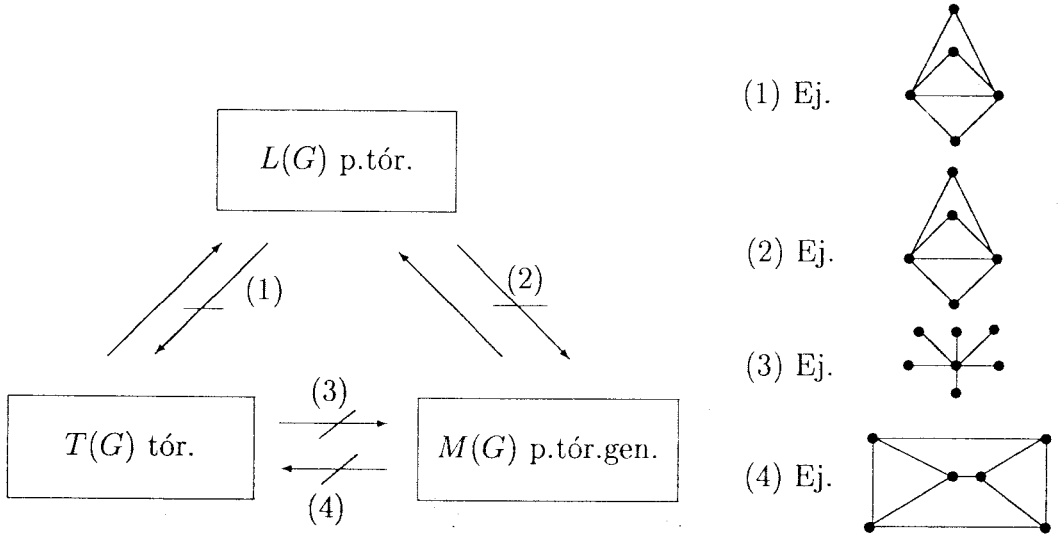


Figura 4.9:

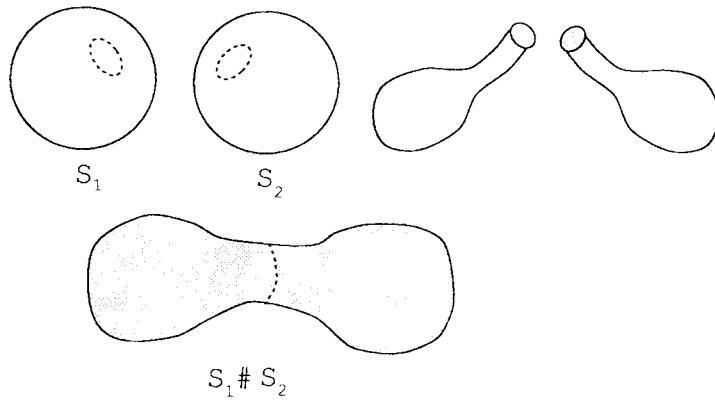


Figura 4.10: Suma conexa de S_1 y S_2 .



1. Para todo grafo G tal que $L(G)$ es *peri- S -representable* se tiene que $M(G)$ es *peri- S -representable generalizado*.
2. Para todo grafo G tal que $L(G)$ es *peri- S -representable* se tiene que $T(G)$ es *S -representable*.
3. Para todo grafo G tal que $M(G)$ es *peri- S -representable generalizado* se tiene que $T(G)$ es *S -representable*.
4. Para todo grafo G tal que $T(G)$ es *S -representable* se tiene que $M(G)$ es *peri- S -representable generalizado*.
5. S es homeomorfa a una esfera.

Demostración: Por el Teorema 4.1 se tiene que la condición 5 implica las condiciones 1, 2, 3 y 4. Supongamos, pues, que no se verifica la condición 5. Distinguiamos dos casos:

Caso I: S no orientable. En este caso, S es una suma conexa de n planos proyectivos con $n \geq 1$ y, por tanto, su género no orientable es n .

Sea $G_1 = \bigcup_{i=1}^n (K_2 + \overline{K_2})$. Observemos que $M(G_1) = \bigcup_{i=1}^n M(K_2 + \overline{K_2})$. Tomemos una inmersión periproyectiva generalizada de cada uno de los n $M(K_2 + \overline{K_2})$ en un plano proyectivo. Efectuando la suma conexa de esos n planos proyectivos por la cara de cada inmersión que contiene al menos un vértice de cada arista se obtiene una inmersión *peri- S -representable generalizada* de $M(G_1)$. Por el Teorema 4.11 se tiene que $L(G_1)$ es *peri- S -representable*. Sin embargo, a partir de la igualdad (4.2) se tiene que $\tilde{\gamma}(T(G_1)) > n$ con lo cual $T(G_1)$ no es *S -representable*.

Sea $G_2 = \bigcup_{i=1}^n K_{1,5}$. Razonando de forma análoga al caso anterior obtenemos que $T(G_2)$ es *S -representable* y, por el Teorema 4.11, $L(G_2)$ es *peri- S -representable*. Sin embargo $M(G_2)$ no es *peri- S -representable generalizado* ya que, por el Lema 4.12, $\tilde{\gamma}(M(G_2)^W) > n$, donde W es un conjunto de vértices de G_2 que contiene, al menos, un vértice de cada arista.

Caso II: S orientable. En este caso, S es una suma conexa de n toros, con $n \geq 1$, y el género de S es n .

Sea $G_3 = \bigcup_{i=1}^n (K_2 + \overline{K_3})$. Observemos que $L(G_3) = \bigcup_{i=1}^n L(K_2 + \overline{K_3})$. Tomemos una inmersión peritórica de cada uno de los n $L(K_2 + \overline{K_3})$ en un tóro y efectuemos la suma conexa de esos n toros por la cara que contiene todos los vértices de cada inmersión. Obtenemos así una inmersión peri- S -representable de $L(G_3)$. Sin embargo, a partir de la igualdad (4.1) $\gamma(M(G_3)) > n$, con lo que $M(G)$ no es S -representable. Tampoco lo es $T(G_3)$ ya que $M(G_3)$ es un subgrafo suyo.

Sea $G_4 = \bigcup_{i=1}^n K_{1,6}$. Razonando igual que en el apartado anterior se llega a que $T(G_4)$ es S -representable, pero $M(G_4)$ no es peri- S -representable generalizado ya que $\gamma(M(G_4)^W) > n$ donde W es un conjunto de vértices de G_4 que contiene, al menos, un vértice de cada arista.

Por último, sea $G_5 = \bigcup_{i=1}^n (K_2 \times K_3)$. Por un razonamiento similar a los anteriores se tiene que $M(G_5)$ es peri- S -representable generalizado, sin embargo $T(G_5)$ contiene un menor cuyo género es mayor que n , con lo que no es S -representable. \square

La Figura 4.11 resume las relaciones que se tienen entre inmersiones de $L(G)$, $M(G)$ y $T(G)$ en S .

4.6 Grafos infinitos no numerables

El Teorema 0.5, enunciado y demostrado por Hutchinson y Wagon en [30] caracteriza a los grafos que admiten una inmersión en una superficie de género orientable k a partir del teorema de Kuratowski correspondiente para grafos finitos en dicha superficie. Asimismo, este resultado sigue siendo válido para superficies no orientables de género finito, según afirman los autores en el mismo trabajo. Como consecuencia, este resultado sólo se puede explicitar en el caso del plano (Teorema de Wagner) y del plano proyectivo.

En esta sección vamos a generalizar los resultados que aparecen en la Sección 2.2 a partir del Teorema 0.5 caracterizando los grafos infinitos no numerables con grafos de línea medio y total que admiten una inmersión en una superficie de género k , orientable o no, a partir de la caracterización de los grafos finitos correspondientes.



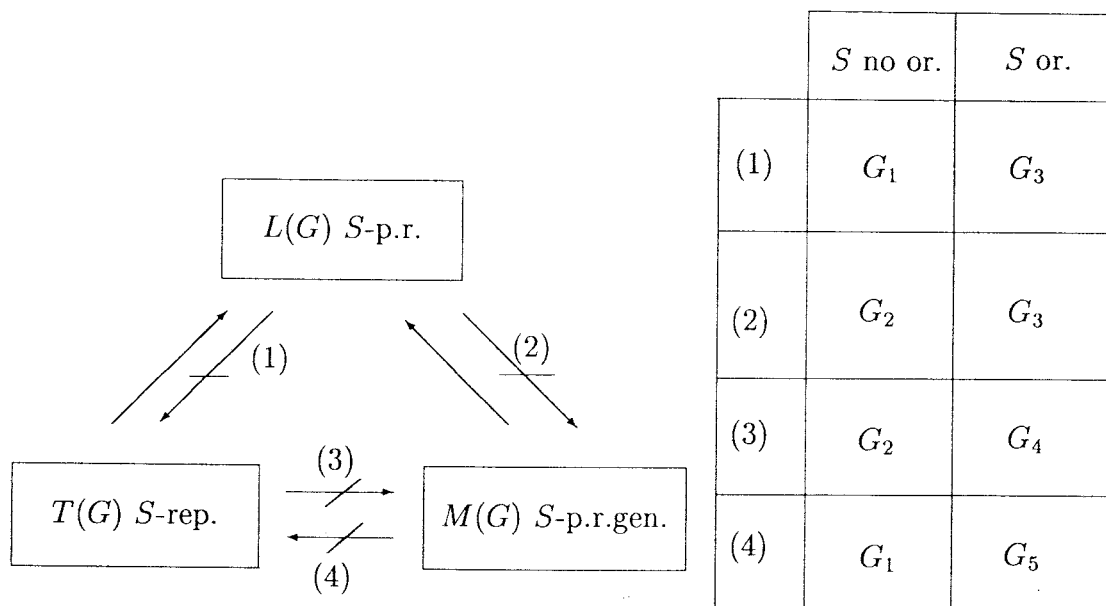


Figura 4.11:

Asimismo daremos la caracterización para los grafos con grafos de línea medio y total iterados.

4.6.1 Grafos de línea de género k

A partir del Teorema 0.5, se tiene la siguiente caracterización de los grafos G tales que $L(G)$ admite una inmersión en una superficie S de género k , donde k es un entero no negativo.

Teorema 4.17. *Sea G un grafo y S una superficie de género k . $L(G)$ admite una inmersión en S si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. $L(H)$ admite una inmersión en S , para todo $H \subset G$, H finito.
2. $|E(G)| \leq 2^{N_0}$.
3. No contiene $\aleph_1 K_{1,4}$, $\aleph_1 Y_2$ ó $\aleph_1 (K_1 + (K_1 \cup K_2))$.

La demostración de este resultado es análoga a la del Teorema 2.19.

