

R 11194

LBS 652445

043  
7

GRUPOS DE HOMOTOPIA PROPIA UNIFORMEMENTE CONTINUA

por

Alberto Márquez Pérez

Tesis revisada y conforme

Trabajo realizado bajo la  
direccion del profesor  
Eladio Domínguez Murillo  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Matemáticas  
por la Universidad de Sevilla.

El Director



El Padrino



Antonio Quintero Toscano



UNIVERSIDAD DE SEVILLA  
SECRETARIA GENERAL

Queda registrada esta Tesis Doctoral  
al folio 133 número 13 del libro  
correspondiente.

Sevilla, - 3 MAR 1987

El Jefe del Negociado de Tesis,



## CAPITULO I

### FUNCIONES UP

En este capítulo, vamos a desarrollar el concepto de aplicaciones up (uniformemente continuas y propias) entre espacios métricos, y demostraremos, o enunciaremos, algunas propiedades y resultados que sean de utilidad más adelante.

#### I.1 APLICACIONES PROPIAS

En este apartado, y mientras no se indique lo contrario,  $X$  e  $Y$  representarán espacios topológicos arbitrarios y  $f: X \rightarrow Y$  una función continua.

Diremos que  $f$  es propia, si la imagen recíproca mediante  $f$  de un compacto de  $Y$  es un compacto de  $X$ . Una noción íntimamente relacionada con la anterior y que, a veces, es conveniente utilizar es la de aplicación perfecta; concretamente: se dice que  $f$  es perfecta

si es cerrada y todas sus fibras son compactas.

A continuación daremos una serie de propiedades cuyas demostraciones son inmediatas, o bien conocidas ( ver [22] ):

a) La composición de aplicaciones propias es aplicación propia. Puesto que la identidad es, evidentemente, propia, resulta que la familia de los espacios topológicos con las aplicaciones propias constituyen una categoría que representaremos por  $\text{Topp}$ .

b) Toda aplicación perfecta es propia.

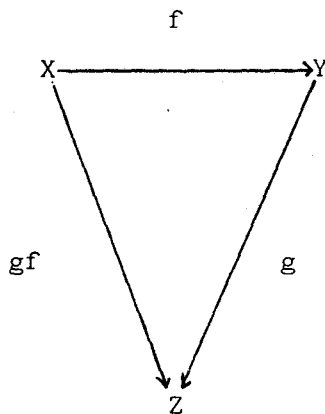
c) La composición de aplicaciones perfectas es perfecta. Y, al igual que ocurría con las aplicaciones propias, la familia de espacios topológicos con las aplicaciones perfectas constituyen una categoría.

d) Dada  $f: X \rightarrow Y$ , si  $Y$  es  $k$ -espacio Hausdorff, entonces  $f$  es propia si y sólo si es perfecta.

e) Dada  $f: X \rightarrow Y$ , si  $Y$  es de Hausdorff y  $X$  compacto, entonces  $f$  es propia y perfecta.

f) Si  $f: X \rightarrow Y$  es propia y  $A$  es un subconjunto cerrado de  $X$ , entonces  $f|_A: A \rightarrow Y$  es propia. ( Obsérvese que, en general, la restricción de una aplicación propia no tiene porqué ser propia, como prueba el siguiente ejemplo: Sea la aplicación constante de  $[0,1]$  en un punto, por ser  $[0,1]$  compacto, esta aplicación, en virtud de la propiedad anterior, es propia, sin embargo esto no ocurre así con la restricción a  $(0,1)$  ).

g) Dado el siguiente triángulo:



se verifica:

- 1) Si  $f$  es epimorfismo y  $gf$  es propia, entonces  $g$  es propia.
- 2) Si  $g$  es inyectiva y  $gf$  es propia, entonces  $f$  es propia.
- 3) Si  $gf$  es propia e  $Y$  de Hausdorff, entonces  $f$  es propia.
- h) Sea  $f: X \rightarrow Y$  continua, entonces se tiene:

1) Si  $\{M_i / i \in I, M_i \text{ cerrado}\}$  es una familia cuyos interiores recubren a  $Y$  y cada una de las restricciones de  $f$  a la imagen inversa de  $M_i$  es propia, entonces  $f$  es propia.

2) Si  $\{M_i / i \in I, M_i \text{ cerrado}\}$  es una familia localmente finita que recubre a  $Y$  y cumpliendo la misma propiedad que en 1) entonces, en este caso,  $f$  también es propia.

i) Sea  $\{X_i / i \in I\}$  una familia de espacios topológicos tal que su producto es de Hausdorff, consideremos  $f_i: X \rightarrow X_i$  aplicaciones continuas, si una de ellas es propia, entonces se tiene que

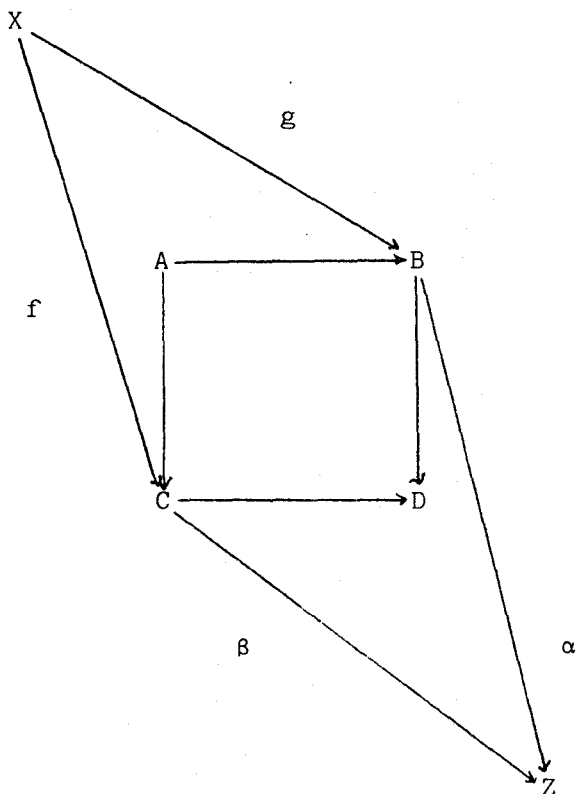
$$\bigwedge_{i \in I} f_i: X \longrightarrow \prod_{i \in I} X_i$$

también lo es.

Obsérvese que en la categoría  $\text{Topp}$  no existen, en general, productos, ni objeto final, sin embargo sí se tiene:

j) La categoría  $\text{Topp}$  tiene coproductos finitos y objeto inicial.

k) Dado el siguiente diagrama:



si el cuadrado es cocartesiano de aplicaciones continuas y  $\alpha$  y  $\beta$  son propias, entonces  $\alpha\beta$  es propia.

## I.2 UP APLICACIONES

En este apartado, y mientras no se exprese lo contrario, X e Y representarán espacios métricos arbitrarios.

1 Definición.— Diremos que f es una up-aplicación si es una función uniformemente continua y propia.

Diremos que f es up-homeomorfismo si es un homeomorfismo tal que tanto f como su inversa son aplicaciones up.

2 Proposición.- Se verifica:

a) La composición de up-aplicaciones es up-aplicación. Por tanto, la familia de los espacios métricos con las up-aplicaciones constituye una categoría que representaremos por Mup.

b) Si  $f: X \rightarrow Y$  es up  $F$  es un cerrado de  $X$  entonces la restricción de  $f$  a  $F$  también es up.

c) Si  $f: X \rightarrow Y$  es up y  $A$  es un subconjunto arbitrario de  $Y$ , entonces  $f: X - f^{-1}(A) \rightarrow Y - A$  es up.

d) Si  $X$  es métrico compacto, cualquier aplicación continua  $f: X \rightarrow Y$  es up-aplicación.

e)  $f: X \rightarrow Y$  es up si y sólo si se puede extender a  $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  continua, de forma que  $\tilde{f}(\tilde{X} - X) \subseteq \tilde{Y} - Y$ , siendo  $\tilde{X}$  e  $\tilde{Y}$  las completaciones de  $X$  e  $Y$  respectivamente.

f) Toda aplicación up es cerrada.

g) Si  $A$  es un subconjunto cerrado de  $X$  y  $f: A \rightarrow Y$  es up, entonces  $\tilde{f}: X \rightarrow X \cup_f Y$  es up.

h) Sea  $\{X_i / i \in I\}$  una familia de espacios métricos y  $f_i: X \rightarrow X_i$  uniformemente continuas siendo una de ellas up, entonces

$$\bigwedge_{i \in I} f_i: X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$$

es up-aplicación.

i) Si  $f: X \rightarrow Y$  es up y  $X$  es un espacio métrico acotado, se tiene que  $f(X)$  también lo es.

Demostración.-

Probemos f). En primer lugar, veremos que  $f(X)$  es cerrado en  $Y$ , y de ello junto con b) se obtiene el resultado pedido:

Sea  $\overline{f(X)}$  la clausura de  $f(X)$  en  $Y$ , dicha clausura coincidirá con la intersección de la completación  $\widetilde{f(X)}$  de  $f(X)$  (Subconjunto de la completación de  $Y$ ) con  $Y$ . Supongamos que exista un punto  $x^*$  en  $(\widetilde{f(X)} - f(X)) \cap Y$ ; dado  $x^*$  existirá una sucesión  $\{x_n\}$  en  $X$  de tal forma que la sucesión de sus imágenes mediante  $f$  converge a  $x^*$ . La sucesión  $\{x_n\}$  no tiene en  $X$  ningún punto adherente, ya que, en caso contrario la sucesión de sus imágenes convergería a algún punto de  $Y$ , y tendría un punto adherente, pero  $\{x_n\}$  está incluido en  $f^{-1}(\{f(x_n)\} \cup \{x^*\})$  que es un compacto en  $X$ , con lo cual llegamos a una contradicción.

Del apartado anterior se deduce fácilmente g).

### 3 Ejemplos.-

1) Observemos que la propiedad 1.3 g) no se cumple en el caso up:

Para la parte 1) sea  $X=Z=R$ , e  $Y$  el intervalo abierto  $(0,1)$ ,  $f$  de  $X$  en  $Y$  será el homeomorfismo que existe entre  $R$  y  $(0,1)$  que es up, y  $g$  el inverso de dicho homeomorfismo que no es up.

Para 2) y 3) sea  $X=Z=(0,1)$  e  $Y$  igual a  $R$  y se intercambian los papeles de la  $f$  y de la  $g$  anteriores.

2) Tampoco se tiene h). Para ello, basta con dar una aplicación constante de un espacio no compacto que se pueda recubrir por compactos cerrados (en el segundo caso, además hemos de asegurar que el recubrimiento sea localmente finito). Cada una de las  $f_i$  son up-aplicaciones, de lo cual se deduce que h) no se verifica.

4 Proposición.- Sea  $(J,f)$  una red sobre  $X$  de tal forma que  $f:J \rightarrow X$  sea uniformemente continua. Entonces si dicha red tiene un punto adherente, converge a dicho punto.

### Demostración.-

Es inmediata a partir de la definición de adherencia y de la convergencia uniforme.

5 Teorema.- Sea  $f:J \rightarrow X$  una aplicación uniformemente continua. Dicha aplicación es propia si y sólo si la red  $(J,f)$  no tiene puntos adherentes en  $X$ .

### Demostración.-

Por la proposición anterior si  $f:J \rightarrow X$  es propia, bastará con probar que  $(J,f)$  no converge. Si convergiera, supongamos, en primer lugar que el punto límite  $x$  no esté en  $f(J)$ , en cuyo caso  $f(J) \cup \{x\}$  será un compacto cuya antiimagen mediante  $f$  coincide con  $J$  que no lo es, en contra de la hipótesis de que  $f$  es propia.

Si el punto límite  $x$  está en  $f(J)$ , pueden ocurrir dos casos: el primero que exista  $t_0$  en  $J$  tal que si  $t$  es mayor o igual que  $t_0$  se

tenga que  $f(t)$  es distinto de  $x$ ; en este supuesto nos restringimos a  $[t_0, 1)$  en el que  $f$  también es up según b) de la proposición 2, con lo que estaremos en el caso anterior. Si no ocurre así, la antiimagen de  $x$  mediante  $f$  no será compacto en contra de la hipótesis, de nuevo, de  $f$  propia.

6 Corolario.- Si  $f: J \rightarrow X \times Y$  es up-aplicación, entonces una de las dos aplicaciones  $p_1 f: J \rightarrow X$ ,  $p_2 f: J \rightarrow Y$  es up.

Demostración.-

Se deduce fácilmente del teorema anterior y de la proposición 4.

Por último, para terminar este apartado, damos una caracterización de los up-homeomorfismos:

7 Teorema.- Una up-aplicación  $f: X \rightarrow Y$  es up-homeomorfismo si y sólo si su extensión a las completaciones  $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$  es homeomorfismo.

Demostración.-

Sabemos, por el apartado e) de la proposición 2, que si  $f: X \rightarrow Y$  es up-aplicación, entonces se puede extender a  $\tilde{f}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{Y}$ . Veamos que se  $\tilde{f}$  es up-homeomorfismo:

En primer lugar, comprobemos la inyectividad de  $\tilde{f}$ :

Sean  $x$  e  $y$  dos puntos de la completación de  $X$  que no estén en  $X$ . Sabemos que existen sucesiones  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  de  $X$  que convergen a  $x$  e  $y$  respectivamente. Por la construcción de  $\tilde{f}$  se tiene que las sucesiones  $\{f(x_n)\}$  y  $\{f(y_n)\}$  en  $Y$  convergen a  $\tilde{f}(x)$  y  $\tilde{f}(y)$  respectivamente, ahora bien, por la biyectividad de  $f$  cada  $x_n$  coincide con  $f^{-1}f(x_n)$  que por la construcción de  $\tilde{f}^{-1}$  convergerá a  $\tilde{f}^{-1}\tilde{f}(x)$  y por idéntica razón lo mismo ocurrirá con las  $y$ . Por lo tanto,  $\tilde{f}(x)$  y  $\tilde{f}(y)$  no pueden coincidir si  $x$  e  $y$  son distintos.

La sobreyectividad de  $\tilde{f}$  es trivial, así que veamos la



continuidad de  $\tilde{f}^{-1}$ :

En primer lugar, y debido a la biyectividad de  $\tilde{f}$ ,  $\tilde{f}^{-1}$  está bien definida y es biyectiva. Para ver su continuidad, dado  $x^{\sim}$  de  $\tilde{X}-X$  sabemos que existe una sucesión de puntos de  $X$   $\{x_n\}$  que convergen a  $x^{\sim}$ . Así la sucesión formada por las imágenes mediante  $f$  de las  $x_n$   $f(x_n)=y_n$  convergerá a  $x$  siendo  $x=\tilde{f}(x^{\sim})$ , luego se tiene que  $\{f^{-1}(y_n)\}$  converge a  $x^{\sim}$ , por lo tanto  $\tilde{f}^{-1}=\tilde{f}^{-1}$ , de lo que se tiene la continuidad de  $\tilde{f}^{-1}$ .

En el otro sentido, si  $\tilde{f}:\tilde{X}\rightarrow\tilde{Y}$  es homeomorfismo, la restricción a  $X$  es up-aplicación y la biyectividad se obtiene del hecho  $\tilde{f}(\tilde{X}-X)\subseteq\tilde{Y}-Y$  (ya que  $f$  es up-aplicación). Con lo cual se tiene el teorema.

### I.3 HOMOTOPIA UP

1 Definición.- Diremos que dos aplicaciones up  $f,g:X\rightarrow Y$  son up-homotópicas si son homotópicas a través de una up-aplicación.

Diremos que dos espacios son up-homotópicos si existe una equivalencia de up-homotopía entre ellos; es decir, si existen up-aplicaciones  $f:X\rightarrow Y$ ,

$g:Y\rightarrow X$  tales que  $gf$  y  $fg$  son up-homotópicas a las identidades respectivas.

En virtud de la propiedad 2.2 g), es evidente que las anteriores relaciones son de equivalencia. Por lo tanto, podemos considerar los conjuntos de up-homotopía entre dos espacios métricos  $X$  e  $Y$  que representaremos por  $[X,Y]_{up}$ .

#### 2 Ejemplos.-

1) Veamos que  $[X,Y]_{up}$  no tiene porqué coincidir con el

conjunto de homotopía  $[X, Y]$ , ni con el conjunto de homotopía propia o  $p$ -homotopía  $[X, Y]_p$ :

En efecto: sea  $X$  el complemento de un punto en la circunferencia métrica de radio unidad y centro el origen, e  $Y$  el intervalo unidad abierto. Es bien conocido que  $[X, Y]$  es trivial. Por otra parte, según el teorema de inmersión de [17], es fácil observar que  $[X, Y]_p$  consta de cuatro elementos.

Sin embargo, a la hora de considerar  $[X, Y]_{up}$ , tenemos que tener en cuenta que existen aplicaciones de  $S^1 - \{x\}$  en  $(0, 1)$  propias que no son  $up$  (como, por ejemplo, el homeomorfismo que lleva un espacio en el otro). Así de los cuatro elementos de  $[X, Y]_p$  hay dos que no tienen ningún representante  $up$ , por lo tanto  $[X, Y]_{up}$  tiene dos elementos, que están representados por las composiciones de las aplicaciones que lleva  $X$  en  $J$  y este en  $(0, 1/2]$  y  $[1/2, 1)$  respectivamente.

2) También pudiera ocurrir que dos  $up$ -aplicaciones fuesen  $p$ -homotópicas pero no  $up$ -homotópicas:

Sea el espacio  $X$  igual a  $J$  e

$$Y = \{(x, y) / 0 \leq x < 1, -1/x < y < 1/x\}$$

Sea  $f$  la  $up$ -aplicación definida por

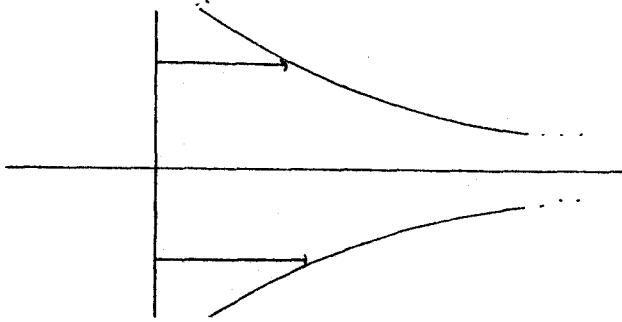
$$f: J \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto (x, 1)$$

y

$$g: J \longrightarrow Y$$

$$x \longmapsto (x, -1)$$



Veamos que  $f$  y  $g$  son  $p$ -homotópicas:

Sea  $h$  el homeomorfismo que lleva  $J \times I$  en el subconjunto de  $Y$  delimitado por las imágenes de  $f$  y  $g$ , esto es: los puntos de  $Y$  cuya coordenada con respecto al eje  $OY$  es menor o igual a uno en valor absoluto. Evidentemente, dicho homeomorfismo nos da una homotopía que

es propia como aplicación. Sin embargo, obsérvese que cualquier homotopía propia entre  $f$  y  $g$ , ha de tener una imagen no acotada, lo cual impide que  $f$  y  $g$  sean up-homotópicas por la propiedad 2.2 j).

3 Proposición.— Si  $X$  es un espacio métrico, se tiene que  $[X, -]_{up}$  define un funtor covariante entre las categorías  $Mup$  y  $Set$ .

Análogamente,  $[-, X]_{up}$  define un funtor contravariante entre dichas categorías. Así podemos decir que  $[-, -]_{up}$  define un bifunctor entre  $Mup \times Mup$  y  $Set$ .

El estudio del conjunto  $[-, -]_{up}$  es llevado a cabo por Ayala, Domínguez y Quintero en [1], algunos de los resultados allí expuestos y que nos serán de utilidad más adelante son los siguientes:

4 Proposición.— Sean  $X, Y, Z$  espacios métricos tal que  $X$  es compacto; por  $C(Y, Z)$  representamos el espacio de las up-funciones entre  $Y$  y  $Z$  con la topología de la convergencia uniforme, se verifica:

a) El conjunto de las arccomponentes de  $C(X, Y)$  está en correspondencia 1-1 con el conjunto  $[X, Y]_{up}$ .

b)  $[X \times Y, Z]_{up}$  está en correspondencia biyectiva con  $[X, C(Y, Z)]$ .

c) Si  $Y$  es un intervalo abierto  $(a, b)$  de  $R$ , la aplicación  $k$ :  $k: [R^n, Y]_{up} \longrightarrow [R^n, Y]_p$  dada por  $k([f]_{up}) = [f]_p$  es biyectiva.

Para las demostraciones, así como para algunos ejemplos de aplicaciones de lo anterior ver el ya referido [1].

5 Nota.— Obsérvese la importancia de la métrica en todo lo visto hasta el momento, tal como nos prueba el ejemplo 2. Incluso se pueden dar ejemplos sencillos de subespacios métricos acotados del plano homeomorfos pero no up-homotópicos; como pueden ser el intervalo abierto  $(0, 1)$  y el complemento de un punto en una circunferencia.

6 Definición.- De forma natural podemos relacionar en Mup las nociones de up-retracto, up-retracto de deformación y up-deformación, cumpliéndose las mismas relaciones que en el caso clásico.

7 Ejemplos.-

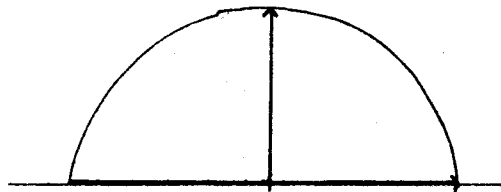
1) Puede ocurrir que tengamos un up-retracto de un espacio, pero que, sin embargo, no todas las retracciones sean up-aplicaciones. Por ejemplo:

Sean X y A los subconjuntos del plano:

$$X = \{(x,y) / x^2 + y^2 < 1 \ y \geq 0\}$$

y A

$$A = \{(x,y) / 0 \leq y < 1 \ x = 0\}.$$



Entonces A es up-retracto de X. Para ello basta con considerar la aplicación  $r: X \rightarrow A$  dada por  $r(\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) = (0, \rho)$ .

Pero, sin embargo, la retracción:

$$\begin{array}{ccc} r: X & \longrightarrow & A \\ (x,y) & \longmapsto & y \end{array}$$

no es propia luego no es up-retracción.

2) Naturalmente no todo retracto es up-retracto, para ello consideremos R y un punto, al no existir aplicaciones propias de R en el punto, este no puede ser retracto de R.

Tampoco se tiene que si existe una retracción propia se tenga up-retracción:

Sea X igual al conjunto de los números reales estrictamente positivos y A el subconjunto de X formado por los puntos que son mayores o iguales que 1, cualquier retracción propia de X en A nos lleva el intervalo (0,1) en un intervalo no acotado, por lo tanto no puede ser up.

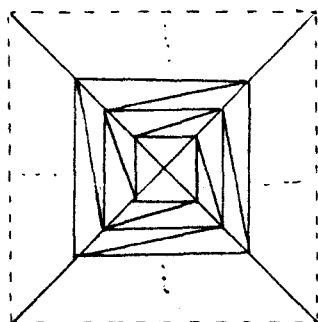
#### I.4 APROXIMACION SIMPLICIAL UP

En este apartado vamos a demostrar que dada cualquier aplicación up entre poliedros euclídeos, existe una aproximación simplicial up de dicha aplicación. Entiéndase por aproximación simplicial de  $f:|K| \rightarrow |L|$  (donde  $|K|$  y  $|L|$  son las realizaciones geométricas de  $K$  y  $L$  poliedros euclídeos) a una  $p_1$ -aplicación  $g:K' \rightarrow L'$  donde  $K'$  y  $L'$  son subdivisiones de  $K$  y  $L$  respectivamente, y verificándose que para todos los vértices  $a$  de  $K'$  se tiene  $f(\text{st}(a)) \subseteq \text{st}(g(a))$ . En el caso de aproximación simplicial up se exigirá que todas las aplicaciones sean up.

Para conseguir nuestro propósito, lo primero que tendríamos que tener es una triangulación de  $|K|$  tal que el diámetro de los símplices tiendan a cero según nos vayamos acercando al infinito (entendiéndose por infinito el complementario de los compactos, aunque esta idea ya la precisaremos en el próximo capítulo).

1 Ejemplo.- Cualquier triangulación no cumple la condición anterior, aunque el espacio tenga una métrica acotada:

Sea  $X$  el interior del cuadrado unidad.



La triangulación que aparece en la figura es tal que el diámetro de los símplices tiende a uno cuando nos acercamos al infinito. Sin embargo, se puede conseguir una subdivisión de dicha triangulación tal que sí verifique que el diámetro de los símplices tienda a cero según nos vayamos acercando al infinito, tal como nos dice el siguiente:

2 Lema. - Sea  $|K|$  un poliedro euclídeo, entonces existe una subdivisión  $K^\wedge$  de  $K$  tal que para cada  $\epsilon > 0$  el conjunto:

$$U\{\sigma \in K^\wedge / \text{diam}(\sigma) > \epsilon\}$$

es compacto.

Demostración. -

Supongamos que  $|K|$  es conexo y no compacto.

Si  $R_1$  es un subcomplejo finito de  $K$ , se define  $R_i$  como el conjunto de símlices que cortan a  $|R_1|$ . Sea  $K_i = \overline{R_i - R_{i-1}}$  el conjunto formado por los símlices de  $R_i - R_{i-1}$  y sus caras. Los  $|K_i|$  son poliedros compactos que recubren a  $|K|$ , y es fácil comprobar que  $|K_i| \cap |K_j| = \emptyset$  si  $|i-j| > 1$ .

Dado  $K_1$ , existe una subdivisión  $\tilde{K}_1$  tal que el diámetro de cada símplex de dicha subdivisión es menor que  $1/2$ . Sea  $\widetilde{K_1 \cap K_2}$  la restricción a  $|K_1 \cap K_2|$  de  $\tilde{K}_1$ .