Como consecuencia de este teorema se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 4.18. *Sea G un grafo numerable, entonces $L(G)$ admite una inmersión en S si y sólo si $L(H)$ admite una inmersión en S , para todo $H \subset G$, H finito.*

De la misma forma que en la Sección 2.2, a partir de este resultado y del Teorema 0.5 se obtiene la siguiente caracterización de los grafos cuyo n -ésimo grafo de línea admite una inmersión en S .

Teorema 4.19. *Sea G un grafo y S una superficie de género k . $L^n(G)$ admite una inmersión en S si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. $L^n(H)$ admite una inmersión en S , para todo $H \subset G$, H finito.
2. El cardinal de componentes conexas de G que son ciclos o P_i con $i \geq n+1$ es a lo más 2^{n_0} .
3. No contiene $\aleph_1 K_{1,4}$, $\aleph_1 Y_2$ ó $\aleph_1(K_1 + (K_1 \cup K_2))$.

4.6.2 Grafos medios de género k

A partir del Teorema 0.5, se tiene la siguiente caracterización de los grafos G tales que $M(G)$ admite una inmersión en una superficie S de género k , con k entero no negativo.

Teorema 4.20. *Sea G un grafo y S una superficie de género k . $M(G)$ admite una inmersión en S si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. Para todo $H \subset G$, H finito se tiene que $M(H)$ admite una inmersión en S .
2. $|V(G)| \leq 2^{n_0}$.
3. G no contiene $\aleph_1 K_{1,2}$.

La demostración de este resultado es análoga a la del Teorema 2.24.

A partir de este resultado y del Teorema 0.5 se obtiene la siguiente caracterización de los grafos cuyo n -ésimo grafo medio admite una inmersión en S para $n \geq 2$, tal como hicimos en la Sección 2.2.

Teorema 4.21. *Sea G un grafo y S una superficie de género k . $M^n(G)$ admite una inmersión en S , con $n \geq 2$, si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $H \subset G$, H finito se tiene que $M^n(H)$ admite una inmersión en S .*
2. $|V(G)| \leq 2^{N_0}$.
3. *G no tiene N_1 aristas.*

4.6.3 Grafos totales de género k

Por último, y también a partir del Teorema 0.5, se tiene la siguiente caracterización de los grafos G tales que $T(G)$ admite una inmersión en una superficie S de género k , con k entero no negativo.

Teorema 4.22. *Sea G un grafo y S una superficie de género k . $T(G)$ admite una inmersión en S si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $H \subset G$, H finito se tiene que $T(H)$ admite una inmersión en S .*
2. $|V(G)| \leq 2^{N_0}$.
3. *G no contiene $N_1 K_{1,2}$.*

La demostración de este resultado es análoga a la del Teorema 2.28.

A partir de este resultado y del Teorema 0.5 se obtiene la siguiente caracterización de los grafos cuyo n -ésimo grafo total admite una inmersión en S para $n \geq 2$, de la misma forma que en la Sección 2.2.

Teorema 4.23. *Sea G un grafo y S una superficie de género k . $T^n(G)$ admite una inmersión en S , con $n \geq 2$, si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. Para todo $H \subset G$, H finito se tiene que $T^n(H)$ admite una inmersión en S .
2. $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.
3. G no tiene \aleph_1 aristas.

4.6.4 Grafos de línea proyectivos

Como ya hemos comentado, los resultados anteriores caracterizan a los grafos con grafos de línea, medio y total de género k a partir de la caracterización de los grafos finitos correspondientes. Pero éstas, que se basan en el teorema de Kuratowski de la superficie en cuestión, sólo son conocidas en el caso del plano y del plano proyectivo (Capítulo 3).

Por tanto, a partir de los Teoremas 4.17 y 4.19, y de las caracterizaciones dadas en las Secciones 3.2, 3.2.2, 3.2.3 y 3.2.4 se tienen los siguientes resultados.

Teorema 4.24. *Sea G un grafo. $L(G)$ es proyectivo si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. Ningún grafo $H \in \mathcal{H}$ es un MTC de G , donde \mathcal{H} es la lista de grafos dada en la Figura 3.8.
2. $|E(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.
3. No contiene $\aleph_1 K_{1,4}$, $\aleph_1 Y_2$ ó $\aleph_1(K_1 + (K_1 \cup K_2))$.

Teorema 4.25. *Sea G un grafo. $L^2(G)$ es proyectivo si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. No existe $i \in \{1, \dots, 13\}$ tal que $A_i \ll G$; no existe $j \in \{14, \dots, 25\}$ tal que $A_j \ll_x G$ y no existe $k \in \{26, \dots, 40\}$ tal que $A_k \ll_{\{x,y\}} G$ (ver Figura 3.24).
2. $|W(G)| \leq 2^{\aleph_0}$, donde $W(G) = \{v \in V(G) / \delta(v) \geq 2\}$.
3. No contiene $\aleph_1 K_{1,4}$, $\aleph_1 Y_2$ ó $\aleph_1(K_1 + (K_1 \cup K_2))$.

Teorema 4.26. *Sea G un grafo. $L^3(G)$ es proyectivo si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*



1. B_1 no es un x -menor topológico cortable de G y no existe $i \in \{2, \dots, 8\}$ tal que $B_i \ll G$ (ver Figura 3.42).
2. El cardinal del conjunto de componentes conexas que son ciclos o P_k , con $k \geq 4$ es, a lo sumo, 2^{\aleph_0} .
3. G no contiene $\aleph_1 Y_2$.

Teorema 4.27. Sea G un grafo. $L^4(G)$ es proyectivo si y sólo si verifica las siguientes condiciones:

1. No existe $i \in \{1, \dots, 6\}$ tal que $E_i \ll G$ (ver Figura 3.47).
2. El cardinal del conjunto de componentes conexas que son ciclos o P_k , con $k \geq 5$ es, a lo sumo, 2^{\aleph_0} .

Teorema 4.28. Sea G un grafo. $L^n(G)$ es proyectivo para $n \geq 5$ si y sólo si verifica las siguientes condiciones:

1. G no contiene a $K_{1,4}$ ni a Y_2 (ver Figura 3.48).
2. El cardinal del conjunto de componentes conexas que son ciclos o P_k , con $k \geq n + 1$ es, a lo sumo, 2^{\aleph_0} .

4.6.5 Grafos medios proyectivos

Al igual que en la sección anterior, vamos a explicitar las caracterizaciones de los grafos con grafos medios iterados proyectivos a partir de los Teoremas 4.20 y 4.21, y de las caracterizaciones en el caso finito dadas en las Secciones 3.3 y 3.3.2.

Teorema 4.29. Sea G un grafo. $M(G)$ es proyectivo si y sólo si verifica las siguientes condiciones:

1. G no contiene a ningún grafo de la lista \mathcal{I} como menor topológico (ver Figura 3.51).
2. $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.
3. G no contiene $\aleph_1 K_{1,2}$.

Teorema 4.30. *Sea G un grafo. $M^2(G)$ es proyectivo si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. G no contiene a $K_{1,3}$, K_3 , P_5 ó $2P_4$ como menor topológico.
2. $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.
3. G no tiene \aleph_1 aristas.

Teorema 4.31. *Sea G un grafo. $M^3(G)$ es proyectivo si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. G no contiene a $K_{1,2}$ como subgrafo.
2. $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.
3. G no tiene \aleph_1 aristas.

Teorema 4.32. *Sea G un grafo. $M^n(G)$ es proyectivo para $n \geq 4$ si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. G no contiene aristas.
2. $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.

4.6.6 Grafos totales proyectivos

Por último, vamos a dar explícitamente las caracterizaciones de los grafos con grafo total iterados proyectivo a partir de los Teoremas 4.22 y 4.23, y de las caracterizaciones en el caso finito dadas en las Secciones 3.4 y 3.3.2.

Teorema 4.33. *Sea G un grafo. $T(G)$ es proyectivo si y sólo si verifica las siguientes condiciones:*

1. G no contiene como menor topológico a ningún grafo de la lista \mathcal{J} (ver Figura 3.57).
2. $|V(G)| \leq 2^{\aleph_0}$.

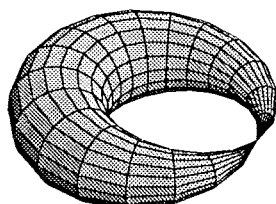


Figura 4.12: El toro estrangulado B_1 .

3. G no contiene $\aleph_1 K_{1,2}$.

Teorema 4.34. *Sea G un grafo. $T^n(G)$ es proyectivo si y sólo si $M^{n+1}(G)$ es proyectivo, para $n \geq 2$.*

4.7 Problemas abiertos

Problema: Caracterizar los grafos tales que su grafo de línea admite una inmersión en B_1 , siendo B_1 el toro estrangulado (ver Figura 4.12).

A este respecto, se tiene la siguiente caracterización de los grafos sumergibles en B_1 :

Teorema 4.35. *Sea G un grafo. G es B_1 -representable si y sólo si $\exists v \in V(G)$ y $\exists H \in \mathcal{F}_v$ tal que H es plano, donde \mathcal{F}_v es el conjunto de grafos resultantes de cortar de todas las formas posibles el vértice v*

Capítulo 5

Género de $L(G)$

5.1 Introducción

Se define el género orientable de un grafo G , $\gamma(G)$, como el mínimo de los géneros de las superficies en las que G es sumergible. Usando el Teorema de clasificación de superficies de Brahaná (ver [54]), esto es equivalente al mínimo número de asas que hay que añadir a una esfera para poder dibujar a G en ella.

Una inmersión de un grafo G en una superficie S se dice *celular* si cada región es homeomorfa a un disco abierto.

Al igual que el plano, toda superficie orientable tiene su fórmula de Euler. Este resultado fue publicado por l'Huilier en 1812 (ver [54]).

Teorema 5.1. *Sea G un grafo con p vértices y q aristas, y tal que admite una inmersión celular en una superficie orientable de género γ con r regiones. Entonces*

$$p - q + r = 2 - 2\gamma \tag{5.1}$$

Como consecuencia de la igualdad (5.1) tenemos las siguientes acotaciones para el género orientable de un grafo (para más detalles, ver [54]):



Teorema 5.2. *Sea G un grafo con p vértices y q aristas. Entonces*

$$\gamma(G) \geq \frac{1}{6}q - \frac{1}{2}p + 1; \quad (5.2)$$

$$\gamma(G) \geq \frac{1}{4}q - \frac{1}{2}p + 1, \text{ si } G \text{ es bipartito}; \quad (5.3)$$

$$\gamma(G) \geq \frac{g-2}{2g}q - \frac{1}{2}p + 1, \text{ si } G \text{ tiene contorno } g. \quad (5.4)$$

El género no orientable de un grafo G , $\tilde{\gamma}(G)$, es el mínimo de los géneros de las superficies no orientables en las que G es sumergible. Usando el Teorema de clasificación de superficies de Brahana (ver [54]), esto es equivalente al mínimo número de planos proyectivos que hay que añadir a una esfera para poder dibujar a G en ella.

De forma análoga al caso orientable, toda superficie no orientable tiene también fórmula de Euler. Fue publicada por Tietze en 1910 (ver [54]).

Teorema 5.3. *Sea G un grafo con p vértices y q aristas, y tal que admite una inmersión celular en una superficie no orientable de género $\tilde{\gamma}$ con r regiones. Entonces*

$$p - q + r = 2 - \tilde{\gamma} \quad (5.5)$$

Como consecuencia de la igualdad (5.5) tenemos las siguientes cotas para el género no orientable de un grafo (que también podemos ver en [54]):

Teorema 5.4. *Sea G un grafo con p vértices y q aristas. Entonces*

$$\tilde{\gamma}(G) \geq \frac{1}{3}q - p + 2; \quad (5.6)$$

$$\tilde{\gamma}(G) \geq \frac{1}{2}q - p + 2, \text{ si } G \text{ es bipartito}; \quad (5.7)$$

$$\tilde{\gamma}(G) \geq \frac{g-2}{g}q - p + 2, \text{ si } G \text{ tiene contorno } g. \quad (5.8)$$

Otra consecuencia del Teorema de clasificación de superficies de Brahana es la siguiente desigualdad (ver [54]):

$$\tilde{\gamma}(G) \leq 2\gamma(G) + 1 \quad (5.9)$$

5.2 Acotaciones del género de algunos grafos de línea

En esta sección vamos a acotar y, en algunos casos, calcular el género del grafo de línea de algunas familias de grafos conocidas.

Dado un grafo G denotamos por $\lambda(G) = \gamma(L(G))$. Asimismo $\tilde{\lambda}(G) = \tilde{\gamma}(L(G))$. Por otra parte, denotaremos por $n \mathbb{T} = \mathbb{T} \# \dots \# \mathbb{T}$ n veces. De la misma forma $n \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \# \dots \# \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ n veces.

Veamos un lema previo.

Lema 5.5. *Sean G y G' dos grafos tales que G se obtiene a partir de G' mediante k identificaciones de vértices. Entonces $\gamma(G) \leq \gamma(G') + k$.*

Demostración: Lo probaremos suponiendo que G se obtiene de G' identificando dos vértices v y v' . Para el caso general se tiene por inducción.

Consideremos una inmersión de G' en una superficie S de género n . Añadiendo a S un tubo desde la cara que contiene a v hasta la que contiene a v' y situando en él el nuevo vértice que resulta de la identificación, tenemos una inmersión de G en una superficie de género $n + 1$ (ver Figura 5.1). Por tanto $\gamma(G) \leq n + 1$. \square

5.2.1 Género del grafo de línea de $G_{m,n}$

El *Grid* de orden $m \times n$, denotado $G_{m,n}$, es el grafo consistente en una cuadrícula o malla con $m \times n$ intersecciones, en cada una de las cuales situamos un vértice.

Vamos a estudiar $\lambda(G_{m,n})$. Antes de calcular su valor para casos particulares, vamos a dar una cota superior.

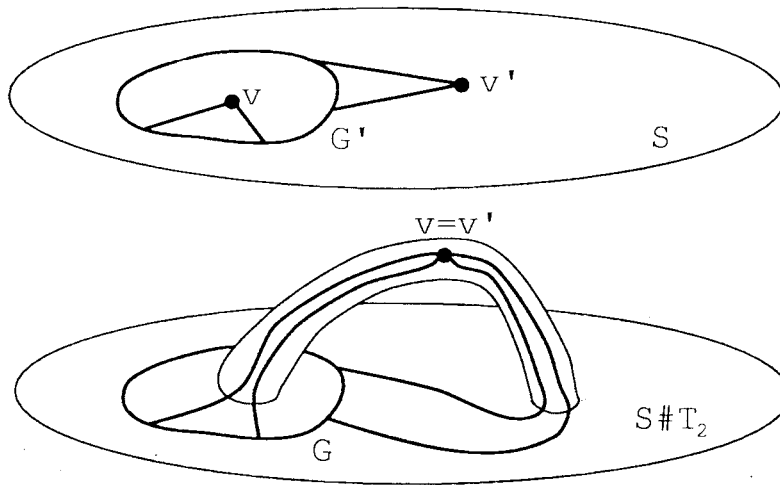


Figura 5.1: Inmersión de G en $S \# \mathbb{T}$.

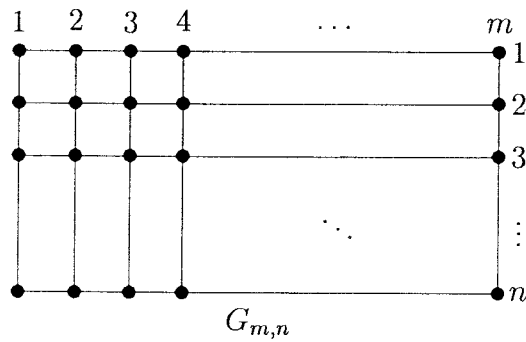


Figura 5.2: El Grid de orden $m \times n$, $G_{m,n}$.

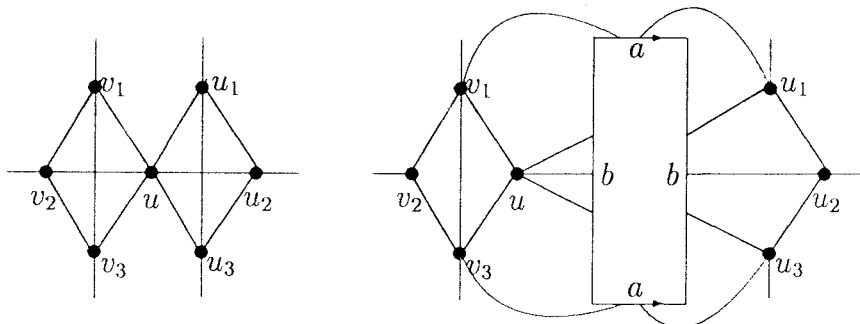


Figura 5.3: Inmersión de G' añadiendo un asa a S .

Teorema 5.6. *El género del grafo de línea del grid de orden $m \times n$ satisface la siguiente desigualdad, para todo $m, n \geq 2$:*

$$\lambda(G_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{2} \right\rceil \tag{5.10}$$

Demostración: Cada vértice de valencia 4 de $G_{m,n}$ da lugar a K_4 en $L(G_{m,n})$. Por tanto, $L(G_{m,n})$ contiene $(m-2)(n-2)$ K_4 . Sea G' el grafo obtenido a partir de $L(G_{m,n})$ borrando las aristas de los K_4 que unen vértices opuestos. Claramente G' es plano.

Consideremos dos C_4 de G' pegados por un vértice, provenientes de dos K_4 de $L(G_{m,n})$. Sean u, u_1, u_2, u_3, u y u, v_1, v_2, v_3, u los dos ciclos de longitud 4, donde $\delta(u) = 4$. Añadiendo un asa y pasando por la misma las aristas $\{u, u_1\}$, $\{u, u_2\}$, $\{u, u_3\}$, $\{u_1, u_3\}$ y $\{v_1, v_3\}$, tal como se indica en la Figura 5.3, se obtiene una inmersión de $L(G_{m,n})$ en una esfera con $\left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{2} \right\rceil$ asas a partir de una de G' en la esfera, donde si $(m-2)(n-2)$ es impar, se añade un asa más para evitar el cruce en el K_4 sobrante. \square

Para valores concretos de m y n hemos conseguido calcular $\lambda(G_{m,n})$. Dicho valor coincide con la cota superior que damos en la desigualdad (5.10).

Teorema 5.7. *Se verifican las siguientes igualdades:*

$$\lambda(G_{m,n}) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{2} \right\rceil \quad \forall m \in \{2, 3, 4\}, \forall n \in \mathbb{N} \tag{5.11}$$

$$\lambda(G_{5,5}) = 5 \tag{5.12}$$



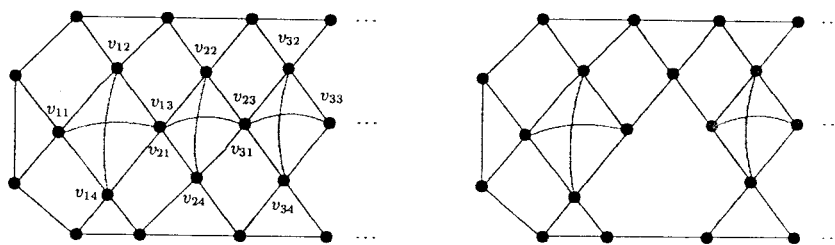


Figura 5.4: Los grafos $L(G_{3,n})$ y G' .

Demostración: Podemos suponer que $m \leq n$, e.o.c. considero $G_{n,m}$.

Las desigualdades $\lambda(G_{m,n}) \leq \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{2} \right\rceil$ para $m \in \{2, 3, 4\}$ y $n \in \mathbb{N}$ y para $m = n = 5$ son un caso particular de la desigualdad (5.10). Para probar las desigualdades contrarias vamos a distinguir varios casos, según los valores de m .

$m = 2$. Puesto que $L(G_{2,n})$ es plano $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que $\lambda(G_{2,n}) = 0$.

$m = 3$. Sean v_{i1}, v_{i2}, v_{i3} y v_{i4} los vértices de los K_4 que aparecen en $L(G_{3,n})$ en el orden del movimiento de las agujas del reloj, con $i = 1, 2, \dots, n - 2$. Nótese que, en este caso, $v_{13} = v_{21}, v_{23} = v_{31}$, etc.

Sea G' el grafo obtenido borrando en $L(G_{3,n})$ el vértice v_{j4} y la arista $\{v_{j1}, v_{j3}\}$, para $j = 2i$ (ver Figura 5.4).

Contrayendo sucesivamente todas las aristas de G' que no sean incidentes con ningún K_4 a un punto obtenemos $\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$ K_5 pegados por un punto cuyo género es precisamente $\left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$ ya que el género de un grafo es igual a la suma de los géneros de los bloques que lo componen (ver [27]) y $\gamma(K_5) = 1$.

Por tanto $\lambda(G_{3,n}) \geq \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil$ puesto que un menor suyo tiene este género. De ambas desigualdades se tiene lo que queremos.

$m = 4$. Probaremos la desigualdad de una forma parecida al caso anterior. Sean $u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}$ y v_{i1}, v_{i2}, v_{i3} y v_{i4} los vértices de los K_4 que aparecen en $L(G_{4,n})$ en el orden del movimiento de las agujas del reloj y donde $u_{i4} = v_{i2}$, con $i = 1, 2, \dots, n - 2$. Nótese que, además, $u_{13} = u_{21}, u_{23} = u_{31}, v_{13} = v_{21}, v_{23} = v_{31}$, etc.