Dado  $K_2$ , existe una subdivisión  $\tilde{K}_2$  de  $K_2$  que es subdivisión de  $\widetilde{K_1 \cap K_2}$  en  $|K_1 \cap K_2|$  y tal que el diámetro de cada símplex es menor que  $1/4$ . Sea  $\overline{K_1 \cap K_2}$  la restricción a  $|K_1 \cap K_2|$  de  $\tilde{K}_2$ , y  $\bar{K}_1$  una subdivisión de  $\tilde{K}_1$  que es extensión a  $|\tilde{K}_1|$  de  $\overline{K_1 \cap K_2}$ . Tomemos  $K_3$  y sea  $\tilde{K}_3$  una subdivisión común de  $K_3$  y de  $\widetilde{K_2 \cap K_3}$  (la restricción a  $|K_2 \cap K_3|$  de  $\tilde{K}_2$ ) en  $|K_2 \cap K_3|$ , tal que cada símplex de  $\tilde{K}_3$  tenga diámetro menor que  $1/8$ . Sea  $K_2 \cap K_3$  la restricción a  $|K_2 \cap K_3|$  de  $\tilde{K}_3$  y  $\bar{K}_2$  una subdivisión de  $\tilde{K}_2$  que es extensión de  $\overline{K_1 \cap K_2} \cup \overline{K_2 \cap K_3}$  (obsérvese que  $\overline{K_1 \cap K_2}$  y  $\overline{K_2 \cap K_3}$  son disjuntos, por lo que  $\bar{K}_1$  y  $\bar{K}_2$  coinciden con  $\overline{K_1 \cap K_2}$  en  $|K_1 \cap K_2|$ ).

Es claro que, procediendo por inducción, se obtienen subdivisiones  $K_i \Delta K_i$  tales que  $K^\wedge = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{K}_i$  es una subdivisión de  $K$  que cumple el enunciado del lema.

3 Lema. - Sea  $|K|$  un poliedro euclídeo tal que cumple la tesis del lema anterior, sea  $|L|$  otro poliedro euclídeo y  $f: |K| \rightarrow |L|$  una aplicación up y  $f^\wedge: |K| \rightarrow |L|$  una aproximación simplicial propia, se tiene que  $f$  es up.

Demostración. -

Sea  $\epsilon > 0$ , por el lema anterior el conjunto

$$|K^\wedge| = \bigcup \{ \sigma \in K / \text{diam} \sigma > \epsilon/6 \}$$

es compacto, sea  $K^{\wedge\wedge}$  el conjunto de los s\u00edmplices de  $K$  que cortan a  $K^\wedge$  y sus caras.  $|K^{\wedge\wedge}|$  tambi\u00e9n ser\u00e1 un compacto y adem\u00e1s se tiene que  $d(|K^\wedge|, |K| - |K^{\wedge\wedge}|) > 0$ .

Sean  $x$  e  $y$  puntos de  $|K^{\wedge\wedge}|$ , por ser dicho conjunto compacto, se tendr\u00e1 que  $f^\wedge$  restringida a dicho conjunto es uniformemente continua, luego existir\u00e1 un  $\delta^>0$  tal que si  $d(x,y) < \delta^>$  se verifique que  $d(f^\wedge(x), f^\wedge(y)) < \epsilon$ .

Si  $x$  e  $y$  no est\u00e1n en  $|K^\wedge|$ , como se tiene que  $\text{diam}(\text{st}(v)) < \epsilon/3$  y que  $d(f(x), f(y)) < \epsilon/3$  junto con el hecho de ser  $f$  uniformemente continua, existir\u00e1  $\delta^<$  tal que si  $d(x,y) < \delta^<$ , entonces  $d(f(x), f(y)) < \epsilon/3$ , as\u00ed si escogemos

$$\delta = \min \{ \delta^>, \delta^<, d(|K^\wedge|, |K| - |K^{\wedge\wedge}|) \}$$

se tendr\u00e1 que si  $d(x,y) < \delta$  entonces  $d(f^\wedge(x), f^\wedge(y)) < \epsilon$ .

4 Teorema. - Sean  $|K|, |L|$  poliedros eucl\u00eddeos, si  $f: |K| \rightarrow |L|$  es una aplicaci\u00f3n up, entonces existe  $K^\wedge$  subdivisi\u00f3n de  $K$  y  $f^\wedge: |K^\wedge| \rightarrow |L|$  up-aplicaci\u00f3n que es aproximaci\u00f3n simplicial de  $f$ .

Demostraci\u00f3n. -

Es consecuencia inmediata de la existencia de aproximaciones simpliciales propias (ver [16]) y de los lemas 2 y 3 anteriores.

## CAPITULO II

### FINALES UP

En este capítulo nos vamos a dedicar a la definición y estudio de los finales up, los cuales tratan, como ya veremos, de reflejar la métrica del final del espacio.

Realizaremos nuestro análisis a partir de dos definiciones de finales que no dependen de la métrica: los finales de Freudenthal y los finales propios, cuyas definiciones y estudio pueden encontrarse en [16], donde asimismo se estudia la relación entre ambas clases de finales. Construiremos, además, cierres adecuados para los finales que tratamos y se establecerán algunas propiedades de dichos cierres en función de las propiedades del espacio.

#### II.1 DISTINTAS DEFINICIONES DE FINALES

En este apartado, y mientras no se exprese lo contrario,  $X$  representará a un espacio métrico no compacto.



1 Definición.- Dado  $X$  espacio topológico se pueden considerar las siguientes definiciones de finales:

i) Sea  $\{K_i\}$  la familia de subconjuntos compactos de  $X$ , que es un conjunto dirigido bajo la relación de inclusión. A cada elemento del  $\lim_{\leftarrow} \Pi_0(X-K_i)$  lo llamaremos un  $F$ -final o final de Freudenthal de  $X$ . Al conjunto de finales de Freudenthal lo denotaremos por  $F_F(X)$ .

ii) Dos aplicaciones propias  $f, f': J \rightarrow X$  se dirán que están relacionadas si son  $p$ -homotópicas en el sentido descrito en I.3. A cada una de las clases de equivalencia anteriores será a lo que llamaremos un final propio o  $p$ -final. Al conjunto de los  $p$ -finales lo denotaremos por  $F_p(X)$ .

2 Definición.- Decimos que un espacio  $X$  es numerable en un  $F$ -final  $\alpha$ , si existe una sucesión de subconjuntos conexos por caminos  $\{U_n\}$  decreciente en el sentido de la inclusión y tal que dado un compacto  $K$  existe un  $n$  natural tal que  $U_n$  está incluido en la componente conexa de  $X-K$  que define  $\alpha$ .

Diremos que un espacio es numerable en el infinito, si lo es en cada uno de sus  $F$ -finales.

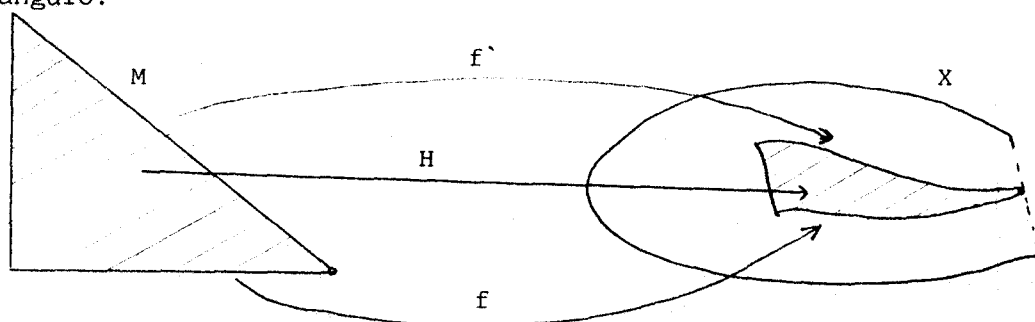
3 Nota.- En [16] se establece una aplicación entre los finales propios y los finales de Freudenthal y se prueba que si  $X$  es numerable en el infinito entonces dicha aplicación es sobreyectiva. Además se dan condiciones para el estudio de la fibra de cada uno de los finales de Freudenthal.

Damos, a continuación, dos nociones de finales up o finales métricos, que, en cierta forma, son equivalentes con las dadas en la definición 1:

4 Definición.- Dado  $X$  consideramos las siguientes definiciones de finales up:

i) Diremos que dos up-aplicaciones  $f, f': J \rightarrow X$  están Fup-relacionadas si existe un  $n_0$  de  $\mathbb{N}$  tal que para todo natural  $n$  mayor o igual que  $n_0$  existe  $f_n$  arco que une  $f(1-1/n)$  y  $f'(1-1/n)$  cumpliendo que la longitud del arco  $f_n$  tienda a cero conforme  $n$  crezca hacia infinito. A cada una de las clases de equivalencia resultante le llamaremos un final up-Freudenthal o Fup-final. Al conjunto de los Fup-finales lo representaremos por  $F_{\text{Fup}}(X)$ .

ii) Diremos que dos up-aplicaciones  $f, f': J \rightarrow X$  están up-relacionadas si existe una up-aplicación  $H: M \rightarrow X$  donde  $M$  es el triángulo:



$$\{(x,y) / 0 \leq x < 1 \quad 0 \leq y \leq 1-x\},$$

de tal forma que  $H|_{y=0}$  coincide con  $f$  y  $H|_{y=1-x}$  coincide con  $f'$ .

A cada una de las clases de equivalencia resultantes le llamaremos un up-final. Al conjunto de los up-finales lo representaremos por  $F_{\text{up}}(X)$ .

### 5 Ejemplos.-

i) Naturalmente, las definiciones dadas anteriormente dependen de la métrica del espacio, ya que mientras que el intervalo abierto  $(0,1)$  tiene dos Fup-finales y dos up-finales, si consideramos la recta real, que es homeomorfa al espacio anterior, no tiene ningún tipo de finales up.

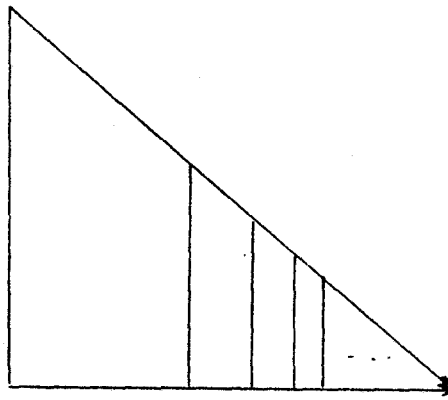
ii) También es fácil ver que si  $f$  y  $f'$  están Fup-relacionados, no tienen porqué estar up-relacionados:

Sea  $X$  el espacio unión de los tres conjuntos que siguen:

$$\{(x,y) / x=1-1/n \quad 0 \leq y \leq 1-x \quad : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{(x,y) / y=0 \quad 0 \leq x < 1\}$$

$$\{(x,y) / y=1-x \quad 0 \leq x < 1\}$$



Si  $f$  y  $f'$  están dadas por:

$$f: [0,1) \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto (x, 1-x)$$

$$f': [0,1) \longrightarrow X$$

$$x \longmapsto (x, 0)$$

se tiene, evidentemente, que  $f$  y  $f'$  están Fup-relacionadas, pero no up-relacionadas. Sin embargo si se verifica la siguiente:

6 Proposición.- Dos up-aplicaciones up-relacionadas, están Fup-relacionadas. En particular, existe una aplicación

$$\theta: F_{\text{up}}(X) \longrightarrow F_{\text{Fup}}(X).$$

Demostración.-

Es trivial, ya que si existe  $H: M \longrightarrow X$  up tal como se describe en ii) de la definición 3, bastará con que nos restrinjamos a cada uno de los segmentos:

$$\{(x,y)/x=1-1/n \quad 0 \leq y \leq 1-x \quad : n \in \mathbb{N}\}$$

7 Nota.- Más adelante, efectuaremos un estudio más profundo de la función  $\theta$  referida en la proposición anterior, pero para ello, anteriormente es conveniente, introducir el concepto de cierre up.

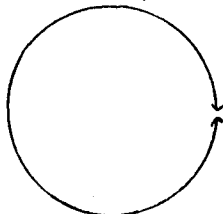
## II.2 CIERRE UP

Trataremos en este apartado de dar la noción de cierre correspondiente a los finales up, en el mismo sentido que se hace en [16] para los F-finales y los p-finales.

1 Nota.- Sin embargo, en primer lugar, veremos que si por  $F(X)$  representamos el conjunto de finales (Bien sean up o Fup) de un espacio métrico no compacto, no podremos, en general, definir una métrica en  $X \cup F(X)$ , de tal forma que  $X$  sea denso y que conserve las convergencias naturales:

Sean  $a$  y  $b$  dos finales distintos de  $X$ , tales que, dados dos representantes,  $f, f^*: J \rightarrow X$  de  $a$  y de  $b$  respectivamente, se tenga que:

$$\lim d(f(x), f^*(x)) = 0,$$



(por ejemplo, en un espacio tal como la circunferencia menos un punto que se indica en figura).

Entonces se tendrá que si  $a$  y  $b$  han de ser puntos del cierre de  $X$ , al tenerse que dar la convergencia natural  $(J, f)$  considerada como red convergerá al punto  $a$  del cierre, pero, por la condición del límite también  $(J, f^*)$  convergerá al punto  $a$  (además de al  $b$ ), luego, por la unicidad del límite  $a=b$ .

Por lo dicho anteriormente, para definir una métrica, primero debemos realizar un cociente en  $X \cup F(X)$ , así tenemos:

2 Definición.- Dado  $X$  diremos que  $a$  y  $b$  finales de  $X$  están relacionados ( $aRb$ ) si y sólo si existen representantes (o para todo representante, ya que, por la definición de relación entre representantes cualesquiera dos representantes de un mismo final se

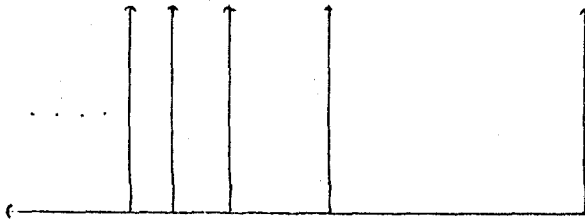
van acercando según  $x$  crezca hasta uno)  $f$  y  $f'$  respectivamente, tales que:

$$\lim d(f(x), f'(x)) = 0.$$

Así se tendrá que  $X \cup F(X)/R$  es un subconjunto de la completación  $\tilde{X}$  de  $X$ , con lo cual, podremos dotar a  $X \cup F(X)/R$  de la métrica restricción de la de  $\tilde{X}$ . Con lo cual, se puede asegurar que sobre  $X$  inducirá la métrica que originalmente poseía. Evidentemente, el cierre no depende de si escogemos una familia de finales  $F_{up}$  o  $u_p$  (todo lo dicho anteriormente vale tanto para unos como para otros). Al cierre de  $X$  lo denotaremos por  $\check{X}$  y a los puntos de  $\check{X} - X$  los llamaremos puntos de los finales.

### 3 Ejemplos.-

1) Naturalmente  $\check{X}$  no tiene porqué ser todo  $\tilde{X}$ , ni tan siquiera  $\check{X} - X$  ha de ser un subespacio cerrado de él:



Sea  $X$  el subespacio del plano definido por:

$$X = \{(x, y) / 0 < x \leq 1, y = 0\} \cup \\ \cup \{(x, y) / 0 < y < 1, x = 1/n: n \in \mathbb{N}\}$$

Así se tiene que  $\check{X}$  es igual a  $X$  junto con los puntos  $(1/n, 1)$  y el  $(0, 0)$  que no es cerrado en  $\tilde{X}$ .

Si en el ejemplo anterior, "engordamos" cada una de las líneas, construiremos una 2-variedad en  $\mathbb{R}^3$  con las mismas características.

2) Por otra parte, el cierre de un espacio puede, a su vez, tener finales  $u_p$ :

Sea  $X$  el intervalo  $(0, 1]$  excepto los puntos de la sucesión  $\{1/n\}$ . Evidentemente, los finales  $u_p$  de  $X$  son los puntos de dicha sucesión, ya que el cero no puede ser final  $u_p$  puesto que no se puede acceder a él de forma continua desde  $X$ . Así  $\check{X}$  es igual al intervalo  $(0, 1]$  que tiene un final  $u_p$  en el cero.

3) Nótese, igualmente, que el cierre de la unión disjunta de

dos espacios no tiene porqué ser la unión disjunta de los cierres:

Sea, por ejemplo,  $X$  igual al intervalo abierto  $(0,1)$  e  $Y$  al  $(1,2)$ . Evidentemente, el cierre de  $X \cup Y$  es el intervalo cerrado  $[0,2]$ , que no es la unión disjunta de los cierres de  $X$  y de  $Y$ .

Además, no tiene porqué verificarse si  $X$  e  $Y$  son subespacios de un espacio completo, que el cierre de la unión sea la unión de los cierres:

Sea  $X$  el intervalo  $(0,1]$  excepto los puntos de la sucesión  $\{1/n\}$ , e  $Y$  los puntos de dicha sucesión, subespacios ambos de la recta real. Se tiene que el cierre de  $X$  es el intervalo  $(0,1]$  y el de  $Y$  el propio  $Y$  (ya que no tiene ningún final up), sin embargo, el cierre de  $X \cup Y$  es el intervalo cerrado  $[0,1]$ .

Evidentemente, sí se tendrá que el cierre de la unión de  $X$  y de  $Y$  coincide con la unión de los cierres cuando la distancia entre  $X$  e  $Y$  es mayor que cero.

Sin embargo, sí se tiene una buena relación entre el cierre de dos espacios y el cierre del producto de dichos espacios:

4 Proposición.— Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios métricos, entonces se verifica que el cierre de  $X \times Y$  es el producto de los cierres de  $X$  y de  $Y$ .

Demostración.—

Si tenemos un punto  $(x,y)$  del cierre de  $X \times Y$  que no está en  $X \times Y$ , existirá una up-aplicación  $f: J \rightarrow X \times Y$  de forma que la red  $(J, f)$  converge a  $(x,y)$  (ver teorema I.2.5). Por el corolario I.2.6 de dicho teorema resultará que  $p_1 f: J \rightarrow X$  o  $p_2 f: J \rightarrow Y$  representan un final (bien sea de  $X$  o de  $Y$ ), luego  $f$  nos define un punto del producto de los cierres de  $X$  e  $Y$ . Tenemos así definida una aplicación de  $\overline{X \times Y}$  en  $\check{X} \times \check{Y}$  la cual es homeomorfismo como se comprueba fácilmente.

Veamos que el cierre de un espacio nos permite caracterizar las funciones up:

5 Proposición.- Toda up-aplicación  $f: X \rightarrow Y$  se puede extender a  $\check{f}: \check{X} \rightarrow \check{Y}$  continua entre los cierres de  $X$  y de  $Y$ .

Demostración.-

Es consecuencia inmediata de e) de la proposición I.2.2, y de la definición de final.

6 Teorema.- Si dos espacios métricos son up-homeomorfos sus cierres son homeomorfos.

Demostración.-

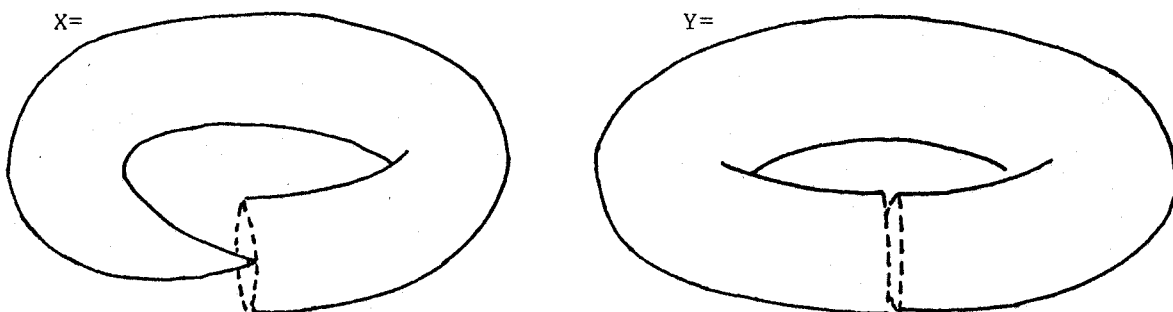
Se sigue fácilmente del teorema I.2.7 y del hecho de que cualquier final de  $X$  ha de ser aplicado mediante  $f$  en un final de  $Y$  (ya que  $f$  lleva  $J$  en  $J$ ).

7 Ejemplos.-

1) No se tiene el recíproco de este Teorema. Por ejemplo sea  $X$  el conjunto de los números naturales e  $Y$  los puntos de la sucesión  $\{1/n\}$ . Sea  $f: X \rightarrow Y$  la up-aplicación que a cada  $n$  le hace corresponder  $1/n$ .

Los cierres de  $X$  e  $Y$  coinciden con dichos conjuntos, luego  $f$  coincide con  $f$  que es un homeomorfismo entre  $\check{X}$  e  $\check{Y}$ , pero no es up-homeomorfismo, ya que  $f^{-1}$  no es uniformemente continua.

2) Si  $X$  es homeomorfo a  $Y$  y  $\check{X}-X$  homeomorfo a  $\check{Y}-Y$ ,  $X$  e  $Y$  no tiene porqué ser up-homeomorfos, por ejemplo:



Sean  $X$  e  $Y$  los espacios representados en la figura. Evidentemente, se tratan de espacios homeomorfos, tienen ambos por

conjunto de finales a la circunferencia  $S^1$  y, sin embargo, no son up-homeomorfos, ya que la extensión no es un homeomorfismo.

### II.3 ACCESIBILIDAD

Vamos a estudiar, en este apartado, la relación que existe entre los up-finales y los Fup-finales.

En primer lugar veremos cuando un final propio nos produce algún up-final (o Fup-final):

1 Definición.- Decimos que un final propio es up-accesible si existe un representante  $f: J \rightarrow X$  de dicho final que es una función up. A los puntos de la completación de  $X$  que procedan de representantes up un final propio  $a$  de  $X$  le llamaremos puntos accesibles de  $a$  o puntos de  $a$ .

2 Ejemplo.- Si  $a$  es un final accesible, no todos sus representantes tienen porqué ser up, ni representar puntos accesibles:

Sea  $X$  el semiplano superior abierto; los puntos del eje  $OX$  son los puntos accesibles del único final propio de  $X$ , existiendo muchos representantes de  $a$  que no convergen (considerándolos como redes) a ninguno de dichos puntos.

De la construcción del cierre y de I.2.2 e), se deduce la siguiente:

3 Proposición.- Se verifica:

- a) Cada final métrico (ya sea up o Fup) determina un único



punto en la completación de  $X$  al que llamaremos  $x_a$ .

b) Un final propio es up-accesible, si existe un representante  $f:J \rightarrow X$  de dicho final tal que la red  $(J,f)$  converge en la completación de  $X$ .

4 Proposición.- Sea  $X$  espacio métrico conexo, localmente arcoconexo y compacto, sea  $Y=X-\{x_1, \dots, x_n\}$ . Entonces  $Y$  tiene  $n$  finales Fup.

Demostración.-

Sea  $x_1$ , como  $X$  es de Hausdorff y localmente arcoconexo, se puede conseguir una base numerable de entornos arcoconexos decreciente de  $x_1$  que no contenga a ninguno de los restantes puntos de  $X-Y$ . Sea  $\{V_n\}$  dicha base

Si tenemos dos up-aplicaciones  $f, f':J \rightarrow X$  tales que:

$$\lim f(x) = \lim f'(x) = x_1.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que las imágenes de  $J$  mediante  $f$  y  $f'$  están incluidas en  $V_1$ , es más, podemos suponer que  $f(x), f'(x) \in V_n$  si  $1-1/n \leq x < 1$  (de no ser así, es fácil encontrar otras dos funciones que estén relacionadas con las anteriores y que verifiquen dicha condición). Entonces por cada  $V_n$  arcoconexo tenemos que existe un arco  $f_n$  entre  $f(1-1/n)$  y  $f'(1-1/n)$  contenido en  $V_n$ . Podremos así definir una up-aplicación de  $M$  en  $X$  donde  $M$  es el espacio unión de los tres subconjuntos siguientes:

$$\begin{aligned} & \{(x,y)/x=1-1/n \ 0 \leq y \leq 1-x \quad : n \in \mathbb{N}\} \\ & \{(x,y)/y=0 \ 0 \leq x \leq 1\} \\ & \{(x,y)/y=1-x \ 0 \leq x \leq 1\}. \end{aligned}$$

Al ser  $M$  compacto  $f:M \rightarrow X$  es uniformemente continua, luego su restricción a  $M-\{(1,0)\}$  es una aplicación up que nos permite relacionar a  $f$  y a  $f'$ .

5 Nota.- La anterior proposición nos dice, que, en dicho caso, el número de finales Fup coincide con los finales de Freudenthal.

6 Proposición.— Si  $M$  es el interior de una variedad cerrada con borde  $\partial M$ , se tiene que  $\check{M} = M \cup \partial M$ .

Demostración.—

Es trivial del hecho que cada punto de  $\partial M$  tiene una base de entornos arcoconexo y de tenerse que  $M \cup \partial M$  es la completación de  $M$ .

Por último veamos un caso particular de espacio, que nos será de mucha utilidad más adelante:

7 Teorema.— Sea  $C$  un continuo de Peano cualquiera, existe un espacio métrico  $X$  homeomorfo a  $S^1 \times J$  tal que el conjunto de finales de  $X$  es  $C$ .

Demostración.—

Si  $C$  es un continuo de Peano, sabemos que existe  $f: S^1 \rightarrow C$  que es aplicación cociente (teorema de Hah-Mazurkiewicz). Sea  $M_f$  el cilindro de dicha aplicación, si dotamos a  $M_f$  de una métrica, bastará con que consideremos  $M_f - C$  que será homeomorfo a  $S^1 \times J$  y se tendrá que el conjunto de finales de dicho espacio es  $C$ . Por lo tanto, luego tendremos que ver que  $M_f$  es metrizable, pero ello se obtiene fácilmente del teorema 20 del capítulo 5 y el teorema 12 del capítulo 3 de [19].