Sea G' el grafo obtenido borrando en $L(G_{4,n})$ las aristas $\{u_{j1}, u_{j3}\}, \{u_{j1}, u_{j4}\}, \{u_{j3}, u_{j4}\}$, con $j = 2i$ y las aristas $\{v_{k1}, v_{k3}\}, \{v_{k1}, v_{k2}\}, \{v_{k2}, v_{k4}\}$, con $v = 2i - 1$ (ver Figura 5.5).

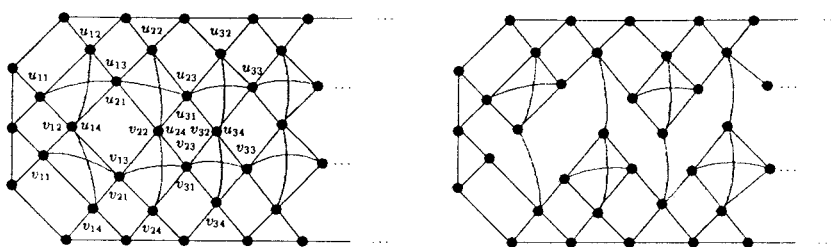


Figura 5.5: Los grafos $L(G_{4,n})$ y G' .

Contrayendo sucesivamente todas las aristas de G' que no sean incidentes con ningún K_4 a un punto obtenemos $(n - 2) K_5$ pegados por un punto, cuyo género es $n - 2$ por el mismo razonamiento usado en el apartado anterior. Puesto que este grafo es un menor de $L(G_{4,n})$ se tiene que $\lambda(G_{4,n}) \geq n - 2$. De las dos desigualdades se tiene la igualdad.

$m = n = 5$ Denotemos K_4^i a los K_4 que aparecen en $L(G_{5,5})$, con $i = 1, \dots, 9$. Construimos G' borrando las aristas indicadas en el caso anterior a los K_4^j , con $j = 2, 4, 6, 8$, y contraemos en G' todas las aristas que no sean incidentes con ningún K_4 , obtenemos 5 K_5 pegados por un punto (ver Figura 5.6).

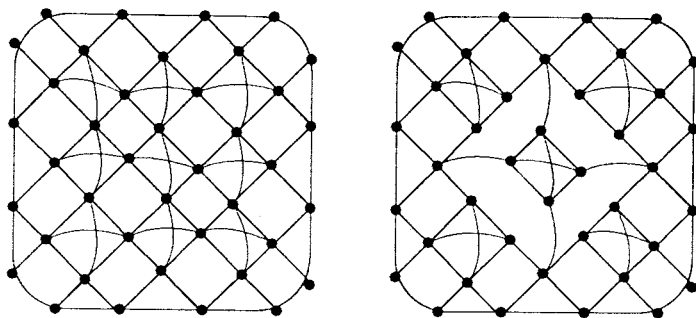
Por tanto, $L(G_{5,5})$ contiene un menor de género 5, con lo que $\lambda(G_{5,5}) \geq 5$. De ambas desigualdades se tiene lo que queremos.

Esto concluye la demostración. □

Como conjetura, proponemos que la desigualdad (5.10) es, en realidad, una igualdad $\forall m, n \in \mathbb{N}$, es decir:

$$\lambda(G_{m,n}) = \left\lceil \frac{(m-2)(n-2)}{2} \right\rceil \quad \text{para todo } m, n \in \mathbb{N} \quad (5.13)$$

La igualdad (5.13) está pendiente de ser demostrada sólo en los casos $m > 5$ y $m = 5, n > 5$.

Figura 5.6: Los grafos $L(G_{5,5})$ y G' .

5.2.2 Género del grafo de línea de $K_{2,n}$

Posteriormente veremos acotaciones para $\lambda(K_{m,n})$, con $m, n \in \mathbb{N}$; sin embargo, cuando $m = 2$ podemos conseguir cotas más finas.

Para el caso $m = 1$ tenemos que $L(K_{1,n}) = K_n$ con lo que $\lambda(K_{1,n}) = \gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$ (ver [27]).

Veamos un resultado previo.

Lema 5.8. *Se verifica la siguiente desigualdad para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$\lambda(K_{2,n}) \leq 2\gamma(K_{n+1}) \quad (5.14)$$

Demostración: Consideremos dos inmersiones Γ y Γ' de K_{n+1} en dos superficies S y S' , con S y S' de género $\gamma(K_{n+1})$ cada una. Sean $v \in V(\Gamma)$ y $v' \in V(\Gamma')$. Sean v_i los vértices de Γ adyacentes a v y v'_i los vértices de Γ' adyacentes a v' , para $i = 1, \dots, n$.

Borramos v y v' , recortamos un disco de las nuevas caras de Γ y Γ' que se han formado, y pegamos un tubo uniendo los bordes. A través de dicho tubo añadimos las aristas $\{v_i, v'_i\}$, con $i = 1, \dots, n$, según se muestra en la Figura 5.7.

Hemos obtenido así una inmersión de $L(K_{2,n})$ en $S \# S_0 \# S'$, siendo S_0 la esfera. Puesto que $\gamma(S \# S_0 \# S') = \gamma(S) + \gamma(S') = 2\gamma(K_{n+1})$, se tiene (5.14). \square

El siguiente teorema nos permite acotar $\lambda(K_{2,n})$.

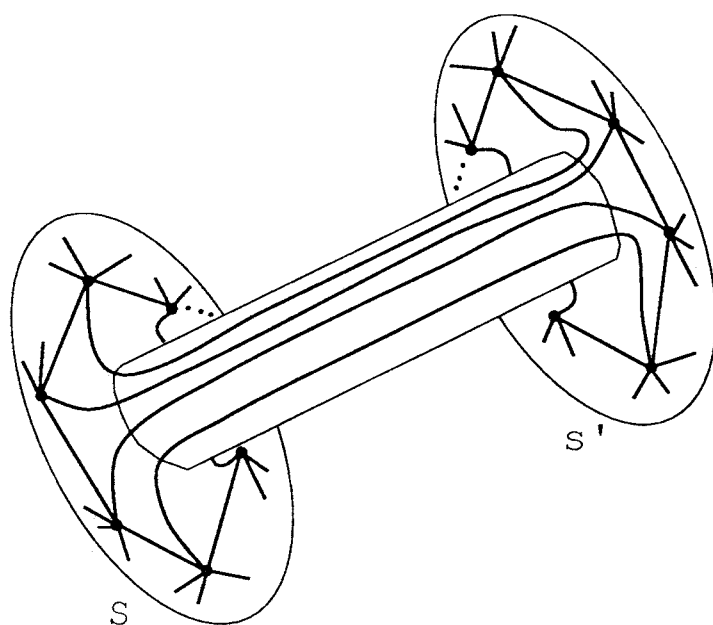


Figura 5.7: Inmersión de $L(K_{2,n})$ en $S\#S_0\#S'$.



Teorema 5.9. *Se verifican las siguientes desigualdades para $n \geq 3$:*

$$\lambda(K_{2,n}) \geq \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil \quad (5.15)$$

$$\lambda(K_{2,n}) \leq 2 \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{12} \right\rceil \quad (5.16)$$

Demostración: Sea H_n el grafo obtenido de subdividir todas las aristas de los dos K_n disjuntos que contiene $L(K_{2,n})$. Obviamente $\gamma(H_n) = \lambda(K_{2,n})$.

Por construcción, todo ciclo de H_n tiene, al menos, 6 aristas. Usando la Fórmula (5.4) se tiene que

$$\gamma(H_n) \geq \frac{1}{3}q - \frac{1}{2}p + 1 \quad (5.17)$$

donde H_n tiene p vértices y q aristas.

Calculemos p y q . $\#V(L(K_{2,n})) = \#A(K_{2,n}) = 2n$, y como $L(K_{2,n})$ es un grafo regular de valencia n , $\#A(K_{2,n}) = 2n \cdot \frac{n}{2} = n^2$.

Por tanto, $p = 2n + 2\#A(K_n) = n^2 + n$ y $q = n^2 + 2\#A(K_n) = 2n^2 - n$.

Usando la desigualdad (5.17) y sabiendo que $\gamma(H_n) = \lambda(K_{2,n})$ tenemos que

$$\lambda(K_{2,n}) \geq \frac{2}{3}n^2 - \frac{1}{3}n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 1 = \frac{(n-2)(n-3)}{6}$$

y, por tanto, se tiene (5.15).

La otra desigualdad se obtiene a partir de (5.14) y teniendo en cuenta que $\gamma(K_n) = \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$. □

Llamamos $\underline{\lambda}(K_{2,n}) = \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil$ y $\bar{\lambda}(K_{2,n}) = 2 \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{12} \right\rceil$. La relación que existe entre $\underline{\lambda}(K_{2,n})$ y $\bar{\lambda}(K_{2,n})$ viene dada por el siguiente resultado, cuya demostración es inmediata:

Teorema 5.10. *Se verifica $\forall n \geq 3$ que*

$$2 \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{12} \right\rceil - \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil = 0 \text{ ó } 1 \quad (5.18)$$

Además, si $n = k + 12$ entonces

$$\begin{aligned} 2 \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{12} \right\rceil - \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil \\ = 2 \left\lceil \frac{(k-2)(k-3)}{12} \right\rceil - \left\lceil \frac{(k-2)(k-3)}{6} \right\rceil \end{aligned} \quad (5.19)$$

Por tanto basta estudiar los valores de la igualdad (5.18) para $n \in \{0, \dots, 11\}$. Efectuando las operaciones se tiene que (5.18) es igual a 0 si $n = 2, 3, 6, 7, 10, 11$, e igual a 1 si $n = 0, 1, 4, 5, 8, 9$. Obviamente, en los casos en que el valor de (5.18) es 0, $\underline{\lambda}(K_{2,n}) = \bar{\lambda}(K_{2,n})$ y, por tanto, ambas cotas son iguales a $\lambda(K_{2,n})$, tal como afirma el siguiente corolario:

Corolario 5.11. *Sea $n \equiv k \pmod{12}$, con $k \in \{2, 3, 6, 7, 10, 11\}$. Entonces $\lambda(K_{2,n}) = \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil$.*

Sin embargo en los casos en que las cotas no coinciden, $\lambda(K_{2,n}) = \underline{\lambda}(K_{2,n})$ en unos casos y $\lambda(K_{2,n}) = \bar{\lambda}(K_{2,n})$ en otros, según vemos en el siguiente resultado.

Proposición 5.12. *Se verifican las siguientes igualdades:*

$$\lambda(K_{2,4}) = 1 = \underline{\lambda}(K_{2,4}) \quad (5.20)$$

$$\lambda(K_{2,5}) = 2 = \bar{\lambda}(K_{2,5}) \quad (5.21)$$

$$\lambda(K_{2,8}) = 5 = \underline{\lambda}(K_{2,8}) \quad (5.22)$$

Demostración: Por la desigualdad (5.15) se tiene que $\lambda(K_{2,4}) \geq 1$. Para probar la igualdad, basta dar una inmersión de $L(K_{2,4})$ en \mathbb{T} (ver Figura 5.8).

Por otra parte, $2K_5 \subset L(K_{2,5})$ y $\gamma(2K_5) = 2$, con lo que $\lambda(K_{2,5}) \geq 2$. Teniendo en cuenta que $\bar{\lambda}(K_{2,5}) = 2$, se tiene la igualdad.



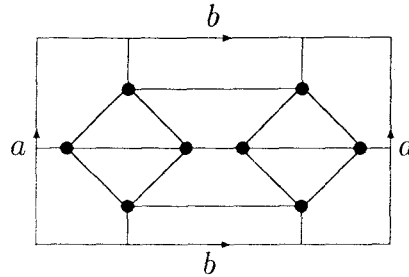


Figura 5.8: Una inmersión de $L(K_{2,4})$ en el toro.

Para terminar la demostración, vamos a construir una inmersión de $L(K_{2,8})$ en una esfera con 5 asas de la forma siguiente.

La Figura 5.9 muestra una inmersión de K_8 en $\mathbb{T}\#\mathbb{T}$ tal que las dos caras señaladas cubren todos los vértices. Tomamos dos veces esta inmersión y pegamos un tubo desde cada cara rayada en una de las inmersiones hasta su homóloga en la otra inmersión, uniendo por aristas a través de cada tubo los vértices de cada una de las caras con los de su homóloga. La superficie así obtenida es topológicamente equivalente a la esfera con 5 asas, y el grafo obtenido es $L(K_{2,8})$.

Teniendo en cuenta, además, que $\underline{\lambda}(K_{2,8}) = 5$, queda probado que $\lambda(K_{2,8}) = 5$. Esto concluye la demostración. \square

5.2.3 Género del grafo de línea de K_n

El grafo de línea de K_n es un grafo con $\frac{n^2 - n}{2}$ vértices y $n\#A(K_{n-1}) = \frac{n^3}{2} - \frac{3n^2}{2} + n$ aristas. Aplicando la desigualdad (5.2) se tiene que $\forall n \geq 3$

$$\lambda(K_n) \geq \frac{n^3}{12} - \frac{n^2}{2} + \frac{5n^2}{12} + 1$$

Denotamos $\underline{\lambda}(K_n) = \frac{n^3}{12} - \frac{n^2}{2} + \frac{5n^2}{12} + 1$.

Para obtener una cota superior de $\lambda(K_n)$ observemos que está formado por n K_{n-1} tales que cada vértice pertenece exactamente a dos K_{n-1} distintos.

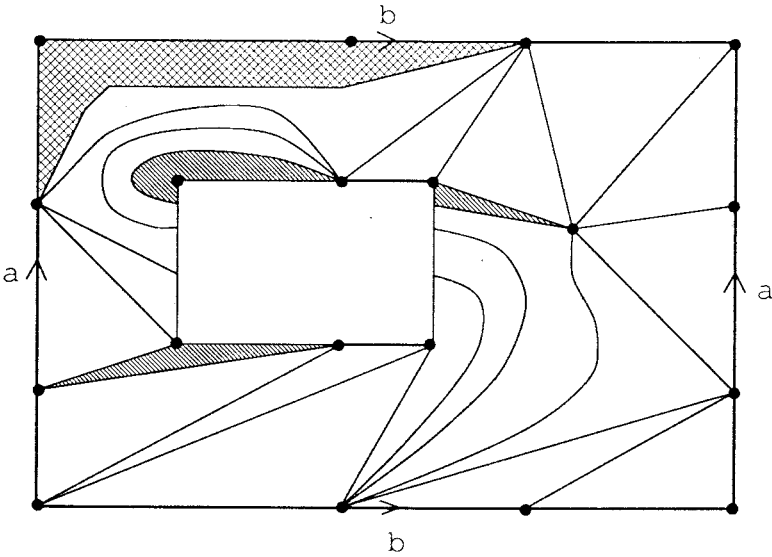


Figura 5.9: Inmersión de K_8 en $\mathbb{T} \# \mathbb{T}$.

Consideremos n copias de K_{n-1} a las que denotaremos como $K_{n-1}^1, K_{n-1}^2, \dots, K_{n-1}^n$. Sea $G = K_{n-1}^1 \cdot K_{n-1}^2 \cdot \dots \cdot K_{n-1}^n$, donde las identificaciones son entre vértices de valencia $n-2$. El género de G es $\gamma(G) = n \left\lceil \frac{(n-4)(n-5)}{12} \right\rceil$.

A partir de G podemos obtener $L(K_n)$ haciendo $\left(\frac{n^2-n}{2}\right) - (n-1)$ identificaciones de vértices, puesto que G sólo tiene $n-1$ vértices que pertenezcan a dos K_{n-1} distintos y $L(K_n)$ tiene $\frac{n^2-n}{2}$.

Usando el Lema 5.5 tenemos que $\lambda(K_n) \leq n \left\lceil \frac{(n-4)(n-5)}{12} \right\rceil + \left(\frac{n^2-n}{2}\right) - (n-1) = n \left\lceil \frac{(n-4)(n-5)}{12} \right\rceil + \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1$.

Denotamos $\bar{\lambda}(K_n) = n \left\lceil \frac{(n-4)(n-5)}{12} \right\rceil + \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2} + 1$.

Se tiene el siguiente resultado.

Proposición 5.13. *Se verifica la siguiente igualdad:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(K_n)}{n^3} = \frac{1}{12}$$

Demostración: Se tiene de forma inmediata a partir de que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(K_n)}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\bar{\lambda}(K_n)}{n^3} = \frac{1}{12}$. □

5.2.4 Género del grafo de línea de $K_{m,n}$

Vamos a acotar $\lambda(K_{m,n})$ con $m, n \geq 3$. La cota inferior la obtenemos aplicando la desigualdad (5.2).

Para ello tenemos en cuenta que $\#V(L(K_{m,n})) = mn$ y que $\#A(L(K_{m,n})) = mn \left(\frac{m+n}{2} + 1\right)$. Por tanto

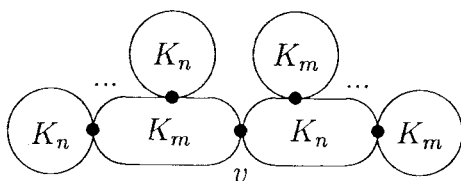


Figura 5.10: El grafo G .

$$\lambda(K_{m,n}) \geq \frac{1}{6}mn \left(\frac{m+n}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2}mn + 1 = \frac{1}{12}m^2n + \frac{1}{12}mn^2 - \frac{2}{3}mn + 1$$

Como en las secciones anteriores denotamos para $m, n \geq 3$

$$\lambda(K_{m,n}) = \frac{1}{12}m^2n + \frac{1}{12}mn^2 - \frac{2}{3}mn + 1.$$

Para obtener una cota superior tengamos en cuenta que $L(K_{m,n})$ consiste en $m K_n$ y $n K_m$ tales que cada vértice pertenece exactamente a un K_m y a un K_n .

Consideremos el grafo G construido de la siguiente forma. Tomamos $K_m \cdot K_n$ y sea v el vértice que ambos comparten. Pegamos a K_m un K_n en cada vértice, excepto en v y pegamos a K_n un K_m en cada vértice, excepto en v (ver Figura 5.10).

Por construcción $\gamma(G) = n\gamma(K_m) + m\gamma(K_n) = n \left\lceil \frac{(m-3)(m-4)}{12} \right\rceil + m \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$ (ver [27]).

Observemos que G tiene $m+n-1$ pegamientos (vértices que pertenecen simultáneamente a un K_m y a un K_n). Para construir $L(K_{m,n})$ a partir de G hemos de efectuar $nm - (m+n-1)$ pegamientos más. Aplicando el Lema 5.5 se tiene que

$$\lambda(K_{m,n}) \leq n \left\lceil \frac{(m-3)(m-4)}{12} \right\rceil + m \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil + mn - m - n + 1$$

Denotamos $\bar{\lambda}(K_{m,n}) = n \left\lceil \frac{(m-3)(m-4)}{12} \right\rceil + m \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil + mn - m - n + 1$.

Por último tenemos el siguiente resultado, cuya demostración consiste en comprobar que se verifica tanto para $\underline{\lambda}(K_{m,n})$ como para $\bar{\lambda}(K_{m,n})$.

Proposición 5.14. *Se verifican los siguientes enunciados:*

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m(n)}{n} = p$ entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(K_{m(n),n})}{n^3} = \frac{1}{12}p^2 + \frac{1}{12}p$
2. Para $m \geq 3$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(K_{m,n})}{n^2} = \frac{1}{12}m$

5.2.5 Género del grafo de línea de Q_n

En esta sección vamos a obtener cotas para $\lambda(Q_n)$ con $n \geq 3$. La cota inferior la obtenemos aplicando la desigualdad (5.2).

Para ello tenemos en cuenta que $\#V(L(Q_n)) = \#A(Q_n) = 2^{n-1}n$ y que $\#A(L(Q_n)) = 2^{n-1}n(n-1)$. Por tanto

$$\lambda(Q_n) \geq \frac{1}{6}2^{n-1}n(n-1) - \frac{1}{2}2^n n + 1 = \frac{2^n}{12}n^2 n - \frac{2^n}{3}n + 1$$

Como en las secciones anteriores denotamos para $n \geq 3$

$$\underline{\lambda}(Q_n) = \frac{2^n}{12}n^2 n - \frac{2^n}{3}n + 1.$$

Para obtener una cota superior tengamos en cuenta que Q_n es un grafo regular de valencia n por lo que cada vértice de $L(Q_n)$ pertenece exactamente a $2 K_n$.

Consideremos 2^n copias de K_n a las que denotaremos como $K_n^1, K_n^2, \dots, K_n^{2^n}$. Sea $G = K_n^1 \cdot K_n^2 \cdot \dots \cdot K_n^{2^n}$, donde las identificaciones son entre vértices de valencia $n-1$.

El género de G es $\gamma(G) = 2^n \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$

5.2. ACOTACIONES DEL GÉNERO DE ALGUNOS GRAFOS DE LÍNEA 207

A partir de G podemos obtener $L(Q_n)$ haciendo $2^{n-1}n - (2^n - 1)$ identificaciones de vértices, puesto que G sólo tiene $2^n - 1$ vértices que pertenezcan a dos K_n distintos y $L(Q_n)$ ha de tener $2^{n-1}n$.