8 Nota.—

a) Naturalmente la métrica de  $X$  en el teorema anterior, depende de la elección de  $f$ . Así se pueden construir fácilmente ejemplos de distintas funciones cocientes  $f$  y  $g$  sobre un mismo continuo de Peano, de forma que  $M_f - C$  y  $M_g - C$  no sean up-homeomorfos (o, lo que es lo mismo  $M_f$  y  $M_g$  no sean homeomorfos):

Sea  $C$  el intervalo cerrado  $[0,1]$  y sean

$$\begin{array}{l}
 f:S^1 \longrightarrow [0,1] \\
 (x,y) \longmapsto |x| \\
 g:S^1 \longrightarrow [0,1] \\
 (x,y) \longmapsto x+1/2
 \end{array}$$

Obsérvese, que mientras que  $M_f$  no es variedad, sí se tiene que  $M_g$  lo es, luego no se puede establecer un homeomorfismo entre ellos, tal como se dijo.

b) La anterior proposición se sigue verificando si  $S^1$  se sustituye por un continuo de Peano cualquiera, ya que, en dichas condiciones se sigue verificando el Teorema de Hahn-Mazurkiewicz.

9 Teorema.— Sea  $Y$  un espacio métrico homeomorfo a  $X \times J$  donde  $X$  es métrico compacto, entonces existe  $R$  relación de equivalencia en  $X \times I$  que verifica que las clases de los puntos de  $X \times J$  son unitarias tal que  $\check{Y}$  es homeomorfo a  $X \times I / R$  (o, lo que es lo mismo  $Y$  es up-homeomorfo a dicho espacio excepto las clases de elementos de  $X \times \{1\}$ ).

Demostración.—

Evidentemente,  $\check{Y} - Y$  es cerrado y conexo, luego es un continuo de Peano con lo cual basta con aplicar la demostración del teorema 7 según nos dice b) de la nota anterior.

#### II.4 RELACION ENTRE LOS FINALES UP Y LOS FUP

En este apartado, vamos a efectuar el estudio de la relación que existe entre los finales up y Fup, tal como dijimos anteriormente, obteniéndose resultados similares a los de [16].

A un up-final (o Fup-final), además de los entornos que podemos asociarle por definir un punto del cierre de  $X$ , se le puede

construir una nueva familia, a la que llamaremos \*-entornos de a.

1 Definición.- Si a es un up-final de X (o Fup-final de X), llamaremos \*-entorno abierto de a, a todo abierto V de X tal que para cualquier representante f de a, se tenga que  $f^{-1}(X-V)$  es compacto. Las nociones de \*-entorno y de base de \*-entornos se construyen de la forma habitual.

2 Lema.- Todo final métrico de X admite una base numerable de \*-entornos decrecientes.

Demostración.-

Basta con intersectar una base numerable del punto  $x_a$  en X con un \*-entorno adecuado de a.

3 Ejemplo.- Evidentemente, los \*-entornos no tienen porqué coincidir con los entornos, Para ello, sea X el espacio constituido por la unión de los intervalos  $[0,1)$  y  $(1,2]$ , este espacio tiene dos finales up. Sea a el definido por  $f:J \rightarrow J$  como la identidad. Es fácil ver que J es \*-entorno de a pero no del punto de  $[0,2]$  (el 1) que define a.

4 Teorema.- Sea  $\theta:F_{up}(X) \rightarrow F_{Fup}(X)$  la aplicación definida en la proposición 1.6. Para cada up-final a se tiene que  $\theta^{-1}\theta(a)$  está en correspondencia biyectiva con  $\lim^1 \Pi_1(V_n)$  siendo  $\{V_n\}$  una base numerable de \*-entornos de a. Así se verifica que:

a) Si el sistema inverso cumple la condición de Mittag-Leffler, entonces  $\theta^{-1}\theta(a)$  consta de un solo final.

b) En otro caso la cardinalidad de  $\theta^{-1}\theta(a)$  es la del continuo.

Demostración.-

Se hace igual que en [25] basándose en la existencia de una base numerable de \*-entornos asegurada por el lema anterior.

5 Nota.-

a) Este teorema nos dice que la relación entre los Fup-finales y los up-finales es la misma que la que se probó en 16 que existía entre los finales de Freudenthal y los propios.

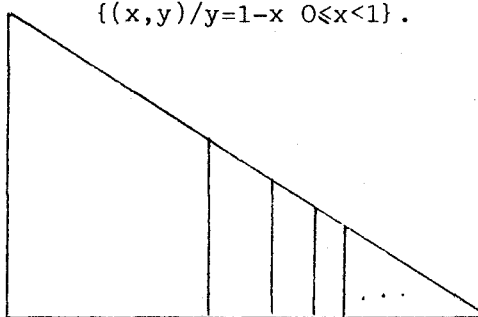
b) Si  $Y$  es el complementario en un compacto de una cantidad finita de puntos, en las mismas condiciones que en la proposición 3.4.  $Y$  no tiene porqué tener  $n$  up-finales (al igual que ocurría con los finales propios):

Sea  $Y$  el espacio unión de los tres conjuntos:

$$\{(x,y)/x=1-1/n \quad 0 \leq y \leq 1-x \quad : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\{(x,y)/y=0 \quad 0 \leq x < 1\}$$

$$\{(x,y)/y=1-x \quad 0 \leq x < 1\}.$$



Por la proposición 3.4  $Y$  tiene un solo final Fup. Pero, es fácil ver, que tiene tantos finales up como el cardinal del continuo.

### CAPITULO III

#### GRUPOS DE HOMOTOPIA UP

En el presente capítulo, nos proponemos introducir una sucesión bigraduada de funtores, que es invariante del tipo de homotopía up (así espacios homeomorfos, pero con distinta métrica, pueden tener asociados grupos diferentes). Comprobaremos la existencia de sucesiones exactas asociadas con parejas de espacios métricos, y estableceremos diversas relaciones entre los grupos definidos.

#### III.1 (N,Q)-POLIEDROS

1 Definición.- Un  $(n,q)$ -poliedro es un par  $(K,P)$  tal que:

- a)  $K$  es un complejo de bolas finito de dimensión  $n$ , según la noción de [30].
- b)  $P$  es un subpoliedro compacto de dimensión  $(n-q)$ , si es distinto del vacío.
- c) La inclusión canónica  $i:P \rightarrow |K|$  es un  $q$ -mockfibrado, esto

es: para cada  $m$ -símplice  $\sigma$  de  $K \cap P$  es una  $(m-q)$ -seudovariedad (posiblemente vacía).

Una  $(n,q)$ -bola (esfera) será un  $(n,q)$ -poliedro donde  $|K|$  es la  $n$ -bola (esfera) con su estructura canónica de complejo de bolas  $I^n$ .

Una aplicación entre  $(n,q)$ -poliedros  $(K,P)$  y  $(K',P')$ , será una aplicación propia

$$f: |K| - P \longrightarrow |K'| - P'.$$

Asimismo una aplicación entre un  $(n,q)$ -poliedro  $(K,P)$  y un espacio  $X$  será una aplicación propia  $f: |K| - P \longrightarrow X$ .

Un par de poliedros transversos será  $(X,A)$ , donde  $X$  es un  $(n,q)$ -poliedro  $(K,P)$  y  $A$  un  $(m,q)$ -poliedro  $(K',P')$ , incluido como pareja en el anterior, tal que  $i: P' \longrightarrow |K'|$  es el mockfibrado restricción a  $K'$  de  $i: P \longrightarrow |K|$ .

2 Definición.— Una  $(n,q)$ -bola canónica, (en adelante  $(n,q)$ -bola) será una  $(n,q)$ -bola con la métrica euclídea usual de  $I^n$ .

Dadas dos  $(n,q)$ -bolas  $D=(I^n, P)$  y  $D'=(I^n, P')$  se dirán que están relacionadas, si existe  $H=(I^n \times I, Q)$  (con su estructura canónica)  $(n+1,q)$ -bola tal que:

$$\begin{aligned} Q \cap (I^n \times \{0\}) &= P \\ Q \cap (I^n \times \{1\}) &= P' \end{aligned}$$

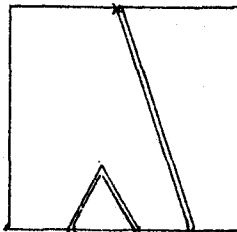
A  $H$  le llamaremos una relación (o una homotopía) entre  $D$  y  $D'$ .

Dado  $X$  espacio métrico, dos up-aplicaciones  $f: D \longrightarrow X$  y  $f': D' \longrightarrow X$ , donde  $D$  y  $D'$  son  $(n,m)$ -bolas, se dicen que están relacionadas o que son  $(n,m)$ -homotópicas, si existe una relación  $H$  entre  $D$  y  $D'$  y una up-aplicación  $h: H \longrightarrow X$  tal que restringida al nivel cero de  $H$  coincide con  $f$  y en el nivel uno coincide con  $f'$ .

3 Nota.— En las anteriores definiciones, se pueden considerar, tanto

las aplicaciones como los espacios basados.

4 Ejemplo.- Veamos que  $I-\{1/2\}$  e  $I-\{1/3,1/2,2/3\}$  son dos  $(1,1)$ -bolas que están relacionadas:



Sea  $H$  el espacio representado en la figura, evidentemente,  $H$  representa una homotopía entre  $I-\{1/2\}$  e  $I-\{1/3,1/2,2/3\}$ .

### III.2 GRUPOS DE HOMOTOPIA UP

1 Definición.- Sea  $X$  un espacio métrico,  $A$  un subconjunto de  $X$  que es cerrado,  $a$  un punto de  $A$  (el punto base que escogemos). Una  $(n,m)$ -bola singular de  $(X,A)$  es un par  $(D,f)$ , donde  $D$  es una  $(n,m)$ -bola y

$$f: (D, \partial I^n \cap D, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, a)$$

$f$  una aplicación up siendo  $J^{n-1} = \partial I^n - I^{n-1}$ . Denotemos por  $\Lambda_{n,m}(X,A,a)$  al conjunto de las  $(n,m)$ -bolas singulares. En  $\Lambda_{n,m}(X,A,a)$  definimos la relación  $(D,f)R(D',f')$  si  $f$  y  $f'$  son  $(n,m)$ -homotópicas. al conjunto cociente lo denotaremos por  $\Pi_{n,m}(X,A,a)$ .

Para ver que la relación anterior es de equivalencia, así como para tratar de dotar de estructura de grupo a  $\Pi_{n,m}(X,A,a)$ , introduciremos el concepto de concentración:

2 Definición.- Sea  $f: (D, I^n \cap D, J^{n-1}) \longrightarrow (X,A,a)$  una up-aplicación, donde  $D$  es la  $(n,m)$ -bola  $(I^n, M)$ , sea el subcubo:

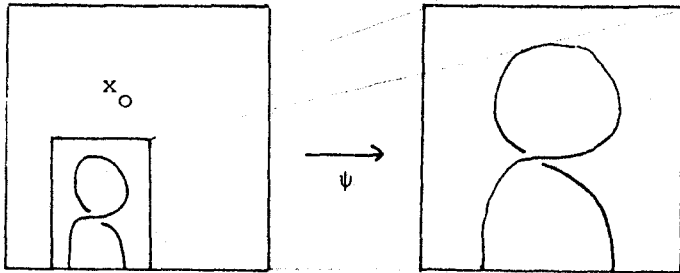


$I_1^n = \{(t_1, \dots, t_n) \mid p_i \leq t_i \leq q_i\}$  con  $0 \leq p_i < q_i \leq 1$ ,  $p_n = 0$ .

Consideremos el pl-isomorfismo  $\psi: I_1^n \rightarrow I^n$  definido por:

$$\psi(t_1, \dots, t_n) = (k_1, \dots, k_n)$$

donde  $k_i = (t_i - p_i) / (q_i - p_i)$ .



Llamaremos concentración de  $f$  en el subcubo  $I_1^n$  a la aplicación:

$$f^{\sim}: (I^{n-\psi^{-1}M}, \partial I^{n-\psi^{-1}M}, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, a)$$

definida por:

$$f^{\sim}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I_1^{n-\psi^{-1}M} \\ x_0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

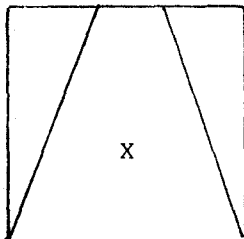
3 Lema.- Sean  $D^{\sim} = (I^n, \psi^{-1}M)$ ,  $f^{\sim}$  como en la definición anterior, entonces se tiene:

- a)  $f^{\sim}$  es up.
- b)  $(D, f)R(D^{\sim}, f^{\sim})$ .

Demostración.-

b) Sea  $X$  el poliedro

$$\{(t_1, \dots, t_n) \mid p_i t \leq t_i \leq (1 - (1 - q_i)t)\}$$

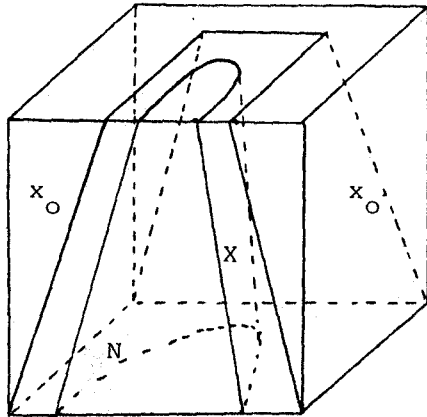


y sea  $\theta: X \rightarrow I^{n+1}$  el pl-isomorfismo:

$$\theta(t_1, \dots, t_n, t) = (k_1, \dots, k_n)$$

donde  $k_i = (t_i - p_i t) / (1 - (1 - q_i + p_i)t)$ .

Entonces  $N = \theta^{-1}M \times I$  es una pl-seudovariiedad en  $X$  tal que intersectada con  $I^n \times \{0\}$  nos da  $M$  y con  $I^n \times \{1\}$  nos da  $M'$  que es pl-isomorfo a  $M$ .



Así, definimos  $F: H = (I^n \times I) - N \rightarrow X$  por

$$F(x) = \begin{cases} f(\theta(x)) & \text{si } x \in X \\ x_0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Esta aplicación, es trivialmente up con lo cual se tiene demostrado el lema.

4 Lema. - La relación que se dio en la definición 1 sobre el conjunto  $\Lambda_{n,m}(X, A, a)$  es de equivalencia.

Demostración. -

La demostración es fácil utilizando el lema anterior.

5 Definición. - Sean las up-aplicaciones

$$f_1: (I^n - M_1, \partial I^n - M_1, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, a)$$

$$f_2: (I^n - M_2, \partial I^n - M_2, J^{n-1}) \rightarrow (X, A, a)$$

Consideremos los conjuntos:

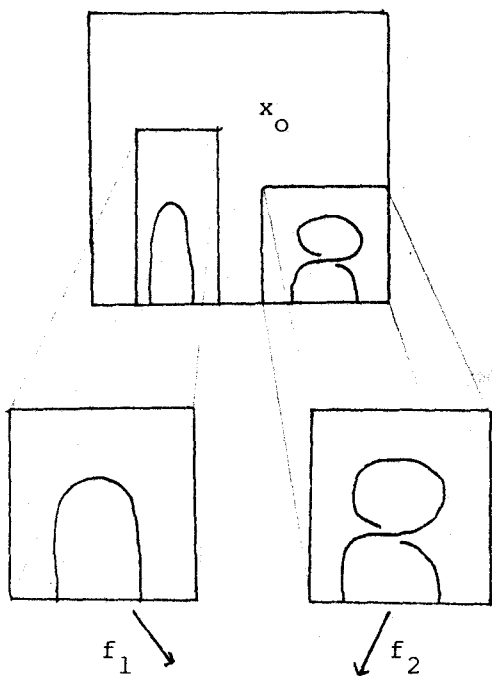
$$I_1^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n : p_i \leq t_i \leq q_i\}$$

$$I_2^n = \{(t_1, \dots, t_n) \in I^n : p_i' \leq t_i \leq q_i'\}$$

verificandose  $0 \leq p_i < q_i \leq p_i' < q_i' \leq 1$  para  $1 \leq i \leq n-1$   $0 \leq q_n < q_n' \leq 1$ .

Si  $f_1'$  y  $f_2'$  son las respectivas concentraciones de  $f_1$  y  $f_2$  en  $I_1^n$   $I_2^n$  definimos

$$f_1' * f_2': I^n - (M_1 \cup M_2) \rightarrow X$$



por

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{si } x \in I_1^n \\ f_2(x) & \text{si } x \in I_2^n \\ x_0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Si en la anterior definición se consideran los subcubos  $[0, 1/2] \times I^{n-1}$  y  $[1/2, 1] \times I^{n-1}$  la aplicación será representada por  $f_1^0 \cdot f_2^0$ .

6 Proposición. - a)  $f_1 \cdot f_2$  es up-aplicación.

b)  $f_1^0 \cdot f_2^0$  es  $(n, m)$ -homotópica a  $f_1 \cdot f_2$ .

Demostración. -

Tanto a) como b) no son más que una generalización inmediata del lema 3.

7 Proposición. - Supongamos que  $f_1 R f_1$  y  $f_2 R f_2$ . Entonces se tiene que  $f_1 \cdot f_2 R f_1 \cdot f_2$ .

Demostración. -

Si  $F_1$  es una relación de  $(n, m)$ -homotopía entre  $f_1$  y  $f_1$  y  $F_2$  una  $(n, m)$ -homotopía entre  $f_2$  y  $f_2$ , se tendrá que  $F_1 \cdot F_2$  es una  $(n, m)$ -homotopía entre  $f_1 \cdot f_2$  y  $f_1 \cdot f_2$ .

Así ya estamos en condiciones de dotar a  $\Pi_{n,m}(X,A,a)$  de una ley de composición interna:

8 Definición.- En  $\Pi_{n,m}(X,A,a)$  existe una operación definida por  $[f][g]=[f^{\circ}*g^{\circ}]$  para  $[f],[g]\in\Pi_{n,m}(X,A,a)$

9 Teorema.- La anterior función es una operación en  $\Pi_{n,m}(X,A,a)$  que lo dota de estructura de grupo para  $n\geq 2$  al que llamaremos  $(n,m)$ -grupo de homotopía up. Dicho grupo es abeliano para  $n\geq 3$ .

En el caso absoluto (i.e.: cuando A se reduce al punto base), se tiene la estructura de grupo para  $n\geq 1$  y la conmutatividad para  $n\geq 2$ .

Demostración.-

Un representante de  $[f]([g][h])$  será  $f^{\circ}*g^{\circ}*h^{\circ}$ , siendo  $g^{\circ}$  y  $h^{\circ}$  concentraciones de  $g$  y  $h$  en los subcubos  $[1/2,3/4]\times I^{n-1}$  y  $[3/4,1]\times I^{n-1}$ . Y, puesto que un representante de  $([f][g])[h]$  es  $f^{\circ\circ}*g^{\circ\circ}*h^{\circ}$ , siendo  $f^{\circ\circ}$  y  $g^{\circ\circ}$  concentraciones de  $f$  y  $g$  en los subcubos  $[0,1/4]\times I^{n-1}$  y  $[1/4,1/2]\times I^{n-1}$ , pero, como de la proposición 6 se deduce que  $f^{\circ}*g^{\circ}*h^{\circ}$  y  $f^{\circ\circ}*g^{\circ\circ}*h^{\circ}$  están relacionados, se tiene inmediatamente la asociatividad.

Del lema 3 se deduce que  $(I^n, e)$ , donde  $e$  es la aplicación constante en el punto base, actúa como elemento neutro.

Para ver la existencia de elemento inverso, sea:

$$f:(I^n - M, \partial I^n - M, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, a)$$

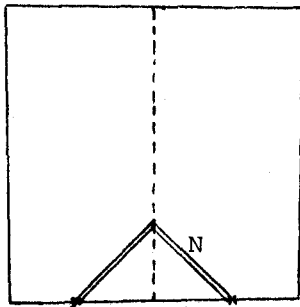
el representante de un elemento de  $\Pi_{n,m}(X,A,a)$  y  $r:I^n \rightarrow I^n$  el pl-homeomorfismo definido por  $r(t_1, \dots, t_n) = (1-t_1, \dots, t_n)$  denotemos por  $\bar{M}$  a  $rM$  y  $\bar{f}$  a la composición  $fr$ , que es up-aplicación por ser composición de aplicaciones up, vamos a probar que  $f^{\circ}*f^{\circ}$  es homotópica a la aplicación constante, que, como hemos visto, representa al elemento neutro:

Dado  $x_o = (t_1^{\circ}, \dots, t_n^{\circ}) \in I^n$  con  $t_1^{\circ} \in [0, 1/2]$ , sea  $C_{x_o}$  el arco en  $I^n \times I$  definido por:

$$\{(t_1, t_2^{\circ}, \dots, t_n^{\circ}, t): t_1 - t_1^{\circ} = t \quad 0 \leq t \leq 1/2 - t_1^{\circ}\} \cup \\ \cup \{(t_1, t_2^{\circ}, \dots, t_n^{\circ}, t): t_1 - (t_1^{\circ} + 1/2) = -t \quad 0 \leq t \leq 1/2 - t_1^{\circ}\}$$

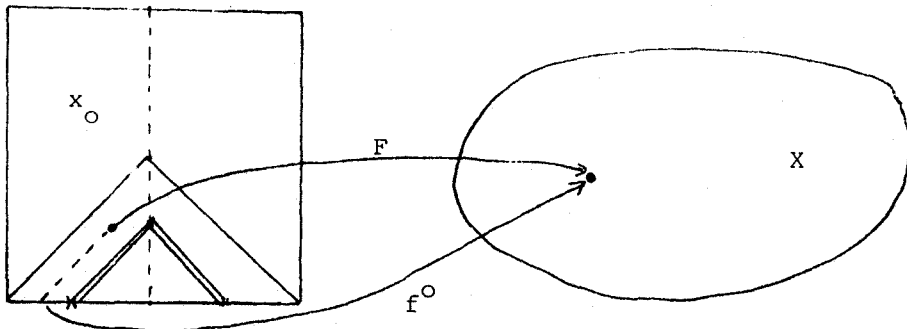
Entonces  $N = \bigcup_x \{C_x : x \in M^0\}$  es una pl-seudovariiedad, pl-homeomorfa a  $M^0 \times I$  que tiene por borde a  $M^0 \cup rM^0$ .

Obsérvese que si  $\bar{f}^0 : I^n - \bar{M}^0 \rightarrow X$  es la concentración dada de  $\bar{f}$ , entonces  $rM^0 = \bar{M}^0$ .



Definimos  $F : I^n \times I - N \rightarrow X$  por:

$$F(t_1, \dots, t_n, t) = \begin{cases} f^0(x) & \text{si } (t_1, \dots, t_n, t) \in C_x \\ a & \text{en otro caso} \end{cases}$$

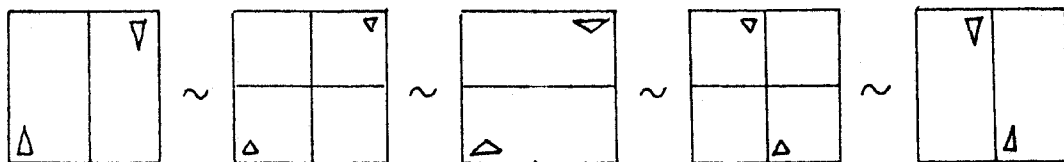


Evidentemente se trata de una aplicación propia, resta por ver si es uniformemente continua. Sabemos que  $f^0$  lo es, esto quiere decir que para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta$  igualmente mayor que cero tal que si  $d(x, y) < \delta$  entonces  $d(f^0(x), f^0(y)) < \epsilon$ , pero si  $d((t_1, \dots, t_n, t), (t_1', \dots, t_n', t')) < \delta$  siendo  $(t_1, \dots, t_n, t) \in C_x$  y  $(t_1', \dots, t_n', t') \in C_y$  se tiene también que  $d(x, y) < \delta$ , con lo cual se concluye que  $\Pi_{n,m}(X, A, a)$  tiene estructura de grupo.

Probemos ahora la conmutatividad para  $n \geq 3$ :

Sabemos que  $f^0 * g^0$  es homotópica a  $f^0 \cdot g^0$  siendo  $f^0$  y  $g^0$  las

concentraciones respectivas en los subcubos  $[0,1/2] \times [0,1/2] \times I^{n-2}$  y  $[1/2,1] \times [1/2,1] \times I^{n-2}$ . Utilizando los mismos argumentos que en las demostraciones del lema 3 y de la proposición 7, se prueba que  $f \circ g$  es homotópica a  $g \circ f$  siendo  $g$  y  $f$  las concentraciones respectivas en los subcubos  $[0,1/2] \times [1/2,1] \times I^{n-2}$  y  $[1/2,1] \times [0,1/2] \times I^{n-2}$ , que, a su vez, es homotópica a  $f \circ g$ .



Obsérvese que necesitamos  $n \geq 3$  ya que en  $I^n$  no podemos hacer concentraciones a  $I^{n-1} \times [i,1]$  siendo  $i > 0$ . Asimismo, vemos, que en el caso absoluto, esta dificultad ocurre sólo cuando  $n=1$ , por lo tanto, tenemos la conmutatividad para  $n > 1$ .

10 Nota. - La definición del grupo de homotopía up absoluto  $\Pi_{n,m}(X,a)$  se puede realizar, considerando  $(n,m)$ -esferas basadas  $(S,p)$  y up-aplicaciones  $f:(S,p) \rightarrow (X,a)$  al igual que ocurría en el caso clásico.

Al igual que en el caso clásico, se verifica que  $\Pi_{n,m}$  es, efectivamente, un funtor que actúa sobre la categoría de los pares de espacios métricos con aplicaciones up. Así si tenemos una up-aplicación  $\psi:(X,a) \rightarrow (Y,b)$ , podemos definir  $\psi^*:\Pi_{n,m}(X,a) \rightarrow \Pi_{n,m}(Y,b)$ , como sigue:

Si  $(D,f)$  es un representante de un elemento de  $\Pi_{n,m}(X,a)$ , entonces  $\psi^*$  aplicado a dicho elemento será la clase en  $\Pi_{n,m}(Y,b)$  de  $(D,\psi f)$ . Se prueba, con las mismas técnicas que en caso clásico, que dicha definición no depende del representante escogido, así como los lemas que nos aseguran el caracter funtorial, pudiendose enunciar el siguiente:

11 Teorema. -  $\Pi_{n,m}$  es un funtor covariante, invariante por homotopía up, entre la categorías de los pares de espacios métricos basados  $(X,A,a)$  con A cerrado en X y aplicaciones up como flechas y la categoría de los grupos con los homomorfismos entre ellos como flechas.

### III.3 SUCESION EXACTA DE HOMOTOPIA UP

Sea X un espacio métrico, A un subconjunto cerrado de X y a un punto de A al que consideraremos como punto base. Vamos a probar la existencia de una sucesión exacta formada por los grupos de homotopía up asociados a la pareja  $(X,A)$ , al igual que ocurría en el caso clásico. Para ello, veamos con antelación, un resultado que nos será de utilidad:

1 Proposición. - Una aplicación up representa al elemento neutro de  $\Pi_{n,m}(X,A,a)$  si y sólo si está relacionado con alguna up-aplicación cuya imagen se encuentra en A.

Demostración. -

Probaremos que si  $f:(I^n - M, \partial I^n - M, J^{n-1}) \longrightarrow (X,A,a)$  es una up-aplicación tal que su imagen está incluida en A, entonces f está relacionada con la aplicación constante:

Efectivamente,  $\psi:I^{n+1} \longrightarrow I^n$  definida por

$$\psi(t_1, \dots, t_n), t) = \begin{cases} (t_1 - t, t_2, \dots, t_n) & \text{si } t_1 > t \\ (0, t_2, \dots, t_n) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Sea  $\bar{M} = \psi^{-1}M$ , definimos  $h:I^{n+1} - \bar{M} \longrightarrow X$  como la composición  $f\psi$ , dicha aplicación es la homotopía deseada entre f y la aplicación constante, y es up por ser composición de up-aplicaciones.

El recíproco es obvio.

2 Teorema.— Sea  $(X,A,a)$  en las condiciones antes expuestas, entonces, existe, de modo natural una sucesión exacta del tipo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \Pi_{n,m}(A,a) & \xrightarrow{i^*} & \Pi_{n,m}(X,a) & \xrightarrow{j^*} & \\ & & & & & & \\ & & \xrightarrow{j^*} & \Pi_{n,m}(X,A,a) & \xrightarrow{\partial} & \Pi_{n-1,m}(A,a) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

donde  $i^*$  y  $j^*$  son los morfismos inducidos por las inclusiones canónicas  $i:A \rightarrow X$ ,  $j:X \rightarrow (X,A)$ .

Demostración.—

En primer lugar, tendremos que definir  $\partial$ ; así si  $(I^{n-m}, f)$  es el representante de un elemento de  $\Pi_{n,m}(X,A,a)$ ,  $\partial$  aplicado a dicho elemento estará representado por  $(I^{n-1} \text{--} \partial M, f|I^{n-1} \text{--} \partial M)$ . Recuerdese que  $f|I^{n-1} \text{--} \partial M$  tiene su imagen en  $A$ , y por tanto, como la independencia del representante es obvia,  $\partial$  está bien definida y es fácil comprobar que se trata de un morfismo.

Veamos que la sucesión es exacta, en primer lugar comprobemos que las imágenes están incluidas en los núcleos que les corresponden:

La proposición anterior, nos asegura que  $j^*i^*=0$ . De la definición de  $\partial$  se deduce fácilmente que  $\partial j^*=0$ . Y, por último aplicando  $i^*\partial$  a alguna función  $f$ , esta misma función nos define una homotopía entre  $i^*\partial(f)$  y la aplicación constante.

Probemos, a continuación, las inclusiones inversas:

Para ver que el núcleo de  $j^*$  está incluido en la imagen de  $i^*$ , sea  $f:(I^{n-m}, \partial I^n) \rightarrow (X,a)$  tal que existe una  $(n,m)$ -homotopía  $H$  que es  $(n,m)$ -homotopía entre  $f$  y la aplicación constante, entonces  $H|I^{n-1} \times I$  define un elemento de  $\Pi_{n,m}(A,a)$  el cual se comprueba, utilizando argumentos parecidos a los de la proposición anterior, que es  $(n,m)$ -homotópico a  $f$  en  $(X,a)$ .

La inclusión del núcleo de  $i^*$  en la imagen de  $\partial$  es trivial por la definición de  $\partial$ .

Por último, para comprobar que el núcleo de  $\partial$  está incluido en



la imagen de  $j^*$ , sea  $f: (I^n - M, I^{n-1} - \partial M, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, a)$  tal que existe una homotopía  $H$  entre la restricción de  $f$  a  $I^{n-1} - \partial M$  y la aplicación constante, considerando el pegamiento de  $H$  y  $f$  a través de  $I^{n-1} - \partial M$ , se obtiene un elemento de  $\Pi_{n,m}(X, a)$  que representa la clase de  $f$  tal como se observa utilizando una homotopía similar a la descrita en la demostración de la proposición anterior.

Con argumentos similares a los vistos en la teoría clásica de homotopía, se prueba:

3 Proposición.— Toda aplicación  $\text{up } \psi: (X, A) \longrightarrow (Y, B)$  induce una aplicación  $\psi^*$  entre las sucesiones de las parejas, que conmuta de forma natural con los morfismos de dichas sucesiones.

#### III.4 GRUPOS DE HOMOTOPIA UP ASOCIADOS A UNA CATEGORÍA DE PREBORDISMO

Sea  $PC$  la categoría de los poliedros compactos. Al igual que se hace en [14], dada una categoría de  $(Z_2, PC)$ -prebordismo absoluto  $(N, o)$  (entendiéndose por una categoría de  $(Z_2, PC)$ -prebordismo absoluto a una categoría  $N$  con un funtor olvido  $o$  sobre  $PC$ , que posee las nociones geométricas de dimensión, suma finita, borde, cilindro y pegamiento a través de las componentes del borde, cumpliendo las propiedades análogas a las nociones correspondientes de las  $pl$ -variedades compactas, ver [15]), podemos definir, al igual que hicimos en los apartados III.1 y III.2, los funtores de homotopía  $\text{up } \Pi_{n,m}(-; N)$  entre los espacios métricos con aplicaciones  $\text{up}$  y la categoría de los grupos, así se tiene:

1 Proposición.— Sean  $(N, o)$  y  $(N', o')$  dos categorías de

$(Z_2, PC)$ -prebordismo absoluto y  $G: N \rightarrow N'$  un funtor covariante que conmuta con los funtores olvido y preserva las nociones que caracterizan a  $N$ , entonces  $G$  define una transformación natural

$$G^*: \Pi_{n,m}(-; N) \longrightarrow \Pi_{n,m}(-; N')$$

2 Nota.-

a) Naturalmente  $\Pi_{n,m}(-; N)$  depende de la categoría  $N$ , tal como veremos más adelante.

b) Al igual que se ha hecho en el caso absoluto, si tenemos una categoría de  $(Z_2, PC)$ -prebordismo relativo, podemos definir una teoría de homotopía up sobre la categoría de los pares de espacios métricos basados con aplicaciones up.

### III.5 CONSECUENCIAS DE LA SUCESION EXACTA

Debido a la existencia de la sucesión exacta de homotopía up y al caracter funtorial, se tienen una serie de corolarios al igual que ocurría en el caso clásico, veamos algunos de ellos:

1 Teorema.- Si  $A$  es up-deformable sobre  $X$ , relativamente al punto  $a$ , en dicho punto, entonces:

$$\Pi_{n,m}(X, A, a) \cong \Pi_{n,m}(X, a) + \Pi_{n-1,m}(A, a)$$

para  $n \geq 2$ .

2 Nota.- Obsérvese que por ser  $A$  up-deformable a un punto,  $A$  ha de ser compacto en cuyo caso el grupo  $\Pi_{n-1,m}(A, a)$  coincide con el grupo  $\Pi_{n-1}(A, a)$ .

3 Teorema.- Si A es up-retracto de X, entonces:

$$\Pi_{n,m}(X,a) \cong \Pi_{n,m}(X,A,a) + \Pi_{n,m}(A,a)$$

para  $n \geq 2$ .

4 Corolario.- Si A es up-retracto de X, el grupo  $\Pi_{n,m}(X,A,a)$  es abeliano para  $n \geq 2$ .

5 Teorema.- Si X puede ser up-deformado, relativamente al punto a, en A, entonces:

$$\Pi_{n,m}(A,a) \cong \Pi_{n,m}(X,a) + \Pi_{n-1,m}(X,A,a)$$

para  $n \geq 2$ .

Las demostraciones de los teoremas anteriores son directas de la sucesión exacta y se realizan igual que en el caso clásico. En el capítulo V, veremos algunas aplicaciones de estos resultados.

También como consecuencia de la existencia de la sucesión exacta de homotopía up y de la proposición 3.3, se tiene la sucesión de homotopía del triple:

6 Teorema.- Sean X,A,B espacios métricos arcoconexos con  $B \subseteq A \subseteq X$  cerrados, entonces se tiene la sucesión exacta de homomorfismos:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \Pi_{n,m}(A,B) & \xrightarrow{i^*} & \Pi_{n,m}(X,B) & \xrightarrow{j^*} & \dots \\ & & \xrightarrow{j^*} & \Pi_{n,m}(X,A) & \xrightarrow{\partial_*} & \Pi_{n-1,m}(A,B) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

donde  $i^*$  y  $j^*$  son las inducidas por las inclusiones  $i:(A,B) \rightarrow (X,B)$   $j:(X,B) \rightarrow (X,A)$  y  $\partial_*$  es la composición de  $\partial:\Pi_{n,m}(X,A,a) \rightarrow \Pi_{n-1,m}(A,a)$  con la inyección canónica  $\Pi_{n-1,m}(A,a) \rightarrow \Pi_{n-1,m}(X,a)$ .

A la sucesión anterior le llamaremos sucesión exacta de homotopía up del triple  $(X,A,B)$ .

Si  $(X^{\prime},A^{\prime},B^{\prime})$  es otro triple y  $\psi:(X,A,B) \rightarrow (X^{\prime},A^{\prime},B^{\prime})$  es una up-aplicación, entonces  $\psi^*$  induce una aplicación entre las sucesiones de homotopía up de los triples  $(X,A,B)$  y  $(X^{\prime},A^{\prime},B^{\prime})$ .

## CAPITULO IV

### OPERACIONES

En este capítulo se introducen las acciones entre los grupos de homotopía  $up$ , así como el producto de Whitehead, como operaciones entre grupos de homotopía  $up$ . Además se estudia un nuevo concepto de arcoconexión coherente con la teoría de homotopía que hemos introducido.

#### IV.1 UP ARCOCONEXION

En este apartado, vamos a introducir el concepto de arco  $up$  y  $up$ -arcoconexión, que nos será útil en el desarrollo posterior del trabajo.

1 Definición.- Sea  $X$  un espacio métrico,  $a$  y  $b$  puntos de  $X$ . Llamaremos  $(m,k)$ -arco de extremos  $a$  y  $b$ , a cualquier par  $(I^m-P, f)$  donde  $(I^m, P)$  es una  $(m,k)$ -bola y  $f: I^m-P \rightarrow X$  una aplicación  $up$  tal que

$f(I^{m-1} \times \{0\})=a$ ,  $f(I^{m-1} \times \{1\})=b$  y

$$f(t_1, \dots, t_k, i, \dots, t_m) = f(t_1, \dots, t_k, j, \dots, t_m)$$

siendo  $i, j \in \{0,1\}$ .

Así diremos que un espacio métrico es  $(m,k)$ -arcoconexo, si dados dos puntos cualesquiera  $a$  y  $b$  de  $X$ , existe un  $(m,k)$ -arco de extremos  $a$  y  $b$ .

2 Nota.- Obsérvese que si  $P$  es vacío y  $m=1$  estamos en la definición clásica de arcoconexión, por lo tanto, decir que  $X$  es  $(1,2)$ -arcoconexo es decir que es arcoconexo.

3 Ejemplo.- Naturalmente, la  $(m,k)$ -arcoconexión no implica la arcoconexión, para verlo, sea  $X$  el espacio constituido por la unión de los intervalos  $[0,1)$  y  $(1,2]$ , es fácil ver que dicho espacio es  $(1,1)$ -arcoconexo a pesar de no ser conexo.

4 Proposición.- Si  $X$  es  $(m,k)$ -arcoconexo y  $m$  distinto de  $k$  entonces  $X$  es arcoconexo.

Demostración.-

De las condiciones dimensionales se tiene que  $I^m - P$  es arcoconexo, de lo cual se sigue el enunciado.

5 Proposición.- Sea  $X$  un espacio métrico, se verifica:

- i) Si  $X$  es  $(n,n)$ -arcoconexo, entonces es  $(1,1)$ -arcoconexo.
- ii) Si  $X$  es arcoconexo es  $(m,k)$ -arcoconexo para cualesquiera  $m$  y  $k$ .
- iii) Si  $X$  es  $(n,n)$ -arcoconexo no conexo, entonces no tiene componentes conexas compactas.

Demostración.-

Las dos primeras propiedades se demuestran fácilmente.

Probaremos iii). Sea  $C(x)$  la componente conexa de  $x$  en  $X$  y supongamos que  $C(x)$  es compacto, consideremos un punto  $y$  que no esté en  $C(x)$  y denotemos por  $C(y)$  a su componente conexa. Por ser  $X$   $(n,n)$ -arcoconexo y aplicando i), se tiene que  $X$  es  $(1,1)$ -arcoconexo, luego existe  $f: I - \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow X$  up-aplicación tal que  $f(0)=x$  y  $f(1)=y$ . Así  $f([0, x_1])$  será un subconjunto cerrado en  $C(x)$  (ver proposición I.2.2 f) cuya antiimagen no es compacta, en contra del hecho de ser  $C(x)$  compacto y  $f$  propia.

#### 6 Nota.-

a) Por la proposición anterior, el único caso de  $(n,m)$ -arcoconexión up que en realidad tiene interés es el caso  $(1,1)$ .

b) Obsérvese que la imagen mediante cualquier aplicación up de un espacio  $(m,k)$ -arcoconexo es  $(m,k)$ -arcoconexo.

c) Naturalmente la  $(m,k)$ -arcoconexión determina una partición del espacio, con lo que tiene sentido hablar de las componentes  $(m,k)$ -arcoconexas.

7 Teorema.- Si  $X$  es  $(m,k)$ -arcoconexo, su cierre up es arcoconexo.

#### Demostración.-

Según a) de la nota anterior, supongamos que  $X$  es  $(1,1)$ -arcoconexo. Puesto que un punto de  $\check{X}-X$  se puede unir con alguno de  $X$  mediante un arco, bastará con ver que dos puntos cualesquiera de  $X$  se pueden unir con un arco en  $X$ . Pero esto último se deduce fácilmente de la proposición II.2.5.

#### 8 Ejemplo.-

a) El recíproco del teorema anterior no se tiene. Sea, por ejemplo,  $X$  el espacio constituido por todos los números reales excepto los puntos de la sucesión  $\{1/n\}$  y el cero. Los puntos  $-1$  y  $2$  no se pueden unir en  $X$  mediante ningún  $(1,1)$ -arco, ya que entre ellos falta una cantidad infinita de puntos. Sin embargo  $\check{X}$  coincide con  $\mathbb{R}$ , como

es fácil comprobar.

b) Igualmente, obsérvese que la arcoconexión  $up$  depende de la métrica del espacio, ya que  $(1,2) \cup (2,3)$  es  $(1,1)$ -arcoconexo y  $(1,2) \cup (3,4)$  no lo es a pesar de ser homeomorfos.

9 Nota.- Al igual que ocurre en el caso clásico, el cardinal de  $\Pi_{0,k}(X)$  coincide con el número de  $(1,k)$ -arcocomponentes conexas de  $X$ .

10 Definición.- Decimos que dos  $(m,k)$ -arcos  $(I^m - P, f)$  e  $(I^m - P', f')$  están relacionados, si existe una  $(m+1,k)$ -bola  $(I^{m+1} - Q, h)$  tal que:

$$(I^m \times \{0\}) \cap Q = P \text{ y } (I^m \times \{1\}) \cap Q = P'$$

y  $h$  restringida al nivel cero coincida con  $f$  y restringida al nivel uno coincida con  $f'$ , siendo, además  $h(I^{m-1} \times \{0\} \times I) = a$  y  $h(I^{m-1} \times \{1\} \times I) = b$ .

11 Ejemplo.- Si  $X$  es el espacio formado por todos los puntos del plano excepto el origen y consideramos  $(I, f)$ ,  $(I, f')$  donde  $f$  y  $f'$  vienen dadas por:

$$\begin{array}{l} f: [0,1] \longrightarrow X \\ \quad t \longmapsto (\cos t\pi, \text{sen } t\pi) \\ f': [0,1] \longrightarrow X \\ \quad t \longmapsto (\cos t\pi, -\text{sen } t\pi) \end{array}$$

$(I, f)$  e  $(I, f')$  se pueden considerar como  $(1,k)$ -arcos para cualquier  $k$ ; la única diferencia estriba en que como  $(1,2)$ -arcos están relacionados y como  $(1,k)$ -arcos para  $k \geq 3$  no.

12 Nota.- Obsérvese que un representante de un elemento del grupo  $\Pi_{n,k}(X, a)$  puede ser considerado como un caso particular de  $(n,k)$ -arco (de extremos  $a$  y  $a$ ) y que dos representantes son  $(n,k)$ -homotópicos si y sólo si están relacionados según lo visto en la definición 10.

## IV.2 ACCIONES

En este apartado, vamos a estudiar las acciones entre diversos grupos de homotopía up, así como la independencia de la elección del punto base.

1 Teorema.— Dados  $a$  y  $b$  puntos de un espacio métrico  $X$ , para  $m \leq n$ . todo  $(m,k)$ -arco  $C=(I^m-P,f)$  de extremos  $a$  y  $b$  induce de forma natural un morfismo

$$C^*: \Pi_{n,k}(X,a) \longrightarrow \Pi_{n,k}(X,b).$$

Además se verifica, que si  $C_1$  y  $C_2$  son dos  $(m,k)$ -arcos que están relacionados entonces  $C_1^*=C_2^*$ .

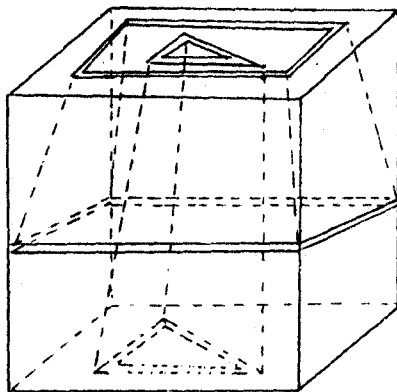
Demostración.—

Sea  $\alpha$  un elemento de  $\Pi_{n,k}(X,a)$  y  $(M,g)$  un representante de  $\alpha$ .

Consideremos

$$r: I^n \times I \longrightarrow (\partial I^n \times I) \cup (I^n \times \{0\})$$

la retracción natural  $p_1$  que transforma  $I^n \times \{1\}$  homeomórficamente sobre  $(\partial I^n \times I) \cup (I^n \times \{0\})$ . Sean todas las caras de  $(\partial I^n \times I)$  excepto  $(I^n \times \{0\})$  e  $(I^n \times \{1\})$ , las caras consideradas, formaran un espacio homeomorfo a  $I^n$ . Al  $(m,k)$ -arco  $(I^m-P,f)$  lo multiplicamos por  $I^{n-m}$  y nos dará una  $(n,k)$ -bola que identificamos con cada una de las bolas  $I^n$  que constituyen las caras de  $(\partial I^n \times I)$  antes mencionadas.



Denotemos por  $P'$  a la unión de todos los productos de  $P$  por  $I^{n-m}$  en cada una de las caras que hemos considerado, al complementario de  $P'$  en dicho conjunto le llamaremos  $L$ . Entonces  $(I^m-P,f)$  aplicado a  $\alpha$  será elemento de  $\Pi_{n,k}(X,b)$  representado por  $(M',g')$  donde



$M = r^{-1}(L \cup M) \cap I^n \times \{1\}$  y  $g'$  está definida por:

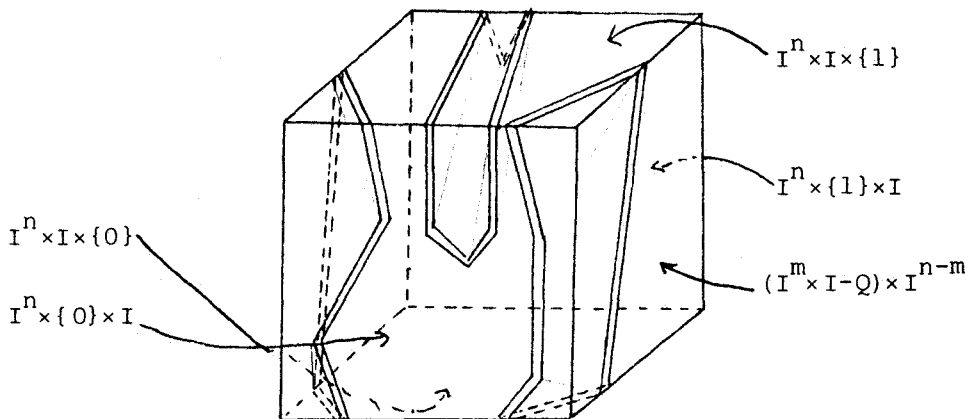
$$g'(x) = \begin{cases} g(r(x)) & \text{si } r(x) \in I^n \times \{0\} \\ f(r(x)) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

A continuación, vamos a demostrar, simultáneamente, que la anterior definición no depende del representante de  $\alpha$  escogido y que dos  $(m,k)$ -arcos relacionados definen la misma acción. Sean  $(I^n - K, g)$  y  $(I^n - K', g')$  dos representantes de  $\alpha$  e  $(I^n \times I - L, h)$  una  $(n,k)$ -homotopía entre ellos. Y  $(I^m - P, f)$ ,  $(I^m - P', f')$  dos  $(m,k)$ -arcos relacionados por  $(I^m \times I - Q, h')$ . Multipliquemos esta última homotopía por  $I^{n-m}$ .

En  $I^{n+1} \times I$  identificamos la cara  $I^n \times \{1\} \times I$  con  $I^n \times I - L$  y cada una de las caras restantes, excepto  $I^n \times \{0\} \times I$ ,  $I^n \times I \times \{0\}$  e  $I^n \times I \times \{1\}$  con  $(I^m \times I - Q) \times I^{n-m}$ . En las caras  $I^n \times I \times \{0\}$  e  $I^n \times I \times \{1\}$  efectuaremos la construcción anteriormente descrita, y con dichas caras y basándonos en la retracción natural

$$r: I^{n+1} \times I \rightarrow (\partial I^n \times \{1\} \times I) \cup (I^n \times \{1\})$$

volvemos a efectuar la misma construcción.



Lo cual nos definirá en la cara  $I^n \times \{0\} \times I$  una  $(n,k)$ -homotopía entre las caras  $I^n \times \{0\} \times \{0\}$ , que coincide con la construcción de la acción de  $(I^m - P, f)$  sobre  $(I^n - K, g)$  e  $I^n \times \{0\} \times \{1\}$  que coincide, a su vez con la construcción de la acción de  $(I^m - P', f')$  sobre  $(I^n - K', g')$ .

El comprobar que, efectivamente,  $C^*$  se trata de un morfismo, no entraña ninguna dificultad y se realiza igual que en el caso clásico.

2 Nota. - En particular, si consideramos cada representante de un

elemento del grupo  $\Pi_{m,k}(X,a)$  como un  $(m,k)$ -arco de extremos  $a$  y  $a$ , tal como vimos en la nota 1.12, tendremos que el grupo  $\Pi_{m,k}(X,a)$  actúa sobre el grupo  $\Pi_{n,k}(X,a)$  para  $m \leq n$ .

3 Teorema.— Sean  $a$  y  $b$  un par de puntos de un espacio métrico  $X$ . Si existe un  $(m,k)$ -arco  $C=(I^m-P,f)$  de extremos  $a$  y  $b$ , se tiene que, para todo  $n \geq m$ , los grupos  $\Pi_{n,k}(X,a)$  y  $\Pi_{n,k}(X,b)$  son isomorfos a través de  $C^*$ .

Demostración.—

Veamos en primer lugar que  $C^*$  es sobreyectiva. Sea  $(D',g')$  un representante de  $\alpha'$ , elemento de  $\Pi_{n,k}(X,b)$ . Consideremos el  $(m,k)$ -arco  $-C=(I^m-P,-f)$  donde  $-f:I^m-P \rightarrow X$  viene definida por

$$-f(t_1, \dots, t_m) = f(t_1, \dots, 1-t_m)$$

Es fácil ver que  $-C^*(D',g')$  es un representante de un elemento del grupo  $\Pi_{n,k}(X,a)$  que se aplica en  $(D',g')$  mediante  $C^*$ .

Veamos la inyectividad. Si  $C^*(D,g)$  y  $C^*(D',g')$  son  $(n,k)$ -homotópicas, por el teorema 1 se tendrá que  $-C^*(C^*(D,g))$  que está relacionado con  $(D,g)$  y  $-C^*(C^*(D',g'))$  que está relacionado con  $(D',g')$  son  $(n,k)$ -homotópicos, con lo cual se concluye el teorema.

4 Nota.— De todas las acciones, evidentemente, la que más interés puede tener es cuando el  $(m,k)$ -arco es un  $(1,k)$ -arco. En ellas nos centraremos principalmente.

5 Definición.— Diremos que  $X$  es  $(n,k)$ -simple si para cualesquiera par de puntos  $a$  y  $b$  y  $(1,k)$ -arcos  $C_1$  y  $C_2$  de extremos  $a$  y  $b$  se verifica que  $C_1^* = C_2^* : \Pi_{n,k}(X,a) \rightarrow \Pi_{n,k}(X,b)$ .

Vamos a tratar de ver, que si  $X$  es  $(n,k)$ -simple el grupo  $\Pi_{n,k}(X,b)$  no depende del punto base:

6 Lema.— Sea  $X$   $(1,k)$ -arcoconexo. Entonces  $X$  es  $(n,k)$ -simple si y sólo si, para algún  $a$  de  $X$ ,  $\Pi_{1,k}(X,a)$  actúa trivialmente sobre  $\Pi_{n,k}(X,a)$ .