Usando el Lema 5.5 tenemos que $\lambda(Q_n) \leq 2^n \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil + 2^{n-1}n - (2^n - 1) = 2^n \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil + 2^{n-1}n - 2^n + 1$.

Denotamos $\bar{\lambda}(Q_n) = 2^n \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil + 2^{n-1}n - 2^n + 1$.

Además tenemos el siguiente resultado, cuya demostración se obtiene comprobando que se verifica tanto para $\underline{\lambda}(Q_n)$ como para $\bar{\lambda}(Q_n)$.

Proposición 5.15. *Se verifica la siguiente igualdad:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(Q_n)}{2^n n^2} = \frac{1}{12}$$

En las tablas siguientes se muestran las cotas superiores e inferiores obtenidas para el género de $L(K_n)$, $L(K_{m,n})$ y $L(Q_n)$ para $m = 2, 3, 4, 5$ y $n = 4, \dots, 20$.



n	$\lambda(K_n)$	$\lambda(K_n)$	$\lambda(K_{2,n})$	$\lambda(K_{2,n})$	$\lambda(K_{3,n})$	$\lambda(K_{3,n})$
4	0	3	1	2	0	6
5	1	6	1	2	1	11
6	4	16	2	2	3	13
7	8	22	4	4	5	15
8	15	29	5	6	7	20
9	25	46	7	8	10	25
10	39	66	10	10	14	30
11	56	89	12	12	18	35
12	78	115	15	16	22	40
13	105	144	19	20	27	48
14	138	190	22	22	33	56
15	176	241	26	26	39	61
16	221	281	31	32	45	69
17	273	341	35	36	52	80
18	333	424	40	40	60	88
19	400	495	46	46	68	96
20	476	571	51	52	76	107

n	$\lambda(K_{4,n})$	$\lambda(K_{4,n})$	$\lambda(K_{5,n})$	$\lambda(K_{5,n})$	$\lambda(Q_n)$	$\lambda(Q_n)$
4	1	9	3	16	1	17
5	3	16	6	26	15	80
6	5	19	9	31	65	192
7	8	22	13	36	225	448
8	12	29	18	46	684	1279
9	16	36	24	56	1921	3326
10	21	43	31	66	5121	8189
11	27	50	38	76	13143	19452
12	33	57	46	86	32769	45051
13	40	68	56	101	79873	110585
14	48	79	66	116	191148	262135
15	56	86	76	126	450561	573430
16	65	97	88	141	1048577	1310708
17	75	112	101	161	2413911	3080177
18	85	123	114	176	5505025	6815727
19	96	134	128	191	12451841	14942189
20	108	149	143	211	27962028	33554410

5.3 Acotaciones de géneros no orientables

Recordemos, para comenzar esta sección, que como consecuencia del Teorema de clasificación de superficies de Brahana, añadir un asa a una superficie no orientable es equivalente a añadir dos planos proyectivos (ver [54]). Esto no es cierto si la superficie es orientable.

A partir de este resultado y usando el Lema 5.5 obtenemos el siguiente lema:

Lema 5.16. *Sean G y G' dos grafos tales que G se obtiene a partir de G' mediante k identificaciones de vértices. Entonces $\tilde{\gamma}(G) \leq \tilde{\gamma}(G') + 2k$.*

Además, la demostración del Lema 5.8 es válida para el género no orientable, es decir; se verifica el siguiente resultado:

Lema 5.17. *Se verifica la siguiente desigualdad para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$\tilde{\lambda}(K_{2,n}) \leq 2\tilde{\gamma}(K_{n+1}) \quad (5.23)$$

A continuación pasamos a estudiar el género no orientable del grafo de línea de algunas familias de grafos.

5.3.1 Género no orientable de $L(K_{2,n})$

Como ya señalamos en el caso orientable, $L(K_{1,n}) = K_n$, por lo que

$$\tilde{\lambda}(K_{1,n}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil & \text{si } n \neq 7 \\ 3 & \text{si } n = 7 \end{cases}$$

Para $\tilde{\lambda}(K_{2,n})$ procederemos de forma análoga al caso orientable.

Sea H_n el grafo obtenido de subdividir todas las aristas de los dos K_n que forman $L(K_{2,n})$. Puesto que se trata de una subdivisión, $\tilde{\gamma}(H_n) = \tilde{\lambda}(K_{2,n})$. El contorno de H_n es 6 por construcción, $\#V(H_n) = n^2 + n$ y $\#A(H_n) = 2n^2 - n$.

Aplicando la desigualdad (5.8) obtenemos que

$$\tilde{\lambda}(K_{2,n}) \geq \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{3} \right\rceil$$

Denotemos $\underline{\lambda}(K_{2,n}) = \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{3} \right\rceil$.

Por otro lado, aplicando la desigualdad (5.23) obtenemos una cota superior de $\tilde{\lambda}(K_{2,n})$:

$$\tilde{\lambda}(K_{2,n}) \leq 2 \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil \quad \text{si } n \neq 6$$

En el caso $n = 6$ obtenemos una cota mejor mediante la desigualdad (5.9), teniendo en cuenta que $\lambda(K_{2,6}) = 2$: $\tilde{\lambda}(K_{2,6}) \leq 5$.

Por tanto la cota superior obtenida es la siguiente:

$$\bar{\lambda}(K_{2,n}) = \begin{cases} 2 \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil & \text{si } n \neq 6 \\ 5 & \text{si } n = 6 \end{cases}$$

Encontramos una relación entre $\underline{\lambda}(K_{2,n})$ y $\bar{\lambda}(K_{2,n})$ similar a la encontrada en el caso orientable, que viene dada por el siguiente resultado, cuya demostración es inmediata:

Lema 5.18. *Se verifica $\forall n \geq 3$ que*

$$2 \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil - \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{3} \right\rceil = 0 \text{ ó } 1 \quad (5.24)$$

Además, si $n = k + 6$, entonces

$$\begin{aligned} 2 \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{6} \right\rceil - \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{3} \right\rceil \\ = 2 \left\lceil \frac{(k-2)(k-3)}{6} \right\rceil - \left\lceil \frac{(k-2)(k-3)}{3} \right\rceil \end{aligned} \quad (5.25)$$

Por tanto basta estudiar los valores de la igualdad (5.24) para $n \in \{0, \dots, 5\}$. Efectuando las operaciones se tiene que (5.24) es igual a 0 si $n = 0, 2, 3, 5$, e igual a 1 si $n = 1, 4$. Obviamente, en los casos en que el valor de (5.24) es 0, $\tilde{\lambda}(K_{2,n}) = \bar{\lambda}(K_{2,n})$ y, por tanto, ambas cotas son iguales a $\tilde{\lambda}(K_{2,n})$:

Corolario 5.19. *Sea $n \equiv k \pmod{6}$, $n \neq 6$, con $k \in \{0, 2, 3, 5\}$. Entonces $\tilde{\lambda}(K_{2,n}) = \left\lceil \frac{(n-2)(n-3)}{3} \right\rceil$.*

En los casos en que las cotas no coinciden, sólo conocemos $\tilde{\lambda}(K_{2,4}) = 2$ ya que $L(K_{2,4})$ es uno de los 35 menores prohibidos para $\mathbb{IP}_2(\mathbb{R})$ (ver [3, 4, 24]).

5.3.2 Género no orientable de $L(K_n)$

En esta sección vamos a acotar $\tilde{\lambda}(K_n)$. Teniendo en cuenta que $L(K_n)$ es un grafo con $\frac{n^2-n}{2}$ vértices y $\frac{n^3}{2} - \frac{3n^2}{2} + n$ aristas y aplicando la desigualdad (5.6) se tiene que para $n \geq 3$

$$\tilde{\lambda}(K_n) \geq \frac{n^3}{6} - n^2 + \frac{5n}{6} + 2$$

Denotamos $\tilde{\lambda}(K_n) = \frac{n^3}{6} - n^2 + \frac{5n}{6} + 2$.

Para hallar una cota superior, sea G el grafo definido en la Sección 5.2.3. Se tiene que $\tilde{\gamma}(G) \leq n \left\lceil \frac{(n-4)(n-5)}{6} \right\rceil$ para $n \neq 8$. Aplicando un razonamiento similar al usado en dicha sección y el Lema 5.16 obtenemos

$$\tilde{\lambda}(K_n) \leq n \left\lceil \frac{(n-4)(n-5)}{6} \right\rceil + n^2 - 3n + 2 \text{ si } n \neq 8$$

Denotamos $\bar{\lambda}(K_n) = n \left\lceil \frac{(n-4)(n-5)}{6} \right\rceil + n^2 - 3n + 2$ si $n \neq 8$.

Para hallar una cota superior de $\tilde{\lambda}(K_8)$ usamos la desigualdad (5.9):

$$\tilde{\lambda}(K_8) \leq 2\lambda(K_8) + 1 \leq 2\bar{\lambda}(K_8) + 1 = 59$$

Por tanto $\bar{\lambda}(K_8) = 59$

A partir de las cotas obtenidas, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 5.20. *Se verifica la siguiente igualdad:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\lambda}(K_n)}{n^3} = \frac{1}{6}$$

5.3.3 Género no orientable de $L(K_{m,n})$

Vamos a acotar $L(K_{m,n})$ para $m, n \geq 3$. Según se vio en la Sección 5.2.4, $L(K_{m,n})$ tiene mn vértices y $mn \left(\frac{m+n}{2} - 1 \right)$ aristas. Aplicando la desigualdad (5.6) se tiene para todo $m, n \geq 3$ que

$$\tilde{\lambda}(K_{m,n}) \geq \frac{m^2n}{6} + \frac{mn^2}{6} - \frac{4mn}{3} + 2$$

Denotamos $\underline{\lambda}(K_{m,n}) = \frac{m^2n}{6} + \frac{mn^2}{6} - \frac{4mn}{3} + 2$.

Para hallar una cota superior consideremos el grafo G definido en la Sección 5.2.4. Se tiene que $\tilde{\gamma}(G) \leq n \left\lceil \frac{(m-3)(m-4)}{6} \right\rceil + m \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil$ para $m, n \neq 7$.

Aplicando un razonamiento similar al usado en la Sección 5.2.4 y el Lema 5.16 obtenemos:

$$\tilde{\lambda}(K_{m,n}) \leq n \left\lceil \frac{(m-3)(m-4)}{6} \right\rceil + m \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil + 2mn - 2m - 2n + 2$$

Denotamos $\bar{\lambda}(K_{m,n}) = n \left\lceil \frac{(m-3)(m-4)}{6} \right\rceil + m \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil + 2mn - 2m - 2n + 2$ si $m, n \neq 7$.