Demostración.—

La condición necesaria es trivial. Veamos la suficiente. Sean  $b$  y  $c$  dos puntos de  $X$ ,  $C_1$  y  $C_2$  dos  $(1,k)$ -arcos de extremos  $b$  y  $c$ . Sea  $C$  un arco entre  $a$  y  $b$ . Entonces el  $(1,k)$ -arco que resulta de componer  $C$ ,  $C_1$ ,  $-C_2$  y  $-C$  al que denotaremos  $CC_1(-C_2)(-C)$  es un representante de un elemento del grupo  $\Pi_{1,k}(X,a)$ , que actúa trivialmente sobre  $\Pi_{n,k}(X,a)$ , se tendrá que  $CC_1(-C_2)(-C)^*=1$  de lo cual se deduce que  $C_1^*=C_2^*$ .

7 Teorema.— Si  $X$   $(1,k)$ -arcoconexo y  $(n,k)$ -simple y  $D$  una  $(n,k)$ -bola, entonces cualquier aplicación  $up$   $f:D \rightarrow X$  tal que  $f$  restringida al borde de  $D$  es constante, determina un único elemento en  $\Pi_{n,k}(X,a)$  para cualquier  $a$  de  $X$ .

Demostración.—

Dado  $b=f(\partial D)$ , consideramos un  $(1,k)$ -arco de extremos  $b$  y  $a$ , entonces  $f:(D,\partial D) \rightarrow (X,b)$  determina un elemento de  $\Pi_{n,k}(X,b)$  y por el teorema 1 de  $\Pi_{n,k}(X,a)$ . Por ser  $X$   $(n,k)$ -simple este elemento no depende de la elección del  $(1,k)$ -arco entre  $b$  y  $a$ .

Veamos, a continuación, que se puede llevar a cabo una construcción muy similar a la efectuada en el teorema 1, pero considerando el caso relativo:

8 Teorema.— Dados  $a$  y  $b$  puntos de un cerrado  $A$  en  $X$  espacio métrico, para  $m \leq n-1$ . todo  $(m,k)$ -arco  $C=(I^m-P,f)$  en  $A$  de extremos  $a$  y  $b$  induce de forma natural un morfismo

$$C^*: \Pi_{n,k}(X,A,a) \longrightarrow \Pi_{n,k}(X,A,b).$$

Además se verifica, que si  $C_1$  y  $C_2$  son dos  $(m,k)$ -arcos que están relacionados entonces  $C_1^*=C_2^*$ .

Demostración.-

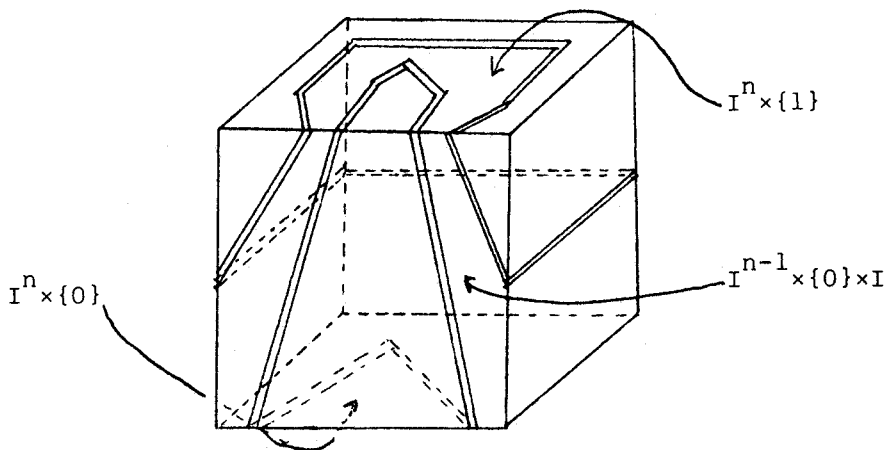
Sea  $(M, g)$  un representante de  $\alpha$  elemento de  $\Pi_{n,k}(X, A, a)$ .

Consideremos

$$r: I^{n-1} \times I \rightarrow (\partial I^{n-1} \times I) \cup (I^{n-1} \times \{0\})$$

la retracción natural  $p_1$  que transforma  $I^{n-1} \times \{1\}$  homeomórficamente sobre  $(\partial I^{n-1} \times I) \cup (I^{n-1} \times \{0\})$ .

El  $(m, k)$ -arco  $(I^m - P, f)$  lo multiplicamos por  $I^{n-m}$  y nos dará una  $(n, k)$ -bola que identificamos con cada una de las caras  $I^{n+1}$  excepto  $I^n \times \{0\}$ ,  $I^n \times \{1\}$  e  $I^{n-1} \times \{0\} \times I$ .  $M$  lo identificamos con  $I^n \times \{0\}$  de forma que  $I^{n-1}$  (la cara de  $I^n$  sobre la que la aplicación no es constante) caiga sobre la cara común  $I^n \times \{0\}$  e  $I^{n-1} \times \{0\} \times I$ . A continuación, utilizando  $r$  igual que hacíamos en el caso absoluto. Sea  $P^{\wedge}$  el resultado de multiplicar por  $I^{n-m}$  e identificar a cada una de las caras anteriormente mencionadas, llamaremos  $L$  al complementario de  $P^{\wedge}$  en dichas caras.



Definimos

$$F^{\wedge}: r^{-1}(M \cup (\partial I^{n-1} \times I) \cap L) = K \rightarrow A \text{ por}$$

$$F^{\wedge}(x) = \begin{cases} g(r(x)) & \text{si } r(x) \in I^n \times \{0\} \\ f(r(x)) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y  $F^{\wedge}: r^{-1}(M \cup L \cup K) \rightarrow X$  por

$$F^{\wedge}(x) = \begin{cases} g(r^{\wedge}(x)) & \text{si } r^{\wedge}(x) \in M \\ f(r^{\wedge}(x)) & \text{si } r^{\wedge}(x) \in L \\ F^{\wedge}(r^{\wedge}(x)) & \text{si } r^{\wedge}(x) \in K \end{cases}$$

Así  $C$  aplicado a  $\alpha$  estará representado por  $(r^{-1}(M \cup L \cup K) \cap I^n \times \{1\}, F^{\wedge})$  y se prueba, igual que se hizo en el caso absoluto, que esta definición

no depende del representante escogido.

9 Nota.- En el caso relativo, también se puede conseguir el resultado equivalente al enunciado del teorema 3, siendo su demostración muy similar.

10 Teorema.- Sea  $(X, A, a)$  un par siendo  $A$  un subconjunto cerrado de  $X$ . El grupo  $\Pi_{1,k}(A, a)$  opera en la sucesión exacta de homotopía  $up$  de la pareja  $(X, A)$ .

Demostración.-

Lo único que habrá que comprobar, es que la acción conmuta con el borde. Ahora bien, obsérvese que si  $(M, g)$  es un representante de  $\alpha$  elemento de  $\Pi_{n,k}(X, A, a)$  e  $C=(I-P, f)$  es un representante de un elemento del grupo  $\Pi_{1,k}(A, a)$ , entonces  $C^*(M, g)$  está representado por  $(r^{-1}(M \cup L \cup K) \cap I^{n-1} \times \{1\}, F^-)$  que coincide con  $(I^{n-1} \cap K, F^- | I^{n-1} \cap K)$  que es un representante de  $C^*(\partial\alpha)$ .

11 Teorema.- Sean  $f:(X, A, a) \rightarrow (Y, B, b)$  y  $g:(X, A, a) \rightarrow (Y, B, b')$  dos  $up$ -aplicaciones  $up$ -homotópicas. Entonces existe un camino  $\omega$  en  $B$  de  $b'$  a  $b$  tal que:

$$f^* = \omega^* g^* : \Pi_{n,k}(X, A, a) \rightarrow \Pi_{n,k}(Y, B, b) \quad n \geq 2.$$

La demostración es la misma que en el caso clásico.

IV.3 MODULOS CRUZADOS

Al igual que ocurre con la homotopía clásica, la acción de  $\Pi_{1,k}(A)$  sobre  $\Pi_{2,k}(X,A)$  nos proporciona el siguiente:

1 Teorema.-  $\Pi_{2,k}(X,A)$  es un  $(\Pi_{1,k}(A), \partial)$ -módulo cruzado. Esto es: admite a  $\Pi_{1,k}(A)$  como grupo de operadores y se tiene una operación

$$\partial: \Pi_{2,k}(X,A) \rightarrow \Pi_{1,k}(A)$$

tal que:

- i)  $\partial(\xi\alpha) = \xi(\partial\alpha)\xi^{-1}$
- ii)  $(\partial\alpha)\beta = \alpha + \beta - \alpha$ .

Donde  $\alpha, \beta \in \Pi_{2,k}(X,A)$  y  $\xi \in \Pi_{1,k}(A)$ .

Demostración.-

La demostración de i) se deduce fácilmente de la demostración del teorema 2.8, sin más que observar que en la construcción de  $\xi\alpha$ , el borde de dicho elemento coincide con la multiplicación  $\xi(\partial\alpha)\xi^{-1}$ .

Veamos ii). Sean  $\alpha, \beta \in \Pi_{2,k}(X,A)$  representados por  $(D, f)$  y  $(D', g)$  respectivamente. Sean  $T = I \cap D$ ,  $T' = I \cap D'$  las 1-caras que representan a cada uno de los bordes; por  $f'$  y  $g'$  representaremos las restricciones de  $f$  y de  $g$  a  $T$  y  $T'$ .

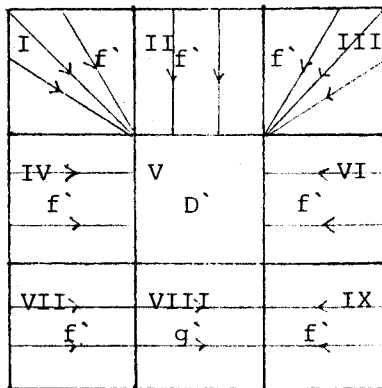


figura 1

Un representante de  $(\partial\alpha)\beta$  será el descrito de la siguiente

forma: Se divide  $I^2$  en nueve cuadrados, tal como aparece en la figura 1;  $D$  lo concentramos en el cuadrado representado por V; multiplicamos  $T$  por  $I$  y lo concentramos en los cuadrados II, IV, VI, VII y IX, de forma que actúe tal como indican las flechas en la figura 1. Efectuamos la misma operación con  $T$  en VIII y, por último, hacemos un abanico con  $T$  desde los vértices de I y III que son comunes con V. Obsérvese que después de realizada toda la construcción, mandamos todas las caras, excepto  $I \times \{0\}$  en el punto base de  $(X,A)$ , y esta última cara en  $A$ , luego, nuestra construcción nos dará un representante  $S$  de un elemento de  $\Pi_{2,k}(X,A)$  que, en vista de la construcción realizada en el teorema 2.8 es  $(\partial\alpha)\beta$ .

Sea ahora  $\alpha+\beta-\alpha$  representado por  $D$  concentrado en  $[0,1/3] \times I$ ,  $D$  en  $[1/3,2/3] \times I$  y  $D^{-1}$  en  $[2/3,1] \times I$ , llamemos  $B$  al representante que resulta de dichas concentraciones.

Queremos probar que los dos elementos descrito son  $(2,k)$ -homotópicos; para ello, probaremos que si consideramos el elemento  $(D'', f'')$  de  $\Pi_{2,k}(X)$  representado por la resultante de concentrar  $B$  en  $I \times [0,1/2]$  y  $S$  en  $I \times [1/2,1]$ , de forma que, identificamos, la última cara  $I \times \{0\}$  de  $B$  con  $I \times \{1/2\}$  tal como se indica en la figura 2; veamos que el elemento así construido representa al neutro de  $\Pi_{2,k}(X)$ .

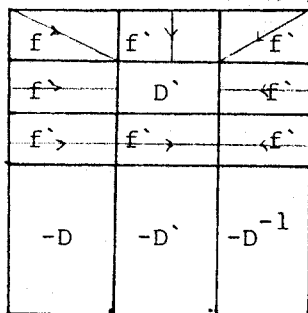


figura 2

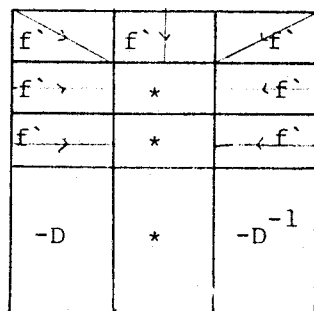


figura 3

Es evidente que si tomamos un elemento  $(D,f)$  que sea como  $D$  en  $I \times [2/3,1]$ , como  $T \times I$  en  $I \times [1/3,2/3]$  y como  $-D$  en  $I \times [0,1/3]$ , dicho  $(D,f)$  representará al elemento nulo de  $\Pi_{2,k}(X)$ , así tendremos una homotopía que relaciona  $(D'', f'')$  con  $(D,f)$  que es igual a  $(D'', f'')$  excepto en los lugares que este se comportaba como  $(D,f)$ , en los cuales será la aplicación constante en el punto base de  $(X,A)$ , pero, es fácil comprobar, que este último es un representante del elemento

neutro de  $\Pi_{2,k}(X)$  de lo cual se sigue el teorema.

2 Nota.- Del teorema anterior se deducen los corolarios clásicos que se tienen del hecho de ser un módulo cruzado, para lo cual se puede consultar [37], entre ellos explicitamos:

3 Corolario.-  $j^*\Pi_{2,k}(X)$  está contenido en el centro de  $\Pi_{2,k}(X,A)$ .

4 Corolario.-  $i^*\Pi_{1,k}(A)$  actúa como grupo de operadores en  $j^*\Pi_{2,k}(X)$ .

#### IV.4 PRODUCTO DE WHITEHEAD

Definimos aquí una operación equivalente al producto de Whitehead.

La mayoría de los resultados que le siguen no difieren, ni en enunciado ni en demostración de los que se pueden encontrar en cualquier libro de teoría de homotopía (ver por ejemplo [36]).

1 Teorema.- Existe una operación entre  $\Pi_{p+1,k}(X)$  y  $\Pi_{q+1,k}(X)$  que llamaremos producto de Whitehead, cuyo resultado es un elemento de  $\Pi_{p+q+1,k}(X)$ . Al producto de Whitehead entre  $\alpha \in \Pi_{p+1,k}(X)$  y  $\beta \in \Pi_{q+1,k}(X)$  lo denotaremos por  $[\alpha, \beta]$ .

Demostración.-

Sean  $(D, f)$  y  $(D', g)$  los representantes de los  $\alpha$  y  $\beta$  del enunciado, siendo  $D = (I^{p+1}, M)$  y  $D' = (I^{q+1}, N)$ . Consideremos la  $(p+q+1)$ -esfera que es el borde de  $I^{p+1} \times I^{q+1}$  (i.e.:  $I^{p+1} \times \partial I^{q+1} \cup \partial I^{p+1} \times I^{q+1}$ ) y en ella  $M \times \partial I^{q+1} \cup \partial I^{p+1} \times N$  con la inmersión



natural, denotemos por  $S$  a la  $(p+q+1, k)$ -esfera  $(\partial I^{p+1} \times I^{q+1}, K)$  y llamemos  $c$  a su punto base. Definimos  $f^: (S, c) \rightarrow (X, a)$  por

$$f^ (x, y) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I^{p+1}, y \in \partial I^{q+1} \\ g(y) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Así  $(S, f^)$  representa un elemento de  $\Pi_{p+q+1, k}(X)$  y es fácil comprobar que no depende de la elección de los representantes escogidos.

2 Proposición.- Si  $\psi: X \rightarrow Y$  es una aplicación up,  $\alpha \in \Pi_{p+1, k}(X)$   $\beta \in \Pi_{q+1, k}(X)$  entonces se verifica que

$$\psi^*([\alpha, \beta]) = [\psi^*(\alpha), \psi^*(\beta)] \in \Pi_{p+q+1, k}(Y).$$

3 Proposición.- Si  $\alpha, \beta \in \Pi_{1, k}(X)$ , entonces

$$[\alpha, \beta] = \alpha \beta \alpha^{-1} \beta^{-1} \in \Pi_{1, k}(X).$$

Las demostraciones de las dos proposiciones anteriores son iguales a las que se realizaban en el caso clásico. Veamos, a continuación, un resultado que nos relaciona el producto de Whitehead con la acción vista en el apartado 2.

4 Proposición.- Si  $\alpha \in \Pi_{1, k}(X)$   $\beta \in \Pi_{p, k}(X)$  se verifica que  $[\alpha, \beta] = \alpha^*(\beta) \cdot \beta$ .

Demostración.-

Se sigue fácilmente de las construcciones efectuadas en las demostraciones de los teoremas 2.1 y 4.1.

## CAPITULO V

### ALGUNOS CALCULOS

Naturalmente no tendría sentido el desarrollo de la teoría aquí presentada, si después fuera imposible el calcular los invariantes estudiados en algunos casos concretos. En el presente capítulo nos proponemos llevar a cabo dicha labor; demostraremos algunos teoremas que nos permitirán el cálculo de diversos grupos de homotopía  $u_p$ . Así como efectuaremos cálculos de grupos en algunos casos especiales.

#### V.1 TEOREMA DE SEIFERT-VAN KAMPEN

Para los grupos  $\Pi_{1,2}$  existe un teorema de Seifert-Van Kampen con hipótesis muy similares a las del caso clásico; aunque después (V.2) conseguiremos una caracterización de dicho grupo en función del grupo fundamental de Hurewicz de un espacio construido a partir de  $X$ , el teorema de Seifert-Van Kampen es fundamental en si mismo, dadas las consecuencias que se deducen de su existencia.

1 Nota.- Sea  $X=U_1 \cup U_2$  tales que  $U_1, U_2$  y  $U_1 \cap U_2$  son abiertos arcoconexos no vacíos, de modo que exigimos que  $U_1 \cap U_2$  sea compacto (con lo cual aseguramos que cada uno de los finales de  $X$  se encuentre en  $U_1$  o en  $U_2$  pero no en los dos). Denotaremos a  $U_1 \cap U_2$  por  $U_0$ . Sea a  $U_0$  el punto base (ya que el grupo es independiente de la elección de este por el teorema IV.2.3), se trata de probar que el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 G_0 = \Pi_{1,2}(U_0, a) & \xrightarrow{\theta_2} & G_2 = \Pi_{1,2}(U_2, a) \\
 \theta_1 \downarrow & \searrow \omega_0 & \downarrow \omega_2 \\
 G_1 = \Pi_{1,2}(U_1, a) & \xrightarrow{\omega_1} & G = \Pi_{1,2}(X, a)
 \end{array}$$

Verifica que, además de ser conmutativo, el diagrama exterior es cocartesiano. Para ello se utiliza el siguiente:

2 Lema.- En las condiciones de la nota 1 los grupos  $\omega_i G_i$  generan  $G$ , para  $i=0,1,2$ .

Demostración.-

La demostración es en todo igual al caso clásico, ya que, en realidad, estamos trabajando con compactos.

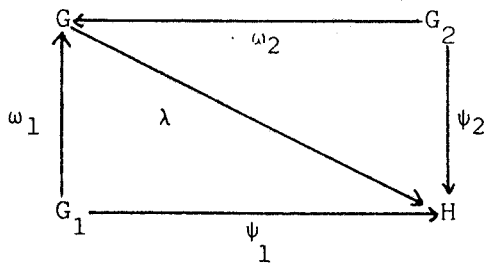
3 Teorema.- (de Seifert-Van Kampen) en las condiciones de la nota 1, el diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 G_0 = \Pi_{1,2}(U_0, a) & \xrightarrow{\theta_2} & G_2 = \Pi_{1,2}(U_2, a) \\
 \theta_1 \downarrow & \searrow \omega_0 & \downarrow \omega_2 \\
 G_1 = \Pi_{1,2}(U_1, a) & \xrightarrow{\omega_1} & G = \Pi_{1,2}(X, a)
 \end{array}$$

es cocartesiano. Es decir, dado el diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 G_0 & \xrightarrow{\theta_0} & G_2 \\
 \theta_1 \downarrow & & \downarrow \psi_2 \\
 G_1 & \xrightarrow{\psi_1} & H
 \end{array}$$

existe un único morfismo  $\lambda: G \rightarrow H$  tal que el siguiente diagrama es conmutativo:



Demostración.-

La unicidad de  $\lambda$  se deduce trivialmente de su existencia.

Definamos  $\lambda: G \rightarrow H$  como sigue: dado  $\alpha \in G$ , por el lema anterior, se tiene que  $\alpha = \omega_{i_1}(\rho_1) \dots \omega_{i_n}(\rho_n)$  con  $\rho_j \in G_{i_j}$  siendo  $i_j \in \{0, 1, 2\}$ , tomamos

$$\lambda(\alpha) = \psi_{i_1}(\rho_1) \dots \psi_{i_n}(\rho_n);$$

lo único que habrá que probar es que está bien definida. Para ello bastará con demostrar que si  $\omega_{i_1}(\rho_1) \dots \omega_{i_n}(\rho_n) = 1$  se tiene que  $\psi_{i_1}(\rho_1) \dots \psi_{i_n}(\rho_n) = 1$ . Consideramos representantes  $(I, f_i)$  de  $\rho_i$  y sea  $(I, f)$  un representante del producto, que es  $(1, 2)$ -homotópico mediante  $H: I^2 - \{x_1, \dots, x_n\}$  a la aplicación constante.

Sea  $\epsilon$  el número de Lebesgue asociado al recubrimiento abierto  $\{H^{-1}(U_0), H^{-1}(U_1), H^{-1}(U_2)\}$ ; entonces, escogemos un refinamiento

$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_n = 1$$

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

de tal modo que el diámetro de  $R_{i,j} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{i-1}, t_i]$  sea menor que  $\epsilon$  y además todo  $x_k$  esté en el interior de algún  $R_{i,j}$ , evitándose que se encuentren dos en el mismo.

El resto de la demostración, no difiere, en absoluto de la demostración del teorema equivalente para el grupo de Hurewicz de orden 1. Para dicha demostración, así como para el enunciado de las principales consecuencias vease, por ejemplo [20].

## V.2 ESTRUCTURA DEL FUNTOR $\Pi_{n,m+1}$

Vamos a dar, en este apartado, un teorema, que nos permitirá calcular el grupo  $\Pi_{n,m}(X)$  basándonos en el grupo fundamental de orden  $n$  de un espacio que obtendremos a partir de  $X$ .

1 Nota.— Para obtener el teorema de cálculo al que nos acabamos de referir, nos es necesario dar algunas condiciones sobre el espacio  $X$ . A continuación detallaremos dichas condiciones.  $X$  ha de ser un poliedro euclídeo acotado tal que por cada final propio  $\alpha$  existe un  $\ast$ -entorno abierto de  $\alpha$  al que llamaremos  $U_\alpha$  (ver definición II.4.1) cumpliendo las siguientes propiedades:

1)  $\text{Fr}(U_\alpha)$  es un poliedro compacto, conexo y localmente arcoconexo.

2) La familia  $\{U_\alpha : \alpha \in F_p(X)\}$  es localmente finita.

3) Existe un pl-isomorfismo  $\psi_\alpha : \bar{U}_\alpha \rightarrow \text{Fr}(U_\alpha) \times J$  tal que  $\text{Fr}(U_\alpha) = \text{Fr}(U_\alpha) \times \{0\}$  y  $\psi_\alpha^{-1}$  es up-aplicación

4)  $U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset$  para cada par de finales propios distintos de  $X$ .

Dadas las condiciones anteriores, construimos  $\bar{X}$  a partir de  $X$  como sigue:

Sustituimos cada  $U_\alpha$  por  $\text{Fr}(U_\alpha) \times I$  y en  $\text{Fr}(U_\alpha) \times \{1\}$  efectuamos el cociente dado por la relación. "Por cada  $(x,1) \in \text{Fr}(U_\alpha) \times \{1\}$  definimos  $f_{x,\alpha} : J \rightarrow X$  como la aplicación que a cada  $T$  de  $J$  le hace corresponder  $\psi_\alpha^{-1}(x,t)$ . Entonces  $(x,1)$  e  $(y,1)$  de  $\text{Fr}(U_\alpha) \times \{1\}$  decimos que están relacionados, si existe un camino que los une en  $\text{Fr}(U_\alpha) \times \{1\}$  tal que para todo punto  $(z,1)$  de dicho camino se tenga que

$$\lim d(f_{x,\alpha}(t), f_{z,\alpha}(t)) = 0.$$

Resumiendo:  $\bar{X}$  se obtiene a partir de  $X$  sustituyendo  $U_\alpha$  por  $\text{Fr}(U_\alpha) \times I$  e identificando en  $\text{Fr}(U_\alpha) \times \{1\}$  los puntos dados en la relación anterior. Obsérvese que  $X$  puede considerarse como un subespacio topológico de  $\bar{X}$ .

Al conjunto que se obtiene de  $\text{Fr}(U_\alpha) \times \{1\}$  al efectuar la identificación mencionada lo denotaremos por  $F_\alpha$ .

2 Definición.- En las condiciones de la nota anterior, un punto  $x$  de  $F_\alpha$  en  $\bar{X}$  se dice que es  $n$ -LC si para todo entorno  $U$  de  $x$  en  $\bar{X}$  existe otro entorno  $V$  tal que toda aplicación de una  $n$ -esfera en  $V \cap X$  se puede extender a la  $(n+1)$ -bola en  $U \cap X$ .

3 Nota.- Obsérvese que la definición anterior no es más que una ligera modificación que la clásica de final  $n$ -LC (ver por ejemplo [27]).

4 Ejemplos.-

1) Sea  $X$  el cuadrado unidad abierto, evidentemente  $\bar{X}$  coincide con el cuadrado cerrado y todos los puntos del único final propio son 1-LC.

2) Si consideramos, ahora, como  $X$  el complemento de un punto interior en el cuadrado unidad cerrado;  $\bar{X}$  coincidirá, de nuevo, con el cuadrado cerrado, sin embargo el único punto del final no será en esta ocasión 1-LC, ya que para todo entorno de dicho punto, existe un lazo en él que no se anula en  $X$ .

5 Definición.- Dado  $X$  verificando las condiciones expuestas en la nota 1, llamaremos  $n$ -realizador de  $X$  y lo denotaremos por  $X^*$  al subespacio de  $\bar{X}$  formado por todos los puntos de  $\bar{X}$  excepto aquellos que están en  $F_\alpha$  para algún final  $\alpha$  y sean 1-LC, con lo cual  $X$  sigue estando incluido en  $X^*$ . Obsérvese que la construcción de  $X^*$  depende del  $n$  particular que estemos estudiando.

Así en los ejemplos anteriores, en el primer caso  $X^*$  coincide con  $X$  y en el segundo caso con  $\bar{X}$ .

6 Lema.- Existe un morfismo natural  $\theta: \Pi_n(X) \longrightarrow \Pi_{n,m}(X)$ . Que es epiyectivo si  $m=n+1$ .

La demostración es trivial.

Vamos a tratar de establecer el núcleo de la aplicación  $\theta$  en el caso  $m=n+1$ ; lo cual nos permitirá conocer dichos grupos.

7 Teorema.- Si  $X$  es tal que verifica las condiciones expuesta en la nota 1 y, además, para cada final  $\alpha$  y para cada punto  $x$  de  $F_\alpha$  se tiene que los puntos de  $\text{Fr}(U_\alpha) \times \{1\}$ , cuya clase es  $x$ , es un subpoliedro de  $\text{Fr}(U_\alpha)$ , entonces los núcleos de  $\theta$  y de  $i^*: \Pi_n(X) \rightarrow \Pi_n(X^*)$  coinciden.

Demostración.-

Sea  $f: I^n \rightarrow X$  un representante de  $n \in \ker \theta$ . Ello quiere decir que existe  $h: I^{n+1} - \{x_1, \dots, x_r\} \rightarrow X$   $(n, n+1)$ -homotopía entre  $f$  y la aplicación constante. Veamos, en primer lugar, que  $h$  puede extenderse a  $X$ :

Probaremos que si  $x_i \in \{x_1, \dots, x_r\} = M$ , cualesquiera dos rayos  $\alpha, \alpha': J \rightarrow I^{n+1} - M$  tales que como redes convergen al mismo  $x_i$  verifican:

$$\lim d(jh\alpha(t), jh\alpha'(t)) = 0$$

siendo  $j$  la inmersión de  $X$  en  $X$ . De no ser así, denotemos por  $(x_\alpha, 1)$  y  $(x_{\alpha'}, 1)$  a los puntos de  $X$  a los que convergen  $(J, jh\alpha)$  y  $(J, jh\alpha')$  respectivamente. Dichos puntos estarán en un mismo  $F_\beta$  para algún final propio  $\beta$  de  $X$  y, por continuidad, debe existir un camino en  $F_\beta$  de  $(x_\alpha, 1)$  hasta  $(x_{\alpha'}, 1)$  formado por los puntos límites de  $(J, jh\gamma)$  para algún  $\gamma: J \rightarrow I^{n+1} - M$  que como red converge a  $x_i$ . Así lo único que falta por demostrar es que

$$\lim d(f_{x_\alpha, \beta}(t), f_{x_{\alpha'}, \beta}(t)) = 0.$$

Pero por la continuidad uniforme, dicho límite es igual a  $\lim d(\alpha(t), \alpha'(t))$  que trivialmente vale cero. Por lo tanto  $h$  puede extenderse a  $G: I^{n+1} \rightarrow X$ .

Supongamos que exista  $x_i$  en  $M$  tal que  $G(x_i)$  no pertenece a  $X^*$ . Esto quiere decir que  $G(x_i)$  es un punto de  $F_\alpha$  para algún final  $\alpha$ , que es  $n$ -LC. Sea  $U$  un entorno de  $G(x_i)$  que no contenga a ninguna de las imágenes de los restantes puntos de  $M$  y  $V$  el entorno cuya existencia nos asegura la definición 2. Por la continuidad de  $G$ , existirá un  $\delta$  real positivo, tal que si  $|x - x_i| < \delta$  se verifica que  $G(x) \in V$ . Consideremos una  $n$ -esfera de radio menor que  $\delta$  y centrada en  $x_i$ . La restricción de  $G$  a esta  $n$ -esfera determina una aplicación, que, por la

definición de  $n$ -LC, se puede extender a la bola que tiene por borde a dicha  $n$ -esfera, estando su imagen en  $X$ . Luego así lograremos definir  $G: I^{n+1} \rightarrow X^*$  con lo cual se concluye que  $\eta \in \ker i^*$ .

Probemos ahora que si  $\eta$  está en el  $\ker i^*$  entonces se tiene que  $\eta \in \ker \theta$ . Vamos a tratar de dar una demostración similar a la del teorema 2.3 de [15].

Podemos considerar que  $f: \partial I^{n+1} \rightarrow X$  es un representante de  $\eta$  que se puede extender a  $\psi: I^{n+1} \rightarrow X^*$ . Veamos que se puede conseguir que dicha  $\psi$  sea pl-aplicación. De las condiciones 2 y 4, se sigue que  $X^*-X$  es localmente finito en  $X^*$  y por ser  $\psi(I^{n+1})$  compacto se tiene que  $\psi(I^{n+1}) \cap (X^*-X)$  es finito, sin pérdida de generalidad podemos suponer que se reduce a un único punto  $x$  de  $F_\alpha$  para algún final propio  $\alpha$  de  $X$ , sea  $U_\alpha$  el  $*$ -entorno abierto asociado a dicho final. Llamemos  $P_1$  al subpoliedro de  $\text{Fr}(U_\alpha) \times \{1\}$  formado por los puntos de la clase que determinan a  $x$ .

Obsérvese que, teniendo en cuenta la construcción de  $X^*$ , estamos ante la siguiente situación: tenemos un cilindro sobre un entorno regular  $W$  de un poliedro  $P_0$  (la copia de  $P_1$  en  $\text{Fr}(U_\alpha) \times \{0\}$ ), de tal forma que, en la tapa superior, hemos identificado a la copia de dicho poliedro (a  $P_1$ ) con un único punto  $x$ , al espacio resultante le llamaremos  $M$  y a la tapa superior  $M_1$ . En dicho  $M_1$  eliminamos todos los puntos excepto  $x$ ; por último, denotaremos por  $Y$  al espacio que resulta de  $M$  después de esta eliminación. Teniendo en cuenta que  $P_0 = P_1$  es un poliedro, el cociente  $M$  también lo será. Sin embargo  $Y$  no tiene porqué serlo.

Dado un  $\epsilon$ -entorno  $N = (N \cap W) \times [0, \epsilon]$  de  $P_0$  en  $M$ , sea  $N_\epsilon \subseteq N$  un  $\epsilon$ -entorno de  $P_0$ . Entonces, si llamamos  $A$  a la clausura de  $W - N_\epsilon$ , se tendrá que la clausura de  $W \times [0, \epsilon] - N$  (a la que denotaremos por  $L$ ) es un entorno regular de  $A$  en  $W \times I$  ( $L$  resultará ser de la forma  $(L \cap W) \times [0, \epsilon]$ ).

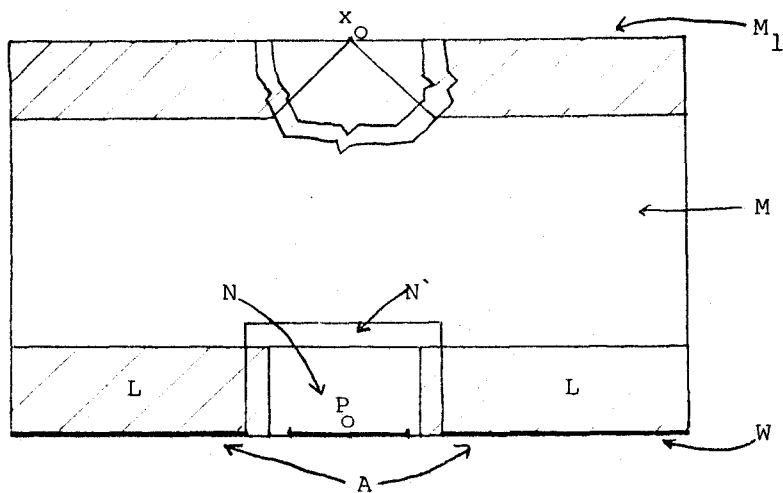
Ahora bien, el link de  $x$  en  $M$  es pl-isomorfo mediante  $\Psi$  a la clausura de  $\partial N - W$  y se verifica, además, que

$$\Psi: (L \cap W \cap N) \times [0, \epsilon] \longrightarrow \text{lk}(x; M)$$

es pl-collar. Entonces, utilizando el pl-collar y la estructura canónica de  $(\text{st}(x; M) - M_1) \cup \{x\}$ , este último subespacio se puede retraer a una copia de  $\text{st}(x; M)$  en  $Y$  dejando fijo al punto  $x$ .

Además esta retracción se puede extender a  $Y$  por  $\Psi$  fuera de





$st(x;M)-M_1$  y se obtiene una retracción de  $Y$  en un poliedro compacto. dicha retracción compuesta con  $\psi$ , nos da una nueva homotopía cuya imagen está en un compacto, por lo cual se puede considerar que es una pl-aplicación. El resto de la demostración sigue igual a la del referido teorema 2.3 de [15].

Basándonos en el teorema anterior demostraremos el:

8 Teorema.— Sea  $X$  en las condiciones del teorema anterior. Entonces, se verifica que los grupos  $\Pi_{1,2}(X)$  y  $\Pi_1(X^*)$  son isomorfos.

Demostración.—

El teorema anterior, nos garantiza que el morfismo natural

$$\Psi: \Pi_{1,2}(X) \longrightarrow \Pi_1(X^*)$$

está bien definido y es inyectivo. Resta por comprobar la sobreyectividad.

Sea  $f: S^1 \rightarrow X$  un representante de  $\eta$  elemento del grupo  $\Pi_1(X^*)$ . Utilizando las mismas técnicas que en la demostración del teorema anterior, podemos suponer que existe un poliedro  $P$  en  $X^*$ , siendo los puntos de  $X^*-X$  que estén en  $P$  vértices de este, y tal que la imagen de  $S^1$  mediante  $f$  cae en  $P$ . Además podemos conseguir, basándonos en el teorema de aproximación simplicial (ver teorema I.4.4), que la imagen de  $S^1$  esté en el 1-esqueleto de  $P$ .

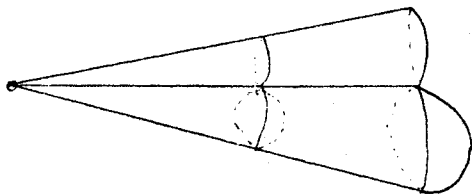
Al ser  $Fr(U_\alpha)$  arcoconexo, cada uno de sus símlices de

dimensión cero es cara de alguno de dimensión uno. Por lo tanto, en  $\text{Fr}(U_\alpha) \times [0,1]$  cada uno de los símplices de dimensión uno es cara de alguno de dimensión dos. Como  $P_0$  es arcoconexo, su entorno regular en  $\text{Fr}(U_\alpha) \times \{0\}$  también lo es. Luego  $N'$  también es arcoconexo, de lo cual se deduce la arcoconexión de  $\text{lk}(x;P)$ , por lo tanto cada uno de sus símplices de dimensión cero es cara de alguno de dimensión uno, luego si tenemos un camino en  $\text{st}(x;P)$  que empieza y termina en vértices de  $\text{lk}(x;P)$ , existirá otro homotópico a él, también contenido en  $\text{lk}(x;P)$  que no pasa por  $x$ . Por tanto, podemos encontrar una función  $g: S^1 \rightarrow X$  homotópica a  $f$  en  $X^*$ . De lo que se deduce el teorema.

### 9 Ejemplos.-

1) El teorema anterior no se verifica para los grupos  $\Pi_{n,n+1}$  siendo  $n$  mayor que uno. Veamoslo en el caso  $n=2$ :

Sea  $Y$  el wedge de una esfera y una circunferencia y  $Z$  el cono sobre  $Y$  excepto el vértice, por último,  $X$  sera igual a  $Z$  unión con el disco que tiene por borde la circunferencia considerada.



Evidentemente  $X^*$  coincide con la unión de  $X$  y el vértice del cono y su grupo de homotopía de orden dos tiene un elemento no nulo, representado por la aplicación que manda  $S^2$  homeomorficamente sobre el cono de la circunferencia unión con el disco. Mientras, que por el teorema 7, es fácil comprobar que el núcleo de  $\Psi: \Pi_2(X) \rightarrow \Pi_{2,3}(X)$ , es todo el grupo  $\Pi_2(X)$ , luego  $\Pi_{2,3}(X)$  es nulo.

2) Los dos últimos teoremas nos permiten el cálculo de los grupos  $\Pi_{n,n+1}(X)$  para numerosos espacios  $X$ . Veamos, efectivamente, que dichos grupos están intimamente relacionados con la métrica del espacio:

Sea  $X$  igual al cilindro  $S^1 \times J$  con la métrica producto, se

tendrá que  $X^*$  coincide con  $X$  (en todos los casos), luego, en particular, el grupo  $\Pi_{1,2}(X)$  será isomorfo a  $Z$ . Sin embargo, si denotamos por  $Y$  al subespacio obtenido después de quitar un punto interior al disco  $B^2$  (espacio que es hoemorfo al  $X$  anterior). Al calcular  $Y^*$  en el caso  $n=1$ , nos resultará el disco  $B^2$ , de lo que se deduce que el grupo  $\Pi_{1,2}(Y)$  es nulo.

### V.3 EL FUNTOR $\Pi_{n,1}$

Basándonos en los resultados obtenidos en apartados anteriores, vamos tratar de profundizar en el conocimiento del funtor  $\Pi_{n,1}$ .

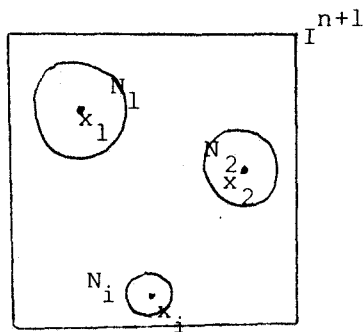
1 Teorema.- Existe un morfismo  $\Psi: \Pi_{n,n+1}(X) \rightarrow \Pi_{n,1}(X)$ .

Demostración.-

El morfismo se define de forma natural, esto es: sea  $(\partial I^{n+1}, f)$  un representante de  $\alpha$  elemento de  $\Pi_{n,n+1}(X)$ , que además será un representante de  $\Psi(\alpha)$ . Para probar que está bien definida dicha aplicación, basta con suponer que  $(\partial I^{n+1}, f)$  representa al elemento neutro de  $\Pi_{n,n+1}(X)$  y probar que también representa al elemento nulo de  $\Pi_{n,1}(X)$ . Así, sea  $(\partial I^{n+1}, f)$   $(n,n+1)$ -homotópica a la aplicación constante, por lo tanto  $f$  se puede extender a  $I^{n+1}-M$  siendo  $M = \{x_1, \dots, x_r\}$  un subconjunto del interior de  $I^{n+1}$ ; llamemos  $\bar{f}$  a dicha extensión.

Consideremos un entorno regular  $N_i$  alrededor de cada punto  $x_i$  de  $M$ , vamos a probar que  $f$  se puede extender a  $I^{n+1} - \bigcup_{i=1, \dots, r} \partial N_i$ .

Se tiene que  $I^{n+1} - \bigcup_{i=1, \dots, r} N_i$  es homeomorfo mediante  $\Psi$  a  $I^{n+1}-M$  dicho homeomorfismo, por e) de la proposición I.2.2 es una up-aplicación (obsérvese que no es up-homeomorfismo ya que el inverso no es up-aplicación). Como cada  $N_i$  es una  $(n+1)$ -bola, consideremos la



retracción de  $\text{int}N_i$  sobre uno de sus radios y la aplicación que lleva cada uno de estos radios en rayos que convergen al  $x_i$  correspondiente; sea  $\psi$  la composición de dichas aplicaciones. Definimos

$$\theta: I^{n+1} - \bigcup_{i=1, \dots, r} N_i \rightarrow I^{n+1} - M$$

por

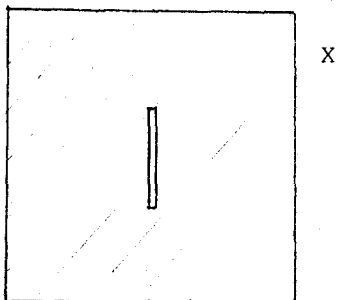
$$\theta(x) = \begin{cases} \psi(x) & \text{si } x \in I^{n+1} - \bigcup_{i=1, \dots, r} N_i \\ \psi^{\sim}(x) & \text{si } x \in \bigcup_{i=1, \dots, r} \text{int}N_i \end{cases}$$

$\theta$  es una aplicación up, y por tanto, la composición  $f\theta$  es una extensión de  $f$  a  $I^{n+1} - \bigcup_{i=1, \dots, r} N_i$ .

## 2 Ejemplos.-

a) Naturalmente  $\psi$  no tiene porqué ser inyectiva, como prueba el siguiente ejemplo:

Sea  $X = I^2 - (\{1/2\} \times [1/4, 3/4])$ . El homeomorfismo que nos lleva a  $S^1$  en el borde de  $I^2$  es  $(1,1)$ -homotópico con la aplicación constante, ya que el propio espacio  $X$ , nos da la imagen de la homotopía.



Sin embargo, no existe ninguna  $(1,2)$ -homotopía ya que, si esta existiera implicaría la existencia de una up-aplicación entre  $I^2$  menos una cantidad finita de puntos y  $X$  que llevara el borde en el borde,

cosa que es imposible, ya que si extendemos dicha aplicación a  $I^2$  nos daría una aplicación en la que la imagen de un compacto no lo es. Por lo tanto  $\Psi$  en este caso no es inyectiva.

b) Veamos otro ejemplo, que nos prueba que  $\Psi$  no tiene porqué ser suprayectiva. Sea  $X$  el espacio formada por  $S^1$  menos uno de sus puntos. Evidentemente el grupo  $\Pi_{1,2}(X)$  es nulo. sin embargo comprobaremos, en el ejemplo 11 que  $\Pi_{1,1}(X)$  es isomorfo al producto libre de dos  $Z_2$  y un  $Z$ .

Naturalmente, podemos dar condiciones sobre  $X$  para conseguir la inyectividad y la sobreyectividad, así tenemos:

3 Proposición.- Sea  $X$  un espacio métrico sin finales accesibles, entonces los grupos  $\Pi_{n,m}(X)$  coinciden con los correspondientes grupos de Hurewicz de orden  $n$ , y por lo tanto la aplicación  $\Psi$  descrita anteriormente es isomorfismo en este caso.

Demostración.-

Si  $X$  es un espacio sin finales, no pueden existir up-aplicaciones entre ninguna  $(n,m)$ -bola no compacta y el espacio  $X$ , luego todos los representantes, así como todas las homotopías, son compactos.

Evidentemente, la condición exigida a la proposición anterior es excesivamente fuerte, sin embargo dicha condición se puede debilitar y seguir consiguiendo la inyectividad, tal como veremos a continuación.

4 Proposición.- Si  $X$  es un poliedro euclídeo tal que el conjunto de los finales up es un conjunto de puntos aislados en el cierre  $X$  de  $X$ , y para cualesquiera dos representantes  $f, f': J \rightarrow X$  de finales distintos de  $X$  se verifica que

$$\lim d(f(t), f'(t)) \neq 0$$

entonces  $\Psi$  es inyectiva.

Demostración Si  $X$  es un poliedro euclídeo verificando la condición expuesta, el cierre de  $X$  coincide con el cierre por finales propios, que por el teorema 1.4 de [16] es un poliedro. Entonces si  $h: D \rightarrow X$  es una  $(n,1)$ -homotopía entre dos elementos compactos, se puede considerar que es  $p_1$ -aplicación y siguiendo la demostración del teorema 3.1 de [16] se sigue la proposición.

5 Nota.- Obsérvese que la sobreyectividad no se puede conseguir con facilidad, ya que por cada final propio accesible de  $X$ , existe un representante que genera un elemento no nulo de  $\Pi_{n,1}(X)$  (de hecho un  $Z_2$ ). Veámoslo para el caso  $n=1$ :

6 Proposición.- Sea  $X$  un espacio  $(1,1)$ -arcoconexo. Llamemos  $A$  al conjunto de los finales propios accesibles de  $X$ . Entonces el grupo presentado por  $\{a \in A : aa=1\}$  es un subgrupo de  $\Pi_{1,1}(X)$ .

Demostración.-

Probemos primero que efectivamente por cada final de  $A$  existe un representante de un elemento de  $\Pi_{1,1}(X)$ . Por ser  $X$   $(1,1)$ -arcoconexión el grupo  $\Pi_{1,1}(X)$  no depende de la elección del punto base.

Sea  $f: J \rightarrow X$  un representante de un final  $a$  de  $A$ . Definimos  $f_a: I - \{1/2\} \rightarrow X$  por

$$f_a(t) = \begin{cases} 2t & \text{si } t \in [0, 1/2) \\ 2-2t & \text{si } t \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Evidentemente dicha aplicación no es  $(1,1)$ -homotópica con la aplicación constante, puesto que no existe ninguna  $(2,1)$ -bola  $(I^2, P)$  de tal forma que  $P \cap I \times \{0\}$  sea un punto y  $P \cap I \times \{1\}$  sea vacío.

Por otra parte, siguiendo la demostración del teorema III.2.9, es fácil comprobar que el inverso del elemento descrito anteriormente

coincide con él mismo.

Veamos por último, que  $f_{a_1}$  y  $f_{a_2}$  no están relacionadas si  $a_1$  es un final propio de  $A$  distinto de  $a_2$ . En el caso contrario, sea  $h: I^2 - P \rightarrow X$  una  $(1,1)$ -homotopía entre  $(I - \{1/2\}, f_{a_1})$  y  $(I - \{1/2\}, f_{a_2})$ ; en tal situación la componente conexa de  $(0,0)$  en  $I^2 - P$ , nos proporciona una relación para los finales propios que representan  $f_{a_1} | [0, 1/2)$  y  $f_{a_2} | [0, 1/2)$  que no son otros que  $a_1$  y  $a_2$ .

7 Proposición. - Sea  $f: D \rightarrow X$  un representante del elemento neutro de  $\Pi_{1,1}(X)$ , entonces su extensión  $\check{f}: I \rightarrow \check{X}$  a las respectivas completaciones, representa al elemento neutro de  $\Pi_1(\check{X})$ .

La demostración se sigue fácilmente de la proposición II.2.5.

8 Ejemplo. -

1) No todos los elementos de  $\Pi_{1,1}(X)$  tienen porqué ser de la forma expuesta en la proposición 6 o la imagen, mediante  $\Psi$ , de algún elemento de  $\Pi_{1,2}(X)$ . Sea, por ejemplo,  $X$  el espacio constituido por la circunferencia menos un punto. Sabemos que el grupo  $\Pi_{1,2}(X)$  es nulo. Sin embargo, por la proposición anterior la identidad en  $X$  nos representa un elemento de  $\Pi_{1,1}(X)$  que es no nulo y que, además, no coincide con su inverso.

2) Naturalmente, el grupo  $\Pi_{1,1}(X)$  no coincide con  $\Pi_1(\check{X})$  más los elementos que nos proporciona la proposición 6. Para ello, sea  $X$  la circunferencia unidad excepto una sucesión de puntos que convergan al polo norte. En estas circunstancias el elemento de  $\Pi_1(\check{X})$  que está representado por la identidad de la circunferencia no tiene equivalente en  $\Pi_{1,1}(X)$ , ya que en  $(I, P)$   $P$  no puede representar a un conjunto infinito de puntos.

3) Obsérvese que si denotamos por  $X$  al cilindro  $S^1 \times J$ , por  $Y$  a la bola cerrada excepto un punto interior y por  $Z$  a la bola cerrada excepto un segmento en su interior; se tiene que son homeomorfos entre sí, pero tienen distintos grupos de homotopía up, así:

$$\Pi_{1,2}(X) \cong \Pi_{1,2}(Z) \cong \mathbb{Z}, \quad \Pi_{1,2}(Y) \cong 0$$

$$\Pi_{1,1}(X) \cong Z, \quad \Pi_{1,1}(Y) \cong \Pi_{1,1}(Z) \cong Z_2.$$

9 Definición.- Llamamos grafo up al espacio topológico subyacente a un complejo simplicial finito de dimensión uno excepto, posiblemente, un subconjunto de sus vértices. En un grafo up llamaremos aristas abiertas, a aquellas que son adyacentes con alguno de los vértices eliminados. El conjunto de los vértices de un grafo up lo representaremos dando la lista de todos los vértices del grafo, incluyendo a los eliminados y señalando a estos con un  $\hat{\phantom{x}}$ .

10 Proposición.- Sea X es un grafo up (1,1)-arcoconexo y B el conjunto de sus arista abiertas, entonces el grupo  $\Pi_{1,1}(X)$  es isomorfo al producto libre de los grupos  $\Pi_1(X)$  y el presentado por  $\{a \in B: aa=1\}$ .

Demostración.-

Obsérvese que X coincide con el espacio topológico subyacente al grafo completo. Es evidente que en este caso se puede establecer una aplicación  $\psi: \Pi_1(X) \rightarrow \Pi_{1,1}(X)$ , ya que para cualquier elemento de  $\Pi_1(X)$  escogemos un representante tal que la antiimagen de cada punto de X-X sea un conjunto finito. La inyectividad de  $\psi$  se sigue de la proposición 7. Por último se tiene que estos elementos son independientes de los de  $\{a \in B: aa=1\}$  ya que se pueden utilizar los mismos argumentos utilizados en la proposición 6.

11 Ejemplo.- Si X es grafo up con conjunto de vértices  $E = \{x_1, x_2, x_3\}$  y con todas las aristas posibles (luego B tiene dos elementos) se tendrá que  $\Pi_{1,1}(X)$  es isomorfo al producto libre de Z y de dos  $Z_2$ .