A partir de las cotas obtenidas, se verifica el siguiente resultado:

Proposición 5.21. *Se verifican los siguientes enunciados:*

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{m(n)}{n} = p$ entonces $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\tilde{\lambda}(K_{m(n),n})}{n^3} = \frac{p^2}{6} + \frac{p}{6}$
2. Para $m \geq 3$, $m \neq 7$ se tiene que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(K_{m,n})}{n^2} = \frac{m}{6}$

Estudiemos a continuación la cota superior de $\tilde{\lambda}(K_{m,n})$ en los casos que nos quedan:

Caso $m = 7$, $n \neq 7$. En este caso, razonando a partir del grafo G' como en el caso general, y teniendo en cuenta que $\tilde{\gamma}(K_7) = 3$ llegamos a que

$$\tilde{\lambda}(K_{7,n}) \leq 7 \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil + 15n - 12. \quad (5.26)$$

Sin embargo, a partir de la expresión (5.9) se obtiene esta otra acotación:

$$\tilde{\lambda}(K_{7,n}) \leq 14 \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil + 14n - 11 \quad (5.27)$$

Se puede comprobar que para $n \geq 8$ la cota obtenida en (5.27) es más fina que la obtenida en (5.26). Sólo para los valores $n = 5, 6$ es más fina la segunda. La cota superior de $\bar{\lambda}(K_{7,n})$ queda como sigue:

$$\bar{\lambda}(K_{7,n}) = \begin{cases} 31 & \text{si } n = 3 \\ 45 & \text{si } n = 4 \\ 70 & \text{si } n = 5 \\ 85 & \text{si } n = 6 \\ 14 \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil + 14n - 11 & \text{si } n \geq 8 \end{cases}$$

A partir de la cota obtenida, se puede comprobar que la Proposición 5.21 sigue siendo válida para $m = 7$, es decir, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(K_{m,n})}{n^2} = \frac{7}{6}$

Caso $m = n = 7$. En este caso la menor cota superior se obtiene aplicando la desigualdad (5.9):

$$\tilde{\lambda}(K_{7,7}) \leq 2\lambda(K_{7,7}) + 1 \leq 101$$

Por tanto $\bar{\lambda}(K_{7,7}) = 101$.

5.3.4 Género no orientable de $L(Q_n)$

En esta sección vamos a acotar $\tilde{\lambda}(Q_n)$. Teniendo en cuenta que $L(Q_n)$ es un grafo con $2^{n-1}n$ vértices y $2^{n-1}n(n-1)$ aristas y aplicando la desigualdad (5.6) se tiene que para $n \geq 3$

$$\tilde{\lambda}(Q_n) \geq \frac{2^n}{6}n^2 - \frac{2^{n+1}}{3}n + 2$$

Denotamos $\underline{\lambda}(Q_n) = \frac{2^n}{6}n^2 - \frac{2^{n+1}}{3}n + 2$.

Para hallar una cota superior, consideremos el grafo G definido en la Sección 5.2.5. Se tiene que $\tilde{\gamma}(G) \leq 2^n \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil$ para $n \neq 7$. Aplicando un razonamien-

to similar al usado en la Sección 5.2.5 y el Lema 5.16 obtenemos que $\tilde{\lambda}(Q_n) \leq 2^n \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil + 2(2^{n-1}n - 2^n + 1) = 2^n \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil + 2^n n - 2^{n+1} + 2$.

Denotamos $\bar{\lambda}(Q_n) = 2^n \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{6} \right\rceil + 2^n n - 2^{n+1} + 2$ para $n \neq 7$.

A partir de las cotas obtenidas, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 5.22. *Se verifica la siguiente igualdad:*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\bar{\lambda}(Q_n)}{2^n n^2} = \frac{1}{6}$$

Una cota superior para $\tilde{\lambda}(Q_7)$ la obtenemos a partir de la desigualdad 5.9:

$$\tilde{\lambda}(Q_7) \leq 2\lambda(Q_7) + 1 \leq 7 \cdot 2^7 + 1$$

Por tanto $\bar{\lambda}(Q_7) = 7 \cdot 2^7 + 1$.

En las tablas siguientes se muestran las cotas superiores e inferiores obtenidas para el género no orientable de $L(K_n)$, $L(K_{m,n})$ y $L(Q_n)$ para $m = 2, 3, 4, 5$ y $n = 4, \dots, 20$.

n	$\tilde{\lambda}(K_n)$	$\bar{\lambda}(K_n)$	$\tilde{\lambda}(K_{2,n})$	$\bar{\lambda}(K_{2,n})$	$\tilde{\lambda}(K_{3,n})$	$\bar{\lambda}(K_{3,n})$
4	0	6	1	2	0	12
5	2	12	2	2	2	19
6	7	26	4	5	5	23
7	16	37	7	8	9	31
8	30	59	10	10	14	40
9	50	92	14	14	20	47
10	77	122	19	20	27	57
11	112	167	24	24	35	70
12	156	230	30	30	44	80
13	210	288	37	38	54	93
14	275	366	44	44	65	109
15	352	467	52	52	77	122
16	442	562	61	62	90	138
17	546	682	70	70	104	157
18	665	830	80	80	119	173
19	800	971	91	92	135	192
20	952	1142	102	102	152	214

n	$\tilde{\lambda}(K_{4,n})$	$\bar{\lambda}(K_{4,n})$	$\tilde{\lambda}(K_{5,n})$	$\bar{\lambda}(K_{5,n})$	$\tilde{\lambda}(Q_n)$	$\bar{\lambda}(Q_n)$
4	2	18	6	28	2	34
5	6	28	11	42	29	130
6	10	34	17	51	130	322
7	16	45	26	70	450	897
8	24	58	36	84	1368	2562
9	32	68	47	98	3842	6146
10	42	82	61	117	10242	15362
11	54	100	76	141	26285	38914
12	66	114	92	160	65538	90114
13	80	132	111	184	159746	212994
14	96	154	131	213	382296	507906
15	112	172	152	237	901122	1146882
16	130	194	176	266	2097154	2621442
17	150	220	201	300	4827821	6029314
18	170	242	227	329	11010050	13369346
19	192	268	256	363	24903682	29884418
20	216	298	286	402	55924056	67108866

5.4 Problemas abiertos

Son pocos los géneros, tanto orientable como no orientable, de grafos que se conocen, por lo que a este respecto existe una gran cantidad de problemas abiertos.

En lo que respecta a los resultados que presentamos en este capítulo, queda por demostrar la conjetura (5.13) que proponíamos anteriormente, así como calcular de forma exacta los géneros, orientables y no orientables, de las familias de grafos $G_{m,n}$, K_n , $K_{m,n}$ y Q_n .

Bibliografía

- [1] J. Akiyama. Forbidden Subgraphs for Planar total graphs, Middle Graphs and Iterated Line Graphs. *Jr. of Comb., Inf. & Syst. Sci.*, 3(4):255–260, 1978.
- [2] J. Akiyama, T. Hamada, and I. Yoshimura. Miscellaneous properties of middle graphs. *TRU Math.*, 10:41–53, 1974.
- [3] D. Archdeacon. A Kuratowski Theorem for the Projective Plane. *Journal of Graph Theory*, 5:243–246, 1981.
- [4] D. Archdeacon. *A Kuratowski Theorem for the Projective Plane*. Ph. D. Dissertation. The Ohio State University, 1980.
- [5] D. Archdeacon, N. Hartsfield, C. H. C. Little, and B. Mohar. Obstruction Sets for Outer-Projective-Planar Graphs. *Ars Combinatoria*, 49:113–127, 1998.
- [6] D. Archdeacon and P. Huneke. A Kuratowski Theorem for non-orientable surfaces. *J. Combin. Theory Ser. B*, 27:332–370, 1979.
- [7] R. Ayala, E. Domínguez, A. Márquez, and A. Quintero. On the Graphs which are the Edge of a Plane Tiling. *Mathematica Scandinavica*, 77:5–16, 1995.
- [8] J. Battle, F. Harary, Y. Kodama, and J. W. T. Youngs. Additivity of the genus of a graph. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68:565–568, 1962.
- [9] M. Behzad. A criterion for the planarity of the total graph of a graph. *Proc. Camn. Phil. Soc.*, 63:679–681, 1967.
- [10] L. W. Beineke. Derived graphs and digraphs. In H. Sachs, H. Voss, and H. Walther, editors, *Beiträge zur Graphentheorie*, pages 42–53, Teubner, Leipzig, 1968.



- [11] L. Boza, J. Cáceres, A. Diáñez, and A. Márquez. On infinite generalized outerplanar graphs. Preprint MA1-11-96XI.
- [12] L. Boza, M. T. Dávila, A. Márquez, and R. Moyano. Miscellaneous properties of embeddings of line, total and middle graphs. Por aparecer en *Discrete Mathematics*.
- [13] L. Boza, A. Diáñez, and A. Márquez. On infinite outerplanar graphs. *Mathematica Bohemica*, 119(4):381–384, 1994.
- [14] L. Boza and A. Márquez. Characterization of Line Graphs with Locally Finite Planar Embedding. Enero de 1993. *Preprint n^o 4*. Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla. Sección Álgebra, Computación, Geometría y Topología.
- [15] J. Cáceres. *Diversos tipos de planaridad de grafos*. Tesis doctoral, Universidad de Almería, 1996.
- [16] G. Chartrand, D. Geller, and S. Hedetniemi. Graphs with forbidden subgraphs. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, 10:12–41, 1971.
- [17] G. Chartrand and F. Harary. Planar permutation graphs. *Ann. Inst. H. Poincaré*, Sect B 3:433–438, 1967.
- [18] A. Diáñez. *El centro de una familia creciente de grafos finitos*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 1994.
- [19] G. A. Dirac. Extensions of Menger's Theorem. *Journal London Math. Soc.*, 38:148–161, 1963.
- [20] G. A. Dirac and S. Schuster. A Theorem of Kuratowski. *Indag Math.*, 16:343–348, 1954.
- [21] G.Ñ. Frederickson and R. Janardan. Space-efficient and fault-tolerant routing in outerplanar graphs. *IEEE: Trans. on Comp.*, 37(12):1529–1540, 1988.
- [22] M. E. Gegúndez. *Inmersiones periplanas de grafos sin acumulación con aristas y vértices distinguidos en superficies*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 1998.
- [23] H. H. Glover and J. P. Huneke. The set of irreducible graphs for the projective plane is finite. *Discrete Math.*, 22:243–256, 1978.