#### V.4 EJEMPLOS DE CALCULOS

En el presente apartado vamos a llevar a cabo, tal como indica su nombre, diversos cálculos de grupos de homotopía de espacios destacados. Asimismo presentamos un resultado que nos relaciona los grupos desarrollados en esta memoria con los introducidos por Domínguez y Hernández en [14].

1 Proposición.- Sea  $X$  espacio métrico con un solo final propio y tal que  $\check{X}-X$  está constituido por un único punto, entonces el grupo  $\Pi_{n,m}(X)$  coincide con el grupo  $\bar{\Pi}_{n,m}(X)$  introducido en [14] (obsérvese que las hipótesis son equivalentes a decir que el final es accesible y cualesquiera dos representantes  $up$   $f, f': J \rightarrow X$  verifican que

$$\lim d(f(t), f'(t)) = 0).$$

Demostración.-

Se deduce fácilmente sin más que observar que en las condiciones anteriores cualquier aplicación se puede extender a la completación, luego es  $up$ -aplicación.

2 Ejemplo.- Utilizando la proposición anterior y los resultados de [14], podemos calcular los grupos  $\Pi_{n,m}$  de los complementos de un punto en distintos espacios compactos. Así si  $X$  es el complemento de un punto en la esfera  $S^q$  se tendrá que  $\Pi_{n,n}(X)$  coincide con  $\bar{\Pi}_{n,n}(X)$  que a su vez es isomorfo a  $\bar{\Pi}_{n,n}(R^q)$  que por [14] vale  $Z_2$  si  $1 \leq n < q$ .

Un espacio cuyos grupos de homotopía  $up$  tienen un claro interés, dado el importante papel que juega a la hora de considerar la homotopía  $up$  es el del intervalo  $J$ . Veamos diversos resultados que nos permiten su cálculo.

3 Proposición.- El grupo de homotopía  $up$  de  $J$  asociado a la categoría

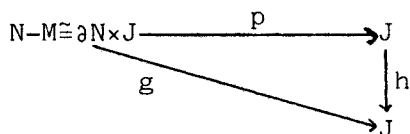
de prebordismo de las pseudovarietades (SV), es nulo para  $m \neq n$ .

Demostración.-

Sea  $f: S^n - P \rightarrow J$  un representante de un elemento de  $\Pi_{n, n-k}(J)$ , siendo  $P$  una pseudovarietad de dimensión  $k$ . Efectuando un cono sobre  $S^n$  obtenemos una  $(n+1)$ -bola  $B^{n+1}$ . Habrá que probar que podemos encontrar una pseudovarietad  $M$  de dimensión  $k+1$  cuyo borde sea  $P$  tal que  $f$  se pueda extender mediante una up-aplicación a  $B^{n+1} - M$ , lo cual es equivalente a extender  $f$  a  $f^*: B^{n+1} \rightarrow I$  de tal forma que  $f^{*-1}(1) = M$ .

Sea  $M$  el cono sobre  $P$  (para lo cual se necesita la hipótesis de  $k > 0$ , ya que, en otro caso, el cono dejaría de ser pseudovarietad). Cualquier punto de  $B^{n+1}$  se puede representar, por la construcción cono sobre  $S^n$ , como  $(x, t)$  siendo  $x$  un punto de  $S^n$  y  $t$  un punto del intervalo  $I$ , teniendo en cuenta el cociente efectuado. Así si representamos por  $f$  a la extensión de  $f$  a  $S^n$ , definimos  $f^*(x, t) = (1-t)f(x) + t$ . Es fácil comprobar que dicha  $f^*$  verifica las condiciones antes expuestas, luego  $(S^n - P, f)$  representa, efectivamente, al elemento netro de  $\Pi_{n, n-k}(X)$ .

4 Lema.- Toda aplicación propia  $f: S^n - M \rightarrow J$  donde  $M$  es un elemento de dimensión  $k$  de una categoría de bordismo como en [13], se puede hacer homotópica propiamente a una  $g: S^n - M \rightarrow J$  donde  $g|_{S^n - N}$  es constante y  $N$  es un entorno regular de  $M$ , siendo el diagrama



conmutativo.

Demostración.-

Al ser  $f(S^n - \text{int}(N))$  un compacto, sea  $a$  un punto de  $J$  tal que  $f(S^n - \text{int}(N)) \subseteq [0, a]$ . Entonces la retracción  $r: J \rightarrow J$  que lleva  $[0, a]$  en el 0 es una equivalencia propia y  $\tilde{f} = r \circ f: S^n - M \rightarrow J$  lleva  $\partial N$  en 0. Puesto que  $N$  es el cilindro de  $q: \partial N \rightarrow M$ , donde  $q: N \rightarrow M$  es la retracción canónica, se tiene que  $N - M \cong \partial N \times J$ . Para cada segmento  $\{x\} \times J$  se tiene que la aplicación  $\tilde{f}|_{\{x\} \times J}$  es homotópica propiamente a la identidad de

$J$  en  $J$ , ya que sólo hay una clase homotopía propia de  $J$  a  $J$  (ver [14]). Sea  $H_x$  la homotopía así construida. Definimos  $H: S^{n-M} \times I \rightarrow J$  por

$$H(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in S^{n-\text{int}N} \\ H_y(s,t) & \text{si } (y,s) \in \partial N \times J \end{cases}$$

De esta forma  $H(x,0)$  coincide con  $f(x)$  y  $H(x,1)=g(x)$  verifica las propiedades deseadas.

5 Proposición.- Sea  $N$  una categoría de prebordismo tal como se presenta en III.5. Entonces los grupos  $\Pi_{n,n-k}(J;N)$  y  $\mathfrak{F}_k^N$  (grupo de bordismo  $k$ -ésimo, ver [13]) coinciden para  $k \leq (n-2)/2$ .

Demostración.-

En realidad vamos a probar que coinciden los grupos  $\Pi_{n,n-k}(J;N)$  y  $\mathfrak{F}_k^N$ , con lo que, utilizando la proposición 1, se tiene el resultado.

Podemos suponer que todo elemento  $\alpha$  de  $\Pi_{n,n-k}(J;N)$  tiene un representante  $(I^{n-M}, f)$  con la forma dada en el lema anterior. Definimos

$$\psi: \Pi_{n,n-k}(J;N) \longrightarrow \mathfrak{F}_k^N$$

de tal forma que  $\psi(\alpha)$  será igual a la clase de  $M$  en  $\mathfrak{F}_k^N$ .

Veamos que  $\psi$  es biyectiva. Si existe  $W$  tal que  $\partial W = M$ , la condición  $k \leq (n-2)/2$ , nos asegura que se puede sumergir  $W$  en  $B^{n+1}$  mediante la aplicación  $j$ , de manera que dicha inmersión lleve el borde de  $W$  en el borde de la bola. Entonces  $f: S^{n-M} \rightarrow J$  se puede extender a  $f^*: B^{n+1} - W \rightarrow J$  de lo cual se obtiene que  $(I^{n-M}, f)$  está relacionada con el elemento neutro, luego  $\psi$  es inyectiva.

Para la sobreyectividad, sea  $[M]$  un elemento de  $\mathfrak{F}_k^N$ . De acuerdo con la desigualdad  $k \leq (n-2)/2$ , existe  $j: M \rightarrow S^n$  inmersión. Entonces, la aplicación natural  $f: S^{n-M} \rightarrow J$  definida como la aplicación  $g$  del lema anterior nos garantiza la epiyectividad de  $\psi$ .

6 Notas.-

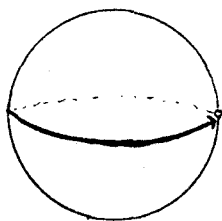
a) Si utilizamos la categoría SV de las pseudovariedades. Entonces  $\Pi_{n,n-k}^{N}(J;N) = \mathbb{Z}_k^N = 0$  si  $0 < k \leq (n-2)/2$  y  $\Pi_{n,n}^{N}(J;N) = \mathbb{Z}_2^N$ .

b) En general, si N es una categoría tal que  $\mathbb{Z}_k^N$  sea distinto de cero, entonces  $\Pi_{n,n-k}^{N}(J;N)$  será distinto de cero.

c) Obsérvese que  $\Pi_{n,m}$  del producto de dos espacios no coincide necesariamente con la suma de los grupos de homotopía up asociados a cada espacio, sin más que considerar  $X=Y=J$ .

7 Nota.- Utilizando los cálculos efectuados anteriormente y los resultados de III.6 principalmente, así como la sucesión exacta de homotopía up, podemos llevar a cabo el cálculo de algunos grupos de homotopía up de parejas.

Por ejemplo, sea X el complemento de un punto en  $S^q$ ,  $A=J$  inmerso en X de forma up y supongamos que la categoría de prebordismo son las pseudovariedades.



Sabemos que A es up-retracto de X, con lo cual se verifica que

$$\Pi_{n,m}^{N}(X,a) \cong \Pi_{n,m}^{N}(X,A,a) + \Pi_{n,m}^{N}(A,a)$$

para  $n \geq 2$ . Además si m es distinto de n  $\Pi_{n,m}^{N}(A)$  es nulo según la proposición 3, luego en este caso,  $\Pi_{n,m}^{N}(X,A)$  es isomorfo a  $\Pi_{n,m}^{N}(X)$ .

Por otra parte, si  $n=m \leq q$ , se verifica que  $\Pi_{n,m}^{N}(X)$  coincide con  $\Pi_{n,m}^{N}(A)$ , de lo que se deduce que  $\Pi_{n,m}^{N}(X,A)$  es nulo en estos casos.

## CAPITULO VI

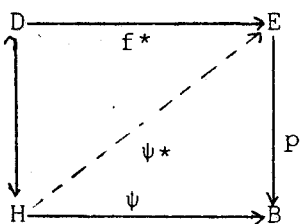
### FIBRACIONES UP

Introducimos en el presente capítulo un concepto análogo al de fibración, acorde con nuestra teoría de homotopía. Damos teoremas de caracterización, así como resultados análogos a los obtenidos con las fibraciones clásicas, entendiéndose por tal a las fibraciones de Serre (ver [20]).

#### VI.1 FIBRACIONES UP

1 Definición.— Un fibrado up es una terna  $(E, p, B)$  de tal forma que  $E$  y  $B$  son espacios métricos basados ( $e$  y  $b$  sus respectivos puntos bases) y  $p: (E, e) \rightarrow (B, b)$  es una aplicación up que cumple la PLHBUP (propiedad de levantamiento de homotopías up basadas) respecto las  $(n, q)$ -bolas basadas; es decir, dada una  $(n, q)$ -bola basada  $(D, a)$ , una aplicación up  $f*: (D, a) \rightarrow (E, e)$  y una relación de  $(n, q)$ -homotopía basada  $\psi: (H, a, I) \rightarrow (B, b)$  tal que  $\psi_0 = pf^*$  (donde por  $\psi_0$  representamos a restringido  $\psi$  a la tapa inferior de  $H$ ), entonces existe una

up-aplicación  $\psi^*: (H, a \times I) \rightarrow (E, e)$  tal que  $p\psi^* = \psi$  y  $\psi^*_0 = f^*$

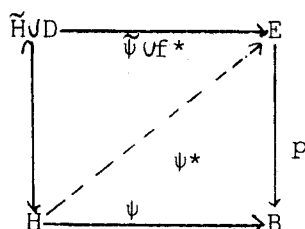


2 Nota. - En lo que sigue, respecto de la anterior definición, sólo consideraremos  $(n, q)$ -bolas tal que  $q > 0$ . Así dada  $D = (I^n, K)$ ,  $I^n - |K|$  será denso en  $I^n$ .

3 Teorema. - Dada una up-aplicación  $p: E \rightarrow B$  las siguientes condiciones son equivalentes:

a)  $(E, p, B)$  cumple la PLHUP respecto las  $(n, q)$ -bolas.

b)  $(E, p, B)$  cumple la PLHRUP (propiedad de levantamiento de homotopías relativas up) respecto las  $(n, q)$ -bolas; esto es, dada una  $(n, q)$ -bola  $D$ , una aplicación up  $f^*: D \rightarrow E$  y una relación de  $(n, q)$ -homotopía  $\psi: H \rightarrow B$  tal que  $\psi_0 = pf^*$  y otra relación entre  $(n-1, q)$ -esferas  $\tilde{\psi}: \tilde{H} \rightarrow E$  con  $\tilde{H}_0 = D$ , tal que  $\tilde{\psi}_0 = f^*$  y  $p\tilde{\psi} = \psi|_{\partial D}$ , entonces existe una relación  $\psi^*: H \rightarrow E$  que es elevación de  $\psi$ .

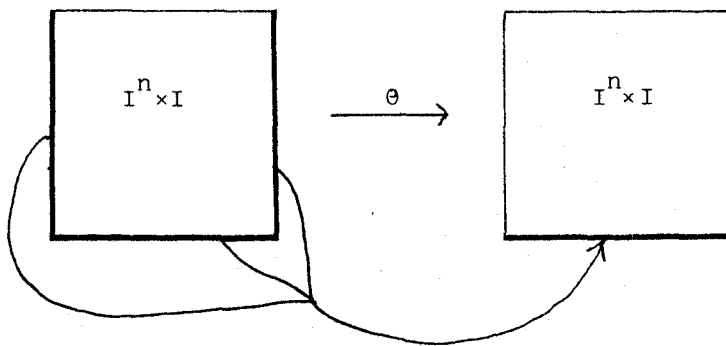


c)  $(E, p, B)$  cumple la PLHRUP respecto de los  $(n, q)$ -poliedros transversos (ver definición III.1.1) para todo  $n$ .

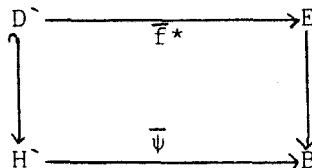
Demostración. -

Probemos que a) implica b). Dado un diagrama como el del enunciado, sea  $\theta: I^n \times I \rightarrow I^n \times I$  el homeomorfismo pl que manda  $(I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)$  en  $I^n \times \{0\}$

Se tiene que  $\theta(H) = H'$  es una relación de  $(n, q)$ -homotopía, cuyo nivel 0 es la  $(n, q)$ -bola  $D' = \theta(\tilde{H} \cup D)$ . Sea  $\theta_1$  la restricción de  $\theta$  a  $\tilde{H} \cup D$  y

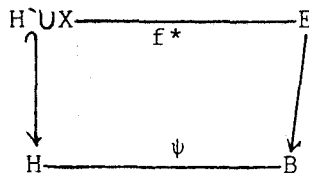


consideremos el siguiente diagrama



Siendo  $\psi = \psi \theta^{-1}$  y  $f^* = (\psi \cup f^*) \theta_1^{-1}$ . Al cumplir  $(E, p, B)$  la PLHUP respecto las  $(n, q)$ -bolas, existe una  $\psi^*$  elevación de  $\psi$  en el diagrama anterior. Definimos entonces  $\psi^* = \psi^* \theta$  que, obviamente, es una elevación up de  $\psi$ .

Veamos que b) implica c). Sea  $(X, A)$  un par de poliedros transversos  $X = (K, P)$  y  $A = (K', P')$  y  $(H, H')$  una relación tal que  $(H_0, H'_0) = (X, A)$ . Supongamos que tenemos un diagrama conmutativo



Sea  $H^n = X^n \cup A$  donde  $X^n$  es el esqueleto de  $X$  de dimensión  $n$  (consideraremos que  $M^{-1} = A$ ). Efectuaremos la demostración por inducción en  $n$ . Así supongamos que tenemos definida una elevación en  $(M^{n-1} \times I \cup X \times \{0\}) \cap H$  (para  $n=0$  es obvio). Sea entonces  $\sigma$  una  $n$ -bola de  $K$ , así  $(\sigma, \sigma \cap P)$  será una  $(n, q)$ -bola de  $X$ . Entonces, por la hipótesis de inducción, tenemos definida una elevación de  $\psi$  en  $(\partial \sigma \times I \cup \sigma \times \{0\}) \cap H$ , luego estamos en las condiciones para aplicar b), lo cual nos da una elevación de  $\psi$  a  $(\sigma \times I) \cap H$ . Como estas elevaciones son relativas al borde de cada una de las bolas, se tiene que son todas compatibles entre si luego se hemos conseguido una elevación de  $\psi$  a  $(M^n \times I \cup X \times \{0\}) \cap H$ .

La demostración de que c) implica a) es trivial.

La siguiente proposición nos proporciona un método para encontrar suficientes ejemplos de fibraciones up:

4 Proposición.— Sea  $(E,p,B)$  una fibración (de Serre) donde  $E$  y  $B$  son espacios métricos compactos. Para todo  $A$  cerrado en  $B$  se tiene que

$$p: E - p^{-1}(A) \longrightarrow B - A$$

es una fibración up.

Demostración.—

Sea el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{f^*} & E - p^{-1}(A) \\
 \downarrow i_0 & & \downarrow p \\
 H & \xrightarrow{\psi} & B - A
 \end{array}$$

Dado  $D = (I^n, P)$  por ser  $I^n - P$  denso en  $I^n$ ,  $f^*$  tendrá una extensión  $\bar{f}^*: I^n \rightarrow E$ . Si  $H = (I^n \times I, P')$  es tal que  $I^n - P = I^n \times \{0\} - P'$ , entonces  $p\bar{f}^*$  induce una extensión  $\tilde{\psi}$  de  $I^{n+1} - P' \cup I^n \times \{0\}$  en  $B$  de  $\psi$ . Veamos que dicha extensión es continua:

Sea  $x$  un punto de  $P' \cap I^n \times \{0\}$  y consideremos una sucesión  $\{x_n\}$  en  $I^{n+1} - P'$  que converga a  $x$ . Por ser  $q$  mayor que cero  $I^n \times \{0\} - P'$  es denso en  $I^n \times \{0\}$ , así sea  $\{x'_n\}$  una sucesión en dicho conjunto tal que  $\{i(x'_n)\}$  converja también a  $x$ . Por la conmutatividad del diagrama se tendrá que  $\psi(i(x'_n)) = p\bar{f}^*(x'_n)$ . Puesto que  $\lim |i(x'_n) - x_n|$  vale 0, por la continuidad uniforme se verificará que

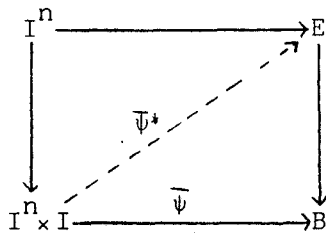
$$\lim d(\psi(i(x'_n)), \psi(x_n)) = 0.$$

Pero, de ello se deduce que

$$\lim \psi(i(x'_n)) = \lim p\bar{f}^*(x'_n) = \tilde{\psi}(x).$$

luego  $\lim \psi(x_n) = \tilde{\psi}(x)$ . Ahora bien,  $I^{n+1} - P' \cup I^n \times \{0\}$  es denso en  $I^{n+1}$ , por lo tanto  $\tilde{\psi}$  se puede extender a  $\bar{\psi}: I^{n+1} \rightarrow B$ . Luego tenemos el siguiente diagrama

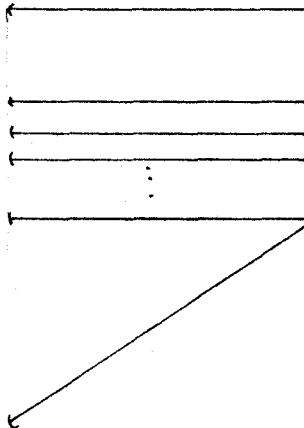




Por ser  $(E,p,B)$  fibración, existe una elevación  $\psi^*: I^n \times I \rightarrow E$  de  $\psi$ . Considerando la restricción de  $\psi^*$  al complementario en  $I^n \times I$  de la imagen inversa mediante  $\psi^*$  de  $p^{-1}(A)$  se obtendrá una aplicación  $up$  que es elevación de  $\psi$ .

Apoyándonos en la proposición anterior vemos, que al igual que ocurre en el caso clásico, en el teorema 3 no se puede poner una cuarta condición equivalente que nos diga que  $(E,p,B)$  cumple la PLHUP respecto a cualquier espacio. Tal como se ve con el siguiente ejemplo basado en uno debido a Brown [6]:

5 Ejemplo.— Sea  $E$  el conjunto de los puntos  $(x,y)$  del plano tal que  $x \in J$ ,  $y = 1/n$  para algún  $n > 0$  y  $y = x - 1$ .  $B$  será igual al intervalo  $J$  y  $p$  la proyección natural.

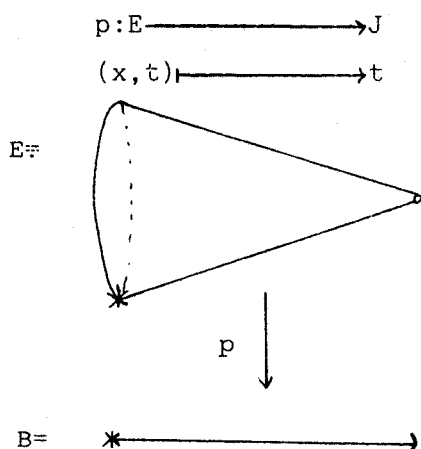


Como consecuencia directa de la proposición anterior este espacio es una fibración  $up$ ; pero si consideramos como  $X$  los puntos de la sucesión  $\{1/n\}$  junto con el cero y las aplicaciones  $up f: X \rightarrow E$  que a cada punto  $x$  le hace corresponder  $(1,x)$  y  $\psi: X \times I \rightarrow B$  que a  $(x,t)$  le hace corresponder  $1/2 + 1/2t$ , resulta evidente que  $\psi$  no se puede elevar a  $E$  de forma que al restringirnos a  $X \times \{1\}$  coincida con  $f$ .

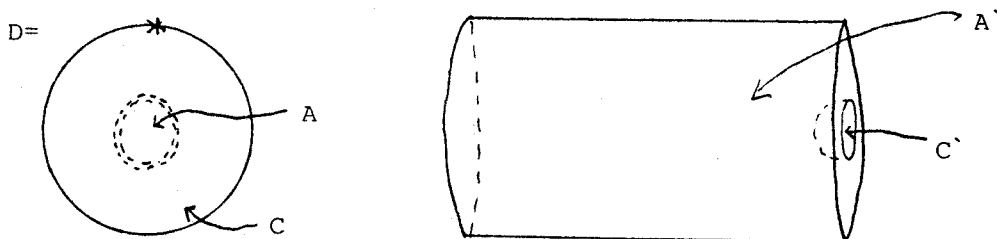
Es importante observar que se pueden construir fibraciones ordinarias con proyecciones  $up$  que no son fibraciones  $up$ , tal como se prueba a continuación:

6 Ejemplos.-

a) Sea  $B$  igual a  $J$ ,  $E$  el cono sobre  $S^1$  menos el vértice y  $p$  la aplicación

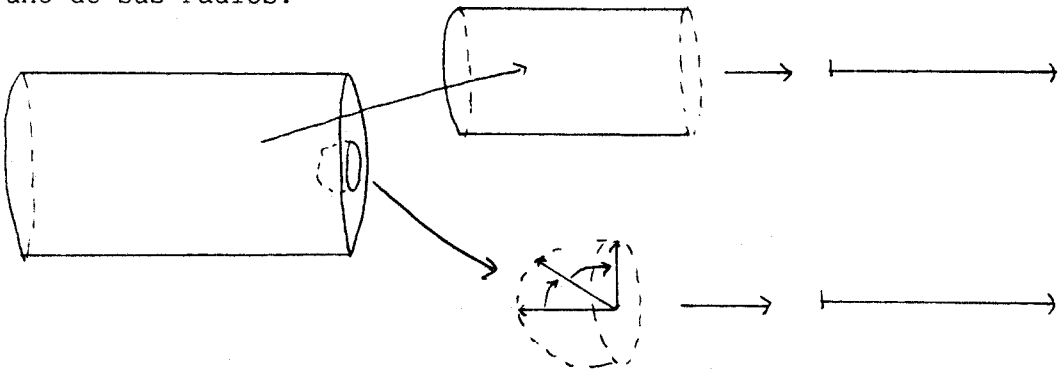


Evidentemente se trata de un fibrado trivial de fibra  $S^1$  siendo los puntos bases los señalados en la figura.



Sea  $D$  igual al complementario en una bola de dimensión dos de una circunferencia incluida en el interior de dicha bola, con el punto base situado en el polo norte. Denotaremos por  $A$  a la componente conexa de  $D$  que no tiene borde y por  $C$  a la otra componente.  $H$  será el complementario en el cilindro  $B^2 \times I$  de una semiesfera cuyo borde está en  $B^2 \times \{0\}$ . Sea  $A'$  la componente de  $H$  que contiene a  $* \times I$  y  $C'$  la otra componente. Definimos  $f^*: D \rightarrow E$  como la composición de las aplicaciones que mandan  $A$  en  $J$  y a dicho intervalo en  $E$  de manera  $up$ ,  $f^*$  sobre  $C$  será el homeomorfismo que existe entre dicho espacio y  $E$ .

$\psi: H \rightarrow B$  lo definimos también por componentes conexas, así sobre  $A'$  será la composición de la aplicación que retrae  $S^1 \times I$  en  $S^1$ , a continuación, observando que la imagen de  $A'$  mediante la anterior aplicación sigue siendo homeomorfa a  $B^2 \times J$ , aprovechando dicho homeomorfismo proyectamos sobre  $J$ ; sobre  $C$  será la retracción  $up$  sobre uno de sus radios.



Si existiera  $\psi^*$ , elevación de  $\psi$ , su restricción a  $S^1 \times I \cup B^2 \times \{1\}$  sería una aplicación de una bola de dimensión dos en el cilindro  $S^1 \times I$  que enviaría al borde de dicha bola en una  $S^1$  representando un elemento no nulo de  $\Pi_1(S^1 \times J)$ , cosa que es imposible.

Así pues, esta es una fibración clásica (trivial) con proyección  $up$  que no es fibración  $up$ .

b) En cuanto a la existencia de fibraciones  $up$  no triviales, el siguiente ejemplo nos da un método para conseguir una gran variedad de ellas.

Si  $p: S^3 \rightarrow S^2$  es la fibración de Hopf (ver por ejemplo [6]), consideramos

$$p': S^3 \times J \longrightarrow S^2 \times J$$

$$(x, t) \longmapsto (p(x), t)$$

entonces  $(S^3 \times J, p', S^2 \times J)$  es una fibración  $up$  no trivial.

#### 7 Nota.-

a) El ejemplo 6 a), nos proporciona un método para intentar encontrar fibraciones clásicas que no sean fibraciones  $up$ .

Así si en una fibración de Serre  $(E, p, B)$  logramos encontrar un elemento no nulo  $\alpha$  de  $\Pi_n(E)$  tal que  $\theta(\alpha) = 0$ , donde  $\theta: \Pi_n(E) \rightarrow \Pi_{n,m}(E)$  es el descrito en el lema V.2.6, entonces si  $(\partial I^{n+1}, f)$  es un

representante de  $\alpha$  (y por tanto de  $\theta(\alpha)$ ), sabemos que  $f$  se puede extender a  $I^{n+1}-P$ . (donde  $P$  es un poliedro de dimensión  $n-m$ ) pero no a  $I^{n+1}$  (por ser  $\alpha$  no nulo en  $\Pi_n(E)$ ). Efectuamos un cono sobre la componente conexa de  $P$  y consideramos  $H=I^{n+1}\times I-C_P$ , estando  $C_P$  inmerso en  $I^{n+1}\times I$  de tal forma que la intersección de  $C_P-P$  con el borde de  $I^{n+1}\times I$  esté incluida en el interior de  $I^{n+1}\times\{0\}$ . Si logramos extender  $pf:I^{n+1}-P\rightarrow B$  a  $\psi:H\rightarrow B$ , tendremos que  $p:E\rightarrow B$  no es una fibración up; de serlo, existiría  $\psi^*:H\rightarrow E$  elevación de  $\psi$ . Ahora bien, si restringimos  $\psi^*$  a  $(\partial I^{n+1}\times I)\cup(I^{n+1}\times\{1\})$ , nos dará una aplicación de  $I^{n+1}$  en  $E$  que es extensión de  $f$ , en contradicción con el hecho de ser  $(\partial I^{n+1}, f)$  un representante de un elemento no nulo de  $\Pi_n(E)$ .

b) Es fácil observar que no es necesario considerar la construcción que se describe en a) ya que, para nuestros propósitos bastaría con obtener un modelo  $H=I^{n+1}\times I-Q$  tal que la intersección de  $Q$  con el borde de  $I^{n+1}\times I$  (que ha de coincidir con  $P$ ) esté incluida en el interior de  $I^{n+1}\times\{0\}$ . Sin embargo, la construcción anterior es lo suficientemente general como para que pueda utilizarse en muchos casos.

c) Si  $P$  fuese un número impar de puntos (o incluso un número par, pero con una cantidad impar de ellos sobre un mismo final) no se podrá construir ningún modelo con la condición expuesta en b). Pero teniendo en cuenta el teorema V.3.1, podemos considerar siempre  $\theta(\alpha)=0$  en algún  $\Pi_{n,m}(E)$  siendo  $m\geq n$ , con lo cual si  $n$  es mayor que 1 se puede seguir aplicando lo anterior.

## VI.2 SUCESION EXACTA ASOCIADA A UNA FIBRACION UP

Vamos a probar, en el presente apartado, la existencia de una sucesión exacta de homotopía up asociada a una fibración up, lo que nos permitirá calcular los grupos de homotopía up de algunos espacios.

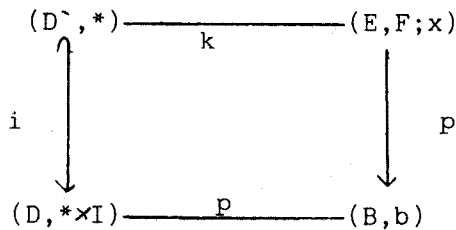
En todo el apartado y mientras no se especifique lo contrario,  $(E,p,B)$  será una fibración up,  $b$  el punto base de  $B$ ,  $F=p^{-1}(b)$  y  $x$  el

punto base de F.

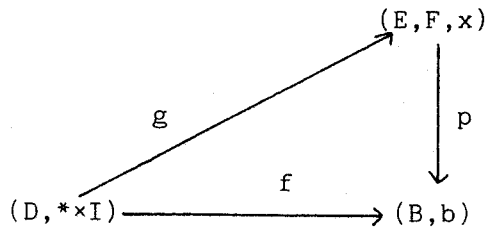
1 Teorema.-  $p^*: \Pi_{n,m}(E,F;x) \rightarrow \Pi_{n,m}(B;b)$  es isomorfismo para  $n > 2$ .

Demostración.-

Veamos que  $p^*$  es sobre. Sea  $(D,f)$  donde  $D=(I^n,P)$  un representante de un  $\alpha$  elemento de  $\Pi_{n,m}(B;b)$  (obsérvese que al ser  $f^{-1}(b)$  compacto se tiene que  $P \cap I^n = \emptyset$ ). Consideremos  $D'$  como una de las caras de  $I^n$ , podemos pensar que  $P$  es una relación de  $(n-1,m)$ -homotopía entre  $D'$  y otra  $(n-1,m)$ -bola, luego tenemos el siguiente diagrama conmutativo

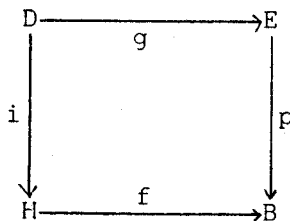


Entonces, por ser  $(E,p,B)$  up-fibración, existe  $g: (D, * \times I) \rightarrow (E, F, x)$  elevación de  $f$ ; evidentemente  $(D,g)$  representa un elemento  $\beta$  de  $\Pi_{n,m}(E,F;x)$  y por la conmutatividad del diagrama



se tiene que  $p^*(\beta) = \alpha$ .

Veamos que  $p^*$  es inyectiva. Sea  $\alpha$  un elemento de  $\Pi_{n,m}(E,F;x)$  tal que  $p^*(\alpha) = 0$ . Un representante de  $\alpha$  será un par  $(D,g)$  donde  $D$  es la  $(n,m)$ -bola  $(I^n,P)$ . Si  $p^*(\alpha) = 0$  existirá  $H$  relación de  $(n,m)$ -homotopía entre  $(D,g)$  e  $(I^n,k)$  siendo  $k$  la aplicación constante; esto es, tenemos un diagrama



Entonces, por ser  $(E,p,B)$  fibración up, existe una elevación  $\psi$  de  $f$  que nos dará en  $(E,F)$  una relación de  $(n,m)$ -homotopía entre  $(D,g)$  y la aplicación que va de la bola en  $F$  que es un representante de un elemento nulo de  $\Pi_{n,m}(E,F;x)$ , con lo cual se concluye el teorema.

2 Nota.-

a) El teorema anterior también nos da métodos para cálculos de grupos de homotopía up de parejas; por ejemplo, sabemos que si  $E=S^1 \times J$ ,  $B=J$  y  $p:E \rightarrow B$  es la dada por  $p(x,t)=t$ , tenemos una fibración up, por lo que  $\Pi_{n,m}(S^1 \times J, S^1)$  coincide con  $\Pi_{n,m}(J)$  grupo este último que sabemos calcular.

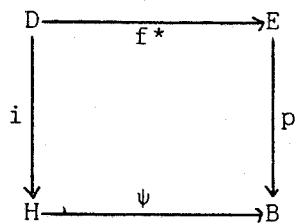
b) El teorema anterior nos asegura que en el caso en el que  $(E,p,B)$  sea fibración, el grupo  $\Pi_{n,m}(E,F)$  es abeliano para  $n > 2$ .

Como consecuencia inmediata del teorema 1 y de la sucesión exacta de homotopía up de la pareja, se tiene el siguiente:

3 Teorema.- Toda fibración up  $(E,p,B)$  lleva asociada la siguiente sucesión exacta de homotopía up:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & \Pi_{n,m}(F) & \xrightarrow{i^*} & \Pi_{n,m}(E) & \xrightarrow{p^*} & \dots \\ & & \downarrow p^* & & \downarrow \partial & & \\ & & \Pi_{n,m}(B) & \xrightarrow{\partial} & \Pi_{n-1,m}(B) & \rightarrow & \dots \end{array}$$

4 Corolario.- Dada una fibración up  $(E,p,B)$  y un diagrama



Cualquier par de elevaciones  $\psi$  y  $\psi'$  de  $f$  son up-homotópicas.

5 Proposición.- Sean  $(E,p,B)$  y  $(E',p',B')$  fibraciones up y

$\Psi: (E, B) \rightarrow (E', B')$  una up-aplicación que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\Psi} & E' \\
 p \downarrow & & \downarrow p' \\
 B & \xrightarrow{\Psi} & B'
 \end{array}$$

Entonces  $\Psi$  induce una aplicación  $\Psi^*$  entre las sucesiones exactas de homotopía up asociadas a  $(E, p, B)$  y  $(E', p', B')$ .

La demostración se sigue del teorema 3 y de la proposición III.4.3.

### 6 Ejemplos.-

a) Naturalmente, una de las principales utilidades de la sucesión exacta es el cálculo de grupos de homotopía. Por ejemplo: sea  $E=S^1 \times J$ ,  $B=J$  y  $p$  como en a) de la nota 2.

Por ser  $F=S^1$ , que es compacto, se tiene que su grupo de homotopía up de orden  $(n, m)$  coincide con su grupo de Hurewicz de orden  $n$ , que es nulo si  $n \geq 2$ . Luego podemos calcular los grupos  $\Pi_{n, m}(S^1 J)$  utilizando la sucesión exacta de homotopía up asociada a  $(E, p, B)$ . De este modo, si  $n \geq 2$   $\Pi_{n, m}(S^1 \times J) = \Pi_{n, m}(J)$  (para el caso  $n=m=2$  se puede comprobar fácilmente que el núcleo del morfismo borde es todo  $\Pi_{2, 2}(J)$ , de lo cual se deduce el isomorfismo anterior en este caso), el cálculo de este último grupo ya lo hemos efectuado anteriormente (ver proposiciones V.4.3 y V.4.5).

Por otra parte, utilizando los resultados de V.2 y V.3 podemos asegurar que  $\Pi_{1, 1}(S^1 J)$  es isomorfo a  $Z+Z_2$  y  $\Pi_{1, 2}(S^1 J)$  es isomorfo a  $Z$ . Veremos que de alguna forma, estos grupos caracterizan a todas las fibraciones up  $(E, p, J)$  donde  $E$  es homeomorfo a  $S^1 \times J$ .

b) Otro cálculo interesante es el de los grupos de homotopía up de  $S^3 - S^1$ , cálculo que es posible efectuar gracias a la fibrición up descrita en d) de la nota VI.1.7. Aquí de nuevo la fibra resulta ser  $S^1$ , con lo que los grupos  $\Pi_{n, m}(S^3 - S^1)$  y  $\Pi_{n, m}(S^2 - \{\text{punto}\})$  son isomorfos, y estos últimos grupos los sabemos calcular en muchos casos (ver ejemplo V.4.2).

### VI.3 FIBRACIONES UP SOBRE J DE FIBRA $S^1$

Trataremos dar una caracterización de las fibraciones up sobre  $J$  de fibra  $S^1$ . Evidentemente, por ser fibración up ha de ser fibración y por ser  $J$  contráctil el espacio  $E$  ha de ser homeomorfo al producto de  $S^1$  por  $J$ . Pero, hemos visto en el ejemplo VI.1.6 que el cono sobre  $S^1$  excepto el vértice es un espacio homeomorfo a dicho producto que no es fibración up sobre  $J$ . Daremos, en primer lugar, una caracterización algebraica para que  $E$  sea fibración sobre  $J$ . A continuación construiremos un ejemplo de un espacio  $X$  no up-homeomorfo a  $S^1 \times J$  (aunque naturalmente habrá de ser homeomorfo) que es fibración up sobre  $J$  que además nos servirá de ejemplo para probar que la proposición 1.4 no tiene un recíproco, en el sentido de si  $(E,p,B)$  es una fibración up, su extensión a los cierres  $(E,p,B)$  no tiene porqué ser fibración.

1 Teorema.— Sea  $(X,p,J)$  una fibración up de fibra  $S^1$ , entonces:

a) Los grupos  $\Pi_{n,m}(X)$  y  $\Pi_{n,m}(J)$  son isomorfos si  $n \geq 1$ . b)  $\Pi_{1,2}(X)$  y  $\Pi_{1,1}(X)$  son isomorfos a los grupos  $Z$  y  $Z+Z_2$  respectivamente.

Demostración.—

a) se deduce de la existencia de la sucesión exacta de homotopía up asociada a la fibración, tal como se vio en a) del ejemplo 2.6. Así sólo resta por probar b).

Si  $\Pi_{1,2}(X)$  es distinto de  $Z$  quiere decir que, al considerar la clausura  $X$  de  $X$  (ver V.2), existe un punto de  $X-X$  tal que en todo entorno suyo podemos encontrar un lazo que no se anula. De ello y del teorema II.3.9 se sigue que  $X$  es up-homeomorfo al cono sobre  $S^1$  excepto el vértice, cosa que, como ya sabemos, es una contradicción con el hecho de ser  $(X,p,J)$  fibración up.

A continuación calcularemos el grupo  $\Pi_{1,1}(X)$ . Por la nota VI.2.7 se tiene que  $(S^1, f)$ , donde  $f$  es la inmersión de  $S^1$  en  $S^1 \times \{0\}$  de  $X$ , es un generador de un  $Z$  subgrupo de  $\Pi_{1,1}(X)$ . Por la proposición V.3.6, se tiene que  $Z_2$  es también subgrupo de  $\Pi_{1,1}(X)$ . A partir de aquí es fácil comprobar que  $Z+Z_2$  ha de ser subgrupo de  $\Pi_{1,1}(X)$ .



Supongamos que  $\Pi_{1,1}(X)$  sea distinto de  $Z+Z_2$ , existirá un elemento que está en  $\Pi_{1,1}(X)$  y que no está en la suma directa de los subgrupos generados por la  $(S^1, f)$  anterior y por el descrito en V.3.6. Además, podemos asegurar que existe uno de esos elementos representado por  $(I - \{1/2\}, g)$  (en caso contrario estaría representado por  $(I - \{x_1, \dots, x_n\}, g)$  con  $0 < x_1 < \dots < x_n < 1$ , limitándonos a  $[0, (x_1 + x_n)/2] - \{x_1\}$  obtendremos un representante en las condiciones expuestas). Al componer dicho representante con un representante de un generador de  $Z_2$ , resultará un elemento no nulo y que no puede ser homotópico a ninguna  $(1,1)$ -bola compacta (por no estar relacionado con ninguno de los elementos que constituyen el  $Z+Z_2$  señalado). Sin embargo su transformado mediante  $p^*$  sí es nulo trivialmente según el cálculo de  $\Pi_{1,1}(J)$ .

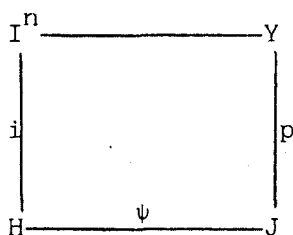
2 Nota.- La caracterización algebraica anterior, nos permite asegurar que algunos espacios como el complementario de un punto interior en una bola de dimensión dos o el complementario de un segmento en dicha bola no pueden ser fibraciones up sobre  $J$ , a pesar de ser homeomorfos a  $S^1 \times J$ . Sin embargo es posible construir ejemplos de espacios no up-homeomorfos a  $S^1 \times J$  que sí son fibraciones up sobre  $J$  de fibra  $S^1$ .

3 Lema.- Si  $Y$  es homeomorfo a  $X \times J$  donde  $X$  es un espacio métrico compacto, entonces si la  $(n,m)$ -bola que consideramos en la definición de fibración up es compacta, la homotopía  $\psi$  de la misma definición se puede elevar.

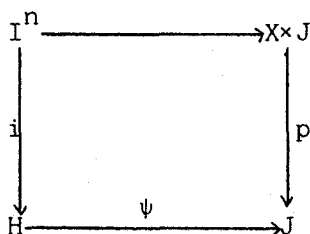
Demostración.-

Por el teorema II.3.9 existe una relación  $R$  en  $X \times I$  en la que todas las clases son unitarias, excepto tal vez  $X \times \{1\}$  de tal forma que  $Y$  es up-homeomorfo a  $X \times I / R - X \times \{1\}$ .

Tenemos que probar que en el diagrama

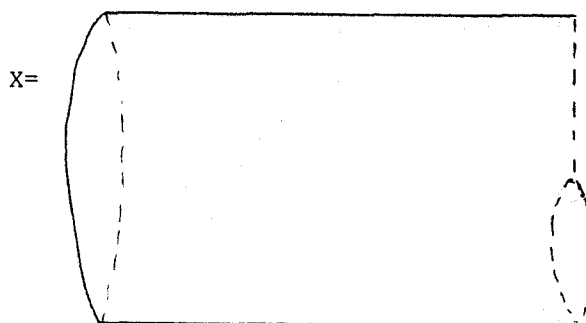


se puede elevar a  $Y$ . Pero por ser  $I^n$  compacto, la composición de  $f$  con el homeomorfismo  $h: Y \rightarrow X \times J$  es up-aplicación, con lo cual tenemos el siguiente diagrama de aplicaciones up



Por la proposición 1.4 se tiene que  $(X \times J, p, J)$  es fibración up, luego existe  $\psi': H \rightarrow X \times J$  elevación de  $\psi$ . Así definimos  $\psi'$  como la composición  $h^{-1} \psi'$  que, evidentemente, es elevación de  $\psi$ .

4 Ejemplo.- Vamos a construir un ejemplo de fibración up sobre  $J$  de fibra  $S^1$  no up-homeomorfo a  $S^1 \times J$ . Sea  $Y$  el espacio cociente obtenido de  $S^1 \times I$  al dar la relación de equivalencia  $((x, y), 1) R ((-x, y), 1)$  si  $y > 0$ , suponiendo que  $S^1$  es la circunferencia unidad centrada en el origen y que hemos utilizado las coordenadas cartesianas. Sea  $X$  igual al complementario en  $Y$  de las clases de puntos de  $S^1 \times \{1\}$ , evidentemente este espacio es homeomorfo a  $S^1 \times J$  y no es up-homeomorfo puesto que el homeomorfismo no se puede extender a las completaciones, luego existe la proyección  $p: X \rightarrow J$ . Vamos a probar que  $(X, p, J)$  es fibración up.



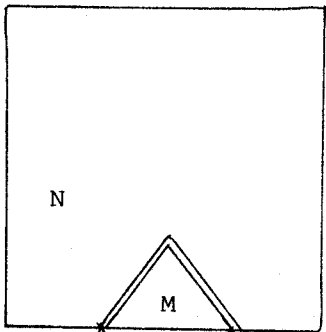
Llevaremos a cabo la demostración comprobando caso por caso la definición de up-fibración directamente.

Supongamos que estamos en el caso particular de que la D bola es  $I - \{1/2\}$  y la homotopía  $H = I^2 - (\{1/2\} \times I)$ . Entonces dadas las up-aplicaciones  $f$  y  $\psi$  como en la definición, construimos  $\psi^{\sim}$  de  $H$  en  $X$  dada por

$$\psi^{\sim}(s,t) = (q(f(s)), \psi(s,t))$$

donde  $q$  es la proyección sobre  $S^1$ ; dicha  $\psi^{\sim}$  cumple evidentemente las condiciones de elevación del problema. Si tanto la bola como la homotopía fuesen una variación del caso anterior (esto es, si la bola fuese una  $(1,1)$ -bola a la que sólo le falta un punto y a la homotopía una línea que uniese dicho punto con otro situado en el lado opuesto), bastaría con componer  $\psi^{\sim}$  con el up-homeomorfismo que relaciona dicha homotopía con el caso expuesto.

Veamos el caso en el que la bola fuese  $D = I - (\{1/3\} \cup \{2/3\})$  y la homotopía  $H = (I^2, P)$  donde  $P$  es una línea que une estos dos puntos que faltan en  $D$ . Llamaremos  $\check{\psi}$  a la extensión de  $\psi$  a  $I^2$ .



Llamaremos  $N$  a la componente de  $(0,0)$  en  $H$  y  $M$  a la otra componente. Vamos a definir  $\psi^{\sim}$  de  $I^2$  en la completación de  $X$  (esto es: en  $Y$ ), con lo cual aseguramos que su restricción es up-aplicación. Sabemos que  $f^{\sim} = f^* | [1/3, 2/3] : [1/3, 2/3] \dashrightarrow Y$  nos dará un arco en  $Y$  tal que sólo corta a  $Y-X$  en sus puntos extremos, sea  $\Psi : M \dashrightarrow Y$  una aplicación tal que en  $M \cap I^2 \times \{0\}$  coincida con  $f^{\sim}$  y tal que la imagen de  $\tilde{\Psi} = \Psi | P$  coincida con  $Y-X$  (esto siempre es posible, ya que nos basamos en la existencia de arcos homotópicos a  $f^{\sim}$  que recubran todo  $Y-X$ ); definimos

$$\tilde{\psi}^{\sim} : M \longrightarrow Y$$

$$(s,t) \longmapsto (q\Psi(s,t), \check{\psi}(s,t)) \text{ donde por } q$$

representamos la proyección en  $S^1$  (obsérvese que dicha proyección en

general no tendría sentido, pero en este caso si es posible gracias a la construcción de  $\Psi$ ). De forma similar a como hemos definido  $\psi$  en  $M$ , definimos  $\psi'' : N \rightarrow Y$  por

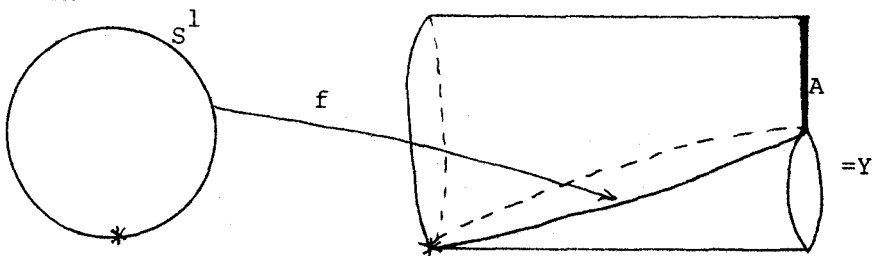
$$\psi''(s,t) = \begin{cases} (q\bar{\Psi}(s,t), \check{\Psi}(s,t)) & \text{si } s \in [1/3, 2/3] \\ (qf(s), \check{\Psi}(s,t)) & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(obsérvese que si en la homotopía faltase alguna línea cerrada, una circunferencia, las definiciones anteriores seguirían siendo válidas).

De los dos casos estudiados hasta el momento, es fácil deducir el caso general de  $(1,1)$ -bolas, ya que bastaría con dividir  $I^2$  en tantas zonas como fuese necesario, siendo cada una de estas zonas de alguna de las dos formas descritas anteriormente.

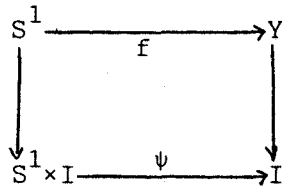
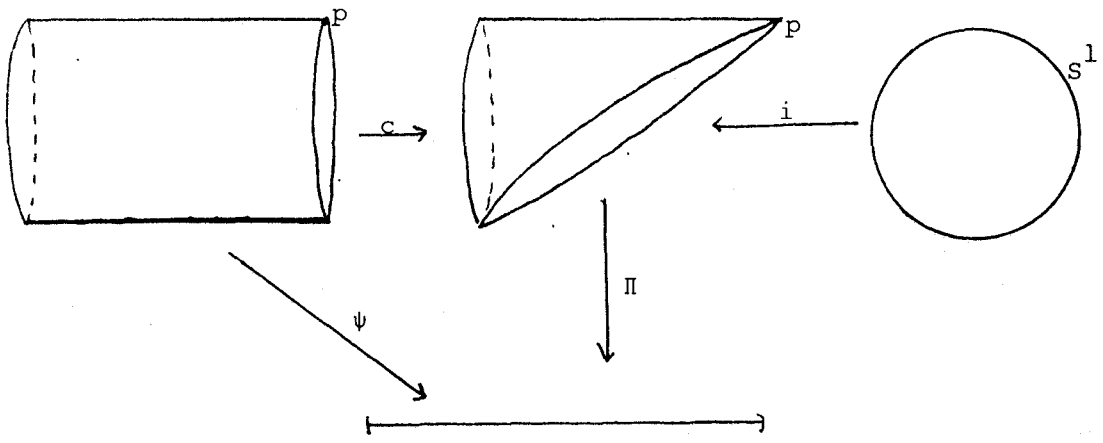
Así sólo nos queda por ver que se pueden elevar homotopías entre  $(n,m)$ -bolas siendo  $n \geq 2$ . Pero en este caso, si  $f: I^n - P \rightarrow X$  es una aplicación up, inducirá una extensión  $\tilde{f}: I^n \rightarrow Y$ , que ha de ser un representante de un elemento de  $\Pi_n(Y)$  que es nulo, siguiendo el mismo tipo de razonamiento que en el caso de  $(1,1)$ -bolas, podemos definir una elevación de  $\psi$ .

5 Nota. - Vamos a comprobar que el ejemplo anterior es un caso de homotopía up tal que su extensión a los cierres  $(Y, p, I)$  no es fibración.



Sea  $f: S^1 \rightarrow Y$  la inmersión natural sobre la circunferencia señalada en la figura. Y  $\psi: S^1 \times I \rightarrow I$  la resultante de identificar  $* \times I$  a un punto y componer con la proyección sobre  $I$ .

Evidentemente, se tiene el diagrama conmutativo



Pero  $\psi$  no se puede elevar ya que de existir una elevación  $\psi^{\sim}$ , la contraimagen por  $\psi^{\sim}$  del segmento de  $Y$  señalado como  $A$  en la figura sólo puede ser el punto de  $S^1 \times I$  marcado por  $p$ , cosa que va en contradicción con la conmutatividad del diagrama.