- [24] H. H. Glover, J. P. Huneke, and C. S. Wang. 103 graphs that are irreducible for the projective plane. *Journal of Combinatorial Theory*, 27(3):332–370, 1979.
- [25] D. L. Greenwell and R. L. Hemminger. Forbidden Subgraphs for Graphs with Planar Line Graphs. *Discrete Mathematics*, 2(1):31–34, 1972.
- [26] R. Halin. Zur häufungspunktfreien Darstellung adzählbarer Graphen in der Ebene. *Arch. Math.*, 17:239–242, 1966.
- [27] F. Harary. *Graph Theory*. Addison Wesley. Reading Mass., 1969.
- [28] A. J. Hoffman. On the uniqueness of the triangular association scheme. *Ann. Math. Statist.*, 35:883–885, 1964.
- [29] J. Hopcroft and R. Tarjan. Efficient planarity testing. *Jour. of the ACM*, 21(4):549–568, 1976.
- [30] P. Hutchinson and S. Wagon. A forbidden subgraph characterization of infinite graphs of finite genus. In *Graphs and applications (Boulder, Colo. 1982)*, pages 183–194, Willey, New York, 1985.
- [31] P. W. Kasteleyn. Graph theory and crystal physics. In F. Harary, editor, *Graph theory and Theoretical Physics*, pages 44–110, Academic Press, London, 1967.
- [32] L. Christine Kinsey. Topology of Surfaces. In *Undergraduate Texts in Mathematics*, pages 55–89, Springer Verlag, Philadelphia, 1993.
- [33] J. R. Kulli and E. Sampathkumar. On the interchange graph of a finite planar graph. *J. Indian Math. Soc.*, 37:145–150, 1973.
- [34] K. Kuratowski. Sur le problème des courbes gauches en topologie. *Fund. Math.*, 15:271–283, 1930.
- [35] K. Menger. *Kurventheorie (unter Mitarbeit von G. Nöbeling)*. Leipzig und Berlin, 1932.
- [36] V. Menon. On repeated interchange graphs. *Amer. Math. Monthly*, 13:986–989, 1966.
- [37] O. Ore. *Theory of Graphs*. Volume 38 of *Colloquium Publications*, AMS, 1962.
- [38] M. P. Revuelta. *Inmersiones de grafos en superficies tubulares de género finito*. Tesis doctoral, Universidad de Sevilla, 1998.



- [39] N. Robertson and P. D. Seymour. Generalizing Kuratowski Theorem. *Congressus Numerantium*, 45:129–138, 1984.
- [40] N. Robertson and P. D. Seymour. Graph Minors. VIII. A Kuratowski Theorem for General Surfaces. *J. Combinatorial Theory. Serie B.*, 48:255–288, 1990.
- [41] D. F. Robinson and I. Janjic. The constructability of floorplans with given outerplanar adjacency and room areas. *Ars Combinatoria*, 20(B):133–142, 1985.
- [42] G. Sabidussi. Graphs derivatives. *Math. Z.*, 76:385–401, 1961.
- [43] J. Sedláček. On a generalization of outerplanar graphs. *Časopis Pěst. Mat.*, 113:213–218, 1988.
- [44] J. Sedláček. On generalized outerplanarity of line graphs. *Časopis Pěst. Mat.*, 115(3):273–277, 1990.
- [45] J. Sedláček. Some Properties of Interchange Graphs. In M. Fielder, editor, *Theory of graphs and its applications*, Freeman, 1962.
- [46] S. Seshu and M. Reed. *Linear Graphs and Electrical Networks*. Addison-Wesley, Reading, 1961.
- [47] S. Stahl and L. W. Beineke. Blocks and the Nonorientable Genus of Graphs. *Journal of Graph Theory*, 1:75–78, 1977.
- [48] C. Thomassen. Infinite Graphs. In *Selected Topics in Graph Theory*, pages 129–160, Academic Press, 1983.
- [49] C. Thomassen. The genus problem for cubic graphs. *Journal of Combinatorial Theory Ser. B*, 69:52–58, 1997.
- [50] M. C. van Lier and R. H. J. M. Otten. *C. A. D. of mask and wiring*. T. H. Rept. 74-E-44, Dept. Elect. Engrg., Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 1974.
- [51] M.C. van Lier and R.H.J.M. Otten. C.A.D. of masks and wiring. T.H. Rept. 74-e-44, Dept. Elect. Engrg., Eindhoven University of Technology, The Netherlands, 1974.
- [52] H. Vollmerhaus. Über die Einbettung von Graphen in zweidimensionale orientierbare Mannigfaltigkeiten kleinsten Geschlechts. In H. Sachs, H. Voss, and H. Walther, editors, *Beitrage zur Graphentheorie*, pages 163–168, Teubner, Leipzig, 1968.

- [53] K. Wagner. Fastplättbare Graphen. *Journal Combinatorial Theory*, 3:326–365, 1967.
- [54] A. T. White and L. W. Beineke. Topological graph theory. In L. W. Beineke and R. J. Wilson, editors, *Selected Topics in Graph Theory*, pages 15–49, Academic Press, 1978.
- [55] H. Whitney. Congruent graphs and the connectivity of graphs. *Amer. J. Math.*, 55:339–362, 1932.
- [56] P. Winter. Generalized Steiner problem in outerplanar networks. *BIT*, 25(3):485–496, 1985.

Índice de Materias

- \ll , 66, 88, 92, 136
- \ll_F , 93
- \ll_x , 93, 107, 109
- \angle , 31
- \angle_x , 31
- arista, 7
 - extremos, 7
 - incidentes, 7
 - punto, 9
 - subdivisión, 9
- camino, 8
 - 1-camino, 9
- ciclo, 8
- cono de un grafo, 166
- elementos, 9
 - distancia, 9
- esfera, 63
- Fórmula de Euler, 11, 191
 - caso no orientable, 192
- grafo, 7
 - C_n , 10
 - $G_{m,n}$, 193
 - K_n , 203, 210
 - $K_{m,n}$, 10, 198, 204, 208, 211
 - P_n , 10
 - Q_n , 10, 205, 213
 - S -representable, 166
 - n -conexo, 9
 - $n - S$ -cubierto, 138
 - x -subdivisión, 9
- árbol, 10
- caras de un grafo, 11
- complementario, 10
- completo, 10
- conexo, 8
- contorno, 10
- de línea, 17
 - EAP-plano, 23, 41
 - género, 167, 182, 193–208
 - género no orientable, 208–215
 - iterado, 19
 - iterado no numerable plano, 52–55
 - iterado periplano, 21
 - iterado periproyectivo, 146, 151, 154
 - iterado plano, 19, 92, 109, 115
 - iterado proyectivo, 92, 94, 107, 109, 114, 116, 117
 - iterado, género, 183
 - no numerable plano, 50
 - no numerable proyectivo, 185
 - peri- S -representable, 174
 - periplano, 20, 136
 - periplano generalizado, 22
 - periproyectivo, 138, 145
 - plano, 19, 64
 - proyectivo, 66, 71, 90
 - VAP-plano, 23, 41

- EAP-plano, 14, 40
 - género, 167, 174, 181, 191
 - género no orientable, 170, 180, 192
 - homeomorfos, 9
 - infinito, 12
 - no numerable, 12, 50, 181
 - medio, 27
 - EAP-plano, 44
 - género, 183
 - iterado, 27
 - iterado no numerable plano, 56 - 57
 - iterado periproyectivo, 160
 - iterado plano, 27, 133
 - iterado proyectivo, 133-135
 - iterado VAP-plano, 44
 - iterado,género, 184
 - no numerable plano, 55
 - no numerable proyectivo, 186
 - peri- S -representable generalizado, 174
 - periplano, 27
 - periplano generalizado, 28
 - periproyectivo, 157
 - plano, 27, 125
 - proyectivo, 127
 - recubridor del plano, 43
 - VAP-plano, 43
 - p-periplano, 16
 - p-periplano generalizado, 17
 - peri- S -representable, 166
 - peri- S -representable generalizado, 166
 - periplano, 15, 136
 - periplano generalizado, 15
 - periproyectivo, 136
 - peritórico, 176
 - peritórico generalizado, 176
 - plano, 10
 - proyectivo, 64
 - recubridor del plano, 41
 - subdivisión, 9
 - tórico, 178
 - total, 24
 - S -representable, 174
 - EAP-plano, 50
 - género, 184
 - iterado, 24
 - iterado no numerable plano, 58
 - iterado periproyectivo, 157
 - iterado plano, 26, 124
 - iterado proyectivo, 124
 - iterado VAP-plano, 50
 - iterado,género, 185
 - no numerable plano, 57
 - no numerable proyectivo, 188
 - periplano, 26
 - periplano generalizado, 26
 - periproyectivo, 155
 - plano, 24, 119
 - proyectivo, 121
 - recubridor del plano, 49
 - VAP-plano, 45
 - valencia, 7
 - VAP-plano, 13, 40
- inmersión, 9, 191
- menor, 8
 - x -menor topológico, 9
 - prohibidos, 107, 114
 - x -menor topológico cortable, 93
 - prohibidos, 94, 110
 - prohibidos en $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, 64
 - topológico, 9
 - prohibidos, 88, 116, 121, 125, 144, 155, 157
 - topológico cortable, 66, 67
 - prohibidos, 71, 85



- MTC, *véase* menor topológico cortable
- NP-completo, 172–173
- operadores L, M y T , 31
 - planaridad, 34
- partición E_n , 32
 - algoritmo de planaridad, 36
 - test, 36
- Plano, 31
- Plano proyectivo, 63, 175
- pseudosuperficie, 172
 - punto singular, 172
- recorrido, 7
- subgrafo, 8
 - inducido, 8
 - prohibidos, 117
- superficie, 12, 165
 - compacta, 63, 178
 - de género no orientable, 12, 208
 - de género orientable, 12, 191, 208
 - suma conexa, 178
- Teorema de Kuratowski, 12, 63
 - en $\mathbb{IP}_2(\mathbb{IR})$, 64
 - en otras superficies, 64
- Teorema de Menger, 9, 94
- Toro, 176
 - estrangulado, 188
- vértice, 7
 - adyacentes, 7
 - punto de corte, 9
 - valencia, 7

UNIVERSIDAD DE SEVILLA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Departamento de Matemáticas

Profesor: D. RAFAEL HOYAÑO FRANCO

Alumno: D. RAFAEL HOYAÑO FRANCO

TEMAS DE GRÁFICOS DE LÍNEAS,
MEDIDAS Y TOTALIZACIONES EN SUPERFICIES

Asignatura: MATEMÁTICAS II SOBRESALIENTE

CUM LAUDE

SEVILLA, 25

ENERO

2001

Mi Vocal,



Mi Vocal,



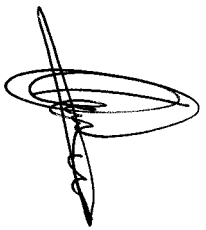
Mi Vocal,



Mi Presidente,



Mi Secretario,



Mi Doctoranda,

